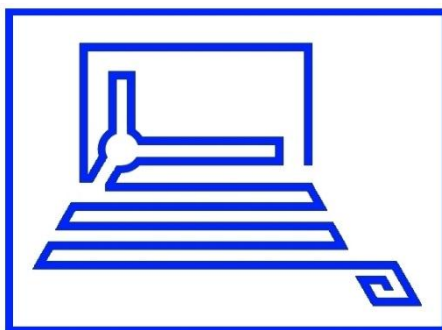


**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA INSTITUTI**



«CHIZMA GEOMETRIYA VA MUHANDISLIK GRAFIKASI» KAFEDRASI



O'.T. YADGOROV

**«CHIZMA GEOMETRIYA» FANIDAN
BAKALAVRLAR UCHUN
MA'RUZALAR MATNI**

BUXORO 2018

Taqrizchilar:

1. Buxoro DU "Tasviriy san'at va muhandislik grafikasi" dotsenti, p.f.n.Sobirov T.R.
2. Buxoro muhandislik-texnologiya instituti
"Neft - gazkimyo sanoat texnologiyasi" kafedrası
mudiri t.f.n., dotsent Bozorov G'. R.

Ma'ruzalar matni « Chizma geometriya va muhandislik grafikasi» kafedrasining 2018 yil «___» _____ № ___- sonli bayoni bilan o'quv jarayoniga tavsiya etilgan.

Ma'ruza matni Buxoro muhandislik-texnologiya instituti Uslubiy kengashining 2018 yil «___» _____ №___ sonli bayonnomasi bilan tasdiqlangan.

Ma'ruza matni "Chizma geometriya va muhandislik grafikasi" o'quv kursining oliy o'quv yurtlarida bakalavrlar tayyorlash uchun namunaviy dasturi talablari asosida yozilgan bo'lib, mazkur kursning «Chizma geometriy» qismi yoritilgan. Unda har bir ma'ruza nomi, takrorlash uchun savollar berilgan.

Ma'ruza matni «Kimyo texnologiya», «Muhandislik-texnika» va «Elektrotexnika va ishlab chiqarishda axborot-kommunikasiya texnologiyalari» fakultetlari talabalariga mo'ljallangan bo'lib, undan chizma geometriya fani o'qitiladigan barcha oliy o'quv yurtlarining talabalari ham foydalanishlari mumkin.

MUNDARIJA

	«Chizma geometriya» o'quv fani	
1-Mavzu	Kirish. Chizma va uning maqsadi. Proyeksiyalash usullari.	5
	Markaziy, parallel va ortogonal proyeksiyalashning xossalari.	
2-Mavzu	Monj chizmasida nuqtaning ortogonal proyeksiyalari	12
3-Mavzu	To'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari	22
4-Mavzu	Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlar	26
5-Mavzu	To'g'ri chiziqning izlari	31
6-Mavzu	Tekisliklar va ularning chizmada tasvirlanishi	37
7-Mavzu	Tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari	44
8-Mavzu	Tekisliklarning o'zaro kesishuvi	54
9-Mavzu	To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi	61
10-Mavzu	Orthogonal proyeksialarni qayta tuzish usullari	70
11-Mavzu	Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli	82
12-Mavzu	Ko'pyoqliklar	89
13-Mavzu	Egri chiziqlar	96
14-Mavzu	Sirtlarning hosil bo'lishi va ularning tekis chizmada berilishi	101
15-Mavzu	Sirtlarning tekislik va to'g'ri chiziq bilan kesishishi	105
16-Mavzu	Sirtlarning o'zaro kesishishi	114
17-Mavzu	Sirtlarning yoyilmalarini yasash	118
18-Mavzu	Aksonometrik proyeksiyalar	123
	Adabiyotlar ro'yxati	128

CHIZMA GEOMETRIYA" O'QUV FANI

Respublikamizda olib borilayotgan tub islohotlar oliy ta'lim sohasida ham izchil va uzluksiz o'zgarishlarni amalga oshirishni taqazo etmoqda. Malakali kadrlarni tayyorlash sohasida jahon andozalariga mos ravishda tub o'zgarishlar qilinishini talab etadi. Ma'lumki, mashinasozlik, arxitektura-qurilish korxonalari, firma va tashkilotlarining samarali ishlashlarini, undagi mavjud bo'lgan malakali, ilimli va ijodiy potentsialga ega bo'lgan ziyoli xodimlar ta'minlaydi.

O'qitishning maqsad va vazifalari

Fanning asosiy maqsadi quyidagilardan iborat:

1. Fazoviy geometrik ob'ektlarni tekislikda proektsiyalarini xosil qilish usullarini o'rganish;
2. Fazoviy geometrik ob'ektlarni berilgan tekis chizmasida (epyrada) konstruktiv, metrik va pozitsion masalalarni grafikaviy yasash yo'llari bilan ularni echish usullarini o'rganish;
3. Fazoviy geometrik ob'ektlarning berilgan tekis chizmasi bo'yicha ularning fazoviy ko'rinishini va vaziyatini tasavvur qilish hamda ularning yaqqol tasvirini chizish usullarini o'rganish;
4. Fazoviy geometrik ob'ektlarning grafikaviy va analitik modellari, hamda ularni biridan ikkinchisiga o'tish usullarini o'rganish;
5. Fazoviy geometrik ob'ektlarni tekis chizmasi va yaqqol tasvirini o'qiy olishi kerak;
6. Kelajakda mashina-mexanizmlarning detallarini va kompleks chizmalarini erkin ijodiy yondashgan holda chiza olishini o'zlashtirishdan iboratdir.

1 – MAVZU. KIRISH. CHIZMA VA UNING MAQSADI. PROYEKSIYALASH USULLARI. MARKAZIY, PARALLEL VA ORTOGONAL PROYEKSIYALASHNING XOSSALARI.

1.1. Kirish. Chizma va uning maqsadi. Chizma geometriya umumiy geometriyaning bir shoxobchasi bo'lib, u narsalarni tasvirlash usullari yordamida ularning shakllari, o'lchamlari va o'zaro joylashishlariga tegishli pozision va metrik masalalarni yechishni o'rganadi.

Chizma geometriya boshqa geometriyalardan o'zining asosiy usuli tasvirlash usuli bilan farq qiladi va u matematika fanlari bilan uzviy bog'liq bo'lib, umumtexnika fanlaridan hisoblanadi. U o'zining tasvirlash usullari yordamida o'quvchining fazoviy tasavvurini kengaytiradi. Tasvirlarni yasash va oldindan yasalgan tasvirlarni o'qiy bilish, hamda amaliyotdagi turli muhandislik masalalarini yechishga yordam beradi. Chizma geometriya qonun va qoidalari bilan nafaqat mavjud narsalarni, balki tasavvur qilinadigan narsalarni ham tasvirlashi mumkin.

Fazodagi shakllarning tekislikdagi chizmalari chizma geometriya usullari bilan ma'lum qonun-qoidalar asosida hosil qilinadi. Bu chizmalar orqali buyumning fazoviy shaklini chizish va o'lchamlarini aniqlash mumkin. Chizmalar yordamida geometrik shakllarga tegishli stereometrik masalalar yechiladi. Chizmalarsiz fan va texnika taraqqiyotini tasavvur qilib bo'lmaydi. Arxitektorlar va muhandislar o'z ijodiy fikrlarini faqat chizmalar yordamida to'liq bayon eta oladilar.

Chizmalar bo'yicha barcha muhandislik inshootlari quriladi, mashinalar, mashina qismlari, medisina asboblari va xokazo buyumlar ishlab chiqariladi.

Shakllarning bizga ma'lum bo'lgan barcha geometrik xossalarini ularning chizmalaridan olingan ma'lumotlardan ham aniqlasa bo'ladi. Shuning uchun ham buyumlarning chizmalarini ularning geometrik xususiyatlarini o'zida aks ettiruvchi tekis geometrik modellar deb atash mumkin.

Chizma geometriya fanida quyidagilar o'rganiladi:

1. Fazoviy shakllarning tekislikdagi tasvirlarini, ya'ni tekis modellari (chizmalari)ni yasash usullari;
2. Tekis chizmada geometrik masalalarni grafik yo'l bilan yechish usullari;
3. Shakllarning berilgan tekis chizmalari bo'yicha ularning fazoviy ko'rinishini va vaziyatini tasavvur qilish hamda ularning yaqqol tasvirlarini yasash usullari;
4. Geometrik shakllarning chizmalarini bajarish va o'qish orqali o'quvchining fazoviy tasavvurini rivojlantirish usullari.

Ma'lumki, geometrik shaklning xossalarini analitik va grafik usullarda tekshirish mumkin. Figuralarning grafik modeliga asosan ularning analitik usulda berilishini va aksincha, figuralarning analitik ko'rinishidan ularning chizmalarini yasash usullarini chizma geometriyada ham ko'rish mumkin.

Loyihalanadigan buyumlarni faqatgina grafik usulda tasvirlash hozirgi zamon ishlab chiqarishi talablarini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun chizmalarni bajarishda grafik usullar bilan birgalikda analitik usullardan ham foydalaniladi.

Keyingi yillarda buyumlarning chizmalarini kompyuter grafikasi vositalari yordamida tayyorlashda avtomatlashtirilgan loyihalash tizimlarining kirib kelishi chizma geometriya fanining rivojlanishtirishda yangicha mazmun kasb etmoqda.

1.2. Proyeksiyalash usullari. Muhim geometrik tushunchalardan biri – shakllarni tasvirlashdir. Geometrik tasvirlash bu biror Φ shaklning nuqtalari bilan ikkinchi Φ shaklning nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatishdir.

Chizma geometriyada uch o'lchamli R_3 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasini ikki o'lchamli R_2 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasiga aniq grafik qoidalar asosida mos keltirib, bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Shuning uchun chizma geometriyani fazoni tekislikda aks ettiruvchi grafik tasvirlash geometriyasi deb yuritish mumkin.

Geometrik fazoni nuqtalar to'plami deb qaralib, ularni proyeksiyalash yo'li bilan tekislikda aks ettiriladi. Masalan, fazoda biror S nuqta tanlab, shu nuqtani fazoning hamma nuqtalari bilan birlashtiriladi. Unda markazi S nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Shu fazoda biror P tekislikni kiritamiz. Unda S markazli chiziqlar dastasi bilan P tekislik kesishib, nuqtalar to'plamini hosil qiladi. Tekislikdagi bu nuqtalarni fazodagi nuqtalarning tasviri (proyeksiyasi) deb yuritiladi. Bunda fazodagi nuqtalari bilan P tekislik nuqtalar orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Agar S markazli chiziqlar dastasi fazosiga biror sirt kiritilsa, u holda bu sirtida fazodagi nuqtalarning tasviri hosil bo'ladi va fazo nuqtalari bilan sirt nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Chizma geometriyada fazodagi shakllar markaziy yoki parallel proyeksiyalash usullari bilan biror tekislikda tasvirlanadi. Bu tekislikni proyeksiyalar tekisligi deb yuritiladi. Shakllarning proyeksiyalar tekisligidagi tasvirini yasash esa ma'lum qonun va qoidalarga asoslanib bajariladi.

1.3. Markaziy proyeksiyalash usuli

Markaziy proyeksiyalash usuli geometrik shakllarni tekislikda proyeksiyalashning umumiy holdidir.

Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalar markazi S va proyeksiyalar tekisligi P beriladi (1.1-rasm). S va P sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtani S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Buning uchun S markaz bilan A nuqtani to'g'ri chiziq orqali birlashtirib, uni davom ettiramiz. Hosil bo'lgan SA proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligi P bilan A_p nuqtada kesishadi (ya'ni $A_p = SA \cap P$). Bunda A_p nuqta A nuqtaning S markaz bo'yicha proyeksiyalar tekisligidagi markaziy proyeksiyasi deb yuritiladi.

Fazodagi ikkinchi biror ixtiyoriy B nuqta ham A nuqta singari proyeksiyalanib, $SB \cap P = B_p$ nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi vaziyati aniqlanadi. Agar biror S nuqtani P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalovchi SS nur P tekislikka parallel bo'lsa ($SS \parallel P$), u holda bu nur P tekisligi bilan cheksiz uzoqlikda kesishib, $S_{p\infty}$

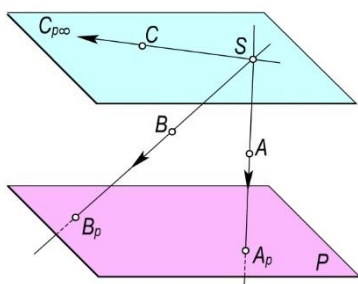
xosmas nuqtani hosil qiladi. $SA, SB, SS, \dots$ to'g'ri chiziqlar proyeksiyalovchi nurlar deb yuritiladi.

Fazodagi biror nuqtalar to'plamini proyeksiyalash markazi S orqali P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalanganda S markazli to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Bu dastani proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami fazodagi ma'lum bir nuqtalar to'plamining tasviri bo'ladi. Masalan, ABD uchburchakning markaziy proyeksiyasi $A_P B_P D_P$ uchburchak bo'ladi (1.2-rasm).

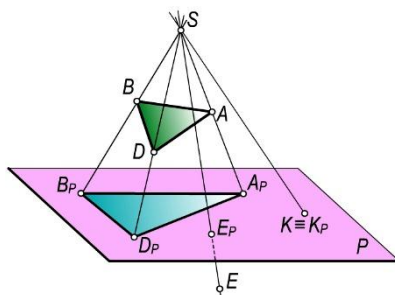
Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan E nuqtaning E_P proyeksiyasi $SE \cap P = E_P$ bilan aniqlanadi. Proyeksiyalar tekisligida yotgan K nuqtaning K_P markaziy proyeksiyasi nuqtaning o'zi bilan ustma-ust ($K \equiv K_P$) tushadi.

Markaziy proyeksiyalash konusli yoki qutbli proyeksiyalash, yoxud perspektiva deb ham yuritiladi. Masalan, markaziy proyeksiyalash apparatida biror m egri chiziq berilgan bo'lsin (1.3-rasm). m egri chiziqning nuqtalari to'plamini proyeksiyalar tekisligiga S markaz orqali proyeksiyalansa, uning proyeksiyasi m_P egri chiziq hosil bo'ladi. U holda S markazdan o'tuvchi proyeksiyalovchi nurlar to'plami konus sirtini hosil qiladi.

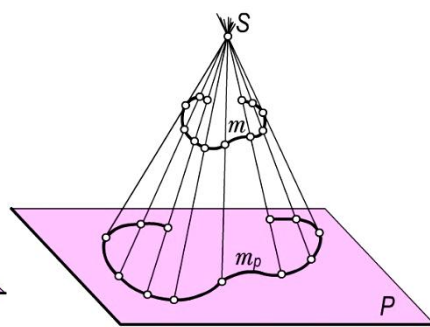
Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalash markazi va buyumning proyeksiyasiga qarab uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo'lmaydi.



1.1-rasm.



1.2-rasm.



1.3-rasm

1.3.1. Markaziy proyeksiyalashning xossalari

Markaziy proyeksiyalashda geometrik shakllar quyidagicha tasvirlanadi.

1-xossa. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2-xossa. SA nurda yotuvchi $A, A_1, A_2, A_3, \dots$ nuqtalarning markaziy proyeksiyalari A_P nuqta bilan ustma-ust tushadi (1.4- rasm).

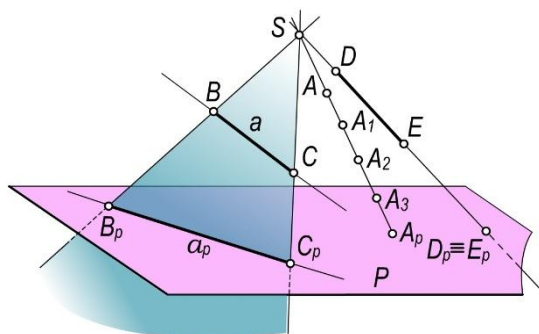
3-xossa. Proyeksiyalash markazidan o'tmaydigan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi kesma bo'ladi.

Biror a to'g'ri chiziq BS kesmasi orqali berilgan bo'lsin (1.4-rasm) BS kesma S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda SBS proyeksiyalovchi tekislik hosil bo'ladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik P bilan $B_P S_P$ kesma bo'yicha kesishadi. $BS \in a$ bo'lgani uchun $B_P S_P \in a_P$ bo'ladi.

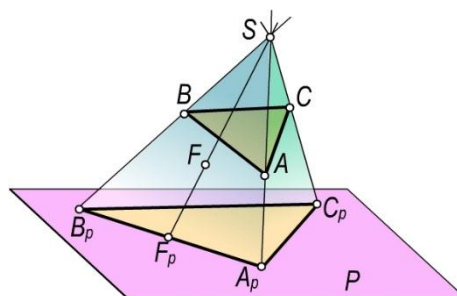
Proyeksiyalash markazi S dan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi. Masalan, DE to'g'ri chiziq kesmasining markaziy proyeksiyasi $D_p \equiv E_p$ nuqta bo'ladi (1.4-rasm).

4-xossa. S markazdan o'tmaydigan tekislikning markaziy proyeksiyasi tekislik bo'ladi. Masalan, ABS uchburchak tekisligining nuqtalar to'plamini S markaz bo'yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda (1.5-rasm) SAB proyeksiyalovchi piramida hosil bo'ladi. Bu piramidaning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan $A_p B_p S_p$ uchburchak hosil bo'ladi.

S markazdan o'tuvchi tekislik va unga tegishli geometrik shakllarning markaziy proyeksiyalari bitta to'g'ri chiziqqa proyeksiyalanadi. Masalan, SAB tekisligi va unga tegishli F nuqtaning proyeksiyasi $A_p F_p B_p$ kesmada bo'ladi (1.5-shakl).



1.4-rasm.



1.5-rasm

5-xossa. Agar biror tekis shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, uning proyeksiyasi o'ziga o'xshash shakl bo'ladi.

6-xossa. S proyeksiyalash markazidan o'tuvchi va proyeksiyalar tekisligi P ga parallel bo'lgan nurlar ustidagi nuqtalarning markaziy proyeksiyasi P ning xosmas chizig'i ustida bo'ladi.

Markaziy proyeksiyalashda S markaz, proyeksiyalar tekisligi P va proyeksiyalanuvchi shaklning o'zaro vaziyatlariga ko'ra quyidagi xossalarni keltirish mumkin.

7-xossa. Proyeksiyalanuvchi shaklning proyeksiyalar markazi bilan proyeksiyalar tekisligiga nisbatan joylashuviga qarab uning proyeksiyasi o'ziga nisbatan katta yoki kichik bo'lishi mumkin.

1.4. Parallel proyeksiyalash usuli

Markaziy proyeksiyalashdagi S markazni biror yo'nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, u holda $SA, SB, \dots$ proyeksiyalovchi nurlar o'zaro parallel bo'ladi (1.6-rasm). Bunday proyeksiyalash parallel proyeksiyalash deb yuritiladi. Demak, parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin.

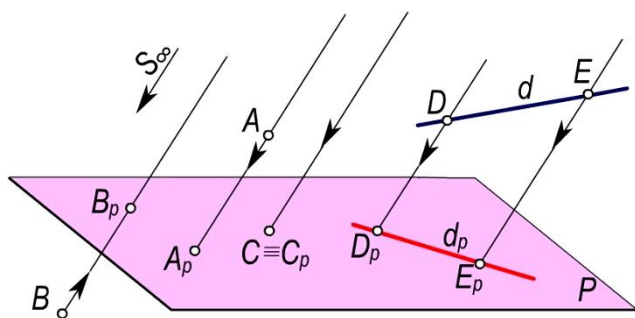
Parallel proyeksiyalashda proyeksiyalar tekisligi P va proyeksiyalash yo'nalishi beriladi. P va S sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin (1.6-rasm). Bu

nuqtaning proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan s yoʻnalishga parallel qilib nur oʻtkaziladi. Bu nurning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishgan nuqtasi A_p boʻladi. A_p nuqtani fazodagi A nuqtaning s yoʻnalish boʻyicha P dagi parallel proyeksiyasi deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan fazodagi ixtiyoriy biror B nuqtaning s yoʻnalish boʻyicha parallel proyeksiyasi B_p boʻladi. Bunda B va A nuqtalarning proyeksiyalovchi nurlari oʻzaro parallel boʻlib, faqat ularning yoʻnalishlari qarama-qarshidir. AA_p , BB_p toʻgʻri chiziqlar proyeksiyalovchi nurlar deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligi P ga tegishli S nuqtaning proyeksiyasi shu nuqtaning oʻzida boʻladi. Fazodagi ixtiyoriy d toʻgʻri chiziqni proyeksiyalar tekisligi P ga s yoʻnalish boʻyicha proyeksiyalash uchun shu toʻgʻri chiziq ustidagi istalgan ikki D va E nuqtalar proyeksiyalari yasalsa kifoyadir (1.6-rasm). Bunda d toʻgʻri chiziq nuqtalari orqali oʻtuvchi parallel nurlar toʻplami proyeksiyalovchi tekislikni hosil qiladi.

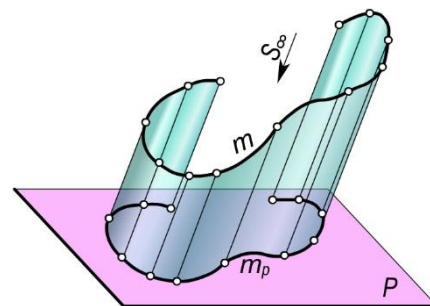
Parallel proyeksiyalashda s proyeksiyalash yoʻnalishning berilishi shartdir. Chunki s proyeksiyalash yoʻnalishi berilmagan holda ixtiyoriy A nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi proyeksiyasini cheksiz koʻp hosil qilish mumkin.

Buyumning birgina parallel proyeksiyasi uning fazodagi koʻrinishi va uning oʻlchamlari haqida toʻliq maʼlumot bera olmaydi. Buning uchun qoʻshimcha shartlar berilishi lozim.

Parallel proyeksiyalashni silindrik proyeksiyalash deb ham yuritiladi. Masalan, biror m egri chiziq berilgan boʻlsin (1.7-rasm). Bu egri chiziq nuqtalaridan oʻtuvchi s proyeksiyalash yoʻnalishiga parallel boʻlgan proyeksiyalovchi nurlar toʻplami silindrik sirt hosil qiladi. Bu silindrik sirt proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishib, m_p egri chiziqni hosil qiladi.



1.6-rasm .



1.7-shakl

Parallel proyeksiyalash ikki xil boʻladi:

- Qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash. Bunda S proyeksiyalash yoʻnalishi P proyeksiyalar tekisligi bilan oʻtkir yoki oʻtmas burchak tashkil qiladi.
- Toʻgʻri burchakli parallel proyeksiyalash. Bunda proyeksiyalash yoʻnalishi S proyeksiyalar tekisligi P ga perpendikulyar boʻladi.

1.4.1. Parallel proyeksiyalashning xossalari

Geometrik shakllarni parallel proyeksiyalashning quyidagi xossalari mavjud:

1-xossa. Nuqtaning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2-xossa. Proyeksiyalovchi nurda yotuvchi barcha nuqtalarning proyeksiyalari bitta nuqtada bo'ladi.

3-xossa. Proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlarning proyeksiyasi to'g'ri chiziq bo'ladi. Masalan, 1.8-rasmda s proyeksiya yo'nalishiga parallel bo'lmagan AB to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligi P ga parallel proyeksiyalangan. Bunda AB kesma nuqtalaridan o'tuvchi nurlar proyeksiyalovchi Q tekislikni hosil qiladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik bilan P proyeksiyalar tekisligi A_pB_p kesma bo'yicha kesishadi.

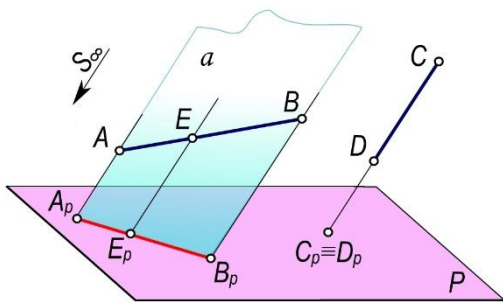
Proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi. 1.8-rasmda SD to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiya yo'nalishi s ga parallel. Uning P dagi proyeksiyasi $S_p \equiv D_p$ nuqta bo'ladi.

4-xossa. AB to'g'ri chiziq kesmasiga tegishli E nuqtaning parallel proyeksiyasi E_p shu to'g'ri chiziq proyeksiyasi A_pB_p kesmaning ustida bo'ladi (1.8-rasm).

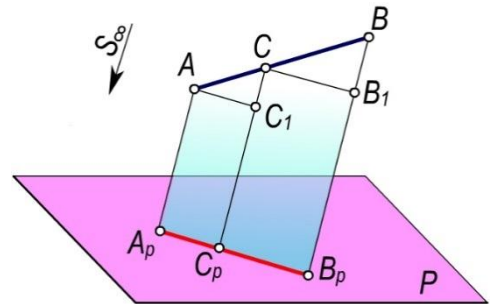
5-xossa. Agar nuqta to'g'ri chiziq kesmasini biror nisbatda bo'lsa, bu nuqtaning proyeksiyasi ham kesma proyeksiyasini shunday nisbatda bo'ladi.

Biror S nuqta AB kesmani $AS:SB=r:q$ nisbatda bo'lsa, unda S_p nuqta A_pB_p kesmani ham $A_pS_p:S_pB_p=r:q$ nisbatda bo'ladi (1.9-rasm).

AB to'g'ri chiziq kesmasini s yo'nalish bo'yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi tekislik bilan proyeksiyalar tekisligi P kesishib, A_pB_p kesmani hosil qiladi. Unda 4-xossaga asosan $S \in AB$ bo'lgani uchun $S_p \in A_pB_p$ bo'ladi.



1.8-rasm.



1.9-rasm

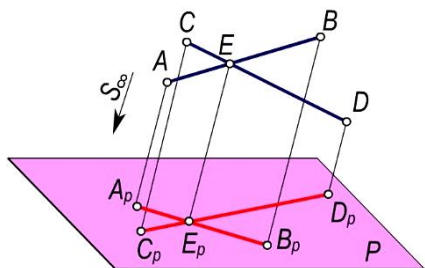
AB kesmaning proyeksiyalovchi tekislikdagi A va S nuqtalaridan $AS_1 \parallel A_pB_p$ va $SB_1 \parallel A_pB_p$ kesmalarni o'tkazamiz. Unda hosil bo'lgan ASS_1 va SBB_1 uchburchaklar o'zaro o'xshash bo'ladilar. Bu uchburchaklarning o'xshashligidan $AS:AS_1=SB:SB_1$ yoki $AS:SB=AS_1:SB_1$ bo'ladi. $AS_1=A_pS_p$ va $SB_1=S_pB_p$ bo'lgani uchun $AS:SB=A_pS_p:S_pB_p=r:q$ bo'ladi.

6-xossa. To'g'ri chiziqlarning kesishuv nuqtasining proyeksiyasi ularning proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo'ladi. Ya'ni $AB \cap SD = E$ bo'lsa, $A_p B_p \cap S_p D_p = E_p$ bo'ladi (1.10-rasm).

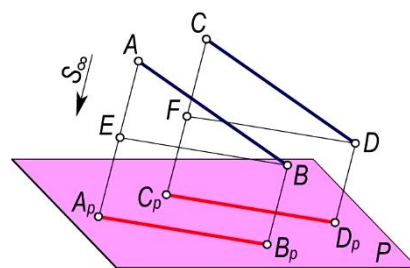
Proyeksiyalash yo'nalishi bo'yicha AB va SD kesmalarining $A_p B_p$ va $S_p D_p$ proyeksiyalarini proyeksiyalar tekisligi P dagi proyeksiyalarni yasaymiz. Kesmalarni proyeksiyalovchi tekisliklar o'zaro EE_p to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi, bunda $EE_p \parallel S$ bo'lib, E nuqtani proyeksiyalovchi nuri bo'ladi. AB va SD kesmalarining kesishuvidan hosil bo'lgan E nuqtaning proyeksiyalar tekisligi P dagi proyeksiyasi E_p bo'ladi. 3-xossaga asosan $E \in AB$ va $E \in SD$ bo'lgani uchun $E_p \in A_p B_p$ va $E_p \in S_p D_p$ bo'lishi shart. Demak, E_p nuqta $A_p B_p$ va $S_p D_p$ kesmalar uchun umumiy nuqtadir.

7-xossa. Parallel to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi proyeksiyalari ham parallel bo'ladi. Agar $AB \parallel SD$ bo'lsa, $A_p B_p \parallel S_p D_p$ bo'ladi. 1.11-rasmda s yo'nalish bo'yicha AB va SD to'g'ri chiziq kesmalarining proyeksiyalar tekisligidagi $A_p B_p$ va $S_p D_p$ proyeksiyalari yasalgan. Hosil bo'lgan AB va SD to'g'ri chiziq kesmalarining proyeksiyalovchi tekisliklari proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishganda $A_p B_p \parallel S_p D_p$ kesmalar hosil bo'ladi.

8-xossa. Parallel to'g'ri chiziq kesmalarining nisbati bu kesmalar proyeksiyalarining nisbatiga teng bo'ladi. Ya'ni $AB \parallel SD$ bo'lib, $AB:SD=q$ bo'lsa, $A_p B_p:S_p D_p=q$ bo'ladi (1.11-rasm). Bunda 3-xossaga asosan $A_p B_p \parallel S_p D_p$ xosil bo'ladi. AB va SD to'g'ri chiziq kesmalarining proyeksiyalovchi tekisliklarida $AE(AE \parallel A_p B_p)$ va $SF(SF \parallel S_p D_p)$ kesmalarni o'tkazamiz. U holda ABE va SDF uchburchaklarning parallelligi va o'xshashligidan $AB:AE=SD:SF$ yoki $AB:SD=AE:SF=q$ kelib chiqadi. Demak, $AB:SD=A_p B_p:S_p D_p=q$ bo'ladi.



1.10-rasm



1.11-rasm

Nazorat savollari

1. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi qanday yasaladi?
2. Qanday holda to'g'ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
3. Markaziy proyeksiyalashda nimalar berilgan bo'ladi?
4. Parallel proyeksiyalash usuli qanday bajariladi?
5. Parallel proyeksiyalashda nimalar berilgan bo'ladi?

2 – MAVZU. MONJ CHIZMASIDA NUQTANING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

Biror buyumning tasviriga qarab uni o'qilishini ikkita o'zaro parallel bo'lmagan proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash orqali ta'minlash mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklarini o'zaro perpendikulyar vaziyatda tanlab olinishi buyum tasvirini o'qilishini osonlashtiradi.

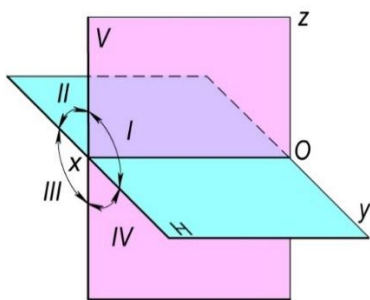
O'zaro perpendikulyar bo'lgan ikki tekislik bir–biri bilan kesishib fazoni to'rt qismga – kvadrantlarga (choraklarga) bo'ladi. Fazoda gorizontal vaziyatda joylashgan (2.1–rasm) **H** tekislik *gorizontal proyeksiyalar tekisligi*, vertikal joylashgan **V** tekislik *frontal proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. **H** va **V** proyeksiyalar tekisliklari o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning kesishgan **Ox** chizig'i *proyeksiyalar o'qi* deyiladi. Bunda **H** va **V** tekisliklar *proyeksiyalar sistemasini* hosil qiladi.

Proyeksiyalar tekisliklari sistemasining bunday fazoviy modelida turli geometrik shakllar, shuningdek, detallar, mashina va inshootlarni joylashtirib, so'ngra ularning chizmalarini yasash katta noqulayliklar tug'diradi va zaruriyati ham bo'lmaydi.

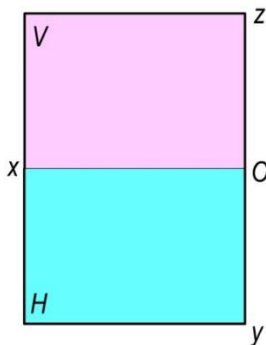
Buyumlarning chizmalarini bajarishda bu tekisliklarning bir tekislikka joylashtirilgan (jipslashtirilgan) tekis tasvirlaridan foydalaniladi. Shu maqsadda **V** proyeksiyalar tekisligi qo'zg'almasdan, **H** gorizontal proyeksiyalar tekisligini **Ox** proyeksiyalar o'qi atrofida pastga 90° ga aylantirib, **V** tekislik bilan ustma–ust tushirib jipslashtiriladi (2.2–rasm). Natijada, **H** va **V** tekisliklarda bajarilgan barcha yasashlar asosiy chizma tekisligi sifatida qabul qilingan **V** frontal proyeksiyalar tekisligiga joylashtiriladi. Bunda nuqta yoki geometrik shaklning bitta tekislikda joylashtirilgan ikki – gorizontal va frontal tasvirlari –*tekis chizma* yoki *kompleks chizma* – *epyr* hosil qilinadi. Bu usulni birinchi marta fransuz geometri Gaspar Monj (1746-1818) tavsiya etgan. Shuning uchun bu tekis chizmani Monj chizmasi deb ham yuritiladi.

Amalda geometrik shakllarning to'g'ri burchakli proyeksiyalarini yasashda asosan proyeksiyalar o'qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarining konturini tasvirlash shart emas (2.3–rasm).

Ma'lumki, barcha buyumlar nuqtalar to'plamidan tashkil topgan. Shuning uchun proyeksiyalashni nuqtadan boshlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Biror nuqta yoki geometrik shakl fazoning turli choraklarida joylashuvi mumkin.



2.1-rasm



2.2-rasm



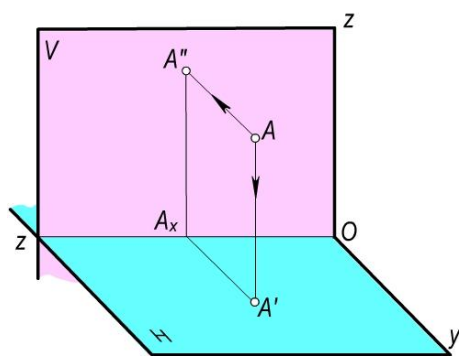
2.3-rasm

2.1. Nuqtaning choraklarda joylashuvi

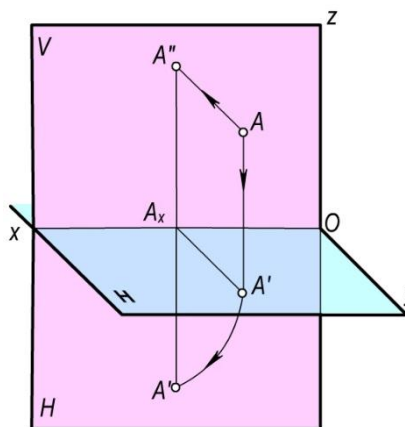
2.1.1. Birinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi A nuqta birinchi chorakda joylashgan bo'lsin (2.4–rasm). Uning H va V tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan mazkur tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning bu tekisliklar bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A' bo'lsin. A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A'' ni aniqlash uchun A' dan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz va A_x nuqtani aniqlaymiz. V tekislikka tushirilgan perpendikulyarlar bilan Ox o'qidagi A_x nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyar bilan kesishtirib A'' nuqtasini topamiz.

A nuqtadan H va V tekisliklarga o'tkazilgan perpendikulyarlarning A' va A'' asoslari A nuqtaning *to'g'ri burchakli proyeksiyalari* deb yuritiladi. Bu yerda A' – A nuqtaning *gorizontal proyeksiyasi*, A'' – uning *frontal proyeksiyasi* deb ataladi va $A(A', A'')$ ko'rinishda yoziladi. Shakldagi AA' va AA'' chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* yoki *proyeksiyalovchi chiziqlar* deyiladi.

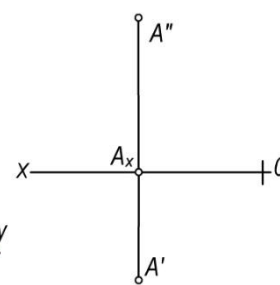
A nuqtaning chizmasini tuzish uchun tekisliklarning fazoviy modelini yuqorida qayd qilingan qoidaga muvofiq V tekislikka jiplashtiramiz (2.5–rasm). Bunda A nuqtaning A'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Gorizontal A' proyeksiyasi H tekislik bilan Ox o'qi atrofida pastga 90° ga buriladi va V tekislikning davomida jiplashadi. Natijada, A nuqtaning A' gorizontal hamda A'' frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta chiziqda joylashadi (2.6–rasm). Bunda $A'A'' \perp Ox$ bo'lib, uni proyeksiyalarni bog'lovchi chiziq deb yuritiladi.



2.4-rasm



2.5-rasm

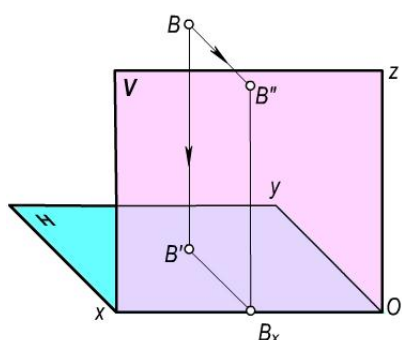


2.6-rasm

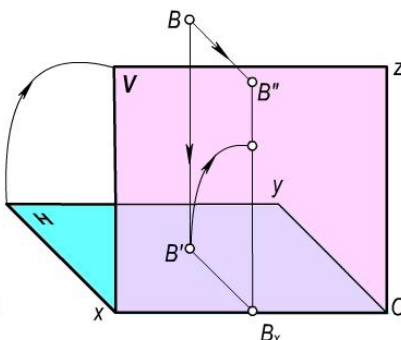
2.1.2. Ikkinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror B nuqta II-chorakda joylashgan bo'lsin (2.7–rasm). Uning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H va V tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B' va B'' asoslari B nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni 2.8–rasmida ko'rsatilganidek V tekislikka jiplashtiramiz.

Bunda **B** nuqtaning **B''** frontal proyeksiyasining vaziyati o'zgarmay qoladi. Uning **H** tekislikdagi **B'** gorizontal proyeksiyasi esa **V** tekislikning yuqori qismi bilan jipslashadi va **Ox** o'qiga perpendikulyar bo'lgan **B''B_x** proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda bo'ladi (2.9–rasm).

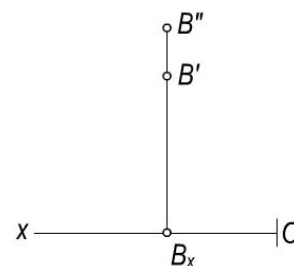
Fazoning **II**-choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari **Ox** o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda va **Ox** o'qining yuqorisida joylashadi.



2.7-rasm

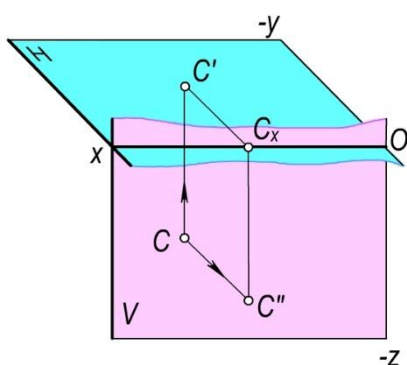


2.8-rasm

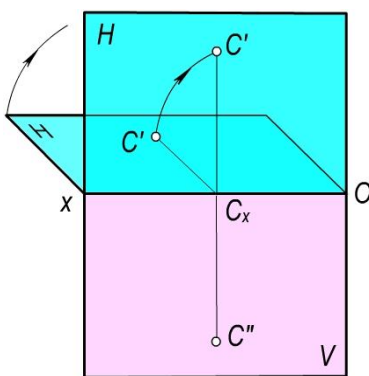


2.9-rasm

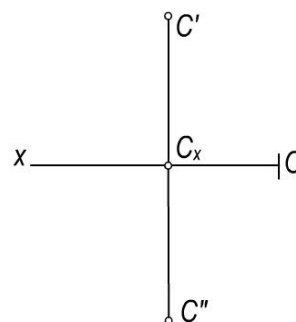
2.1.3. Uchinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror **C** nuqta **III**-chorakda joylashgan bo'lsin (2.10–rasm). Bu nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalarini yasash uchun **H** va **V** tekisliklarga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning **H** va **V** tekisliklardagi **C'** va **C''** asoslari **C** nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun **H** tekislikni **V** tekislikning davomida jipslashtiramiz (2.11–rasm). Bunda **C** nuqtaning **C'** frontal proyeksiyasi **V** tekislikda bo'lgani uchun o'z vaziyatini o'zgartirmaydi. Uning **C'** gorizontal proyeksiyasi esa **H** tekislik bilan birga **V** tekislikning yuqori qismida jipslashadi va 2.12–rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.



2.10-rasm



2.11-rasm



2.12-rasm

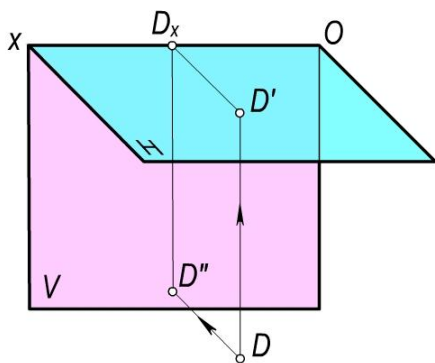
Fazoning **III**-choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi **Ox** o'qining yuqorisida, frontal proyeksiyasi esa uning ostida, **Ox** o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda yotadi.

2.1.4. To‘rtinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror D nuqta fazoda IV chorakda joylashgan bo‘lsin (2.13–rasm). Uning H va V tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun D nuqtadan bu tekisliklarga perpendikulyar o‘tkazamiz.

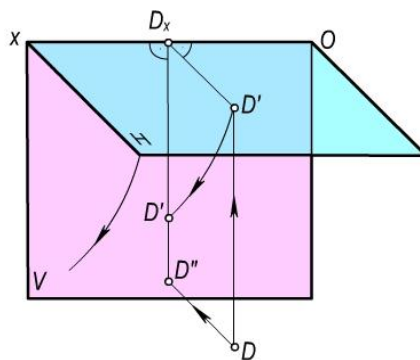
Perpendikulyarlarning H va V tekisliklar bilan kesishgan D' va D'' asoslari D nuqtaning gorizontaal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi.

D nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni Ox o‘qi atrofida pastga 90° ga aylantiramiz va V tekislik davomi bilan jipslashtiramiz (2.14–rasm). Bunda D nuqtaning D'' frontal proyeksiyasining vaziyati o‘zgarmaydi. Gorizontaal D' proyeksiyasi esa H tekislik bilan harakatlanib, Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan, D'' nuqta bilan bitta proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda yotadi (2.15–rasm).

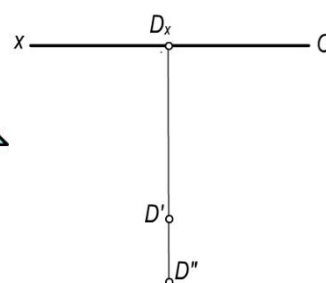
Fazodaning IV choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontaal va frontal proyeksiyalari Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bitta proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda va Ox o‘qining ostida bo‘ladi.



2.13-rasm



2.14-rasm



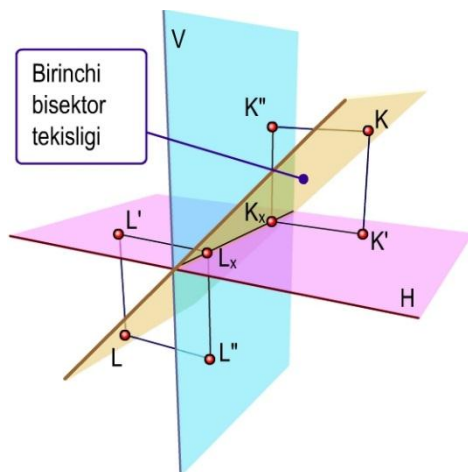
2.15-rasm

2.1.5. Bissektor tekisliklarda joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoning birinchi va uchinchi choraklarini teng ikkiga bo‘luvchi tekislik *birinchi bissektor tekisligi*, shuningdek, ikkinchi va to‘rtinchi choraklarini teng ikkiga bo‘luvchi tekislik *ikkinchi bissektor tekisligi* deb ataladi.

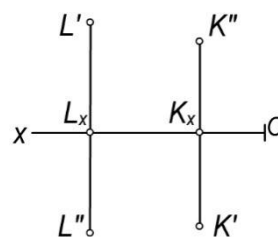
Agar fazodagi nuqtalar proyeksiyalar tekisliklaridan teng uzoqlikda joylashlashgan bo‘lsa, bunday nuqtalar bissektor tekisliklarga tegishli nuqtalar bo‘ladi. 2.16–rasmda birinchi bissektor tekislikda joylashgan K va L nuqtalarning, 2.17–rasmda esa ikkinchi bissektor tekislikda joylashgan E va F nuqtalarning fazodagi vaziyati va epyurlari ko‘rsatilgan. Chizmada birinchi bissektor tekislikda joylashgan K va L nuqtalarning proyeksiyalari (K', K'' va L', L'') Ox o‘qidan baravar uzoqlikda joylashadi (2.18–rasm). Ikkinchi bissektor tekislikda joylashgan E va F nuqtalarning proyeksiyalari (E', E'' va F', F'') chizmada ustma–ust tushadi (2.19–rasm).

2.1.6. Proyeksiyalar tekisligida va koordinatlar o‘qida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoda biror nuqta proyeksiyalar tekisligida yoki proyeksiyalar o‘qida joylashishi mumkin. Masalan, $A \in H$ bo‘lsin (2.20–rasm). Bunda A nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi A' nuqtaning o‘ziga ($A \equiv A'$), frontal

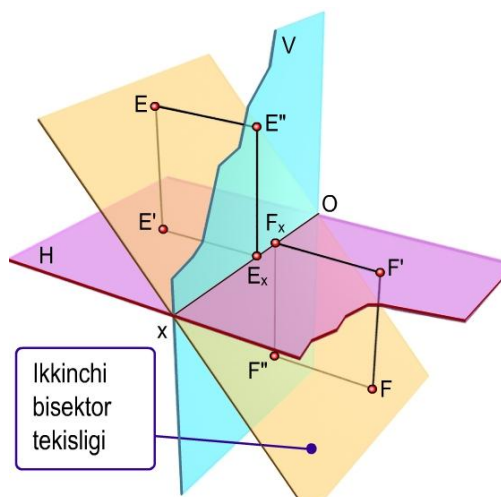
proyeksiyasi A'' esa Ox o'qiga proyeksiyalanadi (2.21–rasm). Shuningdek, nuqta Ox proyeksiyalar o'qida ham joylashishi mumkin. Masalan, $B \in Ox$ bo'lsa, bu nuqtaning B' gorizont va B'' frontal proyeksiyalari shu B nuqtaning o'ziga proyeksiyalanadi, ya'ni $B' \equiv B'' \equiv B$ bo'ladi (2.21-rasm).



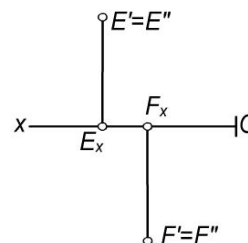
2.16-rasm



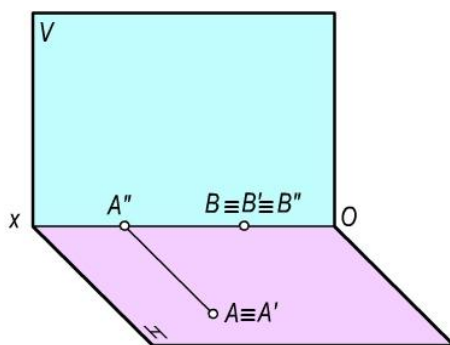
2.17-rasm



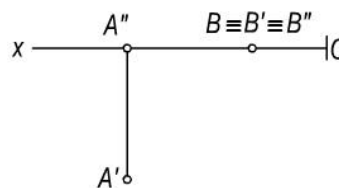
2.18-rasm



2.19-rasm



2.20-rasm



2.21-rasm

Turli choraklarda joylashgan nuqtalarni H va V proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va ularning chizmalarini tuzishdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

1. Nuqtaning fazodagi vaziyatini uning ikki ortogonal proyeksiyasi to'la aniqlaydi. Haqiqatan ham, A nuqtaning berilgan A' gorizontal va A'' frontal proyeksiyalaridan perpendikulyar chiqarilsa, ularning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlaydi (2.4–rasm).
2. Fazodagi har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashadi. Masalan, A nuqtaning (2.6–rasm) chizmasini yasash uchun H tekislik V tekislik bilan jipslashtirilganda $A'A_x \perp Ox$ va $A''A_x \perp Ox$ bo'lgani uchun bu nuqtaning A' va A'' proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir to'g'ri chiziqda bo'lib qoladi.
3. Fazodagi har qanday nuqtaning H va V proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqliklarini nuqta gorizontal va frontal proyeksiyalarining Ox o'qigacha bo'lgan masofalari aniqlaydi. Haqiqatan, A nuqtadan H tekislikkacha bo'lgan masofa (2.4–rasm) $AA' = A''A_x$ va V tekislikkacha bo'lgan masofa $AA'' = A'A_x$. Demak, A nuqtaning H tekislikkacha bo'lgan masofasini $A''A_x$ va V tekislikkacha bo'lgan masofani $A'A_x$ masofalar aniqlaydi.

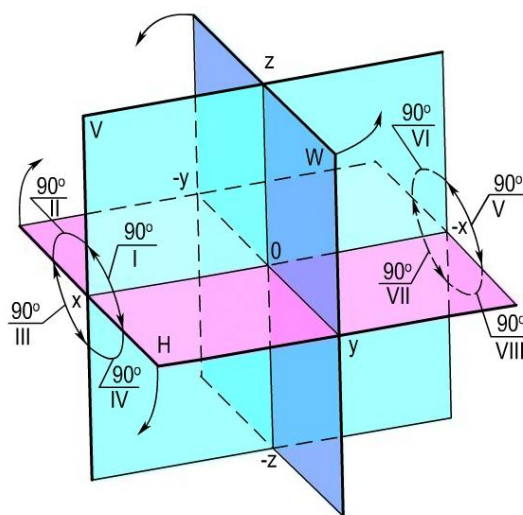
2.2. Nuqtaning oktantlarda joylashuvi

O'zaro perpendikulyar bo'lgan uchta proyeksiyalar tekisligi kesishib, fazoni 8 qismga – oktantlarga bo'ladi (2.22–rasm). Ma'lumki, H tekislik – gorizontal proyeksiyalar tekisligi, V – frontal proyeksiyalar tekisligi deyiladi. Tasvirdagi W tekislik *profil proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. Uchta proyeksiyalar tekisliklar o'zaro perpendikulyar joylashgan bo'ladilar, ya'ni $H \perp V \perp W$. Buni H , V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi deb yuritiladi.

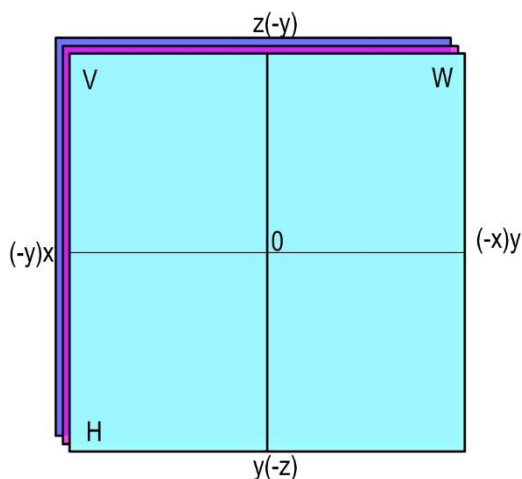
Tekisliklarning o'zaro kesishishi natijasida hosil bo'lgan to'g'ri chiziqlar proyeksiyalar yoki koordinata o'qlari deyiladi va Ox , Oy , Oz harflari bilan belgilanadi. Proyeksiyalar o'qlarini tashkil qiluvchi Ox – *abssissalar o'qi*, Oy – *ordinatalar o'qi* va Oz – *applikatalar o'qi* deb ataladi. Buni H , V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi deb yuritiladi.

Uchta proyeksiyalar tekisligining o'zaro kesishish nuqtasi O koordinatlar boshi deyiladi.

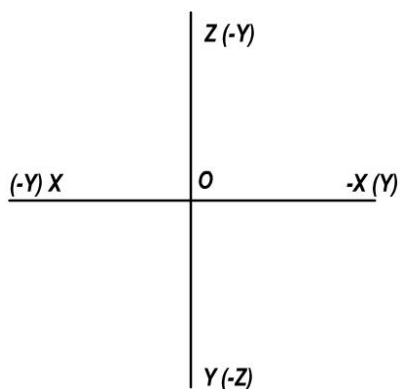
Bu sistemada musbat miqdor Ox o'qiga (2.22–rasm) koordinatlar boshi O dan chapga, Oy o'qiga kuzatuvchi tomonga va Oz o'qiga yuqoriga qaratib qo'yiladi. Bu o'qlarning qarama–qarshi tomonlari manfiy miqdorlar yo'nalishi bo'lib hisoblanadi.



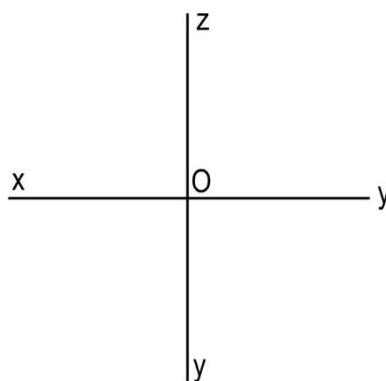
2.22-rasm.



2.23-rasm



2.24-rasm



2.25-rasm

Proyeksiyalar tekisliklarida geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalarini yasashni osonlashtirish uchun, odatda, bu tekisliklarning bir tekislikka jipslashtirilgan tekis tasviridan foydalaniladi. Shu maqsadda **H** tekislikni **Ox** o'qi atrofida pastga 90° ga va **W** tekislikni **Oz** o'qi atrofida o'ngga 90° ga aylantirib, **V** tekislikka jipslashtiriladi (2.23–rasm). Bunda **Ox** va **Oz** proyeksiyalar o'qlarining vaziyati o'zgarmay qoladi (2.24–rasm). **H** tekislik **V** tekislikka jipslashtirilganda **Oy** o'qining musbat yo'nalishi **Oz** o'qining manfiy yo'nalishi bilan, **Oy** o'qining manfiy yo'nalishi esa **Oz** o'qining musbat yo'nalishi ustma–ust tushadi. Shuningdek, profil proyeksiyalar tekisligi **W** frontal proyeksiyalar tekisligi **V** bilan jipslashtirilganda **Oy** o'qining musbat yo'nalishi **Ox** o'qining manfiy yo'nalishi bilan, uning manfiy yo'nalishi **Ox** o'qining musbat yo'nalishi bilan ustma–ust joylashadi.

Geometrik shaklning ortogonal proyeksiyalari yasashda asosan **H**, **V** va **W** proyeksiyalar tekisliklari sistemasining koordinatalar o'qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarini tasvirlash shart emas (2.24–rasm). Shuningdek, tasvirni soddalashtirish uchun koordinata o'qlarining manfiy

yoʻnalishlarini chizmada hamma vaqt ham koʻrsatilmaydi (2.25-rasm). Koordinata oʻqlarining manfiy yoʻnalishlari nuqtaning qaysi oktantga tegishligiga qarab belgilanadi.

Biror nuqta berilgan koordinatalariga asosan fazoning turli oktantlaridan birida joylashgan boʻlishi. Buni aniqlash uchun takror koordinata oʻqlarining yoʻnalishi (2.22-rasm) ishoralariga asosan quyidagi 1-jadvalni keltiramiz.

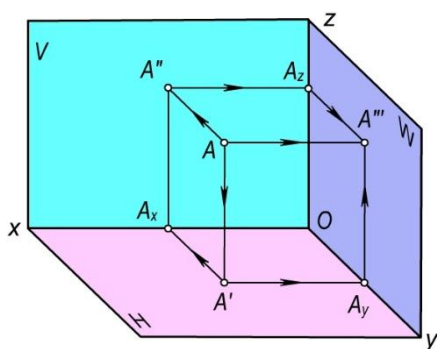
1-jadval

Oktantlar	Koordinatalar		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

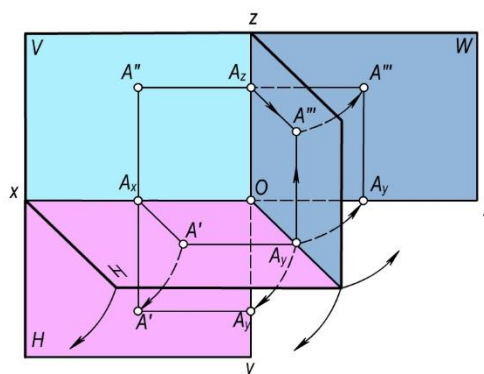
2.3. Nuqtaning H, V, W tekisliklarga va koordinata oʻqlariga tegishliligi.

Fazodaning I oktantida joylashgan A nuqta va oʻzaro perpendikulyar H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi berilgan (2.26,a-rasm). A nuqtaning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar oʻtkazamiz.

Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A' boʻlsin. Mazkur nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini aniqlash uchun A' dan Ox ga perpendikulyar oʻtkazamiz va bu oʻqda Ax ni topamiz. Soʻngra Ax dan Oy ga perpendikulyar qilib oʻtkazilgan chiziqning A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan A'' nuqtasini topamiz.



a)



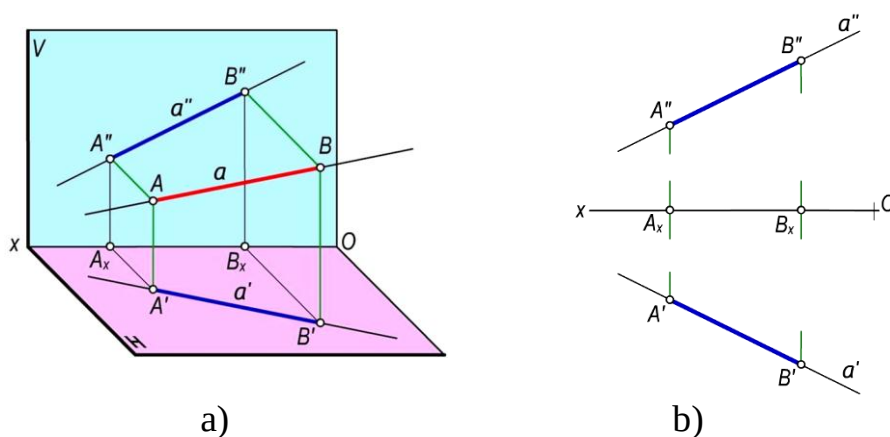
b)

2. Parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo'ladi?
3. Qanday holda to'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
4. «Ortogonal» so'zi nimani anglatadi?
5. To'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo'ladi?
6. Fazo kvadrantlari va choraklari nima?
7. Tekis yoki kompleks chizma nima?
8. Nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
9. Nuqtaning frontal va profil proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
10. Bissektor tekisliklari nima va ularga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday joylashadi?
11. Proyeksiyalar tekisliklariga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday tasvirlanadi?

3 – MAVZU. TO'G'RI CHIZIQNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI.

To'g'ri chiziq eng oddiy geometrik shakl hisoblanadi. Bir-biridan farqli ikki nuqta orqali faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Agar fazodagi bir-biridan farqli ikkita A va B nuqtalarni o'zaro tutashtirib, uni ikki qarama-qarshi tomonga cheksiz davom ettirilsa, a to'g'ri chiziq hosil bo'ladi (3.1-rasm).

To'g'ri chiziqning ikki nuqta bilan chegaralangan qismi shu *to'g'ri chiziq kesmasi* deyiladi.



3.1-rasm

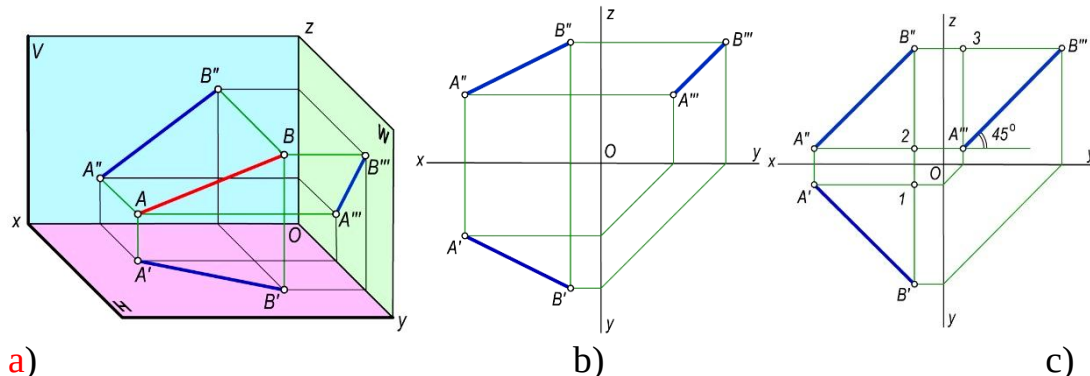
To'g'ri chiziqlar a , b , c kabi yozma harflar bilan belgilanadi. Agar to'g'ri chiziqlar chegaralangan bo'lsa, u holda AB , CD , EF ,... tarzida belgilanadi. To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklardagi proyeksiyalari holatini uning ikki ixtiyoriy nuqtasining proyeksiyalari aniqlaydi. Masalan, 3.1,a-rasmda berilgan a to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu chiziqqa tegishli ikki A va B nuqtalarning ortogonal A' , A'' va B' , B'' proyeksiyalari yasaladi. Bu ikki nuqtaning bir nomli proyeksiyalarini tutashtiruvchi a' va a'' chiziqlar fazoda berilgan a to'g'ri chiziqning gorizont va frontal proyeksiyalari bo'ladi. Shuningdek, AB kesma va uning $A'B'$ va $A''B''$ proyeksiyalari a to'g'ri chiziqning fazodagi vaziyatini va uning a' , a'' proyeksiyalarini aniqlaydi (3.1,b-rasm).

To'g'ri chiziqning gorizont va frontal proyeksiyalariga asosan uning profil proyeksiyasini ham yasash mumkin. Buning uchun uning yuqorida tanlab olingan A va B nuqtalarning profil proyeksiyalari yasaladi va ular o'zaro tutashtiriladi (3.2-rasm).

To'g'ri chiziq proyeksiyalari faqat uning kesmasi proyeksiyalari orqaligina emas, balki ixtiyoriy qismi bilan ham berilishi mumkin. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va ular proyeksiyalar o'qlariga nisbatan ixtiyoriy burchaklarni tashkil etadi. Bu burchaklar α , β , γ harflari bilan belgilanadi.

Bu α , β , γ burchaklar AB kesmaning H , V , W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklaridir, ya'ni $\alpha = AB \wedge H$, $\beta = AB \wedge V$, $\gamma = AB \wedge W$.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi. Uning haqiqiy uzunligini aniqlash keyingi paragraflarda ko'riladi.



3.2-rasm

3.1. Proyeksiya tekisliklari bilan bir xil burchak tashkil qilgan to'g'ri chiziqlar.

Agar biror to'g'ri chiziq fazoda H , V va W lar bilan bir xil burchak hosil qilib joylashgan bo'lsa, uning AB kesmasining uchala proyeksiyalari o'zaro teng, ya'ni $AB \wedge H = AB \wedge V = AB \wedge W$ bo'lsa, $A'B' = A''B'' = A'''B'''$ bo'ladi. Bunda $A'B' = B''A''$ teng yonli trapesiyadan $1B' = 2B'' = 3A'''$ va $1B' = 3B''$, demak $3A''' = 3B''$ bo'lgani uchun $\angle 3A''B'' = 45^\circ$ bo'ladi. Shu bilan birga $A'''B''' \parallel A''B''$ bo'lib, $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ bo'ladi.

3.2. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash

Umumiy vaziyatda joylashgan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o'lchamini aniqlash va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko'p uchraydi.

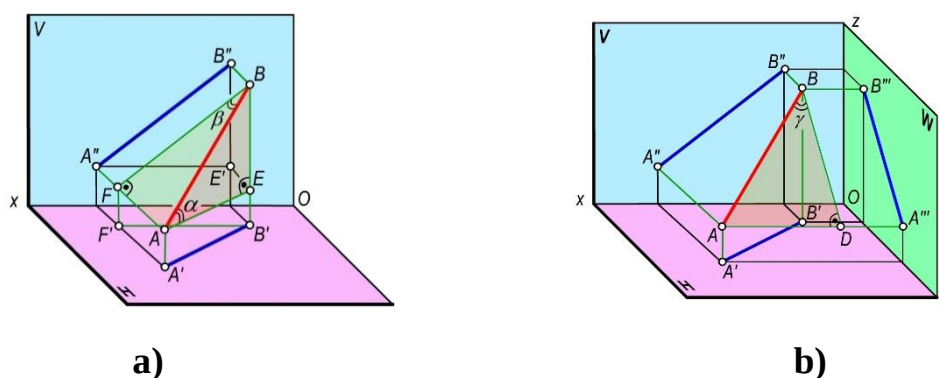
AB to'g'ri chiziq kesmasi hamda uning H , V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsin (3.3-a, rasm). Kesmaning A nuqtasidan $AE \parallel A'B'$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi va to'g'ri burchakli $\triangle ABE$ ni hosil qilinadi. Bunda $BE = BB' - AA'$, bu yerda $AA' = EB' \square \square$ bo'lgani uchun $BE = BB' - EB' = \Delta z$ bo'ladi.

To'g'ri burchakli ABE uchburchakning AB gipotenuzasi AE katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak AB kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

To'g'ri chiziq kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli ABF uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning BF kateti AB kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi AF kateti uning A va B uchlarining V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AF = AA'' - BB''$, bo'lib, $BB'' = FA''$ bo'lgani uchun $AF = AA'' - FA'' = \Delta y$ bo'ladi.

To'g'ri burchakli ABF ning AB gipotenuzasi BF katet bilan hosil qilgan β burchak AB kesmaning V tekislik hosil qilgan burchagi bo'ladi.

3.3-b, rasmda AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash ko'rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to'g'ri burchakli $DABF$ dan foydalanamiz. Bu uchburchakning bir kateti AB kesmasining profil $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi AD kateti A va B uchlarning W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AD=AA''-BB''$, bo'lib, $BB''=DA''$ bo'lgani uchun $AD=AA''-DA''=\Delta x$ bo'ladi.

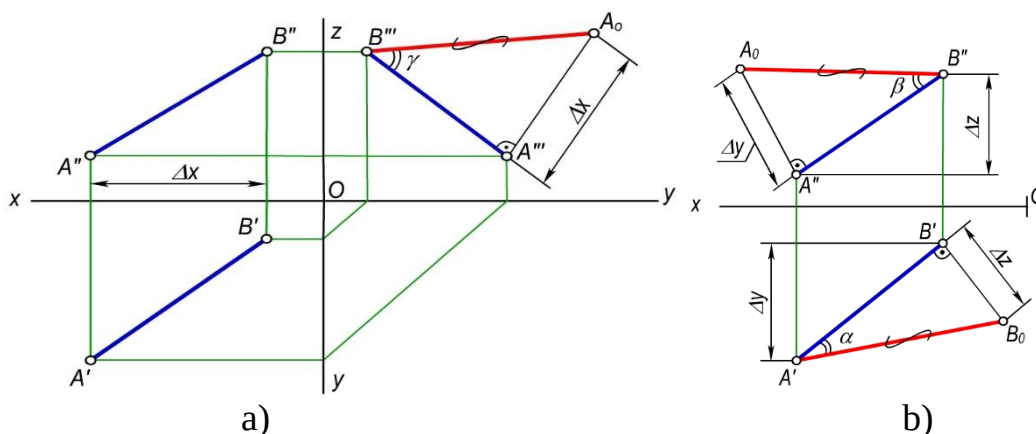


3.3-rasm

Chizmada kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali uning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash uchun yuqoridagi fazoviy model asosida to'g'ri burchakli uchburchaklar yasaladi. Shuning uchun bu usulni **to'g'ri burchakli uchburchak usuli** deb yuritiladi.

Masalan, AB kesmaning $A'B' \square A''B''$ va $A'''B'''$ proyeksiyalarga asosan uning (3.4-a, rasm) haqiqiy o'lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $A'B'B_0$ uchburchak yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizontaal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning A va B uchlarning applikatalari ayirmasi Δz ga teng bo'ladi. Bu uchburchakning $A'B_0$ gipotenuzasi AB kesmaning haqiqiy o'lchami, $A'B_0=AB$ bo'lib, $AB \wedge H = \angle B'A'B_0 = \alpha$ bo'ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $\triangle A''B''A_0$ ni yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa AB kesma uchlari ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan $B''A_0=AB$ bo'lib, $AB \wedge V = \angle A''B''A_0 = \beta$ bo'ladi.



3.4-rasm

AB kesmaning W tekislik bilan hosil etgan burchagini aniqlash uchun esa to'g'ri burchakli $\triangle A''B''A_0$ ni yasaymiz (3.4,b-rasm). Bu uchburchakning bir kateti kesmaning profil $A''B''$ proyeksiyasi, ikkinchi kateti kesma uchlarning W tekislikdan uzoqliklarning absissalar ayirmasi Δx bo'ladi. Hosil bo'lgan $B''A_0 = AB$ bo'lib, $AB \wedge W = \angle A''B''A_0 = \gamma$ teng bo'ladi.

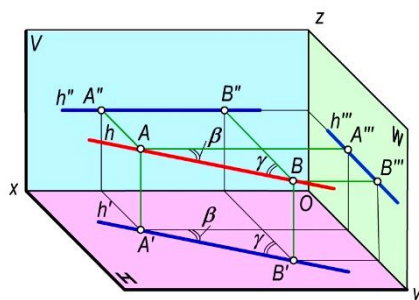
Nazorat savollar:

1. To'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday hosil bo'ladi?
2. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq nima?
3. Qanday xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarni bilasiz?
4. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
5. O'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo'ladi?
6. Kesishuvchi va ayqash to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bir-biridan qanday farqlanadi?
7. To'g'ri burchakning proyeksiyalanishi haqidagi teoremani tushuntirib bering.
8. Ko'rinishlikni aniqlashda konkurent nuqtalardan qanday foydalaniladi?

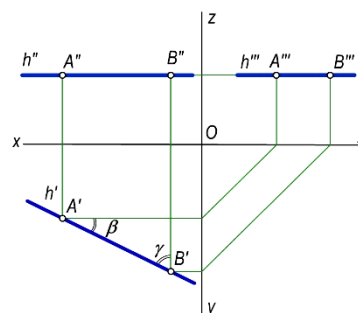
4 – MAB3Y. XUSUSIY VAZIYATDAGI TO‘G‘RI CHIZIQLAR.

4.1. Proyeksiyalar tekisligiga parallel to‘g‘ri chiziqlar

4.1.1. Gorizontal to‘g‘ri chiziq. Gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga parallel to‘g‘ri chiziq *gorizontal chiziq* (yoki *gorizontal*) deb ataladi (4.1-a,b rasm).



a)



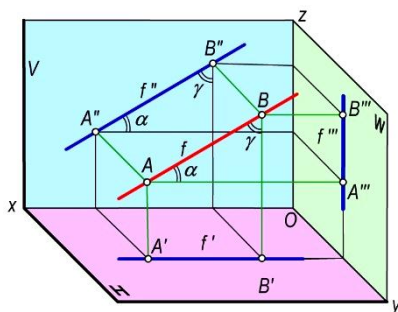
b)

4.1-rasm

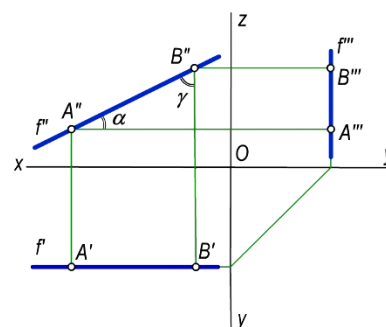
Gorizontalning barcha nuqtalari H tekislikdan baravar masofada ($AA' \square BB' \square$ bo‘lgani uchun chizmada uning h'' frontal proyeksiyasi Ox o‘qiga, h''' profil proyeksiyasi esa Oy o‘qiga parallel bo‘ladi. Gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo‘ladi. Bu chiziq kesmasining gorizontal proyeksiyasi o‘zining haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi β va γ burchaklar h gorizontalning V va W tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo‘ladi, ya’ni:

$h \parallel H \Rightarrow h'' \parallel Ox$ va $h''' \parallel Oy$, $A'B' = |AB|$, $\beta = h \wedge V$ va $\gamma = h \wedge W$ bo‘ladi.

4.1.2. Frontal to‘g‘ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel to‘g‘ri chiziq *frontal to‘g‘ri chiziq* (yoki *frontal*) (4.2.a,b-rasm) deb ataladi. Frontalning barcha nuqtalari V tekislikdan baravar masofada bo‘lgani uchun chizmada uning f' gorizontal proyeksiyasi Ox o‘qiga, f''' profil proyeksiyasi esa Oz o‘qiga parallel bo‘ladi. Frontalning frontal proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo‘ladi.



a)



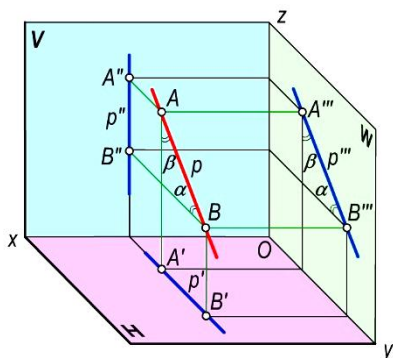
b)

4.2-rasm

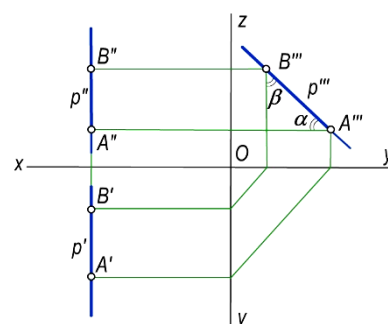
Mazkur chiziq kesmasining frontal proyeksiyasi uning haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi α va β burchaklar f frontalni H va W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil etgan burchaklarning haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

$$f \parallel V \Rightarrow f' \parallel Ox \text{ va } f'' \parallel Oz, A''B'' = |AB|, \alpha = f \wedge H \text{ va } \gamma = f \wedge W \text{ bo'ladi.}$$

4.1.3. Profil to'g'ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq *profil to'g'ri chiziq* (yoki *profil*) deb ataladi (4.3,a,b-rasm). Profilning barcha nuqtalari W tekislikdan baravar masofada bo'lgani uchun chizmada uning gorizontaal proyeksiyasi Oy o'qiga parallel, frontal proyeksiyasi Oz o'qiga parallel bo'ladi.



a)



b)

4.3-rasm

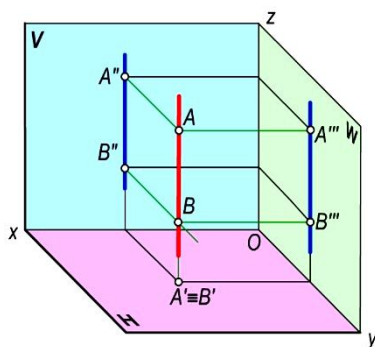
Profilning profil proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda joylashgan bo'ladi. Mazkur, chiziq kesmasining profil proyeksiyasi o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

Chizmadagi $\square$ va β burchaklar profil chiziqning H va V tekisliklar bilan mos ravishda tashkil etgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

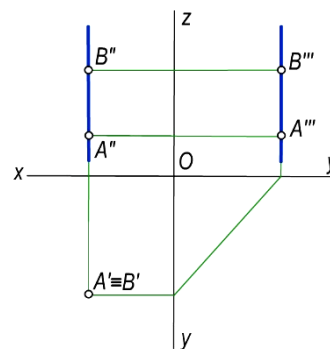
$$p \parallel W \Rightarrow p' \parallel Oy \text{ va } p'' \parallel Oz, A'''V''' = |AV|, \square = p \wedge H \text{ va } \beta = p \wedge V \text{ bo'ladi.}$$

4.2. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi.

4.2.1. Gorizontaal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar. Gorizontaal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq *gorizontaal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq* deb ataladi (4.4,a,b-rasm). Bu to'g'ri chiziq H tekislikka nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning frontal va profil proyeksiyalari Oz o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi V va W ga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.



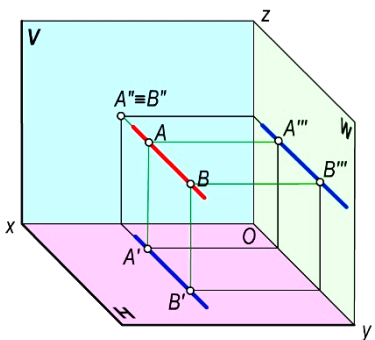
a)



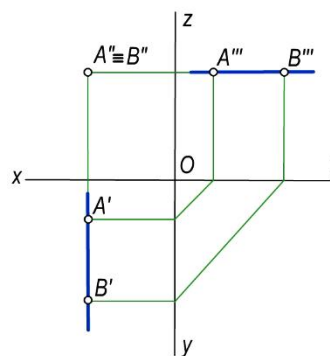
b)

4.4-rasm.

4.2.2. Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar *frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (4.5,a,b-rasm). Bunday to'g'ri chiziq **V** tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizont va profil proyeksiyalari **Oy** o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi **H** va **W** proyeksiyalar tekisliklariga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.



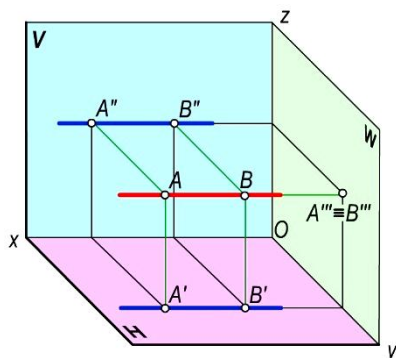
a)



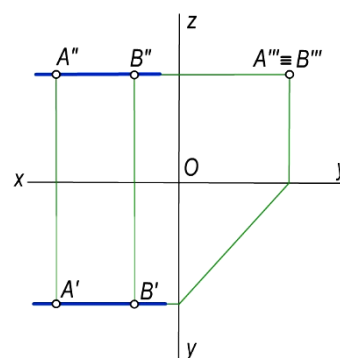
b)

4.5-rasm

4.2.3. Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar *profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (4.6,a,b-rasm). Bu to'g'ri chiziqlar profil tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizont va frontal proyeksiyalari **Ox** o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi **H** va **V** ga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.



a)



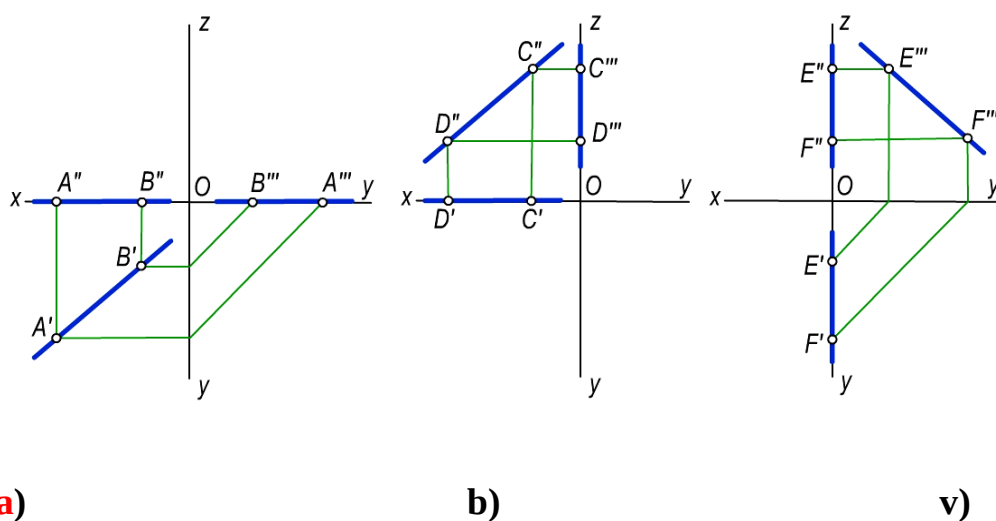
b)

4.6-rasm

4.3. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinata o'qlariga tegishli to'g'ri chiziqlar. To'g'ri chiziqlar **H**, **V** va **W** proyeksiyalar tekisliklariga va **Ox**, **Oy**, **Oz** proyeksiyalar o'qlariga tegishli bo'lishi mumkin.

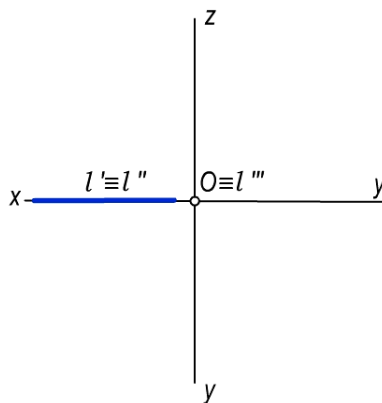
Agar to'g'ri chiziq biror proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning bir proyeksiyasi bevosita to'g'ri chiziqning o'ziga, qolgan ikki proyeksiyasi esa koordinatalar o'qiga proyeksiyalanadi. Masalan, **CD**(**C'D'**, **C''D''**) to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalar tekisligi **V** ga tegishli bo'lgani uchun (4.7,b-rasm), uning **C''D''** frontal proyeksiyasi mazkur to'g'ri chiziqqa, gorizont **C'D'** proyeksiyasi **Ox** o'qiga, profil **C''D'''** proyeksiyasi esa **Oz** o'qiga proyeksiyalanadi.

Shuningdek, 4.7,a-rasmda **H** tekislikka tegishli **AB**(**A'B'**, **A'''B'''**) to'g'ri chiziqning, va 4.7,v-rasmda esa **W** tekislikka tegishli **EF**(**E'F'**, **E'''F'''**) to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining joylashishi ko'rsatilgan.



4.7-rasm

To'g'ri chiziq koordinata o'qlariga tegishli bo'lsa, uning ikki proyeksiyasi shu o'qning o'ziga proyeksiyalanadi, bir proyeksiyasi esa koordinata boshi **O** ga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Masalan, $\ell \in \text{Ox}$ to'g'ri chiziqning ℓ' gorizont ℓ'' frontal proyeksiyalari **Ox** o'qida, uning ℓ''' profil proyeksiyasi esa koordinata boshi **O** ga proyeksiyalanadi (4.8- rasm).



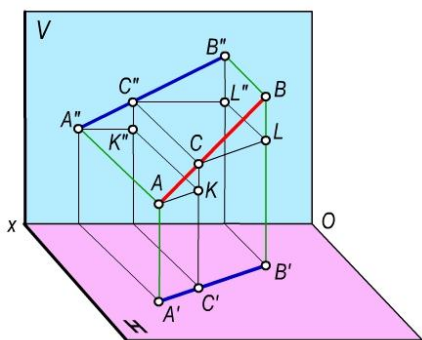
4.8-rasm

4.4. To'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'lish

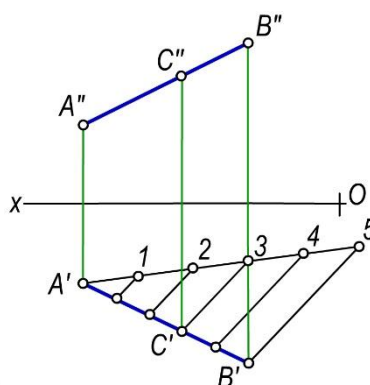
Parallel proyeksiyalashning xossasiga asosan biror nuqta fazodagi to'g'ri chiziq kesmasini qanday nisbatda bo'lsa, uning bir nomli proyeksiyalari to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalarini ham shunday nisbatlarga bo'ladi.

4.9-rasmda berilgan chizmaga asosan C nuqta AB kesmani $AC:CB$ nisbatda bo'lgan deb qabul qilinsin. Yuqoridagi xossaga binoan, C nuqtani proyeksiyalari AB kesmaning proyeksiyalarini xuddi shunday nisbatlarda bo'ladi, ya'ni $AC:CB=A'C':C'B'=A''C'':C''B''$.

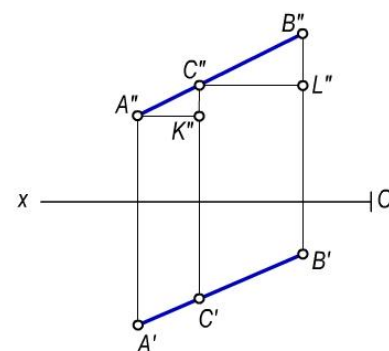
To'g'ri chiziqqa tegishli nuqtaning bunday xususiyatidan foydalanib, har qanday to'g'ri chiziq kesmasini ixtiyoriy nisbatda proporsional bo'laklarga bo'lish mumkin. Masalan 4.10-rasmda berilgan $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziq kesmasini teng 5 bo'lakka bo'lish uchun kesmaning ixtiyoriy, masalan, gorizontaal proyeksiyasining A' uchidan ixtiyoriy burchakda yordamchi a to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziqqa ixtiyoriy o'lchamli teng kesmalar besh marta qo'yib chiqiladi. So'ngra 5 va B' nuqtalarni o'zaro tutashtirilib, 4, 3, 2 va 1 nuqtalardan $5B'$ chiziqqa parallel chiziqlar o'tkaziladi.



4.9-rasm



a)



b)

4.10-rasm

Natijada, $A'B'$ kesma 5 ta teng bo'lakka bo'linadi. To'g'ri chiziq kesmasining gorizontaal $A'B'$ proyeksiyasidagi bu nuqtalardan foydalanib kesmaning $A''B''$ frontal proyeksiyasini proyeksion bog'lanish chiziqlari yordamida teng 5 bo'lakka bo'lish qiyin emas. Chizmadagi C nuqta AB to'g'ri chiziq kesmasini $AC:CB=3:2$ nisbatda bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Qanday xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarni bilasiz?
2. Proeksialar tekisligiga parallel to'g'ri chiziglarga qaysi to'g'ri chiziqlar kiradi?
3. Proeksiyalar tekisligida yotgan to'g'ri chiziq qanday aniqlanadi?
4. Koordinatalar o'qida yotgan to'g'ri chiqni proeksiyalari qanday joylashadi.
5. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish qanday bajariladi?

5 – MAB3Y. TO‘G‘RI CHIZIQNING IZLARI.

Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o‘tadi. Biror a to‘g‘ri chiziqning gorizontaal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *gorizontaal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi *frontal izi* deyiladi. Shuningdek, to‘g‘ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = a_H, a \cap V = a_V \text{ va } a \cap W = a_W.$$

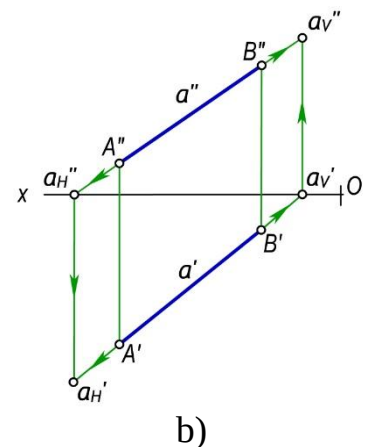
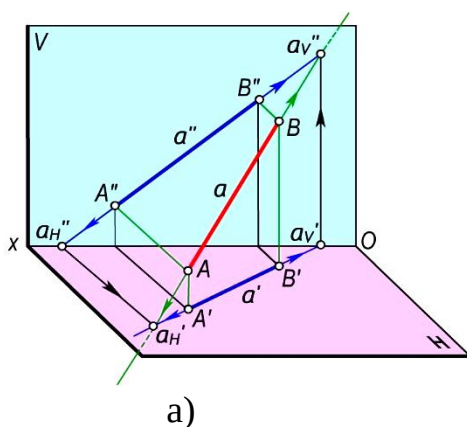
5.1,a-rasmda, a to‘g‘ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko‘rsatilgan.

To‘g‘ri chiziqning gorizontaal izini proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi (5.2-rasm):

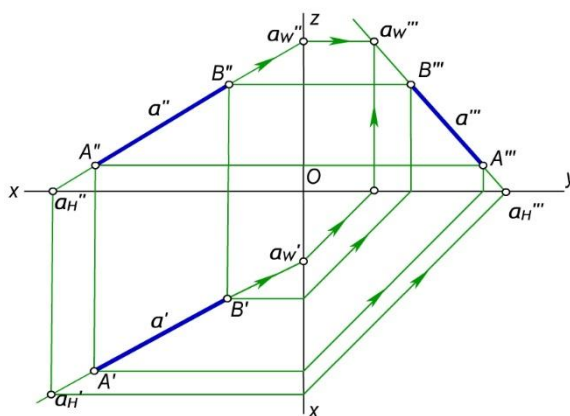
- To‘g‘ri chiziqni frontal a'' proyeksiyasining Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi $a''_H = a'' \cap Ox$ topiladi;
- a''_H nuqtadan Ox o‘qiga perpendikulyar o‘tkaziladi;
- To‘g‘ri chiziqning gorizontaal proyeksiyasi a' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to‘g‘ri chiziqning gorizontaal izining gorizontaal proyeksiyasi $a'_H \equiv a_H$ bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

- To‘g‘ri chiziq gorizontaal a' proyeksiyasining Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi $a'_V = a' \cap Ox$ topiladi;
- Bu nuqtadan Ox o‘qiga perpendikulyar o‘tkaziladi;
- To‘g‘ri chiziqning frontal proyeksiyasi a'' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a_V'' \equiv a_V$ bo‘ladi.



5.1-rasm



5.2-rasm

To'g'ri chiziqning profil izini yasash uchun:

- Uning frontal proyeksiyasini Oz o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo'lgan a_v''' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqariladi.
- To'g'ri chiziqning profil gorizontaal proyeksiyasi Oy o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo'lgan nuqtadan y o'qiga perpendikulyar chiqariladi.
- Ikki perpendikulyarning o'zaro kesishish nuqtasi a to'g'ri chiziqning profil izi va shu izning profil proyeksiyasi ham bo'ladi.

Shakldagi $a'_w a''_w$ nuqtalar mazkur a to'g'ri chiziq profil izining gorizontaal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. a'''_w nuqta a to'g'ri chiziq profil izining profil proyeksiyasidir (5.2–rasm).

5.1. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

Ikki to'g'ri chiziq fazoda o'zaro parallel, kesuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

5.1.1. Parallel to'g'ri chiziqlar

Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi (5.3,a,b-rasm), ya'ni $a \parallel b$ bo'lsa, u holda $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, $a''' \parallel b'''$ bo'ladi.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o'zaro parallel bo'lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi.

Ammo to'g'ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo'lgan profil to'g'ri chiziq kesmalarning bir nomli gorizontaal va frontal proyeksiyalari (p_1 va p_2) ning o'zaro parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi (5.4,a-rasm). Bunday hollarda to'g'ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash zarur. Bunda $p_1''' \parallel p_2'''$

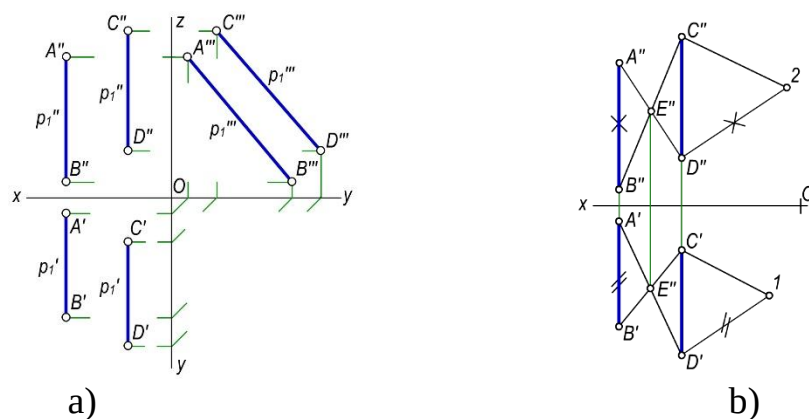
bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Agar $p_1''' \cap p_2'''$, bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar uchrashmas (ayqash) bo'ladi. Shuningdek, bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.



5.3-rasm

Buning uchun:

- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D' , D'' nuqtasidan ixtiyoriy (o'tkir burchak ostida) parallel chiziqlar o'tkazib, $D'1=A'B'$ va $D''2=A''B''$ kesmalarni qo'yiladi (5.4-b, rasm). So'ngra 1 va 2 nuqtalarni C' va C'' bilan tutashtiramiz. Agar $C'1 \parallel C''2$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Aks holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash to'g'ri chiziqlar ekanligini isbotlanadi;
- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o'zaro kesishadigan qilib to'g'ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (4.4-b, rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E' va E'' proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda bo'lsa, u holda CD va AB to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o'zaro parallel bo'ladi.



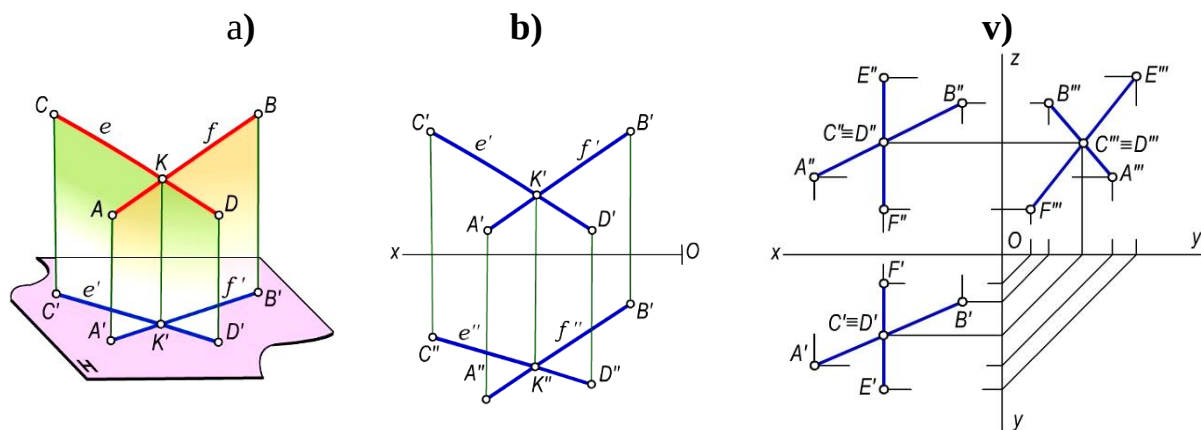
5.4-rasm

5.1.2. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

Fazodagi to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining proyeksiyasi shu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo'ladi (5.5-rasm). Kesishuvchi

to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham chizmada o'zaro kesishadi va kesishish nuqta proyeksiyalari bir proyeksion bog'lovchi chiziqda bo'ladi.

Fazoda umumiy vaziyatda kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarning faqat ikkita bir nomli proyeksiyalarining kesishishi kifoya qiladi.



5.5-rasm

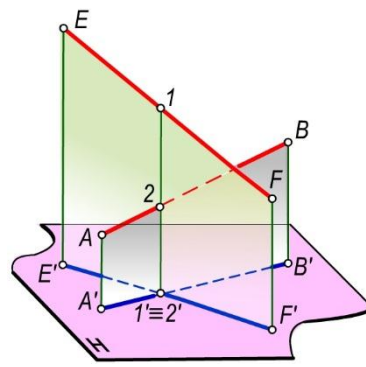
Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo'lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o'zaro kesishuvi yetarli bo'lmaydi. Masalan, AB va EF to'g'ri chiziq kesmalarining biri EF kesma W tekislikka parallel joylashgan (5.5,v-rasm). Bu chiziqlarning o'zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda joylashsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi, aks holda to'g'ri chiziqlar kesishmaydi.

5.1.3. Ayqash to'g'ri chiziqlar

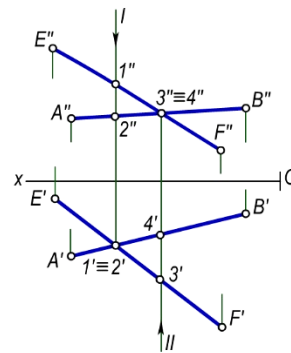
Ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'lmasa yoki kesishmasa ular ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Ma'lumki, parallel va kesuvchi to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo'ladi. Uchrashmas to'g'ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi (5.6,a,b-rasm). Uchrashmas to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o'zaro kesishsa ham, ammo kesishish nuqtalari bir bog'lovchi chiziqqa tegishli bo'lmaydi.

Masalan, 5.6-rasmda $AB(A'B', A''B'')$ va $EF(E'F', E''F'')$ uchrashmas chiziqlar berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining $1'' \equiv 2''$ va $3' \equiv 4'$ kesishish nuqtalari fazoda bu to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo'lmay, aksincha, $1 \in EF$, $2 \in AB$ va $3 \in EF$, $4 \in AB$ bo'ladi.



a)



b)

5.6-rasm

5.2. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari

Agar to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, ikkinchi tomoni bu tekislikka perpendikulyar bo'lmasa, mazkur to'g'ri burchak shu tekislikka haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

Bu teoremani isbotlash uchun 5.7,a-rasmdan foydalanamiz. Shakldagi $\angle ABC = 90^\circ$ ga teng va uning ikki tomoni H tekislikka parallel vaziyatda joylashgan deb faraz qilamiz. Bu vaziyatda uning gorizontaal proyeksiyasining qiymati o'ziga teng bo'lib proyeksiyalanadi, ya'ni $\angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi.

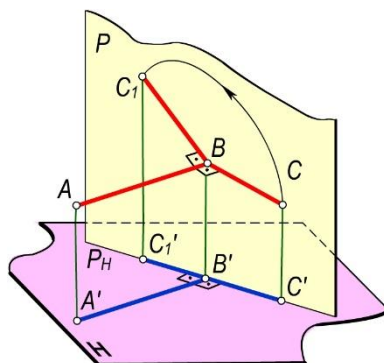
To'g'ri burchakning BC tomonidan H tekislikka perpendikulyar qilib P tekislik o'tkazamiz. U holda $AB \perp P$ bo'lib, $H \cap P = P_H$ hosil bo'ladi. Agar to'g'ri burchakning BC tomonini AB tomoni atrofida aylantirib, ixtiyoriy BC_1 vaziyatga keltirsak ham uning bu tomonining proyeksiyasi P_H bilan ustma-ust tushadi. Shunga ko'ra $\angle ABC_1 = \angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi. Demak:

$\angle ABC = 90^\circ$ bo'lib, $AB \parallel H$ va $BC \parallel H$ bo'lsa, $\angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi.

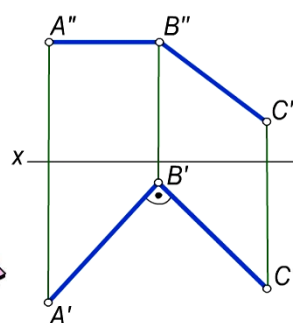
Chizmada $\angle ABC (AB \parallel H)$ va $\angle DEF (DE \parallel V)$ to'g'ri burchaklarning tasvirlanishi 5.7,b va 5.7,v-rasmlarda keltirilgan.

To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan chizma geometriyada metrik masalalarni yechishda keng foydalanadi.

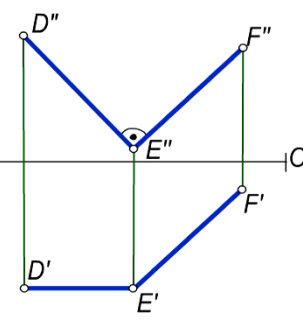
a)



b)



v)



5.7-rasm

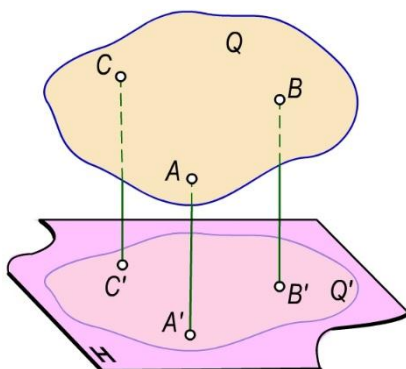
Nazorat savollari:

1. To'g'ri chiziqning izlari nima?
2. O'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo'ladi?
3. Kesishuvchi va ayqash to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bir-biridan qanday farqlanadi?
4. To'g'ri burchakning proyeksiyalanishi haqidagi teoremani tushuntirib bering.
5. Ko'rinishlikni aniqlashda konkurent nuqtalardan qanday foydalaniladi?

6 – MAVZU. TEKISLIKLAR VA ULARNING CHIZMADA TASVIRLANISHI.

Tekislik birinchi tartibli sirt hisoblanadi. Chunki u birinchi darajali algebraik tenglama bilan ifodalanadi, ya'ni

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1.$$

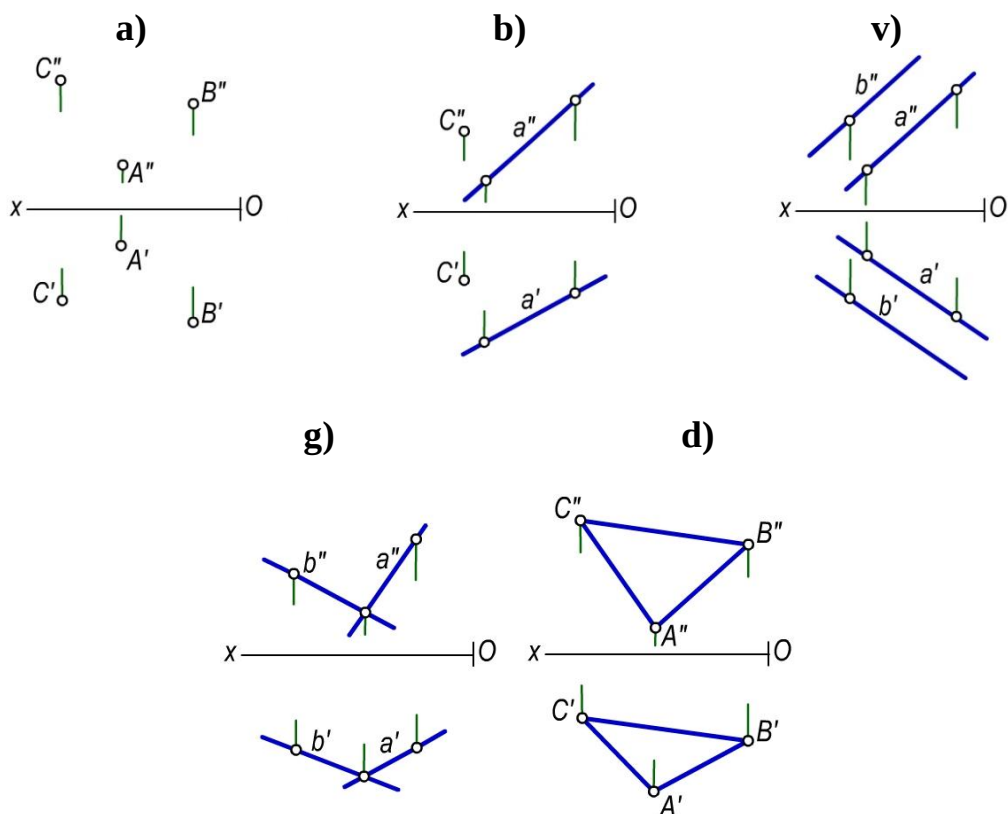


6.1-rasm

Ortogonal proyeksiyalarda tekislikning fazodagi vaziyati uni berilishini ta'minlovchi elementlarning proyeksiyalari orqali aniqlanadi. Umumiy holda tekislikning fazoviy vaziyatini bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqta aniqlaydi. Haqiqatdan, 6.1-rasmdagi *A*, *B* va *C* nuqtalar fazoda biror *Q* tekislikning vaziyatini aniqlaydi. Bu nuqtalardan har birining fazoviy o'rni o'zgarishi bilan tekislikning vaziyati ham fazoda o'zgaradi.

Uchta nuqtaning ikkitasi orqali hamma vaqt bir to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Shuningdek, uchta nuqta yordamida ikki parallel va kesishuvchi chiziqlar o'tkazish yoki tekis geometrik shakl, (masalan, uchburchak) hosil qilish mumkin.

Chizma geometriyada tekisliklar qo'yidagi hollar bilan beriladi:

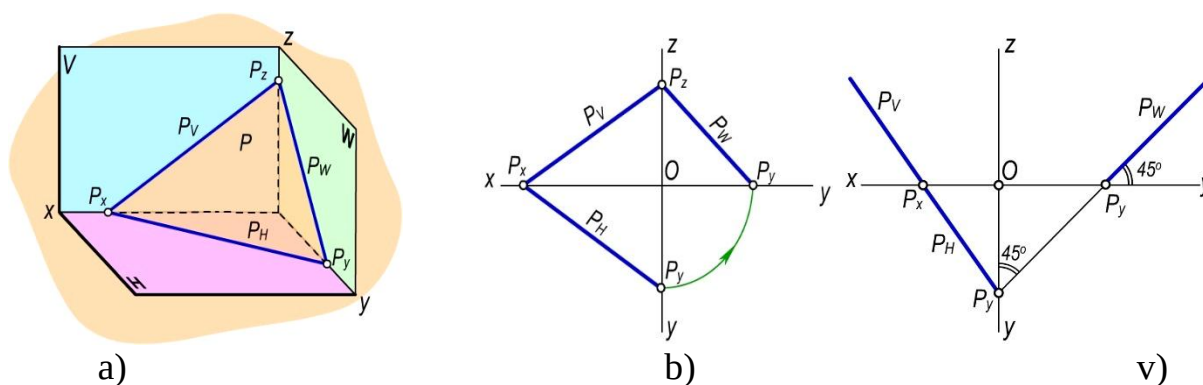


6.2.-rasm

- bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqtaning proyeksiyalari bilan (6.2-a, rasm);
- bir to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqtaning proyeksiyalari bilan (6.2,b- rasm);
- ikki parallel to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (6.2,v-rasm);
- ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (6.2,g-rasm);
- tekis geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalari orqali berilishi ham mumkin (6.2,d-rasm).

Shuningdek, tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish chiziqlari orqali berilishi ham mumkin. Masalan 6.3-rasmda, P tekislik H , V va W proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan P_H , P_V , P_W chiziqlar orqali berilishi ko'rsatilgan.

Agar biror tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil og'ish burchak hosil qilsa, uning ikkita izi bir to'g'ri chiziqda yotadi. Uchinchi izi esa proyeksiyalarini o'qi bilan 45° burchak hosil qiladi (6.3,v-rasm).



6.3-rasm

6.1. Tekislikning izlarini yasash

Tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari tekislikning izlari deyiladi.

P tekislikning H tekislik bilan kesishgan $P_H = P \cap H$ chizig'i uning gorizontali izi, V tekislik bilan kesishgan $P_V = P \cap V$ chizig'i frontal izi va W tekislik bilan kesishgan $P_W = P \cap W$ chizig'i **profil izi** deb ataladi.

Tekislik shu tarzda berilsa, uni izlari bilan berilgan tekislik deb yuritiladi va $P(P_H, P_V, P_W)$ tarzida yoziladi.

Tekislikni chizmada izlari bilan tasvirlash ancha qulay va afzaldir. Tekislikning Ox , Oy va Oz koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari P_x , P_y , P_z bilan belgilanadi, ya'ni $P_x = P \cap Ox$, $P_y = P \cap Oy$, $P_z = P \cap Oz$.

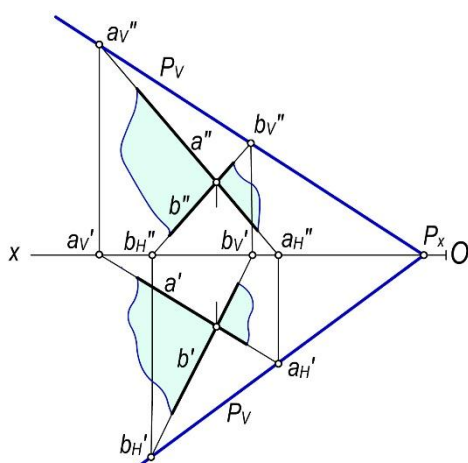
Bu nuqtalar tekislikning ikkita izining kesishishidan hosil bo'ladi.

Tekislik qanday tarzda berilishidan qat'iy nazar, uning izlarini ortogonal proyeksiyalarda yasash mumkin.

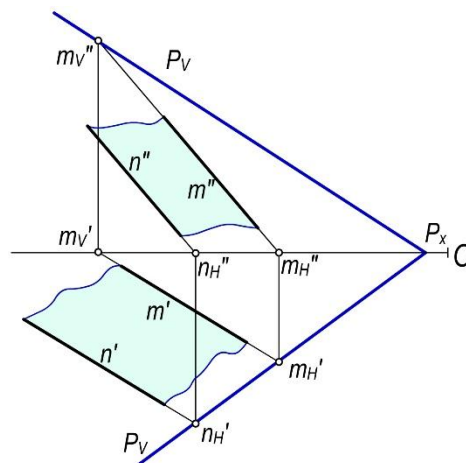
Har qanday geometrik shakllar orqali berilgan tekislikning izlarini yasash mazkur tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri chiziqlar izlarini yasash bilan bajariladi. Bunig uchun to'g'ri chiziqning tekislikka tegishlilik xususiyatidan foydalaniladi.

6.4-rasmda $a \cap b$ kesuvchi chiziqlar bilan berilgan tekislikning gorizontol izini yasash uchun to'g'ri chiziqlar gorizontol izlarining a'_H , a''_H , va b'_H , b''_H proyeksiyalarini topamiz. Agar to'g'ri chiziqlarning gorizontol izlarining gorizontol a'_H va b'_H proyeksiyalarini o'zaro tutashtirsak, tekislikning P_H gorizontol izini hosil qilamiz. Xuddi shu tarzda tekislikning P_V frontal izini yasash uchun kesishuvchi to'g'ri chiziqlar frontal izlarining a'_V , a''_V va b'_V , b''_V proyeksiyalarini yasaymiz. So'ngra to'g'ri chiziqlarning frontal izlarining frontal a''_V va b''_V proyeksiyalarini tutashtirsak, tekislikning P_V frontal izini hosil qilamiz. Tekislikning P_H va P_V izlarining P_x kesishish nuqtasi Ox o'qida bo'lishi shart.

Ikki $m \parallel n$ parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikning P_H va P_V izlari ham to'g'ri chiziqlarining izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi (6.5-rasm). Umuman, turli geometrik shakllar bilan berilgan tekisliklarning izlari mazkur shaklga tegishli bo'lgan ikki kesuvchi yoki parallel chiziqlarning izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi.



6.4-rasm



6.5-rasm

6.2. Tekisliklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari

Tekislik fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan umumiy va xususiy vaziyatlarda joylashishi mumkin.

Umumiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo'lmasa, uni *umumiy vaziyatdagi tekislik* deyiladi (6.3,a-rasm). Chizmada umumiy vaziyatdagi tekislikning izlari proyeksiyalar o'qlari bilan ixtiyoriy burchak hosil qiladi. Agar biror P tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil burchak hosil qilsa, uning P_H va P_V izlari Ox o'qi bilan bir xil burchak hosil qiladi (6.3,b-rasm).

Xususiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisligining biriga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, uni *xususiy vaziyatdagi tekislik* deb ataladi.

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar *proyeksiyalovchi tekisliklar* deyiladi.

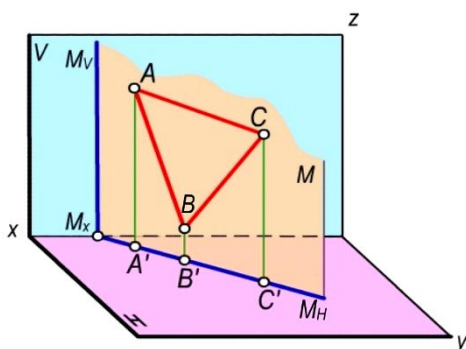
6.2.1. Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik

Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik gorizontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi.

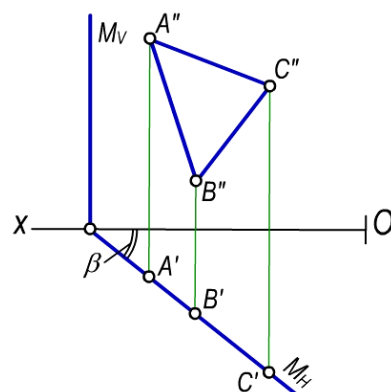
Gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislikning M_V frontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi (6.6, a, b- rasm), M_H gorizontal izi esa Ox o'qiga nisbatan ixtiyoriy burchakda joylashgan bo'ladi. Bu tekislik gorizontal izi M_H va Ox o'q orasidagi β burchak, M va V tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng bo'ladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli tekis geometrik shakllarning gorizontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning gorizontal izi bilan ustma-ust tushadi (6.6 – b, rasm).

a)



b)



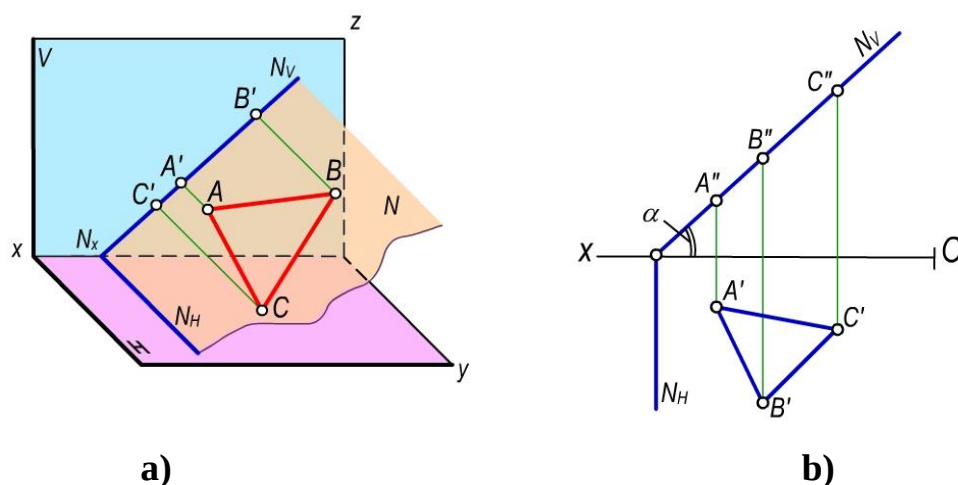
6.6-rasm

6.2.2. Frontal proyeksiyalovchi tekislik

Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik frontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi.

Frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislikning gorizontal N_H izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi (6.7- a, rasm), frontal N_V izi esa ixtiyoriy burchakda joylashgan bo'ladi. Frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal N_V izining Ox o'qi bilan hosil qilgan α burchagi N va H tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng. Frontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli bo'lgan tekis

shakllarning frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziqli bo'ladi va tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi (6.7-rasm).



6.7-rasm

6.2.3. Profil proyeksiyalovchi tekislik

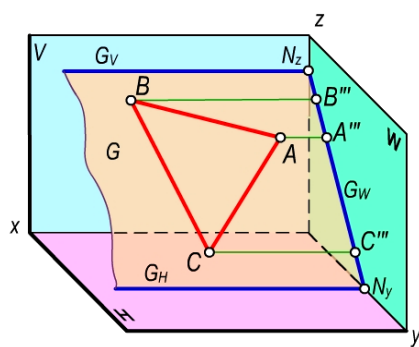
Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik profil proyeksiyalovchi tekislik deb ataladi.

Bu tekislikning gorizontali G_H va frontal G_V izlari Ox o'qiga parallel bo'ladi (6.8-a, rasm).

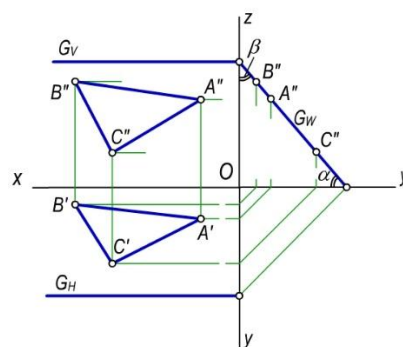
G profil proyeksiyalovchi tekislikning H va V tekisliklar bilan hosil qilgan α va β burchaklari 6.8-b, rasmda ko'rsatilganidek haqiqiy kattalikda proyeksiyanadi.

Shuningdek, profil proyeksiyalovchi tekislik proyeksiyalar o'qi Ox dan ham o'tishi mumkin (6.9, a-rasm). U holda G tekislikning gorizontali G_H va frontal G_V izlari Ox o'qida bo'ladi va tekislikning fazoviy vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Shuning uchun bunday hollarda mazkur tekislikning profil izi yoki shu tekislikka tegishli bo'lgan biror $A(A', A'')$ nuqtaning ikki proyeksiyasi beriladi (6.9-, b rasm). Bu nuqtaning A''' proyeksiyasi orqali tekislikning profil izini yasash mumkin (6.10-rasm).

Proyeksiyalovchi tekislikning ikkita izini chizmada tasvirlash shart emas. Tekislikning bitta izi, aynan gorizontali proyeksiyalovchi tekislikning gorizontali izi M_H , frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi N_V , profil proyeksiyalovchi tekislikning profil izi G_W , orqali ham ularning vaziyatini aniqlash mumkin (6.11-rasm).

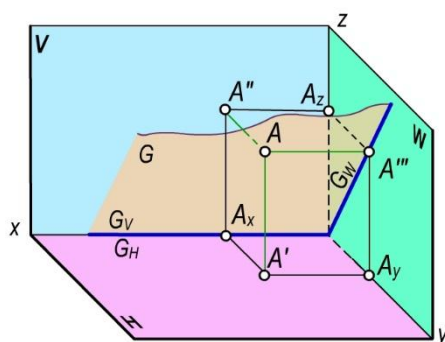


a)

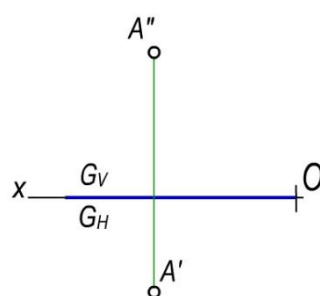


b)

6.8-rasm

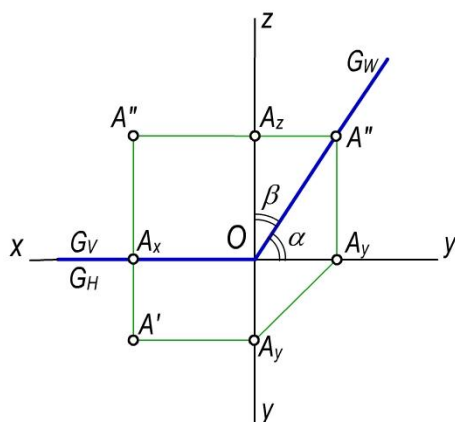


a)

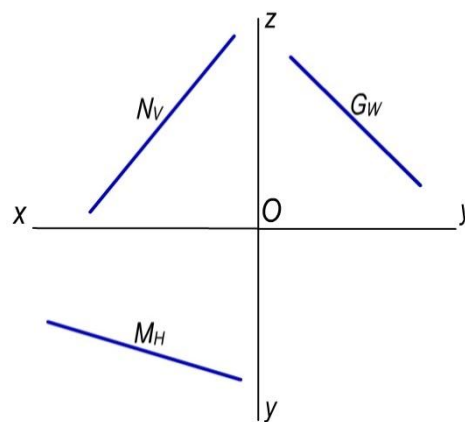


b)

6.9-rasm



6.10-rasm



6.11-rasm

6.3. Proyeksiyalar tekisligiga parallel tekisliklar

6.3.1. Gorizontalk tekislik

Gorizontalk proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik gorizontalk tekislik deyiladi. Bu tekislik bir vaqtda V va W tekisliklarga perpendikulyar bo'radi. Tekislikning vaziyatini uning frontal H_{IV} izi aniqlaydi (6.12-a,b, rasm).

6.3.2. Frontal tekislik

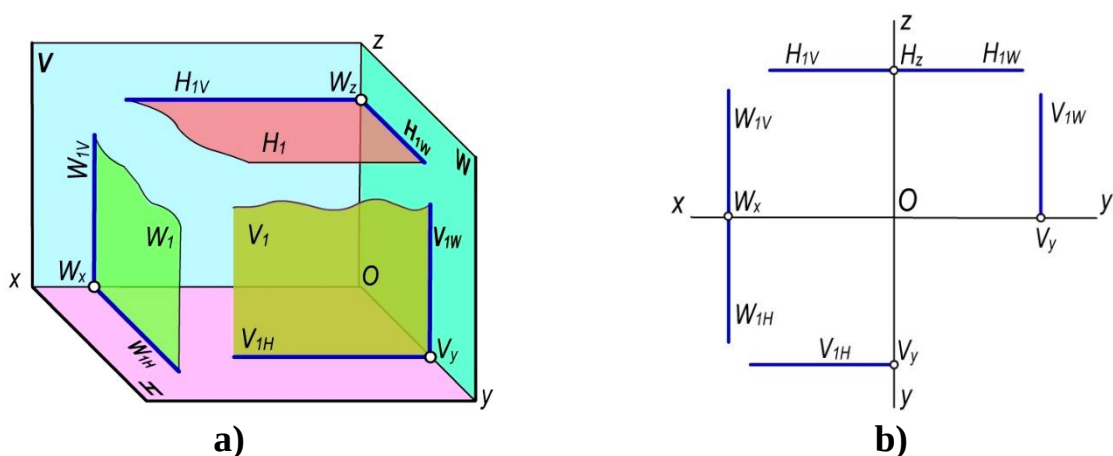
Frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik frontal tekislik deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda H va W tekisliklarga perpendikulyar bo‘ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal V_{1H} izi aniqlaydi (6.12- a,b , rasm).

6.3.3. Profil tekislik

Profil proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik profil tekislik deyiladi.

Profil W_1 tekislik bir vaqtda H gorizontal va V frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘ladi. Tekislikning fazoviy vaziyatini uning W_{1H} gorizontal va W_{1V} frontal izlari aniqlaydi (6.12- a,b , rasm).



6.12-rasm

Nazorat savollari:

1. Tekislik chizmada qanday berilishi mumkin?
2. Tekislikning izi deb nimaga aytiladi?
3. Qanday tekisliklar proyeksiyalovchi deyiladi?
4. Gorizontal va gorizontal proyeksiyalovchi hamda frontal va frontal proyeksiyalovchi tekisliklarning farqi nimada?

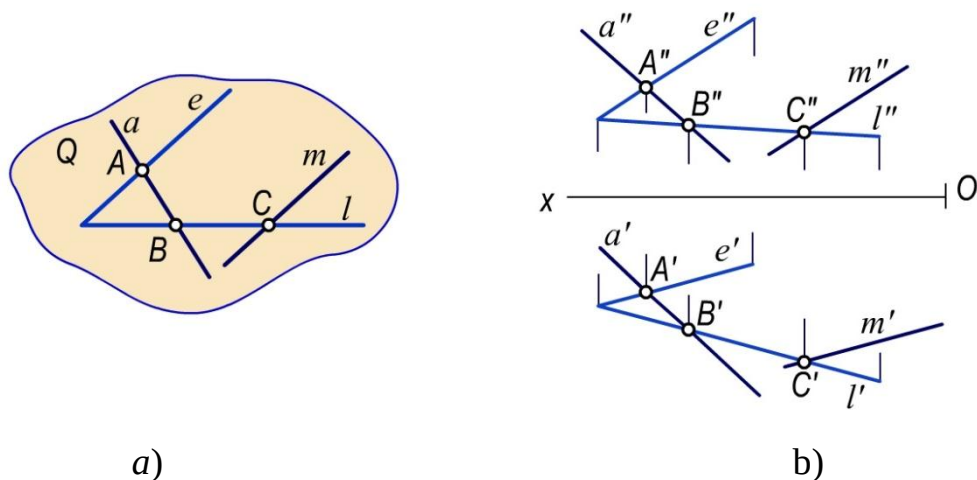
7 – MAVZU. TEKISLIK VA TO‘G‘RI CHIZIQNING O‘ZARO VAZIYATLARI

To‘g‘ri chiziq va tekislik fazoda o‘zaro quyidagi vaziyatlarda bo‘lishi mumkin:

- to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli ($a \subset P$),
- to‘g‘ri chiziq tekislik bilan kesishadi ($a \cap P$),
- to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel ($a \parallel P$),
- to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar ($a \perp P$).

Tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziq va nuqta. Quyidagi xollarda to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘ladi:

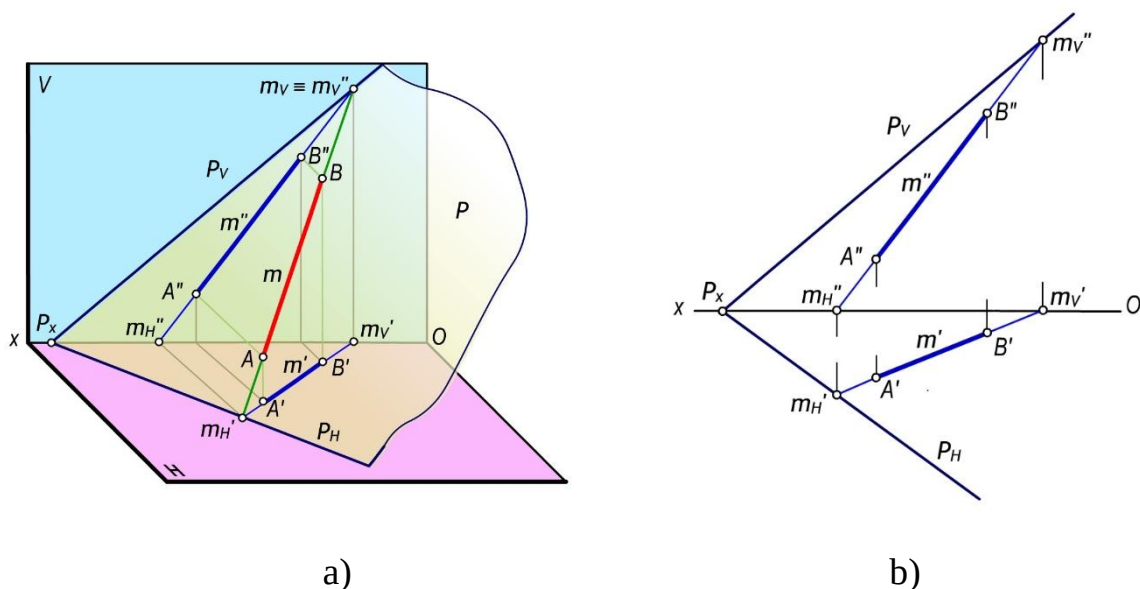
- agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikka tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘ladi. Masalan, a to‘g‘ri chiziqning A va B nuqtalari (7.1-rasm) Q tekislikka tegishli bo‘lganligi uchun a to‘g‘ri chiziq Q tekislikka tegishli bo‘ladi;
- agar m to‘g‘ri chiziqning bir nuqtasi tekislikka tegishli bo‘lib, mazkur tekislikka tegishli yoki unga parallel biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘ladi. Masalan, m to‘g‘ri chiziqning C nuqtasi Q tekislikka tegishli va bu to‘g‘ri chiziq mazkur tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda m to‘g‘ri chiziq Q tekislikka tegishli bo‘ladi.



7.1-rasm

To‘g‘ri chiziqning tekislikka tegishli bo‘lish shartlaridan quyidagi xulosalarga kelish mumkin.

1-xulosa. Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqning bir nomli izlari tekislikning bir nomli izlariga tegishli bo‘ladi (7.2-rasm).



7.2-rasm

P tekislikka tegishli m to'g'ri chiziqlarning M_H gorizontal izi tekislikning P_H gorizontal izida, to'g'ri chiziqlarning M_V frontal izi tekislikning P_V frontal izida joylashgan. Demak, m to'g'ri chiziqlar P tekislikka tegishli bo'ladi, ya'ni $m \subset P$.

2-xulosa. Agar nuqta tekislikka tegishli bo'lsa, bu nuqta tekislikning biror to'g'ri chiziqlariga tegishli bo'ladi.

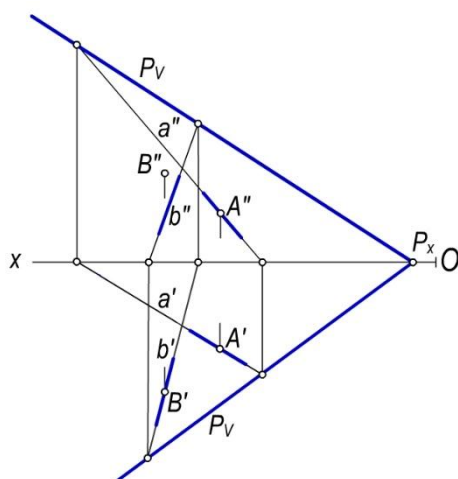
7.3-rasmda $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalarning o'zaro joylashuvini ko'rsatilgan. Buning uchun:

- nuqtaning gorizontal A' (yoki frontal A'') proyeksiyasidan o'tuvchi va tekislikka tegishli a to'g'ri chiziqlarning gorizontal a' (yoki frontal a'') proyeksiyasi o'tkaziladi.
- to'g'ri chiziqlarning frontal a'' (yoki gorizontal a') proyeksiyasi yasiladi.
- A nuqtaning A' gorizontal va A'' frontal proyeksiyalari a to'g'ri chiziqlarning bir nomli a' va a'' proyeksiyalarida joylashgan uchun $A \in P$ bo'ladi.

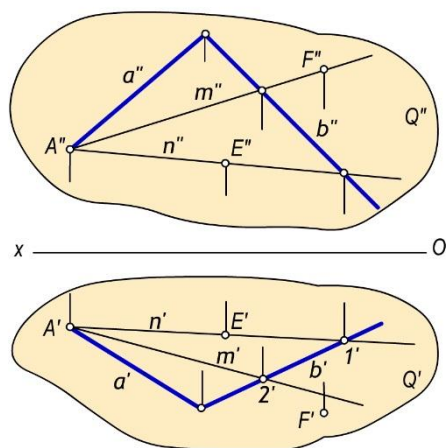
Xuddi shu tartibda $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan $B(B', B'')$ nuqtaning o'zaro vaziyatini tekshirganimizda $B' \in b'$ va $B'' \notin b''$ bo'lgani uchun $B \notin P$ bo'ladi.

7.4-rasmda a va b kesishuvchi chiziqlar orqali berilgan Q tekislik bilan E va F nuqtalarning o'zaro vaziyati m va n chiziqlar yordami bilan aniqlangan:

- $E' \in n'$ va $E'' \in n''$ bo'lgani uchun $E \in Q$ bo'ladi.
- $F' \notin m'$ va $F'' \in m''$ bo'lgani uchun esa $F \notin Q$ bo'ladi.



7.3-rasm



7.4-rasm

7.1. Tekislikning bosh chiziqlari

Tekislikning bosh chiziqlariga uning gorizontali, frontali va eng katta og'ish chiziqlari kiradi.

Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq H tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning gorizontali deyiladi.

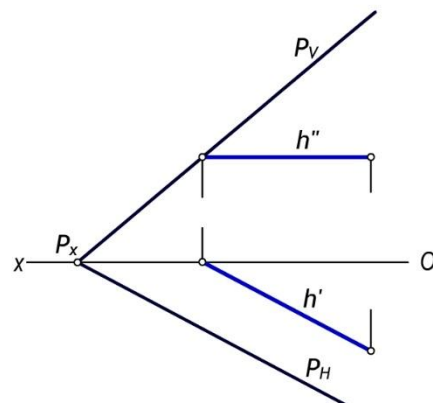
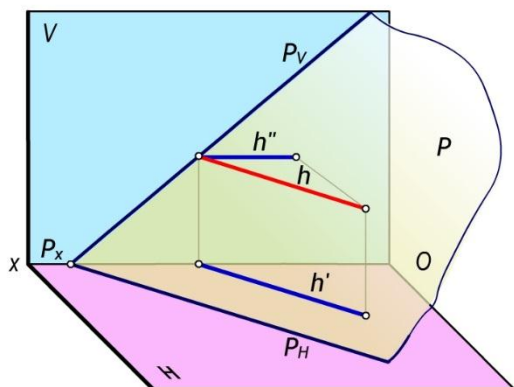
Bunda $h \in P$ hamda $h \parallel H$ bo'lsa, h to'g'ri chiziq P tekislikning gorizontali chizig'i bo'ladi.

Chizmada tekislik gorizontalinig frontal proyeksiyasi Ox ga parallel, ya'ni $h'' \parallel Ox$ bo'ladi, tekislik gorizontalinig gorizontali proyeksiyasi esa tekislikning P_H iziga parallel, ya'ni $h' \parallel P_H$ bo'ladi (7.5-rasm).

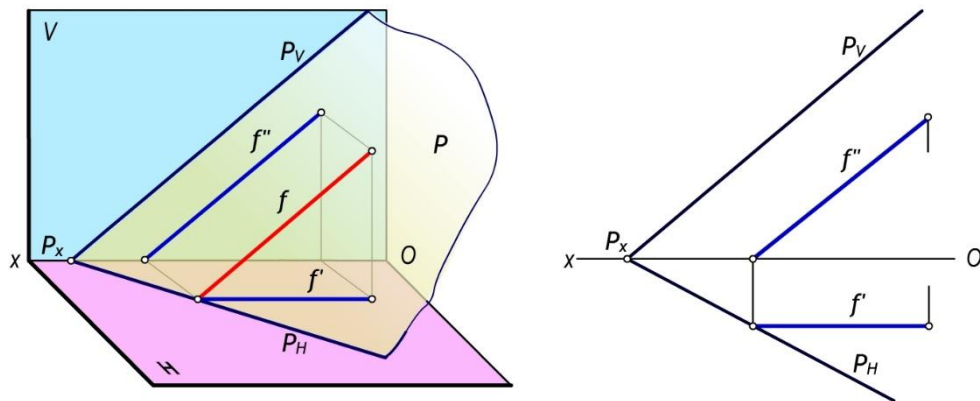
Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq V tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning frontali deyiladi.

Bunda $f \in P$ hamda $f \parallel V$ bo'lsa, f to'g'ri chiziq P tekislikning frontal chizig'i bo'ladi.

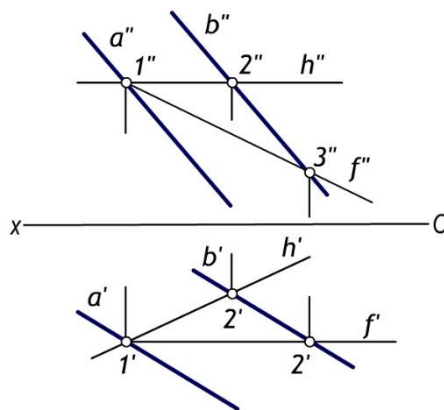
Chizmada tekislik frontalining gorizontali proyeksiyasi proyeksiyalar o'qi Ox ga parallel bo'ladi, ya'ni $f' \parallel Ox$, tekislik frontalining frontal proyeksiyasi esa tekislikning P_V iziga parallel, ya'ni $f'' \parallel P_V$ bo'ladi (7.6-rasm).



7.5-rasm



7.6-rasm.



7.7-rasm.

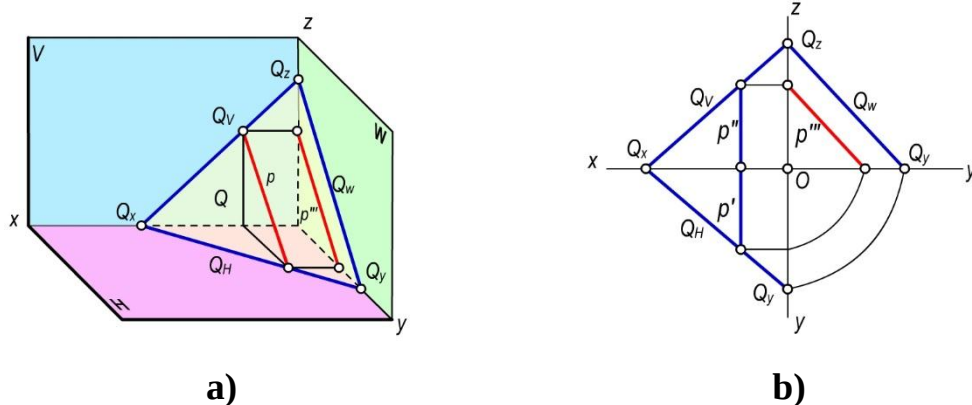
7.7-rasmda $a \cap b$ chiziqlar bilan berilgan tekislikning h gorizontal va f frontallarini yasash tasvirlangan.

Umuman, chizmada tekislikning cheksiz ko'p bosh chiziqlarini o'tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari (masalan, gorizontallari) hamma vaqt bir-biriga parallel bo'ladi. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig'ini o'tkazish mumkin.

Agar tekislikka tegishli to'g'ri chiziq profil proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning **profil chizig'i** yoki **profili** deyiladi.

Bunda $p \in Q$ bo'lib va $p \parallel W$ bo'lsa, p to'g'ri chiziq Q tekislikning profili bo'ladi (7.8,a,b-rasm).

Chizmada tekislik profil chizig'ining gorizontal va frontal proyeksiyasi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Profil proyeksiyasi esa, proyeksiyalar o'qlariga nisbatan turlicha joylashuvi mumkin. Agar tekislik izlari bilan berilgan bo'lsa, profilning profil proyeksiyasi tekislikning profil iziga parallel bo'ladi (7.8-b, rasm).



7.8-rasm

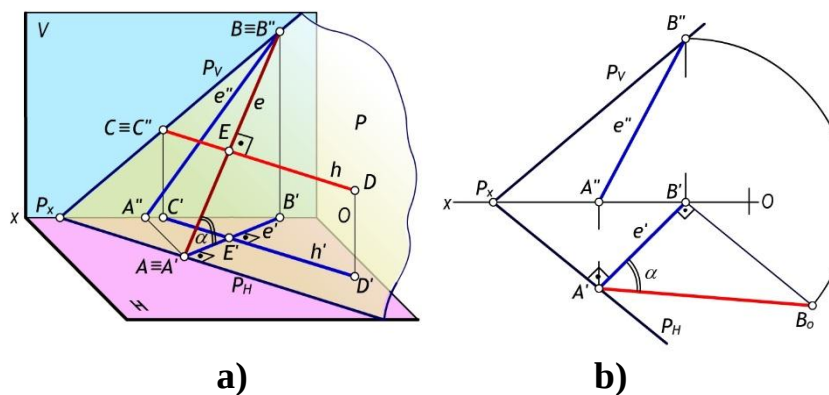
Chizmada tekislikning cheksiz ko'p asosiy chiziqlarini o'tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari doimo o'zaro parallel bo'ladilar. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig'ini o'tkazish mumkin.

Tekislikka tegishli va tekislikning bosh chiziqlaridan biri (gorizontal yoki frontal)ga perpendikulyar to'g'ri chiziq tekislikning eng katta og'ma chizig'i deb ataladi.

Agar P tekislikka tegishli e to'g'ri chiziq tekislikning gorizontaliga perpendikulyar bo'lsa, u holda e to'g'ri chiziqni P tekislikning H tekislikka nisbatan **eng katta og'ma chizig'i** deyiladi.

7.9-rasmda P tekislikning H tekislikka eng katta og'ma chizig'i tasvirlangan. Bu yerda $h \subset P$ va $h \parallel H$. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan: $\angle BED = 90^\circ$ va $ED \parallel H$ bo'lgani uchun $\angle B'E'D' = 90^\circ$ bo'ladi.

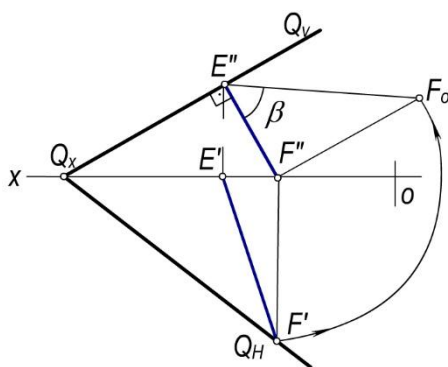
Tekislikning eng katta og'ma chizig'i orqali uning proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan ikki yoqli burchagi aniqlanadi (7.9,b-rasm). P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i P va H tekisliklar orasidagi $\angle B_0A'B'$ chiziqli burchakni ifodalaydi. Chunki $AB \perp P_H$ va $A'B' \perp P_H$ bo'lgani uchun bu ikki yoqli α burchakning qiymatini aniqlaydi.



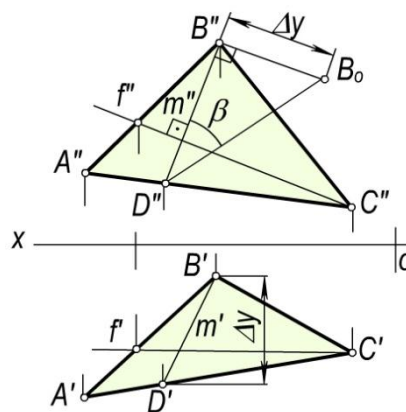
7.9-rasm

P tekislikning H proyeksiyalar tekisligiga nisbatan eng katta ogʻma chizigʻini yasash uchun P_H gorizonttal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan $e \in P$ toʻgʻri chiziqlarning gorizonttal proyeksiyasini $e' \perp P_H$ qilib, P tekislikning H tekislikka eng katta ogʻma chizigʻining gorizonttal proyeksiyasini oʻtkaziladi va Ox oʻqida $e' \cap Ox = B'$ nuqtani aniqlanadi. Soʻngra bu chiziqlarning frontal e'' proyeksiyasi A'' va B'' nuqtalar yordamida yasaladi. Hosil boʻlgan $e \in P$ toʻgʻri chiziqlarning e' va e'' proyeksiyalari P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta ogʻma chizigʻining proyeksiyalari boʻladi. Bu chiziqlarning H tekislik bilan hosil qilgan α burchagi aniqlanadi. Buning uchun toʻgʻri burchakli uchburchak $\Delta A'B'B_0$ dan foydalanilgan (7.9,b-rasm).

Xuddi shunday $Q(Q_H, Q_V)$ tekislikning V tekislik bilan hosil etgan β burchagini yasash uchun (7.10-rasm) Q tekislikning frontal Q_V izida ixtiyoriy $E'' \in Q_V$ nuqta tanlab olinadi. Bu nuqta orqali Q_V ga perpendikulyar qilib tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta ogʻma chizigʻining frontal proyeksiyasi $E''F'' \perp Q_V$ oʻtkaziladi va uning $E'F'$ gorizonttal proyeksiyasi yasaladi. Bu chiziqlarning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagi toʻgʻri burchakli $\Delta E''F''F_0$ orqali aniqlanadi. Bu burchak Q va V tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy qiymatiga teng boʻladi: $\beta = Q \wedge V$.



7.10-rasm



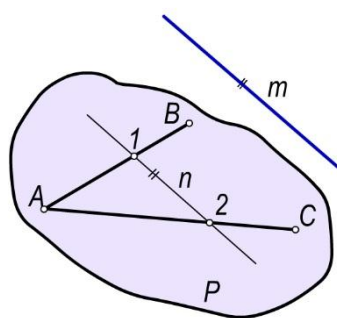
7.11-rasm

7.11-rasmida $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ orqali berilgan tekislikning V tekislik bilan hosil qilgan burchagi aniqlangan. Buning uchun ABC tekislikning $f(f', f'')$ frontalini olamiz va unga perpendikulyar qilib berilgan tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta ogʻma chizigʻi $m(m', m'')$ dan foydalanamiz.

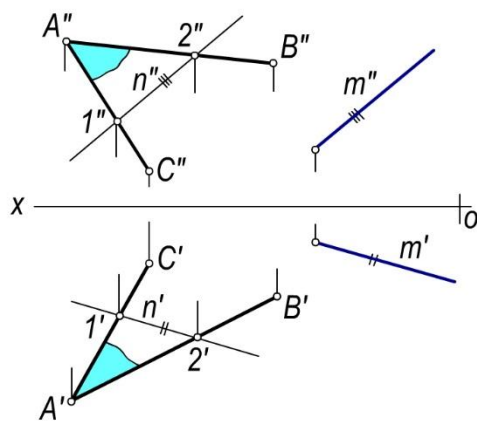
7.2. Toʻgʻri chiziq va tekisliklarning oʻzaro parallelligi

Agar fazodagi m toʻgʻri chiziq P tekislikka tegishli biror n toʻgʻri chiziqqa parallel boʻlsa, u holda bu toʻgʻri chiziq tekislikka parallel boʻladi.

Bunda $n \subset P$ boʻlib, $m \parallel n$ boʻlsa, $m \parallel P$ boʻladi (7.12 a,b-rasm).



a)



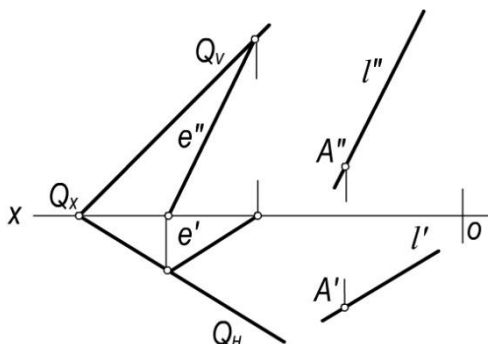
b)

7.12-rasm

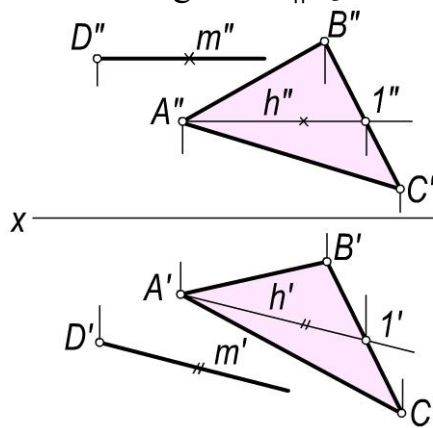
1-masala. $A (A', A'')$ nuqtadan $Q (Q_H, Q_V)$ tekislikka parallel to'g'ri chiziq o'tkazish talab qilinsin (.13-rasm).

Echish. A nuqtadan Q tekislikka parallel qilib cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Shunday to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy bittasini o'tkaziladi.

Buning uchun Q tekislikka tegishli ixtiyoriy ye (e', e'') to'g'ri chiziq tanlanadi. Bu to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalariga parallel qilib A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan to'g'ri chiziqning l' va l'' proyeksiyalarini o'tkaziladi, ya'ni ye $(e', ye'') \subset Q (Q', Q'')$ bo'lib, $l' \in A', l'' \in A''$ bo'lganda $l \parallel Q$ bo'ladi.



7.13-rasm

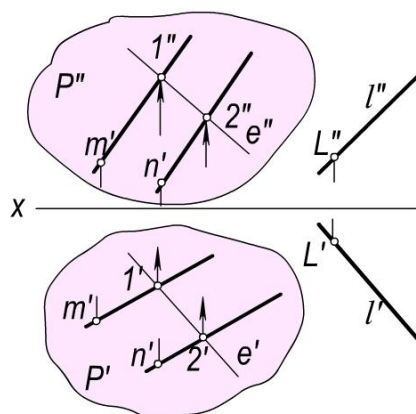


7.14-rasm

2-masala. $D (D', D'')$ nuqtadan $ABC (A'B'C', A''B''C'')$ tekisligi va gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga parallel m to'g'ri chiziq o'tkazilsin (7.14-rasm).

Echish. $\triangle ABC$ tekisligida H ga parallel, qilib uning gorizontali $h (h', h'')$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi. So'ngra D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan $m' \parallel h'$ va $m'' \parallel h''$ qilib izlangan to'g'ri chiziqning proyeksiyalari o'tkaziladi.

3-masala. P ($m \parallel n$) tekislik va l (l', l'') to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati aniqlansin (7.15-rasm).



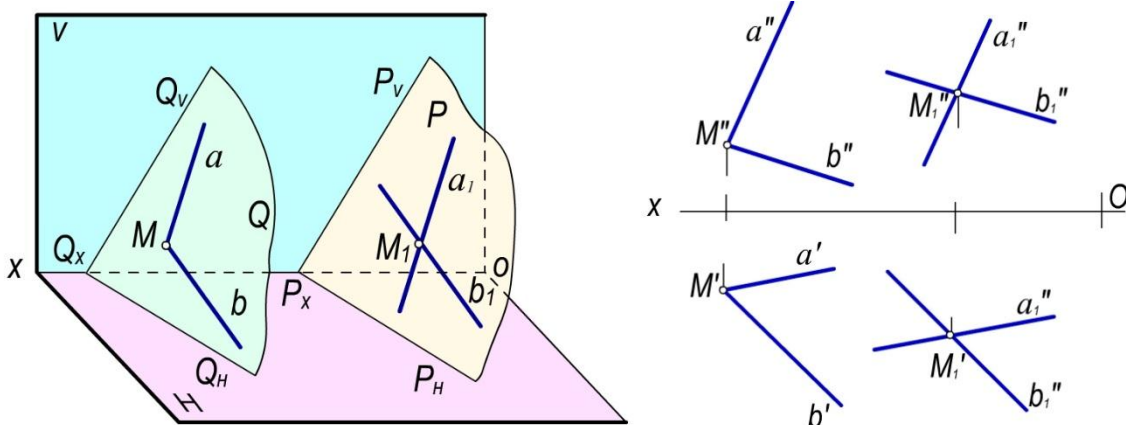
7.15-rasm

Echish. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyatini aniqlash uchun P tekislikda $ye' \parallel l'$ qilib to'g'ri chiziqlarning gorizontal proyeksiyasini o'tkaziladi va uning frontal ye'' proyeksiyasini yasaladi. Chizmada e'' to'g'ri chiziq l'' ga paralell bo'lmagani uchun l to'g'ri chiziq tekislikka paralell bo'lmaydi. l va P larni o'zaro parallelligini $l'' \parallel e''$ qilib o'tkazish bilan ham bajarish mumkin.

7.3. Tekisliklarning o'zaro parallelligi

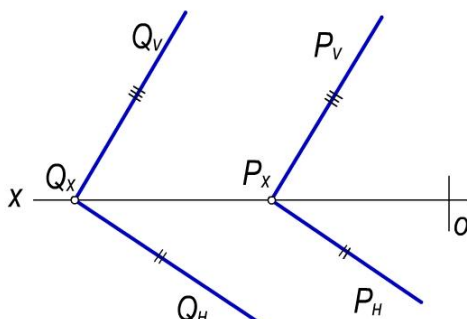
Ta'rif. Agar bir tekislikka tegishli o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqlar ikkinchi tekislikka tegishli o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq'larga mos ravishda paralell bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro paralell bo'ladilar.

Agar Q tekislikka tegishli $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ikkinchi P tekislikka tegishli $a_1 \cap b_1$ kesishuvchi to'g'ri chiziq'larga mos ravishda o'zaro paralell bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro paralell bo'ladi. Ya'ni $a \subset Q$, $b \subset Q$ bo'lib, $a \cap b$ bo'lsa va $a_1 \subset P$ va $b_1 \subset P$ bo'lib $a_1 \cap b_1$ bo'lsa hamda $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bo'lganda $Q \parallel P$ bo'ladi (7.16-rasm).

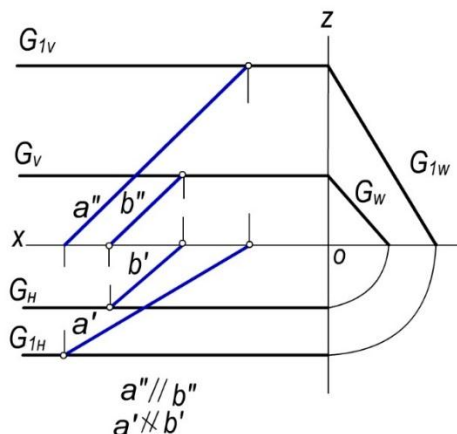


7.16-rasm

Agar fazodagi ikki tekislik bir-biriga parallel bo'lsa, chizmada bu tekisliklarning bir nomli izlari ham o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni: $Q \parallel P$ bo'lsa $Q_H \parallel P_H$, $Q_V \parallel P_V$ va $Q_W \parallel P_W$ bo'ladi (7.17-rasm).



7.17-rasm



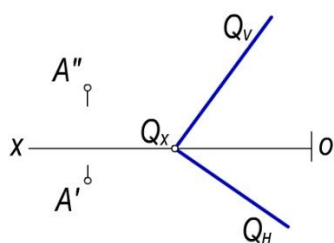
7.18-rasm

Chizmada profil proyeksiyalovchi tekisliklar uchun ularning gorizont va frontal izlari parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi. Masalan, 7.18-rasmda berilgan G va G_1 tekisliklarda $G_H \parallel G_{1H}$ va $G_V \parallel G_{1V}$ bo'lib, $G_W \parallel G_{1W}$ bo'lgani uchun $G \parallel G_1$ bo'ladi. Bu tekisliklarning o'zaro vaziyatini tekisliklarga tegishli a va b to'g'ri chiziqlar yordami bilan ham aniqlash mumkin, bunda $a \subset G_1$ va $b \subset G$ bo'lgan holda $a'' \parallel b''$ bo'lsa, $a' \nparallel b'$ bo'lgani uchun $a \nparallel b$ va $G \nparallel G_1$ bo'ladi.

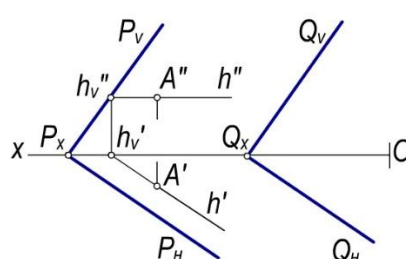
Fazodagi ixtiyoriy nuqta orqali berilgan tekislikka faqat bitta parallel tekislik o'tkazish mumkin.

1-masala. $A (A', A'')$ nuqtadan $Q (Q_H, Q_V)$ tekislikka parallel $P (P_H, P_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (7.19-a, rasm).

Echish. Tekisliklarning parallellik xususiyatlariga ko'ra P tekislikning izlari $P_H \parallel Q_H$ va $P_V \parallel Q_V$ bo'lishi shart. Misolni yechish uchun to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartlaridan foydalanib, A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikka parallel qilib ixtiyoriy to'g'ri chiziq, jumladan $h (h', h'')$ gorizontali o'tkaziladi (7.19-b, rasm).



a)

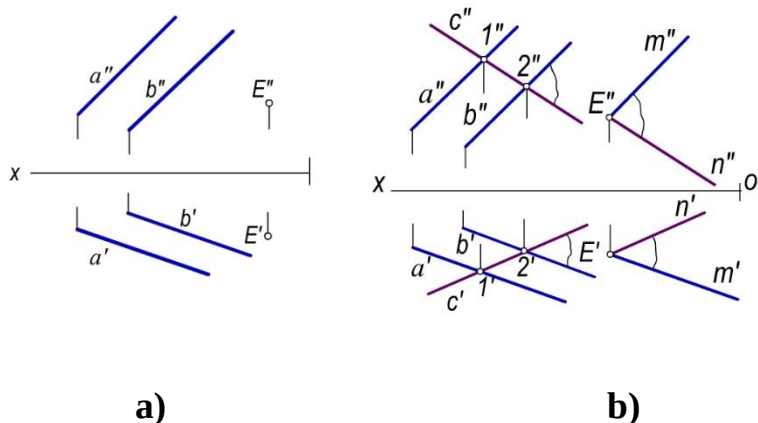


b)

7.19-rasm

Bu gorizontaling frontal izi h''_V yasaliib, undan izlangan P tekislikning P_V izini berilgan tekislikning Q_V iziga parallel qilib o'tkaziladi. So'ngra $P_V \cap Ox = P_X$ nuqtasidan Q tekislikning Q_H iziga parallel qilib izlangan tekislikning P_H izi o'tkaziladi.

2-masala. $E(E', E'')$ nuqtadan $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikka parallel tekislik o'tkazish talab qilinsin (7.20-a, rasm).



7.20-rasm

Echish. Berilgan $(a \parallel b)$ tekislikka tegishli ixtiyoriy $c(c', c'')$ to'g'ri chiziqni o'tkazib, so'ngra E nuqtaning E' va E'' proyeksiyalaridan a va b chiziqlar proyeksiyalariga mos ravishda parallel qilib o'tkazilgan $m' \cap n'$, $m'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar proyeksiyalari izlangan tekislik proyeksiyasi bo'ladi (7.20-b, rasm).

Tekislikka tegishli bo'lmagan nuqtadan mazkur tekislikka parallel bo'lgan cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Bunday to'g'ri chiziqlar to'plami berilgan tekislikka parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi.

Nazorat savollari:

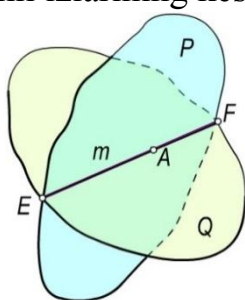
1. Qanday chiziqlar tekislikning bosh chiziqlari deyiladi?
2. Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari yordamida qanday burchaklarni aniqlanish mumkin?
3. Ikki tekislikning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi qanday?
4. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
5. Tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziq qanday ketma-ketlikda o'tkaziladi?
6. Tekis chizmada berilgan ikki tekislikning o'zaro parallelligi qanday tekshiriladi?

8 - MAVZU. TEKISLIKLARNING O'ZARO KESISHUVI

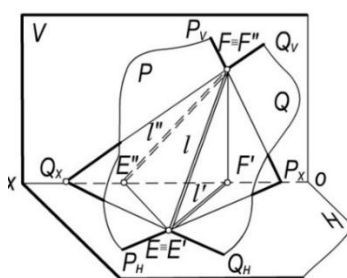
Agar ikki tekislik umumiy umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lsa, bu tekisliklar o'zaro kesishuvchi tekisliklar deyiladi.

Ikki P va Q tekisliklar m to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, ya'ni $Q \cap P = m$. Demak tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash uchun har ikkala tekislikka tegishli bo'lgan ikki E va F umumiy nuqtalarini aniqlash kifoya qiladi (8.1-rasm).

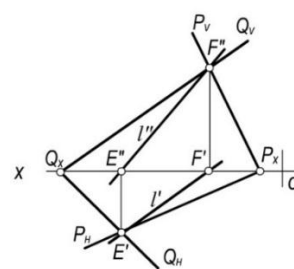
8.2-a,b rasmda P va Q kesishuvchi tekisliklar berilgan. Tasvirdan yaqqol ko'rinib turibdiki, bu tekisliklarga umumiy bo'lgan E va F nuqtalar tekisliklarning bir nomli izlarining kesishish nuqtalari bo'ladi: $E = Q_H \cap P_H$ va $F = Q_V \cap P_V$.



8.1-rasm



a)



b)

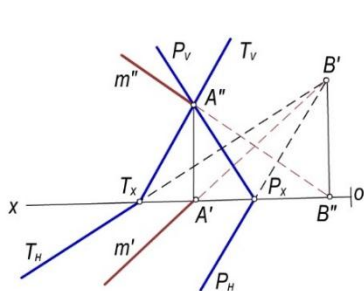
8.2-rasm

Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa Q va P tekisliklarning l kesishuv chizig'i hosil bo'ladi: $l = Q \cap P$.

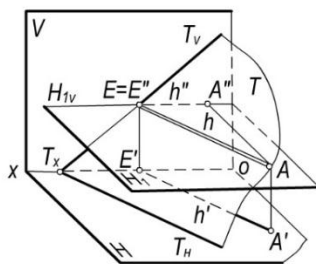
Chizmada (8.2-b,rasm) bu tekisliklarning kesishish chizig'ining proyeksiyalarini yasash uchun tekisliklarning bir nomli izlarining kesishish E va F nuqtalarining E', E'' va F', F'' proyeksiyalari aniqlanadi va nuqtalarning bir nomli proyeksiyalari o'zaro tutashtiriladi. Natijada, hosil bo'lgan l' va l'' to'g'ri chiziqlar Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi. Agar tekisliklarning izlari birinchi oktantda kesishmasa u holda bir nomli izlarini davom ettirib ularning kesishuv nuqtasini boshqa oktantda topish bilan kesishuv chizig'i nuqtalarining proyeksiyalarini yasash mumkin.

Masalan, $T (T_H, T_V)$ va $P (P_H, P_V)$ tekisliklarning (8.3-rasm) gorizontall izlari T_n va P_n ikkinchi oktantda kesishadi.

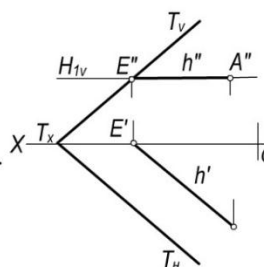
Kesishuvchi tekisliklarning biri gorizontall tekislik bo'lsa, bu tekisliklar gorizontall chiziq bo'yicha kesishadi.



8.3-rasm



a)



b)

8.4-rasm

8.4-*a,b*-rasmida umumiy vaziyatdagi T tekislik bilan H_1 gorizontal tekislikning kesishish chizig'i h gorizontal bo'ladi. haqiqatdan, H_1 gorizontal tekislikning har bir nuqtasi H tekislikdan baravar uzoqlikda joylashgani uchun, tekisliklarning kesishuvchi chizig'i $h \parallel H$ bo'ladi. Agar umumiy vaziyatdagi tekislik frontal tekislik bilan kesishgan bo'lsa, bu tekisliklar frontal bo'yicha kesishadi.

Ammo kesishuvchi tekisliklarning biri proyeksiyalovchi tekislik bo'lsa, proyeksiyalovchi tekislikning xossasiga muvofiq, ularning kesishish chizig'ining proyeksiyalaridan biri proyeksiyalovchi tekislikning izida bo'ladi (8.5-rasm).

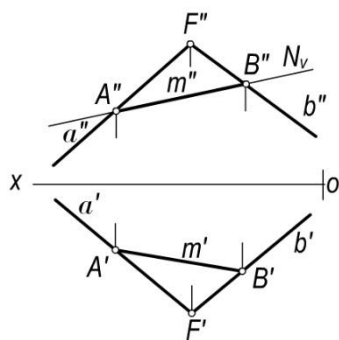
Kesishuvchi tekisliklarning bir nomli izlari chizma chegarasida kesishmasa, ularning kesishish chizig'ini yordamchi tekisliklar vositasida aniqlash mumkin. Masalan, umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ va $T(T_H, T_V)$ tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun H_1 gorizontal va V_1 frontal tekisliklardan foydalaniladi (8.6-rasm).

H_1 gorizontal tekislikning frontal izini $H_{1V} \parallel H$ qilib o'tkaziladi. Bu tekislik P tekislikni $h_1(h_1', h_1'')$, T tekislikni $h_2(h_2', h_2'')$ gorizontallar bo'yicha kesadi. Bu gorizontallarning kesishgan $E(E', E'')$ nuqtasi $E' = h_1' \cap h_2'$ va $E'' = h_1'' \cap h_2''$ P va T tekisliklarning kesishish chizig'ining umumiy nuqtalaridan biri bo'ladi.

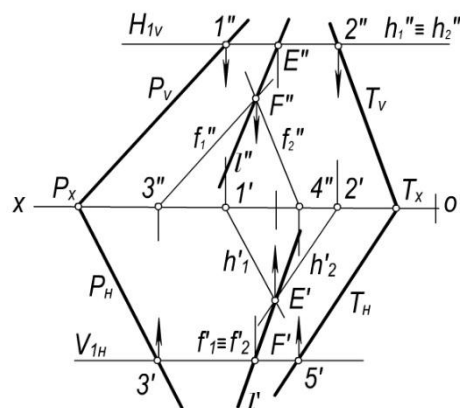
Frontal tekislikni $V_{1H} \parallel V$ qilib o'tkaziladi. Bu tekislik P va T tekisliklarni $f_1(f_1', f_1'')$ va $f_2(f_2', f_2'')$ frontallar bo'yicha kesadi. Bu frontallarning kesishish $F(F', F'')$ nuqtasi P va T tekisliklarning kesishish chizig'ining umumiy nuqtalaridan ikkinchisi bo'ladi: $F'' = f_1'' \cap f_2''$ va $F' = f_1' \cap f_2'$ bo'ladi. Natijada, E va F nuqtalarning E', F' va E'', F'' proyeksiyalarini o'zaro tutashtirsa P va T tekisliklarning l kesishish chizig'ining l' va l'' proyeksiyalari hosil bo'ladi.

8.7-*a,b*-rasmidagi umumiy vaziyatdagi $a \parallel b$ va $c \cap d$ chiziqlar bilan berilgan Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun gorizontal H_1 va H_2 tekisliklar o'tkazilgan.

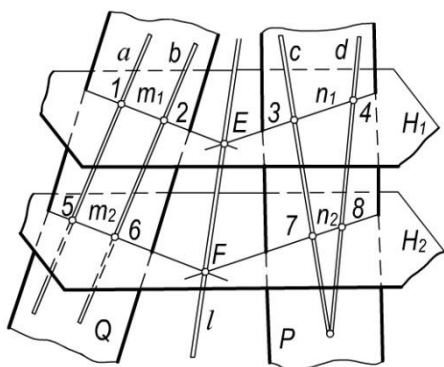
Dastlab H_1 tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish chiziqlarini aniqlash uchun tekisliklarni a, b va c, d chiziqlarini 1, 2 va 3, 4 nuqtalarda kesganligi belgilanadi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirganda, m_1 va n_1 chiziqlar hosil bo'ladi, ya'ni: $H_1 \cap Q = m_1$ va $H_1 \cap P = n_1$ bo'ladi. m_1 va n_1 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $E = m_1 \cap n_1$ Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan birinchi nuqtadir.



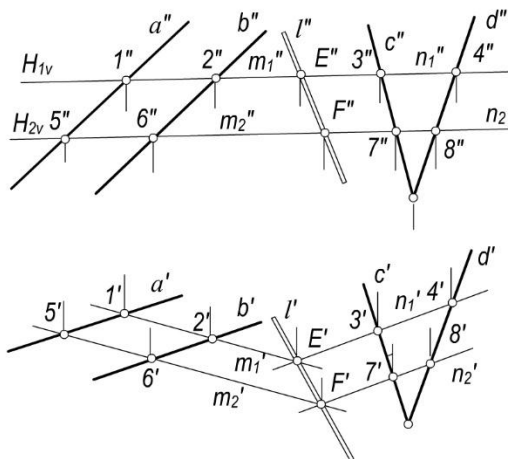
8.5-rasm



8.6-rasm



a)



b)

8.7-rasm

Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning H_2 gorizontal tekislik bilan kesishish chizig'ini aniqlanadi. Chizmada H_2 tekislik a, b va c, d chiziqlarni 5, 6 va 7, 8 nuqtalarda kesadi. Natijada: $H_2 \cap Q = m_2$ va $H_2 \cap P = n_2$ hosil bo'ladi. Rasmda $H_2 \parallel H_1$ bo'lgani uchun $m_2 \parallel m_1$ va $n_2 \parallel n_1$ bo'ladi. Q va P tekisliklarning ikkinchi umumiy F nuqtasi bo'lib u m_1 va n_2 chiziqlarning o'zaro kesishish nuqtasi bo'ladi: $F = m_2 \cap n_2$.

Har ikkala P va Q tekisliklar uchun umumiy bo'lgan E va F nuqtalarni o'zaro tutashtirsak, tekisliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.

Chizmada (8.7-b, rasm) Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun H_1 gorizontal tekislikning H_{1V} izini o'tkazib uni a'', b'' va c'', d'' chiziqlarning frontal proyeksiyalarini kesuvchi $1'', 2''$ va $3'', 4''$ nuqtalar belgilanadi. Bu nuqtalarning gorizontal $1', 2'$ va $3', 4'$ proyeksiyalarini aniqlab o'zaro tutashtiriladi. m_1' va n_1' chiziqlar Q va P tekisliklarning H_1 tekislik bilan kesishgan chiziqlarning gorizontal proyeksiyalari bo'ladi. Kesishuvchi chiziqlarning frontal m_1'' va n_1'' proyeksiyalari H_1 tekislikning H_{1V} izida bo'ladi. hosil bo'lgan m_1' va n_1' chiziqlarning kesishgan E' nuqtasi Q va P tekisliklarining kesishuv chizig'iga tegishli E nuqtaning gorizontal proyeksiyasi $E' = m_1' \cap n_1'$ bo'ladi. Bu nuqtaning E'' frontal proyeksiyasi esa H_1 tekislikning H_{1V} izida bo'ladi: $E'' \in H_{1V}$.

Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning kesishish chizig'iga tegishli, ikkinchi F nuqtasining F' va F'' proyeksiyalarini H_2 gorizontal tekislikning H_{2V} izini H_{1V} ga parallel qilib o'tkazib aniqlanadi.

Chizmadagi E', F' va E'', F'' proyeksiyalarni o'zaro tutashtiruvchi l' va l'' chiziqlar Q va P tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi.

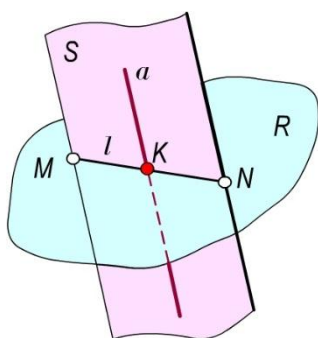
8.1. To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishishi

Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel yoki tegishli bo'lmasa bu to'g'ri chiziq tekislik bilan kesishadi.

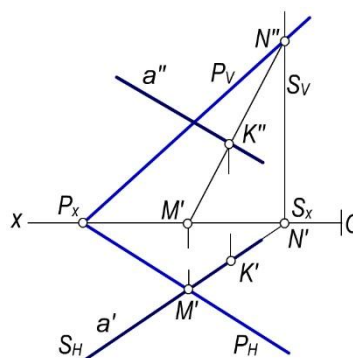
To'g'ri chiziq tekislik bilan kesishishi natijasida nuqta hosil bo'ladi.

Bu nuqtani aniqlash uchun qo'yidagi yasash algoritmlaridan foydalanadi (8.8-rasm)

- Berilgan a to'g'ri chiziqdan yordamchi S tekislik o'tkaziladi: $a \subset S$
- P va S tekisliklarning kesishish l chizig'i yasayladi: $S \cap P = l$
- a to'g'ri chiziqning l bilan kesishgan nuqtasi $K = a \cap l$ bo'ladi.
-



8.8-rasm



8.9-rasm

Natijada, K nuqta a to'g'ri chiziqqa va P tekislikka tegishli umumiy nuqta bo'ladi. Odatda, yordamchi S tekislikni proyeksiyalovchi vaziyatda o'tkaziladi.

Chizmada $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqning $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini yuqorida keltirilgan yasash algoritmlari bo'yicha aniqlaymiz (8.9-rasm). Buning uchun:

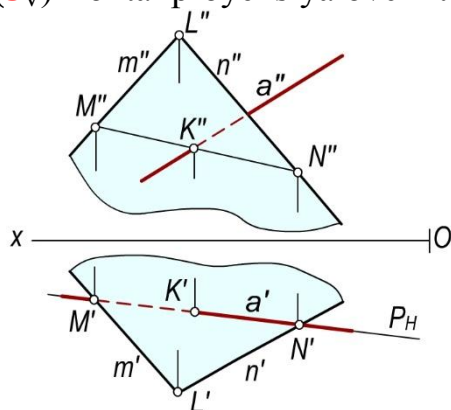
- To'g'ri chiziqning a' proyeksiyasidan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi S tekislikning S_H izini o'tkaziladi.
- S va P tekisliklarning kesishuv chizig'ining l' va l'' proyeksiyalarni yasaladi. Buning uchun tekisliklar izlarining kesishish nuqtalarining proyeksiyalari M' , M'' va N' , N'' dan foydalaniladi.
- a to'g'ri chiziqning frontal a'' proyeksiyasi S va P tekisliklarning kesishish chizig'i l ning frontal l'' proyeksiyasi bilan kesishib K nuqtaning K'' proyeksiyasi aniqlanadi: $K'' = a'' \cap l''$.

K nuqtaning K' proyeksiyasi tekislikning S_H iziga yoki a to'g'ri chiziqning a' proyeksiyasiga tegishli bo'ladi: $K' \in a'$ va $K' \in S_H$.

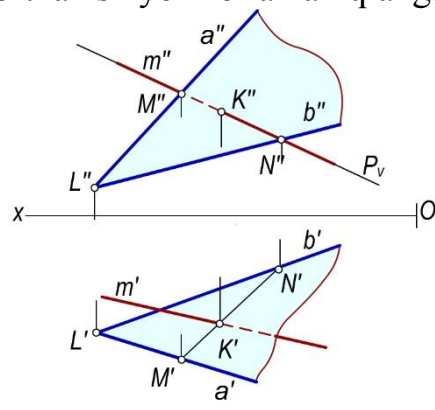
Yuqoridagi misolni a to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

$P(m \cap n)$ tekislik bilan a to'g'ri chiziqning K kesishish nuqtasining proyeksiyalari 8.9-rasmdagi rasmda a to'g'ri chiziq orqali $S(S_H)$ gorizontal

proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish bilan aniqlangan. 8.10-rasmda m to'g'ri chiziq orqali $S(S_v)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan aniqlangan.

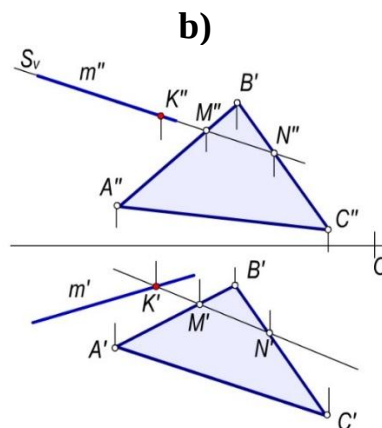
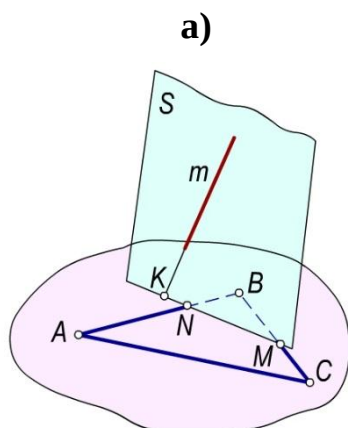


8.9-rasm



8.10-rasm

Ayrim hollarda to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasi mazkur tekislikni ifodalovchi chegaralangan ABC tekis shaklning tashqarisida bo'lishi mumkin (8.11-a, b rasm). Bunday hollarda tekislikni chegaralanmagan geometrik sirt ekanligini esda tutish lozim.



8.11-rasm

To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash algoritmidan foydalanib, turli geometrik tekis shakllarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash mumkin. Masalan, 8.12-rasmda ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) va DEF ($D'E'F'$, $D''E''F''$) uchburchaklar bilan berilgan tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari KL ($K'L'$, $K''L''$) yasalgan.

$\triangle ABC$ va $\triangle DEF$ tekisliklarning kesishish chizig'ining yasash uchun ulardan birini, masalan, $\triangle DEF$ ning EF va ED tomonlarining $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish $K(K', K'')$ va $L(L', L'')$ nuqtalarini aniqlanadi.

Buning uchun uchburchakning EF tomonidan yordamchi $T(T_v)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikni $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish 12 chizig'ining proyeksiyalari $1'2'$ va $1''2''$ bo'ladi. Uchburchakning EF tomonini

12 bilan yoki $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning proyeksiyalari K' va K'' aniqlanadi.

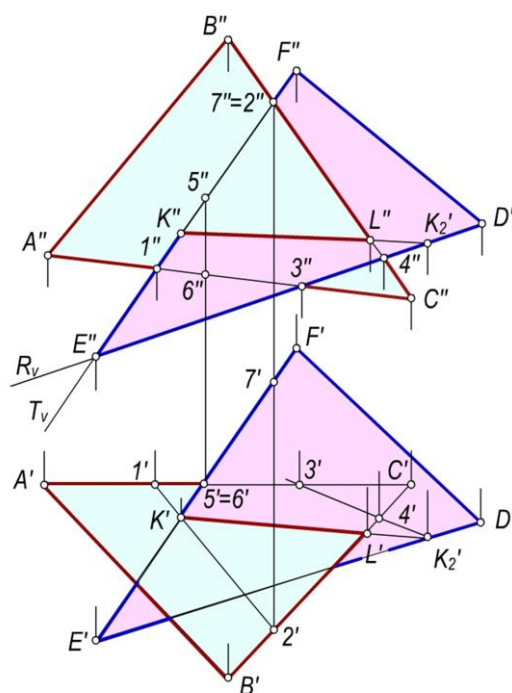
Xuddi shu tartibda DEF uchburchakning ED tomonning $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish nuqtasi M ning M' va M'' proyeksiyalarini yordamchi $S(S_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik vositasida aniqlanadi.

Chizmada hosil bo'lgan K' bilan L' va K'' bilan L'' proyeksiyalarni o'zaro tutashtirilsa, uchburchaklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari hosil bo'ladi. Uchburchaklar chegaralangan shakllar bo'lgani uchun ularning kesishish chizig'ining proyeksiyalari $K'L'$ va $K''L''$ chegarasida bo'ladi.

Uchburchaklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan ko'rinadigan yoki ko'rinmaydigan qismlarini aniqlash uchun ularning tomonlariga tegishli konkurent nuqtalaridan foydalaniladi. Masalan, H tekislikka nisbatan ko'rinishlikni aniqlash uchun $\triangle ABC$ va $\triangle DEF$ larning AC va EF tomonlarning konkurent $5 \equiv 6(5'6', 5''6'')$ nuqtalarning applikatorlar Z_5, Z_6 qiymatlari taqqoslanadi.

Agar $5(5', 5'')$ nuqta $EF(E'F', E''F'')$ tomoniga, $6(6', 6'')$ nuqta $AC(A'C', A''C'')$ tomoniga tegishli, ya'ni $5 \in EF$ va $6 \in AC$ bo'lsa, chizmada $z_5 > z_6$ bo'lgani uchun 5 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. 5 nuqta H tekislikdan 6 nuqtaga nisbatan yuqorida joylashganligi aniqlanadi. Demak, H tekislikda EF tomonning $F'K'$ qismi kuzatuvchiga ko'rinadi, $E'K'$ ning bir qismi esa $\triangle ABC$ ostida qoladi. U holda $\triangle ABC$ ni AB tomonining $A'B'$ proyeksiyasi to'liq va BC tomoni $B'C'$ proyeksiyasining $B'L'$ qismi ko'rinadi. $\triangle DEF$ ning ED tomonining $E'D'$ gorizontaal proyeksiyasining bir qismi $\triangle ABC$ ning gorizontaal $A'B'C'$ proyeksiyasi ostida qoladi.

Uchburchakning V tekislikka nisbatan ko'rinishligi aniqlash uchun VC va EF tomonlariga tegishli 2 va 7 konkurent nuqtalarining $2', 7'$ va $2'', 7''$ proyeksiyalaridan foydalanamiz. Agar $2 \in VC$ va $7 \in EF$ bo'lsa, chizmada $y_2 > y_7$ bo'lgani uchun 2 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. Shuning uchun $2(2', 2'')$ nuqta tegishli VC tomonning $B''L''$ va EF tomonning $E''K''$ qismi ko'rinadi. Shuningdek, AC tomoni $A''C''$ proyeksiyasining $1''3''$ qismi ko'rinmaydi. U holda uchburchakning ED tomonning $E''D''$ proyeksiyasi to'liq ko'rinadi.



8.12-rasm

Nazorat cavollari:

1. Ikki tekislikning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi qanday?
2. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
3. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday vaziyatda bo'ladi?

9 - MAVZU. TO'G'RI CHIZIQNING TEKISLIKKA PERPENDIKULYARLIGI

Agar to'g'ri chiziq tekislikdagi ikki o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

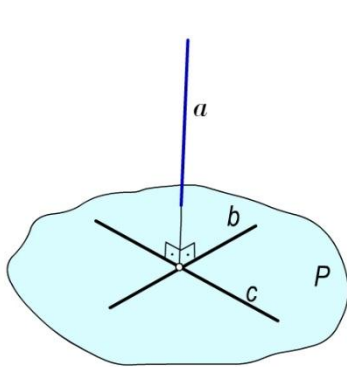
Bunda $b \subset P$ va $c \subset P$, $b \cap c$ hamda $a \perp b$ va $a \perp c$ bo'lsa, $a \perp P$ bo'ladi (9.1-rasm). Demak, tekislik perpendikulyar bulgan to'g'ri chiziq tekislikning asosiy chiziqlariga ham perpendikulyar bo'ladi. Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziq tekislikning h gorizontali va f frontaliga perpendikulyar bo'lsin (9.2-a, rasm).

To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga muvofiq $\angle AKD = 90^\circ$ bo'lib, $KD \parallel H$ bo'lgani uchun bu to'g'ri burchakning gorizental proyeksiyasi $\angle A'K'D' = 90^\circ$ bo'ladi. Demak, $A'K' \perp C'D'$ yoki $a' \perp h'$ bo'ladi.

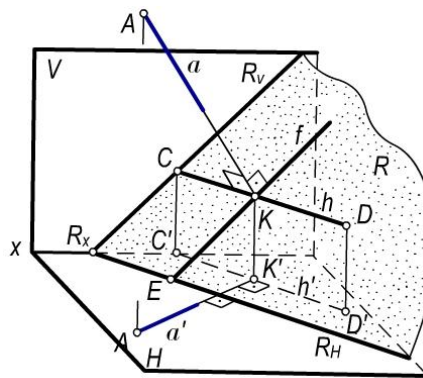
P tekislikning h gorizontali gorizental proyeksiyasi $h' \parallel P_H$ bo'lgani uchun $a' \perp P_H$ bo'ladi. Shuningdek, $a'' \perp f''$ yoki $a'' \perp P_V$ bo'lishini isbotlash qiyin emas (9.2,a-rasm). Demak, $a \perp P$ bo'lsa, $a' \perp h'$ va $a'' \perp f''$ yoki $a' \perp P_H$ va $a'' \perp P_V$ bo'ladi (9.2,b-rasm). Fazoda to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lishi uchun, uning gorizental proyeksiyasi tekislik gorizontalinining gorizental proyeksiyasiga, frontal proyeksiyasi esa tekislik frontalining frontal proyeksiyasiga va profil proyeksiyasi tekislik profilining profil proyeksiyasiga perpendikulyar bo'lishi kerak.

Agar tekislik chizmada izlari bilan berilgan bo'lsa, unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalari tekislikning bir nomli izlariga mos ravishda perpendikulyar bo'ladi (9.3-rasm).

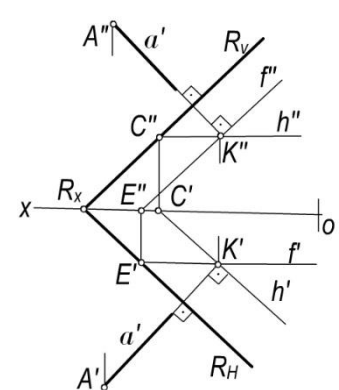
To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro perpendikulyarlik shartidan foydalanib ko'pgina metrik masalalarni yechish mumkin.



9.1-rasm



a)



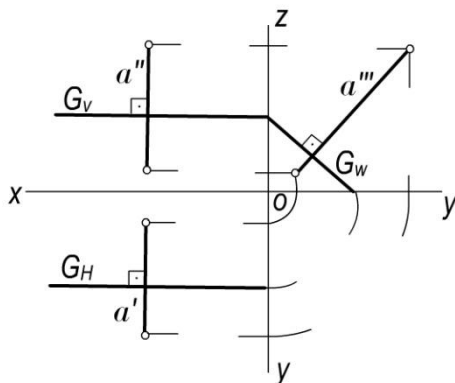
b)

9.2-rasm

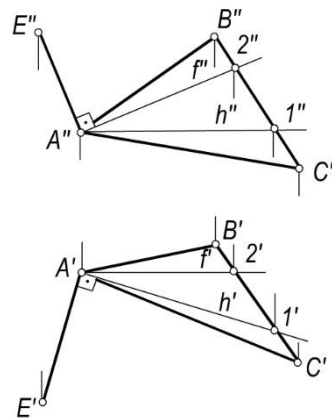
1-masala. $\triangle ABC$ bilan berilgan tekislikning A uchidan unga perpendikulyar o'tkazilsin (9.4-rasm).

Echish. Masalani quyidagi algoritm bo'yicha yechamiz.

1. $\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$) tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali va $f(f', f'')$ frontali o'tkaziladi.
2. Tekislikning A nuqtasining A' va A'' proyeksiyalaridan ixtiyoriy uzunlikda $A'E' \perp h'$ va $A''E'' \perp f''$ qilib perpendikulyarning proyeksiyalarini yasaladi.



9.3-rasm



9.4-rasm

2-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali $l(l', l'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazilsin (9.5-rasm).

Echish. Buning uchun:

- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \perp l'$ va $h'' \parallel Ox$ qilib izlangan tekislik gorizontalinig proyeksiyalarini o'tkaziladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $f' \parallel Ox$ va $f'' \perp l''$ qilib tekislik frontalinig proyeksiyalarini o'tkaziladi;
- hosil bo'lgan $h \cap f(h' \cap f' \wedge h'' \cap f'')$ kesishuvchi chiziqlar izlangan tekislikni ifoda qiladi.

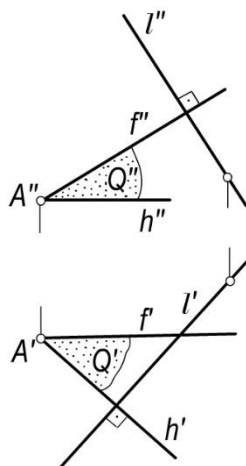
Tekislikning gorizontali $h \perp l$ va frontali $f \perp l$ bo'lgani uchun bu tekislik l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.

3-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali o'tuvchi va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislikning izlari qurilsin (9.6-rasm).

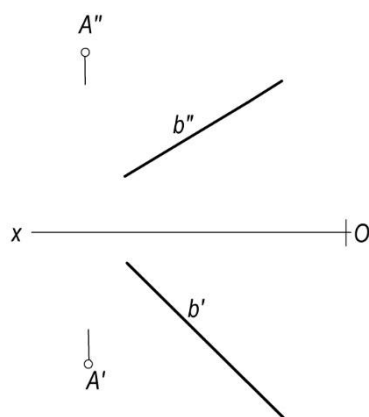
Echish.

- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \ni A'$ va $h' \perp b'$ va $h'' \ni A''$ va $h'' \parallel Ox$ qilib tekislikning gorizontali o'tkaziladi (9.7-rasm).
- gorizontalinig frontal B izining B' va B'' proyeksiyalarini yasaladi.
- Q tekislikning Q_V frontal izini $Q_V \ni B''$ va $Q_V \perp b''$ qilib o'tkaziladi.

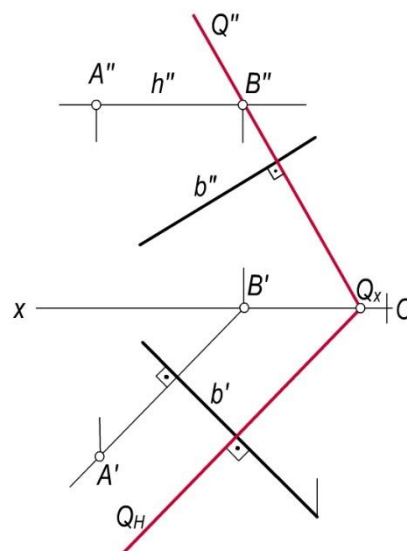
Tekislikning Q_H gorizont izini esa Q_X dan $Q_H \ni Q_X$ va $Q_H \perp b'$ (yoki $Q_H \parallel h'$) qilib o'tkaziladi.



9.5-rasm

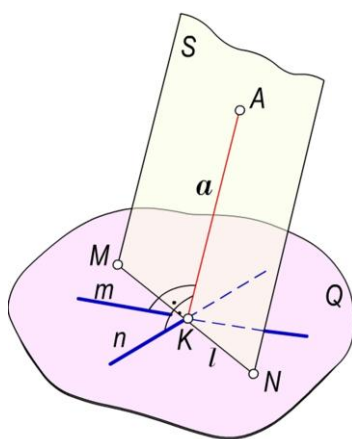


9.6-rasm



9.7-rasm

Natijada, $Q_H \perp b'$ va $Q_V \perp b''$ bo'lgani uchun $Q \perp b$ bo'ladi. Bu misolni tekislikning frontal chizig'ini o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.



9.8-rasm

Nuqta va tekislik orasidagi masofani aniqlash. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan aniqlanadi. Bu perpendikulyarning uzunligini aniqlash uchun uning tekislikdagi asosini yasash zarur.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani qo'yidagi yasash algoritmi bo'yicha aniqlanadi (9.8-rasm).

- A nuqtadan Q tekislikka a perpendikulyar o'tkaziladi: $a \ni A$ va $a \perp Q$.

- Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishgan K nuqtasi (asosi) aniqlanadi: $K = a \cap Q$.

Buning uchun:

- a perpendikulyardan o'tuvchi yordamchi $S \supset a$ tekislik o'tkaziladi;
- Q va S tekisliklarning l kesishish chizig'i yasaladi;
- a perpendikulyarning tekisliklarning kesishish chizig'i l bilan kesishgan K nuqtasi topiladi: $K = a \cap l$. Chizmadagi AK kesma A nuqtadan Q tekislikkacha bo'lgan izlangan masofa bo'ladi.

1-masala. Berilgan $A (A', A'')$ nuqtadan $Q (Q_H, Q_V)$ tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlansin (9.9-rasm).

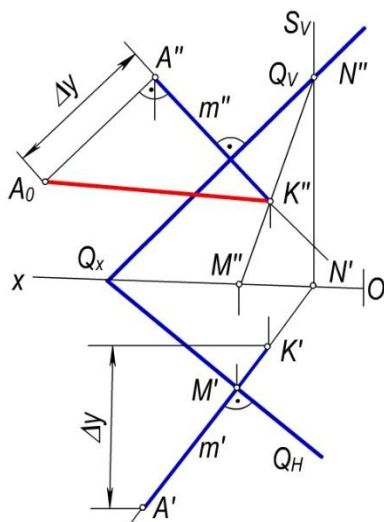
Yechish. Yuqorida keltirilgan yasash algoritmiga asosan:

- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikning Q_H va Q_V izlariga mos ravishda perpendikulyarning a' va a'' proyeksiyalari o'tkaziladi: $a' \perp Q_H$ va $a'' \perp Q_V$.
- Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalarini aniqlash uchun:
 - a perpendikulyardan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $S(S_H, S_V)$ tekislik o'tkaziladi;
 - Q va S tekisliklarning kesishish chizig'i $MN(M'N', M''N'')$ bilan $a(a', a'')$ perpendikulyarning kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini aniqlanadi.
- Chizmada hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ izlangan masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Bu masofaning haqiqiy o'lchami to'g'ri burchakli $\Delta A_0 A'' K''$ ning $A_0 K''$ gipotenuzasi bo'ladi.

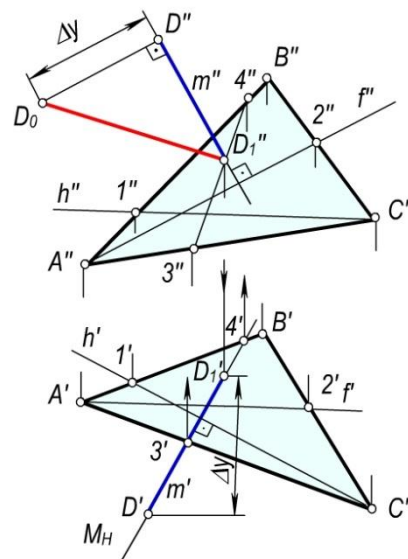
2-masala. $D(D', D'')$ nuqtadan $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (9.10-rasm).

Yechish. Masalani quyidagi yasash algoritmi asosida yechiladi.

- ΔABC tekislikning gorizontal va frontal chiziqlarining proyeksiyalari o'tkaziladi.
- D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan perpendikulyarning m' va m'' proyeksiyalari $m' \perp h'$ va $m'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi.
- Perpendikulyarning ΔABC tekislik bilan kesishgan nuqtasi D_1 ning D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlanadi.



9.9-rasm

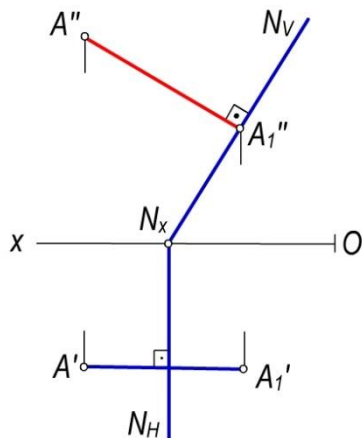


9.10-rasm

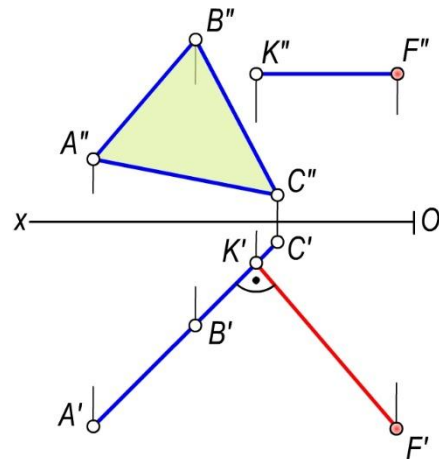
- m perpendikulyardan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislik o'tkaziladi;

- $\triangle ABC$ va M tekisliklarning kesishish chizig'ining $3'4'$ va $3''4''$ proyeksiyalarini yasaladi;
- tekisliklarning kesishish chizig'i proyeksiyalari $3'4'$ va $3''4''$ bilan m' , m'' perpendikulyarning kesishish D_1 nuqtasining D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlanadi: $D_1'' = m'' \cap 3''4''$ va $D_1' \in m'$

Chizmada hosil bo'lgan $D_1'D_1''$ va $D_1'D_1''$ proyeksiyalar izlangan DD_1 masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Uning haqiqiy o'lchami to'g'ri bo'rchakli $\triangle D_0D_1''$ ning D_0D_1'' gipotenuzasidan iborat bo'ladi.



9.11-rasm

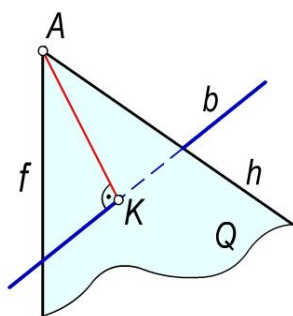


9.12-rasm

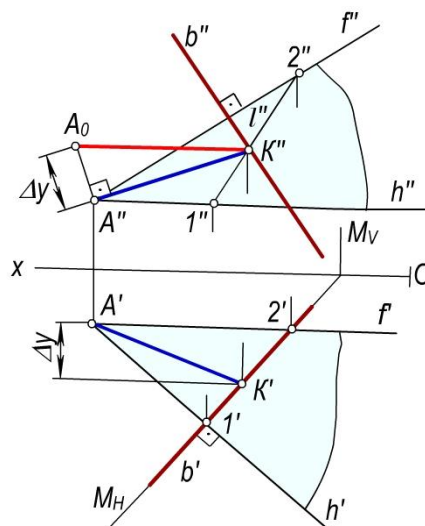
Agar tekislik xususiy vaziyatda berilsa, u holda berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash uchun qo'shimcha yasashlar talab qilinmaydi. Masalan, $A(A', A'')$ nuqtadan $N(N_H, N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislikkacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami (9.11-rasm) nuqtaning frontal A'' proyeksiyasidan tekislikning N_V frontal iziga tushirilgan perpendikulyarning $A''K''$ frontal proyeksiyasiga teng bo'ladi.

9.12-rasmda $F(F', F'')$ nuqtadan gorizontaal proyeksiyalovchi $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$ tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash tasvirlangan.

Nuqta va to'g'ri chiziq orasidagi masofani aniqlash. To'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orasidagi masofa shu nuqtadan mazkur to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan o'lchanadi.



a)



b)

9.13-rasm

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani quyidagi tartibda aniqlanadi (9.13,a-rasm).

- A nuqtadan b to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib Q tekislik o'tkaziladi: $Q \ni A, Q \perp b$.
- Berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish K nuqtasini aniqlanadi: $A_I = b \cap Q$.
- A va K nuqtalarni o'zaro tutashtirilsa hosil bo'lgan AK kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa bo'ladi.

Chizmada $A(A', A'')$ nuqtadan $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani (9.13,b-rasm) aniqlash uchun:

- A nuqtadan b to'g'ri chiziqqa perpendikulyar Q tekislik o'tkazish uchun bu tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali va $f(f', f'')$ frontalini $A(A', A'')$ nuqtadan $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib o'tkaziladi: ya'ni $h' \ni A'$, $h' \perp b'$ va $h'' \ni A''$, $h'' \parallel O_x$ hamda $f' \ni A'$, $f'' \parallel O_x$ va $f' \ni A'$, $f'' \perp b''$.
- Berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalari aniqlash uchun $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqdan yordamchi gorizantal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislik o'tkaziladi. Q va M tekisliklarning kesishish chizig'i $12 = Q \cap M$ ning $1'2'$, $1''2''$ proyeksiyalari yasaladi.
- Chizmada b to'g'ri chiziqning 12 chiziq bilan kesishgan K nuqtasining frontal proyeksiyasi $K'' = b'' \cap 1''2''$ bilan aniqlanadi. Uning K' gorizantal proyeksiyasi esa b' chiziqqa tegishli bo'ladi.
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalarini K nuqtaning K' va K'' proyeksiyalari bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ kesmalar A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha masofaning proyeksiyalari bo'ladi.

Chizmadagi A_0K'' kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami bo'lib, u to'g'ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ yasash yo'li bilan aniqlangan.

Shunindek, bu turdagi misolni $A(A', A'')$ nuqtadan o'tuvchi $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqa perpendikulyar bo'lgan Q tekislikni izlari orqali o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

9.1. Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi.

Tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi barcha tekisliklar berilgan tekislikka perpedikulyar bo'ladi.

Bu ta'rifdan quyidagi xulosaga kelish mumkin, ya'ni tekislikka tegishli to'g'ri chiziqa perpendikulyar bo'lgan har qanday tekislik mazkur tekislikning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi (9.14 -rasm).

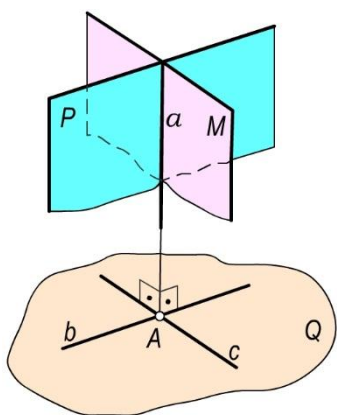
Demak, bir-biriga perpendikulyar bo'lgan tekisliklarni yasash ikki usul bilan bajarilishi mumkin:

- Tekislikka perpedikulyar to'g'ri chiziqdan tekislik o'tkazish
- Tekislikka tegishli to'g'ri chiziqa perpedikulyar tekislik o'tkazish.

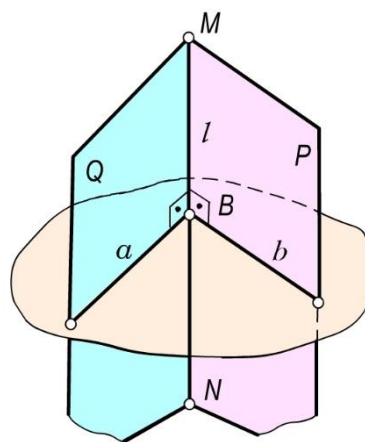
Agar biror tekislik ikki tekislikka umumiy bo'lgan to'g'ri chiziqa perpendikulyar bo'lsa, u holda bu tekislik har ikkala tekisliklarga ham perpendikulyar bo'ladi.

Ma'lumki, Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan to'g'ri chiziq ularning l kesishish chizig'i bo'ladi. Tekisliklarning l kesishish chizig'ida ixtiyoriy B nuqta tanlab olamiz (9.15-rasm). Bu nuqtadan l ga perpendikulyar qilib a va b chiziqlarni o'tkazamiz. Natijada $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar T tekislikni hosil qiladi. Bu tekislik esa berilgan Q va P tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi.

Demak, berilgan T tekislikka perpedikulyar bo'lgan l to'g'ri chiziqdan o'tuvchi har qanday tekislik unga perpendikulyar bo'ladi.



9.14-rasm



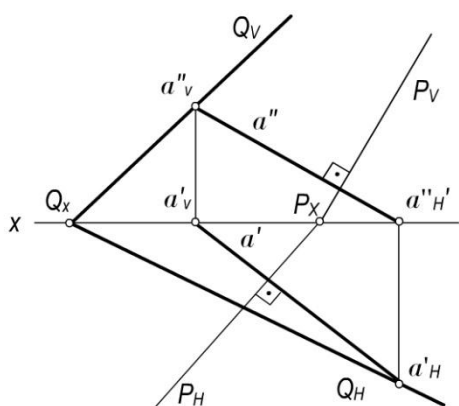
9.15-rasm

1-masala. $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar va Q_x dan o'tuvchi Q tekislik izlari bilan o'tkazilsin (9.16 -rasm).

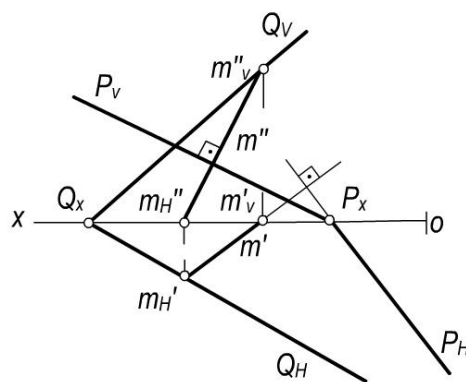
Echish.

- P tekislikka perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy a to'g'ri chiziq o'tkaziladi.
- Bu to'g'ri chiziqning a_H', a_H'' va a_V', a_V'' izlarining proyeksiyalarini yasaladi.
- Izlangan Q tekislikning gorizontali Q_H izini $Q_H \supset a_H'$ va $Q_H \supset Q_x$ qilib o'tkaziladi, uning frontal Q_V izini $Q_V \supset a_V''$ va $Q_V \supset Q_x$ qilib o'tkaziladi.

Bu masalani quyidagicha yechish ham mumkin: Q tekislikka perpendikulyar va P_x dan o'tuvchi tekislikni o'tkazish uchun (9.17 -rasm) Q tekislikda ixtiyoriy $m \supset Q$ to'g'ri chiziq olamiz. P tekislikning izlarini P_x dan $P_H \perp m'$ va $P_V \perp m''$ qilib o'tkaziladi. Natijada, $P \perp Q$ bo'ladi.



9.16-rasm



9.17-rasm

2-masala. Kesishuvchi $a \cap b (a' \cap b', a'' \cap b'')$ chiziqlar bilan berilgan tekislikka $d (d', d'')$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi perpendikulyar tekislik o'tkazish talab qilinsin (9.18 -rasm).

Echish:

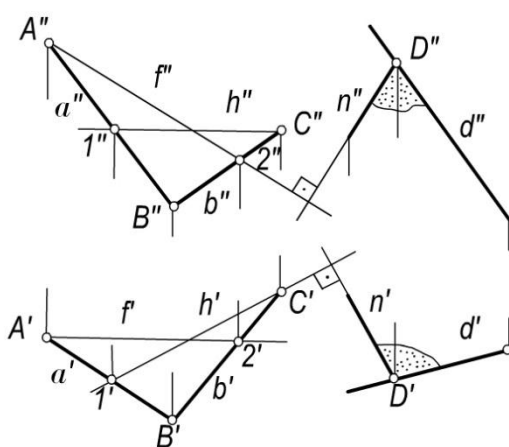
- berilgan tekislikning gorizontali va frontalining h', h'' va f', f'' chiziqlari o'tkaziladi;
- d to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqtasidan $n(n', n'')$ to'g'ri chiziqning proyeksiyalarini $n' \perp h'$ va $n'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi. Hosil bo'lgan $d' \cap n'$ va $d'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar hosil qilgan tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar tekislikning proyeksiyalari bo'ladi.

3-masala. $A(A', A'')$ nuqtadan $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan $T(T_H, T_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (9.19 -rasm).

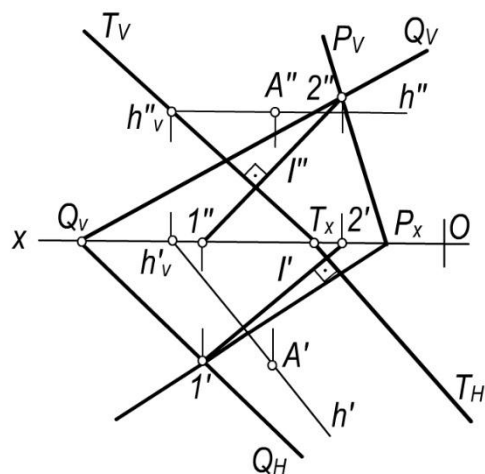
Yechish:

- Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ining l' , l'' proyeksiyalarni yasaladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan tekislikning gorizontali (yoki frontali) ni tekisliklarning kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib o'tkaziladi: $h' \perp l' \wedge h' \ni A'$ va $h'' \parallel Ox \wedge h'' \ni A''$ va uning izlarning h'_v , h''_v proyeksiyalarni yasaladi;
- izlangan tekislikning frontal izini $T_v \supset h''$, $T_v \perp l''$ $T_H \ni T_x$, $T_H \perp l'$ qilib o'tkaziladi.

Natijada, berilgan ikki tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchinchi tekislik yasaladi: $T \perp Q$ va $T \perp P$.



9.18-rasm



9.19-rasm

Nazorat savollari:

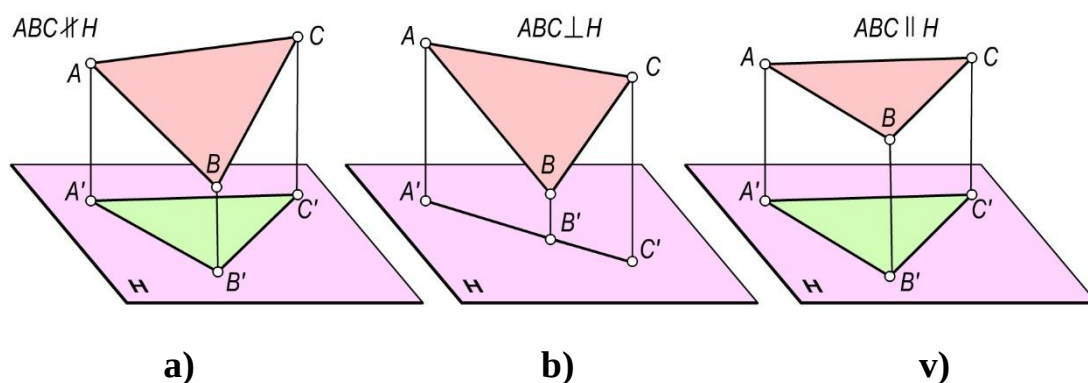
1. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday vaziyatda bo'ladi?
2. Qanday tekisliklar o'zaro perpendikulyar deyiladi?
3. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?
4. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?

10 – MAVZU. ORTHOGONAL PROYEKSIYALARNI QAYTA TUZISH USULLARI.

Geometrik shaklning proyeksiyalaridagi holatlari uning fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan joylashuviga bogʻliq. Umumiy vaziyatdagi geometrik shakllarning proyeksiyalari proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi (10.1,a,b–rasm).

Agar geometrik shaklning proyeksiyasi originaliga teng boʻlib proyeksiyalansa, bu shaklga oid metrik xarakteristikalarini, masalan, $\triangle ABC$ tomonlarining haqiqiy oʻlchamlari, uchlaridagi burchaklarning qiymatlari va boshqa xarakteristikalarini aniqlash mumkin (10.1,v–rasm).

Demak, shunday xulosaga kelish mumkinki, agar geometrik shakl proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan fazoda xususiy vaziyatda berilsa yoki umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakl xususiy vaziyatga keltirilsa, bu bilan metrik va pozision masalalarni yechish mumkin. Shuning uchun ayrim hollarda umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarning berilgan ikki proyeksiyasi asosida maqsadga muvofiq ravishda yangi xususiy vaziyatga keltirilgan proyeksiyalari tuziladi.



10.1-rasm.

Geometrik shaklning berilgan ortogonal proyeksiyalari asosida yangi proyeksiyalarini yasash *ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish* deyiladi.

Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarni xususiy vaziyatga keltirish asosan ikki usulda bajariladi.

1. Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shaklni fazoda harakatlantirib, proyeksiyalar tekisligiga nisbatan xususiy vaziyatga keltirish *tekis–parallel harakatlantirish usuli* deyiladi.
2. *Aylantirish usuli*. Bunda proyeksiyalar tekisliklari oʻz holatlarini oʻzgartirmaydi. Proyeksiyalanuvchi shakl ularga qulay holga kelguncha biror oʻq atrofida aylantiriladi.
3. Geometrik shaklning fazoviy vaziyati oʻzgartirilmasdan proyeksiyalar tekisliklari sistemasini unga nisbatan xususiy vaziyatga kelguncha yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtirish - *proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli* deyiladi.

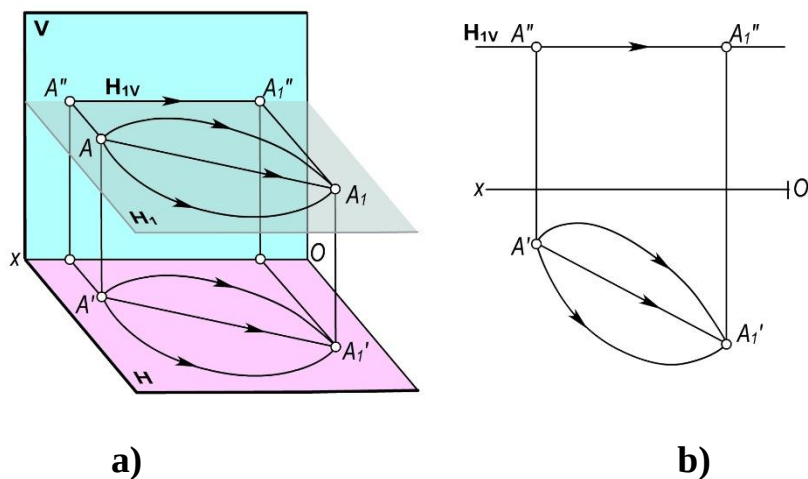
Quyida bu usullarni alohida koʻrib chiqamiz.

10.1. Tekis–parallel harakatlantirish usuli

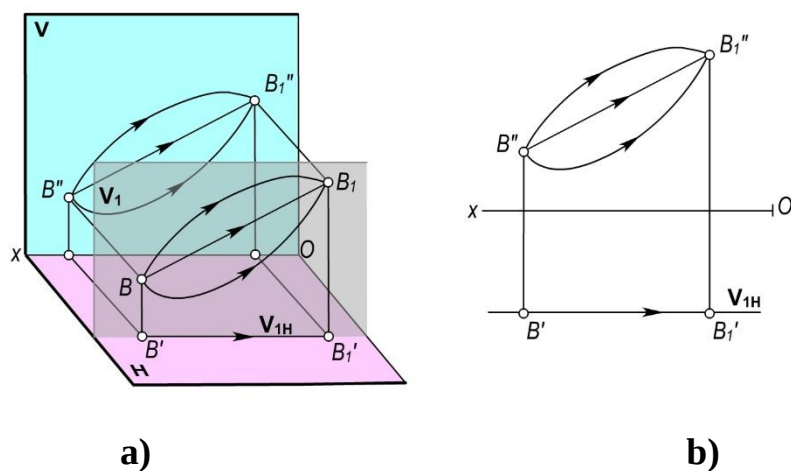
Tekis–parallel harakatlantirish usulida geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklari sistemasiga nisbatan vaziyati maqsadga muvofiq ravishda o'zgartirish uchun uning barcha nuqtalarining harakatlanish trayektoriyalari bir–biriga parallel tekisliklarda harakatlantirish yo'li bilan bajariladi.

Harakatlantirish tekisliklarining vaziyati va geometrik shakl nuqtalari harakatlanish trayektoriyasining xarakteriga qarab tekis–parallel harakatlantirish usuli *parallel harakatlantirish* va *aylantirish* usullariga bo'linadi.

Parallel harakatlantirish usuli. Bu usulda fazoda berilgan geometrik shaklning har bir nuqtasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan gorizontaal yoki frontal tekisliklarda harakatlantiriladi. Shuning natijasida hosil bo'lgan yangi proyeksiyasi proyeksiyalar tekisligiga nisbatan vaziyati o'zgaradi. 10.2,a,b–rasmda A nuqta H_1 gorizontaal tekislikda harakatlantirilib A_1 vaziyatga keltirilgan. Bunda A nuqta A_1 vaziyatga qanday trayektoriya (to'g'ri yoki egri chiziqlar) bo'ylab harakatlantirilishidan qat'iy nazar, uning A'' frontal proyeksiyasi (A_1'' vaziyatga) tekislikning H_{1V} izi bo'yicha harakatlanadi. Shuningdek 10.3,a,b–rasmdagi B nuqta V_1 frontal tekislikda B_1 vaziyatga har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilmasin, uning B' proyeksiyasi V_{1H} izi bo'yicha harakatlanib, B'_1 vaziyatni egallaydi.



10.2-rasm.



10.3-rasm.

Yuqorida bayon etilganlardan quyidagi xulosaga kelish mumkin:

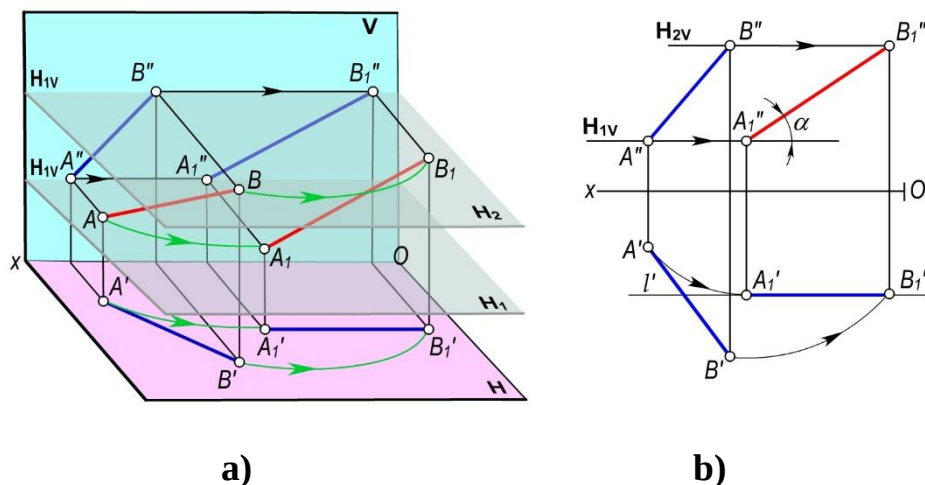
- Fazoda nuqtani gorizontaal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning frontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.
- Fazoda nuqtani frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning gorizontaal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Parallel harakatlantirish usulining bu xususiyatlaridan foydalanib ayrim masalalarning yechilishini ko'rib chiqamiz.

1-masala. Umumiy vaziyatda berilgan AB kesmani V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (10.4,a,b-rasm).

Echish. $AB \parallel V$ bo'lishi uchun chizmada $A'B' \parallel Ox$ bo'lishi kerak. Demak, bu misolni yechish uchun H tekislikda (10.4,a-rasm) ixtiyoriy A_1' nuqta tanlab, u orqali Ox o'qiga parallel l' to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $A_1'B_1' = A'B'$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning yangi frontal proyeksiyasini parallel harakatlantirish xususiyatiga muvofiq aniqlaymiz: kesmaning A'' va B'' proyeksiyalari mos ravishda H_{1V} va H_{2V} bo'yicha Ox o'qiga parallel ravishda harakatlanadi va A_1'' , B_1'' vaziyatlarga keladi. Natijada, V tekislikka parallel $A_1B_1(A_1'B_1', A_1''B_1'')$ to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari hosil bo'ladi.

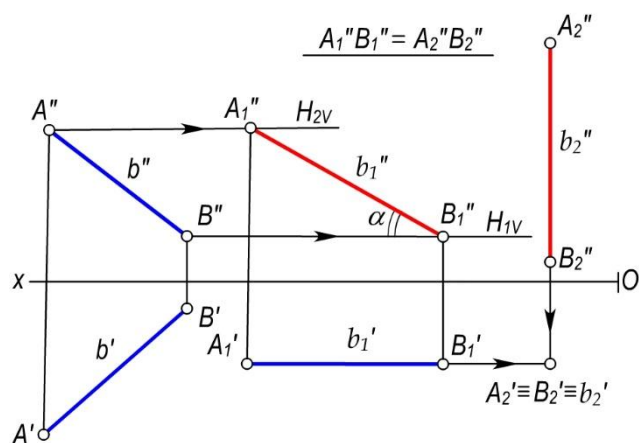
Shuningdek, AB kesma V tekislikka parallel bo'lishi bilan birga uning haqiqiy o'lchami va H tekislik bilan tashkil etgan α burchagi aniqlanadi.



10.4-rasm.

2-masala. Umumiy vaziyatdagi $AB(A'B', A''B'')$ kesma H tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (10.5-rasm).

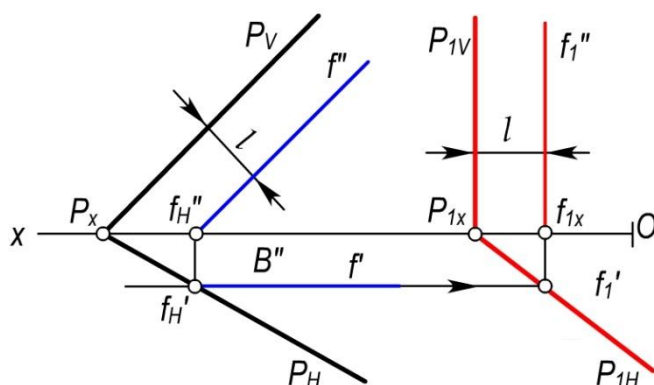
Echish. Dastlab AB kesmani harakatlantirib, V tekislikka parallel $A_1B_1(A_1'B_1', A_1''B_1'')$ vaziyatga keltiramiz. So'ngra ixtiyoriy B_2'' nuqta tanlab olamiz va bu nuqtadan $b_2'' \perp Ox$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $A_2''B_2'' = A_1''B_1''$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning gorizontaal proyeksiyasi b_1' chiziq bo'yicha harakatlanib, $A_2'' \equiv B_2'' \equiv b_2''$ bo'lib proyeksiyalanadi.



10.5-rasm.

3-masala. Umumiy vaziyatda berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislik H tekisligiga perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (10.6-rasm).

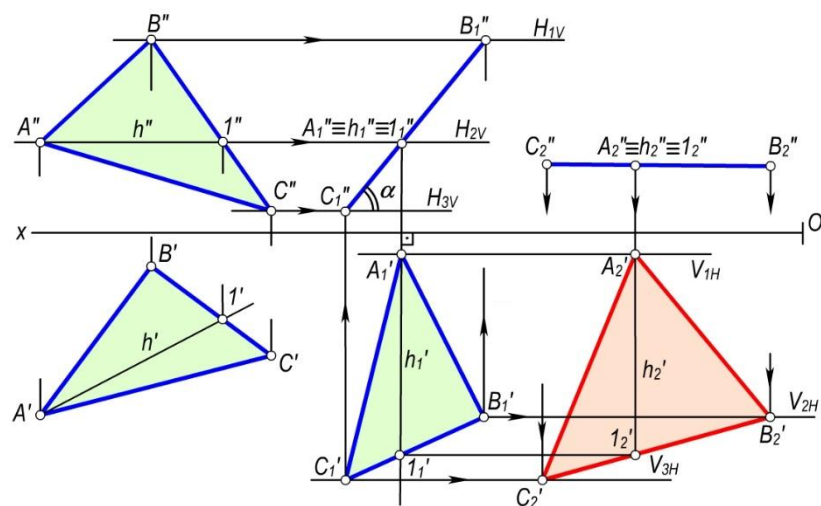
Echish. P tekislikning ixtiyoriy $f(f', f'')$ frontali o'tkaziladi. So'ngra Ox o'qida ixtiyoriy nuqtadan $f_1'' \perp Ox$ qilib o'tkazamiz va chizmada ko'rsatilgan ℓ masofada tekislikning frontal izi $P_{1V} \perp Ox$ (yoki $P_{1V} \parallel f_1''$) qilib o'tkazamiz. Tekislikning P_{1H} gorizontali izi P_{1x} va f_1' nuqtalardan o'tadi.



10.6-rasm

4-masala. Umumiy vaziyatdagi $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$ tekislikni H tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (10.7-rasm).

Echish. 1. $\triangle ABC$ ni avval V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun uchburchakning $h(h', h'')$ gorizontali o'tkazamiz. Chizmada ixtiyoriy A'_1 nuqta tanlab, bu nuqtadan $h'_1 \perp Ox$ qilib $\triangle A'_1B'_1C'_1 = \triangle A'B'C'$ yangi gorizontali proyeksiyasini yasaymiz.



10.7-rasm.

2. $\triangle ABC$ ning yangi vaziyati V tekislikka perpendikulyar bo'lgani uchun uning frontal proyeksiyasi $C_1''A_1''B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi.

3. Ixtiyoriy C_2'' nuqta tanlab, bu nuqtadan Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $C_2''A_2''B_2''=C_1''A_1''B_1''$ bo'lgan kesmani o'lchab qo'yamiz. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq uchburchak gorizontal proyeksiyasining A_2' B_2' va C_2' nuqtalari mos ravishda V_{1N} , V_{2N} va V_{3N} frontal tekisliklarning izlari bo'yicha harakatlanishidan $\triangle A_2'B_2'C_2'$ hosil bo'ladi. Natijada, $\triangle A_2'B_2'C_2'$ H ga parallel bo'ladi va berilgan uchburchakning haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgan proyeksiyasi hosil bo'ladi.

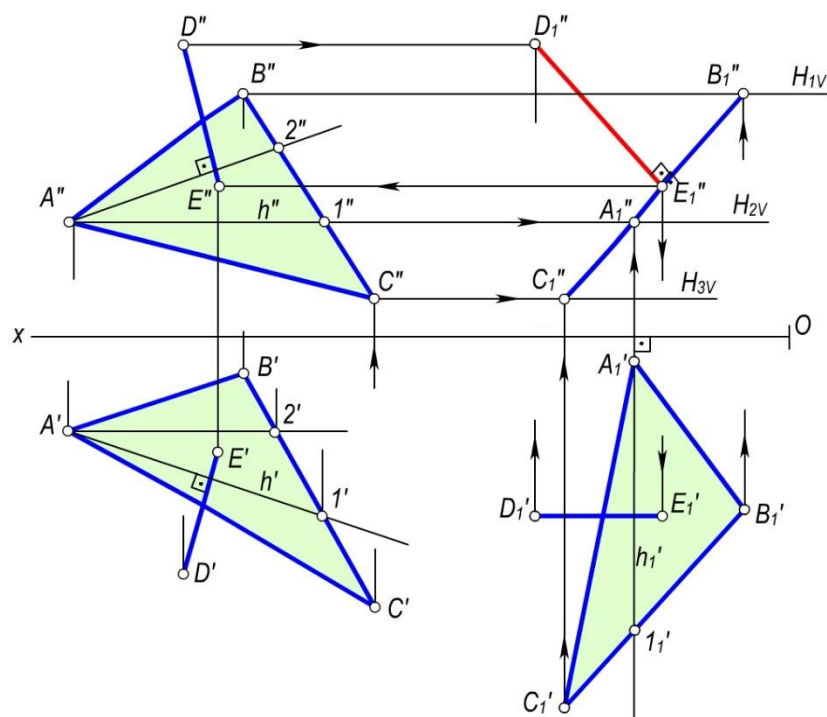
Chizmadagi α burchak $\triangle ABC$ ning H tekislik bilan hosil qilgan burchagini ko'rsatadi.

4-masala. $D(D', D'')$ nuqtadan $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$ tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (10.8-rasm).

Echish.

1. $\triangle ABC$ ni parallel harakatlantirib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga, masalan, V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun mazkur uchburchakni $A_1'l_1'$ ning $h(h', h'')$ gorizontalini V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirib, $A_1'l_1'=A_1'l_1'$ va $\triangle A_1'B_1'S_1'=\triangle A'B'S'$ qilib yasaladi. D' nuqtaning D_1' vaziyati ham planimetrik yasashlarga asosan yasaladi. Bunda uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi $C_1''A_1''B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi. Parallel harakatlantirishning qoidalariga asosan D nuqtaning yangi D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlaymiz.

2. Masofaning haqiqiy o'lchami D_1'' nuqtadan $C_1''A_1''B_1''$ kesmaga tushirilgan $D_1''E_1''$ perpendikulyar bilan o'lchanadi. Izlangan masofaning gorizontal proyeksiyasi $D_1'E_1'$ esa Ox o'qiga parallel bo'ladi.



10.8-rasm.

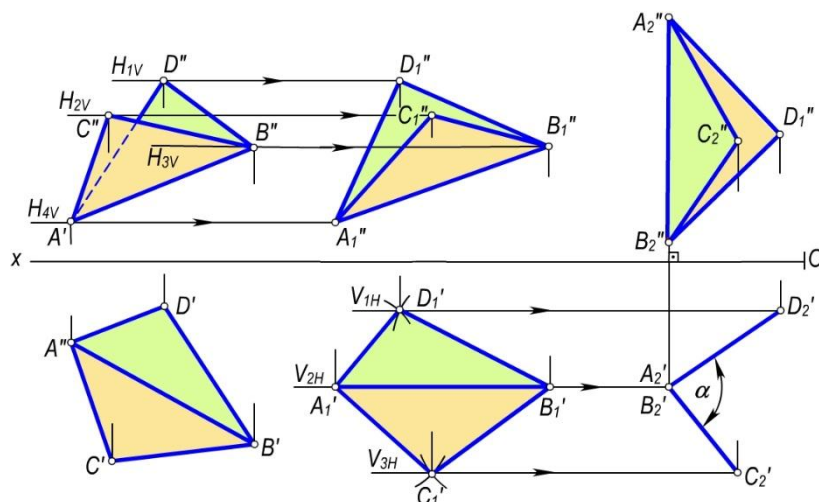
3. Izlangan masofaning proyeksiyalarini tekislikning berilgan proyeksiyalarida yasash uchun D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali va $f(f', f'')$ frontaliga tushirilgan perpendikulyarlar proyeksiyalari bilan aniqlanadi. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq E nuqtaning E'' va E' proyeksiyalarini ko'rsatilgan yo'nalish bo'yicha D' va D'' proyeksiyalardan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida topamiz.

5–masala. $CABD(C'A'B'D', C''A''B''D'')$ ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi parallel harakatlantirish usulidan foydalanib aniqlansin (10.9–rasm).

Echish:

1. AB qirrani V tekislikka parallel qilib joylashtiriladi. Buning uchun chizma maydonining ixtiyoriy joyida $A'B'-A_1'B_1'$ va $A_1'B_1' \parallel Ox$ qilib joylashtiriladi.
2. A_1' va B_1' nuqtalarga nisbatan D_1' , C_1' nuqtalarni planimetrik yasashlardan foydalanib yasaymiz. Hosil bo'lgan A_1 , C_1 , B_1' va D_1' nuqtalar yangi gorizontaal proyeksiya bo'ladi.
3. Parallel harakatlantirish qoidasiga asosan A'' , C'' , B'' va D'' nuqtalar Ox o'qiga parallel chiziq bo'yicha harakat qilganligidan A_1'' , C_1'' , B_1'' va D_1'' yangi frontal proyeksiyalari yasaladi.
4. AB qirrani H tekisligiga perpendikulyar qilib joylashtiriladi. Buning uchun $A_1''B_1''=A_2''B_2''$ ni chizmaning ixtiyoriy joyida $A_2''B_2'' \perp Ox$ qilib joylashtiramiz. $A_1''B_1''$ yangi frontal proyeksiya bo'ladi.
5. C_2'' va D_2'' nuqtalar esa A_2'' va B_2'' nuqtalarga nisbatan planimetrik yasashlar bilan yasaladi.

6. Parallel ko'chirish qoidasiga asosan A'_1 , C'_1 , B'_1 va D'_1 nuqtalar Ox ga parallel harakat qilib, $A''_2 \equiv B''_2$, C'_2 va D'_2 nuqtalarning yangi gorizontal proyeksiyalarini hosil qiladi.
7. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, $\angle D_1'A_2'C_2' = \alpha$ chiziqli burchak AB qirradagi ikki yoqli burchakni o'lchaydi. Bu misolni AB qirrani H ga parallel qilib olishdan boshlab ham yechish mumkin.



10.9-rasm.

10.2. Aylantirish usuli

Aylantirish usuli parallel harakatlantirish usulining xususiy holi hisoblanadi. Bu usulda geometrik shaklga tegishli nuqtaning trayektoriyasi ixtiyoriy bo'lmay, balki berilgan biror o'qqa nisbatan aylana bo'yicha harakatlanadi. Aylana markazi berilgan o'qda joylashgan bo'lib, aylanish radiusi esa harakatlanuvchi nuqta bilan aylanish o'qi orasidagi masofaga teng bo'ladi yoki aylanish tekisligini aylanish o'qi bilan kesishgan nuqtasi bo'ladi.

Aylanish o'qlari proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan perpendikulyar, parallel, shuningdek, proyeksiyalar tekisligiga tegishli va boshqa vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

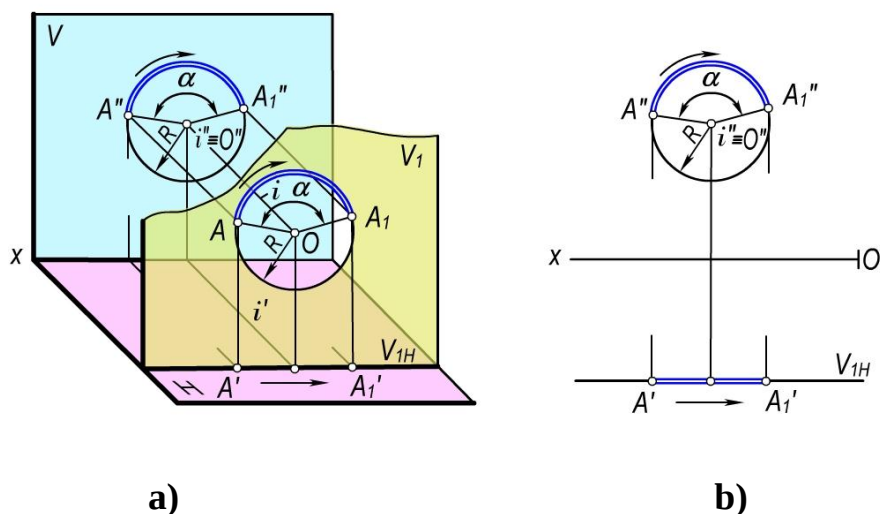
Quyida turli vaziyatlarda joylashgan aylanish o'qlari atrofida aylantirish usullarni ko'rib chiqamiz.

10.2.1. Geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish. Nuqtani aylantirish. H va V tekisliklar sistemasida ixtiyoriy

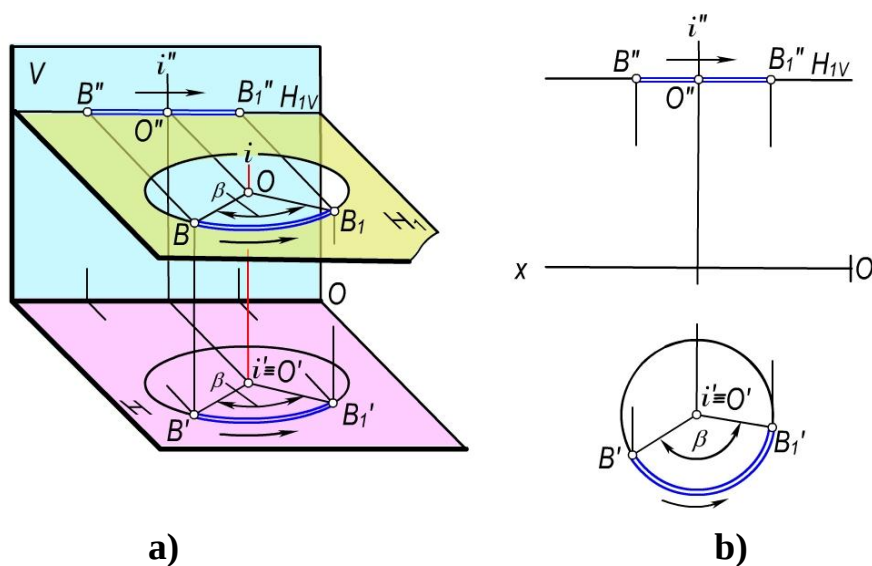
A nuqta va i aylanish o'qi berilgan bo'lsin (10.10 a-rasm). Agar A nuqtani $i \perp V$ aylanish o'qi atrofida harakatlantirsak, mazkur nuqta V tekislikka parallel V_1 tekislikda radiusi OA ga teng aylana bo'yicha harakatlanadi. Shuningdek, A nuqtaning harakatlanish trayektoriyasining gorizontal proyeksiyasi V_1 tekislikning V_{1N} izi bo'yicha harakat qiladi. Chizmada V_1 tekislik V tekislikka parallel bo'lgani uchun A nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, gorizontal proyeksiyasi $V_{1N} \parallel Ox$ bo'yicha harakat qiladi (10.10-rasm, b).

B nuqtaning H tekislikka perpendikulyar i o'qi atrofida aylantirilishi 10.11, a-rasmda ko'rsatilgan. B nuqta B_1 vaziyatga radiusi OB ga teng aylana bo'yicha H

tekislikka parallel bo'lgan N_1 tekislikda harakatlanadi. Bunda N_1 tekislik H tekislikka parallel bo'lgani uchun B nuqta harakatlanish trayektoriyasining gorizontaal proyeksiyasi aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi N_1 tekislikning N_{1V} izi bo'yicha Ox ga parallel bo'lib harakatlanadi. (10.11,b–rasm).



10.10-rasm.



10.11-rasm.

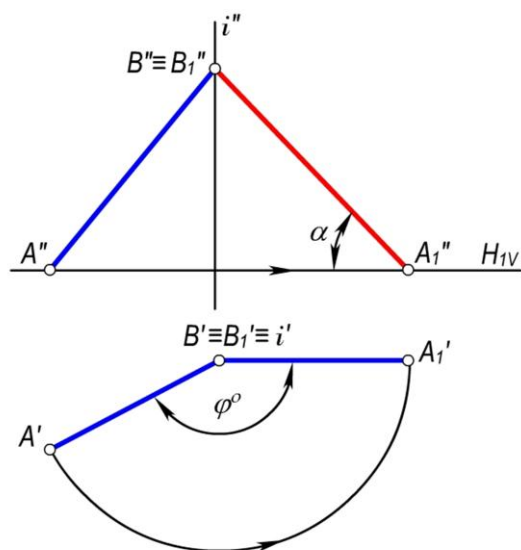
Yuqorida bayon qilinganlardan quyidagi xulosalarga kelamiz:

1-xulosa. Agar A nuqta frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, mazkur nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, gorizontaal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

2-xulosa. Agar nuqta gorizontaal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Nuqtani proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish qoidalariga asosan umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shakllarni xususiy yoki talab qilingan vaziyatga keltirish mumkin.

1–masala. Umumiy vaziyatdagi $AB(A'B', A''B'')$ kesmani V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin. (10.12–rasm).



10.12-rasm.

Echish. AB kesmaning biror, masalan B uchidan $i \perp H$ aylantrish o'qi o'tkaziladi. So'ngra bu o'q atrofida kesmaning $A'B'$ gorizontall proyeksiyasini $A'B' \parallel Ox$ vaziyatga kelguncha aylantiramiz. Bunda AB kesmaning A'' nuqtasi $N_{1V} \parallel Ox$ bo'yicha harakatlanib, A''_1 vaziyatni egallaydi. Shaklda hosil bo'lgan AB kesmaning yangi $A'_1B'_1$ va $A''_1B''_1$ proyeksiyalari uning V tekislikka parallelligini ko'rsatadi. Shakldagi α burchak AB kesmani H tekislik bilan hosil etgan burchagi bo'ladi.

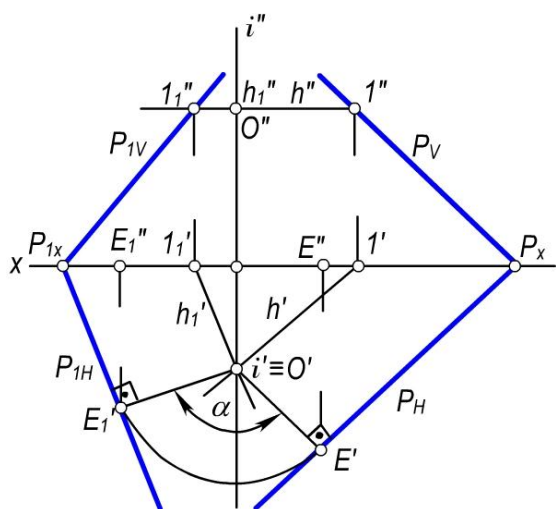
2–masala. Izlari bilan berilgan umumiy vaziyatdagi P tekislikni $i \perp H$ o'qi atrofida α burchakka aylantirilish talab qilinsin (10.13-rasm).

Echish. P tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali i aylantrish o'qi orqali o'tkaziladi va $h \cap i = O(O', O'')$ aniqlanadi. So'ngra O' nuqtadan P_N ga $O'E'$ perpendikulyar tushiriladi. Hosil bo'lgan $O'E'$ berilgan P tekislikni i o'q atrofida aylantirish radiusi bo'ladi. Tekislikning P_N gorizontall izi $O'E'$ radius bo'yicha α burchakka aylantirilganda, u P_{1N} vaziyatni egallaydi.

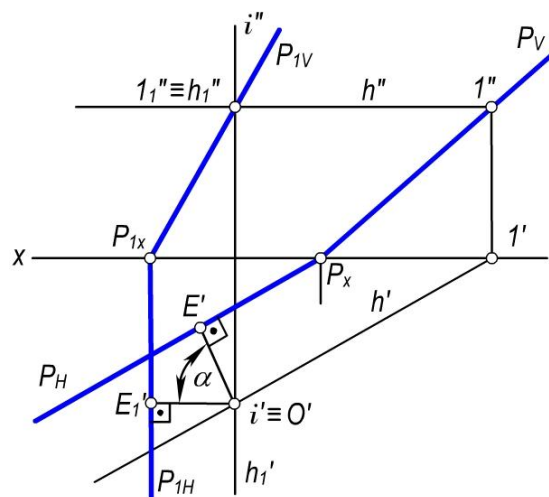
Tekislikning yangi P_{1V} frontal izini aniqlash uchun uning gorizontallidan foydalanamiz. Ma'lumki, P tekislik α burchakka aylantirilganda uning $h(h', h'')$ gorizontali $h_1(h'_1, h''_1)$ vaziyatni egallaydi. Shuning uchun tekislikning P_{1V} izini yasashda P_{1X} va $1_1''$ nuqtalar tutashtiriladi.

3–masala. Umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislikni $i(i', i'') \perp H$ o'q atrofida aylantirib frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (10.14–shakl).

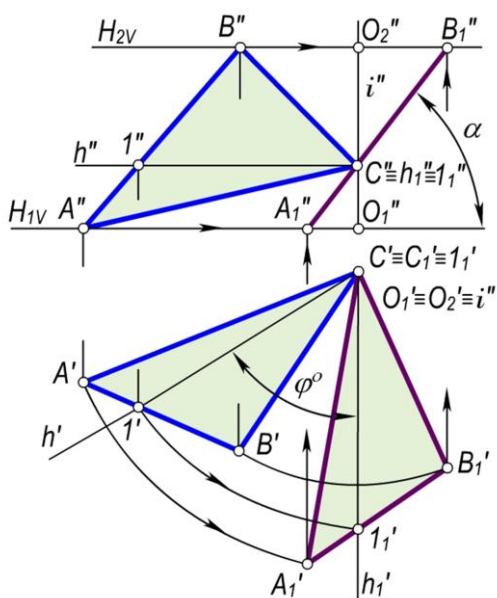
Echish. P tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali $i(i', i'')$ o'qi orqali o'tkaziladi va gorizontallning i' o'qi bilan kesishish nuqtasi $O(O', O'')$ topiladi. Tekislik bilan uning $h(h', h'')$ gorizontali O' atrofida aylantirilib, proyeksiyalovchi, ya'ni $h'_1 \perp Ox$ vaziyatga keltiriladi. Gorizontallning h'' frontal proyeksiyasi esa $h''_1 \equiv 1_1''$ vaziyatda bo'ladi. Tekislikning yangi P_{1V} frontal izi P_{1X} va $1_1''$ nuqtalardan o'tadi.



10.13-rasm.



10.14-rasm.



10.15-rasm.

4–masala. $\triangle ABC (\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$ tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan α burchagini aniqlansin (10.15–rasm).

Echish. Izlangan α burchakni aniqlash uchun berilgan $\triangle ABC$ tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish kerak bo'ladi. Buning uchun uchburchakning biror, masalan, C nuqtasidan $i' \perp H$ aylanish o'qi o'tkaziladi va bu o'q atrofida uchburchakni $h_1 \perp V$ (epyurda $h'_1 \perp V$) vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bunda, uchburchakning A, B va C nuqtalari ham φ° burchakka harakatlanadi. Chizmada uchburchak uchlarining yangi A'_1, B'_1 va C'_1 proyeksiyalari orqali uning $A''_1B''_1C''_1$ frontal proyeksiyalarini aniqlanadi. Bu

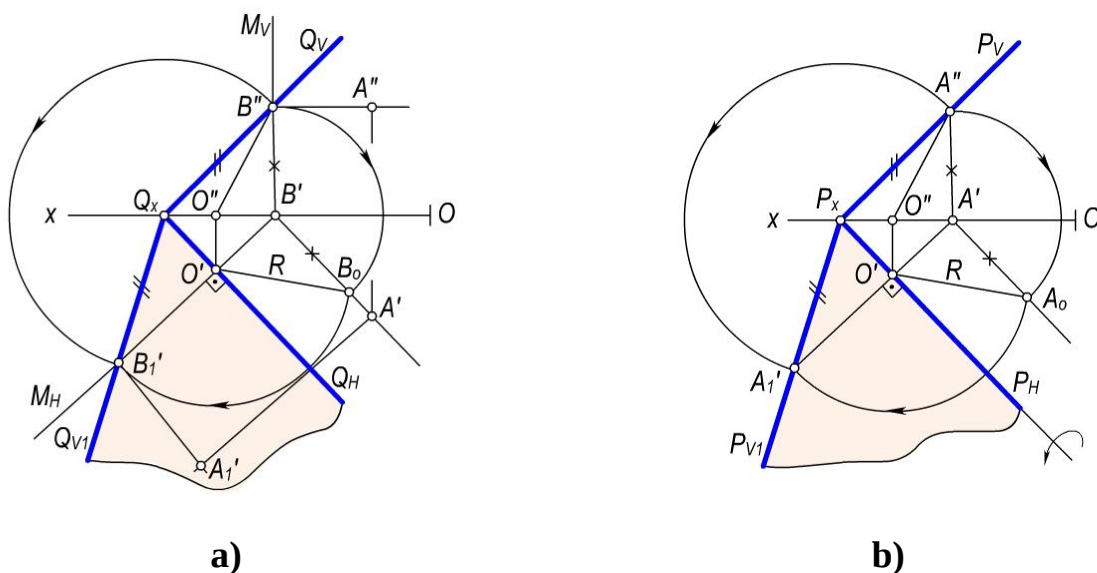
nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, $A''_1B''_1C''_1$ kesma (uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi) hosil bo'ladi. Bu kesmaning Ox o'qi bilan tashkil etgan α burchagi $\triangle ABC$ ni H tekislik bilan hosil etgan burchagiga teng bo'ladi.

10.2.2. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklariga tegishli o'q atrofida aylantirish yoki tekislikning izi atrofida aylantirish. Aylanish o'qi sifatida umumiy vaziyatdagi tekislikning gorizontali yoki frontal izlaridan biri qabul qilinadi (10.16–rasm). Bu holda tekislik biror izi atrofida aylantirilib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga jiplashtiriladi. Agar aylanish o'qi sifatida tekislikning gorizontali izi qabul qilinsa, bu tekislikni gorizontali proyeksiyalar tekisligi bilan jiplashtirish mumkin. Shuningdek, tekislikni frontal izi atrofida aylantirib, uni frontal proyeksiyalar tekisligiga jiplashtiriladi.

Tekisliklarni proyeksiyalar tekisligiga jiplashtirish yo'li bilan mazkur tekislikka tegishli bo'lgan tekis shakllarning haqiqiy o'lchamini aniqlash mumkin

yoki umumiy vaziyatida berilgan tekislikka tegishli bo'lgan har qanday geometrik masalalarni yechish mumkin.

10.16,a–rasmda umumiy vaziyatdagi Q tekislikni Q_N gorizontali izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish ko'rsatilgan. Tekislikning gorizontali izi aylanish o'qi sifatida qabul qilingani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Bu tekislikni H tekislikka jipslashtirish uchun mazkur tekislikka tegishli biror nuqtaning H tekislikka jipslashtirish kifoya. Bunday nuqta sifatida tekislikning frontal iziga tegishli $B(B', B'')$ nuqtani olish mumkin. Bu nuqta orqali Q_N ga perpendikulyar M gorizontali proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. B nuqta $O'B_0 = R$ radiusli yoy bo'yicha M_N iz bilan kesishguncha aylantiriladi. Natijada, hosil bo'lgan B_1 nuqta bilan Q_x ni o'zaro tutashtirsak, Q tekislikni H tekislikka jipslashtirilgan vaziyatiga ega bo'lamiz. Tekislikni bunday jipslashtirganda unga tegishli geometrik shakllar H tekislikka jipslashib, haqiqiy o'lchamlarida proyeksiyalanadi.



10.16-rasm.

10.16,a–rasmdan shuni aniqlash mumkinki, Q tekislikni Q_N izi atrofida aylantirib, uni H tekislikka jipslashtirishda Q_V iziga tegishli $Q_x B_1$ kesma o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgani uchun $Q_x B'' = Q_x B_1$ bo'ladi. Demak, chizmada $Q(Q_N, Q_V)$ tekislikni H tekislikka jipslashtirish uchun uning Q_V izida tanlab olingan $B \equiv B''$ nuqtani va Q_x markazdan $Q_x B''$ radius bilan yoy chizib, M tekislikning M_N izi bilan kesishgan B_1 nuqta aniqlanadi. So'ngra B_1 va Q_x nuqtalardan tekislikning Q_{V1} izi o'tkaziladi.

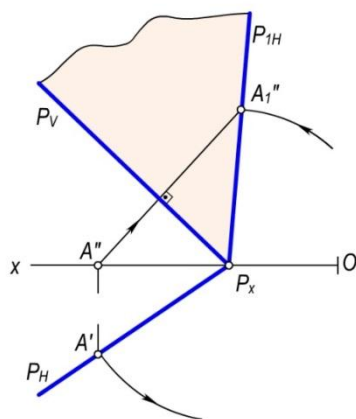
Chizmada $P(P_N, P_V)$ tekislikni P_N izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish uchun aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash zarur bo'lsin (10.16,b–rasm). Ma'lumki, aylantirish radiusi tekislikning aylanish o'qiga perpendikulyar bo'ladi. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga ko'ra, tekislikning P_V izida olingan $A(A', A'')$ nuqtaning A' proyeksiyasidan tekislikning P_N iziga perpendikulyar o'tkaziladi va O' hamda O'' nuqtalarni topamiz. Chizmada

hosil bo'lgan $O'A'$ va $O''A''$ aylantirish radiusining proyeksiyalari, $O'A_0$ esa uning haqiqiy o'lchami bo'ladi.

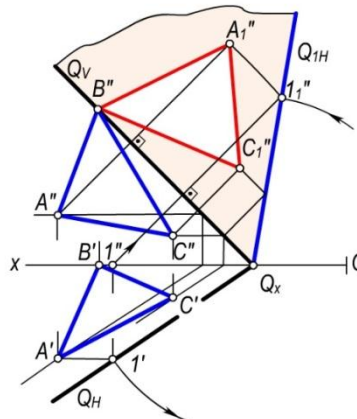
Xuddi shuningdek $P(P_H, P_V)$ tekislikni V tekislikka ham jipslashtirish mumkin (10.17–rasm). Buning uchun berilgan P tekislikning P_H gorizontal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab, uning aylantirish radiusi $P_x A'$ aniqlanadi va tekislikning P_N izini P_V izi atrofida aylantirib, tekislikka jipslashtiriladi. Chizmadan ko'rinib turibdiki, P tekislikni P_N izi atrofida aylantirilganda $P_x A'$ kesma $P_x A''_1$ ga teng bo'ladi.

Umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli geometrik shaklning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun uning xarakterli nuqtalarini proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi. Masalan, $Q(Q_N, Q_V)$ tekislikka tegishli $\triangle ABC(A'B'C', A''B''C'')$ ning (10.18–rasm) haqiqiy o'lchami uning A , B va C nuqtalarini V tekislikka jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi.

Tekislikning jipslashgan holati berilgan bo'lsa, uning dastlabki vaziyatini tiklash mumkin. Tekislikning dastlabki vaziyatini aniqlash natijasida tekislikka tegishli bo'lgan shakllarning ham proyeksiyalarini aniqlash mumkin.



10.17-rasm.



10.18-rasm.

Nazorat savollari

1. Proyeksiyalarni qayta qurishning qanday usullari mavjud?
2. Tekis-parallel harakatlantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
3. Aylantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
4. Gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi o'q atrofida aylanayotgan nuqtaning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?
5. Nuqtaning aylanish radiusi, markazi va aylanish harakat tekisliklari deganda nimalar tushuniladi?
6. Kesmaning haqiqiy uzunligini yasash uchun uni qanday vaziyatga kelguncha aylantirish kerak?
7. Uchburchakni gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi holga keltirish uchun uni qaysi o'q atrofida aylantirish kerak?
8. Izlari bilan berilgan tekislikni aylantirib frontal proyeksiyalovchi holga keltirish uchun nima qilish kerak?
9. Tekislikni izlari atrofida aylantirishdan ko'zlangan maqsad nima?

11 – MAVZU. PROYEKSIYALAR TEKISLIKLARINI ALMASHTIRISH USULI

Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulida geometrik shaklning dastlabki fazoviy vaziyati saqlanib qoladi. Proyeksiyalar tekisliklari berilgan geometrik shaklga nisbatan xususiy (parallel yoki perpendikulyar) vaziyatda bo'lgan yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtiriladi. Bunda dastlabki va yangi proyeksiyalar tekisliklarining o'zaro perpendikulyarlik sharti bajarilishi talab qilinadi.

Bu usulda geometrik shaklning fazoviy vaziyati o'zgarmaydi, balki proyeksiyalash yo'nalishi yangi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar qilib olinadi.

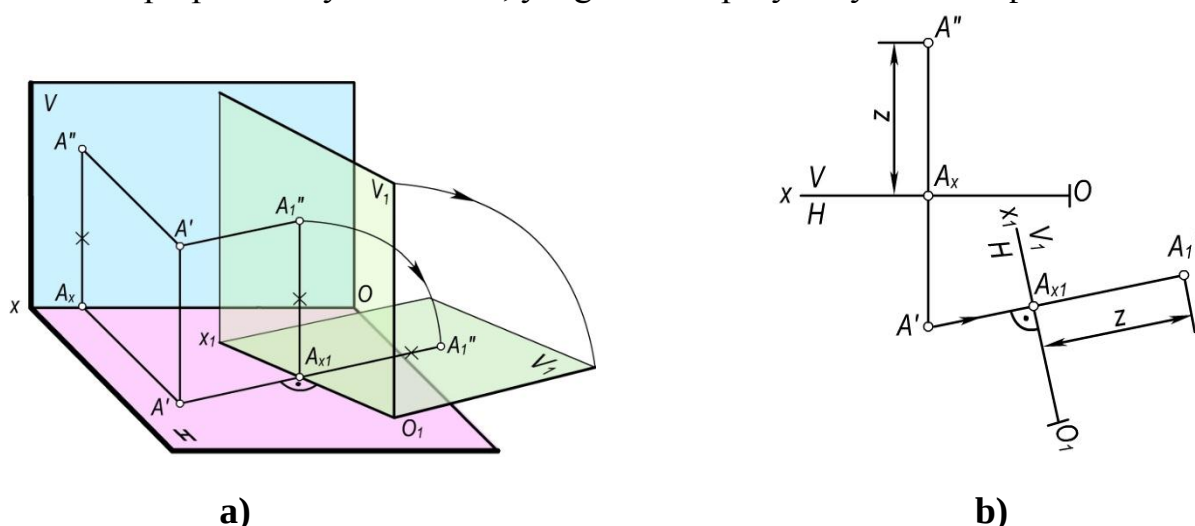
Geometrik masalada qo'yilgan shartga ko'ra, proyeksiyalar tekisliklari bir yoki ikki marta ketma-ket almashtirish mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklarining ikki marta almashtirilganda, ular ketma-ket ravishda, masalan, avval geometrik shaklga nisbatan parallel, so'ngra unga perpendikulyar yoki aksincha qilib almashtiriladi.

11.1. Proyeksiyalar tekisliklarining bittasini almashtirish.

Fazodagi biror A nuqta va uning H va V proyeksiyalar tekisliklardagi A' va A'' ortogonal proyeksiyalari berilgan bo'lsin (11.1,a–rasm). Agar V tekislikni V_1 tekislik bilan almashtirsak, $\frac{V_1}{H}$ yangi proyeksiyalar tekisliklari tizimi hosil bo'ladi.

A nuqtaning V_1 tekislikdagi proyeksiyasini yasash uchun berilgan nuqtadan mazkur tekislikka perpendikulyar o'tkazib, yangi frontal proyeksiyasi A''_1 topiladi.

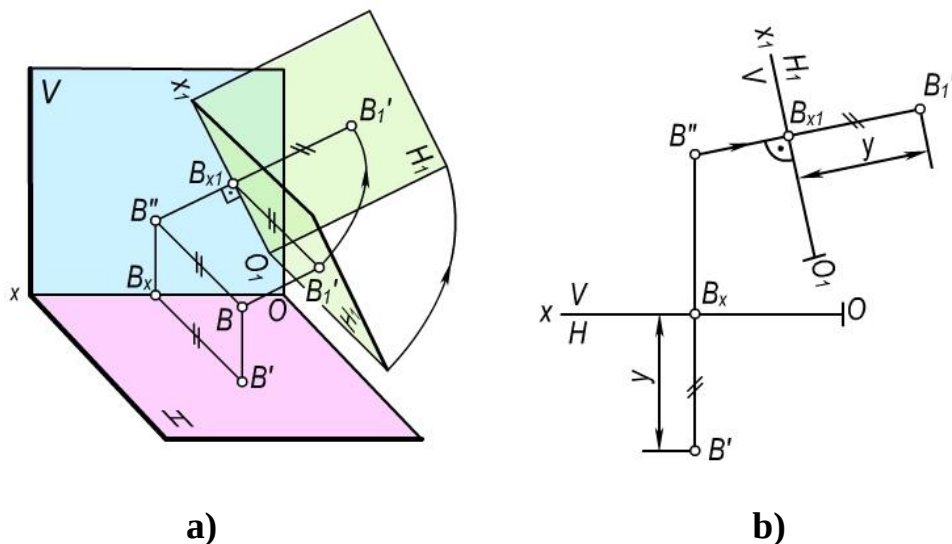


11.1-rasm.

Rasmdagi yasashlardan ko'rinishicha, A'' nuqtadan Ox o'qigacha bo'lgan masofa A''_1 nuqtadan O_1x_1 o'qigacha bo'lgan masofaga tengdir, ya'ni $A''_1A_{x1} = A''A_x$.

Nuqtaning yangi proyeksiyalar tizimidagi chizmasini yasash uchun yangi proyeksiyalar tekisligi dastlabki proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtiriladi.

Chizmada A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan O_1x_1 ga perpendikulyar tushiriladi (11.1,b–rasm). Uning davomiga $A''A_x$ masofa qo'yiladi. Natijada, hosil bo'lgan A' va A''_1 lar A nuqtaning yangi $\frac{V_1}{H}$ tekisliklar sistemasidagi proyeksiyalari bo'ladi. Frontal proyeksiyalar tekisligi yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtirilganda nuqtaning z koordinatasi o'zgarmaydi.



11.2-rasm.

H va V proyeksiyalar tekisliklari tizimida B nuqta B' va B'' proyeksiyalari berilgan bo'lsin (11.2,a–rasm). H tekislikni $H_1 \perp V$ tekislik bilan almashtirsak, $\frac{V}{H_1}$ yangi tekisliklar tizimiga ega bo'lamiz. B nuqtadan H tekislikka perpendikulyar o'tkazib, bu nuqtaning B'_1 proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning yangi tekisliklar tizimidagi chizmani yasash uchun (11.2,b–rasm) H_1 tekislikni V tekislik bilan jipslashtiramiz. Chizmada B nuqtaning yangi proyeksiyasini yasash uchun uning B'' proyeksiyasidan O_1x_1 ga o'tkazilgan perpendikulyarning davomiga $B'_1B_{x1}=B''B_x$ masofa qo'yiladi. Natijada hosil bo'lgan B'_1 va B'' yangi $\frac{V}{H_1}$ tekisliklar tizimidagi B nuqtaning chizmasi bo'ladi. Demak, gorizontal proyeksiya tekisligi almashtirilganda, nuqtaning yangi gorizontal proyeksiyasida y koordinatasi o'zgarmaydi.

11.2. Proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish.

Ayrim geometrik masalalarni yechishda proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish zarur bo'ladi.

11.3–rasmda A nuqtaning $\frac{V}{H}$ tizimida berilgan A' va A'' proyeksiyalari orqali uning yangi A'_1 va A''_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Buning uchun avval V

tekislikni V_1 tekislik bilan almashtirib, $\frac{V_1}{H}$ tizimi hosil qilinadi. Buning uchun chizmada ixtiyoriy vaziyatda O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tanlab olinadi, A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun uning A' proyeksiyasidan O_1x_1 proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A''A_x$ masofa qo'yiladi. Natijada, A nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ tizimidagi yangi A''_1 proyeksiyasi hosil bo'ladi. A nuqtaning A'_1 proyeksiyasini yasash uchun $\frac{V_1}{H}$ tizimdan $\frac{V_1}{H_1}$ tizimga o'tiladi. Buning uchun ixtiyoriy vaziyatda joylashgan O_2x_2 o'qi olinadi va nuqtaning A''_1 proyeksiyasidan O_2x_2 ga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A'A_{x1}$ masofa qo'yiladi. Shunday qilib O_2x_2 tizimda A nuqtaning A''_1 va A'_1 yangi proyeksiyalari hosil bo'ladi.

11.4–rasmda B nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ tizimdan $\frac{V_1}{H}$ va $\frac{V_1}{H_1}$ tizimga o'tish natijasida hosil bo'ladigan yangi B''_1 va B'_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan.

Nuqtaning yangi proyeksiyalarini yasash qoidalariga asoslanib, geometrik shakllarning yangi, maqsadga muvofiq bo'lgan proyeksiyalarini yasash mumkin.

1–masala. Umumiy vaziyatda berilgan $AB(A'B', A''B'')$ kesmaning haqiqiy uzunligi aniqlash talab etilsin (11.5–rasm).

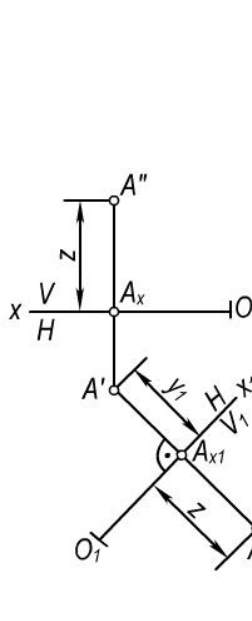
Echish. Buning uchun umumiy vaziyatda berilgan AB kesmaga parallel qilib gorizonttal yoki frontal proyeksiyalar tekisligini yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtiriladi. Chizmada masalani yechish uchun uning yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qini kesmaning biror, masalan, $A'B'$ gorizonttal proyeksiyasiga parallel qilib olinadi. Hosil bo'lgan $\frac{V_1}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari tizimida AB kesma V_1 proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'ladi va bu tekislikda u haqiqiy uzunligiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

2–masala. Umumiy vaziyatdagi $P(P_N, P_V)$ tekislikni frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (11.6–rasm).

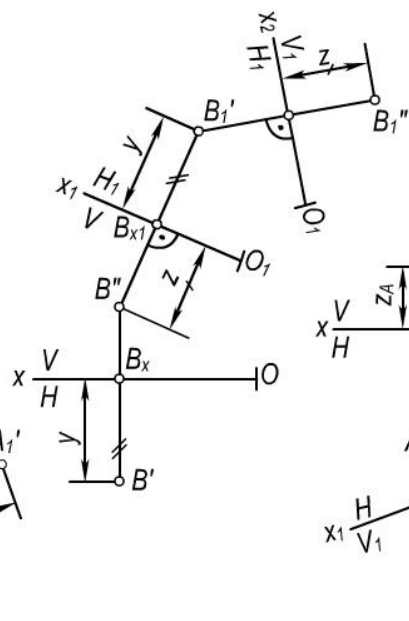
Echish. Ma'lumki, frontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizonttal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun umumiy vaziyatdagi P tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qini tekislikning P_N gorizonttal iziga ixtiyoriy joydan perpendikulyar qilib olinadi.

Tekislikning yangi P_{V1} izining yo'nalishini aniqlash uchun tekislikning P_V iziga tegishli biror, masalan, $A(A', A'')$ olib, uning yangi A''_1 frontal proyeksiyasi yasaladi. Tekislikning yangi P_{1V} izini P_{x1} va A''_1 nuqtalardan o'tkaziladi. Chizmada ko'rsatilgan α burchak P tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan burchagi bo'ladi.

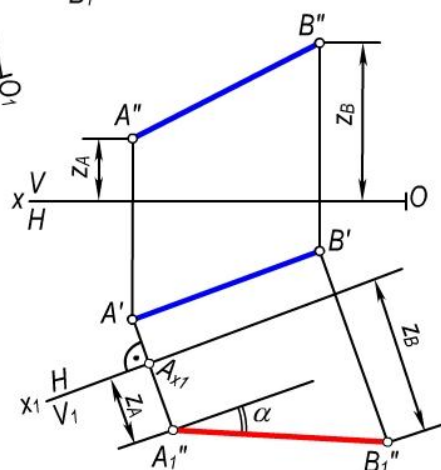
3–masala. $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi $Q(Q_H, Q_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin (11.7–rasm).



11.3-rasm.



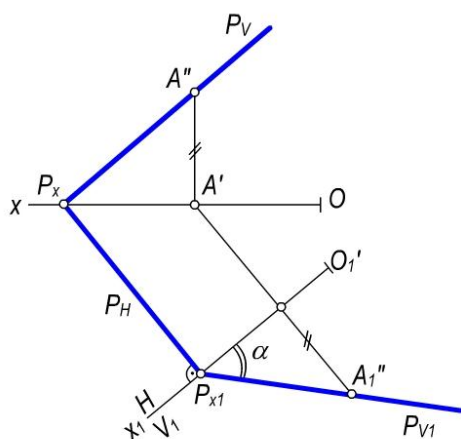
11.4-rasm.



11.5-rasm.

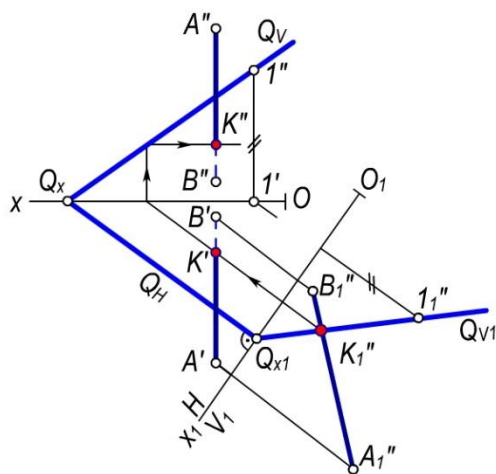
Echish. Masalani yechish uchun Q tekislikni gorizontal yoki frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiramiz. Buning uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qini tekislikning biror iziga masalan, Q_H ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Natijada, tekislikning yangi Q_{V1} izini hamda to'g'ri chiziqning $A''_1 B''_1$ proyeksiyasi yasaladi. Hosil bo'lgan kesmaning $A''_1 B''_1$ proyeksiyasi bilan tekislik Q_{V1} izining kesishgan K''_1 nuqtasi AB kesmaning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Bu nuqtani teskari yo'nalishda proyeksiyalab, berilgan to'g'ri chiziq kesmasi bilan tekislikning kesishish nuqtasining K' va K'' proyeksiyalari yasaladi (11.7-rasm).

Xuddi shu usul bilan $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziqning $\triangle CDE(\triangle C'D'E', \triangle C''D''E'')$, bilan kesishish nuqtasining F' va F'' proyeksiyalarini yasaladi (11.8-rasm). Bunda mazkur uchburchak tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatga

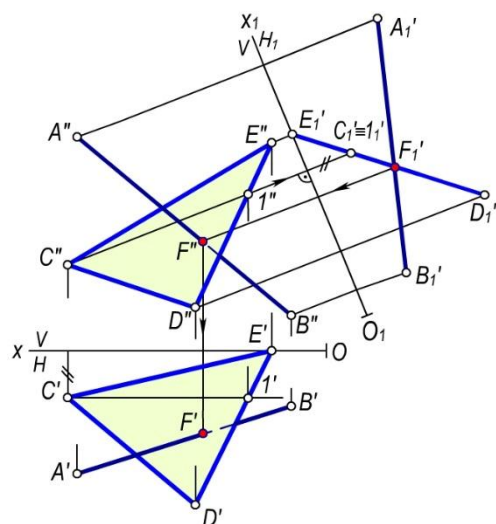


11.6-rasm

keltiriladi. Buning uchun chizmada $\triangle CDE$ tekislikning biror bosh chizig'iga, masalan, $C1(C'1', C''1'')$ frontaliga perpendikulyar qilib yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qini o'tkaziladi. Uchburchakning $C'_1 D'_1 E'_1$ to'g'ri chiziq kesmasi tarzida proyeksiyalangan proyeksiyasi va kesmaning $A'_1 B'_1$ yangi proyeksiyalari yasaladi. Ularning o'zaro kesishgan F'_1 nuqtasi belgilanadi, so'ngra F nuqtaning frontal F'' va gorizontal F' proyeksiyalarini yasaladi.



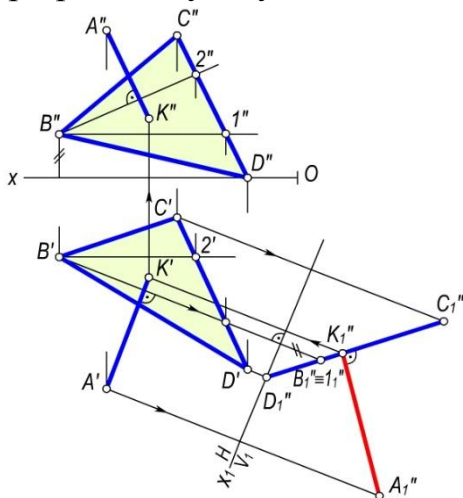
11.7-rasm.



11.8-rasm.

4-masala. $A(A', A'')$ nuqtadan $\triangle BCD(\triangle B'C'D', \triangle B''C''D'')$ tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlansin (11.9–rasm).

Echish. Bu masofa A nuqtadan $\triangle BCD$ tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan o'lchanadi. Masalani yechish uchun chizmada yangi proyeksiyalar o'qini uchburchak tekisligining asosiy chiziqlaridan biriga, masalan, gorizontaliga perpendikulyar, ya'ni $O_1x_1 \perp B'1'$ qilib o'tkaziladi. So'ngra uchburchakning to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalangan yangi proyeksiyalovchi $D''_1B''_1C''_1$ vaziyatini va nuqtaning A''_1 proyeksiyasi yasaldi. Izlangan masofaning haqiqiy uzunligi A''_1 dan $D''_1B''_1C''_1$ kesmaga o'tkazilgan $A''_1K''_1$ perpendikulyar bo'ladi. Bu masofaning gorizontal va frontal proyeksiyalari teskari proyeksiyalash bilan K' va K'' proyeksiyalarni aniqlanadi. Mazkur K' va K'' nuqtalar A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan uchburchakning gorizontal hamda frontallariga mos ravishda tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida bo'ladi.



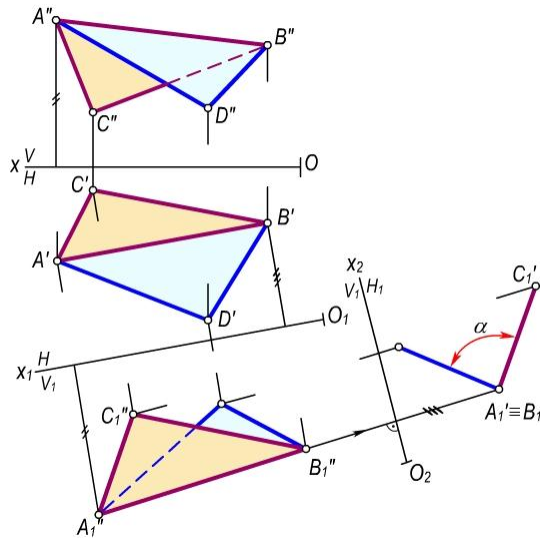
11.9-rasm.

5-masala. $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$ va $\triangle ABD(\triangle A'B'D', \triangle A''B''D'')$ tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (11.10–rasm).

Echish. Bu burchak berilgan $\triangle ABC$ va $\triangle ABD$ tekisliklariga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar orasidagi chiziqli burchak bilan o'lchanadi. Shuning uchun ham yangi proyeksiyalar tekisligini ikki tekislikning umumiy AB kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib olinadi. Lekin AB qirra umumiy vaziyatda bo'lgani uchun $Ox, \frac{V}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari tizimini avval $O_1x_1, \frac{V_1}{H} \parallel AB$ qilib (chizmada

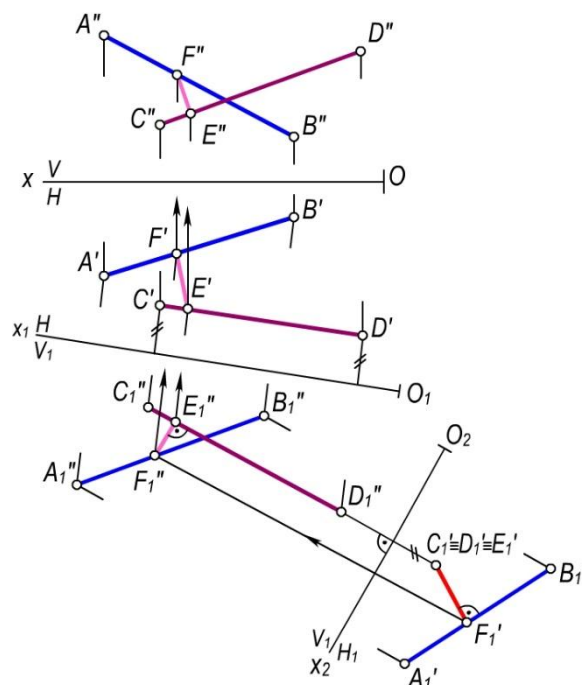
$O_1X_1 \parallel A'B'$), so‘ngra $O_2X_2, \frac{V_1}{H_1} \perp AB$ qilib (chizmada $O_2X_2 \perp A''_1B''_1$) ketma–ket almashtiriladi.

Natijada, $\triangle ABC$ va $\triangle ABD$ yangi H_1 proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar vaziyatda bo‘lib qoladi va o‘zaro kesishuvchi kesmalar shaklida proyeksiyalanadi. Bu kesmalar orasidagi α chiziqli o‘tkir burchak izlangan burchak bo‘ladi.



11.10-rasm.

6–masala. $AB(A'B', A''B'')$ va $CD(C'D', C''D'')$ uchrashmas to‘g‘ri chiziq kesmalari orasidagi masofani aniqlansin (11.11–rasm).



11.11-rasm.

Echish. Bunda CD kesmaga parallel qilib yangi V_1 frontal proyeksiyalar tekisligi o‘tkaziladi. Bu tekislikda CD va AB kesmalarning yangi frontal

proyeksiyalari $C''_1D''_1$ va $A''_1B''_1$ lar yasaladi. So'ngra $C''_1D''_1$ kesmaga perpendikulyar qilib N_1 tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikda $C''_1D''_1$ va $A''_1B''_1$ larning yangi gorizontal proyeksiyalari topiladi. Bunda CD kesma $C'_1 \equiv D'_1$ nuqta ko'rinishida proyeksiyalanadi. Bu nuqtadan $A'_1B'_1$ kesmaga tushirilgan $E'_1F'_1$ kesmaning uzunligi CD va AB lar orasidagi masofa bo'ladi. Teskari proyeksiyalash bilan E va F nuqtalarning E', E'' va F', F'' proyeksiyalari yasalgan.

Yuqoridagi masalani, birinchidan, V_1 tekislikni AB kesmaga parallel va H_1 tekislikni uning yangi proyeksiyasiga perpendikulyar qilib o'tkazib yechsa, ikkinchidan esa AB yoki CD kesmalardan biriga parallel qilib avval H tekislikni, so'ngra ularning proyeksiyalaridan biriga perpendikulyar qilib V ni almashtirsa ham bo'ladi.

Nazorat savollari:

1. Proyeksiyalarni qayta qurishning qanday usullari mavjud?
 2. Tekis-parallel harakatlantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
 3. Aylantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
 4. Gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi o'q atrofida aylanayotgan nuqtaning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?
 5. Nuqtaning aylanish radiusi, markazi va aylanish harakat tekisliklari deganda nimalar tushuniladi?
 6. Kesmaning haqiqiy uzunligini yasash uchun uni qanday vaziyatga kelguncha aylantirish kerak.?
 7. Uchburchakni gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi holga keltirish uchun uni qaysi o'q atrofida aylantirish kerak?
 8. Izlari bilan berilgan tekislikni aylantirib frontal proyeksiyalovchi holga keltirish uchun nima qilish kerak?
 9. Tekislikni izlari atrofida aylantirishdan ko'zlangan maqsad nima?
 10. Proyeksiyalar tekisliklarni almashtirish usulining mohiyati nimadan iborat?
- Umumiy vaziyatdagi uchburchakning haqiqiy kattaligini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklari ketma-ket qanday vaziyatlarda almashtiriladi.

12 – MAVZU. KO‘PYOQLIKLAR

Hamma tomonidan tekis ko‘pburchaklar bilan chegaralangan geometrik figura - ko‘pyoqlik deyiladi.

Tekis ko‘pburchaklarning o‘zaro kesishuvidan hosil bo‘lgan kesmalar, ko‘pyoqlikning-qirralari va qirralar orasidagi ko‘pburchaklarni uning yoqlari deb ataladi. Qirralarning o‘zaro kesishuv nuqtalari ko‘pyoqlikning uchlari deb yuritiladi (12.1, 12.2-rasmlar).

Ko‘pyoqlikning barcha yon yoqlarining yig‘indisi uning sirti deb ataladi. Ko‘pyoqlikning uchlari va qirralari uning *aniqlovchilari* hisoblanadi (12.1-rasm). Ko‘pyoqlikning bir yon yog‘ida yotmagan ikki uchini birlashtiruvchi kesma uning *diagonali* deb ataladi (12.2-rasm). Ko‘pyoqlik aniqlovchilari uning istalgan yon yog‘iga (tekislikka) nisbatan bir tomonda joylashsa, uni *qabariq ko‘pyoqlik*, aksincha *botiq ko‘pyoqlik* deb yuritiladi. Ko‘pyoqliqlarining bir necha turlari mavjud bo‘lib, ulardan quyidagilarni ko‘rib chiqamiz:

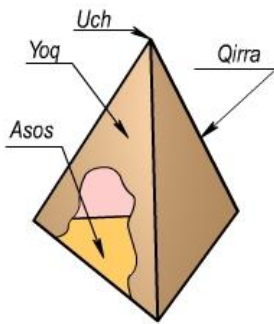
Piramida. Yoqlaridan biri tekis ko‘pburchak bo‘lib, qolgan yoqlari esa umumiy uchga ega bo‘lgan uchburchaklardan tuzilgan ko‘pyoqlik piramida deyiladi.

Ko‘pburchak piramidaning asosi va uchburchaklar esa uning yon yoqlari deb ataladi. YOn yoqlarining umumiy uchi piramidaning ham uchi hisoblanadi va u asos tekisligida yotmaydi. Asosi muntazam ko‘pburchakli piramida *muntazam piramida* deb ataladi. Piramida balandligi asosining markazidan o‘tib, unga perpendikulyar bo‘lsa, uni to‘g‘ri piramida, perpendikulyar bo‘lmasa og‘ma piramida deb yuritiladi (12.1-rasm).

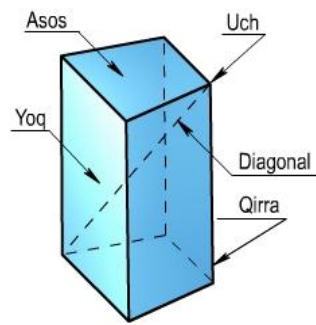
Prizma. Yon yoqlari to‘rt burchaklardan va asosi ko‘p burchakdan iborat bo‘lgan ko‘pyoqlik prizma deyiladi.

Yon yoqlarning kesishuv chiziqlari – prizma *qirralari*, qirralar orasidagi ko‘p burchaklining yoqlari deyiladi (12.2-rasm). Prizmani barcha qirralarini kesuvchi parallel tekisliklarda hosil bo‘lgan ko‘pburchaklar–prizmaning asoslari deb ataladi. YOn qirralari asosiga nisbatan og‘ma yoki perpendikulyar bo‘lsa, prizma ham mos ravishda *og‘ma* yoki *to‘g‘ri prizma* deb ataladi. Asosi muntazam ko‘pburchak bo‘lgan prizma, *muntazam prizma* deb yuritiladi.

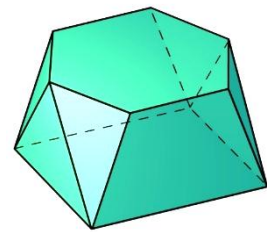
Asoslari o‘zaro parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko‘pburchakdan va yon yoqlari esa asos uchlaridan o‘tuvchi uchburchaklar va trapesiyalardan iborat bo‘lgan ko‘pyoqlik *prizmatoid* deyiladi (12.3-rasm). Ko‘pyoqliklar bir jinsli qabariq, bir jinsli botiq, yulduzsimon hamda ularning birlashishidan hosil bo‘lgan murakkab ko‘pyoqliklarga bo‘linadi. Bir jinsli qabariq ko‘pyoqliklar muntazam va yarim muntazam ko‘pyoqliklarga ajraladi. Muntazam qabariq ko‘pyoqliklar o‘zaro teng bir xil muntazam ko‘pburchaklardan iborat yoqlarga, o‘zaro teng ikki yoqli burchaklarga va o‘zaro teng qirralarga ega bo‘ladi. Bu ko‘pyoqliklar asosan besh xil bo‘lib *Platon jismlari* deb yuritiladi (12.1-jadval).



12.1-rasm

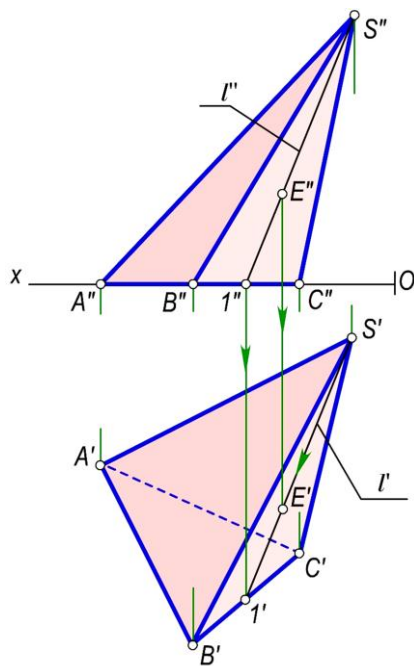


12.2-rasm



12.3-rasm

Ko'pyoqliklar texnikada turli ko'rinishdagi mashina detallari, ko'pyoqli linzalar yasashda, hamda arxitektura va qurilish ishlarida keng ishlatiladi. Masalan, devor va poydevor bloklari, tom, ko'priklarning temir-beton panellari va inshootning boshqa qismlari ko'pyoqliklardan iborat bo'ladi. Ko'pyoqliklardan yana «geodezik» gumbazlar yasashda, keng oraliqli binolarni ustunsiz yopishda keng foydalaniladi. Qadimiy binolarda esa gumbaz, gumbaz osti, bino gumbazidan prizmatik qismiga o'tish joylarida bezak-ornament sifatida ham qo'llanilgan.



12.4-rasm

Ko'pyoqlikning tekis chizmada tasvirlanishi. Ko'pyoqlik chizmada o'z aniqlovchilarining to'g'ri burchakli proyeksiyalari orqali beriladi. 12.4-rasmda $SABC$ piramidaning tekis chizmasi o'z aniqlovchilari: $S(S'S'')$ uchi, asosi $ABC(A'B'C', A''B''C'')$ uchburchakning proyeksiyalari orqali tasvirlangan. $SA, SB, \dots$ qirralarning proyeksiyalari S, A, B, C uchlarining bir nomli proyeksiyalarini birlashtiruvchi $S'A'$ va $S''A''$, $S'B'$ va $S''B''$ va x.k. kesmalar bo'ladi.

YOqlarining proyeksiyalari esa qirralarning proyeksiyalari bilan chegaralangan $S'A'B'$ va $S''A''B''$, $S'A'C'$ va $S''A''C''$, ... tekis rasmlardan

iborat bo'ladi. Ko'pyoqlik sirtidagi ixtiyoriy nuqtaning yetishmagan E' proyeksiyasi yon tekislikka tegishli ixtiyoriy $\ell(\ell', \ell'')$ to'g'ri chiziq vositasida yasaladi (12.4-rasm).

12.1. Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi

Ko'pyoqliklarni tekislik bilan kesilganda kesimda ko'pburchak hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan ko'pburchakning uchlari, ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtalari bo'ladi.

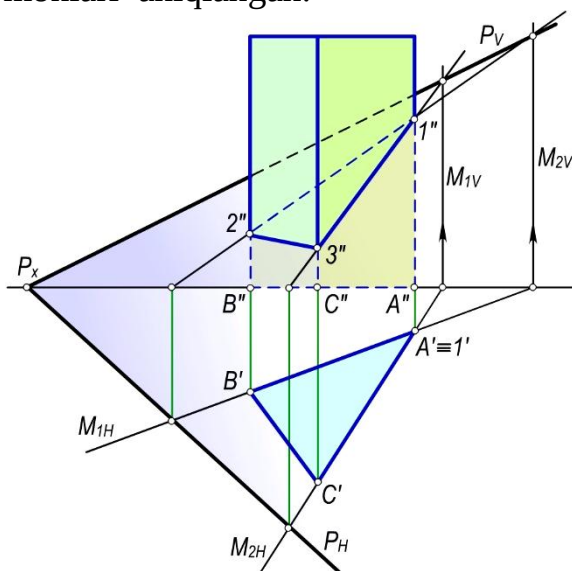
Kesimning tomonlari esa ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chiziqlari bo'ladi. Ko'pyoqlikning tekislik bilan kesilgan qismini quyidagi uch usul bilan yasash mumkin:

- kesim tomonlarini, ya'ni ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chizig'ini, yasash usuli.
- kesim uchlarini, ya'ni ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasash usuli.
- aralash usul, bunda yuqoridagi ikkala usuldan foydalaniladi.

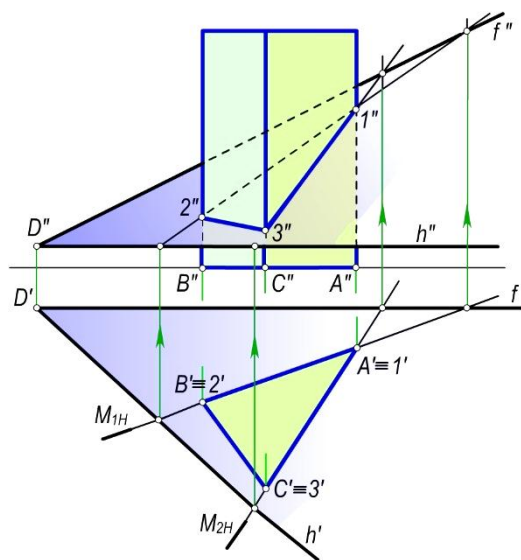
Bu usullardan qaysi birini qo'llash ko'pyoqlik va tekislikni tekis chizmada berilishiga qarab tanlanadi.

Kesim tomonlarini yasash usuli. Bu usul ikki tekislikning kesishish chizig'ini yasash algoritmini bir necha marta takrorlash asosida bajariladi. Bu usuldan proyeksiyalovchi vaziyatdagi prizmaning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashda foydalanish juda qulaydir. 12.5-rasmda uch yoqlik to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimning proyeksiyalari yasalgan.

Bunda prizmaning yon yoqlari orqali $M_1(M_{1H}, M_{1V})$ va $M_2(M_{2H}, M_{2V})$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkazilgan. Bu tekisliklarni berilgan P tekislik bilan kesishgan chiziqlari yordamida kesim yuzasining 12($1'2', 1'', 2''$), 13($1', 3', 1''3''$) tomonlari aniqlangan.



12.5-rasm



12.6-rasm

Aynan shu prizmani, o'zaro kesishuvchi $h(h', h'')$ va $f(f', f'')$ to'g'ri chiziqlar orqali berilgan $P(P', P'')$ tekislik bilan kesishuv chizig'ini yasash 12.6-rasmda

ko'rsatilgan. Bunda kesishish chiziqlari prizma yoqlari orqali o'tkazilgan $M_1(M_{1H})$ va $M_2(M_{2H})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar vositasida kesim yuzasining $\Delta 123(1'2'3', 1''2''3'')$ proyeksiyalari yasalgan.

12.2. Ko'pyoqlikning to'g'ri chiziq bilan kesishishi

To'g'ri chiziq kavariq ko'pyoqlikning yoqlari bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarning biri *kirish* ikkinchisi *chiqish* nuqtalari deb yuritiladi. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining kesishish nuqtalarini yasashda quyidagi usullardan foydalaniladi:

- to'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli;
- to'g'ri chiziq orqali umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli.

Quyida to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashga oid bir necha misollarni ko'rib chiqamiz.

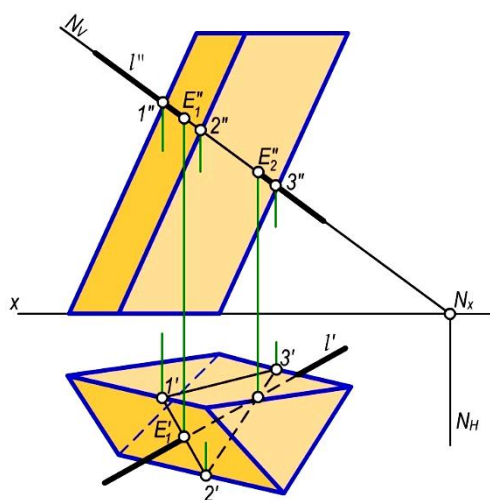
1-usul: To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish nuqtalarini xususiy vaziyatdagi tekislik vositasida yasash, qo'yidagi yasash algoritmi asosida bajariladi:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkaziladi;
- xususiy vaziyatdagi tekislik bilan berilgan ko'pyoqlikning o'zaro kesishuvdagi kesim yuza chizig'i aniqlanadi;
- kesim yuza chizig'i bilan berilgan to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari belgilanadi.

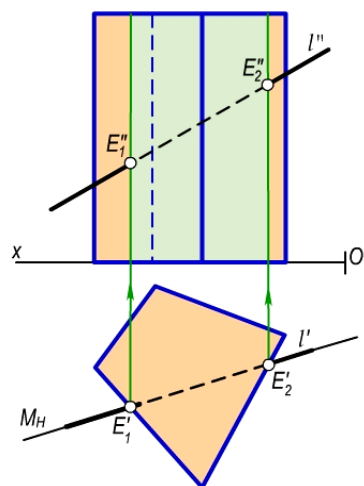
12.7–rasmda $\ell(\ell', \ell'')$ to'g'ri chiziqning uch yoqli $\Phi(\Phi', \Phi'')$ prizma sirti bilan kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Yasash algoritmi qo'yidagicha:

- ℓ to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislik o'tkaziladi; $\ell'' \subset N_V$ va $N_H \perp O_x$;
- N tekislik bilan Φ prizmaning kesishishidagi kesim yuza chizig'i proyeksiyalari $1'2'3'$ va $1''2''3''$ yasaladi. $N \cap \Phi \Rightarrow 23$;
- Kesim yuza chizig'i $\Delta 123$ bilan ℓ to'g'ri chizig'ining uchrashish nuqtalari E_1 va E_2 belgilanadi. $12 \cap \ell = E_1$ va $23 \cap \ell = E_2$. Bunda avvalo $1'2'3' \cap \ell' = E'_1$ va E'_2 lar aniqlanib, so'ngra proyeksion bog'lanish chizig'i orqali E''_1 va E''_2 lar holati aniqlanadi.



12.7-rasm.



12.8-rasm

Agar ko'pyoqlikning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklar bo'lsa, to'g'ri chiziqli bilan bunday sirtning kesishish nuqtalarini yasash juda soddalashadi.

12.8-rasmida to'rt yoqlik to'g'ri prizma sirti bilan $\ell(\ell', \ell'')$ to'g'ri chiziqli o'zaro kesishish $E_1(E'_1, E''_1)$, $E_2(E'_2, E''_2)$ nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Bunda prizmaning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklardan iborat bo'lgani uchun ℓ orqali $M(M_N)$ gorizontali proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi, kesishuv nuqtalari proyeksiyalari E'_1 va E'_2 belgilanadi. So'ngra ularning E''_1 va E''_2 proyeksiyalari yasaladi.

12.3.Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishishi

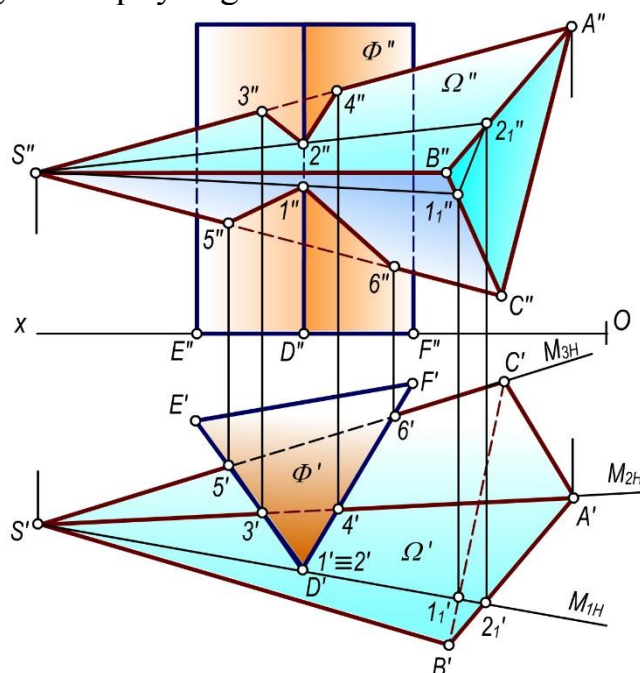
Ko'pyoqliklar fazoda bir-biriga nisbatan o'zaro joylashuviga qarab, to'la, qisman kesishgan yoki butunlay kesishmagan vaziyatlarda uchraydilar. Ko'pyoqliklar o'zaro kesishganda bir yoki bir necha yopiq fazoviy yoki tekis siniq chiziqlar hosil bo'ladi. Bu siniq chiziqli uchlarini, ko'pyoqlikning to'g'ri chiziqli bilan kesishish nuqtalarini yasash usuli yordamida aniqlanadi. Agar kesishuvchi ko'pyoqliklardan birini Φ va ikkinchisini Ω deb belgilasak, ularning kesishgan chizig'ini yasash qo'yidagi algoritmi bilan bajariladi:

- Φ ko'pyoqlik qirralarining Ω ko'pyoqlik sirti yoqlari bilan kesishish nuqtalari yoki Ω ko'pyoqlik qirralarining Φ ko'pyoqlik yoqlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi;
- Φ va Ω ko'pyoqlarning yon yoq tekisliklarini o'zaro kesishish chiziqlari yasaladi.

Hosil bo'lgan kesishish nuqtalarini yoki chiziqlarni tegishli tartibda birlashtirilsa berilgan ko'pyoqliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda avvalo ularning

kesishishida qatnashmaydigan qirralari aniqlanadi; so'ngra ko'pyoqliklarning ko'rinar, ko'rinmas qirralarini aniqlanib va ularning ko'rinar qismlarini asosiy tutash chiziqlarda yurg'izib chiqiladi.

12.9-rasmda tasvirlangan prizma va piramida sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi qo'yidagicha bo'ladi:



12.9 – rasm.

- prizma qirralarining piramida sirti bilan kesishgan nuqtalari yasalgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizmaning faqat oldingi D qirrasigina piramida sirtini 1 va 2 nuqtalarda kesib o'tgan. Bu nuqtalar D nuqta orqali o'tgan $M_1(M_{1N})$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik yordamida yasalgan;
- piramida qirralarining prizma sirti bilan kesishgan 3,4,5,6 nuqtalari yasalgan. Piramidaning faqat SA va SC qirralari prizma bilan kesishadi. SA va SC qirralarining prizma bilan kesishgan 3(3',3''), 4(4',4''), 5(5',5''), 6(6',6'') nuqtalari 12.8-rasmda ko'rsatilganidek $M_2(M_{2H})$ va $M_3(M_{3H})$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekisliklar yordamida topilgan;
- Aniqlangan 1'',2'',3'',4'',5'',6'' nuqtalarni rasmda ko'rsatilganidek, ko'rinar-ko'rinmas qismlarini e'tiborga olib, tartib bilan birlashtirib chiqilsa, ikki sirtning o'zaro kesishish siniq chizig'ining frontal proyeksiyasi hosil bo'ladi.

Nazorat savollari

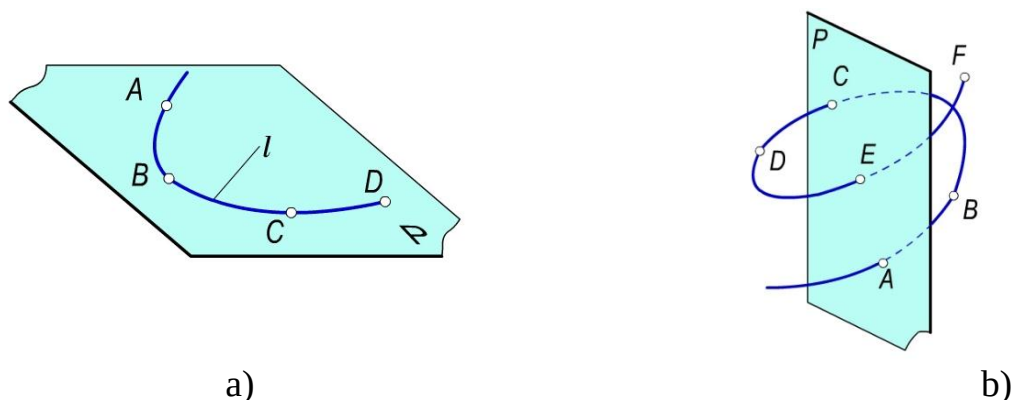
1. Ko'pyoqlik deb nimaga aytiladi?
2. Ko'pyoqlikning aniqlovchilariga nimalar kiradi?
3. Qanday ko'pyoqlikni piramida deb ataladi?

4. Qanday ko'pyoqlikni prizma deb ataladi?
5. Qanday ko'pyoqlikni to'g'ri, ko'pyoqlik deb ataladi?
6. Qanday ko'pyoqlikni muntazam ko'pyoqlik deb yuritiladi?
7. Eyler teoremasida ko'pyoqlikning qaysi xossalari keltirilgan?
8. Tekislik bilan ko'pyoqlikning kesishishidagi kesim yuzani yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
9. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
10. Ikki ko'pyoqlikning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?

13 – MAVZU. EGRI CHIZIQLAR

Chizma geometriyada egri chiziqlarning geometrik va mexanik xususiyatlaridan grafik ravishda amaliy foydalanish e'tiborga olinib, ularga oddiy kinematik ta'rif beriladi. Shuning uchun egri chiziqni fazoda yoki tekislikda ma'lum yo'nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning izi sifatida qabul qilinadi.

Egri chiziqlar tekis (13.1,a-rasm) va fazoviy (13.1,b-rasm) egri chiziqlarga bo'linadi.



13.1-rasm

Egri chiziqlar qonuniy va qonunsiz egri chiziqlarga bo'linadilar. Egri chiziqni tashkil kiluvchi nuqtalar to'plami ma'lum biror qonunga buysunsa u *qonuniy*, aksincha nuqtalar to'plami xech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday egri chiziq *qonunsiz egri chiziq* deyiladi. Qonuniy egri chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamalariga qarab algebraik va transsendent egri chiziqlarga bo'linadilar. Tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq *algebraik*, transsendent funksiya bilan ifodalangan egri chiziq esa *transsendent* egri chiziq deyiladi.

Algebraik egri chiziqlar tartib va klass tushunchalari bilan xarakterlanadi. Egri chiziqlarning tartibi uni ifodalovchi tenglamaning darajasiga teng bo'ladi.

Grafik jihatdan tekis egri chiziqlarning tartibi uning to'g'ri chiziq bilan, fazoviy egri chiziqning tartibi esa uning biror tekislik bilan maksimum kesishish nuqtalar soni orqali aniqlanadi.

Tekis egri chiziqning klassi unga shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmalar soni bilan, fazoviy egri chiziqning klassi unga biror to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan urinma tekisliklar soni bilan aniqlanadi.

Egri chiziqning tartibi va klassi har xil bo'ladi. Faqat ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tartibi va klassi bir xil bo'lib, u 2 ga teng bo'ladi.

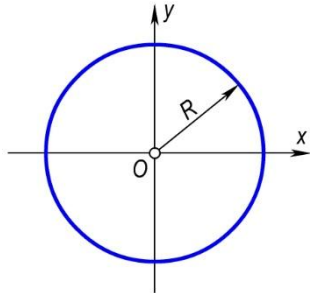
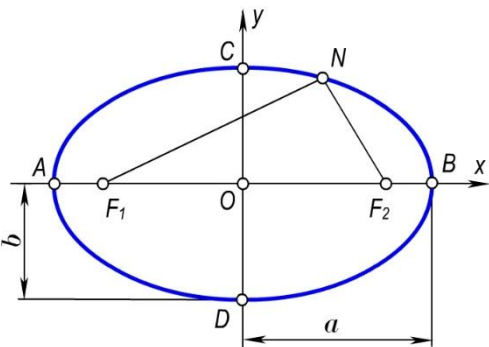
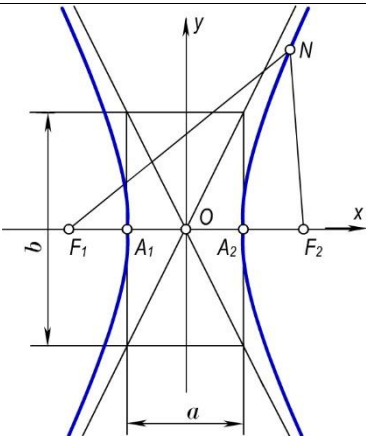
13.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deyiladi.

Bunday chiziqlar to'g'ri chiziq bilan eng ko'pi ikki nuqtada kesishadi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning xususiyatlaridan mashinasozlikda, binokorlikda, umuman muhandislik amaliyotining barcha tarmoqlarida keng foydalaniladi. Shu boisdan ham 2-tartibli egri chiziqlari mukammal o'rganilgan. Ularga aylana, ellips, parabola, giperbola va ularning xususiy hollari kiradi. Bu egri chiziqlarning tenglamalari va ularning shakllarini aniqlovchi parametrlari analitik geometriyada to'liq o'rganiladi. Chizmachilikda va chizma geometriyada esa ularni yasash va hosil bo'lish usullari o'rganiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning nomi, ta'rifi, tenglamasi va ularning shakllari 13.1-jadvalda keltirilgan.

13.1-jadval

Aylana Berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami aylana deyiladi. Kanonik tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ Parametrik tenglamasi $x = R \cdot \cos t$ $y = R \cdot \sin t$	
Ellips Berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtadan uzoqliklarining yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning to'plami ellips deyiladi. $F_1N + F_2N = AB = \text{const}$ Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi $x = a \cos t$ $y = b \sin t$	
Giperbola Berilgan F_1 va F_2 ikki nuqtadan uzoqliklarining ayirmasi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarining to'plami giperbola deyiladi. $F_1N - F_2N = A_1A_2 = \text{const}$ Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi $x = a \sec t$ $y = b \tg t$	

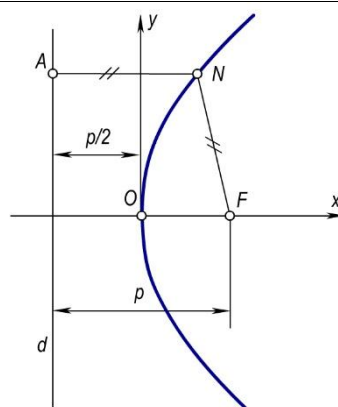
Parabola

Berilgan nuqtadan va d to'g'ri chiziqdan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami parabola deyiladi. $FN=AN$

Kanonik tenglamasi $y^2=2px$

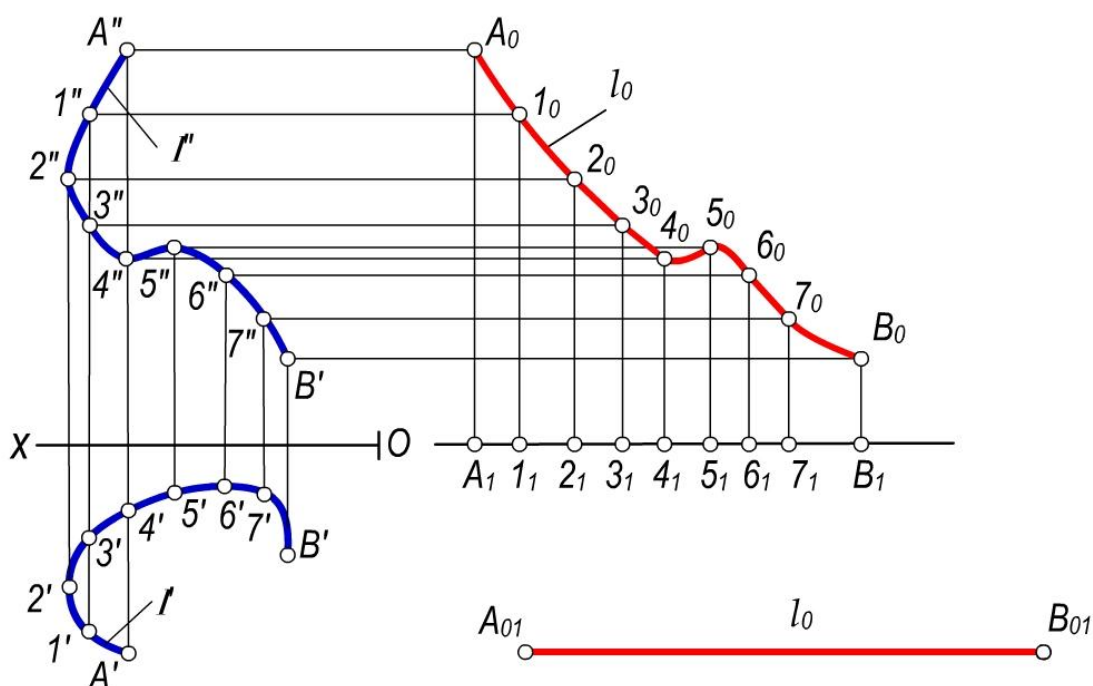
Parametrik tenglamasi

$$x=t, y=\sqrt{2pt} \quad \text{yoki} \quad y=t, x=t^2/2p$$



13.2. Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to'g'ri burchakli proeksiyalariga asosan aniqlash

Biror fazoviy ℓ egri chiziqning ℓ' va ℓ'' to'g'ri burchakli proeksiyalari berilgan bo'lsin. (13.2-rasm). Uning uzunligini grafik usulda aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi.



13.2-rasm

Egri chiziqning ℓ' - gorizontal proeksiyasi $A'B'$ ni har bir bo'lagini ixtiyoriy tanlangan a to'g'ri chiziqning A_1 nuqtadan boshlab unga ketma-ket quyib chiqiladi. Xosil bo'lgan A_1, B_1 kesma $A'B'$ gorizontal proeksiyani to'g'rilangani yoki uni uzunligini o'lchovchi kesma bo'ladi.

So'ngra a to'g'ri chiziqning $A_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots V_1$ nuqtalaridan unga perpendikulyarlar chiqariladi. Bu perpendikulyarlarga ixtiyoriy tanlangan gorizontal Ox chiziqdan $\ell''(A''B'')$ nuqtalarigacha bo'lgan masofalar o'lchanib qo'yiladi. Natijada ℓ_0 egri chiziq hosil qilinadi.

Chizmaning ixtiyoriy bo'sh joyida ℓ_{01} to'g'ri chiziq olinib, bu to'g'ri chiziqqa ℓ_0 egri chiziq nuqtalari ketma-ket o'lchab qo'yiladi, ya'ni ℓ_0 to'g'rilanadi.

Hosil bo'lgan $A_{01}B_{01}$ kesma ℓ fazoviy egri chiziqning $AB(A'B', A''B'')$ bo'lagining uzunligi bo'ladi.

13.3. Vint chiziqlari

Nuqtaning silindrik sirt bo'ylab aylanma va ilgarilanma harakati natijasida hosil bo'lgan traektoriyasi silindrik **vint chizig'i** deyiladi.

Silindrik vint chiziqlar. 13.3,a-rasmda A_0C_0 yasovchining bir necha holatlari $A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, \dots$ tasvirlangan. Bunda yo'ylar $A_0B_1=B_1B_2=B_2B_3=\dots$ o'zaro teng bo'lib, ularning har biri $\pi d/n$ ga teng bo'ladi. Bunda d – silindr diametri, n – silindr asosi bo'laklarini sonidir.

Agar A_0 nuqtaning holatlari $A_1, A_2, A_3, \dots$ deb belgilansa, uning har bir ko'tarilishi $A_2B_2=2 \cdot A_1B_1, A_3B_3=3 \cdot A_1B_1$ va x.k. bo'lib, A_0A_{12} yasovchi bir marta aylanma harakat qilganda $A_{12}V_{12}=12 \cdot A_1V_1$ bo'ladi. A_0A_{12} – masofa vint chizig'ining qadami, i - vint chizig'ining o'qi, A nuqtadan i gacha bo'lgan masofa vint chizig'ining radiusi deb yuritiladi.

Vint chizig'i chizilgan silindrning diametri va vint chizig'ining qadami uning parametrlari deyiladi. A nuqta yana bir marta aylanma harakatidan vint chizig'ining ikkinchi o'rami hosil bo'ladi.

13.3,b-rasmda silindrik vint chizig'ining yasalishi ko'rsatilgan. Buning uchun o'qi N ga perpendikulyar, asos diametri d ga va balandligi $2h$ ga teng bo'lgan silindrning gorizontal va frontal proeksiyalari yasaladi. Silindr asosi bo'lgan aylanani teng 12 bo'lakka bo'linadi.

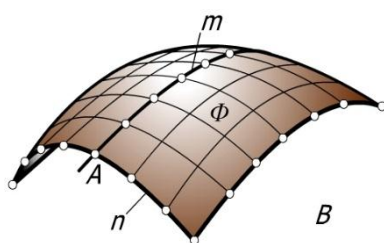
Xuddi shuningdek, vint chizig'ining qadami h ga teng bo'lgan $A_0''A_{12}''$ kesma ham 12 bo'lakka bo'linadi. Vint chizig'ini hosil bo'lish jarayoniga asosan, ya'ni A nuqtani silindr yasovchisi bo'yicha harakati va bu yasovchini o'q atrofida aylanma harakatiga asosan aylananing har bir bo'lagidan. Yasovchilar va 1-12 kesmaning har bir bo'lagidan o'qqa perpendikulyar kesmalar (nuqtani aylanma harakatini frontal proeksiyasi) chiqarilsa ℓ'' vint chizig'ining frontal proeksiyasi hosil bo'ladi. Uning gorizontal proeksiyasi aylana bilan ustma-ust tushadi. Vint chizig'ining frontal proeksiyasi sinusoidagi o'xshash chiziq bo'ladi.

Silindrik vint chizig'ining yoyilmasi 7.23,b-rasmda keltirilgan. Buning uchun biror a to'g'ri chiziqqa silindr asosi aylanasi yoy uzunligi πd qo'yiladi va u 12 ta teng bo'lakka bo'linadi. Hosil bo'lgan $0_0, 1_0, 2_0, \dots, 12_0$ nuqtalardan a ga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi. Bu perpendikulyarga vint chizig'i nuqtalarining applikatorlari mos ravishda o'lchab qo'yiladi. Hosil bo'lgan nuqtalar to'plami b to'g'ri chiziqni hosil qiladi. Bu to'g'ri chiziqni a bilan tashkil qilgan ϕ burchagi og'ish burchagi bo'ladi. Vint chizig'ining A_1 nuqtasidan boshlab hosil bo'lgan ikkinchi bo'lagini aylanmasi ham b_1 to'g'ri chiziq shaklida ko'rsatilgan.

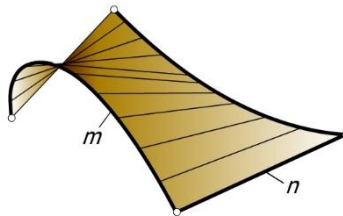
14 – MAVZU. SIRTLARNING HOSIL BO‘LISHI VA ULARNING TEKIS CHIZMADA BERILISHI

Biror chiziqning fazodagi uzluksiz harakati natijasida sirtlar hosil bo‘ladi. Sirtlarning hosil qilishning turli usullari ma’lum.

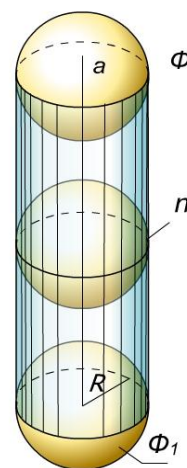
Fazoda m egri chiziq va uni A nuqtada kesib o‘tuvchi n egri chiziq berilgan (14.1-rasm). Agar n egri chiziqni m egri chiziq buylab uzluksiz harakatlantirilsa, uning qator vaziyatlarining to‘plamidan iborat biror Φ sirtni hosil bo‘ladi. Bunda Φ sirdagi m egri chiziq sirtning yo‘naltiruvchisi, n egri chiziq uning yasovchisi deb ataladi. Aksincha, n egri chiziqni yo‘naltiruvchi, m egri chiziqni yasovchi sifatida qabul qilish ham mumkin. Bunda m egri chiziq n egri chiziq bo‘yicha harakatlangan bo‘ladi.



14.1-rasm.



14.2-rasm.



14.3-rasm.

Yasovchilarning turiga qarab egri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt **egri chiziqli sirt** (14.1-rasm), to‘g‘ri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt **chiziqli sirt** (14.2-rasm) deb ataladi.

Ixtiyoriy sirtni uzluksiz harakatlantirish natijasida ham sirt hosil qilish mumkin. Bunda hosil bo‘lgan Φ sirt harakatlanuvchi Φ_1 yasovchi sirtning har bir vaziyatida u bilan eng kamida bitta umumiy n chiziqqa ega bo‘ladi. Masalan, o‘zgarmas R radiusli sfera markazini (14.3-rasm) a to‘g‘ri chiziq bo‘yicha uzluksiz harakatlantirilsa, Φ doiraviy silindr sirti hosil bo‘ladi.

Sirt yasovchisi harakat davomida o‘z shaklini uzluksiz o‘zgartirib borishi yoki o‘zgartirmasligi mumkin.

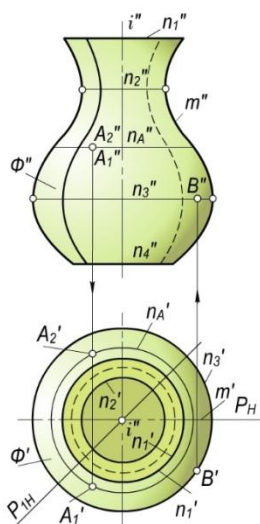
Sirtlar hosil bo‘lish jarayoniga qarab qonuniy va qonunsiz sirtlarga bo‘linadi. Sirtning hosil bo‘lishi biror matematik qonunga asoslangan bo‘lsa, bunday sirt **qonuniy sirt** deyiladi. Doiraviy silindr, konus, sfera ikkinchi tartibli va hokazo sirtlar bunga misol bo‘la oladi.

14.1. Aylanish sirtlari

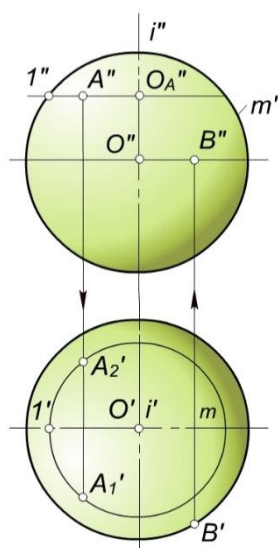
Biror tekis yoki fazoviy chiziqning qo'zg'almas to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanish sirti deb ataladi.

Harakatlanuvchi chiziq sirtning *yasovchisi*, qo'zg'almas to'g'ri chiziq esa uning *aylanish o'qi* deyiladi. Yasovchi va aylanish o'qi aylanish sirtning aniqlovchilarini tashkil qiladi. 14.4–rasmda $m(m', m'')$ egri chiziqning $i(i', i'')$ aylanish o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan umumiy ko'rinishdagi aylanish sirti tekis chizmada tasvirlangan. Yasovchi va aylanish o'qi ma'lum bo'lsa, aylanish sirti to'la berilgan hisoblanadi. Sirtning berilishini uning aniqlovchilari orqali $\Phi(m, i)$ ko'rinishida yozish mumkin.

Tekis chizmada aylanish sirti $\Phi'(m', i')$ va $\Phi''(m'', i'')$ proyeksiyalari bilan hamda aniqlovchilarning istalgan ikki proyeksiyasi bilan berilgan. Aylanish jarayonida yasovchining hamma nuqtalari aylanalar bo'yicha harakat qilib, bu aylanalar sirtning *parallellari* deyiladi. Aylanish o'qidan o'tgan barcha tekisliklar *meridian tekisliklari*, ularning aylanish sirti bilan kesishish chiziqlari esa *sirtning meridianlari* deyiladi. Sirtning barcha meridianlari kongruent bo'ladilar. Frontal meridian tekisligi *bosh meridian tekisligi* hisoblanib, uning sirt bilan kesishish chizig'i *bosh meridian chizig'i* yoki sirtning *frontal ocherki* deb ataladi. 14.4–rasmdagi umumiy ko'rinishdagi aylanish sirtning aylanish o'qi gorizontal proyeksiyalar tekisligi N ga perpendikulyar joylashganligi uchun sirtidagi parallellarning ($n_1'', n_2'', n_3'', \dots$) frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq kesmasi ko'rinishida, gorizontal proyeksiyalari esa haqiqiy kattalikda, ya'ni aylana ko'rinishida tasvirlanadi. Tekis chizmada $P(P_H)$ bosh va $P_1(P_{1H})$ oddiy meridian tekisliklari hosil qilgan meridian kesimlari ko'rsatilgan. Bosh meridian V ga parallel bo'lganligi uchun uning frontal proyeksiyasi o'zining haqiqiy kattaligiga teng bo'ladi.



14.4-rasm



14.5-rasm

Agar parallelning bosh meridian bilan kesishish nuqtasidan bosh meridianga o'tkazilgan urinma aylanish o'qiga parallel bo'lsa, bu parallel *ekvator yoki buyin chizig'i* deyiladi. Bu parallel ikki yon qo'shni parallellardan katta bo'lsa, *ekvator*, agar ulardan kichik bo'lsa, *buyin chizig'i* deyiladi. Demak, biror aylanish sirtida bir necha ekvator va buyin chiziqlari bo'lishi mumkin. 14.4-rasmdagi aylanish sirtida parallellardan $n_2(n_2', n_2'')$ buyin, $n_3(n_3', n_3'')$ esa ekvator chizig'i hisoblanadi.

Boshqa sirtlar singari aylanish sirti ham cheksiz ko'p nuqtalar to'plamidan iboratdir. Bu nuqtalarni to'la to'kis chizmada tasvirlab bo'lmaydi. Shuning uchun ham **H** va **V** ga perpendikulyar qilib aylanish sirtiga urinma silindrlar o'tkaziladi. urinma silindrlarning **N** bilan kesishish chizig'i sirtning **gorizontal ocherki**, **V** bilan kesishish chizig'i esa uning **frontal ocherki** deyiladi. Aylanish sirtlari, ko'pincha, o'zining gorizontal va frontal ocherklari bilan tasvirlanadi. 14.4-rasmdagi aylanish sirtning frontal ocherki bosh meridian m'' va n_1'' , n_4'' parallellari bilan, gorizontal ocherki n_2' va n_3' parallellari bilan tasvirlangan.

Gorizontal va frontal ocherklar sirt proyeksiyalarining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlarini aniqlashga ham yordam beradi.

Parallellar yordamida sirt ustida nuqtalarning proyeksiyalari topiladi. Masalan, aylanish sirtiga tegishli A_1 va A_2 nuqtalarning frontal proyeksiyalari A_1'' va A_2'' larning 14.4-rasm gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' n_A parallelning gorizontal proyeksiyasi n_A' da aniqlangan.

Ekvatorda yotuvchi B nuqtaning gorizontal B' proyeksiyasi berilgan. Uning B'' frontal proyeksiyasi ekvatorning n_3'' frontal proyeksiyasida bo'ladi.

Aylanish sirtlari mashinasozlikda va qurilish amaliyotida keng qo'llaniladi. Chunki, ko'pchilik mexanizmlar aylanma harakat qiladi va aylanish sirtlari esa stanokda osongina yasaladi.

Sirtning eng katta paralleli uning **ekvatori** va eng kichik paralleli uning **bo'yini** deb ataladi.

Loyihalanadigan mashina mexanizmlarining vazifasi, unga quyiladigan texnik talablar va shakliga qarab, aylanish sirtining yasovchisi tanlanadi.

14.5-rasmda tasvirlangan sfera ustidagi A nuqtaning A'' frontal va B nuqtaning B' gorizontal proyeksiyalari berilgan. A nuqtaning A_1' va A_2' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun u orqali $O_A''1''$ radiusli parallel o'tkaziladi. A nuqtaning gorizontal proyeksiyalari ana shu parallelning gorizontal proyeksiyasida yotadi. A nuqta sferaning oldingi yoki orka yarmida joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun uning gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' nuqtalar parallelning gorizontal proyeksiyasida topiladi. B nuqta sfera ekvatorida yotganligi uchun uning B'' frontal proyeksiyasi bir qiymatli bo'lib, u ekvatorning frontal proyeksiyasida topiladi.

Nazorat savollari

1. Sirtlar qanday hosil bo'ladi?
2. Sirtning yasovchisi va yo'naltiruvchisi nima?
3. Sirtlarni hosil bo'lishining qanday usullari mavjud?
4. Aylanish sirtlari nima va ularga misollar keltiring.
5. Aylanish sirtlarining xarakterli chiziqlari nimalar?

15 – MAVZU. SIRTDLARNING TEKISLIK VA TO‘G‘RI CHIZIQ BILAN KESISHISHI

Sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘i to‘g‘ri chiziq, siniq chiziq va egri chiziq tarzidagi tekis shakllardan iborat bo‘lishi mumkin. Bu xol tekislik bilan qanday sirtning kesishishiga va sirt bilan tekislikning o‘zaro vaziyatiga bog‘liqdir.

Sirt bilan tekislikni kesishish chizig‘ining shaklini uni yasashdan oldin bilish mumkin. Ana shunga ko‘ra uni yasashning biror usuli tanlanadi. Agar kesishish chizig‘i to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, uning ikki nuqtasini, siniq chiziq bo‘lsa, uning sinish nuqtalari (uchlari) ni, egri chiziq bo‘lsa, uning tayanch (xarakterli) va bir necha ixtiyoriy nuqtalarini topib, ular o‘zaro tutashtiriladi.

Egri chiziqli sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘i, umumiy holda, egri chiziqdan iborat bo‘ladi. bu chiziqni yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi. Tayanch nuqtalarga sirtlarning chetki yasovchilari – ocherklariga tegishli nuqtalar va proyeksiyalar tekisliklaridan eng uzoq va eng yaqin masofalarda bo‘lgan nuqtalar kiradi. Qolgan nuqtalar oraliq nuqtalar hisoblanadi.

Yuqorida kayd qilingan nuqtalar sirtga tegishli bo‘lganligi sababli bu nuqtalar shu sirtning yasovchilari, karkaslari, parallellari, meridianlari va x.k. chiziqlariga ham tegishli bo‘ladi. Shuning uchun sirtning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash uchun sirtning shu chiziqlari bilan tekislikning kesishish nuqtalarini topishdan iborat bo‘ladi.

Chiziqli sirtning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash uchun sirtning har bir yasovchisi bilan tekislikning kesishish nuqtalarini aniqlash lozim.

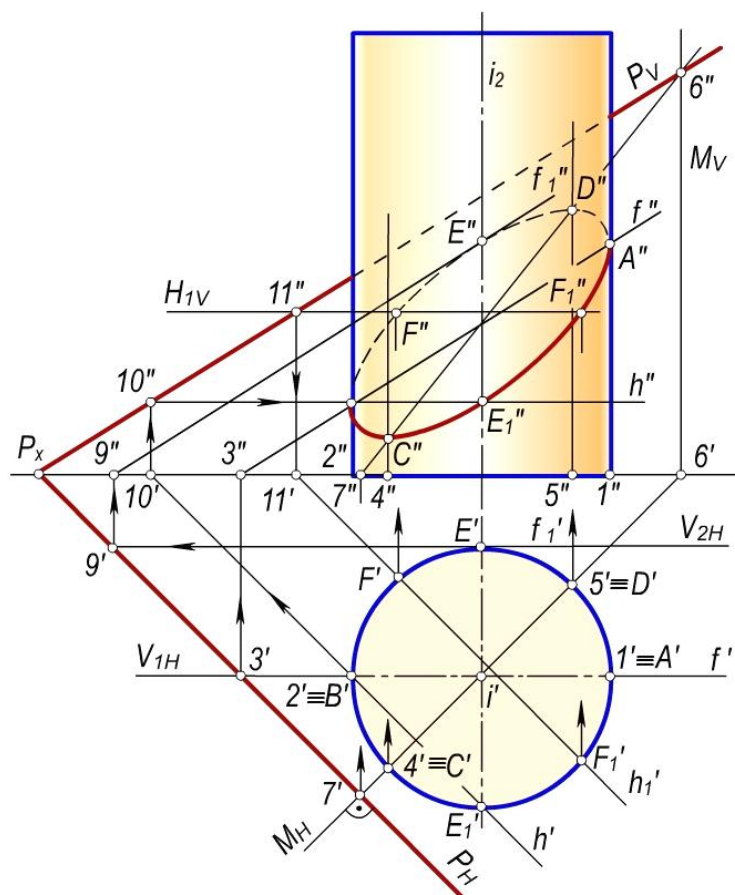
Demak, tekislikning ko‘pyoqlik yoki egri chiziqli sirtlar bilan kesishish chizig‘ini yasash to‘g‘ri chiziq yoki egri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtalarini topishga asoslanadi.

H tekislikda joylashgan to‘g‘ri doiraviy silindrning ixtiyoriy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishishidagi kesim yuza proyeksiyalari yasalsin (15.1-rasm).

Yechish. Kesim yuzasining gorizontal proyeksiyasi silindrning gorizontal proyeksiyasi (asosi) bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun kesimning faqat frontal proyeksiyasi topiladi.

Dastlab silindrning chetki 1, 2 yasovchilari bilan **P** tekislikning kesishish nuqtalari **A** va **B** ning frontal proyeksiyalari **A''** va **B''** nuqtalari topiladi. Buning uchun chetki yasovchilar orqali $V_1(V_{1H})$ frontal tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislik berilgan **P** tekislikni frontal chiziq bo‘yicha kesadi. Kesishish chizig‘ining frontal proyeksiyasi f'' silindr chetki yasovchilarining frontal proyeksiyalari bilan kesishib, **A''** va **B''** nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning eng yuqori va eng quyi nuqtalarning frontal proyeksiyalari **D''** va **C''** nuqtalarni topish uchun silindrning o‘qidan o‘tuvchi va **P** tekislikka perpendikulyar bo‘lgan $M(M_H, M_V)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkaziladi: $i \in M_H \perp H$. Bu tekislik silindrni $4(4', 4'')$ va $5(5', 5'')$ yasovchilari, **P** tekislikni esa $6(6', 6'')$ to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. Yasovchilarning frontal proyeksiyalari $6'' 7''$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishib, **D''** va **C''** nuqtalarni hosil qiladi.



15.1-rasm.

Kesimning boshqa nuqtalarini kesuvchi tekislikning gorizontaal yoki frontal chiziqlaridan foydalanib topish mumkin. Masalan, E nuqtaning frontal proyeksiyasi E'' ni topish uchun E nuqtadan o'tkazilgan $V_2(V_{2H})$ tekislik silindrni yasovchisi bo'yicha, P tekislikni $f_1(f_1', f_1'')$ frontal chiziq bo'yicha kesadi. Frontalning frontal proyeksiyasi f_1'' va E' nuqtadan o'tuvchi yasovchi o'zaro kesishib, E'' nuqtani hosil qiladi. F' va F_1'' nuqtalar ixtiyoriy $H_1(H_{1V})$ gorizontaal yordamchi tekislik o'tkazish yo'li bilan topiladi. Yordamchi tekislikning H_{1V} izi C'' va D'' nuqtalar oraligida o'tkaziladi. Bu tekislik silindrni aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontaal proyeksiyasi silindrning asosi bilan ustma-ust tushadi. Berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislik $H_1(H_{1V})$ tekislik bilan $1_1(1_1', 1_1'')$ nuqtadan o'tuvchi $h(h_1', h_1'')$ gorizontaal bo'ylab kesishadi.

h_1 gorizontaalning gorizontaal proyeksiyasi h_1' va silindrning asosi o'zaro kesishib, F' va F_1' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib, H_{1V} izda F'' va F_1'' nuqtalar belgilab olinadi.

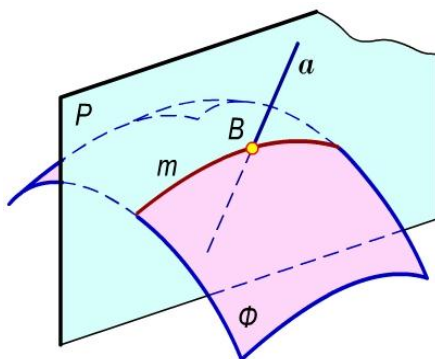
Silindrning kuzatuvchiga karatilgan oldingi yarim qismi ko'rinadi, orqa tomondagi qismi esa ko'rinmaydi. Shunga asosan, kesimning frontal proyeksiyasidagi $A''F_1''E_1''C''B''$ qismi ko'rinadi, $B''F''E''D''A''$ qismi esa

ko‘rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq - ellips hosil qilinadi.

To‘g‘ri chiziq bilan sirlarning kesishish nuqtalari sirlarning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasashga asoslanib topiladi. Umuman, biror a to‘g‘ri chiziq bilan Φ sirtning kesishish nuqtasi quyidagicha aniqlanadi (15.2-rasm):

- Berilgan a to‘g‘ri chiziq orqali ixtiyoriy yordamchi P tekislik o‘tkaziladi. $P \supset a$.
- Φ sirt bilan P tekislikning kesishish chizig‘i m yasaladi. $\Phi \cap P = m$.
- m chiziq bilan berilgan a to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi B belgilab olinadi: $a \cap m = B$.

Ma‘lumki, berilgan to‘g‘ri chiziq orqali istalgancha tekislik o‘tkazish mumkin. Masalalarni osonroq yechish uchun to‘g‘ri chiziq orqali yordamchi tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o‘tkaziladi. Bu holda masalaning yechilishi soddalashadi. Berilgan sirt silindrik yoki konus sirt bo‘lganda, to‘g‘ri chiziq orqali silindr yasovchilariga parallel yoki konus uchidan umumiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish qulay.



15.2-rasm

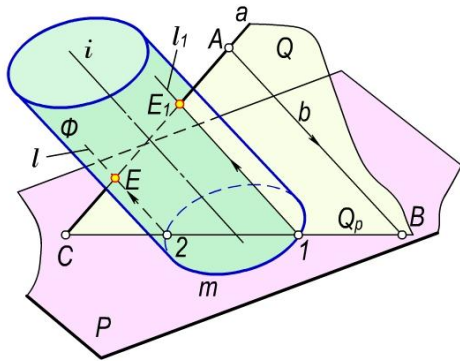
1-masala. Berilgan a to‘g‘ri chiziq bilan Φ og‘ma elliptik silindrning kesishish nuqtalari yasalsin (15.3, 15.4-rasmlar).

Yechish. Kesishish nuqtalari E va E_1 larni yasash quyidagicha bajariladi:

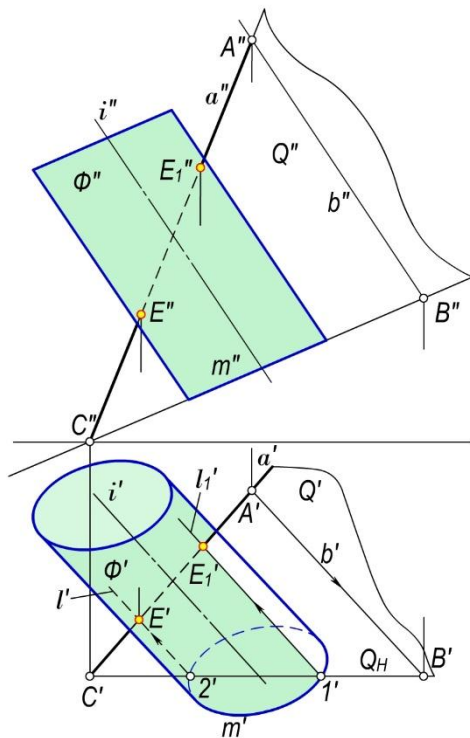
- berilgan a to‘g‘ri chiziq orqali silindrning yasovchilariga parallel qilib ixtiyoriy Q tekislik o‘tkaziladi. Buning uchun a to‘g‘ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy A nuqtani belgilab olib, u orqali b to‘g‘ri chiziqni silindrning yasovchilariga parallel qilib o‘tkaziladi. Kesishuvchi a va b to‘g‘ri chiziqlar yordamchi Q tekislikni ifodalaydi;
- Q tekislik bilan Φ silindrning kesishish chiziqlari ℓ va ℓ_1 yasovchilar yasaladi. Buning uchun Q tekislik va silindrning asos tekisligi P ning o‘zaro kesishish chizig‘i BC yasaladi. BC to‘g‘ri chiziqning silindr asosi m bilan kesishish nuqtalari 1 va 2 orqali ℓ va ℓ_1 yasovchilar (kesishish chiziqlari) o‘tkaziladi;
- berilgan a to‘g‘ri chiziq bilan ℓ va ℓ_1 yasovchilarning kesishish nuqtalari E va E_1 belgilab olinadi.

2-masala. Asosi H tekislikka tegishli bo‘lgan to‘g‘ri doiraviy konus sirti bilan a to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalari aniqlansin (15.5, 15.6-rasmlar).

Yechish. Bu holda **a** to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi yordamchi tekislik konusning uchidan o‘tkaziladi.

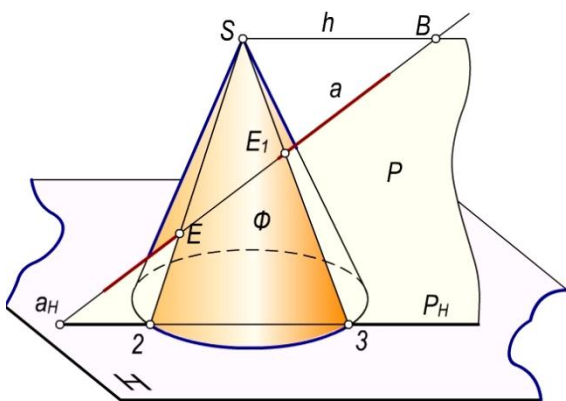


15.3-rasm

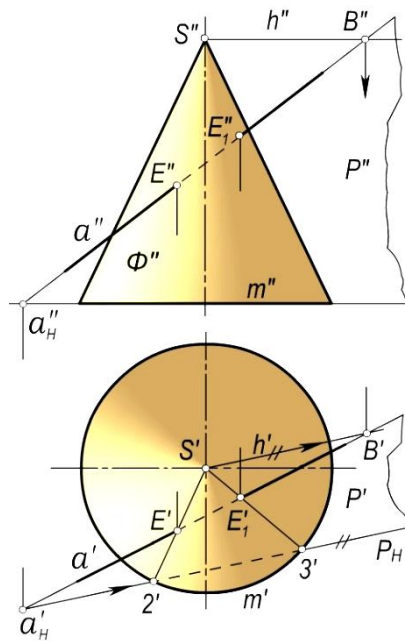


15.4-rasm

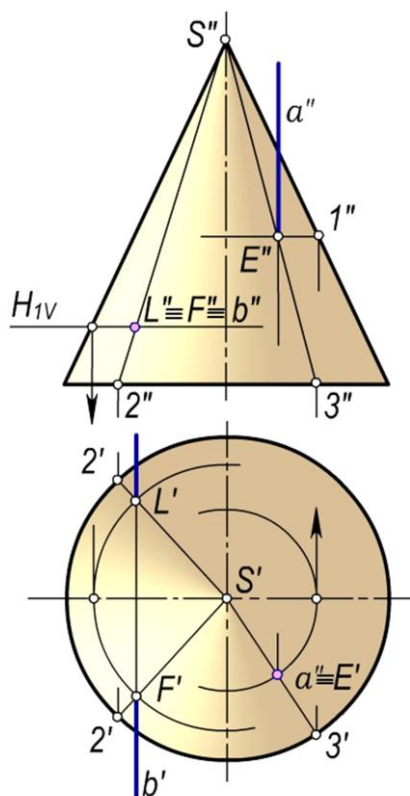
Rasmlarda bunday **P** tekislik o‘zaro kesishuvchi **a** va **h** to‘g‘ri chiziqlar orqali berilgan. Bunda **h** gorizontal to‘g‘ri chiziq konusning **S** uchidan o‘tkazilgan: **$h \ni S$** . Ushbu **h** gorizontal to‘g‘ri chiziq berilgan **a** to‘g‘ri chiziq bilan **B** nuqtada kesishadi.



15.5-rasm



15.6-rasm



15.7-rasm

P tekislikning P_H gorizontall izini yasab olamiz. Buning uchun a to'g'ri chiziqlarning a_H (a_H' , a_H'') gorizontall izini topib, u orqali gorizontallning gorizontall proyeksiyasi h ga parallel qilib P_H iz o'tkaziladi. Konusning m' asosi tekislikning P_H izi bilan 2' va 3' nuqtalarda kesishadi. 2' va 3' nuqtalarni S' bilan tutashtirib, $S'2'$ va $S'3'$ yasovchilar hosil qilinadi. Bu yasovchilar a' to'g'ri chiziq bilan kesishib, E' va E_1' nuqtalarni xosil qiladi. E' va E_1' nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib, a'' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E'' va E_1'' belgilab olinadi.

3-masala. Xususiy holda berilgan $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqlarning to'g'ri doiraviy konus bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (15.7-rasm).

Yechish. Berilgan a to'g'ri chiziq gorizontall proyeksiyalovchi, b to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli kesishish nuqtalarining bittadan

proyeksiyalari E' va $F'' \equiv L''$ (mos ravishda gorizontall va frontal proyeksiyalari) ma'lum bo'lib qoladi. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi yasovchilarning avvalo $S'3'$, $S''2'' \equiv S''2_1''$, so'ngra $S''3''$, $S'2'$ va $S'2_1'$ proyeksiyalari o'tkaziladi. a'' va $S''3''$ larning o'zaro kesishish nuqtasi E'' hamda b' bilan $S'2'$ va $S'2_1'$ larning kesishish nuqtalari F' va L' belgilab olinadi.

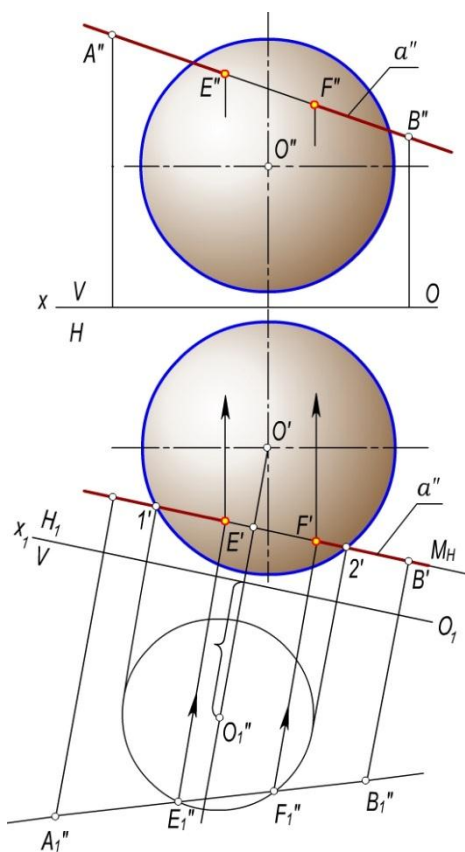
4-masala. To'g'ri chiziqlarning sfera bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (15.8-rasm).

Yechish. Berilgan $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqlarning sfera bilan kesishish nuqtalarini yasash uchun bu to'g'ri chiziq orqali $M(Mn)$ gorizontall proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik sferani diametri $1'2'$ kesmaga teng bo'lgan aylana bo'yicha kesadi. $1'2'$ diametrli aylananing gorizontall proyeksiyasi tekislikning M_H izi bilan ustma-ust tushadi: $1'2' \equiv M_H$.

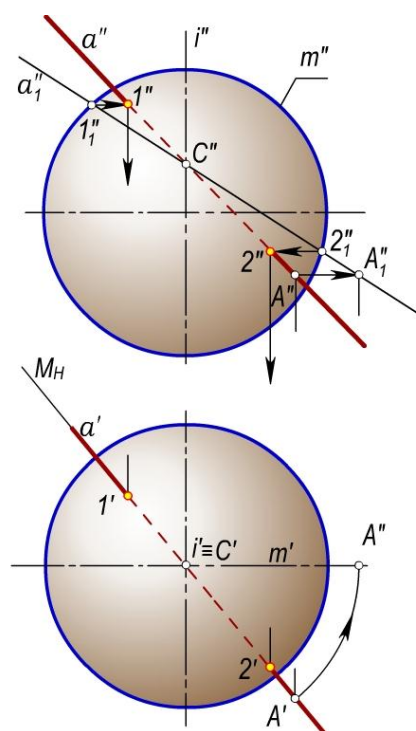
Berilgan a to'g'ri chiziq bilan 12 diametrli aylananing kesishish nuqtalari E va F larning proyeksiyalari quyidagicha yasaladi: V tekislik M ga parallel bo'lgan ixtiyoriy V_1 tekislik bilan almashtiriladi. Berilgan a to'g'ri chiziq va 12 diametrli aylanani V_1 tekislikka proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuliga asosan proyeksiyalanadi. Hosil bo'lgan O_1'' markazli aylana va a'' to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalari E'' va F'' lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan O_1X_1 proyeksiyalar o'qiga perpendikulyarlar o'tkazilib, ularning a' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E' va F' lar aniqlanadi. Bu nuqtalardan esa OX o'qiga

perpendikulyarlar chiqarilib, ularning a'' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E'' va F'' lar belgilab olinadi.

Agar $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq biror aylanish sirtining aylanish o'qi bilan kesishadigan vaziyatda berilgan bo'lsa (15.9.-rasm), u holda to'g'ri chiziqni bu o'q atrofida aylantirib, uning aylanish sirti bilan kesishish nuqtalarini osongina yasash mumkin. Berilgan $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq orqali o'tgan gorizontaal proyeksiyalovchi $M(M_H)$ tekislik sferani $m(m', m'')$ meridiani (aylana) bo'yicha kesadi (chizmada m'' ko'rsatilmagan). Bu meridian frontal tekislikka ellips bo'lib proyeksiyalanadi. Bu ellipsni chizmaslik maqsadida $m(m', m'')$ meridian va $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq sirtning $i(i', i'')$ o'qi atrofida frontal vaziyatga keltguncha aylantiriladi. U holda $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq $a_1(a_1', a_1'')$ vaziyatga, $m(m', m'')$ meridian esa $m_1(m_1', m_1'')$ vaziyatga keladi. a_1'' to'g'ri chiziq bilan m_1'' bosh meridianing kesishish nuqtalari $1_1''$, $2_1''$ lar yordamida $1''$, $2''$ hamda $1'$, $2'$ nuqtalar belgilab olinadi.



15.8-rasm.



15.9-rasm.

15.1. Konus kesimlari

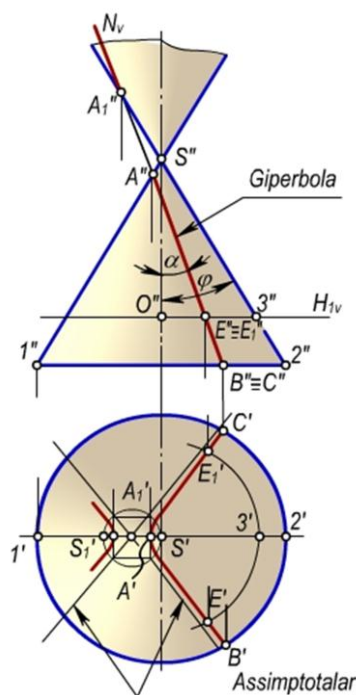
Doiraviy konus sirtning tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziqlar konus kesimlari yoki ikkinchi tartibli chiziqlar deyiladi. Bu chiziqlar oilasiga o'zaro kesuvchi ikki to'g'ri chiziqlar aylana parabola, giperbola, ellips kiradi. Bu

oilaga mansub chiziqlarning hosil bo'lishi kesuvchi tekislikning konus o'qiga va uning yasovchilariga nisbatan vaziyatiga bog'liq bo'ladi.

Kesuvchi tekislik konusning uchidan o'tib, yasovchilardan birortasi bilan kesishmasa, u holda kesimda nuqta hosil bo'ladi (15.10-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o'qi orqali o'tsa, kesimda o'zaro kesuvchi ikki to'g'ri chiziq hosil bo'ladi (15.10-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o'qiga perpendikulyar bo'lib, uning uchidan o'tmasa, kesimda aylana hosil bo'ladi (15.10-rasm).



15.10-rasm

Elliptik kesim. Kesuvchi tekislik bilan konus o'qi orasidagi α burchak konus yasovchilari va o'qi orasidagi φ burchakdan katta ($\alpha > \varphi$) bo'lsa, kesimda **ellips** hosil bo'ladi.

Kesuvchi tekislik konusning barcha yasovchilarini kesib, $\alpha \neq 90^\circ$ bo'lsa, kesimda **ellips** hosil bo'ladi (15.10-rasm).

To'g'ri doiraviy konusning $N(N_v)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash kerak bo'lsin (15.10-rasm).

Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli ellipsning frontal proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi $A''B''$ dan iborat bo'ladi. Ayni vaqtda $A''B''$ kesma ellipsning katta o'qi bo'ladi. Uning kichik o'qi $C'D'$ kesma katta o'qi $A'B'$ ga perpendikulyar bo'lib, kesishish nuqtasida har ikkala o'q bir-birini teng ikkiga bo'ladi.

A va B nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A' va B' bevosita $S'3'$ va $S'4'$ yasovchilarda belgilab olinadi. C va D nuqtalarning gorizontal proyeksiyalarini topish uchun $C'' \equiv D''$ nuqta orqali $H_1(H_{1v})$ gorizontal tekislik o'tkaziladi. Radiusi $0''1''$ kesmaga teng bo'lgan aylana O' markaz bo'yicha chiziladi. $C'' \equiv D''$ nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'i o'tkazilib, uning $0''1'' = 0'1'$ radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari C' va D' lar belgilab olinadi. Gorizontal proyeksiyada ellipsni katta ($A'B'$) va kichik ($C'D'$) o'qlari bo'yicha yasash mumkin. Kesimga tegishli oraliq nuqtalardan bir nechitasi yasalib, ular o'zaro tutashtirilsa ellips hosil bo'ladi. Shunday nuqtalardan E' va F' larni yasashni ko'rib chiqaylik. A'' va B'' nuqtalar orasida ixtiyoriy $E'' \equiv F''$ nuqta olib, u orqali $H_2(H_{2v})$ gorizontal tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikning konus bilan kesishish chizig'i bo'lgan aylananing gorizontal proyeksiyasi bo'lgan $0''2''$ radiusli aylana chiziladi. Bu aylana bilan $E'' \equiv F''$ nuqtadan tushirilgan proyeksion boglanish chizig'ining o'zaro kesishishidan E' va F' nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni konusning $S_4(S'4', S''4'')$ va $S_5(S'5', S''5'')$ yasovchilari orqali ham topish mumkin.

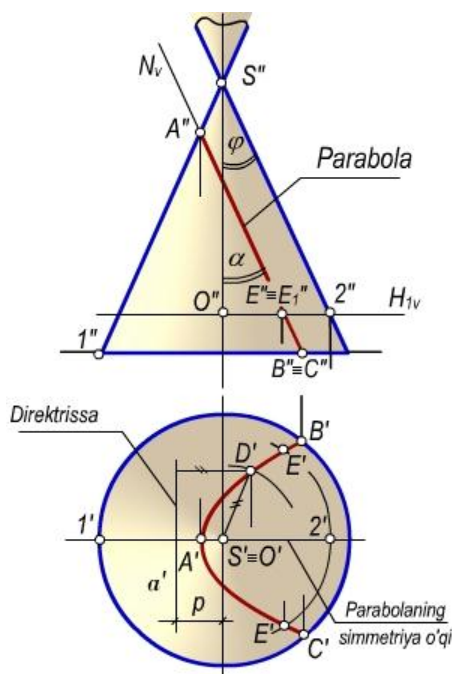
Parabolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning yasovchilaridan biriga parallel qilib o'tkazilsa, kesimda **parabola** hosil bo'ladi (15.11-rasm).

Kesuvchi tekislik konusning uchidan o'tmagan va $\alpha = \varphi$ bo'lgan holda ham kesimda **parabola** hosil bo'ladi.

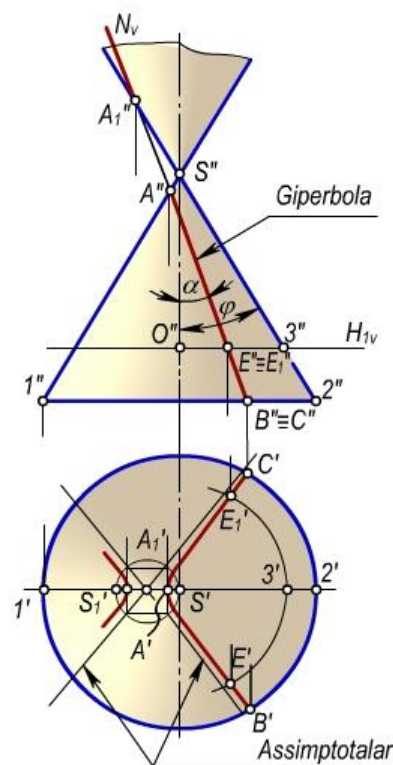
Rasmda to'g'ri doiraviy konus bilan $N(N_V)$ tekislikning kesishuvi ko'rsatilgan. Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli parabolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizontal proyeksiyasi parabola bo'lganligi uchun uni A' uchi, S' fokusi hamda a' direktrissasi bo'yicha yasash mumkin. A' nuqtani bevosita $S'1'$ yasovchida belgilab olinadi, uning chap tomonida $A'S'$ masofada a' direktrissasi parabolaning simmetriya o'qiga perpendikulyar qilib o'tkaziladi.

Kesimga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni quyidagicha topish ham mumkin. $A''B''$ kesimda ixtiyoriy $E'' \equiv E_1''$ nuqta belgilab olinadi. Bu nuqta orqali H_1 gorizontal tekislikning frontal H_{1V} izi o'tkaziladi. Bu tekislik konusni $R=0''2''$ radiusli aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasi bilan $E'' \equiv E_1''$ nuqtadan tushirilgan proyeksion boglanish chizig'i o'zaro kesishib E' va E' nuqtalarni hosil qiladi.

Giperbolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning ikkita yasovchisiga parallel bo'lsa, u konusni **giperbola** bo'yicha kesib o'tadi. Bunda $\alpha < \varphi$ bo'ladi. Bunday tekisliklar xususiy holda konus o'qiga parallel bo'ladi (15.12-rasm).



15.11-rasm



15.12-rasm.

Rasmda berilgan to'g'ri doiraviy konusning $N(N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishishi ko'rsatilgan. Bu holda ham kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi uchun giperbolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. A' va A_1' nuqtalar giperbolaning uchlari bo'lib, ular $S'1'$ va $S'2'$ yasovchilarda belgilab olinadi. S' va S_1' nuqtalar giperbolaning fokuslaridir. Giperbolani uchlari, fokuslari va asimptotalari bo'yicha yasash mumkin. Kesim (giperbola) ga tegishli ixtiyoriy E' va E_1' nuqtalar konusni aylana bo'yicha kesuvchi yordamchi H_1 gorizontaal tekislik o'tkazish bilan topilgan.

Nazorat savollari:

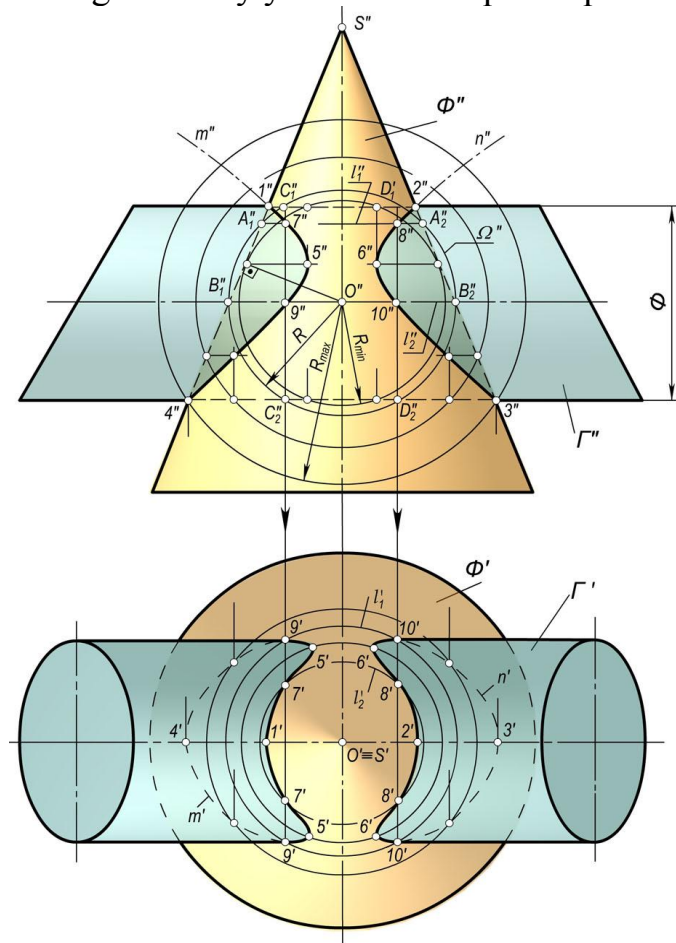
1. Sirtlarni tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi nimalardan iborat?
2. Sferani tekislik bilan kesganda qanday shakl hosil bo'ladi va uning proyeksiyalari qanday yasaladi?
3. Silindrni tekislik bilan kesishuvidan qanday shakllar hosil bo'lishi mumkin?
4. Konus kesimlari nimalardan iborat?
5. Sirtning tekislik bilan kesishish chizig'idagi maxsus nuqtalar nimalardan iborat?
6. Sirtlarni qanday tekisliklar bilan kesilsa, kesimning bitta proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi bo'ladi?
7. Qanday tekisliklar tor sirtini aylanalar bo'yicha kesadi?
8. To'g'ri chiziq bilan sirtning kesishish nuqtalarini yasash qanday bajariladi?
9. To'g'ri chiziq bilan konusning kesishish nuqtalarini yasashda, yordamchi kesuvchi tekislikni qanday vaziyatda o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi?
10. To'g'ri chiziq aylanish sirtlarning aylanish o'qini kesib o'tsa, ularning kesishish nuqtalarini qanday usulda yasash osonroq bo'ladi?

16 – MAVZU. SIRT LARNING O‘ZARO KESISHISHI

Ikki sirtning kesishish chizig'i deb, ular uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Kesishuvchi sirtlarning hosil bo'lishiga qarab ularning kesishish chizig'i quyidagi ko'rinishlarda uchraydi:

- Kesishuvchi sirtlar egri chiziqli yoki to'g'ri chiziqli sirtlar bo'lsa, ularning kesishish chizig'i umumiy holda fazoviy egri chiziq bo'ladi.
- Kesishuvchi sirtlarning biri egri chiziqli ikkinchisi ko'pyoklik sirt bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'i tekis egri chiziqlar bo'ladi.
- Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham ko'pyoklik sirt bo'lsa, ularning kesishish chizig'i fazoviy yoki tekis sinq chiziq bo'ladi.



16.1-rasm.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalarning markazi sirtlarning o'qlari kesishgan nuqtasida bo'ladi. 16.1–rasmda o'qlari umumiy $O(O', O'')$ nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi V ga parallel bo'lgan $\Phi(\Phi', \Phi'')$ aylanma konus va $\Gamma(\Gamma', \Gamma'')$ silindr sirtlari berilgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun O'' nuqtani markaz qilib, R radiusli $\Omega(\Omega'')$ sfera chiziladi. Ω sfera Φ sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun ular $l_1(l_1', l_1'')$ va $l_2(l_2', l_2'')$ aylanalar bo'yicha kesishadi. Shaklda bu aylanalarning V tekislikdagi proyeksiyalari $A_1'' A_2''$

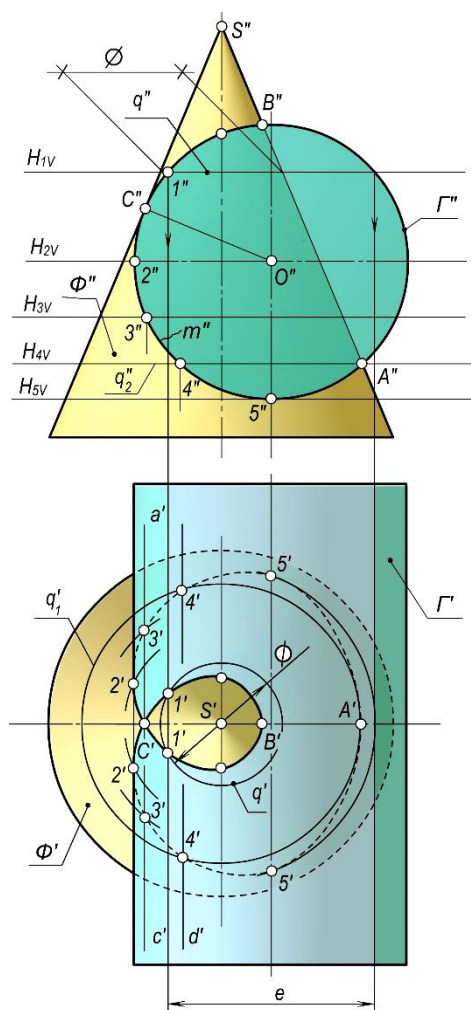
va $B_1'' B_2''$ kesmalar tarzida tasvirlangan. Shuningdek, bu sfera Γ sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun $C_1' C_2''$ va $D_1'' D_2''$ kesmalar ko'rinishidagi aylanalar bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning o'zaro kesishish $7''$, $8''$, $9''$ va $10''$ nuqtalari har ikkala Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning frontal proyeksiyalari bo'ladi. Xuddi shuningdek, O'' nuqtani markaz qilib, konsentrik sferalar chiziladi, ular yordamida Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarini yasash mumkin. Bu nuqtalarning geometrik o'rni bo'lgan m'' va n'' egri chiziqlar Φ va Γ sirtlarning kesishish chiziq bo'ladi. Φ va Γ sirtlarning frontal ocherklarining $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ kesishish nuqtalari bu sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan hisoblanadi. O'' nuqtadan eng uzoqda joylashgan $4''$ xarakterli nuqtadan o'tuvchi sferaning radiusi R_{max} bo'ladi. Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan yana bir juftini Φ va Γ sirtlarining birortasiga R_{min} radiusli urinma sfera o'tkazish bilan aniqlanadi. Eng kichik sferaning R_{min} radiusi quyidagicha aniqlanadi (16.1-rasm): O'' nuqtadan berilgan sirtlarning birini chekka yasovchisiga $O''E''$ va $O''F''$ perpendikulyarlar o'tkaziladi. Bunda $O''E'' > O''F''$ bo'lsa $R_{min} = O''E''$ bo'ladi. Agar $O''E'' < O''F''$ bo'lsa, $R_{min} = O''F''$ bo'ladi, $O''E'' = O''F'' = R_{min}$ bo'lgan holda eng kichik sfera ikkala sirtga urinib, kesishish chizig'i ikkita tekis egri chiziqqa ajraladi. Shunday qilib, urinma sferani shunday o'tkazish kerakki, u sirtlarning biriga urinsin va ikkinchisini kesib o'tsin. 16.1–rasmda Γ sirtga urinma bo'lgan R_{min} radiusli sfera o'tkazish bilan yasalgan egri chiziqning 5, 6 xarakterli nuqtalari aniqlangan. Bu nuqtalarda egrilik buriladi yoki yo'nalishini o'zgartiradi. Kesishish chizig'ining boshqa nuqtalari R_{max} va R_{min} radiusli sferalar orasida ixtiyoriy sferalar o'tkazish bilan aniqlanadi. Konus va silindrlarning o'zaro kesishish chizig'i $m(m'')$ va n larga tegishli nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan parallel kesuvchi gorizontal tekisliklar orqali aniqlanadi. Shunday qilib, konsentrik sferalar usuli bilan ikki aylanish sirtining kesishish chiziqlarini yasash quyidagi sxema bo'yicha bajariladi:

- ikki aylanish sirti o'qlarining kesishish nuqtasi konsentrik sferalar markazi sifatida qabul qilinadi;
- sirtlarning frontal (yoki gorizontal) ocherklarining kesishish nuqtalari xarakterli nuqtalar sifatida belgilanadi va R_{max} radiusli sfera aniqlanadi;
- eng kichik R_{min} radiusli sfera chiziladi. Natijada yana bir juft xarakterli nuqtalar aniqlanadi;
- R_{max} va R_{min} lar orasida sferalar o'tkazilib, oraliq nuqtalar topiladi.

O'qlari uchramas va H yoki V ga perpendikulyar bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash (16.2-rasm). Kesishuvchi sirtlardan doiraviy silindr o'qi V tekislikka va doiraviy konus o'qi H tekislikka perpendikulyar bo'lganda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklar gorizontal tekisliklar bo'ladi. Bu tekisliklar konusni aylanalar va silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Hosil bo'lgan aylana va yasovchilar o'zaro kesishib, kesishish chizig'ining nuqtalarini hosil qiladi.

Kesishish chizig'ining $A(A',A'')$, $B(B',B'')$, $C(C',C'')$, nuqtalari xarakterli nuqtalardir. Ular bevosita sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalarida belgilanadi. Qolgan nuqtalar kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Masalan, 1,2,3,4,5 nuqtalar $H_1 \parallel H, \dots$ va $H_5 \parallel H$ tekisliklar o'tkazib, gorizontal proyeksiyadagi q' va q_1' aylanalarining va a', b', c' va d' to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak kesimlarining kesishuvidan hosil qilingan. Qolgan nuqtalar ham shu tartibda hosil qilinadi.

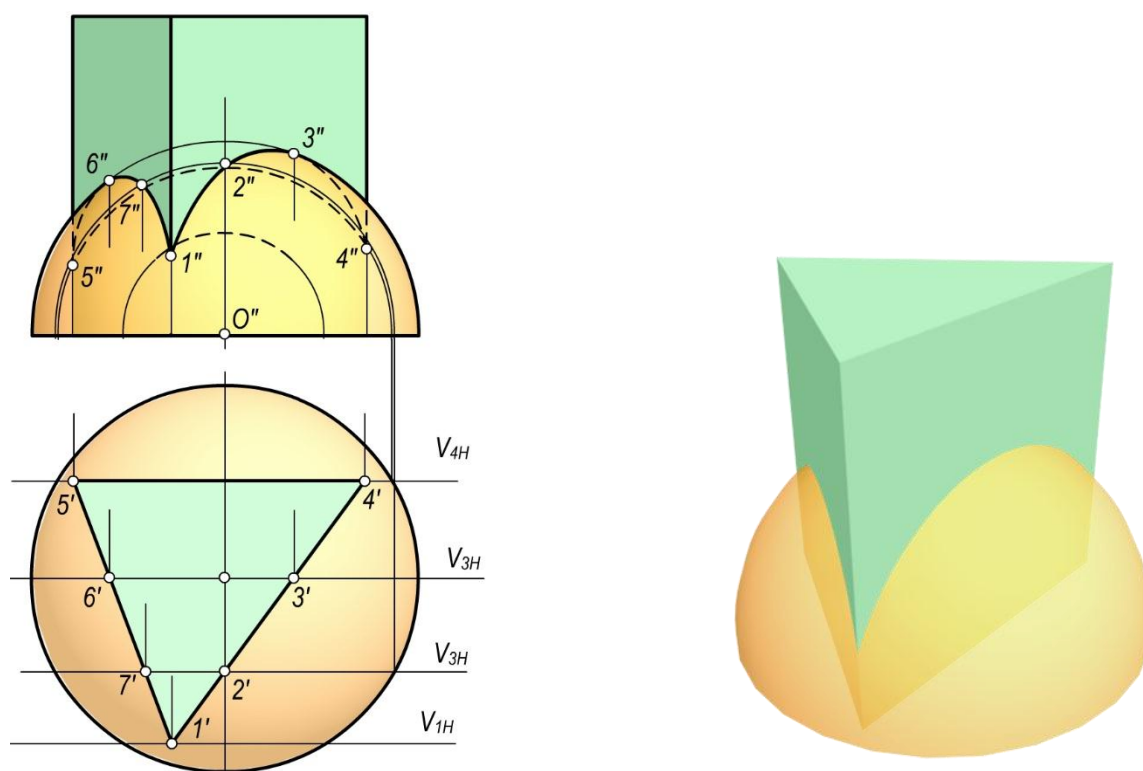
$2(2',2'')$ xarakterli nuqta Γ silindrning $H_2(H_{2V})$ simmetriya tekisligini o'tkazish yo'li bilan topiladi. Kesishish chizig'ining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan nuqtalari ham H_2 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.



16.2-rasm.

Yarim sfera bilan uchburchakli to'g'ri prizmaning o'zaro kesishishi. Sfera bilan prizma sirti fazoda siniq egri chiziq bo'yicha kesishadi. 16.3-rasmda yarim sfera va qirralari H tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchburchakli prizma tasvirlangan. Yordamchi kesuvchi tekisliklar frontal tekisliklardan iborat bo'ladi. Bu tekisliklar sferani parallellari bo'yicha, prizmani esa yon qirralariga parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi.

Rasmdan ko‘rinib turibdiki, prizma sirti sharni to‘la kesadi va uchta aylanalar hosil bo‘ladi. Ularning V dagi proyeksiyalari ellipslar va aylana bo‘lib proyeksiyalanadi. Shar va prizma sirti o‘zaro kesishish chizig‘ining xarakterli 1,4,5,6 va 3 nuqtalari frontal $V_1(V_{1H})$, $V_4(V_{4H})$ va $V_3(V_{3H})$ tekisliklar yordamida yasaladi. 1,4,5 nuqtalar kesishish chizig‘ining sinish nuqtalari bo‘lib, prizma qirrasining sfera bilan kesishgan nuqtalaridir. V_3 tekislik sharning simmetriya tekisligidir, undagi 3 va 6 nuqtalar frontal proyeksiyada kesishish chizig‘ining ko‘rinadigan qismini ajratib turuvchi nuqtalardir. Kolgan yasashlar rasmdan ko‘rinib turibdi. Bu misolda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklarni gorizontall tekislik qilib olsa ham bo‘ladi.



16.3-rasm.

Hazorat savollari

1. Ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
2. Ikki sirtning kesishish chizig‘ini yasashda qanday yordamchi sirtlardan foydalaniladi?
3. Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘ida qanday nuqtalari xarakterli deyiladi?
4. Umumiy o‘qqa ega bo‘lgan aylanish sirtlarining o‘zaro kesishish chizig‘ini qanday egri chiziqlar bo‘ladi?
5. Sferaning har qanday aylanma sirt bilan kesishuvidan nima hosil bo‘ladi va u qanday aniqlanadi?

6. Bitta sferaga tashqi chizilgan silindr va konusning o‘zaro kesishishidan qanday chiziqlar hosil bo‘ladi?
7. Yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usulining mohiyati nimadan iborat?
8. Silindr bilan prizmaning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashda yordamchi tekislik qanday vaziyatda o‘tkaziladi?
9. O‘qlari kesishmaydigan og‘ma silindr va konuslarni kesish chizig‘ini yasashda kesuvchi tekislik qanday o‘tkaziladi?

17 – MAVZU. SIRTLARNING YOYILMALARINI YASASH

Sirtning egilish deformasiyasi yordamida tekislikka aylantirish mumkin bo'lsa, bunday sirt **yoyiladigan sirt** deyiladi. Sirtning biror bo'lagi tekislikning ma'lum bir sohasiga yoyilishi mumkin. Masalan, silindrik sirt tekislikning o'zaro parallel ikki to'g'ri chizig'i orasidagi sohasida yoyiladi. Konus sirti esa tekislikka tegishli ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi sohada yoyiladi.

Sirtning biror bo'lagining cho'zilmasdan, yirtilmasdan tekislikka yoyilishidan hosil bo'lgan tekis shakl uning yoyilmasi deyiladi.

Yoyiladigan sirtlarga to'g'ri chiziqli sirtlardan faqat yondosh yasovchilari xos yoki xosmas nuqtalarda kesishadigan sirtlar kiradi.

Torslarda yondosh yasovchilarning kesishish nuqtalari qaytish qirrasida, konus sirtlarda esa uning uchida va silindrik sirtlarda cheksiz uzoqlikdagi nuqtada bo'ladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasash muhandislik amaliyotida katta ahamiyatga ega. Mashinasozlik, samolyotsozlik va qurilishda turli-tuman konstruksiyalarning shakllarini hosil qilish uchun yaxlit listlarda sirtlarning yoyilmalari yasali, ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan turli andozalar yasaladi.

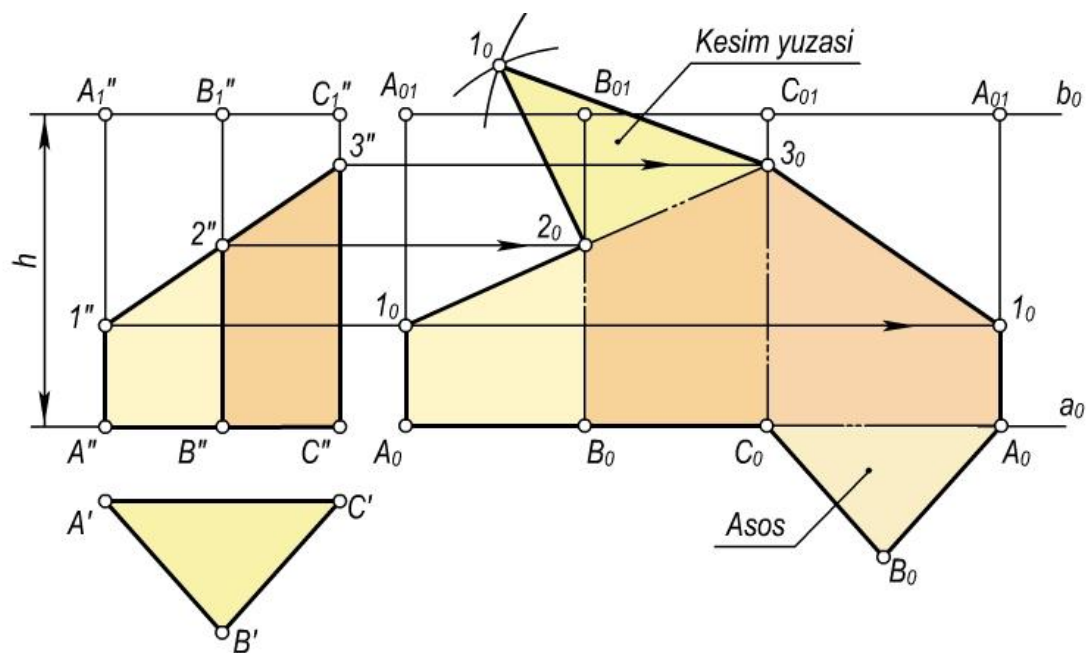
Sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchaklar, dumalatish va normal kesim usullari mavjud.

Uchburchaklar usuli bilan qirrali sirtlar, konus va tors sirtlarning yoyilmalari yasaladi. Dumalatish usuli bilan proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda berilgan qirrali, konus va silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash qulaydir. Yasovchilari yoki qirralari proyeksiya tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda bo'lgan silindrik yoki prizmatik sirtlarning yoyilmalarini normal kesim usulida yasash osonroqdir.

17.1. Ko'pyoqliklar yoyilmalari

Ko'pyoqliklar to'la yoyilmasini yasash uchun uning yon yoqlari va asoslarining yoyilmalari yasaladi. Bunday yoqlar (uchburchak yoki ko'pburchak) ni yoyilmada yasash ularga teng bo'lgan yoqlarni yasash demakdir. Bunday yoqlarni yoyilmada yasash uchun tomonlari ya'ni qirralarining xaqiqiy uzunliklari bo'lishi kerak. Agar ularning xaqiqiy uzunliklari chizmada bo'lmasa, ularni turli usullar orqali yasash mumkin.

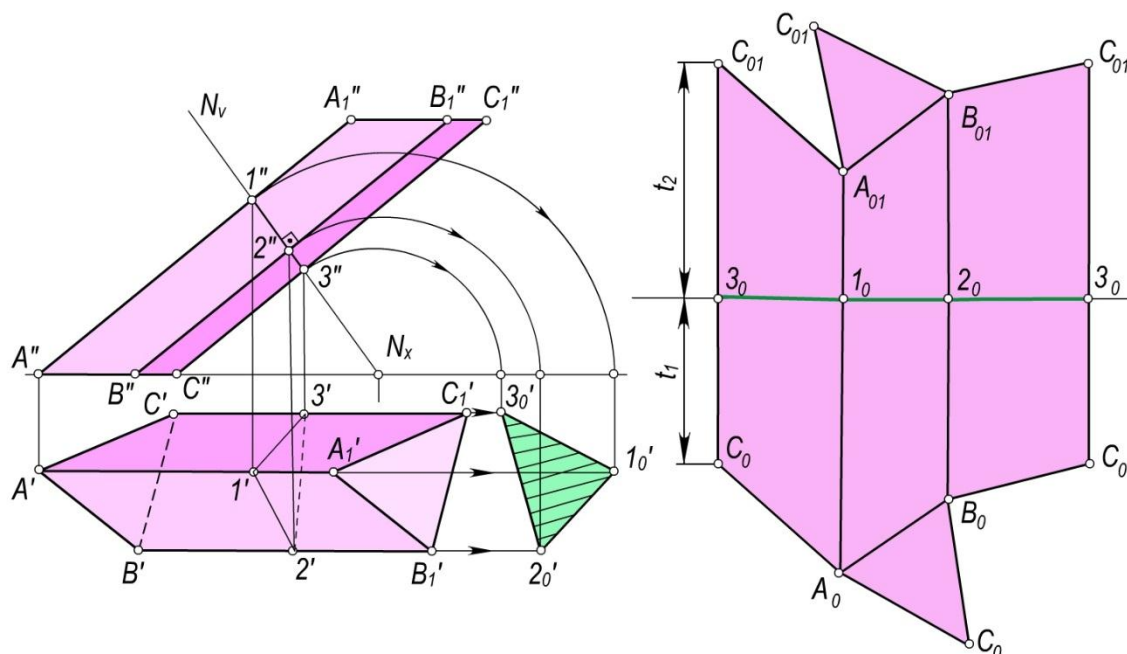
1-masala. Asosi **H** tekislikda yotgan uchburchakli to'g'ri prizmaning yoyilmasini yasash talab qilinsin (17.1-rasm).



17.1-rasm

Yechish. Prizmaning yon qirralari frontal proyeksiyada, asosidagi qirralari esa gorizontaal proyeksiyada xaqiqiy uzunlikda tasvirlangan. Prizmaning yoyilmasini yasash uchun dastlab uning biror masalan, AA_1 qirradi bo'ylab xayolan kesish kerak. So'ngra uchta to'g'ri to'rtburchaklar (yon yoqlar) yonma-yon qo'yib yasaladi. Bu to'rtburchaklarning balandligi prizmaning balandligi h ga, asoslari esa mos ravishda $A'B'$, $B'A'$ va $C'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga asoslari qo'shiladi va prizmaning to'la yoyilmasi hosil bo'ladi.

17.2-rasmlarda berilgan uch yoqli og'ma prizmaning yon qirralari frontal vaziyatda bo'lgani uchun ularning haqiqiy uzunliklari $A''A_1''$, $B''B_1''$ va $C''C_1''$ kesmalarga teng bo'ladi. Asoslari gorizontaal vaziyatda bo'lganligi uchun asos qirralarining haqiqiy qiymati $A'B'$, $B'A'$ va $C'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Bunday og'ma prizmaning yoyilmasini normal kesim usulida yasash qulay hisoblanadi. Buning uchun og'ma prizmaning yon qirralariga perpendikulyar qilib ixtiyoriy $N(N_V)$ tekislik o'tkaziladi. Normal kesim 123 uchburchakning proyeksiyalari ($1'2'3'$, $1''2''3''$) ni hosil qilinadi. So'ngra normal kesimning haqiqiy kattaligi $\Delta 1_0 2_0 3_0$ aylantirish usulida yasaladi.



17.2-rasm

. Yoyilmani yasash uchun ixtiyoriy (bo'sh) joyda a_0 – yordamchi chiziqni ingichka qilib o'tkaziladi. Bu chiziqqa normal kesim tomonlarning haqiqiy uzunliklari biror (masalan, 3_0) nuqtadan boshlab o'lchab qo'yiladi (17.2-rasm). Hosil bo'lgan $3_0, 1_0, 2_0$ va 3_0 nuqtalardan a_0 chiziqqa perpendikulyar vaziyatda chiziq o'tkaziladi. Bu chiziqlarga qirralarning haqiqiy uzunliklari o'lchab qo'yiladi. YOyilmada $C''3''=C_03_0$ va $3''C''=3_0C_0$ qirralarning o'lchab qo'yilishi ko'rsatilgan. Hosil bo'lgan qirralarning uchlari o'zaro tutashtiriladi. Prizma yon sirti va asosining haqiqiy kattaligi yoyilmasi qo'shib to'la yoyilma hosil bo'ladi.

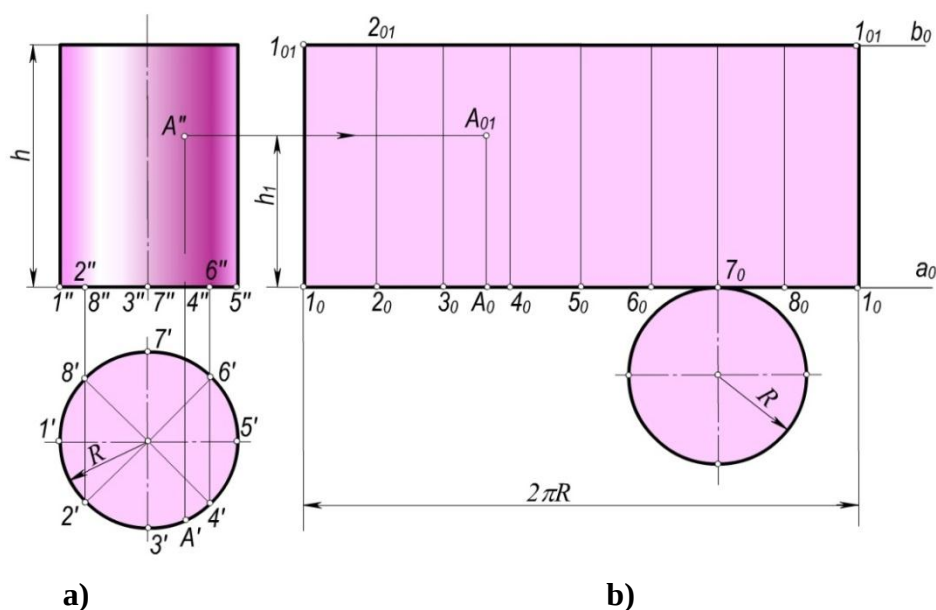
17.2. Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash

Asoslari aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindr yon sirtining yoyilmasi to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lib, bunday to'rtburchakning tomonlari $2\pi R$ va h_0 ga teng bo'ladi (17.3,a,b-rasm). Bu yerda R – asosning radiusi, h – silindrning balandligi. Asosi H tekisligiga tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindrning to'la yoyilmasini yasash 17.3,b-rasmda ko'rsatilgan.

Bunda silindrning 1_02_0 ($1'2', 1''2''$) yasovchisi yoyilmaning boshlanish chizig'i deb olingan.

Ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkazib, unga $[1_01_0] = 2\pi R$ kesma o'lchab qo'yiladi va u teng 8 bo'lakka bo'linadi. Kesmaning har ikkala uchidan a_0 to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar chiqarilib, ularga $1_01_0=h$ kesma, ya'ni silindrning balandligiga teng kesmalar o'lchab kuyiladi. Hosil bo'lgan $1_01_01_01_0$ to'g'ri to'rtburchak berilgan silindr yon sirtining yoyilmasi bo'lib, to'la yoyilmani yasash uchun 1_01_0 va 2_02_0 tomonlarga urinuvchi qilib silindrning asoslari chiziladi. Sirtga tegishli A nuqtaning yoyilmadagi o'rnini aniqlash 17.3,a,b-rasmdan ko'rinib

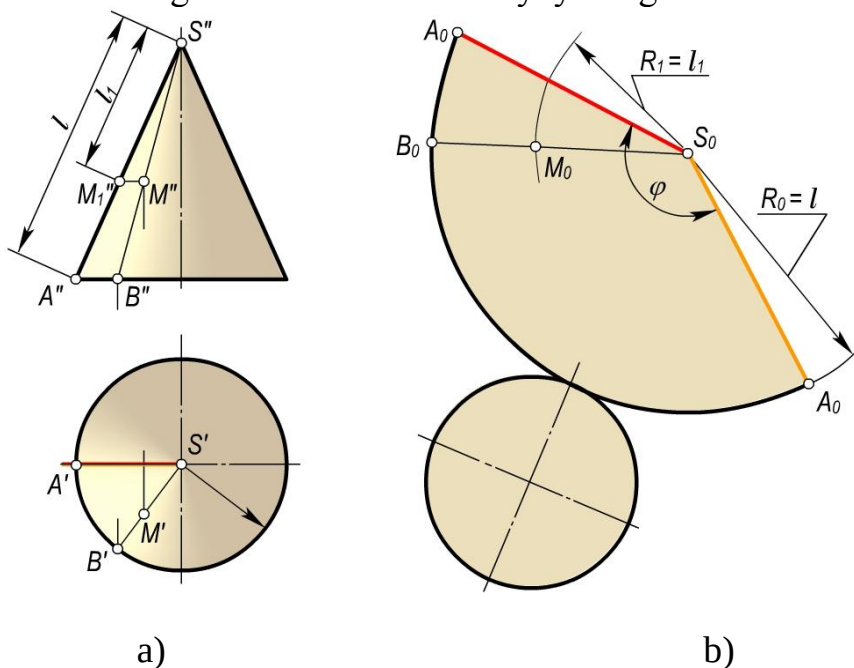
turibdi. Bunda $3' \cap A' = 3_0 A_0$, $A_0 A_{01} = h_1$, ya'ni A nuqtaning applikatasiga teng bo'ladi.



17.3-rasm.

17.3. Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash

Umumiy holdagi konus sirtining yoyilmasi ham piramida yoyilmasini yasashdagidek, uchburchaklar usuli bilan bajariladi. Buning uchun konus o'ziga ichki chizilgan ko'pyoqlik piramidaga approksimasiya qilinadi va shu piramidaning yoyilmasi konus sirtining yoyilmasi deb qabul qilinadi. Ichki chizilgan ko'pyoqlik piramidaning yoqlari qanchalik ko'p bo'lsa, konus sirtining yoyilmasi shunchalik aniq bo'ladi. Umuman, konusni yoyish uchun uning bir necha yasovchilarining haqiqiy uzunliklari va yunaltiruvchi egri chizig'i (yoki uning bo'laklarining) — asosining haqiqiy uzunligi topiladi. so'ngra konus yasovchilari va asosining bo'laklari birin ketin yoyilmaga ko'chiriladi.



17.4-rasm

17.4 a,b-rasmda asosi H tekislikka tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy $\Phi(\Phi',\Phi'')$ konus Monj chizmasida berilgan. Bunday konus yon sirtining yoyilmasi doira sektoridan iborat bo'ladi.

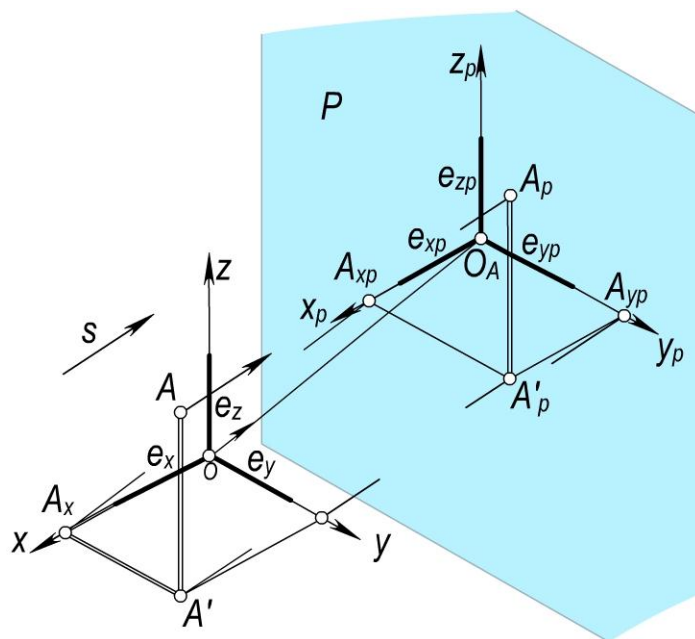
Nazorat savolari

1. Sirtning yoyilmasi deb nimaga aytiladi?
2. Yoyiladigan sirtlar deb nimaga aytiladi?
3. Qanday ko'pyoqliklarning yoyilmalari uchburchaklar usuli bilan yasaladi?
4. To'g'ri doiraviy silindrning yoyilmasi nimadan iborat?
5. To'g'ri doiraviy konusning yoyilmasi nimadan iborat?

18 – MAVZU. AKSONOMETRIK PROEKSİYALAR

Ma'lumki, ortogonal proyeksiyalarda chizmalarni chizish birmuncha qulay bo'lib, buyumning metrik xarakteristiklari ham saqlanadi, chunki ortogonal proyeksiyalashda buyum proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holda joylashtiriladi. Ortogonal proyeksiyalash usulida tuzilgan chizmalarda qirqim va kesimlardan foydalanib buyumning ichki va tashqi ko'rinishini yetarlicha aniqlash mumkin. Ammo ortogonal proyeksiyalardagi chizmalariga ko'ra ularning fazoviy shakllarini tasavvur qilish qiyin. Bunday hollarda buyum chizmasini uning yaqqol tasviri bilan to'ldirish zaruriyati tug'iladi.

Bunday tasvirlar aksonometrik proyeksiyalar bo'la oladi. Lekin aksonometrik proyeksiyalarning hammasi ham yaqqol bo'lavermaydi. Buyumni yaqqol qilib tasvirlash proyeksiyalash yo'nalishi va proyeksiyalar tekisliginig vaziyatlariga bog'liq bo'ladi. Aksonometrik proyeksiya qisqacha aksonometriya deb yuritiladi (**aksonometriya** grekcha so'z bo'lib, **axon** – o'q, **metrien** – o'lchayman, ya'ni o'qlar bo'yicha o'lchash degan ma'noni bildiradi.)



18.1-rasm

R tekislik aksonometriya tekisligi deb yuritiladi (18.1-rasm). Aksonometrik proyeksiyalar ikki xil bo'ladi:

- Parallel proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar.
- Markaziy proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar yoki ular perspektiv proyeksiyalar deb ham yuritiladi.

Parallel aksonometrik proyeksiyalar to'g'ri burchakli va qiyshiq burchakli bo'ladi. s proyeksiyalash yo'nalishi bilan R tekislik orasidagi burchak $\varphi=90^\circ$ bo'lsa, to'g'ri burchakli; agar $0^\circ < \varphi \neq 90^\circ$ bo'lsa, qiyshiq burchakli aksonometriya deb ataladi.

Biror figuraning aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun figuraning o'zi va uning ortogonal proyeksiyalaridan birini aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash yetarlidir. Masalan, fazodagi A nuqta ortogonal proyeksiyalaridan biri A' proyeksiyasi bilan birga R aksonometriya tekisligiga tasvirlangan (18.1-rasm). Bunda A_r nuqta A nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi bo'ladi. A'_p nuqta esa A nuqtaning *ikkilamchi proyeksiyasi* deb yuritiladi. Shakldagi $OA_xA'A$ sinig chiziq tomonlari A nuqtaning x, y va z koordinatalaridan iborat bo'lganligi uchun uni *koordinatalar sinig chizig'i* deb yuritiladi. Uning aksonometrik proyeksiyasi $O_rA_{xp}A'_rA_r$ bo'ladi.

O_rX_r , O_rY_r , O_rZ_r lar aksonometrik proyeksiyalar o'qlari, O_r esa O koordinatalar boshining aksonometriyasi bo'ladi.

Aksonometrik proyeksiyalar parallel proyeksiyalar turiga mansub bo'lganligi sababli ular parallel proyeksiyalarning hamma xossalriga ega.

Shunga ko'ra $AA' \parallel OZ$, $A'A_x \parallel OY$, $A'A_u \parallel OX$ bo'lganligi uchun $A_rA'_r \parallel O_pZ_p$, $A'_rA_{x_r} \parallel O_pY_p$, $A'_rA_{y_r} \parallel O_pX_p$ bo'ladi.

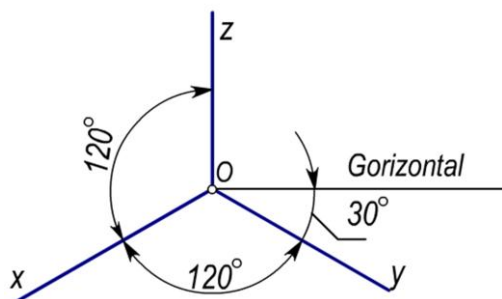
Aksonometriyaning asosiy teoremasi

Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada aksonometrik o'qlar va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari ixtiyoriy tanlab olinishi mumkin. Aksonometrik proyeksiyalardagi bunday xususiyatni 1853 yilda avstriyalik matematik Karl Polke aniqlab, quyidagi xulosaga kelgan:

Teorema. Tekislikka tegishli bitta nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy uchta kesma fazoda joylashgan bitta nuqtadan chiquvchi o'zaro perpendikulyar va teng uchta kesmaning parallel proyeksiyasi bo'lishi mumkin.

1864 yilda K.Polkening shogirdi G.A.Shvars bu teoremani umumlashtirdi va uning sodda isbotini berdi. Keyinchalik aksonometriyaning bu teoremasini Polke-Shvars nomi bilan yuritiladigan asosiy teoremasi quyidagicha ta'riflanadi.

Teorema. Diagonalari bilan berilgan har qanday tekis to'rtburchakni ixtiyoriy olingan tetraedrga o'xshash tetraedrning parallel proyeksiyasi deb qabul qilish mumkin.



18.2-рasm.

To'g'ri burchakli standart izometriya.

To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometrik proyeksiyalar tekisligi R koordinatalar tekisliklari bilan bir xil burchak xosil qilsa, izlar uchburchagi teng tomonli bo'lib, uning balandligi bissektressasi xam bo'ladi. Shuning uchun to'g'ri burchakli izometiriyada aksonometrik o'qlar orasidagi burchaklar 120° ga teng (18.2-rasm). Bu xolda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x=k_y=k_z$

bo‘lib, $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2$ tenglikdan $3k_x^2 = 2$ yoki $k_x = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.82$ hosil bo‘ladi.

Demak, $k_x = k_y = k_z = 0.82$ bo‘lib, u natural o‘zgarish koeffitsienti deyiladi. Buyumning aniq izometriyasini yasash uchun dastlab undagi xar bir nukgani x , y , z koordinatalari yoki uning eni, bo‘yi va balandligini 0,82 ga ko‘paytirib, chizishga to‘g‘ri keladi.

Lekin buyumlarinig to‘g‘ri burchakli izometriyasini yasashda o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlari 1 ga teng qilib olinsa, chizish sur‘ati tezlashadi. Bu holda $k_x = k_y = k_z = 1$ bo‘lib, ular izometriyada keltirilgan o‘zgarish koeffitsientlari deb yuritiladi. Bunda keltirish koeffitsienti $m = \frac{1}{0.82} = 1.22$ ga teng

bo‘lib, buyumning aksonometriyasi asliga nisbatan 1,22 marta kattalashadi.

18.3-rasmda kub va uning yoqlariga ichki chizilgan aylanalarning izometriyalari bo‘lgan ellipslar tasvirlangan. Aylananing tekisliklari (kubning yoqlari) H , V va W proyeksiyalar tekisliklariga parallel. Natural o‘zgarish koeffitsientlari 0,82 bo‘yicha ellipslarning katta va kichik o‘qlari quyidagicha bo‘ladi:

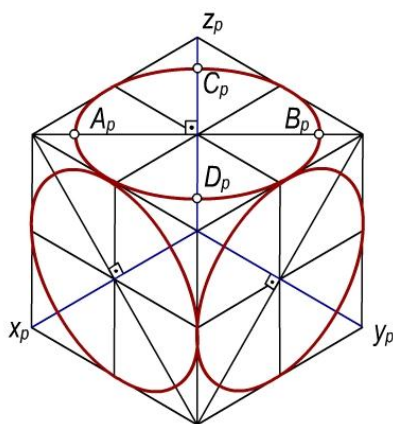
$$A_p B_p = d, \quad C_p D_p = \sqrt{1 - 0.82^2} d = 0.58 \cdot d$$

Bunda d - berilgan aylana diametri.

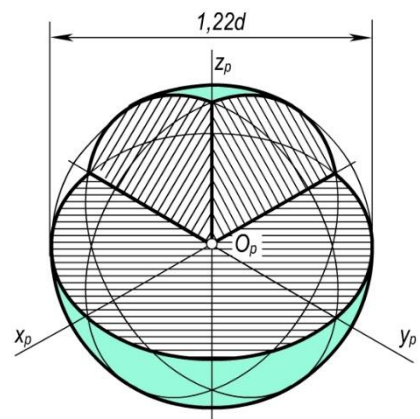
Keltirilgan o‘zgarish koeffitsientlari bo‘yicha stardant izometriyada ellipslarning katta o‘qlari $A_p B_p = 1,22d$ ga kichik o‘qlari $C_p D_p = 1,22 \cdot 0,58d = 0,71d$ ga teng bo‘ladi.

Shunday qilib, diametri d ga teng bo‘lgan aylanalar gorizontal, frontal va profil yoki ularga parallel bo‘lgan tekisliklarda joylashgan bo‘lsa, bunday aylanalarning izometriyasidagi ellipslarning $A_p B_p$ katta o‘qi d ga, $C_p D_p$ kichik o‘qi esa $0,58d$ ga teng, keltirilgan o‘zgarish koeffitsientlar bo‘yicha esa $A_p B_p = 1,22d$, $C_p D_p = 0,71d$ bo‘ladi.

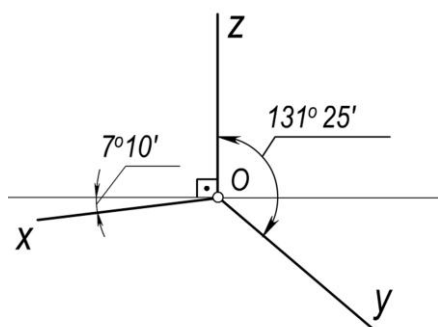
18.4-rasm to‘g‘ri burchakli izometriyada tasvirlangan sferaning diametri 1,22d ga teng. Bunda d sferaning diametri.



18.3-rasm.



18.4-rasm.



18.5-pacm.

To'g'ri burchakli standart dimetriya. Agar aksonometrik proyeksiyalar tekisligi koordinatalar tekisliklaridan ikkitasi bilan bir xil burchak hosil qilsa, bunday aksonometriya to'g'ri burchakli dimetriya deyiladi. Bunda o'qlar bo'yicha o'zgarish koefitsientlari $k_x = k_y \neq k_z$, $k_x = k_z \neq k_y$ yoki $k_y = k_z \neq k_x$ bo'lishi mumkin.

To'g'ri burchakli dimetriyaning juda ko'p turlari mavjud bo'lib, ulardan aksonometrik o'qlarning o'zaro joylashuvi 18.5-rasmda ko'rsatilgan vaziyatdagi holati standartda tavsiya qilingan. Bu o'qlarni α va β burchaklarning tangenslari orqali oson yasash mumkin, chunki $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{8}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{8}$. Standart dimetriyada o'qlar bo'yicha o'zgarish koefitsientlarining $k_x = k_z \neq k_y$ holi qabul qilinib $k_x = k_z = 2k_y$ yoki $k_y = 1/2 k_x$ deb olingan. U holda $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2$ tenglikka yuqoridagi qiymatlarni qo'yib, $k_x^2 + k_x^2 + \frac{k_x^2}{4} = 2$ yoki $9k_x^2 = 8$ ga ega bo'lamiz. Bundan, $k_x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94$ ni hosil qilamiz. Demak, $k_x \approx 0,94$; $k_z \approx 0,94$; $k_y \approx 0,47$ hosil bo'ladi.

Amaliyotda to'g'ri burchakli dimetrik proyeksiyalarni yasash uchun quyidagi keltirilgan o'zgarish koefitsientlaridan foydalaniladi:

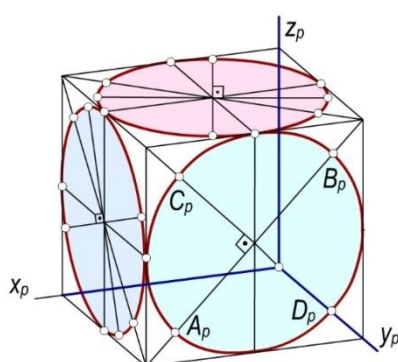
$$k_x = 1, \quad k_y = 1, \quad k_z = 0.5$$

U holda keltirish koefitsienti $m = \frac{1}{0.94} = 1.06$ bo'ladi. Bu holda buyumning

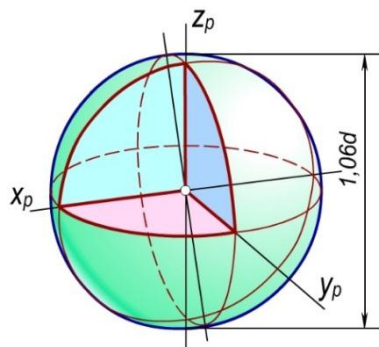
aksonometriyasi asliga nisbatan 1,06 marta kattalashadi.

18.6,a-rasmda to'g'ri burchakli dimetriyada kub va uning yoqlarida ichki chizilgan aylanalarning dimetrik proyeksiyalari bo'lgan ellipslar tasvirlangan.

To'g'ri burchakli standart dimetriya uchun $k_x = k_z = 0,94$ va $k_y = 0,47$ bo'lganligi uchun H(XOY) hamda W(YOZ) tekisliklarga tegishli aylananing proyeksiyalari bo'lgan ellipslar uchun



a)



b)

18.6-rasm.

$$C_p D_p = CD \cdot \sqrt{1 - 0.94^2} = 0.33 \cdot d$$

bo'ladi. $V(XOZ)$ tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi ellips uchun esa $C_p D_p = d \sqrt{1 - 0.47^2} = 0.88 \cdot d$ bo'ladi.

Keltirilgan o'zgarish koeffisientlari bo'yicha XOY va YOZ tekisliklariga parallel bo'lgan yoqlardagi ellipslar (aylananing dimetriyasi) uchun katta o'qlar $A_p B_p = 1,06d$, kichik o'qlar $C_p D_p = 0,35d$ bo'ladi. Chunki $C_p D_p = 1,06 \times 0,33d$. XOZ tekislikka parallel bo'lgan yoqdagi ellips uchun $A_p B_p = 1,06d$, $C_p D_p = 0,93d$. Chunki $C_p D_p = 1,06 \times 0,88d = 0,93d$.

Sferani to'g'ri burchakli dimetriyasini keltirilgan o'zgarish koeffisientlari bo'yicha chizish, 18.6,b-rasmda ko'rsatilgan. Sferaning dimetriyasi D_1 diametrli aylana bo'lib, $D_1 = 1,06d$ ga teng.

Diametri d ga teng aylanalar gorizont al va profil tekisliklarda joylashgan bo'lsa, ularning dimetriyasidagi ellips larning katta va kichik o'qlari mos ravishda $1,06d$ va $0,35d$ ga teng. Agar diametri d ga teng aylana frontal tekisliqda joylashgan bo'lsa, bunday aylananing dimetriyasidagi ellipsning katta va kichik o'qlari mos ravishda $1,06d$ va $0,94d$ ga teng bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Aksonometrik proyeksiyalar qanday qanday hosil qilinadi?
2. Aksonometriya asosiy teoremasining mohiyati nimadan iborat?
3. O'qlar bo'yicha o'zgarish koeffisientlarini ta'riflab bering.
4. Haqiqiy va keltirilgan o'zgarish koeffisientlarning farqini tushuntiring.
5. Izlar uchburchagi nima va u haqidagi teoremlarning qaysi birini bilasiz?
6. Proyeksiyalash burchagi va o'zgarish koeffisientlari orasida qanday bog'lanish bor?
7. Aylananing aksonometriyasi haqida nimalar bilasiz?
8. Standart aksonometriyaning qanday turlarini bilasiz?
9. To'g'ri burchakli standart izometriya haqida nimalarni bilasiz?
10. To'g'ri burchakli standart dimetriyani ta'riflab bering?
11. Qiyshiq burchakli standart dimetriya (kabinet proyeksiya) haqida nimalar bilasiz?
12. Zenit aksonometrik proyeksiyalar qanday maqsadlarni ko'zlab chiziladi?
13. Aksonometrik proyeksiyalarda pozision masalalarni yechish uchun nimalarga e'tibor beriladi?

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Murodov Sh.K. va boshqalar. Chizma geometriya. – T.: O'qituvchi, 2006.
2. Murodov Sh.K. Gidrotexniklar uchun chizma geometriya. – T.: O'qituvchi, 1991
3. Sobirov E. Chizma geometriya qisqa kursi. – T.: O'qituvchi, 1993.
4. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1978.
5. Xorunov R. Chizma geometriya kursi. – T.: O'qituvchi, 1974.
6. To'xtayev A., Abramyan Ya.P. Injenerlik grafikasidan spravochnik – T.: O'qituvchi, 1994.
- 7.Yadgarov O'.T., Jorayev T.X. Muhandislik grafikasi o'quv qo'llanmasi. 2018.