ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

“АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА ИНФОРМАТИКА” КАФЕДРАСИ

5480100 – Амалий математика ва информатика

таълим йўналиши бўйича талабаларда билим, кўникма ва малакаларини ошириш юзасидан яратилган

Маърузалар матни

Муаллиф А.Хуррамов

ҚАРШИ – 2019

1-§ ЖАРАЁНЛАР ТАДҚИҚОТИНИНГ АСОСИЙ БОСҚИЧЛАРИ

Текширилиши лозим бўлган муаммога (лойиҳага) жараёнлар тадқиқотини қўллаш давомида қуйидаги б о с қ и ч л а р кетма-кетлигини бажаришга тўғри келади:

1) текшириш мақсадини аниқлаш (мақсад функцияни);
2) лойиҳанинг бажариш режасини тузиш;
3) муаммони тавсифлаш;
4) моделни қуриш;
5) ҳисоблаш усулини ишлаб чиқиш;
6) дастурларни техник жиҳатларини ишлаб чиқиш, дастур тузиш ва уларни созлаш;
7) маълумотлар тўплаш;
8) моделнинг адекватлигини текшириш;
9) олинган натижаларни амалиётга тадбиқ этиш.

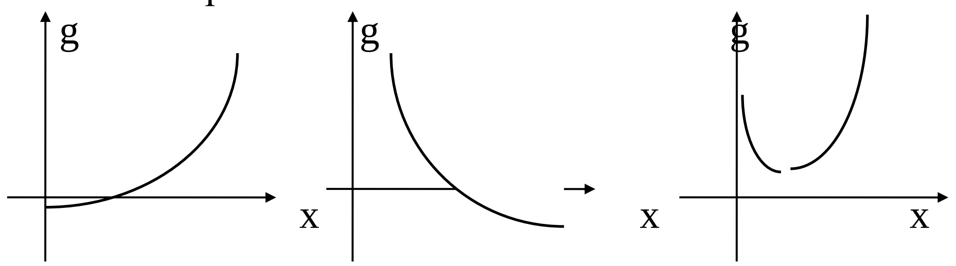
2- § ҲАРАЖАТ ФУНКЦИЯСИ ҚАВАРИҚ БЎЛГАНДА ЗАХИРАНИ БОШҚАРИШ

Юқорида кўриб ўтдикки, заҳирани бошқариш масаласида ҳаражат функция (мақсад функция) қуйидаги кўринишда бўлади.

$C_t(x_t,i_t)=C_t(x_t)+h_t(i_t)$ бу ерда $C_t(x_t)\geq 0$, $C_t(0)\equiv 0$; $h_t(i_t)\geq 0$, $h_t(0)=0$, $C_t(x_t)$- ишлаб чиқариш, $h_t(i_t)$- заҳирани сақлаш ҳаражатларини билдиради. Бундан ташқари мувозанат тенгламаси $i_t=i_{t-1}+x_t-D_t$, бўлиб $i_0=0$ ва $D_t\geq 0$ шартлари бажарилиши керак. Агар $C_t(x_t)$, $h_t(i_t)$ лардан маьлум шартлар талаб қилинса, масалани ечиш анча енгиллашиши мумкин. Бундай шартлардан бири, уларнинг қаварик бўлишлигидир.

Таъриф: Аниқланиш соҳаси бутун сонлардан иборат бўлган g(x) функция қаварик дейилади, агарда $g(x+1) - g(x) \geq g(x) - g(x-1)$ тенгсизлик ўринли бўлса.

Мисоллар:



Фараз қилайлик, $c_t(x_t)$-ишлаб чиқариш ва $h_t(i_t)$-сақлаш ҳаражат функциялари қаварик бўлишсин. У ҳолда қуйидаги учта қадамдан иборат бўлган соддароқ алгоритм орқали оптимал режани аниқлаш мумкин.

1. Талаб қондирилмаган энг биринчи оралиқ p бўлсин. 1, 2, ..., p оралиқларнинг ҳар бирида ишлаб чиқарилган маҳсулотларни биттага ошириб p та вариант ҳосил қиламиз.
2. Бу p та вариантлар ичидан энг кам ҳаражатлисини танлаб оламиз.
Агар бундай вариантлар бир нечта бўлса, у ҳолда уларнинг энг сўнггиси олинади.
3. p-оралиқдаги талаб биттага қондирилади. Агар барча талаблар қондирилса, ҳисоблаш тўхтатилади, акс ҳолда 1-пунктга ўтилади.

Бу алгоритм, албатта, авваги динамик программа лаш усулига қараганда содда усул ҳисобланади.

3- § КОММИВОЯЖЕР МАСАЛАСИНИ ТАРМОҚЛАР ВА ЧЕГАРАЛАР УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ

1. Коммивояжер масаласининг қўйилиши

Коммивояжер - дайди сотувчи маъносини билдириб, масаланинг қўйилиши жуда ҳам соддадир. Яъни коммивояжер n та шаҳарнинг ҳар бирига фақат бир мартадан ташриф буюриб, барча шаҳарларни шундай айланиб чиқиши керакки, натижада умумий кетадиган харажат (чиқим, сарф) минимал бўлсин. Агар, биз шаҳарларни бир марта айланиб чиқишни маршрут деб атасак, аниқки, бундай маршрутлар сони кўпи билан (n-1)! та бўлади. Демак, қўйилган масала ечимининг мавжудлиги равшан. Фақат шу ечимни (маршрутни) аниқлаб берувчи “эффектив” усулни (алгоритмни) кўрсатиб бериш керак бўлади.

Айрим соҳаларга тегишли бўлган масалаларни ҳам, худди коммивояжер масаласи каби ифодалаш мумкин. Масалан, n та турдаги маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхона, маҳсулот ишлаб чиқариш тартибини қандай режалаштирса, бир маҳсулот ишлаб чиқаришдан иккинчига ўтиш учун қайта жиҳозлаш харажатлари йиғиндиси минимум бўлади?

Албатта, коммивояжер масаласини ечиш учун чизиқли программалаш усулларидан ҳам фойдаланиш мумкин. Аммо, бу масала айрим махсусликларга эга бўлганлиги сабабли, алоҳида ечиш усуллари яратилган бўлиб, улардан тармоқлар ва чегаралар усули, ўзининг афзал томонлари билан ажралиб туради. Бу усулни бошқа, масалан, бутун сонли чизиқли программалаш масалаларини ечиш учун ҳам қўллаш мумкин. Бунда айниқса, қисман бутун сонли чизиқли программалаш масалаларини ечишда самарали усуллардан бири ҳисобланади.

2.Тармоқлар ва чегаралар усули

Биз тармоқлар ва чегаралар усулини комивояжер масаласини ечиш учун қўлланишини кўрамиз. Фараз этайлик c_{ij} сонлари i-шаҳардан j-шаҳарга ўтиш учун кетадиган харажатни билдирсин. Агар i шаҳардан j шаҳарга ўтишнинг иложи бўлмаса, c_{ij} ни етарлича катта сон деб оламиз (буни $c_{ij} = \infty$ деб белгилаймиз), i-шаҳардан яна i-шаҳарга ўтилди, дейиш маъносиз бўлганлиги сабабли $c_{ij} = \infty$ деб олинади. Шундан сўнг $n \times n$ ўлчамли (c_{ij}) жадвал (матрица) ҳосил бўлади, у харажат жадвали деб аталади. Яна бир бор таъкидлаб ўтамизки, жадвалнинг i сатри j устуни кесишган жойдаги c_{ij} элемент i-шаҳардан j-шаҳарга ўтиш учун кетган сарф- харажатни билдиради.

Энди жадвални *келтириш* тушунчасини киритамиз. Бунинг учун, аввал жадвал сатрлари келтирилади, яъни жадвалнинг ҳар бир сатр элементларидан шу сатрнинг кичиги мос равишда айириб ташланади. Шундан сўнг жадвал устунларига нисбатан ҳам худди шу амал бажарилиб, жадвал устунлари келтирилади.

Барча сатрлари ва устунлари келтирилган жадвал *келтирилган* деб аталади. Демак, равшанки, келтирилган жадвалнинг ҳар бир сатри ва устунида камида битта нол элемент иштирок этган бўлади. Жадвал сатр ва устунлари энг кичик элементларининг йиғиндиси h билан белгиланиб, у жадвалнинг келтириш *коэффициенти* дейилади.

Мисол сифатида қуйидаги ҳаражат жадвалини кўрайлик

$C =$

	1	2	3	4	5	6	
1	∞	24	15	4	3	17	3
2	1	∞	3	10	2	9	1
3			∞	2	10	4	2
4			8	∞	7	1	1
5	20	11	4	12	∞	18	4
6	9	12	21	4	25	∞	4

Жадвал сатрларини келтириш учун, унинг ўнг тарафига мос сатрнинг энг кичик элементини ёзиб чиқамиз ва сатр элементларидан уни айириб қуйидаги жадвалга эга бўламиз

$C^* =$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	21	12	1	0	14
2	0	∞	2	9	1	8
3	14	2	∞	0	8	2

4	2	18	7	∞	6	0
5	16	7	0	8	∞	14
6	5	8	17	0	21	∞
	0	3	0	0	0	0

Ҳосил бўлган C^* жадвалнинг устунларини келтириш мақсадида жадвал остига мос устуннинг энг кичик элементи ёзилади ва у устун элементларидан айириб чиқилади, натижада қуйидаги жадвал ҳосил бўлади

$C^{**}=$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	18	12	1	0	14
2	0	∞	2	9	1	8
3	14	[illegible]	[illegible]	0	8	2
4	2	[illegible]	[illegible]	∞	6	0
5	16	4	0	8	∞	14
6	5	5	17	0	21	∞

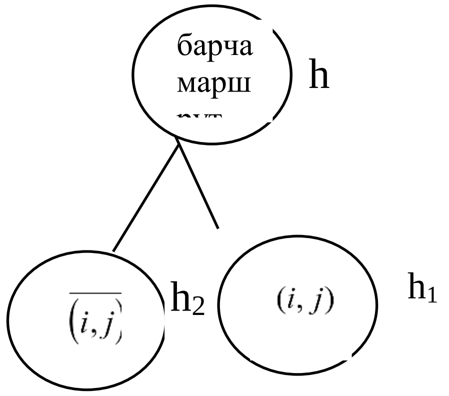
Бу C^{**} жадвал келтирилган бўлиб, унинг ҳар бир сатр ва устунида камида биттадан нол элемент бор. Кўрилаётган жадвалнинг келтириш коэффициенти h қуйидаги сонга тенг

$$h=3+1+2+1+4+4+0+3+0+0+0+0=18.$$

Келтириш коэффициенти h энг кам харажатли ўтишларнинг умумий ҳаражатини билдириб, бу харажатни берувчи маршрутни хар вақт ҳам аниқлаб бўлмайди. Юқорида кўрилган мисолда энг кам ҳаражатли (h=18) маршрутни аниқласак, у иккита бир бирига боғланмаган ўтишлардан (цикллардан) иборат бўлиб қолади, яъни $1\to5\to3\to2\to1$ ва $4\to6\to4$. Бу эса қўйилган масаланинг ечимини бермайди. Демак, жадвални келтириш билан ҳар вақт ҳам қўйилган масаланинг ечимини олиб бўлмас экан. Умуман, тармоқлар ва чегаралар усули иккита муҳим босқичдан иборатдир 1) тармоқлаш; 2) чегараларни аниқлаш.

Масалани ечиш давомида иккала босқич параллел равишда олиб борилади. Бу босқичларни амалга ошириш учун, қуйидаги ишларни кетма-кет бажариш керак. А) бошланғич жадвални келтириш; В) келтириш коэффиценти h ни аниқлаш; С) келтирилган жадвалнинг нол элементлари даражасини аниқлаш; D) бу даражалар асосида тармоқлашни амалга ошириш; Е) тармоқланиш натижаларини ташкил этувчи маршрутларнинг қуйи чегараларини аниқлаш; F) жадвал ўлчамини биттага камайтириш; G) тўла бўлмаган маршрутлар (цикллар) ҳосил бўлиб қолишдан сақланиш; Н) бу жараённи (2х2)-жадвал ҳосил бўлгунга қадар давом эттириши; I) охирги тармоқ натижасига мос маршрутни аниқлаш; J) барча чегара (баҳоларни) солиштириш; К) зарурат бўлса, энг кам чегаравий натижага мос жадвал тикланиб тармоқлашни давом эттириш. Бу усулни қўллаш давомида, барча ҳисоб-китоблар берилган жадвал ёрдамида олиб борилиб, унинг натижалари алоҳида тузилган графда кўрсатиб борилади. Бу жараён охирида мукаммал (энг кам харажатли) маршрут аниқланади.

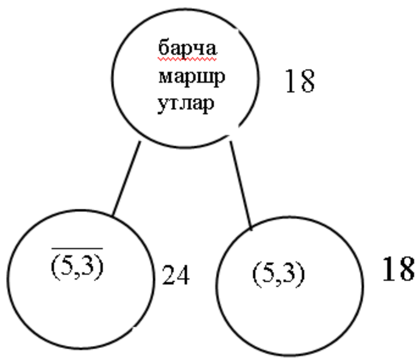
Бу граф ўзаро бирлаштирилган доирачалардан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири маълум бир хоссали маршрутлар тўпламини аниқлайди. Бу доирачалар ёнига ёзилган чегара-сонлар эса, шу доирага тегишли бўлган маршрутларга мос харажатларнинг қуйи чегарасини билдиради.



1-расм

Графнинг бошланғич қисми (1-расм) кўринишда бўлади.Бунда биринчи бошланғич доирача барча маршрутларни ўз ичига олган тўпламни аниқлаб, ихтиёрий маршрут бўйича кетадиган харажат h сонидан кичик бўлмаслигини билдиради. Юқорида кўрган мисолда h=18 эди, демак, харажати 18 дан кичик бўлган маршрут йўқ экан. Барча маршрутлар тўпламини тармоқлаш учун келтирилган C^{**} жадвалнинг нол элементлари даражалари аниқланади. Масалан, $c_{15}^{**}=0$ нинг даражасини топиш учун, биринчи сатрдаги энг кичик элемент -1 га, бешинчи устундаги энг кичик элемент-1 қўшилади ва ҳосил бўлган 2 сони шу нолнинг даражаси сифатида ёзиб қўйилади. Худди шундай $c_{32}^{**}=0$ нинг даражасини топиш учун учинчи сатрдаги энг кичик -0 га иккинчи устундаги энг кичик элемент -4 қўшилади ва ҳосил бўлган 4 сони c_{32}^{**} нинг даражаси сифатида ёзиб қўйилади. Шу усул ёрдамида C^{**} жадвалнинг барча нол элементлари даражалари аниқланади. Даражаси энг катта бўлган нол жойлашган сатр- i ва устун -j лар топилаб, (i,j) бўйича тармоқланади. Бунда, ўнг тарафдаги доирача i-шаҳардан j-шаҳарга ўтишни ўз ичига олган барча маршрутларнинг тўпламини билдиради, ва у (i,j) билан белгиланади, чап тарафдаги доирача эса, аксинча, i-шаҳардан j-шаҳарга ўтишни ўз ичига олмаган маршрутларнинг тўпламини билдиради ва у $\overline{(i,j)}$ билан белгиланади. Мабода, катта даражали ноллар бир нечта бўлса, уларнинг ихтиёрий биттаси танлаб олинади. Юқоридаги мисолда келтирилган C^{**} жадвалнинг ноллари даражасини аниқлаймиз.

Даражаси энг катта бўлган нол элемент $c_{53}^{**}=0$ дир, демак, тармоқланиш графи 2-расм кўринишда бўлади.



2-расм

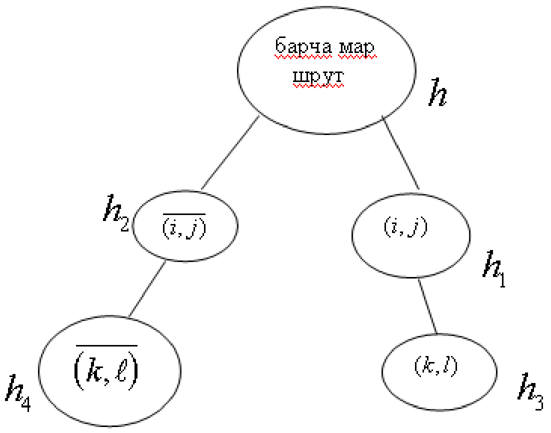
Чап доирачага мос келган энг кам ҳаражат келтириш коэффициенти h=18 нолнинг энг катта даражаси 6 қўшиб топилади (h_2), бизнинг мисолда у 24 га тенг. Ўнг тарафдаги доирачага мос келувчи харажатларнинг қуйи чегарасини аниқлаш учун C^{**} жадвалнинг энг катта даражали нол жойлашган сатр ва устун ташлаб (ўчириб) ташланади. Демак, жадвалнинг ўлчами биттага камаяди. Бунда, шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, шаҳарларнинг тартиб рақамлари албатта сақланиб (ёзилиб) қолиши шарт, акс ҳолда чалкашликлар келиб чиқади. Шундан сўнг, тўла бўлмаган маршрут $i \to j, \quad j \to i$ ($i \to j$ белги і-шаҳардан j-шаҳарга ўтишни билдиради) йўқотилади, бунинг учун c_{ji}^{**} элемент ∞ белгисига алмаштирилиб ёзиб қўйилади. Бизнинг мисолда бу жадвал қуйидаги кўринишга эга бўлади

	1	2	4	5	6
1	∞	18	1	0	14
2	0	∞	9	1	8
3	14	0	0	∞	2
4	2	15	∞	6	0
6	5	5	0	21	∞

Шундан сўнг, ҳосил бўлган янги жадвал келтирилиб, унинг келтириш коэффициенти, олдинги келтириш, коэффициенти бўлган h га қўшиб ёзилади (h_2*).

Охирги жадвалдан кўриниб турибдики, у келтирилган жадвал экан, демак, унинг келтириш коэффициенти нолга тенг. Шунинг учун 2-расмдаги ўнг доирачага мос келувчи чегара ўзгармаган (18).

Тармоқлаш учун ўнг доирача танлаб олинади (ўнга юриш қоидаси бўйича) тармоқлаш жуфтлиги k,ℓ ни аниқлаш учун охирги келтирилган жадвалнинг ноллари даражалари ҳисобланади ва улардан энг катта даражалиси ёрдамида k,ℓ жуфтлик ажратилиб, тармоқлаш амалга оширилади (3-расм.) Бунда $\overline{(k,\ell)}$ белгини олган чап доирачага мос чегара (h_4),



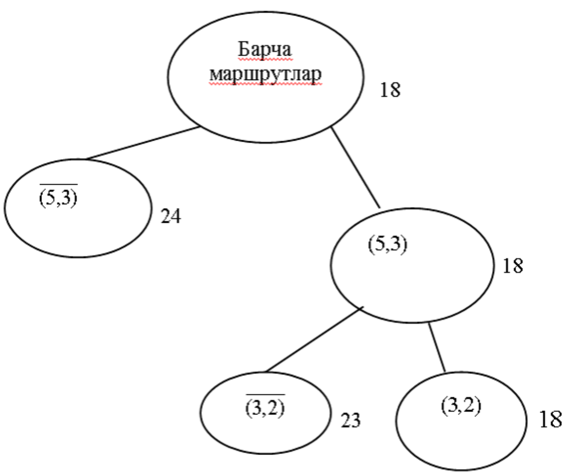
3-расм

h_1 га нолнинг энг катта даражаси қўшиб аниқланади.
(k,l) белгили ўнг доирачага мос келган чегарани (h_3^*)
топиш учун охирги жадвалдан k -сатр ва $\ell-$устун чиқариб (ўчириб ташланади) ва тўла бўлмаган маршрутлар ∞ белгиси ёрдамида $\overline{(k,\ell)}$ тақиқланади. Шундан сўнг, ҳосил бўлган жадвалнинг келтириш коэффициенти h га h_1^* қўшилиб ўнг доирача ёнига ёзиб қўйилад из кўраётган сонли мисолда бу жараён қуйидаги кўринишни бўла

	1	2	4	5	6
1	∞	18	1	$0^{(2)}$	14
2	$0^{(3)}$	∞	9	1	8
3	14	$0^{(5)}$	$0^{(1)}$	∞	2
4	2	15	∞	6	$0^{(4)}$
6	5	5	$0^{(5)}$	21	∞

k,ℓ жуфтлик сифатида (3,2) ни, ёки (6,4) ни олиш мумкин. Масалан, (3,2) ни олайлик. У ҳолда қуйидаги графга эга бўламиз (4-расм). Энди охирги жадвалнинг учинчи сатри, иккинчи устунини ташлаб юбориб $2 \to 5$ ўтишни ҳам тақиқлаб қўямиз (∞ белги орқали). Чунки, охирги (3,2) белгили доирачада $5 \to 3 \to 2$ ўтишларни ўз ичига олган маршрутлар тўпланган бўлиб, тўла бўлмаган $5 \to 3 \to 2 \to 5$ маршрутни тақиқлаш керак эди. Шу ўзгаришлардан сўнг жадвал кўриниши қуйидагича бўлади

	1	4	5	6
1	∞	1	0	14
2	0	9	∞	8
4	2	∞	6	0
6	5	0	21	∞



4-расм

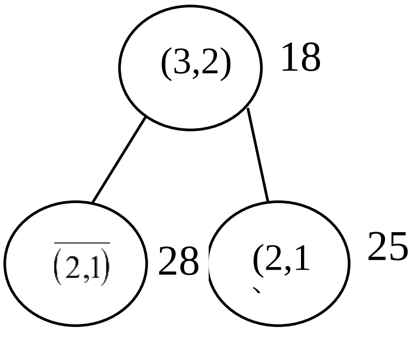
Бу келтирилган жадвал, демак, унинг келтириш коэффициенти нол бўлиб $h_3^* = 18$ бўлади $(h_3 = 18 + 5 = 23)$.

Шундан сўнг ўнг тарафдаги доирачани тармоқлаш учун, янги жуфтликни аниқлаш лозим, худди аввалгидай охирги жадвалдаги нол элементларнинг даражалари ҳисобланади

	1	4	5	6
1	∞	1	$0^{(7)}$	14
2	$0^{(10)}$	9	∞	8
4	2	∞	6	$0^{(10)}$
6	5	$0^{(6)}$	21	∞

Аниқлик учун (2,1) жуфтликни танлаб олайлик, у ҳолда 4-расмнинг давоми сифатида қуйидаги графга эга бўламиз (5-расм).

(2,1) белгили доирачада $5 \to 3 \to 2 \to 1$ ўтишларни ўз ичига олган маршрутлар тўплами бўлиб, тўла бўлмаган $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 5$ маршрутни йўқотиш мақсадида биринчи сатр, бешинчи устун кесишган элементни ∞ белгига алмаштирамиз ва иккинчи сатр биринчи устунни ўчириб ташлаймиз, натижада, қуйидаги жадвал ҳосил бўлади:



5-расм

	4	5	6	

1	1	∞	14	1
4	∞	6	0	0
6	0	21	∞	0

Сатрларни келтирамиз:

	4	5	6
1	0	∞	13
4	∞	6	0
6	0	21	∞
	0	6	0

	4	5	6
1	0	∞	13
4	∞	0	0
6	0	15	∞

Сўнг устунларни келтирамиз. Демак жадвалнинг келтириш коэффициенти $1+6=7$ га тенг, шу сабабли ўнг тарафдаги доирачага мос келган чегара

$h_4^* = 18+7=25$ бўлади ($h_4 = 18+7=25$).

	4	5	6
1	$0^{(13)}$	∞	13
4	∞	$0^{(15)}$	$0^{(13)}$
6	$0^{(15)}$	15	∞

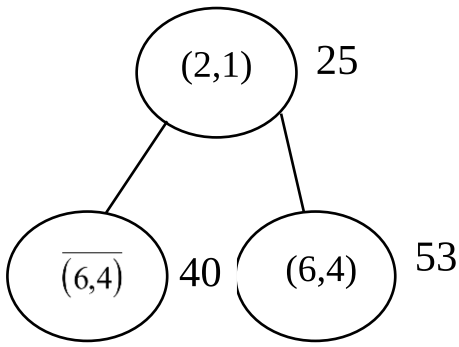
Энди охирги жадвал нолларининг даражаларини аниқлаймиз (бу юқорида кўрсатилган) тармоқлаш учун (6,4) жуфтликни танлаб олайлик. У ҳолда 5-расмнинг давоми қуйидаги кўринишда бўлади.

Чап тарафдаги доирачага

($\overline{(6,4)}$ белгили) мос чегара

$h_5 = 25+15=40$ га тенг бўлади.

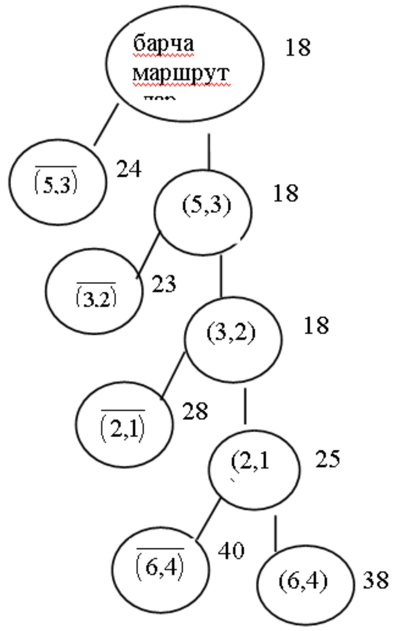
(6,4) белгили доирачага мос тўплам $5\to 3\to 2\to 1$ ва $6\to 4$ ўтишларни ўз ичига олган маршрутлардан иборат бўлиб, $6\to 4\to 6$ тўла бўлмаган маршрутларни йўқотиш учун ∞ белги орқали $4\to 6$ ўтиш тақиқланади ва олтинчи сатр, тўртинчи



6- расм

устун ўчириб ташланади. У ҳолда, натижавий жадвал қуйидаги кўринишда

	5	6	
1	∞	13	13
4	0	∞	0



7-расм

Бу жадвалнинг сатрлари келтирилади

	5	6
1	∞	0
4	0	∞

Демак ўнг тарфдаги доирачага мос чегара $h_5^* = 25 + 13 + 0 = 38$ бўларэкан. Шундай қилиб,

	5	6	
1	∞	13	13
4	0	∞	0

бўлади.
Бу жадвалнинг сатрлари келтирилади

	5	6
1	∞	0
4	0	∞

Демак ўнг тарфдаги доирачага мос чегара $h_5^* = 25 + 13 + 0 = 38$ бўлар экан. Шундай қилиб,
биз натижавий графга эга бўлдик (7-расм).

Бу графнинг ўнг тарафидаги доирачалар кетма-кетлиги ва охирги (2x2)-ўлчамли жадвал ёрдамида харажати 38га тенг бўлган $6 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 6$
маршрут аниқланади. Лекин, чап тарафдан $\overline{(3,2)}$ белгига эга бўлган доирачага мос чегара 23 га тенг, шунинг учун, қидирилаётган энг кам

харажатли (мукаммал) маршрут шу тўпламда бўлиши мумкин. Демак, шу доирачага мос келган жадвални тиклаш керак бўлади. Эслатиб ўтамизки, бу доирачага мос келган маршрутларда $3 \to 2$ ўтиш тақиқланган, $5 \to 3$ ўтиш эса мажбурий. Шу сабабли C жадвалнинг C_{32} ва C_{35} элементларини ∞ белгисига алмаштирилади ва бешинчи сатр, учинчи устунлар ўчириб ташланади $g = C_{53} = 4$ (агар бир неча элемент ўчирилса g билан шу элемент қийматлари йиғиндиси белгиланади). Натижада $\overline{(3,2)}$ белгили доирачага мос келган жадвал қуйидаги кўринишда бўлади

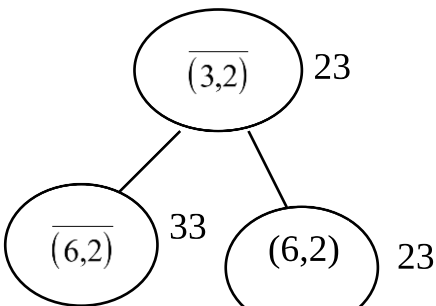
	1	2	4	5	6
1	∞	24	4	3	17
2	1	∞	10	2	9
3	16	∞	2	∞	4
4	3	19	∞	7	1
6	9	12	4	25	∞

Бу жадвал келтирилади ва келтириш коэффиценти h аниқланади. Натижада қуйидаги жадвалга эга бўламиз

	1	2	4	5	6
1	∞	13	1	0	14
2	0	∞	9	1	8
3	14	∞	0	∞	2
4	2	10	∞	6	0
6	5	0	0	21	∞

Унинг келтириш коэффиценти $h = 19$ га тенг, демак $\overline{(3,2)}$ белгили доирачага мос келган чегара $h + g = 23$ га тенг экан

	1	2	4	5	6
1	∞	13	1	$0^{(2)}$	14
2	$0^{(3)}$	∞	9	1	8
3	14	∞	$0^{(2)}$	∞	2
4	2	10	∞	6	$0^{(4)}$
6	5	$0^{(10)}$	$0^{(0)}$	21	∞



8-расм

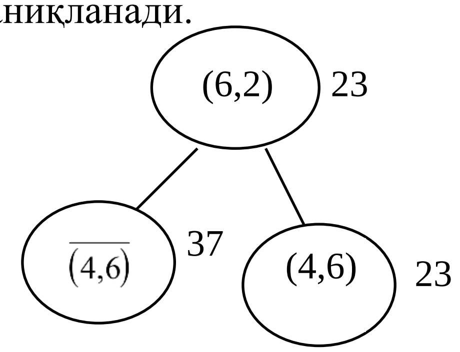
Энди, шу доирачани тармоқлаш учун (i, j) жуфтлик аниқланади, яъни нолларнинг даражалари ҳисобланади.

Демак (6,2) жуфтлик бўйича тармоқланиш амалга оширилади (8-расм). Энди, маълум ўзгартиришлар (6-сатр, 2-устун ўчирилади, $C_{26} = \infty$) киритилиб, сўнг уни келтириш натижасида, қуйидаги жадвал ҳосил бўлади

	1	4		5	6
1	∞	1		0	14
2	0	9		1	∞
3	14	0		∞	2
4	2	∞		6	0

Бунда, келтириш коэффиценти 0 тенг, шунинг учун (6,2) белгили доирачага мос чегара қиймати 23 бўлади (9-расм). Сўнг охирги жадвалнинг ноллари даражалари топилади ва (6,2) белгили доирачани тармоқлаш учун жуфтлик аниқланади.

	1	4	5	6
1	∞	1	$0^{(2)}$	14
2	$0^{(3)}$	9	1	∞
3	14	$0^{(1)}$	∞	2
4	2	∞	6	$0^{(4)}$



9-расм

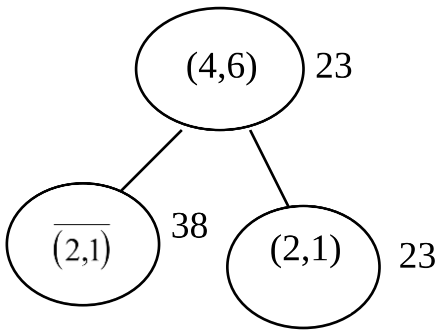
Демак, тармоқланиш жуфтилиги (4,6) экан (9-расм). Охирги жадвал маълум қоидалар асосида ўзгартирилади. (4-сатр, 6-устун ўчирилади, $C_{24} = \infty$ белгини олади)

	1	4	5
1	∞	1	0
2	0	∞	1

3	14	0	∞

Бу жадвалнинг келтириш коэффициенти нолга тенг, шунинг учун (4,6) белгили доирача чегараси 23 тенг бўлади. Охирги жадвалнинг ноллари даражалари аниқланади

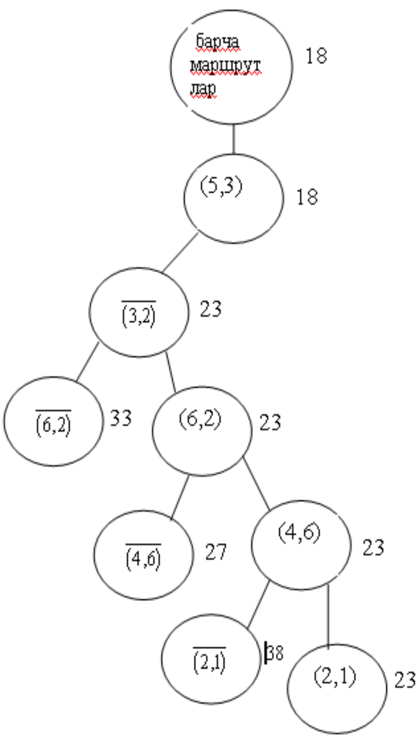
	1	4	5
1	∞	1	$0^{(2)}$
2	$0^{(15)}$	∞	1
3	14	$0^{(15)}$	∞



10-расм

Тармоқланиш (2,1) жуфтлик орқали амалга оширилган бўлсин (10-расм

Бу эса келтирилган жадвал, демак (2,1) белгили доирачага мос чегара 23 бўлиб қолади мос графлар бирлаштирилиб, қуйидаги кўринишга эга бўлган граф ҳосил бўлади (11-расм). Охирги жадвал ва бу граф ёрдамида энг кам харажатли (23) маршрутни ниқлаймиз: $2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 4 \to 6 \to 2$. Графдаги (10-расм) ҳеч бир доирачани тармоқлаш орқали 23 дан кам бўлган



11- расм

харажатли маршрутни топиб бўлмайди. Бу эса,

топилган маршрутнинг мукаммал (энг кам харажатли) эканлигини билдиради.). Маълум ўзгартиришлардан ($C_{14} = \infty$, 2-сатр, 1-устун ўчирилади) кейин, қуйидаги сўнги (2x2)- ўлчамли жадвал ҳосил бўлади

	4	5
1	∞	0
3	0	∞

Шундай қилиб, кўрилган мисолда қуйидаги ечимни оламиз:энг кам – 23 харажатли маршрут $2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 4 \to 6 \to 2$ бўлади.

4- § КОММИВОЯЖЕР МАСАЛАСИНИ ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШ УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ

Коммивояжер масаласини динамик программалаш усули билан ечишни Беллман таклиф этган. Лекин шунга қарамасдан бу усулда ҳисоблашлар кўп. Усулни келтирамиз: Фараз этайлик бошланғич сифатида C_O шаҳар олинган бўлсин. Шаҳарлар тўпламини тўртта тўпламга ажратамиз:

1) $\{C_O\}$ - бошланғич шаҳар,
2) $\{C_I\}$- битта шаҳардан иборат тўплам, $C_I \neq C_O$,
3) $\{C_K\}$- к та шаҳардан иборат тўплам
4) $\{C_{n-k-2}\}$ - қолган n-k-2 та шаҳарлар тўплами

Фараз қилайлик оптимал маршрут маълум бўлсин. У ҳолда шундай шаҳар ва тўпламларни аниқлаш мумкинки, оптимал цикл C_O дан бошланиб , $\{C_{n-k-2}\}$ дан ўтиб, $\{C_I\}$ орқали ва $\{C_k\}$ дан ўтиб C_O га қайтиб келади.

$C_I \to \{C_k\} \to \{C_0\}$ маршрутни қараб чиқайлик. Бу маршрут учун оптимал йўл маълум. Акс ҳолда қарама-қаршиликка келамиз.

$f(C_I;\{C_k\})$ –
$C_I \to \{C_k\} \to \{C_0\}$
маршрутдаги энг қисқа масофа бўлсин.

$f(C_I;\{0\})=C_{I0}$ $f(C_0;\{C_{n-1}\})$- оптимал маршрут йўли бўлади.

Динамик програм малашнинг асосий формуласи қуйидагича кўринишда бўлади

	1	2	3	4	5
1	∞	2	7	∞	4
2	7	∞	10	21	15
3	9	17	∞	8	11
4	16	5	8	∞	14
5	24	7	15	8	∞

$$f(C_I;\{C_k\})=\min_{C_j\in\{C_k\}}\left(C_{ij}+f\left(C_j;\{C_k\}-\{C_j\}\right)\right)$$

Мисол сифатида n=5 бўлган ҳолни қарайлик: Айтайлик, $C_0=C_5$ бўлсин.

k= 0 (4 та вариант)

$f(C_1;\varnothing)=C_{15}$, $f(C_2;\varnothing)=C_{25}$

$f(C_3;\varnothing)=C_{35}$, $f(C_4;\varnothing)=C_{45}$

-- -- -- -- -- --

k= 1 (12 та вариант)

$f(C_1;\{C_2\})=C_{12}+f(C_2;\varnothing)$, $f(C_1;\{C_3\})=C_{13}+f(C_3;\varnothing)$

$f(C_1;\{C_4\})=C_{14}+f(C_4;\varnothing)$, $f(C_2;\{C_1\})=C_{21}+f(C_1;\varnothing)$

$f(C_2;\{C_3\})=C_{23}+f(C_3;\varnothing)$

$f(C_4;\{C_3\})=C_{43}+f(C_3;\varnothing)$

-- -- -- -- -- --

k=2 (12 та вариант)

$f(C_1;\{C_2,C_3\})=\min(C_{12}+f(C_2;\{C_3\})\ ,\ C_{13}+f(C_3;\{C_2\}))$,

$f(C_1;\{C_2,C_4\})= \min\ (C_{12}+f(C_2;\{C_4\})\ ,\ C_{14}+f(C_4;\{C_2\}))$,

$f(C_1;\{C_3,C_4\})= \min\ (C_{13}+f(C_3;\{C_4\})\ ,\ C_{14}+f(C_4;\{C_3\}))$,

$f(C_2;\{C_1,C_3\})= \min\ (C_{21}+f(C_1;\{C_3\})\ ,\ C_{23}+f(C_3;\{C_1\}))$,

-- -- -- -- -- -- --

$f(C_4;\{C_2,C_3\})= \min\ (C_{42}+f(C_2;\{C_3\})\ ,\ C_{43}+f(C_3;\{C_2\}))$.

k=3 (4 та вариант)

$f(C_1;\{C_2,C_3,C_4\})= \min\ (C_{12}+f(C_2;\{C_4,C_5\})\ ,\ C_{13}+f(C_3;\{C_2,C_4\}))$, $C_{14}+f(C_4;\{C_2,C_3\}))$.

$f(C_2;\{C_1,C_3,C_4\})= \min (C_{21}+f(C_1;\{C_3,C_4\})$, $C_{23}+f(C_3;\{C_1,C_4\}))$, $C_{24}+f(C_4;\{C_1,C_3\}))$.
$f(C_3;\{C_1,C_2,C_4\})= \min (C_{31}+f(C_1;\{C_2,C_4\})$, $C_{32}+f(C_2;\{C_1,C_4\}))$, $C_{34}+f(C_4;\{C_1,C_2\}))$.
$f(C_4;\{C_1,C_2,C_3\})= \min (C_{41}+f(C_1;\{C_2,C_3\})$, $C_{42}+f(C_2;\{C_1,C_3\}))$, $C_{43}+f(C_3;\{C_1,C_2\}))$.

$k=4$ (1 та вариант)
$f(C_5;\{C_1,C_2,C_3,C_4\})= \min (C_{51}+f(C_1;\{C_2,C_3,C_4\})$,
$f(C_{52}+ f(C_2;\{C_1,C_3,C_4\})$,
$f(C_{53}+ f(C_3;\{C_1,C_2,C_4\})$, $f(C_{54}; f(C_4;\{C_1,C_2,C_3\})$.

Назорат саволлари

1. Коммивояжёр масаласига динамик програм малаш усулини қўллашда асосий ўзгарувчиларни аниқлаш ва тайинлаш қандай олиб борилади.
2. Динамик программалашнинг асосий форму ласини тахлил қилиб беринг.

5- § ҲАЛИ БОРИЛМАГАН ЭНГ ЯҚИН ШАҲАРНИ ТАНЛАШ АЛГОРИТМИ

Энг оддий табиий усуллардан бири бу яқин шаҳарни танлашдир. Яъни бу матрицанинг берилган сатрдаги энг кичик элементни танлаш демакдир. Лекин шундай мисол кўриш мумкинки, бу усул ҳар вақт ҳам оптимал ечимни беравермайди. Шунга қарамасдан, агар жуда ҳам аниқ ечим талаб қилинмаса бу усулни қўллаш қулайдир. Масалан, юқоридаги жадвал учун маршрутларни аниқлаймиз.

Бошланғич шаҳар	Маршрут	Баҳо

1	1-5-3-4-6-2-1	23
2	2-1-5-3-4-6-2	23
3	3-4-6-2-1-5-3	23
4	4-6-2-1-5-3-4	23
5	5-3-4-6-2-1-5	23
6	6-4-1-5-3-2-6	28

Демак, бу усулда бошланғич шаҳарни танлаш муҳим аҳамиятга эга экан. Лекин бу ерда барча вариантларни кўриб чиқиб энг яхшисини танлаб олиш мумкин.

6- § МАКСИМАЛ ОҚИМ

Максимал оқим масаласи чизиқли программалаш масаласига келади, лекин у махсус кўринишга эга бўлганлиги учун алоҳида ечиш усуллари топилган.

Таъриф 1. Тўр деб, тугун нуқталар ва уларни бирлаштирувчи ёйлар тўпламига айтилади.

Агар ёйларга йўналтириш киритилган бўлса, бундай тўр *йўналтирилган тўр* деб аталади, акс ҳолда *йўналтирилмаган тўр* дейилади. Тугун нуқталар N_k билан, ёйлар эса A_{ij} билан белгиланади.

$N_1A_{12}N_2A_{23}N_3...N_{k-1}A_{k-1k}N_k$ кетма-кетлик *занжир* деб аталади. Агар $N_1=N_к$ бўлса, занжир *цикл* деб аталади. Занжир содда дейилади, агар унда цикл иштирок этмаса. Тўрда, одатда иккита тугун нуқталар ажратиб кўрсатилади ва улар *манба* ва *қуйилиш нуқталари* деб аталади. Ҳар бир A_{ij} ёйга b_{ij} манфий бўлмаган сон мос қўйилган бўлиб, у шу ёйнинг *ўтказиш қобилияти* деб аталади. Бу трубанинг, масалан, кўндаланг кесимига мос келади.

Масаланинг қўйилишини беришдан олдин, оқим тушунчасини киритамиз.

Таъриф 2. N_s манбадан N_t қуйилиш нуқтасига олиб борувчи оқим деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи номанфий $\{x_{ij}\}$ сонлар тўпламига айтилади:

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} -v, & агар \quad j = s \\ 0, & агар \quad j \neq s,t \\ v, & агар \quad j = t \end{cases}$$

$v\geq 0$, $0\leq x_{ij}\leq b_{ij}$ ихтиёрий i, j лар учун v-*оқим катталиги* деб аталади. x_{ij}- A_{ij} *ёй оқими* дейилади.

Мақсад функция эса қуйидаги кўринишда бўлади

$$v=\sum_j x_{sj}$$

X- бирор тугун нуқталар тўплами бўлсин, $\overline{X}$-қолган тугун нуқталар тўплами бўлсин.

(X, $\overline{X}$)- кесим деб A_{ij} ёйлар тўпламига айтилади, бу ерда ёки $N_i \in X$, $N_j \in \overline{X}$, ёки $N_i \in \overline{X}$, $N_j \in X$.

(X, $\overline{X}$)- кесимнинг *ўтказиш қобилияти* деб

$$C(X, \overline{X}) = \sum_{i,j} b_{ij}$$

сонга айтилади, бу ерда $N_i \in X$, $N_j \in \overline{X}$. Шунинг учун, умуман олганда $C(X, \overline{X}) \neq C(\overline{X}, X)$.Ўтказиш қобилияти энг кичик бўлган кесим *минимал кесим* деб аталади.

Теорема. (Максимал оқим ва минимал кесим ҳақида). Иҳтиёрий тўрда N_s манбадан N_t қуйилиш нуқтасига олиб борувчи максимал оқим минимал кесимнинг ўтказиш қобилиятига тенг.

Белги қўйиш усули

Максимал оқимни топиш учун белги қўйиш усули эффектив ҳисобланади. Бу усулни қўллаш натижасида минимал кесим аниқланади. У икки қадамдан иборат:

1-қадам (Белги қўйиш жараёни).

Ихтиёрий тугун нуқта қуйидаги уч ҳолатдан бирида бўлади: а) белгиланмаган; в) белгиланган кўриб чиқилмаган ва с) белгиланган ва кўриб чиқилган.

Бошида тугун нуқталар белгиланмаган ҳолатда бўлишади. Тугун нуқталарни белгилаш икки қисмдан иборат бўлади, яъни биринчи белги қаердан оқим жўнатиш мумкинлигини билдирса, иккинчи белги қанча миқдорда жўнатиш мумкинлигини билдиради. Усул бошланишида N_s $[S^+,\infty]$ белгини олади, бу билдирадики, N_s дан N_s га оқимни ихтиёрий миқдорда жўнатиш мумкин. Шундан сўнг Ns белгиланган ва кўриб чиқилмаган ҳолатга ўтади. Умуман, ихтиёрий белгиланган, лекин ҳали кўриб чиқилмаган N_j тугунни оламиз, уни белгиси $[i^+,\varepsilon(j)]$ бўлсин. N_j га қўшни бўлган, аммо белгиси йўқ, N_k тугун нуқталарни оламиз, унинг учун $x_{jk}<b_{jk}$ бўлсин. Бундай N_k ларни $[j^+,\varepsilon(k)]$, $\varepsilon(k)=\min[\varepsilon(j),b_{jk}-x_{jk}]$ билан белгилаймиз. Мабода, $x_{kj}>0$ бўлса, N_k тугун нуқта $[j^-,\varepsilon(k)]$ белгини олади, бу ерда $\varepsilon(k)=\min[\varepsilon(j),x_{kj}]$. Шундан сўнг барча қўшни тугун нуқталар бўлган N_k лар белгиланган бўлади, шу билан N_j белгиланган ва кўриб чиқилган ҳолатга ўтиб қолади. Бунда, айрим қўшни тугун нуқталар белги олмаслиги ҳам мумкин. Бу жараён давом эттирилиб N_t га етиб келинади, ёки етиб келишнинг иложи бўлмайди. Охирги ҳолда максимал оқим топилган ҳисобланади.

2-қадам. (Оқимни ўзгартириш).

Фараз этайлик N_t $[k^+, \varepsilon(t)]$ белгига эга бўлсин. У ҳолда x_{kt} ни $x_{kt}+\varepsilon(t)$ га алмаштирамиз ва N_k тугунга ўтамиз. Агар N_k тугун $[j^+, \varepsilon(k)]$, белгига эга бўлса x_{jk} ни $x_{jk}+\varepsilon(t)$ га алмаштирамиз. Агар у $[j^-, \varepsilon(k)]$ белгига эга бўлса, уни оқими $x_{jk}-\varepsilon(t)$ га алмаштирилади. Бу жараён давом эттирилиб Ns га етиб келамиз ва шундан сўнг 1- қадамга қайтилади.

7- § КУЧЛАНИШНИ ТАҚСИМЛАШ МОДЕЛИ

Кучланишни тақсимлаш моделини ўзида акс эттирган қуйидаги эьтиборли мисолни кўриб чиқамиз. Корхона заҳирадаги (тўпланиб қолган) N дона маҳсулотини S та савдо шаҳобчасига тақсимлаш керак бўлсин. Агар j-савдо шаҳобчасига y_j дона маҳсулот жўнатилса, бундан келадиган фойда $R_j(y_j)$ сўмни ташкил этсин. Яна шу нарса маълумки, ҳамма маҳсулотни битта савдо шахобчасига жўнатиш мақсадга мувофиқ эмас.

Бу масала моделини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{S} R_j(y_j) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{S} y_j = N \qquad (1)$$

$y_j=0,1,2,...$ - ихтиёрий j да. Динамик программалаш усулини қўллаш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$g_j(n)$- n та маҳсулотни 1,2,...,j шаҳобчаларга оптимал қилиб тарқатганда келган фойдани билдирсин.

$y_j(n)$- $g_j(n)$ фойда олиш учун j-савдо шахобчага жўнатилган маҳсулот миқдори бўлсин. У ҳолда динамик программалашнинг рекуррент формуласи қуйидагича бўлади:

$$g_j(n)=\max_{y_j}[R_j(y_j)+g_{j-1}(n-y_j)], \quad j=1,...,s, \quad g_0(n)=0, \quad j=0; \quad n = 0,1,...,N, \quad y_j \le n.$$

Мисолларда ҳисоблаш жараёни қуйидагича олиб борилади: аввал $g_1(0)$, $g_1(1)$,...,$g_1(N)$ лар ҳисобланади, кейин $g_2(0)$,$g_2(1)$,...,$g_2(N)$,... охирида $g_s(N)$, сўнг бошидан охирига қараб ҳисоблаш олиб борилади ва y_j ларнинг қийматлари аниқланади.

Бу кўрилган модел кучланишни тақсимлаш моделининг хусусий ҳоли бўлиб, умумийси қуйидаги кўринишда бўлади

$$\sum_{j=1}^{S} R_j(y_j) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{S} H_j(y_j) = N \qquad y_j=0,1,... .$$

Бу ерда фараз қилинадики, $H_j(y_j)$ лар камаймайдиган функциялар ва $H_j(0)=0$. Рекуррент формула қуйидагича бўлади:

$$g_j(n) = \max_{y_j}\{R_j(y_j) + g_{j-1}(n - H_j(y_j))\},\ j = 1,2,\ldots,s$$

$$g_0(n) = 0,\ j = 0.$$

$n=0,1,\ldots,N$ y_j: $H_j(y_j) \leq n$ ва бутун сонларни қабул қилади.

8- § ИККИ ЧЕГАРАЛИ КУЧЛАНИШНИ ТАҚСИМЛАШ МОДЕЛИ

Автомобиль ишлаб чиқарувчи фирма янги типдаги маҳсулотини реклама қилиш мақсадида N сўм пул ажратган бўлсин. Реклама қилиш минтақасида S та радиостанция жойлашган бўлиб, j – радиостанцияга y_j сўм жўнатилган бўлса, ундан келадиган соф фойда $R_j(y_j)$ сўмни ташкил этади. Шу билан бирга умумий рекламалар сони M дан ошиб кетмаслиги керак. Агар j- радиостанцияга y_j сўм жўнатилган бўлса, рекламалар сони $K_j(y_j)$ ни ташкил этади.

Демак, моделнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади

$$\sum_{j=1}^{S} R_j(y_j) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{S} y_j \leq N$$

$$\sum_{j=1}^{S} K_j(y_j) \leq M$$

бу ерда фараз қилинадики, N, M ва $K_j(y_j)$-лар манфий бўлмаган бутун сонларни қабул қилади. У ҳолда мос рекуррент формула қуйидагича кўринишга келади

$$g_j(n,m) = \max_{y_j}\{R_j(y_j) + g_{j-1}(n - y_j; m - K_j(y_j))\}.$$

$$n = 0,1,\ldots,N,\ m = 0,1,\ldots,M;\quad y_j \leq n,\quad K_j(y_j) \leq m.$$

Катта қурилиш фирмаси M миқдордаги капиталини S та қурилиш объектларига сарфламоқчи. j-қурилиш объектига K_j сўм керак бўлиб, ундан кейинчалик келадиган фойда R_j сўмни ташкил этади. Ҳар бир қурилиш объекти муҳим ҳисобланиб, уни қуриш ёки қурмасликни ҳал этиш керак бўлади. Қуйидаги белгилашни киритамиз

$$y_j = \begin{cases} 0, j - объект - курилмасин \\ 1, j - объект - курилсин. \end{cases}$$

У ҳолда қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича ёзилади

$$\sum_{j=1}^{S} R_j y_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{S} y_j \le N$$

$$\sum_{j=1}^{S} K_j y_j \le M$$

Динамик программалашнинг рекуррент формуласи эса қуйидагича кўринишда бўлади

$$g_i(n,m) = \max_{y_j}(R_j y_j + g_{j-1}(n-y_j; m-K_j y_j))$$

бу ерда $g_i(n,m)$-1,2,...,j вариантлардан n таси танлаб олингандаги m сўмни сарфлашдан келган максимал фойда.

9- § ЖИҲОЗЛАРНИ АЛМАШТИРИШ ВА ТАЪМИРЛАШ

Режа даври n-1 та оралиққа бўлинган бўлиб, унинг ихтиёрида жиҳозни алмаштириш ёки ремонт қилиш мумкин. Бу масалага энг кам ҳаражатли стратегияни аниқлаш керак бўлади. C_{ij} -соф ҳаражатни билдирсин.

f_n - n-оралиқнинг бошида янги жиҳоз олинганда n,n+1,...,N-1 оралиқдаги минимал ҳаражат бўлсин:

У ҳолда қуйидаги рекуррент формулага эга бўламиз

$$f_n=\min_{k=n+1,...,N}[C_{nk}+f_k], \quad n=N-1..,1, \quad f_N=0$$

Бу масалага умумийроқ ёндашиш ҳам мумкин.

p_{in}-i- ёшдаги эски жиҳозни n-оралиқдаги янги жиҳоз билан алмаштирилганда келадиган соф фойда; K_{nt}-n оралиқнинг охирида t ёшда бўладиган жиҳозни n -оралиқдаги ишлатиш ҳаражати; $f_n(i)$-n-оралиқ бошида i ёшли жиҳозга n,n+1,...,N-1 оралиқларда кетадиган минимал ҳаражат.

Агар жиҳозни алмаштирмасдан n-оралиққа ўтиш талаб қилинса, у ҳолда

$$f_n(i) = k_{ni+1} + f_{n+1}(i+1) \qquad \text{бўлади,}$$

акс ҳолда эса

$$f_n(i) = p_{in} + k_{n1} + f_{n+1}(1) \qquad \text{бўлади.}$$

Демак,

$$f_n(i)=\min[k_{ni+1}+f_{n+1}(i+1), p_{in}+k_{n1}+f_{n+1}(1)], \; n=1,2,...,n-1, \; f_N(i)=0.$$

10- § БУТУН СОНЛИ ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАСИ

Биз қуйида чизиқли программалаш масаласини қўйилиши билан шуғулланамиз. Агар ўзгарувчиларга яна қўшимча шарт: барча ўзгарувчиларни ёки уларн инг бир қисмини бутунлиги талаб қилинса, биз мос равишда тўла бутун сонли ёки қисман бутун сонли чизиқли программалаш масаласи (БСЧП) га келамиз. Шундай қилиб БСЧП масаласи қуйдагича: ушбу

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq a_{io,} \quad i = 1,2,...,m \qquad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n, \qquad (2)$$

$$x_j - \textit{бутун сон}, \quad j = 1,2,...,n_1 \leq n, \qquad (3)$$

шартлар остида

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \qquad (4)$$

функциянинг экстремуми топилсин.

Биз бундан кейин, аниқлик учун (4) мақсад функцияни максимумга текширамиз.

(1)- (4) масалада (1)- (3) шартларни қаноатлантирувчи $x = (x_{1,} x_2, ..., x_n)$ векторлар *жоиз ечимлар* деб аталади. Мақсад функцияга максимум қиймат берувчи жоиз ечим *оптимал ечим* дейилади.

Юқорида, кўриб чиқилганидек, бу ерда ҳам (1)- (4) масалани каноник ва диагонал формага келтириш мумкин

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{oj}(-x_j) \to \max,$$

$$x_{n+1} = a_{n+10} + a_{n+11}x_1 ... a_{n+1}x_{n,}$$

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.

$$x_{n+01} = a_{n+mo} - a_{n+m1}x_1 - ... - a_{n+mn}x_{n,}$$

$$x_j \geq o, \; j = 1,2,...,n+m,$$

$$x_j -, \textit{бутун} \;\; j = 1,2,...,n_1 = n+m$$

Таъкидлаб ўтамизки, бунда масалани тўла ёки қисман бутунлик шарти ўзгармайди. Энди БСЧП масаласига доир бир нечта мисолларни кўриб чиқайлик.

I-мисол. Дарё параходчилик бошқармаси шуни аниқладики, n та маршрутнинг ҳар бир маршрути бўйича сезон давомида ўртача сондаги пасажирлар юрар экан. Транспорт воситасини ишлатилиш самарадорлиги ҳар бир маршрут бўйича ишлатилиш самарадорликлар йиғиндисидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири ўз навбатида мос рейсдан келадиган фойда билан рейсга кетган ҳаражат айирмасига тенг.

Фойда сотилган билетлар сони билан, хизматчиларга кетган ҳақ ва ёқилғи учун кетган сарфлар орқали аниқланади. Қайси маршрутга қандай турдаги кемадан нечтадан ажратилса, пасажирлар талаби тўла қондирилади ва келадиган фойда максимал бўлади?

Фараз қилайлик,j- маршрут бўйича сезон давомида b^1_j та пассажир қатнасин: Бу маршрутда 1,2,...,m турдаги кемалардан фойдаланиш мумкин ва ҳар бир i -типдаги кема учун қуйдаги кўрсаткичлар маълум:

1) a_{i1} -юк кўтаришлик (ўринлар сони);

2) a_{i2} -хизмат кўрсатувчилар сони;

3) a_{i3} -сезон давомида сарфланадиган ёқилғи миқдори;

4) c_{ij}-j маршрут бўйича i- турдаги битта кема ишлатилгандаги чекланишлар қуйидагича бўлади.

5) Сезон давомида ишлатиладиган ёқилғи миқдори b_1 дан, хизмат кўрсатувчилар сони эса b_2 дан ошмасин. x_{ij} j- маршрутдаги i-турдаги кемалар сонини билдирсин. У ҳолда, шартга кўра чекланишлар қуйидагича бўлади

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_{ij} \geq b_j^1, j = 1,2,...,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i3}x_{ij} \leq b_3,$$

$$x_{ij} \geq o - \text{ бутун } \quad i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n$$

Масалани қўйилишига асосан, шу берилган сохада шундай $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn})$ векторларни топиш керакки, у

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

функцияга максимал қиймат берсин.

2-мисол. Фараз қилайлик n та турли турдаги самолётлар бўлиб, уларни n та йўналиш бўйича тақсимлаш лозим.

Агар i - турдаги самалёт j -йўналишга қўйилса, бундан келадиган фойда c_{ij} га тенг. Самолётларни йўналишларга шундай тақсимлаш керакки, натижавий фойда максимал бўлсин.

Бу масалани ечиш учун қуйдагича x_{ij} ўзгарувчилар киритамиз

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ агар } i - \text{самалёт } j \text{ йуналишга куйилса}, \\ 0, \text{ акс холда} \end{cases}$$

У ҳолда, биз қуйдаги БСЧП масаласига келамиз:

1. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ (ҳар бир йўналишга битта самолёт тайинланади):

2. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ (ҳар бир самолёт фақат битта йўналишга тайинланади)

шу шартлар остида

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

функциянинг максимумини топинг.

Маълумки, ўзгарувчи фақат иккита 0 ва 1 қийматларни қабул қилса, бундай ўзгарувчи *буль ўзгарувчиси* дейилади. Шунга асосан, бундай ўзгарувчиси бўлган масалалар буль масалалари деб юритилади. Биз кўрган 2- масала худди шундай масалалардан биридир.

11- § ТЎЛА БУТУН СОНЛИ УСУЛ

Бу усул тўла бутун сонли деб аталишига сабаб, агар бошланғич жадвал элементлари бутун сонлардан иборат бўлса, кейинги итерация жадвал элементлари ҳам бутун сонлардан иборат бўлади. Бошланғич жадвал иккиланма жоиз бўлса, кейинчалик ҳам бу хосса сақланиб қолади. Агар $a_{io} (i = 1,2,...,n+m)$ ларни барчаси манфиймас бўлса, масала ечилган бўлади. Акс ҳолда ҳал қилувчи элемент -1 бўлган янги ҳал қилувчи сатр тузилади ва иккиланма симплекс-усул ёрдамида янги жадвалга ўтилади. Бу ерда ҳосил қиладиган сатир сифатида энг кичик индексли $a_{io} < 0 (i = 1,2,...,n+m)$ олинади.

Бизга қуйдаги БСЧП масаласи берилган бўлсин:

$$x_0 = a_{oo} + \sum_{j=1}^{n} a_{oj} (-x_j) \to \max, \qquad (1)$$

$$x_i = -(-x_i), i = 1,2,...,n,$$

$$x_{n+1} = a_{n+10} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+1j} (-x_j)$$

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-. (2)

$$x_{n+m} = a_{n+mo} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+mj} (-x_j),$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,...,n+m, \qquad (3)$$

$$x_j, \; j = 1,2,...,n+m - \text{бутун} \qquad (4)$$

Фараз қилайлик

$$x = a_o + \sum_{j \in I} a_j(-x_j) \qquad (5)$$

бирор сатрга мос индекссиз ёзилган тенглама бўлсин (бу ерда I базисмас ўзгарувчиларнинг индекслар тўплами).

Теорема. Фараз қилайлик. λ бирор мусбат сон бўлиб, (5)-тенгламадаги $x,\ x_j\,(j \in I)$ лар манфиймас, бутун бўлишсин. У ҳолда

$$s = \left[\frac{a_0}{\lambda}\right] + \sum_{j \in I}\left[\frac{a_j}{\lambda}\right](-x_j) \qquad (6)$$

тенглик билан аниқланган s манфиймас ва бутун бўлади.

Исбот. s ни бутунлиги сонни бутун қисмини аниқланиши ва $x_j\,(j \in I)$ ларни бутунлилигидан келиб чиқади. Манфий эмаслигини кўрсатиш учун тескарисини фараз этайлик, яъни s<0 у ҳолда s нинг бутунлилигидан s=-1, -2,… эканлиги келиб чиқади.

Шунингдек (5) тенгламадан ушбуга эга бўламиз.

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{a_0}{\lambda} + \sum_{jei} \frac{a_j}{\lambda}(-x_j)$$

ёки

$$\frac{x}{\lambda} + \sum_{j \in I} f_j x_j = f_o + s, \qquad (7)$$

бу ерда

$$f_j = \frac{a_j}{\lambda} - \left\{\frac{a_j}{\lambda}\right\},\ j \in \{0\} \cup I \qquad (8)$$

(7) ва (8) тенгликлардан қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз

$$\frac{x}{\lambda} + \sum_{j \in I} f_j x_j \le f_0 - 1 < 0\,.$$

Лекин бундай бўлиши мумкин эмас, чунки чап томонидаги биринчи ифода мусбат. Бу зиддият теоремани исботлайди.

Бошланғич жадвал иккиланма жоиз бўлиши керак, агар бу шарт бажарилмаса, янги

$$x_{n+m+1} = M - x_1 - x_2 - ... - x_n$$

сатр қўшиш билан худди циклик алгоритимдаги каби иккиланма жоиз жадвалга ўтишимиз мумкин (бу ерда M -етарлича катта сон). Энди алгоритимни бевосита баён қилишга ўтамиз:

1. бошланғич жадвал элементлари бутун сонлардан иборат ва иккиланма жоиз жадвал бўлсин;
2. $a_{io} < 0(i = 1,...,n+m)$ шартни қаноатлантирувчи энг кичик индексли V-сатр танлаб олинсин, бу сатр ҳосил қиладиган сатр бўлади (агар $a_{io} \ge 0, i = 1,2,...,n+m$ бўлса, у ҳолда масала ечилган бўлади);

3. мусбат λ танлаб олинсин (уни танлаш шарти қуйида келтирилган)

$$s = \left[\frac{a_{vo}}{\lambda}\right] + \sum_{j \in I}\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right](-x_j)$$

Бу сатр ҳал қилувчи сатр бўлиб хизмат қилади;

4. иккиланма симплекс - метод билан кейинги жадвалга ўтилсин, охирги қўшимча сатр ўчирилсин ва 2 -қадамга қайтиб ўтилсин.

Энди λ сонини танлаш шартини келтирайлик:

а) ҳад қилувчи элемент -1 га тенг бўлиши керак, яъни

$$\left[\frac{a_{ve}}{\lambda}\right] = -1;$$

б) X_o устун лексикографик маънода мумкин қадар камайсин.

X_o устун кейинги ўтилган жадвалда

$$x_o + \left[\frac{a_{vo}}{\lambda}\right]x_e$$

га тенг бўлиб қолади (е -ҳал қилувчи устун), демак λ қанчалик кичик бўлса бу X_o устуннинг лексикографик маънода камайиши тез бўлади.

а), б) шартларни қаноатлантирувчи λ ни танлаш қоидаси қуйидагича бўлади

1) фараз қилайлик V -ҳосил қиладиган сатр бўлсин;

2) $a_{vj} < 0$ га мос келган X_j векторлар ичида лексикографик маънода минимум бўлган вектор X_j бўлсин ($a_{vj} \geq o$ шарт барча і ларда бажарилса, у ҳолда масаланинг ечими йўқ);

3) $M_j - a_{vj} < 0$ га мос $x_2<x_j$ M_j шартни қаноатлантирувчи энг катта, бутун мусбат сон бўлсин;

4) M_j ларга мос λ лар қуйидаги

$$\lambda_j = -\frac{a_{vj}}{M_j}$$

тенглик билан аниқлансин;

5) λ сони λ_j ларни энг каттасига тенг қилиб олинсин, яъни

$$\lambda = \max_j \lambda_j$$

Мисол. қуйдаги БСЧП масаласи қаралётган бўлсин

(9)

(9) тенгсизликларни ўнг томонига $x_4, x_5, x_6 \geq o$ ларни мос равишда қўшиб диагонал кўринишга келтирамиз:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 2(-x_1) + 5(-x_2) + (-x_3) \to \max, \\
&x_i = -(-x_i), i = 1,2,3, \\
&x_4 = -5 - 3(-x_1) - 4(-x_2) - (-x_3) \\
&x_5 = -18 - 7(-x_1) - 2(-x_2) - 5(-x_3) \\
&x_6 = -26 - 10(-x_1) - 5(-x_2) - 12(-x_3), \\
&x_i \ge 0,\ \ i = 1,2,\dots,6 - \textit{бутун}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Бошланғич жадвал қуйидаги кўринишда бўлади.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0=$	0	2	5	1
$x_1=$	0	-1	0	0
$x_2=$	0	0	-1	0
$x_3=$	0	0	0	-1
$x_4=$	-5	-3	-4	-1^*
$x_5=$	-18	-7	-2	-5
$x_6=$	-26	-10	-5	-12
$S_1=$	-2	-1	-2	-1^*

1-жадвал

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-s_1$
$x_0=$	-2	1	5	1
$x_1=$	0	-1	0	0
$x_2=$	0	0	-1	0
$x_3=$	2	1	2	-1
$x_4=$	-3	-2	-2	-1
$x_5=$	-8	-2	8	-5
$x_6=$	-2	2	19	-12
$S_2=$	-2	-1	-1	-1

2-жадвал.

Бу жадвал иккиланма жоиз жадвал бўлиб, x_4 жойлашган сатр биринчи элементи (қиймати) манфий, шунинг учун у ҳосил қиладиган сатр бўлади. Бу сатрнинг барча элементлари манфий сонлардан иборат бўлганлиги учун x_1, x_2, x_3 векторларни лексикографик минимумни топамиз, бу x_3 вектордир.

Қуйидаги

$$x_3 \prec \frac{x_j}{M_j}, j = 1,2$$

шартдан энг катта мусбат, бутун M_j сонларни аниқлаймиз: $M_1 = 1,\ M_2 = 4,\ M_3 = 1$. Энди $\lambda_j = -{}^{a_j}\!/\!_{M_j}$ тенглик ёрдамида λ_j – ларни топамиз: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1$, демак, $\lambda = 3$ ёрдамида янги чегара хосил қилиб жадвал тагига ёзиб қўяамиз. Бу янги сатр ҳал қилувчи сатр бўлиб хизмат қилади. 3- устун эса ҳал қилувчи устун, уларнинг кесишган жойдаги элемент -1 ҳал қилувчи элементдир. Бу ҳал қилувчи элемент ёрдамида кейинги 2-жадвалга ўтамиз. Бу 2-жадвалда ҳам x_4 сатр ҳосил қиладиган сатрдир. Бу сатрнинг барча элементлари манфий, шунинг учун d_1, d_2, d_3 векторлардан лексикографик маънода минимумини топамиз, у x_1 вектордир

$d_1 \prec \dfrac{d_j}{M_j},\ j = 2,3$ шартдан M_2, M_3 ларни аниқлаймиз. $M_2 = 3,\ M_3 = 1$, λ_j ларни $\lambda_j = -\dfrac{a_{nj}}{M_j}$ тенгликдан топсак $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \dfrac{2}{3}$, $\lambda_3 = 1$ келиб чиқади, демак $\lambda = 2$. Бу $\lambda = 2$ ёрдамида s_2 ҳал қилувчи сатрни тузамиз. Кейинги жадваллардан ҳам олдинги жараённи давом эттирсак, 6-итерациядан сўнг тўғри жоиз жадвалга эга бўламиз. Яъни, берилган масалани оптимал ечими $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$, мақсад функцияни қиймати

эса $x_0 = -5$ бўлади.

	1	$-s_5$	$-x_2$	$-s_4$
$x_0=$	-5	1	3	0
$x_1=$	2	-2	2	1
$x_2=$	0	0	-1	0
$x_3=$	1	3	-2	-2
$x_4=$	2	-3	0	1
$x_5=$	1	1	2	-3
$x_6=$	6	16	-9	-14

3-жадвал

Бу ерда юлдузча ҳал қилувчи элементни билдиради.

12- § ТЎҒРИ АЛГОРИТМ

Бу алгоритим «тўғри» дейилишига сабаб, ҳар бир итерацияда тўғри жоиз жадвалга эга бўлинади. Яъни, ҳисоблаш давомида ҳар вақт масалани тақрибий ечимини олиш имкони бор.

Тўла бутун сонли алгоритмда асосан, иккиланма симплекс метод ишлатилиб, ҳал қилувчи элемент -1 га тенг бўлган бўлса, бу алгоритимда симплекс -метод ишлатилиб, ҳал қилувчи элемент 1 га тенг бўлади.

қуйидаги БСЧП масаласини кўрайлик:

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{oj}(-x_j) \to \max, \qquad (1)$$

$$x_{n+1} = a_{n+10} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+ij}(-x_j)$$

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.- (2)

$$x_{n+m} = a_{n+mo} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+mj}(-x_j),$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n+m, \qquad (3)$$

$$x_j,\ j = 1,2,\ldots,n+m \qquad (4)$$

бу ерда a_{oj}, a_{ij} ва a_{io} лар бутун, манфиймас сонлардир.

Фараз қилайлик, симплекс- жадвалда v ҳал қилувчи сатр, ℓ ҳал қилувчи устун бўлсин, яъни $\dfrac{a_{vo}}{a_{ve}} \leq \dfrac{a_{io}}{a_{ie}}$

тенгсизлик барча мусбат a_{ie} лар учун ўринли. Қуйидаги қўшимча

$$s = \left[\frac{a_{vo}}{a_{ve}}\right] + \sum_{j \in I}\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right](-x_j) \qquad (5)$$

тенгламани тузайлик, агар $\lambda = a_{ve}$ деб, уни ҳал қилувчи сатр сифатида фойдалансак, ҳал қилувчи элемент 1 га тенг бўлади.

Агар $\left[{}^{a_{vo}}\!/\!{}_{a_{ve}}\right] = 0$ бўлса, равшанки, мақсад функциянинг қиймати ҳам, ечими ҳам ўзгармайди. Бу ҳолда кўрилаётган алгоритимнинг чегараланганлиги таъминламаслиги мумкин. Бу худди(чизиқли программалашдаги) ЧП даги чексиз доимий масалаларга олиб келади. Лекин ЧП да ўзгарувчилар, чегаралар сони чекли эканлигидан фойдаланиб чексиз қадам бўла олмаслик кўрсатилади. БСЧП да эса, ҳар сафар янги чегара қўйилиб борилаверади, шунинг учун қадамлар сони чегараланганлигини бошқача йўл билан кўрсатиш керак бўлади.

Бир жадвалдан кейингисига ўтиш -*ўтиш цикли* деб юритилади, ўтиш цикли *стационар цикл* деб атаймиз, агар $o = a_{vo} < a_{ve}$ бўлса, *ўтувчи цикл* деб атаймиз, агар $o < a_{ve} = a_{vo}$ бўлса. Агар цикл ўтувчи бўлса, у ҳолда $a_{oe} \le -1$ бўлганлиги учун мақсад функциянинг қиймати камида бир бирликка ошади. Демак чегараланган мақсад функцияда, чекли қадамдан кейин биз оптимал ечимга келамиз.

Шундай қилиб, асосий муаммо стационар цикллар сони чегараланган эканлигида бўлиб, буни кўрсатиш учун биз ўтиш ва стационар циклларни фарқламасдан кўрамиз. Алгоритмни чегараланганлигини таъминлаш учун қуйидаги учта ўзгартиришни киритиш керак бўлади

1) бошланғич жадвалга янги қўшимча сатр қўшиб ёзилади;

2) ҳал қилувчи устун янги қоида асосида танлаб олинади;

3) ҳосил қиладиган сатр ҳам қуйида берилган қоида бўйича олинади.

Жадвалга қўшиб ёзиладиган янги сатр

$$x_l = a_{lo} + \sum_{j=1}^{n}(-x_j) \qquad (6)$$

кўринишда бўлиб a_{lo} бутун сон шундай танлаб олинадики, натижада (1)- (4) шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий жоиз ечимнинг нобазис $x_i\,(i = 1,2,\dots,n)$ ларнинг қийматларида x_2 манфиймас, бўлиб қолиши керак. Бу l-сатр ҳал қилувчи устуни танлашда мухим роль ўйнайди. a_{lj} (6)- тенгламадаги бирор интерациядан кейин і -устунга мос келган коэффициентни билдирсин. Ҳар бир d_j вектор учун янги r_j вектор қуйидагича аниқланади

$$r_j = \left(\frac{a_{oj}}{a_{lj}}, \frac{a_{n+lj}}{a_{lj}}, \dots, \frac{a_{n+mj}}{a_{rj}} \right) \qquad (7)$$

Мусбат a_{rj} ларга мос r_j векторларни лексикографик минимуми r_e бўлсин, унда l - ҳал қилувчи устун бўлиб хизмат қилади.

Энди ҳосил қиладиган сатрни аниқлаймиз. Бунинг учун уни танлаш усулини келтирамиз, у алгоритмни чегараланганлигини таъминлайди.

Танлаш усули. Бирор сатр келтириладиган сатр сифатида олиниши мумкин, агар у танлангач сатр і учун бирор чекли интерациядан кейин $a_{ie} \le a_{io}$ тенгсизликни таъминласа (бу тенгсизликларни барчаси битта жадвалда бажарилиши шарт эмас).

Бу усулни қаноатлантирган ихтиёрий қоидани *жоиз қоида* деб атаймиз. Бундай жоиз қоидалар кўп бўлиб, қуйида улардан биттаси келтирилган.

Фараз қилайлик, ушбу

$$s = \left[\frac{a_{vo}}{a_{ve}}\right] - \sum_{j \in I} \left[\frac{a_{vj}}{a_{ve}}\right]\left(-x_j\right) \qquad (8)$$

янги чегара ҳосил қилинган бўлсин. Жадвални тўғри жоизлигини сақлаб қолиш учун, ҳосил қиладиган сатр қуйидагича танлаб олиниши керак

$$o \le \left[\frac{a_{vo}}{a_{ve}}\right] \le \Theta_e \qquad (9)$$

бу ерда $\Theta_e = \min \frac{a_{io}}{a_{ie}}$

Биз $\nu(l)$ орқали (9) шартни қаноатлантирадиган v -сатрлар тўпламини белгилаймиз.

Энди $\nu(l)$ дан хосил қиладиган сатрни танлаб олишни кўриб чиқамиз. Аниқки, агар ўтиш цикли бўлса, $\Theta_e \ge 1$ яъни $a_{ie} \le a_{io}$ барча i-лар учун бажарилади. Шунинг учун, стационар циклни кўрамиз унда $\Theta_e < 1$ бўлади. Қуйидаги

$$\nu(l) = \left\{ i : o \le \frac{a_{io}}{a_{ie}} < 1 \right\}$$

белгилашни киритамиз. Алгоритмни бевосита келтиришдан аввал жоиз қоидани келтирайлик.

Қоида. а) фараз қилайлик $\nu_p(l)$ p-чи итерацияда ҳосил бўлган тўпламни билдирсин ва уни элементлар сони биттадан ортиқ бўлсин:

$$\nu_p(l) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k+2}\}$$

у ҳолда $v(\in Vp(l))$ сатр ҳосил қиладиган сатр сифатида олинади, агар v-сатр $\nu_1(l_1), \ldots, \nu_p(l)$ тўпламларда қолган ν_j элементларга нисбатан аввал пайдо бўлиб ва кейинги тўпламларни барчасида иштрок этиб келган бўлса;

б) аввал а) да олинган v- сатр $\nu \in \nu(e)$ бўлгунга қадар олинаверади, агар $\nu \notin V(e)$ бўлса а) га ўтилади.

Энди тўғри алгоритимни келтирамиз.

1. Бошланғич жадвалга

$$x_i = a_{io} + \sum_{j \in I} (-x_j)$$

сатр қўшилсин. Бу ерда a_{io} мусбат, бутун сон шундай танлаб олинадики (2)- (4) ларни қаноатлантирувчи ихтиёрий жоиз ечими базисмас $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларда $x_l \ge 0$ бутун бўлиши керак;

2. Оптималлик шарти текширилсин: агар $a_{oj} \geq 0$ барча $j(\in J)$ лар учун бўлса, масала ечилган бўлади, акс ҳолда 3 га ўтилсин;

3. $a_{ij} > 0$ га мос келувчи r_j векторларни лексикографик минимуми r_e топилсин, бу устун ҳал қилувчи устун бўлади;

4. Қуйидаги $V(l) = \left\{ i{:}0 \leq \left[\dfrac{a_{io}}{a_{ie}} \right] \leq \Theta_e \right\}$

тўпламдан жоиз қоида асосида ҳал қилувчи сатр танлаб олинсин;

5. Қуйидаги $s = \left[\dfrac{a_{vo}}{a_{ve}} \right] + \sum_{j \in I} \left[\dfrac{a_{vj}}{a_{ve}} \right] (-x_j)$

тенгламага мос сатр жадвал тагига ёзилсин;

6. d_e ҳал қилувчи устун ва охирги сатр ҳал қилувчи сатр деб олиниб, кейинги жадвалга ўтилсин.

7. Охирги сатр ташлаб юборилсин ва 2. га ўтилсин

Алгоритмни чеклилиги кўрсатилган. Юқорида айтилганга асосан, бошланғич жадвал тўғри жоиз бўлиши керак. Бундан келиб чиқадики, алгоритм самарадор ишлаши учун мумкин қадар «яхши» базис ечимни аниқлаш керак бўлади. Кўпгина, тадбиқий масалаларда бу «яхши» ечим маълум ёки уни аниқлаш мумкин бўлади.

Энди тўғри алгоритм учун сонли мисол кўрамиз.

Мисол. Қуйидаги БСЧП масаласи диагонал ҳолга келтирилган бўлсин.

$$
\begin{aligned}
&x_o = x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\
&x_4 = 22 + 2(-x_1) - (-x_2) + 22(-x_3), \\
&x_5 = 6 + 2(-x_2) - (-x_2) + 6(-x_3), \\
&x_6 = 2 + 2(-x_1) - 5(-x_2) + 2(-x_3), \\
&x_1 = -(-x_1) \\
&x_2 = -(-x_2) \\
&x_3 = -(-x_3) \\
&x_1, x_2, \ldots, x_7 \geq 0 \\
&x_1, x_2, \ldots, x_7 - \textit{бутун}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

қўшимча чегарани қуйидагича киритамиз:

$$x_l = 10 - x_1 - x_2 - x_3$$

у ҳолда, бошланғич жадвал қуйидаги кўринишда бўлади

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0=$	0	-1	-1	-1
$x_4=$	22	2	7	22
$x_5=$	6	2	-1	6

x6=	2	2	-5	2
x7=	1	-4	1	1
x1=	0	-1	0	0
x2=	0	0	-1	0
x3=	0	0	0	-1
x4=	10	1	1	1
s1=	1	1^*	-3	1

d_1 вектор лексикографик маънода минимум, демак 1-ҳал қилувчи устун бўлиб хизмат қилади. a_{io}/a_{ie} $(a_{ie} > 0)$ нисбатни энг кичиги x_6-сатрда эришилади, у ҳосил қиладиган сатр бўлади, $V_0(1) = \{6\}$ ҳосил қиладиган сатр ёрдамида (x_6-сатр элементларини 2 сонига бўлиш орқали) ҳал қилувчи сатрни топамиз. Ҳал қилувчи элемент 1 га тенг, симплекс метод билан кейинги жадвалга ўтамиз.

	1	-s1	-x2	-x3
x0=	1	1	-4	0
x4=	20	-2	13	20
x5=	4	-2	5	4
x6=	0	-2	1	0
x7=	5	4	-11	5
x1=	1	1	-3	1
x2=	0	0	-1	0
x3=	0	0	0	-1
xL=	0	-1	4	0
s1=	0	-2	1^*	0

Бу d_2 жадвалда d_2 устун ҳал қилувчи устун бўлиб, $V_1(2) = \{5,6\}$ лекин x_6-сатр олдинги $V_o(1)$ да ҳам иштрок этганлиги учун, яна уни ҳосил қиладиган сатр, сифатида оламиз. Бу жоиз қоидадан келиб чиқади.

Бу жараённи давом эттирсак 8-жадвалда қуйидаги оптимал ечимга эга бўламиз: $x_1 = 4, x_2 = 2,\ x_3 = 0$

	1	-s7	-s6	-x3
x0=	6	1	0	5
x4=	0	-7	-37	0
x5=	0	1	-3	0
x6=	4	5	-7	4

x_7=	15	-1	5	15
x_1=	4	0	1	4
x_2=	2	1	-1	2
x_3=	0	0	0	-1
x_L=	4	-1	0	-5

8-жадвал

13- § РЮКЗАК ҲАҚИДАГИ МАСАЛА

Рюзак ҳақидаги масалани қўйилиши қуйидагича n- хил предметлар берилган бўлиб (уларнинг сони етарлича кўп), j-номерли предметнинг биттасининг баҳоси $C_j \geq 0$ бутун бўлсин. b(b -бутун сон) оғирликдаги юкни кўтарувчи рюкзак ичига шу предметлардан шундай жойлаштириш керакки, натижада олинган предметларнинг умумий баҳоси максимал бўлсин. Яъни бу ерда масала олиниши керак бўлган предметларнинг номерини ва сонини аниқлашга келади. Бу масаланинг математик модели қуйидагича бўлади.

Мақсад функция

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (1)$$

ни максимал қиймати

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,...,n \qquad (3)$$

($x_j \geq 0$ (j=1,...,n) j- номерли предметнинг сони) шартлар остида топилсин. Бу қўйилган (1)-(3) масала бутун сонли чизиқли программалаш масаласи бўлиб, уни ечиш билан қўйилган масала ҳал қилинади.

Энди юқоридаги масалани умумлашган яъни (2) га ўхшаш чегара бир нечта бўлган ҳолни кўрамиз ва шу билан бирга ечиш алгоритмини келтирамиз. Бу масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i=1,...,m, \qquad (5)$$

x_j - манфий бўлмаган бутун сонлар ва $C_j \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_{ij} \geq 0$ лар барча $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ ларда бутун сонлар. Масалани ечиш учун қулайлик туғдир мақсадида қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$\varphi_k(y_1, \ldots, y_m) = \max_{x_1,\ldots,x_k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \,,$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq y_i \,, \quad i=1,...,m. \qquad (6)$$

x_j $(j=1,...,k)$ манфий бўлмаган бутун сонлар, $k=1,...,n$, $y_i=1,...,b_i$, $i=1,...,m$. Энди $k=1$ бўлган ҳолни алоҳида кўрайлик

$$\varphi_1(y_1, \ldots, y_m) = \max_{x_1} C_1 x_1$$

$a_{i1} x_1 \leq y_i$; $i=1,...,m$, $x_1 \geq 0$- бутун.

Тушунарлики, агар бирор $i \in \{1,...,m\}$ учун $a_{i1}=0$ бўлса, у ҳолда шу индекс учун ихтиёрий $x_1 \geq 0$ ва $a_{i1} x_1 \leq y_i$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун бу ҳолда мусбат a_{i1} коэффициент иштирок этган тенгсизликларни этиборга олиш етарлидир. Демак, x_1- ўзгарувчи

$$x_1 \leq \frac{y_i}{a_{i1}}$$

тенгсизликни мусбат a_{i1} ларга мос келувчи i-индексларда қаноатлантириши керак экан. Агар x_1 ни бутун қиймат қабул қилишини этиборга олсак, $k=1$ ҳолдаги масаланинг ечими $\overline{x_1} = \min_{a_{i1}} \left[\frac{y_i}{a_{i1}} \right]$ эканлиги келиб чиқади. Равшанки, мақсад функциянинг қиймати қуйидагича аниқланади:

$$\varphi_1(y_1, \ldots, y_m) = C_1 \cdot \overline{x_1} = C_1 \min_{a_{i1}>0} \left[\frac{y_i}{a_{i1}} \right]$$

Демак $k=1$ да мақсад функция $\varphi_1(y_1, \ldots, y_m)$ нинг барча қийматларини аниқлаш мумкин бўлар экан. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида (табиий бўлган) қуйидагиларни қабул қиламиз: аргументлар $y_1, \ldots, y_m$ ларнинг барча қийматларида $\varphi_0(y_1, \ldots, y_m)=0$ ва аргументларнинг манфий бўлмаган қийматларининг камида бирортаси нолга тенг бўлса, $\varphi_k(y_1, \ldots, y_m)=0$ деб оламиз. Агар $y_1,...,y_m$ ларнинг камида биттаси манфий қиймат қабул қилган бўлса, $\varphi_k(y_1, \ldots, y_m) = -\infty$ бўлсин.

Энди $1<k \leq n$ ораликда мақсад функция $\varphi_k(y_1, \ldots, y_m)$ нинг қийматларини топиш учун рекуррент формулани келтириб чиқарайлик. Фараз этайлик $\varphi_{k-1}(y_1,...,y_m)$ функция қийматлари $(y_1,...,y_m)$ аргументнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларида аниқланган бўлсин. У ҳолда, равшанки $\varphi_k(y_1,...,y_m)$

қийматни ҳосил қилишда k-номерли предмет камида бир марта иштирок этиши ёки умуман иштирок этмаслиги мумкин.

Шунга кўра, иккинчи ҳолда $\varphi_k(y_1,...,y_m)= \varphi_{k-1}(y_1, ...,y_m)$ тенглик ўринли бўлади. Биринчи ҳолни кўрайлик, бунда k-номерли предметнинг камида биттаси иштирок этганлиги учун уни бир донасини алоҳида олиб қараймиз. Унинг биттасини алоҳида ажратиб олсак, у иштирок этган (6) тенгсизликларнинг ўнг чегаралари $y_1,...,y_m$ лар мос равишда a_{ik} га камаяди, яъни тенгсизлик чегаралари мос равишда y_i-a_{ik} бўлиб қолади. Шунда мақсад функциянинг максимал қиймати белгиланишга асосан $\varphi_k(y_1-a_{1k},...,y_m-a_{mk})$ га тенг. Энди бу қийматга олиб қўйилган битта k-номерли предмет баҳоси C_k ни қўшсак $\varphi_k(y_1 - a_{1k},...,y_m-a_{mk})+ C_k$ баҳога эга бўламиз. Бу ерда эътибор бериш керакки k индекс сақланиб қоляпти, чунки k-номерли предмет биттадан ортиқ қатнашган бўлиши мумкин. Шундай қилиб k-предмет агар камида битта олинган бўлса, мақсад функциянинг максимал қиймати $\varphi_k(y_1-a_{1k},...,y_m-a_{mk}) + C_k$, умуман олинмаган бўлса $\varphi_{k-1}(y_1,...,y_m)$, га тенг бўлади. Бу икки вариантни қайси бири афзал эканлигини билиш учун $\varphi_{k-1}(y_1,...,y_m)$ билан $\varphi_k(y_1-a_{1k},...,y_m-a_{mk}) + C_k$ ларни таққослаб кўриш керак бўлади. Агар

$$\varphi_{k-1}(y_1,...,y_m)< \varphi_k(y_1-a_{1k},...,y_m-a_{mk}) + C_k$$

тенгсизлик ўринли бўлса, k-предметдан камида битта олиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Демак, бир-бирини инкор этувчи бу икки вариантга мос келувчи мақсад функциянинг энг катта қиймати $\varphi_k (y_1,...,y_m)$ ни беради, яъни

$$\varphi_k(y_1,...,y_m)=\max(\varphi_{k-1}(y_1,...,y_m),\varphi_k(y_1-a_{1k},...,y_m-a_{mk})+C_k) \quad (7)$$

Аниқки, (7) формула ёрдамида мақсад функция $\varphi_k(y_1,...,y_m)$, k-=1,...,n ; y_i=0,1,...,b_i, i=1,...,m ни фақат қийматларини ҳисоблашимиз мумкин. Қайси предметдан нечтадан олиниши кераклигини кўрсатувчи $I(k;y_1,...,y_m)$, (k=1,...,n, y_i=0,1,...,b_i i=1,...,n) бутун аргументли ва қийматли функцияни тузамиз. Агар $(k;y_1,...,y_m)$ аргументнинг бирор қийматида $\varphi_{\bar{k}}(\bar{y}_1,...,\bar{y}_m)=j$, $1\le j \le \bar{k}$ бўлса, бу $\varphi_{\bar{k}}(\bar{y}_1,..., \bar{y}_m)$ баҳога эришишда j-номерли предмет камида бир марта қатнашганлигини билдиради, яъни $x_j\ge1$ $I(k:y_1,...,y_m)$ функция қийматларини k=1 бўлганда ҳисоблаш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди, ҳақиқатан, агар 1-номерли предметдан олинмаган бўлса , баҳо $\varphi_1(y_1,...,y_m)=0$, акс ҳолда

$\varphi_1(y_1,...,y_m)\neq 0$ бўлади , шунга асосан

$$I(1:y_1,\dots,y_m)=\begin{cases}0, & агар\ \varphi_1(y_1,\dots,y_m)=0\\ 1, & агар\ \varphi_1(y_1,\dots,y_m)\neq 0\end{cases} \qquad (8)$$

бу ерда $y_i = 0, 1,...,b_i$, $i=1,...,m$.

Энди $1<k\leq n$ бўлган ҳолда $I(k:y_1,...,y_m)$ функция қийматларини аниқловчи формулани келтирамиз. $\varphi_k(y_1,...,y_m)$ функцияни қийматларини топиш усули (7) формулага асосан, агар $(y_1,...,y_m)$ аргументнинг бирор $(\bar{y}_1,..., \bar{y}_m)$ қийматида $\varphi_k(y_1-a_{1k},...,y_m-a_{mk}) + C_k< \varphi_{k-1}(\bar{y}_1,..., \bar{y}_m)$ тенгсизлик ўринли бўлса (бу дегани $\varphi_k(\bar{y}_1,..., \bar{y}_m)= \varphi_{k-1}(\bar{y}_1,..., \bar{y}_m)$), яъни $\varphi_k(\bar{y}_1,..., \bar{y}_m)$ баҳога эришиш учун к-номерли предмет қатнашмаганлиги маълум бўлади, шунинг учун $I(k; \bar{y}_1,..., \bar{y}_m)= I(k-1; \bar{y}_1,..., \bar{y}_m)$ деб олинади. Агар $\varphi_k(\bar{y}_1-a_k,..., \bar{y}_m-a_k)+C_k \geq \varphi_{k-1}(y_1,..., \bar{y}_m)$ тенгсизлик бажарилса бунда $\varphi_k(\bar{y}_1,..., \bar{y}_m)$ баҳога эришиш учун k-номерли предмет камида бир марта қатнашганлигини билдиради, демак $I(k; \bar{y}_1,..., \bar{y}_m)=k$ деб олиниши керак. Шундай қилиб $I(k;y_1,...,y_m)$, $1<k\leq n$ функция қийматларини аниқлаш учун қуйидаги рекуррент формулага эга бўламиз.

$$I(k: y_1,...,y_m) =$$

$$=\begin{cases}I(k-1,y_1,..,y_m),\ агар\ \ \varphi_k(y_1-a_{1k},...,y_m-a_{mk})+\\ C_k<\varphi_{k-1}(y_1,...,y_m)\\ k,\ агар\ \ \varphi_k(y_1-,...,y_m-a_{mk})+C_k\geq\varphi_{k-1}(y_1,...,y_m)\end{cases} \qquad (9)$$

Бу ерда $y_i=0,1,...,b_i$, $i=1,...,m$.

Натижада (8) ва (9) формулалар ёрдамида $I(k:y_1,...,y_m)$, $k=1,n$; $y_i=0,1,...,b_i$,$i=1,m$ функцияни барча қийматлари аниқланади. Юқорида айтилганлардан кўриниб турибдики $\varphi_k(y_1,...,y_m)$ ва $I(k;y_1,...,y_m)$ функцияларнинг қийматлари бир пайтда (параллел) ҳисоблаб борилиши мақсадга мувофиқдир. Агар k фиксирланганда $\varphi_k(y_1,...,y_m)$ ва $I(k;y_1,...,y_m)$ $y_i=0,1,...,b_i$, $i=1,...,m$ функциялар қийматларини мос равишда биринчи ва иккинчи жадвалларнинг k-қатламлари деб атасак, у ҳолда тушунарликки иккала жадвал қатламларини ҳисоблаш кетма-кет кичигидан каттасига қараб олиб борилар экан. Бу ерда жадвал сўзини ишлатилишига сабаб ҳар бир $\varphi_k(y_1,...,y_m)$ ва $I(k;y_1,...,y_m)$ $k=1,...,n$, $y_i=0,1,...,b_i$, $i=1,...,m$ функцияларнинг қийматларини $n\cdot(b_1+1)\cdot...\cdot(b_m+1)$ ўлчамли иккита жадвал кўринишида ифодалаш мумкин. Буларни биринчисини баҳолар жадвали, иккинчисини предмет сонларини аниқлаш жадвали деб аталади. Яна шуни таъкидлаш керакки, жадвалларни бирор kқатламини ҳосил қилишда фақат k-1-қатлам элементлари иштирок этади ((7)- (9)), бу эса ҳисоблаш машинасининг хотирасини тежаш маносида муҳимдир. Фараз этайлик , жадвалларнинг охирги n-қатлами , яъни $\varphi_n(y_1,...,y_m)$ ва $I(n:y_1,...,y_m)$ функцияларнинг қийматлари $(y_1,...,y_m)$ аргументни барча мумкин бўлган қийматларида аниқланган бўлсин. У ҳолда қўйилган масалани ечими қуйидагича топилади: Предметларни сонини аниқлаш жадвалидан $I(n:b_1,...,b_m)$ сонга қаралади. Фараз этайлик у j_1 га тенг бўлсин, бу j_1- номерли предмет камида бир марта олинишлигини билдиради. Шунинг учун $x_{j1}=1$ деймиз. Кейин $I(n;b_1-a_{1j},...,b_m-a_{mj1})= I(n;\bar{b}_1,...,\bar{b}_m)$ нинг қийматига қараймиз , агар у j_2 га тенг бўлса, худди аввалгидек, бу j_2- номерли предмет камида бир марта олиниш кераклигини билдиради. Демак, $x_{j2}=1$ агар $j_2=j_1$ бўлса, у ҳолда j_1-номерли предмет камида икки марта иштирок этганлигини билдиради. Шунинг учун $x_{j2}=2$ деб олинади. Бунда, биринчи ҳолда яъни $I(n;\bar{b}_1,..., \bar{b}_m)=j_2$ бўлганда, $I(n;\bar{b}_1-a_{1j2},..., \bar{b}_m-a_{mj2})$нинг қийматига қаралади. Иккинчи ҳолда, яъни $I(n;\bar{b}_1,..., \bar{b}_m)=j$, да $I(n;\bar{b}_1-a_{1j1},..., \bar{b}_m -a_{mj})$ дан сўнг $\bar{x}_1,...,\bar{x}_n$ сонлари аниқланиб, улар ҳар бир предметдан нечтадан олиниши кераклигини билдиради ва бундан мақсад функция қиймати максимал бўлиб, биринчи жадвалдан $\varphi_n(b_1,...,b_m)$ билан аниқланади. Бунда шу этиборга лойиқки, агар жадвалларнинг барча қийматлари сақланиб қолган бўлса, n дан кичик предмет турлари ва $b_1,...,b_m$ чегараларни мос равишда катта бўлмаган бутун сонларга алмаштиришдан ҳосил бўлган масалаларни ҳам худди юқоридаги усул ёрдамида (жадвалларнинг мос қатламидан) ечимларини топиш мумкин. Юқоридаги алгоритм ёрдамида қуйидаги сонли мисолни ечиб кўрайлик. $n=3$, $m=2$, $c_1=2$, $c_2=3$, $c_3=1$, $a_{11}=2$, $a_{12}=1$, $a_{13}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=2$, $a_{23}=0$, $b_1=3$, $b_2=4$ бўлсин. Яъни қуйидаги кўринишдаги масалага эга бўламиз:

$$2x_1+3x_2+x_3\to\max$$
$$2x_1+x_2+x_3\le 3$$
$$x_1+2x_2\le 4$$
$$x_1,x_2\ge 0 \text{ - бутун.}$$

k=1 да (7) - формула ёрдамида $\varphi_1(y_1,y_2)$ ва (8) - формула ёрдамида $I(1:y_1,y_2)$ функцияларнинг қийматларини аниқлаймиз.

$$\varphi_1(1,2)=2\min\{\left[\frac{1}{2}\right],2\}=0,\quad I(1;1,2)=0$$

$$\varphi_1(1,3)=2\min\{\left[\frac{1}{2}\right],3\}=0,\quad I(1;1,3)=0$$

$$\varphi_1(1,4)=2\min\{\left[\frac{1}{2}\right],4\}=0,\quad I(1;1,4)=0$$

$\varphi_1(2,1)=2\min\{1,1\}=2,\quad I(1;2,1)=1$

$\varphi_1(2,2)=2\min\{1,2\}=2\ ,\quad I(1;2,2)=1$

$\varphi_1(2,3)=2\min\{1,3\}=2\ ,\quad I(1;2,3)=1$

$\varphi_1(2,4)=2\min\{1,4\}=2\ ,\quad I(1;2,4)=1$

$\varphi_1(3,1)=2\min\{\left[\frac{3}{2}\right],1\}=2,\quad I(1;3,1)=1$

-- -- -- -- -- --

$\varphi_1(3,4)=2\min\{\left[\frac{3}{2}\right],4\}=2\ ,\quad I(1;3,4)=1.$

k=2 да (7) ва (9) формулалар ёрдамида мос равишда $\varphi_2(y_1,y_2)$ ва $I(2:y_1,y_2)$ ларни аниқлаймиз.

$\varphi_2(1,1)=\max(\varphi_1(1,1),\ \varphi_2(1-1,1-2)+3)=0\ ,\quad I(2;1,1)=0$

$\varphi_2(1,2)=\max(\varphi_1(1,2),\ \varphi_2(1-1,2-2)+3)=3,\quad I(2;1,1)=2$

$\varphi_2(1,3)=\max(\varphi_1(1,3),\ \varphi_2(1-1,3-2)+3)=3,\quad I(2;1,3)=2$

$\varphi_2(1,4)=\max(\varphi_1(1,4),\ \varphi_2(1-1,4-2)+3)=3,\quad I(2;1,4)=2$

$\varphi_2(2,1)=\max(\varphi_1(2,1),\ \varphi_2(2-1,1-2)+3)=2,\quad I(2;2,1)=1$

$\varphi_2(2,2)=\max(\varphi_1(2,2),\ \varphi_2(2-1,2-2)+3)=3,\quad I(2;2,2)=2$

$\varphi_2(2,3)=\max(\varphi_1(2,3),\ \varphi_2(2-1,3-2)+3)=3,\quad I(2;2,3)=2$

$\varphi_2(2,4)=\max(\varphi_1(2,4),\ \varphi_2(2-1,4-2)+3)=6,\quad I(2;2,4)=2$

$\varphi_2(3,1)=\max(\varphi_1(3,1),\ \varphi_2(3-1,1-2)+3)=2,\quad I(2;3,1)=1$

$\varphi_2(3,2)=\max(\varphi_1(3,2),\ \varphi_2(3-1,2-2)+3)=3,\quad I(2;3,2)=2$

$\varphi_2(3,3)=\max(\varphi_1(3,3),\ \varphi_2(3-1,3-2)+3)=5,\quad I(2;3,3)=2$

$\varphi_2(3,4)=\max(\varphi_1(3,4),\ \varphi_2(3-1,4-2)+3)=6,\quad I(2;3,4)=2$

Энди k=3 қатлам элементларининг қийматларини яъни $\varphi_k(y_1,y_2)$, $I(k:y_1,y_2)$ топамиз.

$\varphi_3(1,1)=\max(\varphi_2(1,1),\ \varphi_3(1-1,1)+1)=1,\quad I(3;1,1)=3$

$\varphi_3(1,2)=\max(\varphi_2(1,2),\ \varphi_3(1-1,2)+1)=3,\quad I(3;1,2)=2$

$\varphi_3(1,3)=\max(\varphi_2(1,3),\ \varphi_3(1-1,3)+1)=3,\quad I(3;1,3)=2$

$\varphi_3(1,4)=\max(\varphi_2(1,4),\ \varphi_3(1-1,4)+1)=3,\quad I(3;1,4)=2$

$\varphi_3(2,1)=\max(\varphi_2(2,1),\ \varphi_3(2-1,1)+1)=2,\quad I(3;2,1)=3$

$\varphi_3(2,2)=\max(\varphi_2(2,2),\ \varphi_3(2-1,2)+1)=3,\quad I(3;2,2)=2$

$\varphi_3(2,3)=\max(\varphi_2(2,3),\ \varphi_3(2-1,3)+1)=3,\quad I(3;2,3)=2$

$\varphi_3(2,4)=\max(\varphi_2(2,4),\ \varphi_3(2-1,4)+1)=6,\quad I(3;2,4)=2$

$\varphi_3(3,1)=\max(\varphi_2(3,1),\ \varphi_3(3-1,1)+1)=3,\quad I(3;3,1)=3$

$\varphi_3(3,2)=\max(\varphi_2(3,2),\ \varphi_3(3-1,2)+1)=3,\quad I(3;3,2)=3$

$\varphi_3(3,3)=\max(\varphi_2(3,3),\ \varphi_3(3-1,3)+1)=5,\quad I(3;3,3)=2$

$\varphi_3(3,4)=\max(\varphi_2(3,4),\ \varphi_3(3-1,4)+1)=7,\quad I(3;3,4)=3$

Предметлар сонини аниқловчи жадвалнинг охирги k=3 қатлами $I(3;3,4)=3$ бўлганлиги учун $\bar{x}_3=1$ деб оламиз ва $I(3;3,-1,4-0)=2$ бўлгани учун $\bar{x}_2$=1 бўлади. Худди шундай I(3;2-1,4-2)=2, демак $\bar{x}_2$=2; I(3;1-1,2-2)= I(3;0,0)- элемент жадвалда йўқлиги учун предметларни сонини топиш жараёнини тўхтатамиз. Шундай қилиб, $\bar{x}_1$=0, $\bar{x}_2$=2 , $\bar{x}_3$=1 ечимга эга бўламиз. Энди баҳолар жадвалини охирги k=3 қатламидан мақсад функцияни максимал қиймати φ_3(3,4)=7 эканлигини аниқлаймиз. Демак, қўйилган масаланинг ечими қуйидагича бўлар экан: биринчи предметдан олинмайди, иккинчи предметдан иккита, учинчи предметдан битта, шу ҳолда мақсад функция қиймати максимал етти қийматга эга бўлади.

14- § ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ

Халқ хўжалигининг кўп масалаларини транспорт масаласига келтириш мумкин. Бу эса қўйилган масалани математик, қолаверса иқтисодий томондан тўла ечишга имкон беради, яъни оптимал режа ва ундан келадиган самарадорлик кўрсатиб берилади. Транспорт масаласи умуман олганда чизиқли программалаш масаласи бўлиб, айрим махсусликлари ҳисобга олинган ҳолда, уни ечиш учун бошқа қулай усуллар топилган.

Потенциаллар усули, дифференциалланган рента усули, дельта-усул ва бошқалар шулар жумласидандир. Албатта, барча усулларда ҳам бошланғич режани танлаб олиш муҳим роль ўйнайди, чунки, агар у оптимал режага яқинроқ қилиб олинадиган бўлса, кейинги ҳисоблар камроқ бажарилади. Шунинг учун, бошланғич режани аниқлаш ҳам алоҳида масала деб қаралиши мумкин. Уни ечиш учун бир қанча усуллар таклиф этилган, булар: шимолий-ғарб бурчак усули, минимал баҳоли усули, икки ҳисса афзалроқ усули ва бошқалар.

Транспорт масаласининг умумий қўйилиши қуйидагича:

$A_1,\cdots,A_i,\cdots,A_m$ бир хил турдаги маҳсулот билан савдо қилувчи таъминот пунктлари бўлиб, A_i-пунктдаги маҳсулот миқдори a_i бирликка тенг бўлсин. Шу маҳсулотларни $B_1,\cdots,B_j,\cdots,B_n$ истеъмол пунктларига тўла тарқатиш талаб қилинсин. Бунда B_j-истеъмол пунктига олиб келиниши керак бўлган маҳсулот миқдори b_j бирликка тенг бўлсин.

A_i-таъминотчидан B_j-истеъмолчига бирлик маҳсулотни олиб келиш харажати c_{ij} сўмни ташкил этсин. Таъминот пунктдаги маҳсулотларни истеъмолчиларга энг кам ҳаражат билан тўла ташиб кетилиши талаб этилсин. У ҳолда x_{ij}-билан A_i-таъминотчидан B_j-истеъмолчига ташиб кетилиши мўлжалланган маҳсулот миқдори белгиланиб, масаланинг математик модели тузилади, яъни

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\cdots,m \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\cdots,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots n. \qquad (4)$$

Бу ерда (2)-ҳар бир таъминотчидан олиб кетиладиган маҳсулот миқдорига, (3)-эса ҳар бир истеъмолчига олиб келинадиган маҳсулот миқдорига бўлган чегарани билдиради (1)- мақсад функцияни-ҳаражатни минимум қилиш кераклигини билдиради.

Таъриф. Агар $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ тенглик бажарилса, мос транспорт масаласи *ёпиқ,* акс ҳолда *очиқ масала* деб аталади.

Теорема. Ихтиёрий ёпиқ транспорт масаласи ечимга эга.

Исбот. Теорема шартига кўра

$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j = p > 0$. У ҳолда $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{p}$, $i = 1,\cdots,m,\ j = 1,\cdots,n$ режа бўлади, ҳақиқатан,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{p} = \frac{a_i}{p}\sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{p} = \frac{b_j}{p}\sum_{i=1}^{m} a_i = b_j.$$

Кўрсатамизки, (2), (3), (4) режалар тўпламида $z = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ - чизиқли мақсад функция чегараланган. Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$c' = \min\limits_{i,j} c_{ij}$, $c'' = \max\limits_{i,j} c_{ij}$, у ҳолда бир томондан $z = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \le$ $c''\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = c''\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = c''p$, иккинчи томондан $z = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ge$ $c'\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = c'\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = c'p$, демак, $c'p \le z \le c''p$. Шундай қилиб, бўш бўлмаган режалар тўпламида мақсад функция чегараланган экан, бундан келиб чиқадики, масала ечимга эга. Теорема исбот бўлди.

Очиқ транспорт масаласида иккита ҳол бўлиши мумкин:

а) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ - таъминот истеъмолдан ортиқ;

б) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ - истеъмол таъминотдан ортиқ. Иккала ҳолда ҳам мақсад функция кўриниши ўзгармайди. Биринчи-а) ҳолда соҳта B_{n+1} -истеъмолчи пункт, унинг маҳсулот миқдори-$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$; иккинчи б) ҳолда соҳта A_{m+1}-таъминотчи пункт киритилиб, унинг маҳсулот миқдори- $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_j$ деб олинади.

Бунда соҳта таъминотчидан барча истеъмолчиларга олиб бориш ҳаражатлари нол деб олинади. Аслида, бу йўналишлар бўйича маҳсулот ташилмайди. Соҳта истеъмолчи бўлган б) ҳолда ҳам, унга маҳсулот ташиш ҳаражати нолга тенг деб олинади. Бу билан унга оптимал режада энг кам ҳаражатга эга бўлган йўл тўғри келади. Демак, очиқ транспорт масаласини ҳар вақт ёпиқ ҳолга келтириш мумкин экан. Шунинг учун қуйида келтирилган ечиш усуллари фақат ёпиқ (1)- (4) кўринишдаги транспорт масаласи учун берилган. (1)- (4) транспорт масаласини қуйидаги жадвал

Таъм	Истеъмолчилар						мавжуд маҳсулот миқдори
	B_1	B_2	. . .	B_j	. . .	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1j}	. . .	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2j}	. . .	c_{2n}	a_2
⋮							⋮
A_i	c_{i1}	c_{i2}	. . .	c_{ij}	. . .	c_{in}	a_i
⋮							⋮

A_m	c_{m1}	c_{m2}	. . .	c_{mj}	. . .	c_{mn}	a_m
талаб	b_1	b_2	. . .	b_j	. . .	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

1-жадвал

кўринишда бериш, усулларни баён қилишни осонлаштиради. Бунда ҳаражатни билдирувчи c_{ij} сонлари катакларнинг ўнг юқори бурчагига ёзилади. Охирги устун ва сатрларга мос равишда таъминот пунктларида бўлган маҳсулот ва истеъмолчиларга керак бўлган талаб-маҳсулот миқдорлари ёзилади. Энди бошланғич режа (бошланғич тақсимот) ни топиш усуллари билан танишиб чиқамиз.

I. Шимолий-ғарб бурчак усули

Бу усул B_1-истеъмолчининг талабини A_1-таъминотчини маҳсулоти билан қондиришдан бошланади. Агар талаб тўла қондирилса (бунинг учун $a_1 \geq b_1$ бўлиши керак), унда A_1 ни ортиб қолган маҳсулоти билан B_2 нинг талабини қондиришга ўтилади ва ҳоказо. Агар A_1 таъминотчи B_1 нинг талабини қондира олмаса, у ҳолда A_2 таъминотчига ўтилади ва унинг ёрдамида B_1 талаби қондирилади. Бу жараён давомида тақсимланган маҳсулотлар миқдори мос катакларда кўрсатиб (ёзиб) борилади. Бу жараён барча маҳсулотларни истеъмолчиларга тўла тарқатиб бўлгунга қадар давом эттирилади. Бу жараённинг ҳар бир қадамида, ёки мос таъминотчи маҳсулоти тугайди, ёки мос истеъмолчи талаби тўла қондирилади. Агар иккала ҳол бир пайтда рўй берса, бу катакнинг ўнг томонидаги ёки пастидаги катагига нол ёзиб қўйилади. Бошланғич режани хосмас (бу ҳақда қуйига қаранг) қилиш учун шундай қилинади.

Бу усулни қуйидаги мисолда баён этамиз. A_1, A_2, A_3, A_4-таъминотчилар бўлиб, уларнинг маҳсулот миқдорлари мос равишда $a_1 = 100, a_2 = 150,\ a_3 = 200, a_4 = 150$ га тенг бўлсин. Шу маҳсулотларга эҳтиёжи бўлган B_1, B_2, B_3, B_4, B_5-истеъмолчилар бўлиб, уларнинг маҳсулотга бўлган талаблари мос равишда $b_1 = 80, b_2 = 60,\ b_3 = 110,\ b_4 = 180\ ,\ b_5 = 170$ га тенг бўлсин. A_i таъминотчидан B_j-истеъмолчига бирлик маҳсулот ташиш ҳаражати c_{ij} қуйидаги $c_{11} = 5,\ c_{12} = 6,\ c_{13} = 9\ ,\ c_{14} = 8\ ,\ c_{15} = 3,\ c_{21} = 9\ ,$ $c_{22} = 4,\ c_{23} = 3, c_{24} = 4, c_{25} = 5, c_{31} = 8\ ,\ c_{32} = 7\ ,\ c_{33} = 9,\ c_{34} = 2\ ,$

$c_{35} = 5,\ c_{41} = 3,\ c_{42} = 4,\quad c_{43} = 5, c_{44} = 4, c_{45} = 8$ сонлар билан аниқланган бўлсин. Бу масалани 1-жадвал каби, қуйидаги кўринишда ёзамиз:

Таъминотчилар	Истеъмолчилар					мавжуд маҳсулот миқдори
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5 80	6 20	9	8	3	100
A_2	9	4 40	3 110	4 0	5	150
A_3	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	3	4	5	4	8 150	150
талаб	80	60	110	180	170	600

2-жадвал

A_1-таъминотчининг маҳсулоти-100 ёрдамида энг кичик тартиб рақамли истеъмолчи бўлган B_1нинг талабини қондиришдан бошлаймиз: 100 нинг 80 бирлигини B_1га ажратамиз, қолган 100-80=20 бирлик маҳсулотни B_2 истеъмолчига берамиз, етмаган 60-20=40 маҳсулот миқдорини A_2 таъминотчи маҳсулоти билан тўлдирамиз. A_2 нинг қолган маҳсулоти 150-40=110 B_3 истеъмолчини талаби 110 учун етарли. Шундай қилиб, бу қадамда таъминотчининг ҳам маҳсулоти тугади, истеъмолчи талаби ҳам тўла қондирилди. Шунинг учун кейинги катакка нол сони ёзиб қўйилган (2-жадвал).

Бу жараённи охиригача давом эттирсак бошланғич режа (тақсимот)га эга бўламиз: $x_{11} = 80, x_{12} = 20, x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 40, x_{23} = 110, x_{24} = x_{25} = 0,$ $x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0$ $x_{34} = 180$, $x_{35} = 20, x_{41} = x_{42} = x_{43} = x_{44} = 0, x_{45} = 150$. Бунда ҳисоблаш мумкинки, мақсад функциянинг қиймати 2670 бирликка тенг бўлади.

II. **Минимал баҳоли усул**

Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, аввал энг кам ҳаражатли йўл танлаб олиниб, шу йўл орқали иложи борича кўп маҳсулот жўнатилади. Бунда, албатта, ёки истеъмолчи талаби тўла қондирилган бўлади, ёки таъминотчининг маҳсулоти тўла сарф бўлади. Шундан сўнг, мос ҳолда ёки истеъмолчи, ёки таъминотчи кейинги ҳисоблашларда иштирок этишмайди. Сўнг, қолган харажатлардан энг кам бўлгани танлаб олиниб, олдинги жараён такрорланади ва бу жараён барча маҳсулотлар тақсимланиб бўлгунча давом эттирилади. Бу усулни юқорида кўрилган мисолда баён қиламиз.

3-жадвалдан кўриниб турибдики, энг кам ҳаражат 2 га тенг бўлиб, у $A_3\ B_4$ катакда жойлашган. Унга мос келган талаб 180, бериш мумкин бўлган маҳсулот эса 200 га тенг. Шунинг учун, бу катакка 180 ёзилган. Кейинги, энг кичик элемент 3 бўлиб, у $A_1\ B_5,\ A_2\ B_3,\ A_4\ B_1$ катакларида жойлашган. $A_1\ B_5$ катакка мос келган талаб билан, бор маҳсулот миқдорининг энг кичиги 100, демак, у катакка 100 ёзилган бўлиши керак.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар					мавжуд маҳсулот миқдори
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	6	9	8	3 100	100

A_2	9	4 40	3 110	4	5	150
A_3	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	3 80	4 20	5	4	8 50	150
талаб	80	60	110	180	170	600

3-жадвал

Худди шундай $A_2\ B_3$ катакка 110, $A_4\ B_1$ га 80 ёзилган. Ундан кейинги, энг кичик ҳаражат 4 га тенг бўлиб, у $A_2\ B_2$, $A_2\ B_4$, $A_4\ B_2$, $A_4\ B_4$ катакларида жойлашган, бунда B_4 устунига тўғри келган $A_2\ B_4$ ва $A_4\ B_4$ катаклари ҳисобга олинмайди, чунки B_4 истеъмолчи талаби қондирилган. Шунинг учун $A_2\ B_2$ га 40 (чунки A_2 таъминотчида 40 маҳсулот миқдори қолган эди), $A_4\ B_2$ га 20 (чунки B_2 истеъмолчига яна 20 маҳсулот миқдори керак эди) ёзилган. Маҳсулотлари тугаган таъминотчиларга ва талаблари қондирилган истеъмолчиларга мос келган сатр ва устунлар ҳисобга олинмаган ҳолда, энг кичик ҳаражатни топамиз, у 5 га тенг ва у $A_3\ B_5$ катакда жойлашган. Унга қолган 20 маҳсулот миқдорини ёзамиз. Охирги тўлдирилмаган, битта $A_4\ B_5$ катак қолди, унга 50 ёзилиши кераклиги тушунарли.

Шундай қилиб 3-жадвалда бошланғич тақсимотни ҳосил қилдик, унга мос келган ҳаражат 1970 га тенг, яъни олдинги усулдаги харажатга қараганда кичик, демак, ҳосил қилинган режа- оптимал режага яқинроқ экан, чунки, бунда ҳаражатни ҳисобга олган ҳолда бошланғич тақсимот аниқланди.

III. **Икки карра афзалроқ усул**

Бу усулнинг моҳияти қуйидагича. Аввал ҳар бир сатрда энг кичик ҳаражатли катак (катаклар) танлаб олиниб V-билан белгиланади.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар					бор маҳсулот микдори
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	6	9	8	VV 3 100	100
A_2	9	V 4 40	VV 3 110	4	5	150
A_3	8	7	9	VV 2 180	5 20	200
A_4	VV 3 80	V 4 20	5	4	8 50	150
талаб	80	60	110	180	170	600

4-жадвал

Кейинги ҳар бир устунда энг кичик ҳаражатли катак (катаклар) ҳам V-билан белгиланади.

Шундан сўнг, VV белгили катакларга мос равишда тақсимланган маҳсулот миқдори ёзилади. Икки белгили катакларга тақсимланган маҳсулот миқдорлари ёзиб бўлингандан кейин, бир белгили катакларга ўтилади. Ундан сўнг, қолган катаклардан энг кичик ҳаражатлиси танлаб олинади ва бундан кейин минимал баҳоли усул қўлланилади.

Бу ерда ҳам, аввалги усулдагидек мақсад функциянинг қиймати 1970 чиқади. (Лекин, бу, умуман ҳар вақт ҳам тенг чиқади, дегани эмас). Энди бошланғич режа ёрдамида оптимал режани топиш усулларидан айримларини кўриб чиқамиз.

2. Потенциаллар усули

Теорема 1. $x=(x_{11}^*,x_{12}^*,\cdots,x_{mn}^*)$ режа транспорт масаласининг оптимал ечими бўлишлиги учун шундай $m+n$ та U_i^*, V_j^*, $i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$ сонлари мавжуд бўлиб, улар қуйидаги

$$\begin{aligned} &U_i^*+V_j^*=c_{ij}, \text{ агар } x_{ij}^*>0, \\ &U_i^*+V_j^*\le c_{ij}, \text{ агар } x_{ij}^*=0, \\ &i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{5}$$

шартларни қанотлантириши зарур ва етарлидир. Бунда U_i^* ва V_j^* лар мос равишда таъминотчи ва истеъмолчиларнинг *п о т е н ц и а л л а р и* дейилади.

Чизиқли программалаш назариясида кўрсатиладики тўғри ва унга иккиламчи бўлган масалаларнинг мақсад функцияларининг оптимал режадаги қийматлари бир-бирига тенг ва шу билан бирга қуйидаги теорема ўринли бўлади (унинг исботини келтирмаймиз).

Теорема 2. Агар тўғри масаланинг i-шарти оптимал режада тенгсизлик кўринишда бўлса, унга мос иккиламчи масаланинг оптимал режасининг i-компонентаси нолга тенг бўлади. Агар иккиламчи масаланинг оптимал режаси i-компонентаси мусбат бўлса, унга мос тўғри масаланинг i-чегараси оптимал режада тенглик ҳолда бўлади.

Бу теоремадан келиб чиқадики а) маҳсулот сони ($x_{ij}>0$) ёзилган катаклар учун потенциаллар йиғиндиси шу катакка мос келган ҳаражатга тенг бўлиши керак, яъни

$$U_i+V_i=c_{ij}, \tag{6}$$

б) маҳсулот сони ёзилмаган ($x_{ij}=0$) катаклар учун потенциаллар йиғиндиси шу катакка мос келган ҳаражатдан кичик ёки тенг бўлиши керак, яъни

$$U_i+V_j\le c_{ij} \tag{7}.$$

Энди, бевосита топилган бошланғич режаларни яхшилаш- оптимал ечимни аниқлашни кўриб чиқамиз.

Агар бирор тўлдирилмаган катак (7)-шартни қаноатлантирмаса, топилган режа оптимал эмас, уни яхшилаш керак бўлади.

Потенциаллар усули бир нечта этапдан иборат

а) Потенциалларни аниқлаш.

Потенциаллар-U_i, V_j хосмас режалар учун тузилади ва бунинг учун

$$U_i+V_j=c_{ij} \tag{8}$$

тенгламалар системасидан фойдаланилади. Режа хосмас бўлганлиги учун $m+n-1$ та катак тўлдирилган бўлиб, уларга мос келган (8) - тенгламалар системаси ҳам $m+n-1$ та, ўзгарувчилар сони эса $m+n$ та. Шунинг учун, бирор ўзгарувчига аниқ қиймат берилади, одатда $U_1 = 0$, Шундан кейин, қолган потенциаллар (8)- тенгламалар системасидан бир қийматли топилади. Масалан 4-жадвалда келтирилган бошланғич режага мос потенциалларни топиш керак бўлсин. Бунинг учун 4-жадвалга шу потенциаллар қийматларини кўрсатадиган қўшимча биттадан устун ва сатр киритамиз. Тўлдирилган катаклар $A_1 B_5$, A_2 B_2, A_2 B_3, A_3 B_4, A_3 B_5, A_4 B_1, A_4 B_2, A_4 B_5 бўлиб, уларнинг сони $m+n-1=8$ га тенг бўлганлиги учун, берилган бошланғич режа хосмас бўлади. Шу тўлдирилган катаклар учун (8) тенгламалар системасини тузамиз

$$
\begin{aligned}
&U_1 + V_5 = 3,\ U_2 + V_2 = 4,\ U_2 + V_3 = 3,\ U_3 + V_4 = 2,\\
&U_3 + V_5 = 5,\ U_4 + V_1 = 3,\\
&U_4 + V_2 = 4, U_4 + V_5 = 8. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Бу тенгламалар системасида 8 та тенглама, 9 та номаълум бор. Агар $U_1 = 0$ деб олсак, $U_2 = 5$, $U_3 = 2$, $U_4 = 5$, $V_1 = -2$, $V_2 = -1$, $V_3 = -2$, $V_4 = 0, V_5 = 3$ қийматларни (9)-тенгламалар системасидан топамиз. Уларни қўшимча устун ва сатр катакларига мос равишда ёзиб қўямиз. Булар бошланғич режанинг потенциаллари бўлиб хизмат қилади. Тўлдирилмаган катаклар учун оптималлик шарти-(7) текширилади, агар (7)-тенгсизлик барча катаклар учун ўринли бўлса, мос режа оптимал бўлиб, масала ечилган бўлади, акс ҳолда (7)-шарт бажарилмаган катакка мос равишда мусбат $U_i + V_j - c_{ij}$-сони катакнинг чап томони пастки бурчагига ёзиб қўйилади, улар 5-жадвалда кўрсатилган. A_1-сатр учун 0-2<5, 0-1<6, 0-2<9, 0+0<8, A_2-сатр учун 5-2<9, 5+0>4, 5+3>5. Демак, A_2 B_4 ва A_2 B_5 катакларда оптималлик шарти бузилар экан. Шунинг учун, уларга мос равишда $U_2 + V_2 - c_{24} = 5 + 0 - 4 = 1, U_2 + V_5 - c_{25} = 5 + 3 - 5 = = 3$ сонлари ёзилган; A_3- сатр учун 2-2<8, 2-1<7, 2-2<9; A_4-сатр учун 5-2<5, 5+0>4. Демак, A_4 B_4 катакда ҳам оптималлик шарти бузилади, шунинг учун, у катакка $U_4 + V_4 - c_{44} = 5 + 0 - 4 = 1$ сони ёзилган. Шундай қилиб, учта A_2 B_4, A_2 B_5 ва A_4 B_4 катакларда оптималлик шартлари бузилиб, уларга мос сонлар ёзиб қўйилди. Аниқланган режани яхшилаш учун тақсимлашни қайтадан кўриб чиқишда бу сонлар муҳим рол ўйнашади. Яъни бу сонлар ёрдамида бундан аввалги тақсимотни яхшиловчи катак аниқланади, хамда қайси таъминотчидан қайси истемолчига махсулот етказиб бериш зарур эканлиги маълум бўлади.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар						мавжуд
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	маҳсулот микдори
	V_j / u_i	-2	-1	-2	0	3	
A_1	0	5	6	9	8	3 100	100
A_2	5	9	- 4 40	3 110	4 1	+ 5 3	150
A_3	2	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	5	3 80	+4 20	5	4 1	-8 50	150
талаб		80	60	110	180	170	600

5-жадвал

б) Ёпиқ занжир тузиш ва маҳсулотларни қайта тақсимлаш.

1-пунктда катакларнинг чап пастки бурчагига ёзилган сонлар ичидан энг каттасига мос келган катак ажратиб олинади ва кейинчалик бу катак тўлдирилади (шу билан янги битта тўлдирилган катак пайдо бўлади).

Бизнинг мисолда бундай катак $A_2\ B_5$ дир. Шу катакни «+» билан белгилаймиз ва бир учи шу катакда, қолган учлари бошқа тўлдирилган катакларда бўлган кўпбурчак ясаймиз. Бу кўпбурчак учларини кетма-кет «+» ва «-» билан белгилаб чиқамиз. Кейин «-» учдаги маҳсулот миқдорларининг энг кичигини аниқлаймиз. Кўрилаётган сонли мисолда кўпбурчак учлари $A_2\ B_5$, $A_2\ B_2$, $A_4\ B_2$ ва $A_4\ B_5$ катаклардан иборат бўлиб, «-» учлардаги минимал маҳсулот миқдори $A_2\ B_2$ катакда жойлашган бўлиб 40 га тенг. Шу минимал маҳсулот миқдорини кўпбурчакнинг «+» учидаги сонлар устига қўшамиз, «-» учдаги сонлардан айириб ташлаймиз ва тўлдирилмаган учга шу сонни ёзиб қўямиз. Бунда энг кам маҳсулотли катаклар сони бир нечта бўлиб қолиши мумкин, у ҳолда айримларида нол сони сақлаб қолиниши керак, чунки тўлдирилган катаклар сони $m+n-1$ та бўлиши шарт.

Кўрилаётган мисолда $A_2\ B_2$ катакдаги энг кам маҳсулот 40 бўлиб, уни $A_2\ B_5$ катакка ёзамиз ва $A_4\ B_2$ катак «+» белгили бўлганлиги учун, ундаги 20 сонига 40 ни қўшиб 60 ни ёзамиз, $A_4\ B_5$ да «-» бўлгани учун, ундаги 50 сонидан 40 ни айириб, ўрнига 10 сонини ёзиб қўямиз, натижада қуйидаги 6-жадвалга эга бўламиз.

$A_2\ B_5$ катак тўлдирилган бўлиб қолди, шунинг учун потенциаллар ҳам ўзгариши керак.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар						мавжуд маҳсулот миқдори
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	V_j / u_i	-2	-1	1	0	3	

A_1	0	5	6	9	8	3 100	100
A_2	2	9	4	3 - 110	4	5 + 40	150
A_3	2	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	5	3 80	4 60	+5	4	-8 10	150
талаб		80	60	110	180	170	600

6-жадвал

в) Потенциалларни ўзгартириш

Юқорида кўрилган мисолда, янги тўлдирилган $A_2\ B_5$ катак учун $U_2 + V_5 = c_{25}$ тенглик бажарилган бўлиши керак, демак, ё U_2, ё V_5 ни камайтириш керак бўлади.

6-жадвалдан кўриниб турибдики, бунинг учун U_2 ни камайтириш мақсадга мувофиқ, чунки бунда, фақат V_3 ни ўзгартиришга тўғри келади. Аксинча. агар V_5 ни камайтирсак, унда U_1, U_3, U_4 ларни ҳам ўзгартиришга тўғри келар эди.

$U_2 + V_5 = U_2 + 3 = 5$, бундан $U_2 = 2$ эканлиги $V_2 + V_3 = \ 2 + V_3 = 3$ дан эса, $V_3 = 1$ эканлиги келиб чиқади. Юқоридаги 6-жадвалда, янги режага мос келган янги потенциаллар кўрсатилган.

Юқоридаги жараён натижасида янги тўлдирилмаган катак ҳосил бўлиб қолади, демак бу катак учун оптималлик шарти (8)-тенглик бажарилиши керак. Бу эса потенциалларни ўзгартиришга олиб келади. Бунда, шунга ҳаракат қилиш керакки, натижада ўзгарадиган потенциаллар сони иложи борича энг кам бўлсин (аслида, бу ерда иккита йўл бор, ё таъминотчи потенциалини, ё истеъмолчи потенциалини камайтириш). Кейин 2-пункт қайтарилади. Агар тўлдирилмаган катаклар учун оптималлик шарти (8) текшириладиган бўлса, уни фақат потенциаллари ўзгарган сатр ва устунлар учун олиб бориш етарли.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар						мавжуд маҳсулот
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	V_j / u_i	-1	0	1	0	3	
A_1	0	5	6	9	8	3 100	100
A_2	2	9	4	3 100	4	5 50	150
A_3	2	8	7	9	2 180	5 20	200

A_4	4	3 80	4 60	5 10	4	8	150
талаб		80	60	110	180	170	600

7-жадвал

Бизнинг мисолда бу A_2 сатр ва B_3 устунлардир. Оптималлик шарти эса фақат A_4 B_3 катак учун бузилган 5+1>5.

Бир учи шу катакда, қолган учлари тўлдирилган катакларда бўлган кўпбурчак (хусусан тўртбурчак) 6-жадвалда кўрсатилган. Бунда «-» белгили катаклардаги энг кам маҳсулот миқдори 10 га тенг. У ёрдамида янги режани тузамиз (7-жадвал).

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, $U_4+V_3=5$ тенгликда U_4 ни ўзгартириш мақсадга мувофиқ, чунки бунда фақат V_1 ва V_2 ларни ўзгартиришга тўғри келади. Шундан сўнг, оптималлик шарти (8) ни 7-жадвал ёрдамида текшириб кўрилса, у бажарилишлиги маълум бўлади. Демак, берилган масала ечими қуйидагича: $x_{15}=100$, $x_{23}=110$, $x_{25}=50$, $x_{34}=180, x_{35}=20$, $x_{41}=80$, $x_{42}=60, x_{43}=10$, қолган $x_{ij}=0$ бўлади, шунда мақсад функция минимумга (ҳаражат энг кам) эришади ва у 1840 га тенг.

15-§. n иштирокчили ўйиннинг дарахт кўринишда ифодаланиши(позицион ўйинлар)

Бизнинг тасаввуримизда ўйин қуйидаги учта асосий элементни ўз ичига олади:

1) шахсий ёки тасодифий бўлган юришлар кетма-кетлиги;

2) маълумотларнинг берилиши;

3) ўйин охирида ўйинчиларнинг ютуқлари.

Таъриф. 1.1. Учлар (тугун нуқталар) ва уларни бирлаштирувчи чизиқлар (ёйлар) тўпламидан иборат бўлган циклларсиз боғлиқ фигурага *дарахт* деб аталади.

Бу таърифдан келиб чиқадики, дарахтнинг ихтиёрий иккита учини ёйлар ва тугун нуқталар кетма-кетлигидан тузилган ягона йўл билан туташтириш мумкин бўлади (чунки, акс ҳолда цикл пайдо бўлиб қолади).

1. Г дарахт берилган бўлса, унинг бирор А учи асос, ёки ўйиннинг бошланғич позицияси деб аталади;

2. Г дарахтнинг барча охирги учларига ўйинчиларнинг ютуқларини ифодаловчи n-ўлчовли вектор мос қўйилади;

3. Дарахтнинг охири бўлмаган учлари $Y_1, Y_2, ..., Y_n, Y_0$ тўпламларга ажратилган бўлиб, улар мос равишда $1,2,...,n$ ўйинчиларнинг *юриш тўпламлари* деб аталади, Y_0-бошланғич позиция А ни билдириб, ундан чиққан ёйларга мос эҳтимолликлар берилган бўлади;

4. Ҳар бир Y_i, $i = 1, 2, ..., n$ юриш тўпламлари мос равишда ўйинчиларнинг *ахборот тўпламлари* деб аталувчи A_i^j тўпламларга ажратилган. A_i^j ларнинг ҳар бири қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

а) A_i^j ни ташкил этувчи учларнинг ҳеч қандай иккитаси ёй билан бирлаштирилмаган;

в) A_i^j ни ташкил этган учлардан чиққан ёйлар сони бир хил;

с) A_i^j ни ташкил этган учлардан чиққан ёйларга I_i^j - индекслар тўплами мос қўйилган.

Таъриф 1.2. Г ўйинда i-ўйинчининг ҳар бир A_i^j ахборот тўплами фақат битта элементдан иборат бўлса, у ҳолда $i-$ўйинчи *тўла ахборотли* дейилади. Агар ўйинда барча ўйинчилар тўла ахборотли бўлишса, бундай ўйин *тўла ахборотли ўйин* деб аталади.

Масалан шахмат, шашка тўла ахборотли, картадаги бридж, покер ўйинлари тўла ахборотли ўйин эмас.

Таъриф 1. 3. Ҳар бир A_i^j ахборот тўпламига I_i^j нинг бирор элементини мос қўювчи ихтиёрий функция i-ўйинчининг *стратегияси* деб аталади.

i-ўйинчининг стратегиялар (функциялар) тўпламини Δ_i, унинг элементини (стратегиясини) δ_i билан белгилаймиз.

Демак, i-ўйинчининг δ_i стратегияси деганда A_i^j ларнинг барчасида аниқланган ва қиймати I_i^j да ётувчи функцияни тушунар эканмиз. Ёки, бошқача қилиб айтганда δ_i стратегия шундай функцияки, унинг аргументи A_i^j тўпламлардан иборат бўлиб, қиймати I_i^j нинг элементидан иборат, яъни ҳар бир i, j да $f(A_i^j) \in I_i^j$.

Ўйинчиларнинг δ_i стратегиясидан тузилган

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$$

вектор функция *ўйиннинг ҳолати* деб аталади. Ҳар бир ҳолат ўйин тамом бўлганлигини аниқлаб, бу билан ўйинчиларнинг ютуғини аниқлаш мумкин:

$$w_i\left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right), \; i = 1, 2, ..., n,$$

бу сон i-ўйинчининг ютуғини билдиради.

Бирор $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ ҳолатда ўйинчиларнинг оладиган ютуқларидан тузилган вектор, қуйидаги

$$w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = (w_1(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n), w_2(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n), ..., w_n(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n))$$

кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, ўйинчиларнинг стратегиялари маълум бўлса, бу ўйин тамом бўлди, ўйинчиларнинг ютуқлари аниқ бўлди дегани. Чунки, стратегия қайси ҳолатда ўйинчилар қандай ечим қабул қилиш кераклигини олдиндан аниқлаб беради. Демак, ўйин бошлангандан то охиригача ҳар бир учраган ҳолат учун қандай йўл тутишлик маълум.

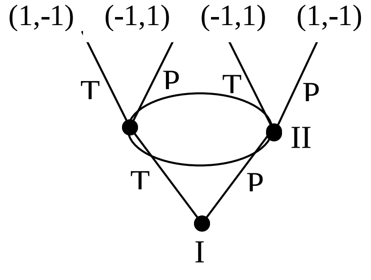
Шу ечимларни қўллаш натижасида ўйиннинг охирига етиб борилади ва ўйинчиларнинг ютуқ вектори $-w(\delta)$ аниқ бўлади.

Ҳар бир ўйинда ўйинчилар ўзларининг ютуқларини катталаштиришга (максимумлаштиришга) ҳаракат қилишади. Бу максимумлаштириш учраган вазиятларда қабул қилинадиган ечимлардан ташкил топган стратегиялар ҳисобига амалга оширилади. Агар, ўйин тасодифий юришлар орқали бошланса, ҳар бир $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ ҳолат учун эҳтимолликлар берилган бўлади; демак $w(\delta)$ ютуққа эга бўлиш эҳтимолликлари берилган бўлиб, уларнинг ўртача математик кутилма қийматини аниқлаш керак бўлади.

Шундай қилиб $w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) - n$-ўлчовли векторлар, δ_i лар чекли қийматлар қабул қилганда n-ўлчовли жадвал кўринишда ифодаланиши мумкин. Бундай ифодаланиш *ўйиннинг нормал шакли* деб аталади.

Масалан танга ташлаш ўйинида икки ўйинчи иштирок этади. Улар бир-бирига билдирмаган ҳолда тангани у, ёки бу томонини яширадилар. Ўйин қоидасига асосан, агар иккаласи ҳам танганинг бир хил томонини яширсалар иккинчи ўйинчи биринчисига бир бирлик, турли томонини яширсалар, аксинча, биринчи ўйинчи иккинчисига бир бирлик беради.

Бу ерда умумийликка зарар келтирмаган ҳолда, танга яширишни биринчи ўйинчи бошлайди деб қабул қилиш мумкин. У ҳолда, бу ўйиннинг дарахт кўриниши қуйидагича бўлади



1.1 расм.

Демак, бу ўйинда $Y_0 = Y_1$ бўлиб, у биринчи ўйинчининг юриш тўпламини билдиради. Y_2 эса Y_1 дан чиқувчи ёйларнинг охирги учларини билдириб, у иккинчи ўйинчининг юриш тўпламини, шу билан бирга ахборот тўпламини ҳам билдиради. Иккинчи ўйинчида ҳам икки имконият (тангани у, ёки бу томонини яшириш) бўлганлиги сабабли, унинг юриш тўплами Y_2 нинг ҳар бир учидан иккита ёй чиққан.

Демак, ҳар бир I_i^j тўплам икки элементдан иборат бўлиб, у тан-ганинг у (Т), ёки бу (Р) томонини аниқлайди.

Ҳар бир ёйнинг ёнига ўйинчилар томонидан танганинг қайси тарафи (Т-тамға, Р-рақам) яширгани мос равишда ёзиб қўйилган.

Дарахтнинг охирги учларига мос келтирилган вектор компо-ненталари ўйинчиларнинг ютуқларини ифодалайди. Бу ўйиннинг нормал шакли эса қуйидагича бўлади

	Т	Р
Т	1	-1
Р	-1	1

1.1 жадвал

Жадвалдан кўриниб турибдики, ҳар бир ўйинчининг иккитадан (Т ва Р) стратегиялари бўлиб, уларга мос келган ютуқлар жадвал элементи сифатида берилган. Жадвал элементлари биринчи ўйинчининг ютуғини (ик-кинчи ўйинчининг мағлубиятини) билдиради.

Кейинги мисол сифатида карта ўйинидаги соддалаштирилган покер ўйинини келтирамиз.

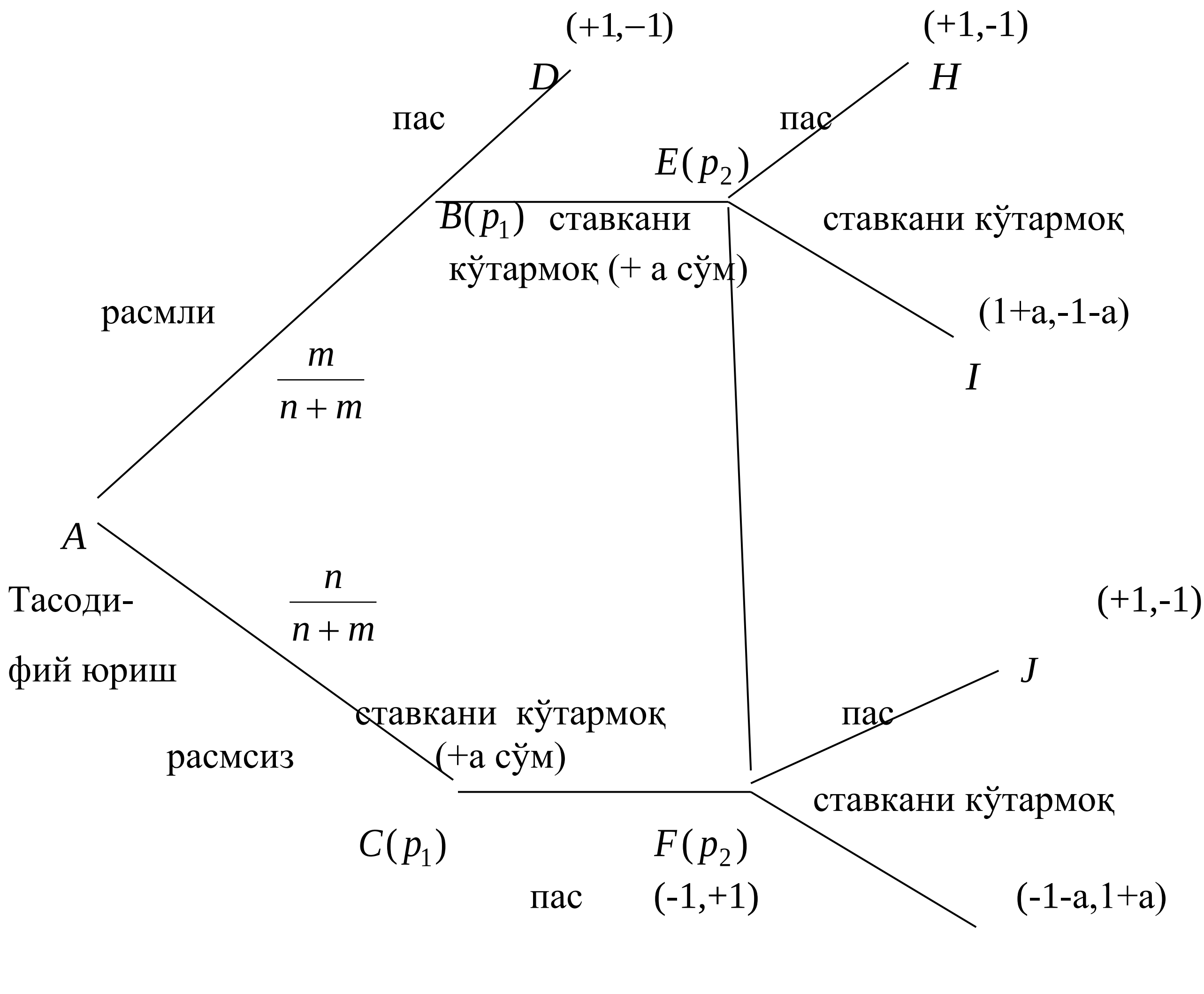
m та расмли ва n та расмсиз карта дастаси бўлсин. Ўйинда икки ўйинчи иштирок этиб, улар бошланғич ставка учун бир бирликдан “кон” тикишади. Шундан сўнг карта дастаси чийланади ва биринчи ўйинчига битта карта берилади. Биринчи ўйинчи берилган картани олиб, ёки пас дейиши, ёки **а** бирлик қўшиш орқали ставкани кўтариши мумкин (бунда ўйин давом этади).

Биринчи (пас) ҳолда, агар ўйинчида расмли карта бўлса тикилган ставкани ютади, расмсиз бўлса уни ютқазади. Мабодо биринчи ўйинчи ставкани **а** бирликка орттирса, у ҳолда иккинчи ўйинчига навбат келади.

У ўйинчида ҳам иккита имконият бўлиб, ёки “пас” дейиши, ёки ставкани **а** бирликка кўтариб ўйинни давом эттириши мумкин. Шундан сўнг, биринчи ўйинчидаги карта очилади.

Очилган карта расмли бўлса, биринчи ўйинчи, расмсиз бўлса иккинчи ўйинчи тикилган ставкани ютади.

Бу ўйиннинг дарахт шакли қуйидаги кўринишда бўлади



G K

1.2 расм.

Бу ерда A- тасодифий Y_0 ҳолат бўлиб, карта чийланишини билдиради. B ва C ҳолатлар биринчи ўйинчининг юриш тўплами Y_1 бўлиб, у расмли, ёки расмсиз картага эга бўлишликка мос келади. Демак, бунда, унинг иккита маълумот тўпламлари $Y_1^1=\{B\}$ ва $Y_1^2=\{C\}$ экан. Е ва F ҳолатлар иккинчи ўйинчининг юриш тўплами Y_2 ни билдириб, унинг маълумот тўплами $Y_2^1=\{E,F\}$ дан иборат, чунки иккинчи ўйинчи картани ҳам, В ва Е ҳолатларнинг қайси бирида турганлигини ҳам билмайди.

Бу ҳолатларнинг содир бўлиш эҳтимолликлари мос равишда $\frac{m}{n+m}$ ва $\frac{n}{n+m}$ сонларига тенгдир. Демак, биринчи ўйинчида иккита ҳолат ва ҳар бир ҳолатда иккитадан қарор қабул қилиш (пас ва ставкани кўтариш) бўлар экан. Бундан келиб чиқадики, биринчи ўйинчининг тўртта стратегияси П – доимо пас, К – доимо ставкани кўтариш, ЛК – расмли ставкани кўтариш (расмсиз пас) ва СК – расмсиз ставкани кўтариш (расмли пас) бор.

Иккинчи ўйинчининг маълумот тўплами Е ва F ҳолатларидан иборат бўлиб, ҳар бир ҳолатда иккитадан қарор қабул қилиш мумкин. Шу сабабли иккинчи ўйинчининг иккита стратегиясиз (П- пас, К- ставкани кўтариш) бор.

Агар $p=\frac{m}{n+m}$ белгилашни киритсак. Биринчи ўйинчининг П стратегияси, унга ўртача $1\cdot(p-1)+(-1)\ (1-p)=2p-1$ ютуқни беради (эътибор берамиз, бунда иккинчи ўйинчининг стратегияси ҳеч қандай рол ўйнамайди). Худди шундай (К, К) ҳолатда ютуқ

$p(a+1)+(1-p)(-1-a)=\quad(2p-1)(a+1)$ га тенг бўлади. Шунга ўхшаш ҳисоблашларни бажариб, қуйидаги

(К,П): p+(1-p)=1; (ЛК,П): p+(1-p)(-1)=2p-1; (ЛК,К): p(1+a)+(1-p)(-1)=2p-1; (СК,П): p(+1)+(1-p)(-1)=1; (СК,К): (1-p)(-1-a)+p =2p-1+(p-1)a ютуқларга эга бўламиз. Булар ёрдамида қуйидаги жадвал тузилган

	К	П
П	$2p-1$	$2p-1$
К	$(2p-1)\ (a+1)$	1
ЛК	$2p-1+pa$	$2p-1$
СК	$(p-1)a+2p-1$	1

1.2 жадвал

Кўрсатиш осонки, $(2p-1)(a+1)\geq(p-1)a+2p-1$ бўлади. Демак, биринчи ўйинчи томонидан П ва СК стратегияларни танлаш мақсадга мувофиқ эмас. Шу сабабли мос сатрларни ташлаб, қуйидаги

	К	П
К	$(2p-1)(a+1)$	1
ЛК	$2p-1+pa$	$2p-1$

нормал шаклдаги ўйинни ҳосил қиламиз.

Таъриф 1.4. Дарахти чекли сондаги учлардан иборат бўлган ўйин *чекли ўйин* деб аталади.

Албатта, чекли ўйинда ўйинчилар чекли сондаги стратегияга эга бўлишади.

16-§. Аралаш стратегия

Қуйидаги

$$W=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

жадвалли ўйинда эгар нуқта йўқ. Демак, бу ўйинда рақиб тўғрисида ахборотга эга бўлиш жуда ҳам муҳимдир. Агар ахборотга эга бўлишнинг иложи бўлмаса, у ҳолда таваккалига, аммо қайсидир маънода математик нуқтаи- назардан асосланган қарор (ечим) ларни эҳтимоллик билан қабул қилишга тўғри келади. Бунда ўйинчиларнинг оладиган ютуқлари математик кутилма орқали аниқланади.

Таъриф 4.1. $W=(W_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$ жадвалли ўйин берилган бўлсин. У ҳолда биринчи (иккинчи) ўйинчининг *аралаш стратегияси* деб қуйидаги

$$S_m=\left\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : x_i\ge 0,\ i=1,2,...,m,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}$$

$$(S_n=\left\{(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n : y_j\ge 0,\ j=1,2,...,n,\ \sum_{i=1}^{n}y_j=1\right\})$$

симплекс элементларига айтилади. Бунда $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in S_m$- аралаш стратегиянинг x_i - компонентаси i қарорни қабул қилиш эҳтимолини беради. Шу сабабли 4.1 таърифга эквивалент бўлган қуйидаги таърифни киритиш мумкин.

Таъриф 4.2. Соф стратегиялар $(i=1,2,\dots,m)$ устида тақсимланган тўла эҳтимоллик *аралаш стратегия* деб аталади.

Қуйидаги

$$W=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

жадвалли ўйинни қарайлик. Фараз қилайлик биринчи ва иккинчи ўйинчилар биринчи стратегияларини мос равишда x, y эҳтимоллик билан қабул қилсинлар. У ҳолда, аниқки, ўйинчилар иккинчи стратегияларини $1-x, 1-y$ эҳтимоллик билан танлайдилар. Демак, бундай ҳолда биринчи ўйинчининг ўртача (математик кутилма) ютуғи

$$K(x,y) = 2xy + 3(1-x)y + 5x(1-y) + 2(1-x)(1-y) \qquad (4.3)$$

қийматга тенг бўлади. (4.3) ни соддалаштириб қуйидаги

$$K(x,y) = -4\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right) + 2\frac{3}{4}$$

функцияга эга бўламиз.

Биринчи ўйинчи $x=\frac{1}{4}$ эҳтимолликни танлаш ҳисобига $2\frac{3}{4}$ ўртача ютуқни кафолатлаб олади. Чунки, у иккинчи ўйинчи y ни қандай танлаш ҳақида юз фоизлик ахборотга эга бўлмаганлиги сабабли, бошқа, яъни $x \neq \frac{1}{4}$ ни танглаш билан ўртача кафолотланган $2\frac{3}{4}$ ютуқни камайтириб юбориш мумкин.

Худди шунга ўхшаш, иккинчи ўйинчи ҳам $x=\frac{3}{4}$ эҳтимолликни танлаш билан ўртача кафолатланган $2\frac{3}{4}$ мағлубиятга эга бўлади. Бошқа эҳтимолликни танлаш орқали ўртача мағлубият $2\frac{3}{4}$ ни кўпайтириб юбориши мумкин. Бу мулоҳазалардан келиб чиқадики, биринчи ўйинчи учун энг мақбул қарор $x^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ иккинчи ўйинчи учун $y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралаш стратегиялардан иборат бўлиб, шунда биринчи ўйинчининг кафолатланган ўртача ютуғи $2\frac{3}{4}$, иккинчи ўйинчининг кафолатланган ўртача мағлубияти $2\frac{3}{4}$ бўлар экан.

Агар $W=(W_{ij})$ - жадвалли ўйин берилган бўлиб, биринчи ва иккинчи ўйинчилар $x \in S_m$, $y \in S_n$ аралаш стратегияларни мос равишда қўлласалар, биринчи ўйинчининг ўртача ютуғи (математик кутилма ютуғи)

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}x_i y_j \qquad (4.4)$$

сонига тенг бўлади.

Таъриф. 4.3. $W=(W_{ij})$ жадвалли ўйинда $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$ аралаш стратегиялар учун

$$K(x,y^*) \le K(x^*,y^*) \le K(x^*,y\ ) \qquad (4.5)$$

қўш тенгсизлик ихтиёрий $x \in S_m$, $y \in S_n$ векторлар учун ўринли бўлса, у ҳолда (x^*,y^*) жуфтлик $W=(W_{ij})$ жадвалли ўйиннинг *мувозанат ҳолати*, $K(x^*,y^*)$ сони *ўйин баҳоси* деб аталади.

Ўйинлар назариясида мувозанат ҳолатни аниқлаш муҳим ҳисобланиб, уларни топиш билан ўйин тўла ҳал этилган ҳисобланади.

Фараз қилайлик, биринчи ўйинчи $x \in S_m$ аралаш стратегиясини, иккинчи ўйинчи эса j-соф стратегиясини қўллашган бўлсин. У ҳолда биринчи ўйинчининг ўртача ютуғи

$$W(x,j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i$$ га тенг бўлади.

Таъриф 4.4. Агар $x \in S_m$, $x' \in S_m$ стратегиялар учун

$W(x,j) \ge W(x',j)$ тенгсизлик барча $j=1,2,3,...,n$ ларда бажарилиб, j нинг бирорта қийматида қатъий бўлса, x стратегия x' стратегиядан устун (афзал) деб аталади ва $x \succ x'$ кўринишда ёзилади.

17-§. Ўйиннинг мувозанат ҳолати ва ўйин баҳоси

Ўйинлар назариясида, ўйинчиларга оптимал стратегияларини аниқлаб бериш муҳимдир. Бу масалани ечишда қуйидаги тушунча алоҳида аҳамият касб этади.

Таъриф 2.1. Агар бирор Г ўйинда

$$w_i(\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_{i-1}^*, \delta_i\ , \delta_{i+1}^*, ..., \delta_n^*) \le w_i(\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_{i-1}^*, \delta_i^*\ , \delta_{i+1}^*, ..., \delta_n^*) \qquad (2.1)$$

тенгсизлик барча $i = 1,2,...,n$ ва $\delta_i \in \Delta_i$ ларда ўринли бўлса, $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \ \delta_n^*)$ ҳолат ўйиннинг *мувозанат ҳолати* деб аталади. δ_i^* эса i-ўйинчининг *оптимал стратегияси* дейилади.

Демак, ҳар бир ўйинчи мувозанат ҳолатни ташкил этган стратегиясини танлашга ҳаракат қилади, чунки, акс ҳолда у ўзининг ютуғини фақат камайтириши мумкин. Мувозанат ҳолатга мос келган $w(\delta^*)$ вектор *ўйин баҳоси* деб аталади.

Ўйинлар назариясида ўйиннинг мувозанат ҳолатларини (ўйинчиларнинг оптимал стратегияларини) ва ўйин баҳосини топиш асосий масала ҳисобланади.

Агар $Г$ дарахтнинг бирор учи B ва ундан кейинги учлар тўплами, ҳамда қолган учлар тўплами элементларидан ҳосил бўлган ахборот тўплам мавжуд бўлмаса, *мос $Г$ ўйин B учда иккига ажралган дейилади.*

Бунда биринчи ўйин ($Г_B$)нинг бошланғич позицияси В бўлади. В уч иккинчи ўйин ($\tilde{A}_{\underline{B}}$) нинг охири ҳисобланиб, ундаги ютуқ биринчи ўйиннинг ютуқ векторидан иборат бўлади.

Ўйинчиларнинг стратегиялари, уларнинг ахборот тўпламларида аниқланган бўлганлиги сабабли, уларни ҳам иккига, яъни биринчи ва иккинчи ўйинларга мослаштириб ажратиш мумкин, ва аксинча, иккала ўйин учун берилган стратегияларни бирлаштириб, бутун ўйин учун стратегия тузиш мумкин. Биз, бундай стратегияларни мос равишда $\delta_B, \delta_{\underline{B}}$ билан белгилаймиз, демак $\delta = \delta_B \vee \delta_{\underline{B}}$.

Теорема 2.1. Г ўйин В учда Γ_B ва $\Gamma_{\underline{B}}$ ўйинларга ажралган бўлсин, $\delta_i \in \Delta_i$ лар учун В учдаги ютуқ векторни $w(\delta_B)$ билан белгилаймиз. У ҳолда $w(\delta) = w(\delta_{\underline{B}})$ бўлади.

Исбот. Теоремани исботлаш учун иккита бир- бирини инкор этувчи ҳолларни кўриш етарли: 1) δ- стратегияга асосан ўйин В учдан ўтмайди; 2) δ- стратегияга асосан ўйин В учдан ўтади. 1)- ҳолдаги ўйинда δ- стратегиянинг δ_B қисми иштирок этмайди. Шу сабабли ўйин $\delta_{\underline{B}}$ стратегия билан тамомланади, демак

$$w(\delta) = w(\delta_{\underline{B}}).$$

2)- ҳолда δ- стратегияни икки қисмга δ_B ва $\delta_{\underline{B}}$ га ажратиш мумкин. Бунда δ_B Γ_B ўйин учун, $\delta_{\underline{B}}$- эса $\Gamma_{\underline{B}}$ ўйин учун стратегиялар ҳисобланади.

Демак, Γ_B ўйинда δ_B стратегияга мос ютуқ $w(\delta_B)$ га тенг, бу ютуқни $\Gamma_{\underline{B}}$ ўйиндаги В охирги учга мос келган ютуқ деб қабул қилиш мумкин. Чунки δ стратегия ёрдамида В учдан ўтилса, ўйинчиларнинг оладиган ютуқлари айнан $w(\delta_B)$ вектор билан аниқланади. Шундай қилиб, $\Gamma_{\underline{B}}$ ўйин учун B учдан кейинги учлар ҳисобга олинмасдан, ўйин В учнинг ўзида тўхтайди ва ўйинчиларнинг оладиган ютуқлари $w(\delta_B)$ вектор элементлари билан аниқланади. Шу маънода Γ ўйинда δ стратегия билан ўйинчилар оладиган ютуқ билан $\Gamma_{\underline{B}}$ ўйинда $\delta_{\underline{B}}$ стратегия билан оладиган ютуқлар бир ҳилдир.

Бошланғич A позицияда эҳтимолликларнинг берилиши юқоридаги мулоҳозаларни зиддиятга олиб келмайди. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан фойдаланган ҳолда айтиш мумкинки, агар δ стратегиянинг δ_B қисми Γ_B ўйин учун, $\delta_{\underline{B}}$ қисми $\Gamma_{\underline{B}}$ ўйин учун мувозанат ҳолатларни ташкил этишса, δ стратегия Γ ўйин учун мувозанат ҳолатни ташкил этади.

Изоҳ. Юқорида айтилган фикрнинг тескариси ўринли эмас. Бунинг учун нол эҳтимоллик билан қабул қилинадиган B учдан ҳосил бўлган Γ_B ва $\Gamma_{\underline{B}}$ ўйинларни ажратиб қараш етарли.

Ўйинлар назариясининг энг муҳим ютуқларидан бири қуйидаги натижадир.

Теорема 2.2. Ихтиёрий тўла ахборотли чекли ўйин мувозанат ҳолатга эга.

Исбот. m билан ўйин асосидан ўйин охиригача бориш учун зарур бўлган ёйлар сонининг энг каттасини белгилайлик, m сони ўйин узунлиги деб аталади. Исбот m га нисбатан математик индукцияни қўллаш орқали олиб борилади. $m=1$ да ўйин бир қадамдан иборат бўлиб, ўйинчи ўзига энг мақбул ечимни танлаб олиш билан ўйин тугайди. Шу ечим ўйиннинг мувозанат ҳолатини ташкил этади. Энди m бирдан катта натурал сон бўлсин. У ҳолда берилган ўйинни тўла ахборотли ва чекли бўлганлиги сабабли уни бир нечта узунликлари m дан кичик бўлган ўйинларга ажратиш мумкин. Индукцияга асосан ҳар бир ўйин мувозанат ҳолатга эга. Юқоридаги теорема 2.1 исботидан кейинги мулоҳазага асосан бутун Γ ўйин ҳам мувозанат ҳолатга эга. Теорема исботланди.

Изоҳ. Теорема исботидан берилган ўйиннинг мувозанат ҳолатини топишнинг конструктив усули ҳам келиб чиқади.

18-§. Ўйинни нормал шаклга келтириш. Антагонистик ўйин

Биз юқорида кўрдикки, агар n иштирокчили ўйинда $i-$ ўйинчининг стратегиялари тўплами Δ_i билан белгиланган бўлса,

$\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n),\ \delta_i\in\Delta_i$ - ўйин ҳолати, $W_i(\delta)$ сони $i-$ўйинчининг ютуғи деб аталади.

Ўйинчилар сони иккита ва ихтиёрий $\delta\in\Delta_1\times\Delta_2$ да $W_1(\delta)+W_2(\delta)=0$ шартни қаноатлантирувчи ўйинлар алоҳида ўрганилиб, улар *антагонистик ўйинлар* деб аталади. Мабодо Δ_1,Δ_2 ларнинг элементлари сони чекли бўлса, бундай ўйинни жадвал кўринишида бериш қулайлик туғдиради ва бу кўриниш *ўйиннинг нормал шакли* деб аталади.

Бунда $W_2(\delta)=-W_1(\delta)$ бўлганлиги сабабли жадвал элементлари сифатида биринчи ўйинчининг ютуғи $-W_1(\delta)$ ни олиш етарли. Иккинчи ўйинчининг ютуғи $W_1(\delta)$ сонига қарама-қарши сон билан аниқланади.

Шундай қилиб, биринчи ўйинчининг стратегияларини $1,2,...,m$ билан, иккинчи ўйинчиникини $1,2,...,n$ билан белгилаб чиқилган бўлса,

$$W_{ij}=W_1(\delta_i,\delta_j),\quad \delta_i\in\Delta_1,\delta_j=\Delta_2$$

белгилаш орқали (W_{ij}) ёки

$$W=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n} \\ - & - & - & - \\ W_{m1} & W_{m2} & \dots & W_{mn} \end{pmatrix}$$

3.1. жадвал

жадвални ҳосил қиламиз. Юқорида таъкидланганидек, бу жадвал ўйиннинг нормал шакли деб аталади.

Демак, жадвалнинг сатрлари биринчи ўйинчининг, устунлари иккинчи ўйинчининг стратегияларини ифодалайди. Агар биринчи ўйинчи $i(\delta_i)$-стратегиясини, иккинчи ўйинчи $j(\delta_j)$ стратегиясини қўллашса, биринчи ўйинчининг ютуғи (иккинчиники) W_{ij} $(-W_{ij})$ сонига тенг бўлади.

Мисол 3.1. Қуйидаги нормал шаклдаги ўйин берилган бўлсин

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -4 & 7\end{pmatrix}.$$

Демак, бу жадвалли ўйинда биринчи ўйинчининг иккита, иккинчи ўйинчининг учта стратегиялари бор. Жадвалнинг элементлари биринчи ўйинчининг ютуғини билдириб, иккинчи ўйинчининг мағлубиятини билдиради.

Масалан, биринчи ўйинчи иккинчи стратегиясини, иккинчи ўйинчи биринчи стратегиясини қўллашса, биринчи ўйинчининг ютуғи 3 бирлик бўлиб, иккинчи ўйинчининг ютуғи -3 бирлик бўлади.

Мабодо, иккинчи ўйинчи ҳам иккинчи стратегиясини қўлласа, биринчи ўйинчининг ютуғи -4 (ёки мағлубияти 4) бирлик бўлиб, иккинчи ўйинчининг мағлубияти -4 (ютуғи 4) бирлик бўлади. Умуман, бундай кўринишдаги ўйинлар $2\text{x}n$ деб аталади ва биз кейинчалик улар билан тўла танишиб чиқамиз.

Мувозанат ҳолат таърифини антагонистик ўйинга қўлласак, қуйидаги муносабатларга келамиз

$$W_1\left(\delta_1,\delta_2^*\right)\le W_1\left(\delta_1^*,\delta_2^*\right)\le W_1\left(\delta_1^*,\delta_2\right) \tag{3.3}$$

Таъриф 3.1. Барча $\delta_1\in\Delta_1,\delta_2\in\Delta_2$ лар учун (3.3) қўш тенгсизлик ўринли бўлса, $\left(\delta_1^*,\delta_2^*\right)$ жуфтлик $W_1\left(\delta_1,\delta_2\right)$, $\delta_1\in\Delta_1,\delta_2\in\Delta_2$ *функциянинг эгар нуқтаси* деб аталади.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги теорема келиб чиқади

Теорема 3.1. $\left(\delta_1^*,\delta_2^*\right)$ жуфтлик ўйиннинг мувозанат ҳолати бўлиши учун, у $W_1\left(\delta_1,\delta_2\right)$, $\delta_1\in\Delta_1,\delta_2\in\Delta_2$ функциянинг эгар нуқтаси бўлишлиги зарур ва етарлидир.

(3.3) қўш тенгсизлигидан келиб чиқадики, агар (δ_1^*, δ_2^*) мувозанат ҳолатни ташкил этган бўлса $W_1(\delta_1^*, \delta_2^*)$ сони мос устунни энг катта, мос сатрни энг кичик элементи бўлади.

Теорема 3.2. Агар (δ_1^*, δ_2^*) ва $(\delta_1^{**}, \delta_2^{**})$ лар ўйиннинг мувозанат ҳолатлари бўлса, у ҳолда

1) $(\delta_1^*, \delta_2^{**})$ ва $(\delta_1^{**}, \delta_2^*)$ лар ҳам мувозанат ҳолат бўлади;

2) $W_1(\delta_1^*, \delta_2^*) = W_1(\delta_1^{**}, \delta_2^{**}) = W_1(\delta_1^{**}, \delta_2^*) = W_1(\delta_1^*, \delta_2^{**})$ муносабат ўринли.

Исботи. Аввал 2)-муносабатларни исботлайлик. (δ_1^*, δ_2^*) ва $(\delta_1^{**}, \delta_2^{**})$ лар эгар нуқта (теорема 3.1) ташкил этганлиги сабабли

$$W_1(\delta_1^*, \delta_2^*) \le W_1(\delta_1^*, \delta_2^{**}) \le W_1(\delta_1^{**}, \delta_2^{**}). \tag{3.4}$$

худди шунга ўхшаш

$$W_1(\delta_1^{**}, \delta_2^{**}) \le W_1(\delta_1^{**}, \delta_2^*) \le W_1(\delta_1^*, \delta_2^*). \tag{3.5}$$

(3.4) ва (3.5) тенгсизликлардан $W_1\left(\delta_1^*, \delta_2^*\right) = W_1\left(\delta_1^{**}, \delta_2^{**}\right) = W_1\left(\delta_1^{**}, \delta_2^*\right) = W_1\left(\delta_1^*, \delta_2^{**}\right)$, тенгликлар келиб чиқади, бундан 2) исбот бўлди. Энди 1) ни исботлаймиз.

Ихтиёрий $\delta_1 \in \Delta_1$ учун

$$W_1\left(\delta_1, \delta_2^{**}\right) \le W_1\left(\delta_1^{**}, \delta_2^{**}\right) = W_1\left(\delta_1^*, \delta_2^{**}\right) \tag{3.6}$$

муносабат, ва ихтиёрий $\delta_2 \in \Delta_2$ учун

$$W_1(\delta_1^*, \delta_2) \ge W_1(\delta_1^*, \delta_2^*) = W_1(\delta_1^*, \delta_2^{**}) \tag{3.7}$$

муносабат ўринли.

(3.6) ва (3.7) муносабатлардан $W_1\left(\delta_1, \delta_2^{**}\right) \le W_1\left(\delta_1^*, \delta_2^{**}\right) \le W_1\left(\delta_1^*, \delta_2\right)$ қўш тенгсизлик ихтиёрий $\delta_1 \in \Delta_1$, $\delta_2 \in \Delta_2$ лар учун ўринли эканлиги келиб чиқади. Демак, $(\delta_1^*, \delta_2^{**})$ эгар нуқта, бундан унинг мувозанат ҳолат эканлиги келиб чиқади. Ҳудди шу йўл билан кўрсатиш мумкинки,

$(\delta_1^{**}, \delta_2^*)$ ҳам ўйиннинг мувозанат ҳолатини ташкил этади. Теорема исботланди.

Таъриф 3.2. Агар $W=(W_{ij})$ жадвалли ўйин учун (i^*, j^*) мувозанат ҳолатни ташкил этса, $W_{i^* j^*}$ сони ўйин баҳоси деб аталади.

Юқоридаги мулоҳазалардан келиб чиқадики, $W=(W_{ij})$ жадвалли ўйин баҳосини ва мувозанат ҳолатларини топиш учун қуйидаги тенгликдан фойдаланиш мумкин

$$\max_i \min_j W_{ij} = \max(\min_j W_{ij}, \min_j W_{ij}, \dots \min_j W_{ij}) =$$
$$\max(\min(W_{11}, W_{12}, \dots W_{1n}), \min(W_{21}, W_{22}, \dots W_{2n}), \dots, \min(W_{m1}, W_{m2}, \dots W_{mn}))$$

Мисол 3.2. Бизга қуйидаги жадвалли ўйин берилган бўлсин

$$W=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Бу ўйинда биринчи ўйинчини 3 та, иккинчи ўйинчини 4 та стратегияси бор. Юқоридаги $\max_i \min_j W_{ij}$ ни ҳисоблаймиз.

$$\max_i \min_j W_{ij} = \max(\min(3,-1,-4,3), \min(4,3,3,4), \min(1,4,1,1) =$$

$$\max(-4,3,1) = 3$$

Бу 3 сони 2- сатр 3- устун кесишган жойдаги элемент. Шу сабабли мувозанат ҳолат -(2,3) эканлиги келиб чиқади. Ўйин баҳоси эса $W(2,3)=3$ га тенг бўлади.

20-§. Минимакс ҳақидаги теорема

Қуйидаги теорема ўйинлар назариясида муҳим теоремалардан бири ҳисобланади.

Теорема 5.1. (Минимакс ҳақидаги теорема)

$$v_I = v_{II}, \qquad (5.1)$$

бу ерда $v_I = \max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y), \quad v_{II} = \min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y)$.

Бу теорема кўп усуллар билан исбот қилинган бўлиб, биз Фон Нейман ва Моргенштернга тегишли бўлган исбот усулини келтирамиз. Бунинг учун бизга қуйидаги иккита лемма керак бўлади. Биринчи леммани исботсиз келтирамиз.

Лемма 5.1.(Гипертекислик ҳақидаги теорема). B m- ўлчамли евклид фазосининг қавариқ ёпиқ тўплам остиси бўлиб, унга тегишли бўлмаган $z=(z_1,z_2,...,z_m)$ нуқта берилган бўлсин. У ҳолда, шундай $p_1, p_2,..., p_m, p_{m+1}$ ҳақиқий сонлар мавжудки, улар учун

$$\sum_{i=1}^{m} p_i z_i = p_{m+1}$$

ва ихтиёрий $y\in B$ учун $\sum_{i=1}^{m} p_i q_i > p_{m+1}$ муносабатлар ўринли (бу дегани z нуқтадан шундай гипертекислик ўтадики, B тўплам тўлалигича унинг фақат битта “томонида” ётади).

Лемма 5.2. Бирор $m\times n$ ўлчамли W матрица берилган бўлсин, у ҳолда, қуйидаги даъволардан фақат бири ўринли бўлади:

1) S_m да шундай $z=(z_1,z_2,...,z_m)$ элемент борки, унинг учун $w_{1j}z_1+\cdots+w_{mj}z_m>0$ тенгсизлик барча $j=1,...,n$ лар учун бажарилади;

2) S_n да шундай $q=(q_1,...,q_n)$ элемент борки, унинг учун $w_{i1}q_1+\cdots+w_{in}q_n\le 0$ тенгсизлик барча $i=1,...,m$ лар учун бажарилади.

Исботи. $m-$ ўлчамли евклид E^m фазосида қуйидаги

$w_1=(w_{11},...,w_{m1}),...,w_n=(w_{1n},...,w_{mn})$,

$$e_1 = (1,...,0),...,e_m = (0,...,1) \quad (5.2)$$

нуқталарнинг қавариқ қобиғини C билан белгилаймиз. Бир пайтда бажарилмайдиган икки ҳолни кўрамиз: $0 \in C$ ва $0 \notin C$, бу ерда 0 E^m нинг нол нуқтаси. Аввал биринчи ҳолни кўрайлик. Унда S_{n+m} да шундай элемент $(\lambda_1,...,\lambda_n,\mu_1,...,\mu_m)$ топиладики, унинг учун

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n + \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_m e_m = 0 \quad (5.3)$$

тенглик ўринли. (5.3) - тенгликни координата бўйича ёзсак

$$\lambda_1 w_{i1} + \cdots + \lambda_n w_{in} + \mu_i = 0,\ i = 1,...,m \quad (5.4)$$

тенгликларга эга бўламиз, аммо $\mu_i,\ i = 1,...,m$ лар манфиймас сонлар бўлганлиги учун (5.4) дан

$$\lambda_1 w_{i1} + \cdots + \lambda_n w_{in} \le 0,\ i = 1,...,m \quad (5.5)$$

тенгсизликлар системасига эга бўламиз. Лекин $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$, чунки, акс ҳолда $\lambda_1 \ge 0,...,\lambda_n \ge 0$ бўлганлиги учун $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ ва (5.4) дан $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$ ҳосил бўлади бу эса $(\lambda_1,...,\lambda_n,\mu_1,...,\mu_m) \in S_{n+m}$ га зиддир. Шунинг учун $z_j = \lambda_j / \sum_{k=1}^{n} \lambda_k,\ j = 1,...,n$ деб олиш мумкин унда $q = (q_1, q_2,...,q_n) \in S_n$ ва (5.5) га асосан $w_{i1}q_1 + \cdots + w_{in}q_n \le 0$ тенгсизлик ихтиёрий $i = 1,...,m$ учун ўринли. Шу билан лемма 5.2 нинг 2) - си исботланди.

Энди фараз этайлик $0 \notin C$. У ҳолда, лемма 5.1 га кўра , шундай $p_1, p_2,..., p_m, p_{m+1}$ сонлари мавжудки, улар учун

$$\sum_{i=1}^{m} 0 \cdot p_i = p_{m+1} \quad (5.6)$$

ва ихтиёрий $z \in C$ учун

$$\sum_{i=1}^{m} p_i z_i > p_{m+1} \qquad (5.7)$$

муносабатлари ўринли бўлади.

(5.6) дан келиб чиқадики, $p_{m+1} = 0$. (5.7)- тенгсизлик хусусан (5.2) даги нуқталар учун ҳам бажарилади. Шунинг учун z ўрнига бирин-кетин $e_i, i = 1,...,m$ нуқталарни қўйиб, $p_{m+1} = 0$ эканлигини ҳисобга олсак, $p_i > 0,\ i = 1,...,m$ келиб чиқади. Демак, $z_j = p_j / \sum_{k=1}^{m} p_k,\ i = 1,...,m$ ва $z \in S_m$. Агар (5.7) да z ўрнига (5.2) даги $w_j,\ j = 1,...,n$ нуқталарни қўйсак, қуйидаги $\sum_{i=1}^{m} p_i w_{ij} > 0,\ j = 1,...,n$ тенгсизликлар системасига келамиз. Бунинг иккала томонини мусбат $\sum_{i=1}^{m} p_i$ га бўлиб

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij} z_i > 0,\ \ j = 1,...,n$$

тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз. Бу эса лемма 5.2 нинг 1-қисмини исботлайди. Лемма исбот бўлди.

Энди теорема 5.1 ни исботлашга ўтамиз. Берилган $m \times n$ ўлчамли A матрицали ўйинда лемма 5.2 нинг 1) даъвоси ўринли бўлса, у ҳолда шундай $z \in S_m$ топиладики, унинг учун $w_{1j} z_1 + \cdots + w_{mj} z_m > 0,\quad j = 1,...,n$ тенгсизликлар системаси ўринли, ёки ихтиёрий $y \in S_n$ учун

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^{n} (w_{1j} x_1 + \cdots + w_{mj}) y_j > 0 \qquad (5.8)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. (5.8) - тенгсизлик ихтиёрий $y \in S_n$ учун ўринли бўлганлиги сабабли

$$\min_{y \in S_n} W(x, y) > 0,$$

ёки

$$v_I = \max_{x \in S_m} \min_{y \in S_n} K(x, y) = \max_{x \in S_m} \min_{1 \le j \le n} x w_{\cdot j} > 0. \tag{5.9}$$

Худди шундай мулоҳазалар билан, агар лемма 5.2 нинг 2-даъвоси бажарилса

$$v_{II} = \min_{y \in S_n} \max_{x \in S_m} K(x, y) = \min_{y \in S_n} \max_{1 \le i \le m} w_{i\cdot} y^T \le 0 \tag{5.10}$$

тенгсизликка келамиз. Лекин лемма 5.2 нинг даъвосига асосан ёки 1)-шарт, ёки 2)-шарт бажарилади. Демак, (5.9), (5.10) лар бир пайтда бажарилмайди, худди шунга ўхшаш

$$v_I \le 0 < v_{II} \tag{5.11}$$

шарт ҳам бажарилмайди.

$K -$ бирор ҳақиқий сон бўлсин. Қуйидагича

$b_{ij} = w_{ij} - K, i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n$

янги $m \times n$ ўлчамли B матрица тузамиз. Кўрсатиш мумкинки

$$K_B(x, y) = K_W(x, y) - K,$$

бу ерда $K_B(x, y), \ K_W(x, y)$ лар 1-ўйинчининг B ва W матрицали ўйинлардаги мос ютуқларининг ўртача математик кутилмасини билдиради.

B матрицага юқоридаги мулоҳазаларни қўлласак, унинг учун (5.11) ўринли эмаслиги келиб чиқади, демак $v_I - K \le 0 < v_{II} - K$ шарт бажарилиши мумкин эмас, ёки $v_I \le K < v_{II}$ тенгсизликлар ихтиёрий K да бажарилиши мумкин эмас. Демак, $v_I \ge v_{II}$, аммо, маълумки

$v_I \leq v_{II}$, бу иккала охирги тенгсизликлардан $v_I = v_{II}$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу асосий теоремадан келиб чиқадики, демак ихтиёрий матрицали ўйинда ўйинчиларнинг оптимал стратегиялари мавжуд ва ўйин баҳоси аникланган.

Адабиётлар рўйхати (асосий, қўшимча,электрон)

Асосий

1. Вагнер Г. Основы исследования операций: в 3-х т. М.: Мир.1972 .

2. Таха Х. Введение в исследование операций. М., С- П., Киев: Вильямс. 2005.

3. Зайченко. Ю.П. Исследование операций. Киев: 1979.

4. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. .:Мир. 1974.

Қўшимча

5. П.Конюховский. Математические методы исследования операций в экономике. Учебное пособие. Санкт- Петербург. 2000.

6. Т.П.Фомина. Элементы исследования операций.Липецкий государственный педагогический институт. 1999.

7. Л.Т.Ащепков. Элементы исследования операций. Учебное пособие. Дальн. вост. гос. унив. 1999.

8. А.Н. Катулев., Н.Ф.Северцев. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности. Москва. Физматлит, 2000.

9. Конвей Р.В. и др. Терия расписаний. М: Мир.1975.

10. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.: Мир.1971.

11. Исследование операций. под.ред. Моудера Дж., и др. т.1.М.: Мир.1981.

12. Исследование операций. под. ред. Моудера Дж., и др. т.2. М.:Мир.1981.

13. Оре О. Теория графов. М.:Наука. 1968.

14. Морозов В.В., и др. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.:   1986.
15. Т. Партхасаратхи., Т. Рагхаван. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. Москва. Мир. 1974.
16. Дж.фон Нейман., О.Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. Москва. Наука. 1970.
17. Г. Оуэн. Теория игр. Москва. Мир. 1971.
18. Н.Н.Воробьев. Теория игр для экономистов и кибернетиков. Москва. Наука. 1985.
19. Дж. Мак –Кинси. Введение в теорию игр. Москва. 1960.
20. Г.Н.Дюбин., В.Г.Суздал. Введение в прикладную теорию игр. Москва. Наука 1981.
21. Э.Мулен. Теория игр с примерами из математической экономики. М. Мир. 1985.
22. Р.Д.Льюс., Х.Райфа. Игры и решения. Москва. ИЛ. 1961.
23. М Тўхтасинов. Дискриминированное решение для кооперативной игры четырех лиц. ДАН УзССР, №7,1980.
24.М.Тўхтасинов. Достаточные условия для существования решений кооперативной игры, дискриминирующего двух игроков. ДАН УзССР, №3,1982.
25. М.Тўхтасинов. Решение кооперативной игры n- лиц с дискриминированными игроками. Труды ТашГУ. 1985.
26. М.Тўхтасинов. Матрицали ўйинлар. Методик кўрсатма. Тошкент. “Университет”. 1993.
27. А.В.Крушевский. Теория игр. Киев. Виша школа. 1977.
28. Л.А.Петросян, Н.А.Зенкевич, Е.А.Семина. Теория игр. Москва. Высш.шк. 1998.
29. В.И.Данилов. Лекции по теории игр. Москва. РЭШ. 2002.

30. Матричные игры. Сб.статьей. Под.ред. Н.Н.Воробьева. Москва.1961.

31. Позиционные игры. Под.ред. Н.Н.Воробьева, И.Н.Врублевской. Москва. Наука. 1967.

32. To'xtasinov M. Yechim qabul qilish nazariysi. Toshkent-2009.

33.М.Тўхтасинов, Н.Мамадалиев. Жараёнлар тадқиқоти (маърузалар матни). Тошкент- 2001 (электрон варианти бор).

34. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.

35. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. Радио, 1964, 192 с.

36. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. 176 с.

Электрон

40. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm

41. http://www.ruscommech.ru/

42.http://iccpripu.ru

43.http://lib.ru

Хорижий манбалар рўйхати.

22. R.B.Myerson. Game theory (Analysis of Conflict), Harvard university press. Cambridge, London, England, 1991.

23. D.Fudenberg., J.Tirole. Game theory. Cambridge. Mass.:MIT Press. 1991.

24. A.Mas- Colell., M.Whinston., J.Green. Microekonomic Theory. N.-Y. Oxford Univ. Press, 1995.