

**УРҒАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ
УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА
БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ
ИЛМИЙ КЕНГАШ**

УРҒАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ШАРИПОВ РАСУЛБЕК АХМЕДОВИЧ

**m – СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ МАХСУСЛИК
ТЎПЛАМЛАРИ**

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

УРҒАНЧ – 2019

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Шарипов Расулбек Ахмедович m -субгармоник функцияларнинг махсуслик тўпламлари.....	3
Шарипов Расулбек Ахмедович Особые множества m -субгармонических функций.....	21
Sharipov Rasulbek Axmedovich Singular sets of m -subharmonic functions.....	39
Эълон қилинган ишлар рўйхати Список опубликованных работ List of published works.....	42

**УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ
УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА
БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ
ИЛМИЙ КЕНГАШ**

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ШАРИПОВ РАСУЛБЕК АХМЕДОВИЧ

**m –СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ МАХСУСЛИК
ТЎПЛАМЛАРИ**

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Урганч – 2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида В2019.2.PhD/FM332 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Урганч Давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида(www.ik-mat.urdu.uz) ва «Ziynet» Ахборот таълим порталида (www.ziynet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:

Абдуллаев Баҳром Исмоилович
физика-математика фанлари доктори

Расмий оппонентлар:

Худойбергенов Гулмирза
физика-математика фанлари доктори, профессор

Қурбанов Бухарбай Турганбаевич
физика-математика фанлари номзоди

Етакчи ташкилот:

Қарши давлат университети

Диссертация ҳимояси Урганч Давлат университети, Қорақалпоқ Давлат университети ҳузуридаги PhD.28.12.2017.FM.55.01 рақамли Илмий кенгашининг 2019 йил 16 декабрь соат 14⁰⁰ даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (99862) 224-66-11; факс: (99862) 224-67-00; e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz).

Диссертация билан Урганч Давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (Д-230 - рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ. Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (99862) 224-66-11; факс: (99862) 224-67-00).

Диссертация автореферати 2019 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2019 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

Ғ.Ў. Ўразбоев

Илмий даража берувчи Илмий кенгаш
раиси ўринбосари, физика-математика
фанлари доктори

А.А. Атамуратов

Илмий даража берувчи Илмий кенгаш
илмий котиби, физика-математика
фанлари номзоди

А.Б. Яхшимуратов

Илмий даража берувчи Илмий кенгаш
қошидаги илмий семинар раиси,
физика-математика фанлари доктори

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижалари шуни кўрсатадики, субгармоник функцияларнинг махсуслик тўпламлари ўрганиш потенциаллар назариясининг муҳим йўналиши ҳисобланади. Ушбу диссертация айнан шу масалага, яъни m -субгармоник ($m - sh$), кучли m -субгармоник (sh_m) ва α -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсуслик тўпламларини ўрганишга бағишланган. Биз биламизки, классик потенциаллар назарияси Лаплас оператори ва субгармоник функциялар синфига асосланиб қурилади. Функцияларнинг турли синфларида (аналитик функциялар синфи, гармоник ва субгармоник функциялар синфлари ва бошқалар) махсуслик тўпламларини таснифлаш, уларни ўрганиш функциялар назариясининг асосий йўналишларидан биридир.

Ҳозирги кунда субгармоник функцияларнинг қисм синфларининг четлатиладиган махсусликлари тўпламини тадқиқ қилиш натижалари кўп сонли тадқиқотлар предмети бўлиб хизмат қилмоқда, Бу соҳадаги натижалар плюрипотенциаллар назариясида ва кўп ўлчамли комплекс анализга кўплаб тадбиқ қилинади. Шу билан бирга комплекс фазоларда гармоник ва субгармоник функцияларнинг синфлари кенгайтмасини ифодаловчи янги α -субгармоник функциялар синфи ўрганила бошландиди. α -субгармоник функциялар потенциаллар назариясида, кучли m -субгармоник функциялар назарияси тадқиқотларида муҳим роль ўйнайди. m -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўпламининг геометрик хоссалари кўп ўлчамли комплекс анализнинг бир қанча масалалари билан боғлиқ. Шу боис m -субгармоник ва кучли m -субгармоник функциялар ҳамда бу синфларнинг четлатиладиган махсуслик тўпламларининг геометрик тузилишини тадқиқ қилиш масалалари алоҳида аҳамиятга эгадир. Шу муносабат билан m -субгармоник ва кучли m -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўплами ва уларнинг кўп ўлчамли комплекс анализ ва плюрипотенциал назарияга тадбиқини ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган фундаментал фанларга алоҳида эътибор қаратилган. Математика, физика, тадбиқий математика соҳасида халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш Республика олимларининг асосий вазифалари ва фаолияти йўналишлари этиб белгиланган¹. Шу мақсадда субгармоник функцияларнинг қисм синфларининг махсусликлари тўпламларининг геометрик тузилишини характерловчи салмоқли натижалар олинди ҳамда, хусусан m -субгармоник функцияларнинг махсуслик тўпламлари потенциаллар назариясининг муҳим тушунчаларидан бўлган поляр тўпламлар ва сиғимнинг хоссалари билан чамбарчас боғлиқ эканлиги исботланди. Қарор ижросини таъминлаш ва

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

юқорида қўйилган масалаларни ечишда m -субгармоник функциялар назариясини ривожлантириш ва комплекс фазоларда m -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўпламларини тадқиқ қилиш катта аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида» ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ги қарори ва 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» ги фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг № Ф4 «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Голоморф, гармоник, субгармоник ва плюрисубгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари АҚШ, Германия, Швеция, Франция, Россия ва Ўзбекистонлик бир қатор олимларнинг ишларида ўрганилган (Ф.Хартогс, А. Пуанкаре, П. Лелон, Л.Карлесон, У.Сегрел, М. Бланшет, П. Матилла, С. Гардинер, Нгуен Хуан Ю, А.Г. Витушкин, Е.М. Долженко, Е.М. Чирка, Ж.Риихентаус, А.Садуллаев, С.Имомкулов Б.Абдуллаев, Ж. Ярметов ва б.). Гармоник ва субгармоник функцияларнинг махсусликлар тўплами жуда кўплаб муаллифлар томонидан ўрганилган. Хаусдорф ўлчови терминида Lip_λ синфига тегишли гармоник функцияларнинг махсуслик тўпламини четлатиш Л.Карлесон ($0 < \lambda \leq 1$) ва Е.П.Долженко ($1 < \lambda \leq 2$) ларнинг ишларида ўрганилган. Lip_λ синфдан олинган субгармоник функцияларнинг махсуслик тўпламлари В.Л.Шапиро ($0 < \lambda < 1$) ҳамда А.Садуллаев ва Ж.Ярметов ($1 \leq \lambda \leq 2$) ишларида ўрганилган.

Кейинчалик $L^{k,p}(G)$ синфдан олинган субгармоник функцияларнинг махсуслик тўпламлари С.А. Имомкулов, Б.И. Абдуллаев ва Ж.Р. Ярметов ишларида ўрганилди.

Таъкидлаб ўтиш жоизки, m -субгармоник функциялар синфи субгармоник ва плюрисубгармоник функциялар синфига қараганда умумий ҳисобланади; $m=n$ да у субгармоник функциялар, $m=1$ да плюрисубгармоник функциялар билан устма-уст тушади. А.Садуллаев ва Б.Абдуллаев ишларида юқоридан чегараланган ва Lip_λ синфга тегишли m -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўпламлари ҳақидаги бир қатор теоремалар исботланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Урганч давлат университети №3 рақамли «Комплекс потенциаллар назарияси» мавзусидаги илмий тадқиқот ишлари режаларига мувофиқ бажарилган. Шунингдек ушбу тадқиқот иши Хоразм Маъмун академиясининг ФА-Ф-4-002 рақамли “ m -субгармоник функциялар ва уларнинг калибрланган геометрияга тадбиқлари” мавзусидаги фундаментал тадқиқотлар лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади: m -субгармоник, кучли m -субгармоник ва α -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўпламининг геометрик тузилишини тавсифлаш; локал α -поляри тўпламининг глобал α -поляри эканлигини исботлаш; α -субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласини ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

локал α -поляри тўпламининг глобал α -поляри эканлигини кўрсатиш;

α -субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласини ечиш;

α -субгармоник функцияларнинг махсусликлари тўпламини тузилишини тавсифлаш;

m -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликларини ўрганиш;

ёпиқ поляри тўплам юқоридан чегараланган кучли m -субгармоник функциялар синфи учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлишини исботлаш.

Тадқиқот объекти. m -субгармоник ва кучли m -субгармоник функциялар, m -поляри тўпламлар, α -субгармоник функциялар, α -поляри тўпламлар ва α -сиғими.

Тадқиқот предмети. m -субгармоник, кучли m -субгармоник ва α -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликларини ўрганиш.

Тадқиқот усуллари. Тадқиқот ишида функциялар назарияси, классик потенциаллар назарияси ва плюрипотенциаллар назарияси методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

α -субгармоник функцияларнинг бир қатор хоссалари исботланган, α -субгармоник функциянинг бошқача, янада қулайроқ таърифи аниқланган;

локал α -поляри тўпламнинг глобал α -поляри эканлиги исботланган;

α -субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласи ечилган;

L_{loc}^p ва $L_{loc}^{1,p}$ синфлардан олинган m -субгармоник функцияларнинг махсусликлари тўплами тузилиши $(n-s, q)$ - сиғим терминида тавсифланган;

α -поляри тўпламларнинг юқоридан чегараланган α -субгармоник функциялар учун четлатилиши мумкин бўлган махсусликлари тўплами экани исботланган;

поляри тўплам юқоридан чегараланган кучли m -субгармоник функциялар синфи учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйдаглардан иборат:

α -субгармоник функциялар учун максимумлар принципи бажарилиши исбот қилинган;

α -субгармоник функцияларнинг интеграл ўрта қиймати ёрдамидаги янги геометрик таърифи аниқланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик физика, классик потенциал назария, плюрипотенциал назария ва кўп комплекс ўзгарувчилик функциялар назариясининг маълум методлари қўлланилганлиги, натижаларнинг қатъий математик исботланганлиги билан асосланади. Бундан ташқари диссертация натижалари нуфузли, хусусан импакт факторли илмий журналларда нашр қилинганлиги ва илмий семинарларда ишнинг муҳокамадан ўтказилганлиги ҳам диссертация натижаларининг ишончлилигини исботлайди.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти диссертацияда келтирилган натижалар ва методлар назарий физика, майдоннинг квант назарияси, кўп комплекс ўзгарувчилик функцияларнинг геометрик назарияси ва потенциаллар назариясида фойдаланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларнинг хусусий ҳосилалари дифференциал тенгламалар назариясида тадбиқ этилиши мумкинлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши асосида:

m -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўпламлари ҳақидаги натижалар Тулуза университетининг Математика Институтида нозикли потенциаллар назариясининг Келлер геометриясига тадбиқида сингуляр Келлер фазоларидаги каноник метрикаларни ўрганишда қўлланилган (Тулуза университетининг 2019 йил 8 ноябрдаги хати). Натижаларнинг қўлланилиши талаб қилинган каноник метрикаларни мавжудлигини исботлаш имконини берган.

юқоридан чегараланган кучли m -субгармоник функциялар синфи учун поляри тўпланинги четлатиладиган махсуслик тўплами бўлиши ҳақидаги натижа Ф4-ФА-0-16928 рақамли «Комплекс потенциаллар назариясида плюрирегулярлик хусусиятлари ва модифицирланган манбали дифференциал айирмали тенгламалар» лойиҳасида қўлланилган (Ўзбекистон Республикаси фанлар Академиясининг 2019 йил 21 ноябрдаги хати). Илмий натижанинги қўлланилиши комплекс фазоларда компакт тўпланиларнинг поляри қобилиларини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари қуйидаги халқаро ва республика илмий конференцияларида муҳокамадан ўтказилган: «Анализнинг долзарб муаммолари» (Қарши, 2016 г), «Математика ва физиканинги замонавий муаммолари» Ўзбек-Исроил халқаро илмий конференция (Тошкент, 2017 й.), «Фундаментал математиканинги муаммолари ва тадбиқлари» (Навоий, 2019 й.), «Таҳлилнинг долзарб муаммолар ва тадбиқи» (Қарши, 2019 й).

Иш Урганч давлат университетининг “Комплекс потенциаллар назарияси” семинарида тизимли равишда ва Ўзбекистон Миллий университетининг математик анализ кафедраси семинарида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси юзасидан 13 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан 1 таси хорижий ва 6 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, ҳулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 80 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг «**Дастлабки маълумотлар**» деб номланувчи биринчи бобининг биринчи параграфида умумлашган функциялар, оқимлар, гармоник, субгармоник ва плюрисубгармоник функциялар тўғрисидаги умумий маълумотлар ва натижалар келтирилган.

Мазкур бобнинг иккинчи параграфида m -субгармоник функциялар синфи ва уларнинг муҳим хоссалари келтирилган.

Диссертациянинг « **α – субгармоник функцияларнинг баъзи хоссалари**» деб номланувчи иккинчи боби α – субгармоник функцияларга бағишланган бўлиб, биринчи параграфида α – субгармоник функциянинг бошқача, янада қулайроқ таърифи берилган ва α – субгармоник функцияларнинг бир қатор хоссалари исботланган. Иккинчи параграфда локал α – поляр тўпламнинг глобал α – поляр эканлиги исботланган. Учинчи параграфда α – субгармоник функциялар синфида α – ўлчов ва α – сиғим тушунчалари киритилган ва уларнинг сиғим хоссалари исботланган. Хусусан, α – сиғимга нисбатан Борел тўпламларининг ўлчовлилиги исботланган, тўртинчи параграфда α – субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласи ечилган.

Бизга $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳада ихтиёрий α – қатъий мусбат, ёпиқ дифференциал форма берилган бўлсин:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k], \alpha_{jk}(z) \in C^1(D), d\alpha = 0. \quad (1)$$

α форманинг қатъий мусбат деганда, исталган компакт $G \Subset D$ соҳа учун шундай $\varepsilon > 0$ сон топиладики, $\alpha - \varepsilon \beta^{n-1} \geq 0$ тенгсизлик бажарилади.

1-таъриф. Агарда $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳада аниқланган $u(z) \in C^2(D)$, икки марта силлиқ функция учун D соҳада дифференциал форма $dd^c u \wedge \alpha \geq 0$ бўлса, у ҳолда $u(z)$ функцияга D соҳада α -субгармоник функция дейилади. Агарда $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳада аниқланган $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ функция

1) D соҳада юқоридан ярим узлуксиз, яъни $u(z^0) \geq \overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} u(z)$, $\forall z^0 \in D$;

2) умумлашган функция маъносида $dd^c u \wedge \alpha$ оператор мусбат, яъни

$$\int u(z) \alpha(z) \wedge dd^c \omega(z) \geq 0, \forall \omega \in F(D), \omega \geq 0$$

бўлса, бу функцияга D соҳада α -субгармоник функция дейилади.

Бундай функциялар синфини $\alpha - sh(D)$ орқали белгилаймиз, қулайлик учун $u(z) \equiv -\infty$ функцияси ҳам бу синфга тегишли деб қараймиз.

2-таъриф. D соҳада аниқланган $u(z)$ функция берилган бўлсин. Агар бу функция қуйидаги икки шартни бажарса

1) $u(z)$ функция D соҳада юқоридан ярим узлуксиз,

2) исталган $z^0 \in D$ нуқта учун $z \in B(z^0, r)$ ва етарлича кичик $r > 0$ учун

$$u(z) \leq \int_{\partial B(z^0, r)} P_\alpha(z, w) u(w) d\sigma(w)$$

бўлса, у ҳолда $u(z)$ функция D соҳада α -субгармоник функция дейилади.

Бу ерда $P_\alpha(z, w) - dd^c u \wedge \alpha$ оператор учун Пуассон ядроси.

Мазкур параграфида қуйидаги теорема исбот қилинди.

1-теорема. 1-таъриф 2-таърифта эквивалент.

Бу теоремадан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади: $u: D \rightarrow [-\infty, \infty)$ функция D соҳада α -субгармоник бўлишлиги учун, уни D да юқоридан ярим узлуксиз бўлишлиги ва исталган етарлича кичик B шарда α -гармоник ва ёпиғи $\bar{B}$ да узлуксиз v функция учун ∂B да $v \geq u$ шарт бажарилишидан B да $v \geq u$ бажарилиши зарур ва етарлидир. Бундай v функция B шар учун u функциянинг α -гармоник мажорантаси дейилади.

α -субгармоник функциялар қуйидаги хоссаларга эга.

а) α -субгармоник функциянинг мусбат коэффициентли чизиқли комбинацияси яна α -субгармоник функция бўлади, яъни

$$u_j(z) \in \alpha - sh, c_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k \Rightarrow c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z) + \dots + c_k u_k(z) \in \alpha - sh.$$

б) Чекли сондаги α -субгармоник функцияларнинг максимуми α -субгармоник функция бўлади.

в) Айтайлик $u_\delta, \delta \in \Delta$, локал текис чегараланган α -субгармоник функциялар оиласи бўлсин. У ҳолда $u^*(z) = \{\sup_{\delta \in \Delta} u_\delta(z)\}^*$ регуляризация α -субгармоник функция бўлади. α -субгармоник функцияларнинг локал текис чегараланган $\{u_j\}$ кетма-кетлиги учун $u(z) = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(z)$ лимитнинг регуляризацияси $u^*(z)$ ҳам α -субгармоник функция бўлади.

г) текис яқинлашувчи ёки монотон камаювчи α -субгармоник функциялар кетма-кетлигининг лимити яна α -субгармоник функция бўлади.

д) (максимумлар принципи). $D \subset \mathbb{C}^n$ - чегараланган соҳа бўлсин. У ҳолда α -субгармоник функция ўзининг максимумига фақат чегарада эришади, яъни $\forall z^0 \in D$ учун $u(z^0) \leq \sup_{\partial D} u(z)$ бўлади.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфи глобал ва локал α -поляри тўплamlарни ўрганишга бағишланган. D соҳада исталган плюрисубгармоник функция α -субгармоник функция бўлишини эътиборга олсак, плюриполяр тўплам ҳар бир қатъий мусбат $(n-1, n-1)$ бидаражали α дифференциал форма учун α -поляри тўплам бўлиши келиб чиқади.

2-теорема. D соҳада санокли сондаги α -поляри тўплamlар бирлашмаси α -поляри тўплам бўлади, яъни агар D да $E_j \subset D$ тўплamlар α -поляри тўплamlар бўлса, у ҳолда $E = \bigcup_j E_j$ ҳам α -поляри тўплам бўлади;

α -субгармоник функцияларни ўрганишда α -регуляр соҳа тушунчаси муҳим роль ўйнайди.

3-таъриф. Агар шундай $\rho(z) \in \alpha - sh(D): \rho(z) < 0$, $\overline{\lim}_{z \rightarrow \partial D} \rho(z) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи α -субгармоник функция мавжуд бўлса, у ҳолда $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳа α -регуляр соҳа дейилади.

Бундай соҳалар учун қуйидаги теорема ўринли.

3-теорема. $D \subset \mathbb{C}^n$ α -регуляр соҳа ва $E \subset D$ шундай қисм тўпламки, ихтиёрий $G \Subset D$ компакт қисм соҳа учун $E \cap G$ кесимида G да α -поляри бўлсин. У ҳолда E тўплам D да α -поляри бўлади. Бундан ташқари, $u(z) \in \alpha - sh(D)$ ва $u(z) \not\equiv -\infty$ функция мавжудки, $u|_D < 0$, $u|_E \equiv -\infty$ бўлади.

Равшанки, D соҳада глобал α -поляри тўплам локал α -поляри тўплам бўлади. Қуйидаги тескари тасдиқ ҳам ўринли.

4-теорема. Агар $E \subset \mathbb{C}^n$ тўплам локал α -поляри бўлса, яъни исталган тайинли $z^0 \in E$ нуқта учун шундай $U \ni z^0$ атроф ва $v(z) \in \alpha - sh(U)$ функция мавжудки, бу функция учун $v \not\equiv -\infty$ лекин $v|_{E \cap U} \equiv -\infty$ бўлса, у ҳолда $E \subset \mathbb{C}^n$ глобал α -поляри бўлади, яъни $\exists v(z) \in \alpha - sh(\mathbb{C}^n): v \not\equiv -\infty, v|_E \equiv -\infty$.

1-изоҳ. М.Д. Вайсова ишида ихтиёрий α -поляри тўпламнинг полярлиги (субгармоник функцияларга нисбатан) ҳақида масала қўйилган. Классик потенциаллар назариясида локал поляри тўпламнинг глобал полярлиги исбот

килинган бўлиб, қўйилган масаланинг ижобий ечимидан 4-теорема исботи оддийгина келиб чиқади. Лекин биз ҳали бу муҳим натижани исботига эга эмасмиз. Диссертацияда бу теорема $dd^c u \wedge \alpha$ операторнинг эллиптиклигидан ва унинг фундаментал ечими мавжудлигидан фойдаланиб исбот этилган.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида α -субгармоник функция синфида сиғим ва унинг хусусиятлари ўрганилган.

α –ўлчов. $E \subset D$ тўплам $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳанинг ихтиёрий қисм тўплами бўлсин. Биз D соҳани α –регуляр соҳа деб қараймиз (масалан, силлиқ чегарали соҳа). Соҳани α –регулярлиги шуни англатадики, чегарага қадар узлуксиз $G_\alpha(z, w)$ Грин функцияси мавжуд бўлиб, у қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

а) $G_\alpha(z, w) \in C(\bar{D} \setminus \{w\})$, $G_\alpha(w, w) = -\infty$;

б) тайинли $w \in D$ да $\forall z \in D$ учун $G_\alpha(z, w) < 0$ ва $G_\alpha(z, w)|_{z \in \partial D} = 0$;

в) $G_\alpha(z, w)$ функция D да α –субгармоник функция ва шу билан $z \neq w$ бўлганда α –гармоник;

г) $w \in D$ нуқтанинг бирор атрофида $G_\alpha(z, w) - K_\alpha(z, w)$ айирма чегараланган.

Силлиқ чегарали соҳалар учун Грин функцияси мавжуд бўлишини таъкидлаймиз.

Ушбу $\mathcal{U}(E, D) = \{u \in \alpha - sh(D) : u|_D \leq 0, u|_E \leq -1\}$ функциялар синфини қараймиз ва $\omega(w, E, D) = \sup\{u(w) : u \in \mathcal{U}(E, D)\}$ функциясини аниқлаймиз.

4-таъриф. У ҳолда $\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w \rightarrow z}} \omega_\alpha(w, E, D)$ регуляризацияга E тўпланинг D соҳага нисбатан α –ўлчови дейилади.

Таъкидлаш мумкинки, α –ўлчов монотонлик хоссасига эга, яъни агар $E_1 \subset E_2$ бўлса, у ҳолда $\omega^*(z, E_1, D) \geq \omega^*(z, E_2, D)$ бўлади; агар $E \subset D_1 \subset D_2$ бўлса, у ҳолда $\omega^*(z, E, D_1) \geq \omega^*(z, E, D_2)$ бўлади. Бу хосса $\mathcal{U}(E_1, D) \supset \mathcal{U}(E_2, D)$ ва $\mathcal{U}(E, D_1) \supset \mathcal{U}(E, D_2)$ эканлигидан келиб чиқади.

5-теорема. $U \subset D$ очик тўплам учун $\omega^*(z, U, D) \in \mathcal{U}(U, D)$, яъни $\omega^*(z, U, D) \equiv \omega(z, U, D)$ бўлади.

6-теорема. Агар $U \subset D$ – очик тўплам ушбу $K_j \subset K_{j+1}^0$ компакт тўплаларнинг бирлашмаси $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ кўринишда бўлса, у ҳолда $\omega^*(z, K_j, D) \downarrow \omega(z, U, D)$ бўлади, бу ерда K_j –компакт, K^0 – K компактнинг очик ядроси.

Агар $E \subset D$ ихтиёрий қисм тўплам бўлса, шундай $U_j \supset E$, $U_j \supset U_{j+1}$ ($j=1, 2, \dots$) очик тўплалар кетма–кетлиги мавжудки, $\omega^*(z, E, D) = \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \omega(z, U_j, D) \right)^*$ бўлади.

Қуйидаги иккита хоссаси плюрипотенциаллар назариясидаги $\mathcal{P}$ – ўлчов хоссаларига ўхшаш.

1. α – ўлчов $\omega^*(z, E, D)$ ёки ҳеч бир нуқтада нолга тенг эмас ёки у айнан нолга тенг. $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ бўлиши учун E тўпламнинг α – поляр бўлиши зарур ва етарлидир.

2. (икки константа ҳақидаги теорема) Агар $u(z)$ функция $D \subset \mathbb{C}^n$ да α – субгармоник бўлиб, $u|_D \leq R$, $u|_E \leq r$, ($E \subset D$) бўлса, у ҳолда барча $z \in D$ да $u(z) \leq R(1 + \omega^*(z, E, D)) - r\omega^*(z, E, D)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

α – сиғим. Айтайлик $E \subset D$ тўплам берилган бўлиб, $\omega^*(z, E, D)$ унинг α – ўлчови бўлсин. Ушбу

$$\alpha(E, D) = - \int_D \omega^*(z, E, D) dV$$

интеграл E тўпламнинг D соҳага нисбатан α – сиғими дейилади.

Шундай қилиб, α – сиғим (E, D) жуфтликнинг сиғим қийматини ифодалайди. Бундай жуфтликка одатда $\mathbb{C}^n$ да конденсатор дейилади. Плюрисубгармоник функциялар учун бундай сиғим А. Садуллаев томонидан киритилган. У кўп ўзгарувчили комплекс анализда, мероморф функциялар назариясида муваффақиятли қўлланилган.

α – сиғим қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\alpha(E, D) \geq 0$ ва $\alpha(E, D) = 0$ бўлиши учун D да E тўпламнинг α – поляр бўлиши зарур ва етарлидир.

2) $\alpha(E, D)$ қиймат тўпламнинг ўсувчи ва санокли-субаддитив функциясини ифодалайди: $E_1 \subset E_2$ учун $\alpha(E_1, D) \leq \alpha(E_2, D)$ ва

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, D\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(E_j, D). \quad (2)$$

7-теорема. $\alpha(E, D)$ сиғим қиймати тўпламнинг узлуксиз функцияси, яъни исталган $E \subset D$ тўплам ва исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай очиқ $U \supset E$ тўплам мавжудки, $\alpha(U, D) - \alpha(E, D) < \varepsilon$ бўлади.

8-теорема. Исталган камаювчи $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ компактлар кетма-кетлиги учун ўнгдан узлуксизлик ўринли:

$$\alpha\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j, D\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha(K_j, D),$$

агар $G_1 \subset G_2 \subset \dots$ очиқ тўпламлар кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j, D\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha(G_j, D).$$

чандан узлуксизлик ўринли.

7 ва 8 теоремалардан $\alpha(E, D)$ тўплам функциясининг Шоке бўйича ўлчовлиликининг барча хоссаларини қаноатлантириши келиб чиқади. Бинобарин, исталган борел тўплами α сиғим бўйича ўлчовли. Шундай қилиб, агар $E \subset D$ борел тўплами бўлса, унинг ички ва ташқи сиғими устма уст тушади:

$$\alpha_*(E, D) = \alpha^*(E, D) = \alpha(E, D),$$

бу ерда $\alpha_*(E, D) = \sup \{ \alpha(K, D) : K \subset E - \text{компакт} \}$ – ички сиғим.

α – сиғимга нисбатан ўлчовли тўпламлар оиласи етарлича бой. Бундан ташқари, борел тўплами бўлмаган ўлчовли тўпламлар мавжуд.

2.4 параграфда ҳар бир чегаравий нуқтасида пик (α – пик) бўлган соҳалар учун $\alpha - sh$ функциялар синфида Дирихле масаласи Перрон методи ёрдамида ечилади.

$dd^c u \wedge \alpha$ эллиптик оператор эканлигидан, ∂O силлиқ чегарали исталган $O \Subset D$ соҳа учун Пуассон ядроси $P_\alpha(w, \xi)$, $w \in O$, $\xi \in \partial O$, мавжуд: $P_\alpha(w, \xi) \geq 0$, w бўйича $P_\alpha(w, \xi)$ O да α – гармоник ва ξ бўйича ∂O чегарада узлуксиз. Шу билан бирга O да α – гармоник ва $\bar{O}$ да узлуксиз $u(z)$ функция учун Пуассон формуласи

$$u(w) = \int_{\partial O} P_\alpha(w, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi), \quad w \in O \quad (3)$$

ўринли. ∂O да исталган узлуксиз $\varphi(\xi)$ функция учун (3) формула $\varphi(\xi)$ нинг O га α – гармоник давомини беради. Функция

$$u(w) = \int_{\partial O} P_\alpha(w, \xi) \varphi(\xi) d\sigma(\xi)$$

O да α – гармоник ва ∂O чегарада $\varphi(\xi)$ билан устма уст тушади.

Энди $u \in \alpha - sh(D)$ бўлсин. $\varphi = u|_{\partial O}$ деб оламиз. $\varphi(\xi)$ функция юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ∂O да узлуксиз, монотон камаювчи функциялар кетма-кетлиги $\varphi_j(\xi) \downarrow \varphi(\xi)$ мавжуд бўлади. Агар биз

$$v_j(w) = \int_{\partial O} P_\alpha(w, \xi) \varphi_j(\xi) d\sigma(\xi),$$

кетма-кетлик курсак, у ҳолда $O \Subset D$ да $v_j(z)$ – гармоник, шу билан бирга $v_j|_{\partial O} = \varphi_j$ бўлади. Максимум принцинга кўра у монотон камаювчи ва бирор α – гармоник функцияга яқинлашади: $v(z)$, $v_j(z) \downarrow v(z)$, $v|_{\partial O} = \varphi = u|_{\partial O}$.

$$\psi(z) = \begin{cases} v(z), & \text{агар } z \in O \\ u(z), & \text{агар } z \in D \setminus O \end{cases} \quad (4)$$

функция D да α – субгармоник, шу билан бирга O да α – гармоник бўлади.

Энди ихтиёрий чегараланган $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳани қараймиз. Перрон методи ёрдамида қуйидаги Дирихле масаласи ечимини, яъни чегарада берилган

$\varphi \in C(\partial D)$ функция учун D да α -гармоник, $\bar{D}$ да узлуксиз функцияни топамиз: $u|_{\partial D} = \varphi$.

$$\aleph(\varphi, D) = \{w \in \alpha - sh(D) \cap C(\bar{D}) : w|_{\partial D} \leq \varphi\},$$

$$\omega(z) = \sup \{w(z) : w \in \aleph(\varphi, D)\}. \quad (5)$$

деб оламиз. в) хоссага кўра $\omega^*(z) = \overline{\lim_{w \rightarrow z}} \omega(w)$ регуляризация D да α -субгармоник функция бўлади. Ушбу параграфнинг асосий натижаси куйидаги теоремадан иборат

9-теорема. $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳа қуйидаги хоссаларни қаноатлантирсин:

1) ҳар бир $\xi^0 \in \partial D$ нуқта пик нуқта, яъни

$$\exists b \in \alpha - sh(D) \cap C(\bar{D}) : b(\xi^0) = 0, \quad b(z) < 0, \quad \forall z \in D \setminus \{\xi^0\}.$$

2) исталган бўш бўлмаган $S \subset \partial D$ атроф учун $\varpi^*(z, S, D)$

α -гармоник ўлчов $\lim_{z \rightarrow S} \varpi^*(z, S, D) = -1$ шартни қаноатлантирсин. Бу ерда

$$\varpi^*(z, S, D) \text{ функция } \varpi(z, S, D) = \sup \{u(z) \in \alpha - sh(D) \cap C(\bar{D}) : u|_D < 0, u|_S \leq -1\}.$$

супремумнинг регуляризацияси. У ҳолда (5) да аниқланган ω функция Дирихле масаласини амалга оширади, у D да α -гармоник, $\bar{D}$ да узлуксиз, ∂D да $\varphi(\xi)$ билан устма-уст тушади.

Диссертациянинг учинчи боби « **m -субгармоник функцияларнинг баъзи синфларининг махсуслик тўпламлари тузилиши**» деб номланган бўлиб, унда m -субгармоник ва кучли m -субгармоник функцияларнинг махсуслик тўпламлари ўрганилган. $L_{loc}^p(D) \cap m - sh(D \setminus F)$,

$$L_{loc}^{1,p}(D) \cap m - sh(D \setminus F) \text{ синфлар қаралган ва улар учун махсус } C_{n-s,q}(F)$$

сиғим қиймати терминида F тўпламда махсусликларни четлатиш мумкинлиги исботланган. 3.3 параграф кучли m -субгармоник (sh_m)

функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўпламларига бағишланган. Бу синф $m - sh$ функциялар синфининг хос қисм тўпламидир: $sh_m \subset m - sh$.

sh_m функцияларнинг махсуслик тўпламларини ўрганишда биз α -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари тўпламлари хоссаларидан фойдаланамиз (§ 3.2).

5-таъриф. $E - \mathbb{R}^n$ даги компакт тўплам ва

$$\Phi(E) = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi(x) > 1, \text{ исталган } x \in E \text{ учун}\}$$

бўлсин. E тўпламнинг $(n-s, q)$ - сиғими деб $\gamma_{n-s,q}(E) = \inf \{\|\varphi\|_{q,s} : \varphi \in \Phi(E)\}$

сонга айтилади. Бу ерда

$$\|\varphi\|_{q,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x^s \varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = s} \frac{s!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^s \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 \right]^{\frac{q}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Таъкидлаймизки, n, s ва q ларга боғлиқ $0 < A_1 < A_2$ ўзгармаслар мавжуд бўлиб қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$A_1 C_{n-s,q}(E) \leq \gamma_{n-s,q}(E) \leq A_2 C_{n-s,q}(E), \quad 1 < q \leq \frac{n}{s}. \quad (6)$$

3.1 параграфда қуйидаги теорема исбот қилинади.

10-теорема. $F \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – компакт ва $C_{n+m-s,q}(F) = 0$, $(0 < s < m, 1 < q \leq \frac{m}{s})$

бўлсин. У ҳолда деярли барча $a \in \mathbb{R}_x^n$ учун $F \cap \{x = a\} \subset \mathbb{R}_y^m$ кесими ноль $(m-s, q)$ -сизимга эга: $C_{m-s,q}(F \cap \{x = a\}) = 0$.

Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидагилар

11-теорема. Агар $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ соҳадаги F компакт тўпلام учун $C_{2n-2,q}(F) = 0$, $1 \leq q < \infty$, бўлса, у ҳолда бу тўпلام $u \in m - sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^p(D)$

функция учун $\frac{m}{m-1} \leq p < +\infty$, $p = \frac{q}{q-1}$ да четлатиладиган махсуслик тўплами бўлади.

2-Изоҳ. $m=1$ да $u \in 1 - sh(D \setminus F)$ функция плюрисубгармоник бўлади, $L_{loc}^p(D) = L_{loc}^\infty(D)$, чунки $p = \infty$. Бинобарин, бу ҳолда биз $C_{2n-2,q}(F)$ – сизими ноль бўлган компактда чегараланган плюрисубгармоник функцияларни давом қилдира оламиз. $m=n$ да $u \in n - sh(D \setminus F)$ функция одатдаги субгармоник функция бўлади ва биз Б.И.Абдуллаев ҳамда С.А.Имомкулов томонидан исботланган теоремага эга бўламиз.

3-Изоҳ. $1 < m \leq n$ да $\frac{m}{m-1} \leq \frac{n}{n-1}$ га эга бўламиз. Бинобарин субгармоник

функциялар учун 11-теоремадаги $\frac{m}{m-1} \leq p < +\infty$ шарт 13-теоремадаги

$\frac{2n}{2n-2} = \frac{n}{n-1} \leq p < \infty$ шартга қараганда кучли. Бу табиий, чунки агар У.

Сегрелнинг машҳур мисолини ҳисобга оладиган бўлсак, субгармоник функциялар учун четлатилмайдиган, лекин плюрисубгармоник функциялар учун четлатиладиган $F \subset \mathbb{C}^n$ компакт мавжуд.

12-теорема. Агар $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ соҳадаги F компакт тўпلام учун $C_{2n-1,q}(F) = 0$, $1 \leq q < \infty$ бўлса, у ҳолда бу тўпلام $u \in m - sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{1,p}(D)$

функция учун $\frac{2m}{2m-1} \leq p < +\infty$, $p = \frac{q}{q-1}$ да четлатиладиган махсуслик

тўплами бўлади.

Бу теоремларда $L_{loc}^p(D)$ синф p -даражаси билан локал жамланувчи синфни, $L_{loc}^{1,p}(D)$ функциялар синфи эса $L_{loc}^p(D)$ синфга тегишли бўлган биринчи тартибли ҳосилага эга функциялар синфини билдиради.

4-изоҳ. Бу теоремани $m=1$ (плюрисубгармоник функция) учун қўлласак, $C_{2n-1,q}(F)=0$, $1 \leq q < \infty$, бўлган F тўпلام $m-sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{1,p}(D)$, $2 \leq p < +\infty$, $p = \frac{q}{q-1}$ синф учун четлатиладиган тўпلام бўлишини кўрамиз. $m=n$ (субгармоник функция) да эса биз Б.И.Абдуллаев ва С.А.Имомкулов томонидан исбот қилинган теоремага эга бўламиз.

5-изоҳ. $1 < p < \frac{n}{n-2}$ да шундай $F \subset \mathbb{R}^n$ компакт қуриш мумкинки, $C_{n-2,q}(F)=0$, лекин $\mathbb{R}^n \setminus F$ да гармоник, шу билан бирга $\mathbb{R}^n$ га давом қилмайдиган $u(x) \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ функция мавжуд.

6-изоҳ. $1 < p < \frac{n}{n-1}$ да шундай $F \subset \mathbb{R}^n$ компакт қуриш мумкинки, $C_{n-1,q}(F)=0$, лекин $\mathbb{R}^n \setminus F$ да гармоник, шу билан бирга $\mathbb{R}^n$ га давом қилмайдиган $u(x) \in L_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ функция мавжуд.

Таъкидлаймизки, субгармоник функциялардан ($m=n$ ҳолда) фарқли равишда m -субгармоник функциялар учун ($m < n$) да четлатиладиган махсусликларни ягона мезонини олиш имконияти йўқ, чунки қаралаётган мезонларда комплекс тузилма ҳисобга олинмайди, m -субгармоник функциялар таърифида комплекс тузилма қатнашади. Шунингдек, $\mathbb{C}^n$ фазода плюрисубгармоник функциялар ($m=1$ ҳол) синфида четлатиладиган, лекин субгармоник функциялар учун четлатилмайдиган махсуслик тўплами бўладиган $K \subset \mathbb{C}^n$ компакт мавжуд. Бу компакт ҳаттоки субгармоник функциялар синфининг четлатиладиган тўпلامлари критерийсини қаноатлантирмайди.

7-изоҳ. $L_{loc}^{2,p}$ синф шуниси билан тавсифланадики, $L_{loc}^{2,p}$ синф функциялари иккинчи тартибгача ҳосилаларга эга, шу билан бирга иккинчи тартибли ҳосилалар L_{loc}^p синфга тегишли. Бинобарин, $p \geq 1$ да $F \subset D$, $mes F = 0$ ёпиқ тўпلام $m-sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{2,p}$ функция учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлади. Агар $u \in m-sh(D \setminus F) \cap C^2(D)$ бўлса, у ҳолда ҳеч қаерда зич бўлмаган $F \subset D$ тўпلام u функция учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлади. Шунинг учун $u \in m-sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{2,p}$ ва $u \in m-sh(D \setminus F) \cap C^2(D)$ ҳол тривиал ҳол бўлиб, бу ҳолларни қарашга ҳожат йўқ.

3.2 параграфда α -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсусликлари ҳақидаги қуйидаги асосий теоремалар исбот қилинади.

13-теорема. E тўпلام $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ соҳанинг компакт қисм тўплами бўлсин. E тўпلام $D \setminus E$ да α -субгармоник, D да юқоридан локал чегараланган функциялар учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлишлиги учун, E нинг α -поляр тўпلام бўлишлиги зарур ва етарлидир.

14-теорема. E тўплам $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ соҳанинг компакт қисми бўлсин. E тўплам $L_{loc}^p(D)$, $\frac{2n}{2n-2} \leq p < +\infty$ синфдан олинган, $D \setminus E$ да α – субгармоник барча функциялар учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлишлиги учун $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$ бўлишлиги зарур ва етарлидир.

15-теорема. E тўплам $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ соҳада компакт бўлсин. E тўплам $L_{loc}^{1,p}(D)$, $\frac{2n}{2n-1} \leq p < +\infty$ синфдан олинган, $D \setminus E$ да α – субгармоник барча функциялар учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлишлиги учун $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$ шартни қаноатлантириши зарур ва етарлидир.

1-натижа. E тўплам $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ соҳанинг компакт қисми бўлсин. E тўплам $L_{loc}^p(D)$, $\frac{2n}{2n-2} \leq p < +\infty$ синфдан олинган, $D \setminus E$ да α – гармоник барча функциялар учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлишлиги учун $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$ бўлишлиги зарур ва етарлидир.

2-натижа. E тўплам $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ соҳада компакт бўлсин. E тўплам $L_{loc}^{1,p}(D)$, $\frac{2n}{2n-1} \leq p < +\infty$ синфдан олинган, $D \setminus E$ да α – гармоник барча функциялар учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлишлиги учун $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$ шартни қаноатлантириши зарур ва етарлидир.

3.3 параграфда юқоридан чегараланган кучли m – субгармоник (sh_m) функциялар учун ёпиқ поляр тўпламнинг четлатиладиган махсуслик тўплами бўлиши исботланади.

$E \subset D$ ёпиқ m – поляр тўплам юқоридан локал чегараланган sh_m функциялар учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлади, яъни агар $u(z) \in D$ да юқоридан локал чегараланган ва $D \setminus E$ да sh_m функция бўлса, у ҳолда $u \in D$ га sh_m функция сифатида давом қилади. Бу $\tilde{u}(z) \in sh_m(D)$ функция мавжуд бўлиб, $\tilde{u}(z) = u(z)$, $\forall z \in D \setminus E$ бўлишини билдиради.

Ҳақиқатан ҳам, $E \subset D$ m – поляр тўплам бўлса, у ҳолда шундай $v(z) \in sh_m(D)$ функция мавжудки, $v(z) \not\equiv -\infty$, $v|_E = -\infty$ бўлади. $u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon v(z)$, $\varepsilon > 0$, функциялар оиласи D да sh_m функция бўлади, чунки $u_\varepsilon(z) \in sh_m(D \setminus E)$ ва $u_\varepsilon(z) = -\infty$, $\forall z \in E$, эканлигидан $u_\varepsilon(z)$ функция E нинг нуқталарида sh_m функция бўлади. Бундан ташқари бу оила D да юқоридан локал чегараланган.

Бинобарин, $\tilde{u}(z) = \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(z)}$ лимитнинг $\tilde{u}^*(z)$ регуляризацияси D да sh_m функция бўлади, шу билан бирга барча $z \in D: v(z) \neq -\infty$ учун $\tilde{u}^*(z) = u(z)$. Бундан $\tilde{u}^*(z) \equiv u(z)$, $z \in D \setminus E$ айният келиб чиқади, яъни $u(z)$ функция D га кучли m – субгармоник давом қилади.

Хусусан, $E \subset D$ ёпиқ плюриполяр тўплам юқоридан локал чегараланган psh функция учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлади. П.Лелон поляр тўплamlарнинг чизиқли акслннтиришдаги акси яна поляр бўлишидан фойдаланиб, $E \subset D$ ёпиқ поляр тўплам юқоридан локал чегараланган psh функциялар учун четлатиладиган тўплам бўлишини исботлаган. Биз қуйида бу теоремани sh_m функциялар учун аналогини исботлаймиз.

16-теорема. $E \subset D$ ёпиқ поляр қисм тўплам юқоридан локал чегараланган sh_m функция учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлади, яъни агар $u(z) \in sh_m(D \setminus E) \cap L_{loc}^\infty(D)$ бўлса, у ҳолда $u(z)$ D га sh_m функция сифатида давом қилади.

Муаллиф ушбу диссертация натижаларини кўп маротаба муҳокама қилишда ва ишни якунлашда қимматли маслаҳатларини берганлиги учун академик А.Садуллаевга, профессор С.А.Имомкуловга ва шунингдек, диссертацияда кўрилган масалаларни кўйиш ва диссертация ишига доимий эътиборда бўлганлиги учун илмий раҳбари, физика-математика фанлари доктори Б.И. Абдуллаевга чуқур миннатдорчилик билдиради.

ХУЛОСА

Диссертация иши m -субгармоник, кучли m -субгармоник ва α -субгармоник функцияларнинг четлатиладиган махсуслик тўпламларини ўрганишга бағишланган.

Асосий тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

1. α -субгармоник функцияларнинг бир қатор хоссалари исботланган, α -субгармоник функциянинг бошқача, янада қулайроқ таърифи аниқланган;
2. локал α -поляри тўпламнинг глобал α -поляри эканлиги исботланган;
3. α -субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласи ечилган;
4. L_{loc}^p ва $L_{loc}^{1,p}$, синфлардан олинган m -субгармоник функцияларнинг махсусликлари тўплами тузилиши $(n-s,q)$ - сифим терминида тавсифланган;
5. α -поляри тўпламларнинг юқоридан чегараланган α -субгармоник функциялар учун четлтилиши мумкин бўлган махсусликлари тўплами экани исботланган;
6. поляри тўплам юқоридан чегараланган кучли m -субгармоник функциялар синфи учун четлатиладиган махсуслик тўплами бўлиши исботланган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.28.12.2017.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ, КАРАКАЛПАКСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ШАРИПОВ РАСУЛБЕК АХМЕДОВИЧ

ОСОБЫЕ МНОЖЕСТВА m – СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ургенч – 2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № В2019.2.PhD/FM332.

Диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель: **Абдуллаев Бахром Исмаилович**
доктор физико-математических наук.

Официальные оппоненты: **Худайбергенов Гулмирза**
доктор физико-математических наук, профессор

Курбанов Бухарбай Турганбаевич
кандидат физико-математических наук

Ведущая организация: **Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится 16 декабря 2019 года в 14⁰⁰ часов на заседании Научного совета PhD.28.12.2017.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете, Каракалпакском государственном университете. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (99862)224-66-11, факс: (99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за № Д-230). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х.Алимджана, дом 14. Тел.: (99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан «____» _____ 2019 года.
(протокол рассылки № _____ от «____» _____ 2019 года).

Г.У. Уразбоев
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученой степени, доктор физико-математических наук

А.А. Атамуратов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, кандидат физико-математических наук

А.Б. Яхшимуратов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени, доктор физико-математических наук

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, показывают, что изучение множества особенностей субгармонических функций является важным направлением теории потенциала. Предлагаемая диссертация посвящена именно этому вопросу, изучению устранимых особых множеств классов m -субгармонических (m -sh), сильно m -субгармонических (sh_m) и α -субгармонических функций. Хорошо известная классическая теория потенциала строится на основе оператора Лапласа и класса субгармонических функций. Описание структур особых множеств тех или иных классов функций (класс аналитических функций, класс гармонических и субгармонических функций и др.) является одной из основных задач теории функций.

В настоящее время исследование устранимых особых множеств подклассов субгармонических функций стали предметом многочисленных исследований, в связи с их применениями в теории плюрипотенциала и в теории функций многих комплексных переменных. В тоже время стало изучаться новый класс функций, так называемый класс α -субгармонических функций, который является расширением классов гармонических и субгармонических функций в комплексном пространстве. α -субгармонические функции играют большую роль в теории потенциала, в исследованиях сильно m -субгармонических функций. Изучение геометрической структуры устранимых особых множеств m -субгармонических функций связано с некоторыми задачами многомерного комплексного анализа. При этом, изучение устранимых особых множеств классов m -субгармонических, сильно m -субгармонических функций и их применения в многомерном комплексном анализе и в теории плюрипотенциала считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим практическое применение. Основными задачами и направлениями деятельности ученых Республики являются научные исследования на уровне международных стандартов в области математики, физики, прикладной математики.² Вследствие достигнуты значительные результаты, характеризующие геометрические структуры особых множеств ряда подклассов субгармонических функций и доказаны, в частности, что особые множества m -субгармонических функций тесно связаны с замкнутыми полярными множествами и свойством емкостных величин, которое является основным объектом теории потенциала. При обеспечении исполнения и решения вышестоящих задач имеет большое значение развитие теории m -субгармонических функций и исследования устранимых особых множеств m -субгармонических функций в комплексных пространствах.

² Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-2909 «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» от 20 апреля 2017 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Настоящая работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан № Ф4 «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Устранимые особенности класса голоморфных, гармонических, субгармонических и плюрисубгармонических функций изучены в работах ряда ученых США, Германии, Швеции, Франции, России и Узбекистана (Ф.Хартогс, А. Пуанкаре, П. Лелон, Л.Карлесон, У.Сегрел, М. Бланшет, П. Матилла, С. Гардинер, Нгуен Хуан Ю, А.Г. Витушкин, Е.М. Долженко, Е.М. Чирка, Ж.Риихентаус, А.Садуллаев, С.А.Имомкулов, Б.И.Абдуллаев, Ж.Р.Ярметов и др.).

Особые множества решений и субрешений уравнения Лапласа, т.е. гармонических и субгармонических функций изучены многими авторами. В терминах Хаусдорфовой меры, условие устранения особого множества гармонических функций класса Lip_λ изучены в работах Л.Карлесона (для $0 < \lambda \leq 1$) и Е.П.Долженко (для $1 < \lambda \leq 2$). Особые множества субгармонических функций из класса Lip_λ изучены в работе В.Л.Шапиро (случай $(0 < \lambda < 1)$) и в работе А.Садуллаева и Ж.Р.Ярметова (случай $(1 \leq \lambda \leq 2)$).

Далее, устранимые особые множества субгармонических функций класса $L^{k,p}(G)$ изучены в работах С.А. Имомкулова, Б.И.Абдуллаева и Ж.Р.Ярметова.

Отметим, что класс $m-sh$ функций является более общим классом субгармонических и плюрисубгармонических функций; при $m=n$ оно совпадает с классом субгармонических, а при $m=1$ с классом плюрисубгармонических функций. В работах А.Садуллаева и Б.И.Абдуллаева доказаны теоремы об устранимых особых множествах для класса ограниченных сверху $m-sh(D \setminus E)$ функций и для класса $Lip_\lambda(D) \cap m-sh(D \setminus E)$ функций.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научных исследований кафедры «Математический анализ» Ургенчского государственного университета. Также данная работа была выполнена в рамках проекта ФА-Ф-4-002 “ m -субгармонические функции и их применения в калибровочной геометрии” Хорезмской Академии Маъмуна.

Целью исследования является описание геометрических структур множества устранимых особенностей классов m –субгармонических, сильно m –субгармонических и α –субгармонических функций; доказательство глобальной α –полярности локально α –полярных множеств; решение задачи Дирихле в классе α –субгармонических функций.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

показать, что локально α –полярное множество является глобально α –полярной;

решить задача Дирихле в классе α –субгармонических функций;

изучить устранимые особенности α –субгармонических функций;

описать структуру особых множеств m –субгармонических функций, в терминах $(n-s, q)$ -ёмкости;

доказать, что замкнутое полярное множество является устранимым для класса ограниченных сверху сильно m –субгармонических функций;

Объект исследования. m –субгармонические и сильно m –субгармонические функции, m –полярные множества, α –субгармонические функции, α –полярные множества и α –ёмкость.

Предмет исследования. Изучение устранимых особенностей m –субгармонических, сильно m –субгармонических и α –субгармонических функций.

Методы исследования. В диссертации использовались методы теории функций, классической теории потенциала и теории плюрипотенциала.

Научная новизна исследования. Все полученные результаты в диссертации являются новыми. Они состоят в следующем:

доказаны свойства α –субгармонических функций, дано более удобное определение α –субгармонических функций;

доказана глобальная α –полярность локально α –полярных множеств;

решена задача Дирихле в классе α –субгармонических функций;

описана структура особых множеств m –субгармонических функций из классов L_{loc}^p и $L_{loc}^{1,p}$, в терминах $(n-s, q)$ -ёмкость;

доказано, что α –полярное множество является устранимым особым множеством для класса локально ограниченных сверху α –субгармонических функций;

доказано устранимость замкнутого полярного множества для класса ограниченных сверху сильно m –субгармонических функций.

Практические результаты исследования. Дано новое геометрическое определение α –субгармонических функций с помощью интегральных средних, которое было успешно использовано в доказательствах ряда свойств этих функций и основных результатов.

Достоверность результатов исследования обоснована применением известных методов математической физики, классической теории потенциала, теории плюрипотенциала и теории функций многих комплексных переменных, строгими математическими доказательствами. Кроме того, публикацией результатов диссертации в престижных научных

журналах, в частности с импакт-факторами, и апробацией работы в научных семинарах.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы в теоретической физике, в квантовой теории поля, в геометрической теории функций многих комплексных переменных и теории потенциалов.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что полученные научные результаты могут быть применены в математической физике и в теории функций многих комплексных переменных. Кроме того, результаты могут найти применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результаты об устранимых особых множествах m -субгармонических функций были использованы в нелинейной теории потенциала и Келлеровой геометрии (Справка от 8 ноября 2019 года Института Математики Тулузы, Франция). Разработанные методы и полученные результаты были существенно использованы при изучении канонических метрик на сингулярных Келлеровых пространствах и применения результатов дали возможность доказать существования подобных метрик.

Результат об устранимости полярных множеств для класса ограниченных сверху сильно m – субгармонических функций был применен при выполнении гранта Ф4-ФА-0-16928 «Свойства плюрирегулярности в комплексной теории потенциала и дифференциально-разностные уравнения с модифицированными источниками» (Справка Академии Наук Республики Узбекистан от 21 ноября 2019 года). Применение результатов дали возможность осуществить описание полярных оболочек компактов на комплексных пространствах.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на следующих международных и республиканских научных конференциях: «Актуальные вопросы анализа» (Карши, 2016 г.); Международная Узбекско-Израильская научная конференция «Современные проблемы математики и физики» (Ташкент 2017 г.); «Проблемы и приложения фундаментальной математики» (Навои 2019 г.); «Актуальные проблемы и применения анализа» (Карши 2019 г.).

Работа также регулярно обсуждалась на семинарах «Комплексная теория потенциала» Ургенчского государственного университета, на семинаре кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 7 статей входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики

Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 1 опубликовано в зарубежном научном журнале с импакт-фактором и 6 в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 80 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первом параграфе первой главы диссертации, названной **«Предварительные сведения»**, приводятся необходимые предварительные сведения, краткий обзор известных результатов, основные свойства обобщенных функций, потоков, гармонических, субгармонических и плюрисубгармонических функций.

Во втором параграфа первой главы изучается класс m – субгармонических функций и их основные свойства.

Во второй главе диссертации, названной **«Некоторые свойства α – субгармонических функций»**, изучается класс α – субгармонических функций. Установлены свойства α – субгармонических функций, в частности, дано эквивалентное, более удобное определение α – субгармоничности функции. Доказана глобальная α – полярность локально α – полярных множеств. Введены понятия α – меры и α – емкости, и доказан ряд емкостных свойств этих величин. В частности, доказывається измеримость борелевских множеств относительно α – емкости. Кроме того, методом Перрона решается задача Дирихле для широких классов областей.

Пусть α – произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма в области $D \subset \mathbb{C}^n$:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k], \alpha_{jk}(z) \in C^1(D), d\alpha = 0. \quad (1)$$

Строго положительность α означает, что для любой компактной области $G \Subset D$ существует число $\varepsilon > 0$, такое, что дифференциальная форма $\alpha - \varepsilon \beta^{n-1} \geq 0$.

Определение 1. Дважды гладкая функция $u(z) \in C^2(D)$ называется α – субгармонической в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если дифференциальная форма

$dd^c u \wedge \alpha \geq 0$ в D . Функция $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ называется α -субгармонической в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если

1) она полунепрерывна сверху в D , т.е. $u(z^0) \geq \overline{\lim}_{z \rightarrow z^0} u(z)$, $\forall z^0 \in D$;

2) оператор $dd^c u \wedge \alpha$ положителен в обобщенном смысле, т.е.

$$\int u(z) \alpha(z) \wedge dd^c \omega(z) \geq 0, \forall \omega \in F(D), \omega \geq 0.$$

Класс α -субгармонических функций обозначается через $\alpha-sh(D)$, причем для удобства, включаем в этот класс и функцию $u(z) \equiv -\infty$.

Определение 2. Функция $u(z)$ называется α -субгармонической в области D , если выполняются следующие условия

1) $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D ;

2) $u(z) \leq \int_{\partial B(z^0, r)} P_\alpha(z, w) u(w) d\sigma(w)$, $z \in B(z^0, r)$ для любых $z^0 \in D$ и для

достаточно малых $r > 0$. Здесь $P_\alpha(z, w)$ -ядро Пуассона для оператора $dd^c u \wedge \alpha$.

В параграфе 2.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Определение 1 эквивалентно определению 2.*

Из этой теоремы легко вытекает, что функция $u: D \rightarrow [-\infty, \infty)$ является α -субгармонической в области D , тогда и только тогда, когда она полунепрерывна сверху в D и для любого достаточно малого шара B и любой α -гармонической в B и непрерывной в $\bar{B}$ функции v , удовлетворяющей условию $v \geq u$ на ∂B , следует, что $v \geq u$ в B .

Такую функцию v будем называть α -гармонической мажорантой функции u для шара B .

Имеют места следующие свойства α -субгармонических функций.

а) Если $u_j(z) \in \alpha-sh$, $c_j \geq 0$, $j=1, 2, \dots, k$, то

$$c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z) + \dots + c_k u_k(z) \in \alpha-sh.$$

б) Максимум конечного числа α -субгармонических функций также α -субгармоничен.

в) Пусть $u_\delta, \delta \in \Delta$, локально равномерно ограниченное семейство α -субгармонических функций. Тогда регуляризация $u^*(z) = \{\sup_{\delta \in \Delta} u_\delta(z)\}^*$ является α -субгармонической функцией. Для локально равномерно ограниченной последовательности α -субгармонических функций $\{u_j\}$ регуляризация $u^*(z)$ предела $u(z) = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(z)$ тоже будет α -субгармонической функцией.

г) Предел равномерно сходящихся или монотонно убывающей последовательности α -субгармонических функций опять α -субгармоническая.

д) (*принцип максимума*) Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ - ограниченная область. Тогда α -субгармоническая функция достигает своего максимума только на границе, т.е. $u(z^0) \leq \sup_{\partial D} u(z)$, $\forall z^0 \in D$.

Параграф 2.2 посвящен изучению глобально и локально α -полярным множествам. Заметим, что любая плюрисубгармоническая функция в области D является α -субгармонической, следовательно, плюриполярное множество является α -полярной для каждой строго положительной $(n-1, n-1)$ -дифференциальной формы α .

Теорема 2. *Счетное объединение α -полярных множеств в D является α -полярным в D , т.е. если $E_j \subset D$ являются α -полярными множествами в D , то $E = \bigcup_j E_j$ тоже является α -полярным в D .*

При изучении α -субгармонических функций важную роль играет понятие α -регулярных областей.

Определение 3. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется α -регулярной областью, если существует α -субгармоническая функция $\rho(z) \in \alpha - sh(D) : \rho(z) < 0$, $\overline{\lim}_{z \rightarrow \partial D} \rho(z) = 0$.

Для таких областей имеет место следующая теорема, которая вытекает также из основного результата.

Теорема 3. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ является α -регулярной областью и подмножество $E \subset D$ такое, что пересечение $E \cap G$ является α -полярным в G для произвольной компактной подобласти $G \Subset D$. Тогда E является α -полярным в D . Кроме того, существует функция $u(z) \in \alpha - sh(D)$, $u|_D < 0$, $u(z) \not\equiv -\infty$, но $u|_E \equiv -\infty$.

Ясно, что глобально α -полярное множество в D является локально α -полярным. Имеет место следующее обратное утверждение, причем в более сильной форме.

Теорема 4. Если множество $E \subset \mathbb{C}^n$ является локально α -полярным, т.е. для любой фиксированной точки $z^0 \in E$ существует окрестность $U \ni z^0$ и функция $v(z) \in \alpha - sh(U)$, такая, что $v \not\equiv -\infty$, но $v|_{E \cap U} \equiv -\infty$, то оно является глобально α -полярным в $\mathbb{C}^n$, т.е. $\exists v(z) \in \alpha - sh(\mathbb{C}^n) : v \not\equiv -\infty$, $v|_E \equiv -\infty$.

Замечание 1. В работе М.Д.Ваисовой поставлена задача о полярности (относительно субгармонических функций) произвольного α -полярного множества. Так как в классической теории потенциала при помощи потенциального интеграла доказана глобальная полярность локально полярного множества, из положительного решения поставленной проблемы тривиальным образом вытекает теорема 4. Однако мы пока не имеем доказательства этого важного результата. В диссертации эта теорема

доказана используя эллиптичность оператора $dd^c u \wedge \alpha$ и существования его фундаментального решения.

В параграфе 2.3 установлены свойства емкостных величин в классе α -субгармонических функций.

Понятие α -меры. Пусть $E \subset D$ – произвольное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$. Мы предполагаем, что D является α -регулярной (например с гладкой границей) областью. α -регулярность области означает, что существует непрерывная вплоть до границы функция Грина $G_\alpha(z, w)$, обладающая следующими свойствами:

- а) $G_\alpha(z, w) \in C(\bar{D} \setminus \{w\})$, $G_\alpha(w, w) = -\infty$;
- б) $G_\alpha(z, w) < 0$, $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$ и $G_\alpha(z, w)|_{z \in \partial D} = 0$ при фиксированном $w \in \mathbb{C}^n$;
- в) $G_\alpha(z, w)$ является α -субгармонической функцией в D , причём она α -гармоническая при $z \neq w$;
- г) разность $G_\alpha(z, w) - K_\alpha(z, w)$ ограничена в некоторой окрестности точки $w \in D$.

Заметим, что для областей с гладкой границей функция Грина существует.

Рассмотрим теперь класс функций

$$\mathcal{U}(E, D) = \{u \in \alpha\text{-sh}(D) : u|_D \leq 0, u|_E \leq -1\}$$

и положим $\omega(w, E, D) = \sup\{u(w) : u \in \mathcal{U}(E, D)\}$.

Определение 4. Регуляризация

$$\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w \rightarrow z}} \omega(w, E, D)$$

называется α -мерой множества E относительно области D .

Отметим, что α -мера обладает свойством монотонности, т.е. если $E_1 \subset E_2$, то $\omega^*(z, E_1, D) \geq \omega^*(z, E_2, D)$; если $E \subset D_1 \subset D_2$, то $\omega^*(z, E, D_1) \geq \omega^*(z, E, D_2)$. Это свойство следует из того, что $\mathcal{U}(E_1, D) \supset \mathcal{U}(E_2, D)$ и $\mathcal{U}(E, D_1) \supset \mathcal{U}(E, D_2)$.

Теорема 5. $\omega^*(z, U, D) \in \mathcal{U}(U, D)$ для открытых множеств $U \subset D$, и поэтому $\omega^*(z, U, D) \equiv \omega(z, U, D)$.

Теорема 6. Если $U \subset D$ – открытое множество, $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, где

K_j – компакты, $K_j \subset K_{j+1}^0$, K^0 – открытое ядро компакта K , то $\omega^*(z, K_j, D) \downarrow \omega(z, U, D)$.

Если $E \subset D$ произвольное подмножество, то существует последовательность открытых множеств $U_j \supset E$, $U_j \supset U_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots$), такая,

что $\omega^*(z, E, D) = \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \omega(z, U_j, D) \right)^*$.

Следующие два свойства аналогичны свойствам $\mathcal{P}$ -мер теории плюрипотенциала.

1. α -мера $\omega^*(z, E, D)$ либо нигде не равна нулю, либо тождественно равна нулю. $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда E является α -полярным в D .

2. (теорема о двух константах). Если в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z) \in \alpha$ -sh и $u|_D \leq R$, $u|_E \leq r$, ($E \subset D$), то для всех $z \in D$ имеет место неравенство $u(z) \leq R(1 + \omega^*(z, E, D)) - r\omega^*(z, E, D)$.

α -емкость. Пусть множество $E \subset D$ и $\omega^*(z, E, D)$ его α -мера. Величина

$$\alpha(E, D) = - \int_D \omega^*(z, E, D) dV$$

называется α -емкостью множества E относительно D .

Таким образом, α -емкость выражает емкостную величину пары (E, D) . Такая пара обычно называется конденсатором в $\mathbb{C}^n$. Для плюрисубгармонических функций такая емкость была введена А. Садуллаевым. Она была успешно использована в многомерном комплексном анализе, в теории мероморфных функций.

α -емкость обладает следующими свойствами:

1) $\alpha(E, D) \geq 0$ и $\alpha(E, D) = 0$ тогда и только тогда, когда E является α -полярным множеством в D .

2) Величина $\alpha(E, D)$ является возрастающей и счетно-субаддитивной функцией множества: $\alpha(E_1, D) \leq \alpha(E_2, D)$ для $E_1 \subset E_2$ и

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, D\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(E_j, D). \quad (2)$$

Теорема 7. Емкостная величина $\alpha(E, D)$ является непрерывной функцией множества, т.е. для любого множества $E \subset D$ и любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \supset E$ такое, что $\alpha(U, D) - \alpha(E, D) < \varepsilon$.

Теорема 8. Для любой убывающей последовательности компактов $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ имеет место следующая непрерывность справа

$$\alpha\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j, D\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha(K_j, D),$$

если $G_1 \subset G_2 \subset \dots$ последовательность открытых множеств, то

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j, D\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha(G_j, D).$$

(непрерывность слева).

Из теорем 7 и 8 вытекает, что функция множества $\alpha(E, D)$ обладает всеми свойствами измеримости Шоке. Следовательно, любое борелевское множество измеримо по емкости α . Таким образом, если $E \subset D$ борелевское множество, его внутренние и внешние емкости совпадают:

$$\alpha_*(E, D) = \alpha^*(E, D) = \alpha(E, D),$$

где $\alpha_*(E, D) = \sup \{ \alpha(K, D) : K \subset E - \text{компакт} \}$ – внутренняя емкость.

Отметим, что семейство измеримых множеств относительно α – емкости достаточно богатое. Более того, существуют измеримые множества, не являющиеся борелевскими.

В параграфе 2.4 методом Перрона решается задача Дирихле в классе α – sh функций для областей, имеющих пик (α – пик) в каждой граничной точке.

Так как оператор $dd^c u \wedge \alpha$ – эллиптический, то для любой области $O \Subset D$, с гладкой границей ∂O , существует ядро Пуассона $P_\alpha(w, \xi)$, $w \in O$, $\xi \in \partial O$, причем $P_\alpha(w, \xi) \geq 0$ является α – гармонической по w в O и гладкой по ξ на границе ∂O . Имеет место также формула Пуассона: для любой α – гармонической в O , непрерывной в $\bar{O}$ функции $u(z)$ имеет место формула

$$u(w) = \int_{\partial O} P_\alpha(w, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi), \quad w \in O. \quad (3)$$

Для произвольной непрерывной на ∂O функции $\varphi(\xi)$, формула (3) дает нам α – гармоническое продолжение $\varphi(\xi)$ в O . Функция

$$u(w) = \int_{\partial O} P_\alpha(w, \xi) \varphi(\xi) d\sigma(\xi)$$

α – гармоническая в O и совпадает с $\varphi(\xi)$ на ∂O .

Пусть теперь $u \in \alpha$ – sh(D). Положим $\varphi = u|_{\partial O}$. Так как функция $\varphi(\xi)$ полунепрерывна сверху, то существует последовательность монотонно убывающих, непрерывных на ∂O функций $\varphi_j(\xi) \downarrow \varphi(\xi)$. Если мы построим последовательность

$$v_j(w) = \int_{\partial O} P_\alpha(w, \xi) \varphi_j(\xi) d\sigma(\xi),$$

то $v_j(z)$ – гармонична в $O \Subset D$, причем $v_j|_{\partial O} = \varphi_j$. По принципу максимума она монотонно убывает и сходится к некоторой α – гармонической функции $v(z)$, $v_j(z) \downarrow v(z)$, $v|_{\partial O} = \varphi = u|_{\partial O}$.

Функция

$$\psi(z) = \begin{cases} v(z), & \text{при } z \in O \\ u(z), & \text{при } z \in D \setminus O \end{cases} \quad (4)$$

является α – субгармонической функцией в D , причем она гармонична в O .

Рассмотрим теперь произвольную ограниченную область $D \subset \mathbb{C}^n$. Методом Перрона найдем решение следующей задачи Дирихле: для заданной на границе функции $\varphi \in C(\partial D)$ найти α -гармоническую в D , непрерывную в $\bar{D}$ функцию $u(z)$, $u|_{\partial D} = \varphi$. Положим

$$\aleph(\varphi, D) = \{w \in \alpha - sh(D) \cap C(\bar{D}) : w|_{\partial D} \leq \varphi\},$$

$$\omega(z) = \sup \{w(z) : w \in \aleph(\varphi, D)\}. \quad (5)$$

Согласно свойству в) регуляризация $\omega^*(z) = \overline{\lim_{w \rightarrow z}} \omega(w)$ является α -субгармонической функцией в D . Основной теоремой параграфа 2.4 является

Теорема 9. Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ обладает следующими свойствами:

1) в каждой точке $\xi^0 \in \partial D$ имеется пик, т.е. существует

$$b \in \alpha - sh(D) \cap C(\bar{D}) : b(\xi^0) = 0, \quad b(z) < 0, \quad \forall z \in D \setminus \{\xi^0\}.$$

2) для любой непустой окрестности $S \subset \partial D$ α -гармоническая мера $\varpi^*(z, S, D)$ обладает тем свойством, что $\lim_{z \rightarrow S} \varpi^*(z, S, D) = -1$. Здесь $\varpi^*(z, S, D)$ – регуляризация супремума

$$\varpi(z, S, D) = \sup \{u(z) \in \alpha - sh(D) \cap C(\bar{D}) : u|_D < 0, \quad u|_S \leq -1\}.$$

Тогда функция ω , определенная в (5) реализует решение задачи Дирихле, она является α -гармонической в D , непрерывной в $\bar{D}$ и совпадает с $\varphi(\xi)$ на ∂D .

В третьей главе диссертации, названной «**Структура особых множеств некоторых классов m -субгармонических функций**», изучены особые множества m -субгармонических и сильно m -субгармонических функций. Рассмотрены классы $L_{loc}^p(D) \cap m - sh(D \setminus F)$, $L_{loc}^{1,p}(D) \cap m - sh(D \setminus F)$ и для них в терминах специальной емкостной величины $C_{n-s,q}(F)$ доказана возможность устранения особенностей на множестве F . Параграф 3.3 посвящен устранимым особым множествам класса сильно m -субгармонических (sh_m) функций. Этот класс является собственным подклассом класса $m - sh$ функций, $sh_m \subset m - sh$. При изучении особых множеств sh_m функций, мы существенно используем свойства устранимых особых множеств класса α -субгармонических функций (§ 3.2).

Определение 5. Пусть E – компактное множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть

$$\Phi(E) = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi(x) > 1 \text{ при любом } x \in E\}.$$

Назовем $(n-s, q)$ -емкостью множества E число $\gamma_{n-s,q}(E) = \inf \left\{ \|\varphi\|_{q,s} : \varphi \in \Phi(E) \right\}$.

Здесь

$$\|\varphi\|_{q,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x^s \varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = s} \frac{s!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^s \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 \right]^{\frac{q}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Отметим, что существуют константы $0 < A_1 < A_2$, зависящие лишь от n, s и q :

$$A_1 C_{n-s,q}(E) \leq \gamma_{n-s,q}(E) \leq A_2 C_{n-s,q}(E), \quad 1 < q \leq \frac{n}{s}. \quad (6)$$

В параграфе 3.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 10. Пусть $F \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – компакт и $C_{n+m-s,q}(F) = 0$, ($0 < s < m$, $1 < q \leq \frac{m}{s}$). Тогда для почти всех $a \in \mathbb{R}_x^n$ пересечение $F \cap \{x = a\} \subset \mathbb{R}_y^m$ имеет нулевую $(m-s, q)$ -емкость: $C_{m-s,q}(F \cap \{x = a\}) = 0$.

Основными результатами этого параграфа является

Теорема 11. Если для компактного множества F области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, имеет место $C_{2n-2,q}(F) = 0$, $1 \leq q < \infty$, то оно является устранимым для функций $u \in m - sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^p(D)$ при $\frac{m}{m-1} \leq p < +\infty$, где

$$p = \frac{q}{q-1}.$$

Замечание 2. При $m=1$ функция $u \in 1 - sh(D \setminus F)$ будет плюрисубгармонической функцией, а пространство $L_{loc}^p(D) = L_{loc}^\infty(D)$, ибо $p = \infty$. Следовательно, в этом случае мы получим продолжение ограниченных плюрисубгармонических функций на компакты нулевой $C_{2n-2,q}(F)$ – емкости. При $m=n$ функция $u \in n - sh(D \setminus F)$ будет обычной субгармонической функцией и мы получаем теорему доказанную Б.И.Абдуллаевым и С.А.Имомкуловым.

Замечание 3. При $1 < m \leq n$ имеем $\frac{m}{m-1} \leq \frac{n}{n-1}$. Следовательно, условие

$\frac{m}{m-1} \leq p < +\infty$ в теореме 11 сильнее, чем условие $\frac{2n}{2n-2} = \frac{n}{n-1} \leq p < \infty$ в теореме 13 для субгармонических функций. Это естественно, если учесть известный пример У. Сегрела о том, что существует компакт $F \subset \mathbb{C}^n$, который устраним для класса субгармонических функций, но не устраним для класса плюрисубгармонических функций.

Теорема 12. Если для компактного множества F области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, имеет место $C_{2n-1,q}(F) = 0$, $1 \leq q < \infty$, то оно является устранимым для функций $u \in m - sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{1,p}(D)$ при $\frac{2m}{2m-1} \leq p < +\infty$,

$$p = \frac{q}{q-1}.$$

В этих теоремах $L_{loc}^p(D)$ обозначает класс локально суммируемых со степенью p функций, а $L_{loc}^{1,p}(D)$ класс функций, имеющих производные первого порядка, принадлежащих классу функций $L_{loc}^p(D)$.

Замечание 4. Применяя эту теорему для $m=1$ (плюрисубгармонические функции) мы получим, что если $C_{2n-1,q}(F)=0, 1 \leq q < \infty$, то F является устранимым множеством для класса $m-sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{1,p}(D)$, $2 \leq p < +\infty$, $p = \frac{q}{q-1}$. При $m=n$ (субгармонические функции) мы получим теорему, доказанную Б.И.Абдуллаевым и С.А.Имомкуловым.

Замечание 5. При $1 < p < \frac{n}{n-2}$ можно построить компакт $F \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $C_{n-2,q}(F)=0$, но существует функция $u(x) \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$, гармоническая в $\mathbb{R}^n \setminus F$, причем она не продолжающаяся в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 6. При $1 < p < \frac{n}{n-1}$ можно построить компакт $F \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $C_{n-1,q}(F)=0$, но существует функция $u(x) \in L_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, гармоническая в $\mathbb{R}^n \setminus F$, причем она не продолжающаяся в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что в отличие от субгармонических функций (случай $m=n$) для m -субгармонических функций при $(m < n)$ единый критерий устранимых множеств получить не возможно, ибо рассматриваемые нами критерии не учитывают комплексную структуру, а в определении m -субгармонических функций участвует комплексная структура. Далее, в пространстве $\mathbb{C}^n$ существует компакт $K \subset \mathbb{C}^n$, который является устранимым множеством в классе плюрисубгармонических функций (случай $m=1$), но не является устранимым для субгармонических функций. Этот компакт не удовлетворяет даже критерий устранимых множеств класса субгармонических функций.

Замечание 7. Класс $L_{loc}^{2,p}$ характеризуется тем, что функции класса $L_{loc}^{2,p}$ имеют производные до второго порядка, причем вторые производные принадлежат классу L_{loc}^p . Следовательно, при $p \geq 1$, замкнутое множество $F \subset D$, $mes F = 0$ является устранимым особым множеством для $m-sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{2,p}$. Если же $u \in m-sh(D \setminus F) \cap C^2(D)$, то нигде неплотное, множество $F \subset D$ является устранимым для u . Поэтому случаи $u \in m-sh(D \setminus F) \cap L_{loc}^{2,p}$ и $u \in m-sh(D \setminus F) \cap C^2(D)$ являются тривиальными и мы на них специально останавливаться не будем.

В параграфе 3.2 доказывается следующая основная теоремы об устранимых особенностях α -субгармонических функций.

Теорема 13. Пусть E компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Множество E устранимо для всех α -субгармонических в $D \setminus E$,

локально ограниченных сверху в D функций, тогда и только тогда, когда E α -полярно.

Теорема 14. Пусть E компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Множество E устранимо для всех α -субгармонических в $D \setminus E$ функций $u(z)$ из класса $L_{loc}^p(D)$, $\frac{2n}{2n-2} \leq p < +\infty$, тогда и только тогда, когда ёмкость $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Теорема 15. Пусть E компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Множество E устранимо для всех α -субгармонических в $D \setminus E$ функций $u(z)$ из класса $L_{loc}^{1,p}(D)$, $\frac{2n}{2n-1} \leq p < +\infty$, тогда и только тогда, когда ёмкость $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Следствие 1. Пусть E множество из области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Всякая α -гармоническая в $D \setminus E$ функция $u(z)$ из класса $L_{loc}^p(D)$, $\frac{2n}{2n-2} \leq p < +\infty$, α -гармонически продолжается в D тогда и только тогда, когда ёмкость $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Следствие 2. Пусть E компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Множество E устранимо для всех α -гармонических в $D \setminus E$ функций $u(z)$ из класса $L_{loc}^{1,p}(D)$, $\frac{2n}{2n-1} \leq p < +\infty$, тогда и только тогда, когда ёмкость $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.

В параграфе 3.3 доказано устранимость замкнутого полярного множества для класса ограниченных сверху сильно m -субгармонических (sh_m) функций.

m -полярное замкнутое множество $E \subset D$ является устранимым особым множеством для локально ограниченных сверху sh_m функций, т.е. если $u(z)$ -локально ограниченная сверху в D , sh_m в $D \setminus E$ функция, то u продолжается в D как sh_m функция. Это означает, что существует $\tilde{u}(z) \in sh_m(D)$: $\tilde{u}(z) = u(z)$, $\forall z \in D \setminus E$.

В самом деле, так как множество $E \subset D$ m -полярное, то существует $v(z) \in sh_m(D)$: $v(z) \not\equiv -\infty$, $v|_E = -\infty$. Семейство функций $u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon v(z)$, $\varepsilon > 0$, является sh_m в D , ибо $u_\varepsilon(z) \in sh_m(D \setminus E)$ и так как $u_\varepsilon(z) = -\infty$, $\forall z \in E$, то $u_\varepsilon(z)$ является sh_m функцией в точках E . Кроме того это семейство локально ограничено сверху в D .

Следовательно, регуляризация $\tilde{u}^*(z)$ предела $\tilde{u}(z) = \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}} u_\varepsilon(z)$ является sh_m функцией в D , причем $\tilde{u}^*(z) = u(z)$ для всех $z \in D: v(z) \neq -\infty$. Отсюда легко вытекает тождество $\tilde{u}^*(z) \equiv u(z)$, $z \in D \setminus E$, т.е. функция $u(z)$ сильно m -субгармонична продолжается в D .

В частности, плюриполярное замкнутое множество $E \subset D$ является устранимым для локально ограниченных сверху psh функций. П.Лелон используя полярности образов полярных множеств при линейных отображениях доказал, что полярное замкнутое множество $E \subset D$ также является устранимым множеством для локально ограниченных, psh функций. Ниже мы докажем аналог этой теоремы для sh_m функций.

Теорема 16. Замкнутое полярное подмножество $E \subset D$ является устранимым особым множеством для локально ограниченных сверху sh_m функций, т.е. если $u(z) \in sh_m(D \setminus E) \cap L_{loc}^\infty(D)$, то $u(z)$ продолжается в D как sh_m функция.

Автор выражает глубокую благодарность академику А.Садуллаеву и профессору С.А.Имомкулову за многократные обсуждения результатов и за ценные советы при завершении этой диссертации, научному руководителю, доктору физико-математических наук Б.И.Абдуллаеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению устранимых особых множеств классов m -субгармонических, сильно m -субгармонических и α -субгармонических функций.

Основные результаты исследования состоят из следующих:

1. Доказаны свойства α -субгармонических функций, дано более удобное определение α -субгармонических функций;
2. Доказана глобальная α -полярность локально α -полярных множеств;
3. Решена задача Дирихле в классе α -субгармонических функций;
4. Описана структура особых множеств m -субгармонических функций из классов L_{loc}^p и $L_{loc}^{1,p}$, в терминах $(n-s, q)$ -ёмкость;
5. Изучены устранимые особенности α -субгармонических функций;
6. Доказана устранимость замкнутого полярного множества для класса ограниченных сверху сильно m -субгармонических функций.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении цели исследования диссертации.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE
PhD.28.12.2017.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY AND
KARAKALPAK STATE UNIVERSITY
URGENCH STATE UNIVERSITY**

SHARIPOV RASULBEK AXMEDOVICH

SINGULAR SETS OF m – SUBHARMONIC FUNCTIONS

01.01.01 – Mathematical Analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATEMATICAL SCIENCES**

Urgench – 2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.FM332.

Dissertation has been prepared at Urgench State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english(resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the «Ziyonet» information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:

Abdullaev Bakhrom Ismoilovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Official opponents:

Khudaiberganov Gulmirza

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Kurbanov Bukharbai Turganbaevich

Candidat of Physical and Mathematical Sciences

Leading organization:

Karshi State University

Defense will take place 16th of December 2019 at 14⁰⁰ at the meeting of Scientific Council number PhD.28.12.2017.FM.55.01 at Urgench State University. (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862)224-66-11, fax: (99862)224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Urgench state University (is registered № Д-230) (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862) 224-66-11, fax: (99862)224-67-00, e-mail: ursubox@gmail.com).

Abstract of dissertation sent out on «____» _____ 2019 year

(Mailing report № _____ on «____» _____ 2019 year)

G.U.Urazboyev

Vice-Chairman of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.A. Atamuratov

Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, Candidate of Physical and Mathematical Sciences

A.B. Yakhshimuratov

Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work consists of describing geometrical structures of singular sets of classes of m -subharmonic and α -subharmonic functions, proving the globally α -polarity of locally α -polar sets and solving Dirichlet problem in a class of α -subharmonic functions.

The object of the research work is m -subharmonic and strongly m -subharmonic functions, m -polar sets, α -subharmonic functions, α -polar sets and α -capacity.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

the properties of α -subharmonic functions are proved and it is determined more convenient definition of α -subharmonic functions;

it is proved that local α -polar set is a global α -polar set;

the Dirichlet problem in a class of α -subharmonic functions is solved;

the structures of removable singular sets of m -subharmonic functions of the classes L_{loc}^p and $L_{loc}^{1,p}$ are described in terms of $(n-s, q)$ -capacity;

it is proved that an α -polar set is removable singularity set for the bounded above α -subharmonic functions;

it is proved that a polar set is removable singular set for the class of bounded above strongly m -subharmonic functions.

Implementation of the research results. Obtained results in the thesis have been used in following research projects:

Results on removable singularity sets of m -subharmonic functions have been used in the applications of Non-linear Potential Theory in Kähler Geometry (Institute of Mathematics of Toulouse, France, confirmation letter from November 8, 2019). The developed methods and the obtained results have been essentially used in the observations of canonical metrics on singular Kähler spaces and implementation of results gave the opportunity to prove existence of this type metrics.

The result on removability of polar sets for the bounded above strongly m -subharmonic functions has been applied in project $\Phi 4\text{-}\Phi A\text{-}0\text{-}16928$ «Properties of pluriregularity in a complex potential theory and differential-difference equations with the modified sources» (Reference of the Academy of Sciences of Republic Uzbekistan date 21.11.2019). Application of results gave the opportunity to find the pluripolar hulls of the compact sets in complex spaces.

The structure and volume of the thesis. The doctoral thesis consists of introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 80 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Садуллаев А., Абдуллаев Б., Шарипов Р. Устранимые особенности ограниченных сверху $m-sh$ функций.// Узбекский математический журнал, – Ташкент, 2016, – №3, – С. 118–124. (01.00.00; №6)
2. Абдуллаев Б.И., Имомкулов С.А., Шарипов Р.А. Об одном геометрическом свойстве $(n-s, q)$ -емкости. // Илм сарчашмалари. – Ургенч, 2018, – №3, – С. 7–10. (01.00.00, №12)
3. Abdullaev B.I., Imomkulov S.A., Sharipov R.A. Removable singular sets of m -subharmonic functions.// Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory, Springer Proceedings in Mathematics&Statistics. V.264, 2018, – pp.1–11. (№3, Scopus. IF=0.31)
4. Шарипов Р.А., Бекчанов С.Э. Устранимые особенности α -субгармонических функций из классов L_p и L_p^1 . // Илм сарчашмалари. – Ургенч, 2019, – №5, – С. 3–7. (01.00.00, №12)
5. Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А. Локально и глобально α -полярные множества.// Бюллетень Института математики, – Ташкент, 2019, – №5, – С. 4–8. (01.00.00, ОАК Раёсатининг 2019 йил 28 мартдаги 263/7.1-сон қарори)
6. Шарипов Р.А. Задача Дирихле в классе α -субгармонических функций.// Илм сарчашмалари. – Ургенч, 2019, – №6, – С. 12–16. (01.00.00, №12)
7. Шарипов Р.А. $\mathcal{P}$ -мера и $\mathcal{P}$ -ёмкость в классе α -субгармонических функций. // Доклады Академии наук Республики, – Ташкент, 2019, – №3, – С. 11–15. (01.00.00, №7)

II бўлим (Часть II; Part II)

8. Садуллаев А., Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А. Устранимые особенности ограниченных сверху $m-sh$ функций./ Материалы республиканской научной конференции «Актуальные вопросы анализа» 22-23 апреля 2016 года, г. – Карши, 2016. – С. 3–4.
9. Abdullaev B.I., Sharipov R.A. Removable singularities of m -subharmonic functions./ Abstracts of the Uzbek-Israel Conference “Contemporary Problems in Mathematics and Physics” 6-10 october 2017, – Tashkent, 2017. – pp. 5–6.
10. Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А. Устранимые особенности m -субгармонических функций./ Материалы республиканской научной конференции “Хоразм Маъмун Академиясининг ривожланиш истикболлари” 11 ноября 2017 года, – Хива, 2017. – С. 9–11.

11. Шарипов Р.А. $\mathcal{P}$ – мера и $\mathcal{P}$ – емкость в классе α – субгармонических функций./ Тезисы республиканской научной конференции «Проблемы и приложения фундаментальной математики» 25 мая 2019 года, – Навои, 2019. – С. 159–162.
12. Шарипов Р.А., Бекчанов С.Э. Устранимые особенности α – субгармонических функций из классов L_p и L_p^1 ./ Тезисы республиканской научной конференции «Проблемы и приложения фундаментальной математики» 25 мая 2019 года, – Навои, 2019. – С. 157–159.
13. Абдуллаев Б. И., Шарипов Р.А. Локально и глобально α – полярные множества./ Материалы республиканской научной конференции «Актуальные проблемы и применения анализа» 4-5 октября 2019 года, – Карши, 2019. – С.11–12.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(27.11.2019 й.).

\

Босишга рухсат этилди: 28.11.2019.
Офсет қоғози. Қоғоз бичими $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
«Times New Roman» гарнитурда рақамли
босма усулида босилди. Адади 100. Буюртма № 60.
Шартли босма табағи 2.
УрДУ босмахонасида чоп қилинди.
Манзил: 220110. Урганч шаҳри,
Х. Олимжон кўчаси, 14-уй.
Телефон: (0-362)-224-66-01.