МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра «Менеджмент качаства продуции»

Обучающая технология лекционных занятий

*По курсу "*Организация и планирование эксперимента*"*

Ташкент – 2018

“Экспериментни режалаштириш ва ташкиллаштириш” фанидан ўқув-услубий қўлланма. – Тошкент: ТКТИ. – 2018.

Тузувчилар: доц.Акбархўжаев З.А., проф.Матякубова Ф.М., доц.Алимбаев С.А., асс.Аннамуродов С.Ж.,

Мазкур ўқув-услубий қўлланма “Экспериментни режалаштириш ва ташкиллаштириш” фанидан намунавий дастур, ишчи ўқув дастури, маъруза машғулотларининг таълим технологияси ва технологик харитаси, маъруза слайдлари, маърузалар матни, амалий машғулотларнинг таълим технологияси ва технологик харитаси, амалий машғулотлар учун услубий кўрсатмалар, назорат турлари учун тайёрланган топшириқлар вариантлари, тест саволлари, фандан умумий назорат саволлари ва глоссарий (изоҳли луғат) жамланган.

Ушбу ўқув-услубий мажмуа техника олий ўқув юртлари “Метрология, стандартлаштириш ва маҳсулот сифати менежменти (МСМСМ)” таьлим йўналишининг педагог-ўқитувчилари учун тавсия этилади. Шу билан бирга ўқув-услубий мажмуадан илмий ходимлар, катта илмий ходим ва мустақил тадқиқотчилар ҳамда “Экспериментни режалаштириш ва ташкиллаштириш” фанига қизиқувчилар фойдаланишлари мумкин.

Ўқув-услубий қўллқнма “Маҳсулот сифати менежменти” кафедраси мажлисида (2018 йил “__” _______ №__-сон баённома) муҳокама этилди ва факультетнинг ўқув-услубий кенгашига тавсия этилди.

Кафедра мудири _______________ доц.Алимбаев С.А.

Ўқув-услубий қўлланма “Менежмент ва касб таълими” факултетининг ўқув-услубий кенгашида кўриб чиқилди (2018 йил “___” ________ №__-сон баённома) ва институтнинг Илмий-услубий кенгашига тасдиқлашга топширилди.

Ўқув-услубий кенгаш раиси _______________ проф. Ҳамроқулов Ғ.

Ўқув-услубий мажмуа Тошкент кимё-технология институти Илмий-услубий кенгашининг 2018 йил “___” _________даги №___-сонли қарорига мувофиқ ўқув жараёнига татбиқ этиш учун тавсия этилган.

Илмий-услубий кенгаш котиби _______________

Обучающая технология лекционных занятий по предмету «Организация и планирование эксперимента»

Вид учебных занятий	План лекционных занятий
Лекционные занятия	Лекция 1. Основные понятия планирования эксперимента Лекция 2 Выди и типы экспериментов Лекция 3 Рандомизированные планы эксперимента Лекция 4 Латинские квадраты Лекция 5 Выбор уровней факторов для эксперимента Лекция 6 Измерения и выбор отклика Лекция 7 Факторный эксперимент Лекция 8 Полный факторный эксперимента типа Лекция 9 Анализ факторов математических моделей Лекция 10 Разработка плана экстремального эксперимента Лекция 11 Основые понятия обработки результатов измерений Лекция 12 Задача обработка результатов эксперимента Лекция 13 Определение средного и дисперсионного анализа Лекция 14 Методы регрессивного анализа Лекция 15 Методы коллеряционного анализа Лекция 16 Интерполяция Лекция 17 Метод наименьших квадратов Лекция 18 Обработка и выбор имперической формулы Лекция 19 Подготовка отчета по научной работе Лекция 20 Подготовка научных материалов к опубликованию

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-1)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения по дисциплине	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Что такое планирование эксперимента 2. Задачи, в которых используется планирование эксперимента 3. Понятия об объектах исследования 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятия об эксперименте 2. Основные сведения о планировании эксперимента	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Новые сведения о планировании эксперимента 2. Сбор информации о планировании различных экспериментов Заключение лекции Студенты получили полные сведения о планировании и обработке результатов эксперимента	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-2)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения по дисциплине	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Роль эксперимента в науке и технике 2. Общие вопросы понятия эксперимента 3. Основные виды экспериментов 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. О роль планирование эксперимента 2. Основные виды экспериментов 3. Значение измерительных устройств и их роль в народном хозяйстве	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 1. Новые сведения о видах экспериментов 2. Сбор информации о планировании различных экспериментов Заключение лекции Студенты получили основные сведения о видах экспериментов и их планировании	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-3)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о рандолизированые планы	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Типы планов эксперимента 2. Классические планы 3. О рандолизированном плане эксперимента 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятие о классических планах 2. Основы рандолизированном планов эксперимента	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 1. Сведения о классических планах эксперимента 2. О рандолизированным планах эксперимента Заключение лекции Студенты получили понятия о классических и рандолизированных планах экспериментов	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-4)

<table>
<tr><td rowspan="2">Период</td><td colspan="2">Содержание деятельности</td></tr>
<tr><td>Преподаватель</td><td>Студенты</td></tr>
<tr><td>Период (Введение) (5 минут)</td><td>1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о латинских квадратах</td><td>Слушают и записывают</td></tr>
<tr><td>Период основной (65 минут)</td><td>2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос.
1. Общие вопросы латинских квадратов
2. Ограничения латинских квадратов
3. Применение латинских квадратов при планировании экспериментов
2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие
1. Понятие о латинских квадратах
2. Возможности латинские квадратов</td><td>Студены дают ответ

Думают и отвечают
Думают и отвечают

Студенты слушают и записывают материал</td></tr>
<tr><td>3-период заключительный (10 минут)</td><td>3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы.
3.2. Задание для самостоятельной работы.
1. Новые сведения о латинских квадратах
2. Примеры применения латинских квадратов в различным экспериментам
Заключение лекции
Студенты получили полные сведения о латинских квадратах при планировании эксперимента</td><td>Слушают и задают вопросы для разъяснения.</td></tr>
</table>

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-5)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о выборе уровней факторов в эксперименте	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Общие вопросы факторов 2. Определение фактора 3. Требования к факторам 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятия о факторах 2. Основные требования к факторам	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Основные и дополнительные требования к факторам 2. Точность определения фактора Заключение лекции Студенты получили полные сведения об факторах и их выборе при проведении экспериментов	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-6)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о выборе обобщенного отклика	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Общие вопросы выбора отлика 2. Способы выбора обобщенного отклика 3. Шкала желательности 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятия об измерении и выборе отклика в эксперименте 2. Способы выбора отклика в эксперименте	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Новые сведения о выборе обобщенного отклика 2. О шкалах желательности Заключение лекции Студенты получили полные сведения о способах выбора обобщенного отклика в экспериментах	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-7)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о факторном эксперименте	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Общие вопросы факторного эксперимента 2. Принятие решений при планировании эксперимента 3. Выбор факторов 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Выбор основного уровня фактора 2. Выбор интервалов ваьпрования	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1.Новые сведения о факторном эксперименте 2. Сбор информации о факторном эксперименте Заключение лекции Студенты получили польные сведения о факторном эксперименте	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-8)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о факторном эксперименте	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Общие вопросы факторного эксперимента типа 2к 2. О матрицах планирования экспериментов 3. Пример матрицы планирования эксперименте типа 22 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятие о факторном эксперименте типа 2к 2. Понятия о матрицах планирования эксперимента типа 2к	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1.Новые сведения о факторном эксперименте типа 2к 2.Сведения о матрицах планированирования Заключение лекции Студенты получили полные сведения о полном факторном эксперименте	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-9)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о математических моделях	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Общие вопросы выбора математических моделей 2. Геометрические образы определения факторов 3. Шаговый принцип определения фактора 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятие о математических моделях 2. Вопросы выбора математических моделей	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор сведений о математических моделях 2. Анализ вопросов выбора математических моделей при обработке результатов эксперименте Заключение лекции Студенты получили польные сведения о выборе математических моделей для обработки результатов эксперимента	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-10)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о планы экспериментальных экспериментов	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Понятие параметра оптимизации 2. Виды параметров оптимизации 3. Основные требования к параметрам оптимизации 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занят 1. Понятие об параметре оптимизации 2. Виды параметров оптимизации	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Новые сведения об экстремальных экспериментах 2. Сведения от параметрах оптимизации Заключение лекции Студенты получили полные сведения о разработке планов экстремального эксперимента	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-11)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и обработке результатов измерений	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. О цели измерений 2. Об априорной информации при измерениях 3. О выборе средств измерений для эксперимента 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятие об априорной информации об объекте измерения 2. О выборе средств измерений для эксперимента	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор сведений от обработке результатов измерений 2. О выборе средств измерений для эксперимента Заключение лекции 1. Студенты освоили основные понятия обработки результатов измерений	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-12)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения о задачах обработки результатов эксперимента	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Общие задачи обработки результатов эксперимента 2. Обработка результатов физических процессов 3. Подбор математических моделей 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятия о задачах обработки результатов эксперимента 2. О выборе математических моделей	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор сведений об обработке результатов эксперимента 2. О выборе математических моделей для обработки результатов эксперимента Заключение лекции, Студенты освоили основные задачи обработки результатов эксперимента	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-13)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий о задачах дисперсионного анализа	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Средние значения величин 2. Задачи дисперсионного анализа 3. Пример дисперсионного анализа 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятия о среднем значении величин 2. Основы дисперсионного анализа	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор сведений о дисперсионном анализе 2. Применение дисперсионного анализа при обработке результатов эксперимента Заключение лекции Студенты освоили основные понятия среднего и дисперсионного анализа	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-14)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения о методах регрессионного анализа	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Основные вопросы регрессионного анализа 2. Математическая модель объекта 3. Основы регрессионного анализа 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятия о регрессионном анализе 2. Понятия об обобщенной математической модели процесса или объекта	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор сведений об регрессионном анализе 2. Сбор информации об применений регрессионного анализа Заключение лекции Студенты освоили основные понятия регрессионного анализа	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-15)

<table>
<tr><td rowspan="2">Период</td><td colspan="2">Содержание деятельности</td></tr>
<tr><td>Преподаватель</td><td>Студенты</td></tr>
<tr><td>Период
(Введение)
(5 минут)</td><td>1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами о корреляционном анализа</td><td>Слушают и записывают</td></tr>
<tr><td>Период основной
(65 минут)</td><td>2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос.
1. Общие вопросы корреляционного анализа
2. Метод корреляции
3. О множественной корреляции
2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие
1. Понятие корреляционного анализа
2. О методе множественной корреляции</td><td>Студены дают ответ

Думают и отвечают
Думают и отвечают

Студенты слушают и записывают материал</td></tr>
<tr><td>3-период заключительный (10 минут)</td><td>3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы
3.2. Задание для самостоятельной работы.
1. Сбор сведений о корреляционном анализе
2. Сбор сведений о множественной корреляции
Заключение лекции
Студенты освоили основные сведения об корреляционном анализе</td><td>Слушают и задают вопросы для разъяснения.</td></tr>
</table>

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-16)

<table>
<tr><td rowspan="2">Период</td><td colspan="2">Содержание деятельности</td></tr>
<tr><td>Преподаватель</td><td>Студенты</td></tr>
<tr><td>Период (Введение) (5 минут)</td><td>1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения по дисциплине об интерполяции</td><td>Слушают и записывают</td></tr>
<tr><td>Период основной (65 минут)</td><td>2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос.
1. Пораболическая интерполяция
2. Интерполяционный многочлены
3. О недостатках пораболическиой интерполяции
2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие
1. Понятие интерполяции
2. Пораболическая интерполяция</td><td>Студены дают ответ

Думают и отвечают
Думают и отвечают

Студенты слушают и записывают материал</td></tr>
<tr><td>3-период заключительный (10 минут)</td><td>3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы
3.2. Задание для самостоятельной работы.
1. Сбор сведений об интерполяции
2. Применение интерполяции при обработке результатов эксперимента
Заключение лекции
Студенты получили полные сведения об интерполяции</td><td>Слушают и задают вопросы для разъяснения.</td></tr>
</table>

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-17)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения по дисциплине о методе наименьших квадратов	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Постановка задачи отыскания параметров 2. Выбор эмпирических формул 3. Определение параметров и оценок 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятие о методе наименьших квадратов 2. Выбор эмпирических формул	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор материалов о методе наименьших квадратов 2. О выборе эмпирических формул Заключение лекции Студенты получили основные сведения о методе наименьших квадратов	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-18)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения по дисциплине об обработке и выборе формулы	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Выбор эмпирических формул 2. Анализ степенной и показательный функций 3. Сглаживание эмпирических данных 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Понятие об эмпирической формуле 2. Сглаживание эмпирических данных	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор данных об обработке данных 2. Сбор данных об эмпирических формулах Заключение лекции Студенты освоили методику выбора эмпирических формул при обработке результатов эксперимента	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-19)

Период	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студенты
Период (Введение) (5 минут)	1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения по дисциплине о подготовке научного отчета	Слушают и записывают
Период основной (65 минут)	2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос. 1. Оформление отчетов о научных исследование 2. Требования к оформлению научных материалов 3. Оформление приложений 2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие 1. Сведения об оформлении отчета по научной работе 2. Оформление приложения	Студены дают ответ Думают и отвечают Думают и отвечают Студенты слушают и записывают материал
3-период заключительный (10 минут)	3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы 3.2. Задание для самостоятельной работы. 1. Сбор материалов по оформлению научной работы 2. Сбор материалов о требованиях к оформлении научных работ Заключение лекции Студенты ознакомились и освоили основные требования оформлению научных работ	Слушают и задают вопросы для разъяснения.

Технологическая карта лекционного занятия

(Лекция-20)

<table>
<tr><td rowspan="2">Период</td><td colspan="2">Содержание деятельности</td></tr>
<tr><td>Преподаватель</td><td>Студенты</td></tr>
<tr><td>Период (Введение) (5 минут)</td><td>1.1. Ознакомление с содержанием лекционных занятий и итогами обучения о подготовке научных материалов к опубликованию</td><td>Слушают и записывают</td></tr>
<tr><td>Период основной (65 минут)</td><td>2.1. Для определения степени готовности студентов проводится беглый опрос.
1. Виды публикаций научных материалов
2. Подготовка научных материалов к опубликованию
3. Основные требования к оформлению научных материалов
2. Исторический обзор элементов измерительных устройств
2.2. Преподаватель показывает визуальный материал и продолжает лекционные занятие
1. Основные требования к научным материалам
2. Подготовка научных материалов к опубликованию</td><td>Студены дают ответ

Думают и отвечают
Думают и отвечают

Студенты слушают и записывают материал</td></tr>
<tr><td>3-период заключительный (10 минут)</td><td>3.1 .Преподаватель, подводя лекционное занятие к концу, обращает внимание студентов на основные вопросы. Активные студенты задают вопросы
1. Сбор сведений о требованиях к научным материалам
2. Сбор информации о подготовке научных материалов к опубликованию
Заключение лекции
Студенты ознакомились с основными видами публикации и подготовка научных материалов к опубликований</td><td>Слушают и задают вопросы для разъяснения.</td></tr>
</table>

4. СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Задача 1. По методике обобщенной оценки качества агентства «Узстандарта» проверить соответствие качества электроламп нормативу. Средняя продолжительность горения электроламп определенной мощности, изготовленных предприятием - 420 часов.
Нормативное значение ресурса электролампы - 450 часов. Коэффициент полезного действия имеет нормативное значение 20 лм/Вт, а фактический коэффициент - 19 лм/Вт.
Решение.

$$Kсв = \frac{420}{450} * \frac{19}{20} = 0{,}887$$

Сводный коэффициент качества равен 0,887 (Уровень норматива – 1 или 100%). Таким образом, фактический уровень качества производимых электроламп на 11,3% ниже нормативного.
Задача 2. Имеются данные об уровнях качества однотипных автоматических стиральных машин, изготовленных фирмами "Веста" ("Вятка-Алёнка") и "Аристон" по паспортным данным.
Дать сравнительную оценку уровней качества стиральных машин, если определенные экспертным путем коэффициенты весомости каждого фактора составляют соответственно 0,31, 0,29, 0,03, 0,07, 0,3.

Исходные данные для сравнения

Показатель качества стиральной машины	Единицы измерения	"Алёнка"	"Аристон"
1	2	3	4
Расход воды на цикл основной стирки	л	90	85
Номинальная загрузка сухого белья	кг	4	3,5
Время самого продолжительного цикла стирки при 90 0С при заливке только холодной воды	мин	100	120
Потребляемая мощность	Вт	2200	2400
Гарантийный срок годности	год	3,5	5

Решение. С целью определения относительного уровня качества стиральных машин рассчитывается сводный коэффициент качества по методике с использованием среднего арифметического взвешенного критерия (1.6).
При расчете частных коэффициентов учитывается также характер показателей. Для "позитивных" показателей, с увеличением значений которых качество повышается, выбирают формулу (1.3), а для "негативных" показателей, с увеличением значений которых качество продукции снижается, используют обратную формулу

$$\hat{E}\tilde{n}\hat{a} = \frac{90}{85} * 0{,}31 + \frac{3{,}5}{4} * 0{,}29 + \frac{100}{120} * 0{,}03 + \frac{2200}{2400} * 0{,}07 + \frac{5}{3{,}5} * 0{,}3 = 1{,}04.$$

Относительный уровень качества автоматической стиральной машины марки "Аристон" на 4 % выше уровня качества автоматической стиральной машины марки "Вятка-Алёнка".

Задача 3. Имеются данные о результатах измерений концентрируемых параметров технологического процесса в течение рабочей смены.

Исходные данные для расчета

Показатель	Номер замера			
	1	2	3	4
Давление, кПа	103	100	98	101
Кислотность среды	5,4	6,0	6,0	6,6

По технологическому регламенту нормативные значения составляют: давление – 100 кПа, кислотность – 6,0.
Определить методом относительных линейных оценок сводный относительный показатель неустойчивости технологического процесса.

Решение

$$Кн = 0{,}13 + 0 + 0{,}02 + 0{,}11 = 0{,}26.$$

Нестабильность технологического процесса характеризуется отклонением от регламента на 26 %.

Расчетные данные

Номер замера	Давление	Кислотность	Сумма относительных отклонений
1	0,03	0,1	0,13
2	0	0	0
3	0,02	0	0,01
4	0,01	0,1	0,11

Задача 4. Определить комплексный показатель качества - эксплуатационную надежность ($\overline{Q}_{эн}$) товара по сравнению с базовым образцом. Если частные показатели качества исследуемого образца (долговечность, безотказность, ремонтопригодность) по отношению к базовому образцу составили следующие значения:

Частный показатель качества	Значение показателя качества (q_i)	Весовые коэффициенты показателей качества (w_i)

Долговечность	0,9	0,3
Безотказность	0,7	0,4
Ремонтопригодность	1,0	0,3

Решение. При оценке качества исследуемого образца используем способ образования комплексных показателей по принципу среднего взвешенного ($\sum_{1}^{3} w_i = 1$):

$$\overline{Q}_{ЭН} = \prod_{i=1}^{n} q_i^{w_i} = 0{,}9^{0{,}3} \times 0{,}7^{0{,}4} \times 1{,}0^{0{,}3} = 0{,}907$$

Уровень качества исследуемого товара по эксплуатационной надежности ниже базового образца на 9,3 %.

Определим этот комплексный показатель и по другим формулам:

$$\overline{Q}_{ЭН} = \sum_{i=1}^{n} q_i \times w_i = 0{,}9 \times 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}4 + 1{,}0 \times 0{,}3 = 0{,}850;$$

$$\overline{Q}_{ЭН} = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 \times w_i = \sqrt{0{,}9^2 \times 0{,}3 + 0{,}7^2 \times 0{,}4 + 1{,}0^2 \times 0{,}3} = 0{,}859;$$

$$\overline{Q}_{ЭН} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{q_i}} = \frac{1}{\frac{0{,}3}{0{,}9} + \frac{0{,}4}{0{,}7} + \frac{0{,}3}{1{,}0}} = 0{,}830.$$

ЗАДАЧИ

Задача 1.1. Дано:

Показатель качества электроламп	Ед. изм.	Уровень качества	
		лучшего образца	фактический
1. Ресурс	час	1000	950
2. Светоотдача	лм/Вт	20	22

По методу В.А. Трапезникова рассчитать частные показатели и сводный коэффициент качества электроламп.

Задача 1.2. По данным предыдущей задачи оценить уровень качества электрических ламп, если с учетом фактических условий эксплуатации и других экономических соображений потребитель требует учесть тот факт, что для него долговечность (срок службы) в три раза важнее, чем их экономичность (светоотдача).

Задача 1.3. Имеются следующие данные об уровнях показателей качества однотипных измерительных приборов, изготовленных заводами отрасли:

Показатель	Завод	
	№1	№2
1. Срок службы, час	620	700
2. Относительная погрешность измерений, %	±6	±8

Определить сводную сравнительную оценку уровня качества приборов, изготовленных заводом 2, по сравнению с уровнем качества приборов, изготовленных заводом 1, с помощью коэффициентов качества Трапезникова В.А.

Задача 1.4. Определите сводный коэффициент изменения уровня качества концентрата в отчетном году по сравнению с предыдущим годом, если имеются следующие данные об уровнях показателей качества продукции (концентрата) углеобогатительной фабрики (%):

Показатель	Предыдущий год	Отчетный год
1. Средняя зольность	7,1	6,9
2. Средняя влажность	11,0	10,0
3. Среднее содержание серы	2,3	2,1

Задача 1.5. Имеются следующие данные о результатах измерений контролируемых параметров технологического процесса в течение рабочей смены:

Номер замера	1	2	3	4
Давление, кПа	103	100	98	101
Кислотность среды, водородные единицы (pH)	5,4	6,0	6,0	6,6

По техническому регламенту нормативные значения параметров составляют: по давлению - 100 кПа, а по кислотности - 6,0 pH.

Определить методом относительных линейных оценок сводный относительный показатель неустойчивости технологического процесса.

Задача 1.6. Имеются следующие данные по контролю технологического процесса за смену:

Номер замера	1	2	3	4	5	6	7	8
Диаметр заготовки, см	10	11	10	12	11	12	10	11
Масса цинкового покрытия, м2	1,5	1,6	1,5	1,6	1,5	1,6	1,5	1,6

Допустимые значения для диаметра заготовки установлены 11±1см и для массы цинкового покрытия - 1,5±0,1 мг.

Определите методом относительных линейных оценок допустимый и фактический сводный показатель неустойчивости технологического процесса.

Задача 1.7. Имеются следующие сведения о качестве производимого заводом дизельного топлива:

Показатель	По техническим условиям	Фактически
1. Теплотворная способность, кДж	41868,00	43124,04
2. Содержание серы, %	2,0	1,6

Определите методом относительных линейных оценок сводный показатель уровня качества дизельного топлива по сравнению с техническими условиями.

Задача 1.8. Имеются следующие данные о качестве добываемого шахтой угля:

Показатель	По техническим условиям	Фактически
1. Теплотворная способность, кДж	20930,0	21562,1
2. Зольность, %	20,0	16,0

Определить методом относительных линейных оценок сводный показатель уровня качества добываемого угля по сравнению с техническими условиями с учетом значимости отдельных показателей качества для потребителей, которые считают теплотворную способность в три раза более важной оценкой качества угля, чем процентное содержание золы.

Задача 1.9. Дано:

Показатель качества станка-качалки	Станок-качалка СК 20-4,5-12500	Станок-качалка 912-427-192 (серия С)
1. Наибольшая допустимая нагрузка на устьевой шток, кН	200	193
2. Номинальная глубина хода устьевого штока, м	4,5	4,9
3. Наибольший допускаемый крутящий момент на ведомом валу, кН·м	120	105

Дать сравнительную оценку уровней качества станков, если определенные экспертным путем коэффициенты значимости каждого фактора составляют соответственно 0,5; 0,3; 0,2. Сделать вывод.

Задача 1.10. Некоторый процесс контролируется по двум параметрам А и Б. Допустимые значения параметров, заданные технологическим регламентом: $P_H^A = 300$, а по $P_H^Б = 10$. Определить показатели нестабильности технологического процесса.

№ замера	Параметр А	Параметр Б
1	270	11
2	315	10
3	285	9
4	303	9

Задача 1.11. Имеются следующие данные о результатах измерений контролируемых параметров технологического процесса в течение рабочей смены:

№ замера	Давление, кПа		Кислотность, pH	
	по регламенту	фактически	по регламенту	фактически
1	100	97	6,0	6,4
2	100	102	6,0	5,5
3	100	100	6,0	6,1
4	100	101	6,0	6,0

По технологическому регламенту допустимые отклонения от нормативных значений параметров составляют: по давлению ±3 %, по кислотности среды в pH единицах ±10 %.

Определите методом относительных линейных оценок допустимый и фактический сводные относительные показатели неустойчивости технологического процесса.

Задача 1.12. Провести сравнительную оценку технических характеристик зарубежных малолитражных автомобилей и автомобиля ВАЗ-1111 "Ока". Повышение технического совершенства и качества автомобиля характеризуется увеличением значений X2, X3, X5 и уменьшением X4 ,X6. Для проведения анализа сформирована группа однотипных автомобилей

(таблица).

Показатель	Фиат Пунто	Опель Кореа	Фольксваген Поло	Пежо 106	Ситроен АХ	ВАЗ 1111 "Ока"
1 Год выпуска (X1)	1993	1993	1994	1991	1986	1989
2. Мощность л.с. (X2)	55	45	45	45	45	29
3. Максимальная скорость, км/час. (X3)	150	145	145	145	145	120
4. Расход топлива, л/100 км (X4)	5,9	5,2	6,5	5.1	4,2	4,6
5. Снаряженная масса, кг (X5)	842	835	955	760	690	635
6. Цена, евро (X2)	33500	28350	22395	27140	15590	4000

Задача 1.13. Имеются следующие данные о характеристиках выработанной за смену генератором электроэнергии:

№ замера	1	2	3	4	5	6	7	8
Напряжение,	6060	6000	5940	6000	5120	5910	5940	6030

В								
Частота, Гц	50,0	49,5	50,5	50,0	49,5	50,0	50,5	49,5

Нормативные характеристики работы генератора установлены: напряжение - 6000±150В, частота 50±0,5 Гц. Определите сводную оценку степени несоблюдения нормативных характеристик произведенной электрической энергии методом относительных линейных оценок.

Задача 1.14. Сравнить между собой качество рентгеновских микроскопов. Повышение технического совершенства и качества микроскопов зависит от увеличения значений X2 и уменьшения значений X1 , X3 , X4, X5,. Значения показателей восьми аналогов и оцениваемого образца микроскопа "Мир-4" приведены в таблице.

Модель	Размер фокусного пятна, мм (X1)	Макси-мальное увеличение, кратность (X2)	Габариты, м2 (X3)	Масса, кг (X4)	Потребля-емая мощность, кВТ-А (X5)
1. ГХ-100	1	500	1,57	700	2,0
2. ГХМ-100	10	150	1,67	700	2,5
3. ГХМ-160	10	150	1.57	750	2,5
4. НОМХ-160	10	100	0,78	471	2,0
5. НГ-200М	5	200	0,39	187,5	1,0
6. МЕГ-160М	10	100	0,78	750	2,0
7. НРХ	15	100	0.75	350	2,0
8. МР-160	10	250	1,57	500	2.0
9. "Мир-4"	1	500	0,22	25	0,05

Задача 1.15. Определить уровень качества обуви по группе эстетических свойств (таблица). Максимально возможная оценка каждого из показателей - 5 баллов.

Комплексный показатель эстетических свойств базового образца - 48 баллов.

Показатель	Параметр весомости, баллы	Экспертная оценка, баллы
Силуэт	5	4,0
Внешний вид	3	4,5
Внутренняя отделка	2	3,0
Цвет	4	4,0

Задача 1.16. Сопоставить уровни качества молока, поступающего на предприятие оптовой торговли от нового поставщика (оцениваемый образец), с базовым образцом уже реализуемого молока.

Единичные показатели качества, %	Параметр весомости - пищевая ценность 1 % составной части, ккал	Значение показателя качества	
		базового образца	оцениваемого образца
Жир	9	3,2	3,8
Белок	4	2,8	3,3
Углеводы, в т.ч. лактоза	3,7	4,7	5,2
Органические кислоты	3,62	0,14	0.17

Задача 1.17. Организация, действующая в сфере услуг населению, проводит закупку мелкооптовой партии утюгов. Необходимо, сопоставив уровни качества трех вариантов, выбрать наиболее качественный.

Параметры утюгов	Значения параметров			Весовые коэффициенты
	1	2	3	
1. Вес, кг	0,5	0,8	1	0,30
2. Мощность, кВт	0,5	0,8	1	0,05
3. Длина шнура, м	1,75	1,5	2	0,10
4. Наличие отпаривателя	Да	Нет	Да	0,20
5. Наличие тефлонового покрытия	Нет	Да	Да	0,20
6. Скорость нагрева, мин	1	0,8	1	0,15

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

Для непродовольственных товаров существуют градации по сортам, группам сложности, группам качества, маркам, номерам и т.д.
Ряд товаров в промышленности делят на сорта в соответствии с уровнем производственного исполнения.
Если изделия отнесены к разным сортам, то сводная оценка уровня их качества может быть дана при помощи различных показателей. Среди них:
Удельный вес продукции изделий первого (высшего) сорта в общем объеме выпуска:
а) для однородной продукции

$$У_{\%oi} = \frac{q_i}{\sum_i q_i} \cdot 100; \qquad (2.1)$$

б) для разнородной продукции

$$У_{\%oi} = \frac{q_i p}{\sum_i q_i p} \cdot 100, \qquad (2.2)$$

где p - фиксированная цена; qi - количество продукции i-го сорта.
Средняя сортность выпущенных изделий

$$\overline{N}c = \frac{\sum Nc_i q_i}{\sum q_i}, \qquad (2.3)$$

где Nci - порядковый номер сорта.
Средняя цена единицы продукции

$$\overline{P}c = \frac{\sum p_i^c \cdot q_i^c}{\sum q_i}, \qquad (2.4)$$

где pic - цена единицы продукции каждого сорта; qic - количество продукции i-го сорта.
Индекс сортности (используется для оценки выполнения плана и динамики сортности)

$$Ic = \frac{\overline{P}_1^c}{P_0^c} = \frac{\sum P_1^c q_1^c}{\sum q_1^c} \div \frac{\sum p_0^c q_0^c}{\sum q_0^c} = \frac{\sum p_1^c q_1^c}{\sum \overline{p}_0^c q_1^c}. \qquad (2.5)$$

5. Потери (накопления) от изменения сортности

$$п(н) = \left(\sum q_{1c}\right)\left(\overline{p}_1^c - \overline{p}_0^c\right). \qquad (2.6)$$

Для сводной характеристики уровня и динамики качества используют индекс качества, предложенный профессором А.Я. Боярским:

$$I_k = \frac{\sum ik(pq_1)}{\sum (pq_1)}, \qquad (2.7)$$

где q1 - фактически выпущенное количество продукции каждого вида (сорта); p - фиксированные цены; ik - индивидуальные индексы качества по видам продукции, определяемые как отношение фактического уровня качества к базисному уровню (ik= k1:k0).

Если Ik умножить на индекс объема продукции (Iq), то произведение даст динамику объема продукции с учетом изменения ее качества:

$$I_{qk} = I_k \cdot I_q = \frac{\sum ik(pq_i)}{\sum(pq_1)} \cdot \frac{\sum pq_1}{\sum pq_0} = \frac{\sum ik(pq_i)}{\sum(pq_0)}. \qquad (2.8)$$

Брак - изделия и детали, не соответствующие по своим свойствам требованиям стандартов, технических условий или иных документов аналогичного характера и поэтому непригодные для использования по прямому назначению. К показателям брака относятся:

размер брака в натуральном выражении;

процент брака - количество бракованных изделий по отношению к годным изделиям;

удельный вес брака - отношение количества забракованных изделий к общему количеству годных и забракованных изделий.

абсолютный размер брака в денежном выражении - сумма фактических затрат, связанных с производством окончательного брака и исправлением исправимого брака.

абсолютный размер потерь от брака меньше абсолютного размера брака на суммы, взысканные с виновников брака, и на суммы, вырученные от использования бракованных изделий.

относительные показатели брака и потерь от брака получают делением абсолютных показателей на общую фактических затрат, связанных с производством продукции за данный период.

При анализе данных о браке следует рассматривать также группировку брака по месту появления (внутренний и внешний), по причинам и характеру (исправимый и неисправимый (окончательный).

К статистическим методам относятся приемы описательной статистики - причинно-следственные диаграммы К. Исикавы, гистограммы, диаграммы Парето.

Причинно-следственные диаграммы (К. Исикавы) строятся с целью рассортировать и определить взаимодействия между факторами, влияющими на процесс. Причинно-следственная диаграмма изображает зависимость между данным следствием и его потенциальными причинами (причинно-следственный анализ). Для производства изделий, качество которых удовлетворяло бы запросам потребителей, прежде всего необходимо наиболее важным показателям качества (являющимся следствием) поставить в соответствие различные факторы производства (составляющие систему причинных факторов).

Затем на те факторы, которые оказывают отрицательное влияние на результат, необходимо оказать воздействие правильно подобранными мерами и этим ввести процесс в стабильное состояние.

Таким образом, схема Исикавы позволяет выявить и сгруппировать условия и факторы, влияющие на изучаемую проблему, которая условно обозначается в виде прямой горизонтальной стрелки.
Факторы, прямо или косвенно влияющие на проблему, изображаются наклонными стрелками, причем существенные факторы, то есть причины 1-го порядка (наклонные большие стрелки), затем детализируются. То есть на схеме к каждой причине 1-го порядка указывают наклонные маленькие стрелки, обозначающие различные условия, причины, обуславливающие данный фактор.
На рис. 2.1 показана причинно-следственная диаграмма, отображающая зависимость показателей качества продукции машиностроительного предприятия от влияющих факторов и условий.

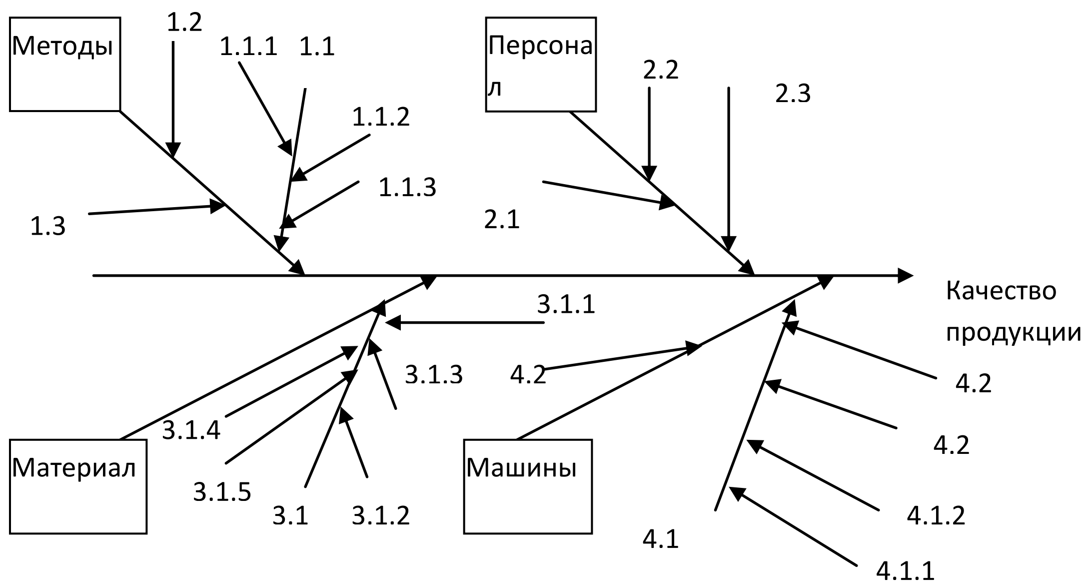


Рис. 2.1. Диаграмма Исикавы для анализа факторов, определяющих качество продукции

Примечание к рисунку 2.1: 1.1. Механообработка: 1.1.1. Раскрой металла; 1.1.2. Токарная обработка; 1.1.3. Шлифовка; 1.2. Сварка; 1.3. Сборка. 2.1. Квалификация рабочего; 2.2. Квалификация контроллера; 2.3. Количество контроллеров. 3.1. Наличие поверхностных дефектов: 3.1.1. Углубление от окалины; 3.1.2. Поверхностные дефекты в соответствии с ТУ чертежа; 3.1.3. Заштампованные усадочные раковины; 3.1.4. Заштампованные песочные, шлаковые, газовые раковины; 3.1.5. Наплыв металла по внутреннему контуру. 4.1. Механическая обработка: 4.1.1. Пресс; 4.1.2. Ланжерон; 4.1.3. Шлифовальный станок; 4.1.4. Фрезерный станок; 4.2. Сварка
Гистограмма представляет собой столбчатый график и применяется для наглядного изображения распределения конкретных значений параметра по частоте повторения за определенный период времени (неделя, месяц, год). Гистограмма полезна для получения визуальной информации о процессе и

помогает принять решение, на чем сосредоточить управленческие усилия по улучшению процесса.

Эта информация отображается серией столбиков одинаковой ширины, но разной высоты. Ширина столбика представляет интервал в диапазоне наблюдений. Высота столбика представляет количество измерений, попавших в данный интервал.

При нормальных данных существует тенденция расположения большинства результатов наблюдений ближе к центру распределения (центральное значение) с постепенным уменьшением при движении от центра. Гистограмма применяется главным образом для анализа значений измеренных параметров, но может использоваться и для расчетных значений.

Характер рассеивания случайной величины (например, размер диагонали телевизора) можно представить в виде гистограммы, в которой по оси абсцисс откладывают действительные размеры, а по оси ординат – количество изделий с данным отклонением (рис. 2.2).

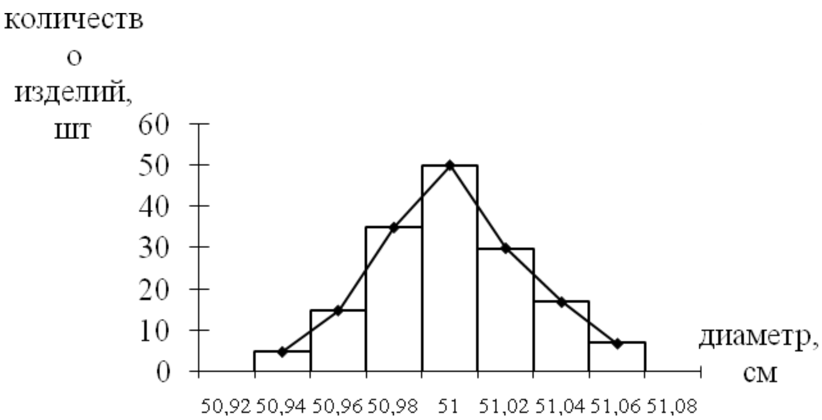


Рис. 2.2. Пример построения гистограммы

При нанесении на график допустимых значений параметра можно определить, как часто этот параметр попадает в допустимый диапазон или выходит за его пределы.

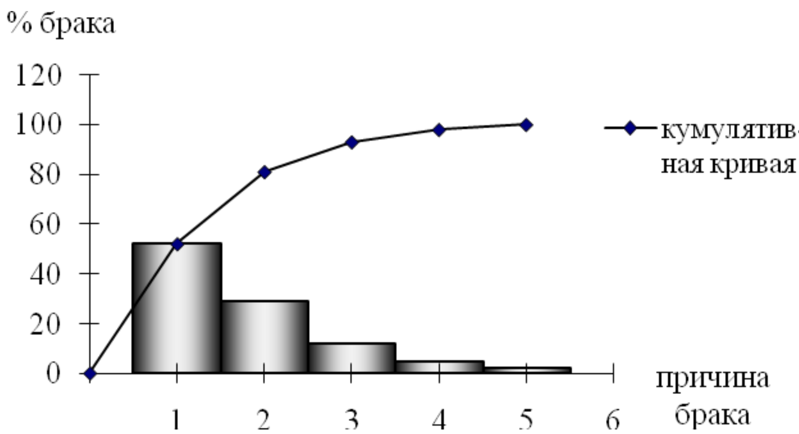


Рис. 2.3. Диаграмма Парето

Диаграмма Парето способствует выявлению наиболее важных причин потерь качества, возможности улучшения качества и установления целей. Диаграмма Парето обеспечивает простой графический метод классификации причин от наиболее до наименее важных. Диаграмма Парето показывает в убывающем порядке относительное влияние каждой причины на общую проблему. Для представления накопленного влияния причин используется кумулятивная кривая (рис. 2.3).

С помощью диаграммы Парето анализируется число случаев брака, виды брака, потери от брака по причинам и видам брака, затраты времени и материальные средства на исправление брака, содержание рекламаций, поступающих от потребителей, причины аварий и поломки технологического оборудования, причины несоблюдения технологической дисциплины, затраты на обеспечение качества в процессе производства, анализ спроса на различные виды продукции.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Требуется определить долю каждого сорта в стоимости продукции и средние сортность и цену по плану и фактически по данным о выпуске продукции, представленным в таблице.

Исходные данные

Сорт продукции	Плановая цена за 1 шт., ден.ед.	Количество, тыс. штук	
		по плану	фактически
I	10	100	120
II	8	10	4
III	6	5	1
ВСЕГО	-	115	125

Решение. Средний удельный вес продукции i-го сорта в общем объеме выпуска для разнородной продукции:

$$I_{1_0} = \frac{100*10}{100*10+10*8+5*6}*100 = \frac{1000}{1110}*100 = 90.09\%,$$

$$I_{1_\phi} = \frac{120*10}{120*10+4*8+1*6}*100 = \frac{1200}{1236}*100 = 99.93\%,$$

$$I_{2_0} = \frac{10*8}{100*10+10*8+5*6}*100 = \frac{80}{1110}*100 = 7.21\%,$$

$$I_{2_\phi} = \frac{4*8}{120*10+4*8+1*6}*100 = \frac{32}{1236}*100 = 2.59\%,$$

$$I_{3_0} = \frac{5*6}{100*10+10*8+5*6}*100 = \frac{30}{1110}*100 = 2.7\%,$$

$$I_{3_ф} = \frac{1*6}{120*10+4*8+1*6}*100 = \frac{6}{1236}*100 = 0.48\%.$$

Средняя сортность по плану

$$\overline{N}c_0 = \frac{1*100+2*10+3*5}{115} = 1.17,$$

фактически

$$\overline{N}c_ф = \frac{1*120+2*4+3*1}{125} = 1.048.$$

Средняя цена по плану

$$\overline{P}c_0 = \frac{100*10+10*8+5*6}{100+10+5} = 9.65 \text{ ден.ед.},$$

фактически

$$\overline{P}c_ф = \frac{120*10+4*8+6*1}{120+4+1} = 9{,}904 \text{ ден.ед.}$$

Итоговые результаты расчетов приведены в таблице.

Результаты расчетов

Показатель	Значение по плану	Фактическое значение
Удельный вес I сорта	90,09	96,93
Удельный вес II сорта	7,21	2,59
Удельный вес III сорта	2,7	0,48
Средняя сортность	1,17	1,048
Средняя цена, ден.ед.	9,65	9,904

Фактически удельный вес продукции I сорта значительно превысил плановое значение, в результате чего произошло увеличение средней цены продукции на предприятии по сравнению с плановой.

Задача 2. Необходимо определить плановую и фактическую среднюю цену на изделие; разницу между фактической и плановой ценой за единицу изделия; общее влияние изменения качества на стоимость выпущенной продукции по представленным в таблице данным.

Исходные данные

Сорт продукции	Оптовая цена за 1 м, ден.ед.	Выпуск, м	
		по плану	Фактически
I	10	80000	82000
II	9	4000	3000
III	8	-	1000

Решение. Средняя цена единицы продукции

$$\overline{P}c_{пл} = \frac{80000*10+4000*9}{84000} = 9{,}95 \text{ ден.ед.};$$

$$\overline{P}c_{ф} = \frac{82000*10+3000*9+1000*8}{86000} = 9{,}94$$ ден.ед.

Разница между фактической и плановой ценой за единицу изделия

$$\overline{P}c_{ф} - \overline{P}c_{пл} = 9{,}94 - 9{,}95 = -0{,}01$$ ден.ед.

Влияние изменения качества на стоимость выпущенной продукции можно определить по формуле $П(н) = \sum q_1^c\left(\overline{p}_1^c - \overline{p}_0^c\right)$,

$$П = 86000*(-0{,}01) = -860$$ ден.ед.

Вывод. В результате снижения сортности продукции фактическая стоимость выпущенной продукции сократилась на 960 ден. ед.

Задача 3. Имеются следующие данные о произведенной продукции (см. таблицу).

Необходимо определить:

1) индекс объема продукции без учета изменения ее качества;
2) показатели изменения качества отдельных видов продукции;
3) сводный индекс качества по методологии профессора А.Я. Боярского;
4) индекс изменения объема продукции с учетом изменения ее качества.

Исходные данные

Вид Продукции	Фиксированная оптовая цена за 1 т, ден.ед	Объем продукции, т		Показатель уровня качества	Уровень качества, %	
		базисный период	отчетный период		базисный период	отчетный период
Товарная руда	12	700	560	содержание металла	9,0	12,0
Концентрат	25	400	380	содержание металла	18,0	22,0
Щебень	2	100	110	не определяется	-	

Решение.

1. Индекс объема продукции без учета изменения ее качества:

$$I_q = \frac{\sum pq_1}{\sum pq_0};$$

$$I_q = \frac{560*12+380*25+110*2}{700*12+400*25+100*2} = \frac{16440}{18600} = 0{,}8838.$$

2. Показатели изменения качества отдельных видов продукции

$$i_k = \frac{k_1}{k_0},$$

$$i_{k1} = \frac{12.0}{9.0} = 1{,}333,$$

$$i_{k2} = \frac{22.0}{18.0} = 1{,}222,$$

$$i_{k3} = 1.$$

3. Сводный индекс качества по методологии профессора А. Я. Боярского

$$I_k = \frac{\sum i_k (pq_1)}{\sum pq_1},$$

$$I_k = \frac{1{,}333(12*560) + 1{,}222(25*380) + 1(110*2)}{12*560 + 25*380 + 110*2} = \frac{20786{,}7}{16440} = 1{,}264$$

4. Индекс изменения объема продукции с учетом изменения ее качества

$$I_{qk} = I_k * I_q = \frac{\sum i_k (q_1 p)}{\sum (q_1 p)} * \frac{\sum pq_1}{\sum pq_0},$$

$$I_{qk} = 1{,}264 * 0{,}8838 = 1{,}117.$$

Таким образом, в отчетном периоде с учетом изменения качества произошло увеличение объема производства продукции на 11,7 %.

Задача 4. На заводе за отчетный период стоимость окончательного (неисправимого) брака - 43556 тыс. сум. Расходы по исправлению брака (исправимого) - 26454 тыс. сум. Стоимость окончательного брака по цене использования - 4360 тыс. сум. Взыскано с поставщиков по претензиям за поставку недоброкачественных материалов 2600 тыс. сум. Удержано за брак с виновников 2350 тыс. сум.

Валовая продукция за тот же период по себестоимости - 1207600 тыс. сум.

Определить абсолютные и относительные показатели размера брака и размера потерь от брака на заводе за отчетный период.

Решение.

Абсолютный размер = 43556 + 26454 = 70010 тыс. сум.

Абсолютные потери = 70010 – 4360 – 2600 – 2350 = 60700 тыс. сум.

Относительный размер брака $= \frac{70010}{1207600} * 100\% = 5{,}8\%$.

Относительные потери $= \frac{60700}{1207600} * 100\% = 5{,}0\%$.

Задача 5. Требуется построить диаграмму Парето по следующим данным. Причины брака:

нарушение технологической дисциплины – 52 %;

неудачная конструкция технологической оснастки – 29 %;

дефекты в комплектующих изделиях – 12 %;

недостаточность освещения – 5 %;

прочие – 2 %.

Решение.

На рис. 3.4 показано графическое изображение диаграммы в прямоугольной системе координат.

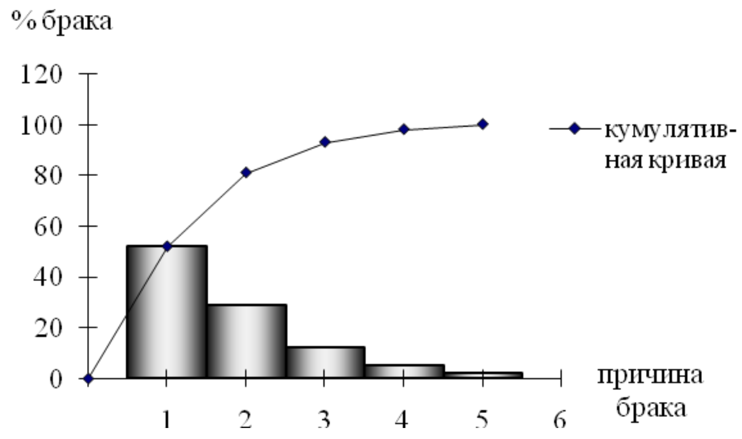


Рис.3.4. Диаграмма Парето

ЗАДАЧИ

Задача 2.1. Рассчитать удельный вес изделий каждого сорта, среднюю сортность выпущенных изделий и среднюю цену единицы продукции.

Сверла 16 мм	Оптовая цена, д.ед.	Выработано изделий, шт.
Сорт: I II	0,50 0,45	4000 1000
ИТОГО	Х	5000

Задача 2.2. Допустим, что средняя марка кирпича (кг/см2) по сравнению с предыдущим годом повышена на 10%, а вязкость цемента увеличена на 15%. Известно, что стоимость выпуска продукции в отчетном периоде в фиксированных оптовых ценах предприятий для кирпича составила 1250 д.ед., а для цемента - 2400 д.ед.

Определите коэффициенты динамики качества двух видов продукции, индекс качества, насколько в среднем увеличено качество этих двух видов продукции.

Задача 2.3. На предприятии общественного питания имеются следующие данные о выпуске некой продукции трех сортов:

Сорт продукции	Плановая цена за 1 шт., д.ед.	Количество, тыс.штук	
		по плану	фактически
I	10	100	120
II	8	10	4
III	6	5	1
ВСЕГО	х	115	125

Определить долю каждого сорта в стоимости продукции и средние сортность и цену по плану и фактически.

Задачи 2.4. По одному из хлебопекарных предприятий имеются следующие сведения:

Вид продукции	Сорт	Оптовая цена, д.ед	Выпуск, т.шт.	
			предыдущий год	отчетный год
Батон (нарезной)	Высший I	25,0 22,0	380 20	420 20
Хлеб (белый)	Высший I	12,0 11,0	210 40	280 20

Определите среднюю оптовую цену продукции в предыдущем году $(\overline{P}_0)$ по видам продукции; индекс сортности; накопления, полученные от изменения сортности.

Задача 2.5. По предприятию имеются следующие данные:

Сорт продукции	Оптовая цена за 1 м, д.ед.	Выпуск, м	
		по плану	фактически
I	10	80000	82000
II	9	4000	3000
III	8	-	1000

Определите плановую и фактическую среднюю цену на изделие; разницу между фактической и плановой ценой за единицу изделия; общее влияние изменения качества на стоимость выпущенной продукции.

Задача 2.6. В отчетном году выпуск продукции высшей категории качества составил 8% общего планового выпуска товарной продукции и составил 5,2 тыс.д.ед., в т.ч. продукция высшей категории качества - 320 тыс.д.ед.

Определите выполнение плана выпуска товарной продукции (в %), и фактический удельный вес продукции высшей категории качества (%).

Задача 2.7. По комбинату за месяц имеются следующие данные:

Вид продукции	Артикул	Оптовая цена за 1м, д.ед	Выпуск, т.м.	
			план	факт.
А I сорт II сорт	35168	2,8 2,5	250 30	280 35
Б I сорт II сорт III сорт	21018	3,0 2,7 2,4	420 40 -	400 50 30

Определите выполнение плана по объему продукции и по сортности; сумму потерь или накоплений от изменения сортности; среднюю сортность.

Задача 2.8. Известны данные по одному из приборостроительных заводов:

Вид изделия	Сорт	Плановая цена за штуку, д.ед.	Выпущено изделий, тыс.шт.	
			по плану	фактически
Штангенциркули	1 2	1,00 0,80	45 5	48 4
ИТОГО	х	Х	50	52
Микромеры	1 2	2,00 1,60	80 20	90 30
ИТОГО	х	Х	100	120

Определить:

Удельный вес стоимости изделий первого сорта по плану и фактически.

Выполнение плана по продукции первого сорта.

Средние цены для каждого вида изделий по плану и фактически.

Индекс сортности.

Потери или накопления от изменения сортности.

Задача 2.9. По нефтегазодобывающему предприятию известно, что по сравнению с предыдущим годом обводненность нефти возросла с 75 до 80%. При этом стоимость товарной нефти в фиксированных оптовых ценах в отчетном году составила 252 д.ед. Требуется определить изменение качества товарной нефти с помощью индекса Боярского А.Я.

Задача 2.10. По приведенным ниже данным рассчитать:

индивидуальные индексы качества;

сводный индекс качества;

индекс физического объема продукции;

оценить динамику объема продукции с учетом изменения ее качества. Сделать выводы.

Вид продукции	Выпуск в фиксированных оптовых ценах, тыс.ден.ед.		Показатель уровня качества	Уровень качества, %	
	базисный период	отчетный период		базисный период	отчетный период
Кирпич строительный	110,0	120,0	Средняя марка, кг/см2	80	100
Электролампы	52,0	51,8	Коэффициент качества	1,00	0,98

Сверла	255,0	289,0	Срок сверления в часах	200,5	200,0

Задача 2.11. Имеются следующие данные о производстве автопокрышек для грузовых автомашин тремя заводами отрасли.

№ завода	Оптовая цена, усл. д. ед.	Выпуск, тыс.т.		Ходимость, тыс.м	
		предыдущий год	отчетный год	предыдущий год	отчетный год
1	34,9	900	960	58	72
2	33,1	300	320	54	58
3	37,6	340	320	52	50

Определите сводный индекс качества шин по методологии А.Я. Боярского и индекс динамики объема продукции шинных заводов с учетом изменения ее качества, а также среднюю ходимость автопокрышки в предыдущем и отчетном году.

Задача 2.12. Имеются следующие данные о выпуске продукции на предприятии общественного питания (таблица):

Сорт продукции	Цена за 1000 шт.	Выпуск, тыс. шт.	
		1 квартал	2 квартал
Высший	8,0	2000	2200
Первый	7,5	300	600
Второй	6,8	400	500

Проанализируйте показатели качества продукции, сделайте выводы.

Задача 2.13. На заводе за отчетный период стоимость окончательного (неисправимого) брака составила 68 650 тыс. денежных единиц (д.ед.), расходы по исправлению брака (исправимого) - 30 350 тыс.д.ед., стоимость окончательного брака по цене использования - 4 112 тыс.д.ед.

Взыскано с поставщиков по претензиям за поставку недоброкачественных материалов 2 437 тыс.д.ед. Удержано за брак с виновников 2 225 тыс.д.ед.

Валовая продукция за тот же период по себестоимости составила 1 584 115 тыс.д.ед.

Требуется определить абсолютный и относительный показатели размера брака и размера потерь от брака на заводе за отчетный период.

Задача 2.14. Имеются следующие данные о заводе за сентябрь:

Показатель	Уровень показателя
1. Валовая продукция по себестоимости, тыс. руб.	825 112

2. Потери от брака, %	1,25
3. Стоимость брака по цене использования, тыс. руб.	2 432
4. Удержано за брак с виновников. тыс. руб.	1 351
5. Стоимость доделок исправимого брака, тыс. руб.	3 425

Определить себестоимость окончательно забракованных изделий.

Задача 2.15. Имеются следующие данные о литейном цехе завода за предыдущий и отчетный месяцы, тонн.

Вид продукции	Предыдущий месяц		Отчетный месяц	
	заформовано литья	брак	заформовано литья	брак
1. Отливки для изделия РП	525,0	37,5	600,0	27,0
2. Отливки для изделия РС	180,0	30,0	187,5	15,0
3. Прочая продукция	45,0	4,5	112,5	3,0

Определите: процент брака к заформованному литью в цехе за предыдущий и отчетный месяцы; выход годного литья за предыдущий и отчетный месяцы; экономию металла (в тоннах) в отчетном месяце по сравнению с предыдущим вследствие уменьшения брака.

Задача 2.16. За 1 квартал по заводам нефтяного машиностроения имеются следующие данные (тыс.д.ед.):

Показатели	Валовая продукция по себестоимости	Себестоимость окончательного брака	Расходы по исправлению брака	Стоимость неисправимого брака по цене использования	Суммы, взысканные с поставщиков	Удержано с виновников
ЗАВОД №1						
Всего по заводу	3225,0	40,50	15,25	8,35	0,67	1,58
в т.ч. по литейному цеху	395,0	11,25	0,60	1,90	0,62	0,63
ЗАВОД №2						
Всего по заводу	3750	56,25	19,50	6,40	1,60	4,00

в т.ч. по литейному цеху	850,0	24,65	7,60	5,65	-	3,65
ЗАВОД №3						
Всего по заводу	2945,0	32,95	14,45	8,40	-	5,03
в т.ч. по литейному цеху	490,0	10,0	7,75	6,25	-	3,13

Определите:
1. Процент потерь от брака за 1 квартал:
а) по каждому заводу в целом и в т.ч. по литейному цеху;
б) по всем заводам и в т.ч. по литейным цехам.
2. Проанализируйте данные сводной таблицы и сделайте выводы.

Задача 2.17. Построить диаграмму Парето, если известно распределение брака по причинам:
нарушение технологической дисциплины - 47,8%;
неудачная конструкция технологической оснастки - 40,1%;
дефекты в комплектующих изделиях - 4,3%;
недостаточность освещения - 3,4%;
прочие причины - 4,4%.

Задача 2.18. Построить диаграмму потерь от брака (Парето), если известно:
брак по размерам - 11 тыс.д.ед.;
брак материалов - 24 тыс.д.ед.;
брак гальванического покрытия - 15 тыс.д.ед.;
брак заклепки - 1 тыс.д.ед.;
прочие виды брака - 5 тыс.д.ед.
Рассчитать структуру потерь, сделать анализ.

Задача 2.19. Построить причинно-следственную диаграмму (Исикавы), сгруппировав по факторам причины производства брака на предприятии сферы общепита. При этом рекомендуется образовать следующие группы: 1) труд; 2) технология; 3) условия труда; 4) полуфабрикаты и сырье; 6) оборудование.

Причины брака: условия хранения продуктов (температура, влажность), шум, поведение на работе, наличие хозяйственного инвентаря, качество продукта, поступившего с других операций, возраст оборудования, состояние воздушной среды, чистота рабочего места, квалификация повара, изношенность оборудования, микроклимат в коллективе, освещенность рабочего места, возможность обеспечения необходимой точности (разделки, нарезки, шинковки и пр.) обработки продукта механизированным способом.

Задача 2.20. Имеются следующие данные о результатах измерений контролируемых параметров на оптовом предприятии торговли продуктами питания в помещении, где хранят сухие сыпучие продукты. Замеры проводились раз в день в течение недели.

Номер замера	1	2	3	4	5	6	7

Температура, °С	30	28	29	26	30	31	28
Относительная влажность, %	72	72	75	78	75	72	72

Нормативные значения параметров составляют: по температуре – не выше 30 °С, по относительной влажности – не выше 75%. Определить методом относительных линейных оценок сводный относительный показатель неустойчивости процесса хранения.

3. КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

Стандартами предусматривается контроль по количественному и альтернативному признаку. Контроль по количественному признаку - это контроль продукции, в ходе которого определяют числовые значения одного или нескольких ее параметров, а последующее решение о контролируемой совокупности принимают в зависимости от этих значений. Контроль по альтернативному признаку представляет собой контроль по качественному признаку, в ходе которого проверенную продукцию относят к категории годных или бракованных, а последующее решение о контролируемой совокупности принимают в зависимости от числа бракованных единиц.

Для контроля из партии продукции извлекают выборку или пробу (часть нештучной продукции). Критерием для принятия решения по результатам контроля является контрольный норматив. Существуют два контрольных норматива - приемочное и браковочное числа.

Приемочное число (С1) - это контрольный норматив, являющийся критерием для приемки партии продукции и равный максимальному числу забранных единиц в выборке.

Браковочное число (С2) - контрольный норматив, являющийся критерием для непринятия партии продукции и равный минимальному числу забракованных единиц в выборке.

Корректирование параметров процесса по результатам выборочного контроля параметров изготовляемой продукции для обеспечения требуемого уровня ее качества и предупреждения брака называется статистическим регулированием технологического процесса. Основным инструментом регулирования является контрольная карта (КК). На КК отмечается диапазон неизбежного разброса значений показателя. Для оценки контрольных границ (границ регулирования) применяется трехкратное среднее квадратическое отклонение (правило "трех δ")

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (\mathrm{p} - \bar{\mathrm{p}})^2}{n}} \quad \text{или} \quad \delta = \sqrt{\bar{\mathrm{p}}^2 - (\bar{\mathrm{p}})^2}, \qquad (3.1)$$

где p - количество (или доля) дефектных изделий в выборке; $\bar{p}$ - средняя доля дефектных изделий; n - число наблюдений.

Если точки, наносимые на КК, не выходят за границы регулирования, то технологический процесс протекает стабильно.

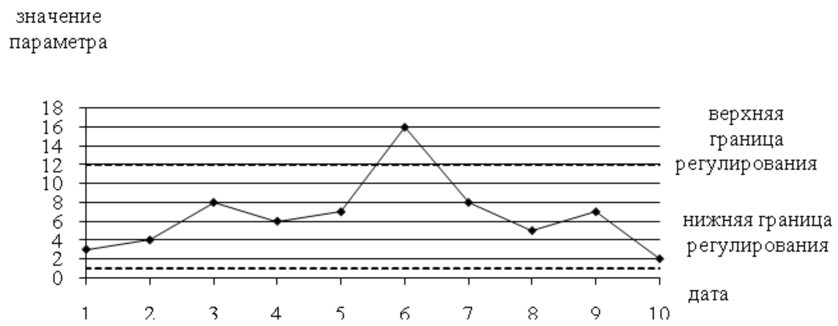


Рис. 3.1. Общий вид контрольной карты

При проведении всех видов контроля качества продукции широко используются статистические методы, в частности технология выборочного наблюдения.

Для решения ряда задач данного раздела рекомендуется использовать знания, полученные в процессе изучения общей теории статистики (тема "Выборочное наблюдение"), в частности методы вычисления доверительных интервалов при различных способах отбора единиц в выборочную совокупность, вычисления средних и предельных ошибок выборки и т.п.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Дан фрагмент таблицы из ГОСТ-18242, определяющего методические принципы статистического контроля по альтернативному признаку (на примере усиленного одноступенчатого статистического контроля).

Выписка из ГОСТа

Объем партии	Объем выборки	Приемочные (C1) и браковочные (C2) числа при приемочном уровне дефектности, %					
		2,5		4,0		6,5	
		C1	C2	C1	C2	C1	C2
От 16 до 25	5	0	1	0	1	1	2
От 26 до 50	8	0	1	1	2	1	2
От 51 до 90	13	1	2	1	2	1	2
От 91 до 150	20	1	2	1	2	2	3

На основе данного ГОСТа строятся стандарты правил приемки конкретной продукции.

Решение. Рассмотрим пример приемки партии трикотажных изделий. Известно, что на контроль поступила партия трикотажных изделий объемом 100 шт.; в стандарте правил приемки на данную группу продукции "заложен" уровень дефектности 2,5 % и предусмотрен одноступенчатый контроль; изготовитель поставленной партии в прошлом неоднократно поставлял недоброкачественную продукцию. Отсюда следует, что приемка по качеству должна строиться по режиму усиленного контроля и по следующему плану: объем выборки – 20 шт., приемочное число – 1, браковочное число – 2. Если при проверке 20 шт. оказалось две (и более) забракованных единицы, то партию 100 шт. не принимают.

Задача 2. Требуется по приведенным ниже данным построить контрольную карту контроля продукции за декаду.

Исходные данные

Число месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Содержание серы в нефти, %	2,3	2,1	2,0	2,5	3,5	2,8	2,2	2,0	2,0	2,1

Решение. Для построения контрольной карты необходимо определить значение среднего уровня дефектности, а также верхнюю и нижнюю границу регулирования.

Среднее значение признака находится по средней арифметической формуле

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (3.2)$$

где $\bar{p}$ - среднее значение признака; xi - индивидуальные значения признака; n - число индивидуальных величин.

$$\bar{p} = \frac{2{,}3+2{,}1+2{,}0+2{,}5+3{,}5+2{,}8+2{,}2+2{,}0+2{,}0+2{,}1}{10} = \frac{23{,}5}{10} = 2{,}35\ \%.$$

Для оценки контрольных границ (границ регулирования) применяется трехкратное среднеквадратичное отклонение (правило трех сигм). Данные для расчета границ регулирования представлены в таблице.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2{,}065}{10}} = 0{,}454.$$

Верхняя граница регулирования: ВКП = 2,35+ 3 0,454 = 3,712.

Нижняя граница регулирования: НКП = 2,35 - 3 0,454 = 0,988 (рис. 3.2).

Результаты расчета границ регулирования

Номер	P	$p-\bar{p}$	$(p-\bar{p})^2$
1	2	3	4
1	2,3	-0,05	0,0025
2	2,1	-0,25	0,0625
3	2	-0,35	0,1225
4	2,5	0,15	0,0225

5	3,5	1,15	1,3225
6	2,8	0,45	0,2025
7	2,2	-0,15	0,0225
8	2	-0,35	0,1225
9	2	-0,35	0,1225
10	2,1	-0,25	0,0625

Поскольку точки, наносимые на контрольную карту, не выходят за границы регулирования, технологический процесс не требует дополнительного регулирования.

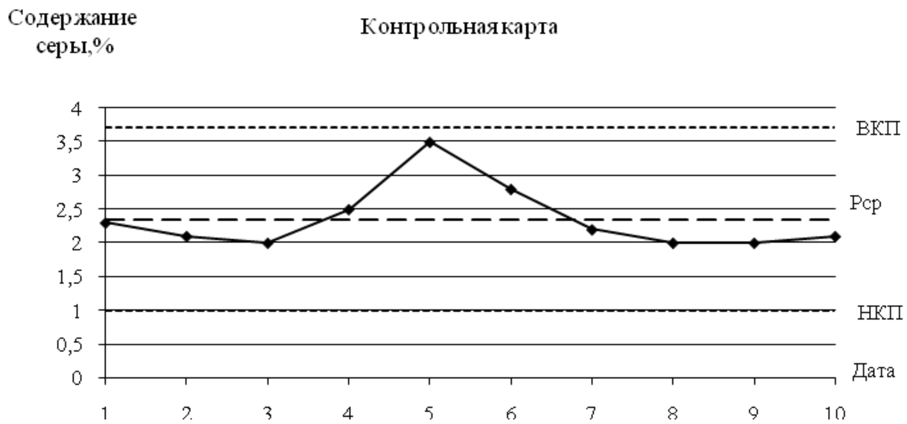


Рис. 3.2. Контрольная карта для примера

Задача 3. На заводе электроламп из партии продукции в количестве 1600 шт. ламп взято на выборку 1600 (случайный бесповторный отбор), из которых 40 оказались бракованными.

Определить с вероятностью 0,997 пределы, в которых будет находиться процент брака для всей партии продукции.

Решение. Определяется доля бракованной продукции по выборке

w= 40/1600=0,25, или 25 %.

При вероятности p = 0,997, t = 3,0 (2,97) (по статистической таблице функции Лапласа).

Размер предельной ошибки

$$\Delta_p = t\mu_p = t * \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} * (1 - \frac{n}{N}) = 3{,}0 * \sqrt{\frac{0{,}025*(1-0{,}025)}{1600}} * (1 - \frac{1600}{1600})$$
$$= 3{,}0 * 0{,}0037 = 0{,}011$$

Таким образом, предельная ошибка составляет 1,1 %.

Доверительные интервалы для генеральной доли с вероятностью p = 0,997

w-Δp < p < w+ Δp; 25 - 1,1< p < 25 + 1,1;

23,9 % < p < 26,1 %.

Задача 4. При контрольной проверке качества апельсинов произведена 10 % серийная выборка. Из партии, содержащей 50 ящиков апельсинов (вес ящиков одинаков), методом механического отбора взято 5 ящиков. В результате сплошного обследования находившихся в ящике апельсинов получили данные об удельном весе бракованных апельсинов. Результаты следующие:

№ ящика, попавшего в выборку	1	2	3	4	5
Удельный вес бракованной продукции, %	1,2	1,8	2,0	1,0	1,5

Требуется с вероятностью 0,95 установить доверительные интервалы удельного веса бракованной продукции для всей партии апельсинов.

Решение. Для установления доверительного интервала, в котором для всей партии поставки находится доля бракованной продукции, используется формула

$$p = w \pm \Delta_p, \qquad (3.3)$$

где w - удельный вес забракованной продукции; Δ_p - абсолютная погрешность,

$$\Delta_p = t\mu_p = t * \sqrt{\frac{\delta_w^2}{m} * (1 - \frac{m}{M})}, \qquad (3.4)$$

где δw2 - межсерийная (межгрупповая) выборочная дисперсия доли.

При вероятности p = 0,95 t = 1,96 (см. таблицу функции Лапласа).

$$w = \frac{1,2 + 1,8 + 2,0 + 1,0 + 1,5}{5} = 1,5\%.$$

При расчете использована простая арифметическая, т.к. вес ящиков одинаков.

$$\delta_ц^2 = \frac{\sum (w_j - w)^2}{m} = \frac{(0,012-0,015)^2 + (0,08-0,015)^2 + (0,020-0,015)^2 + (0,010-0,015)^2 + (0,015-015)^2}{5} = 0,0000136.$$

$$\Delta_p = t\mu_p = t * \sqrt{\frac{\delta_w^2}{m} * (1 - \frac{m}{M})} = 1,96\ \ 0,00165\ \ (1-5/50)=0,003.$$

т.о. предельная ошибка составляет 0,3 %.

Доверительные интервалы для генеральной доли с вероятностью p = 0,95.

$$w-\Delta p < p < w+ \Delta p;\ 1,5 - 0,3< p < 1,5 + 0,3;$$

$$1,2\ \% < p < 1,8\ \%.$$

ЗАДАЧИ

Задача 3.1. По данным выборочных обследований качества строительно-монтажных работ доля дефектности при кирпичной кладке составляет 0,1. Какой должна быть численность выборки при проверке качества кирпичной кладки, чтобы ошибка выборки с вероятностью 0,954 не превышала 2%?

Задача 3.2. Станок - автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовляемая деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

Задача 3.3. В компании осуществляется контроль за выпуском изделий типа А два раза в день путем проверки изделий, попавших в случайную выборку объемом в 150 единиц. Каждый экземпляр считается либо прошедшим приемку, либо бракованным. Результаты последних 20 выборок изделий, изготовленных работниками соответствующей квалификации на машине, тщательно подготовленной и отлаженной, с использованием хорошего сырья, послужили основой для построения контрольной карты по доле брака. Ниже приводятся соответствующие результаты.

Номер выборки	Число бракованных изделий на 150 шт.	Номер выборки	Число бракованных изделий на 150 шт.
1	2	3	4
1	4	11	2
2	1	12	4
3	6	13	8
4	3	14	3
5	4	15	5
6	7	16	4
7	3	17	6
8	9	18	5
9	6	19	3
10	5	20	2

Требуется: используя приведенные выше данные, построить контрольные карты для доли брака р. Определить контрольные границы.

Задача 3.4. Объем выполненных строительно-монтажных работ за отчетный квартал по СМУ-4 треста Жилгражданстрой составил 680 тыс.сум. На основе проведенных контрольных обмеров и других материалов приемочной комиссии были выявлены следующие работы, выполненные с нарушениями технических условий и недоделками, тыс.сум.:

неправильная кладка фундаментальных блоков, потребовавшая переделки и заделки швов	12,5
затраты на исправление	6,2
кладка стен 1-го этажа жилого дома №3	20,8
отделочные работы 2-го этажа	26,0
затраты на частичную переделку работ	8,6
устройство перекрытий здания детского сада	22,4
затраты на исправление недоделок	4,8

За поставку некачественных блоков и деталей взыскано с поставщиков 7,5 тыс. сум. С виновников, допустивших брак в работе, взыскано 3,5 тыс. сум.
Определите:
Абсолютные и относительные показатели объема работ, выполненных с нарушениями технических условий.
Абсолютную и относительную величину потерь от переделки некачественно выполненных работ.
Задача 3.5. По двум строительным управлениям треста "Жилстрой" имеются следующие данные о качестве жилищного строительства за отчетный год, м2:

Показатель	СМУ-8	СМУ-12
Жилищная площадь, введенная в эксплуатацию, - всего	22 400	16 200
в том числе с оценкой:		
"отлично"	6 000	5 200
"хорошо"	12 800	6 700
"удовлетворительно"	3 600	4 300

Стоимость работ низкого качества, подлежащих переделке, составила по СМУ-8 28,6 тыс. сум.; СМУ-12 – 34 тыс. сум.
Сопоставьте и проанализируйте показатели качества жилищного строительства по двум строительным организациям.
Задача 3.6. Построить контрольную карту приема манометров за декабрь, если средняя доля дефектных изделий - 3,5%, а значение среднего квадратического отклонения равно 0,918.
Задача 3.7. Известно, что на контроль поступила партия изделий в количестве 200 штук, причем производитель неоднократно поставлял недоброкачественную продукцию. С уровнем дефектности 4,0% установить режим контроля и разработать программу контроля, используя выписку из ГОСТа. Изменятся ли выводы, если приемочный уровень дефектности снизить до 2,5%?

Объем Партии	Объем Выборки	С1 и С2 при приемочном уровне дефектности					
		2,5		4,0		6,5	
		С1	С2	С1	С2	С1	С2
16-25	5	0	1	0	1	1	2
26-50	8	0	1	1	2	1	2
51-90	13	1	2	1	2	1	2
91-150	20	1	2	1	2	1	3

Задача 3.8. Используя данные задачи 3.7, предложить программу контроля партии изделий, если объем партии составляет 50 единиц, а уровень дефектности равен 4%. Как изменится вывод о принятии партии, если уровень дефектности повысить до 6,5%? Поставщик систематически поставляет качественную продукцию (с первого предъявления).

Задача 3.9. По приведенным ниже данным построить контрольную карту контроля продукции за декаду.

Число месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доля дефектных изделий, %	5,0	5,1	4,8	2,9	0,5	0,8	2,9	4.6	8,3	5,3

Задача 3.10. Число одних и тех же деталей с твердостью поверхности, равной 63 единицам по Роквеллу, в совокупности машин составляет 10. Из них в процессе эксплуатации в течение межремонтного периода отказали две детали. При твердости этих же деталей, равной 64 единицам по Роквеллу, вышли из строя также две детали из имевшихся 15. Определите вероятности безотказной работы деталей в обоих случаях.

Задача 3.11. Рассчитать число дефектных изделий в контрольно-измерительном приборе, если в нем используется 500 электронных компонентов, по каждому из которых число PPm=10.

Задача 3.12. На некотором станке выполняется резка стальной проволоки определенной длины. Наладка станка осуществлялась из расчета, что длина каждого отрезка составляет 100 мм. Контроль за работой ведет оператор. Из всей партии случайным образом было отобрано 60 отрезков проволоки и замерена их длина. Было установлено, что средняя длина одного куска проволоки составляет 100,1 мм, а стандартное отклонение равно 0,2 мм. Каковы производственные возможности этого станка? Какие управленческие решения должен принять менеджер для решения поставленной задачи в соответствии с требованиями спецификации и задаваемыми допустимыми отклонениями, если данный технологический процесс не удовлетворяет установленным требованиям?

Задача 3.13. Сравнить качество аналогичных изделий с помощью числа PPm, если:

Показатель	Изделие 1	Изделие 2
1.Число деталей 2.Число PPm для каждой детали 3.Объем партии	50 10 1000	55 12 1000

Задача 3.14. Используя данные задачи 3.13, решить производственную ситуацию: компания получила четыре заказа на стальные прутья. Спецификации и допустимые отклонения, соответствующие каждому заказу:

Заказ	Длина	Мм
1	2	3
1	100	+0,5
1	2	3
2	95	0,0 ÷ +10
3	105	+1,0
4	110	+0,7

Станок можно наладить на производство стальных прутьев необходимой длины, обычно такая переналадка осуществляется в расчете на середину интервала допустимых отклонений. Какой из этих заказов может быть выполнен на данном станке? Каковы должны быть действия специалиста из отдела продаж, если:

а) рассматриваемый станок - единственный вид оборудования, которым располагает фирма;

б) стальные прутья предназначены для использования внутри компании?

Нужно ли согласование данного вопроса с главным бухгалтером и технологами?

Задача 3.15. На предприятии оптовой торговли производится расфасовка продукции в упаковки объемом по 125 г. Известно, что фасовочный станок работает со стандартным отклонением в 0,15 г. Для обеспечения необходимого веса достаточно наладить станок на среднее значение в 125 г. Через каждые полчаса проводится случайная выборка объемом в пять упаковок. Каждую упаковку взвешивают. Результаты шести последовательных замеров приведены в таблице.

Номер выборки	1	2	3	4	5	6
Вес упаковки, г	125,1 125,3 125,1 124,8 125,1	124,9 125,0 125,1 124,9 124,7	125,2 125,1 124,3 125,0 125,1	125,0 125,0 124,7 125,2 125,1	124,8 124,8 125,2 125,1 124,9	124,0 125,1 125,0 124,9 125,2

Построить по этим данным контрольную карту арифметического среднего и описать функционирование процесса расфасовки.

Задача 3.16. В некоторой компании планируется использовать для производства медных дисков диаметром 25±2 мм штамповочный пресс. Производственная возможность пресса по данным измерений равна 0,28 мм. Требуется:

Определить, можно ли использовать данный пресс для производства дисков, удовлетворяющих спецификации.

Если ответ п.1 положительный, определить границы изменения среднего значения параметра наладки пресса таким образом, чтобы не производить диски, диаметр которых выходит за пределы, оговоренные в спецификации.

Задача 3.17. Компания производит некоторую продукцию А.

В течение времени, когда было точно известно, что технологический процесс находится под контролем, было проведено 25 выборок, каждая объемом в 100 единиц.

Оборудование было соответствующим образом налажено, использовалось сырье допустимого качества, наблюдение за ходом процесса осуществлял оператор соответствующей квалификации. Был произведен контроль изделий в каждой выборке.

В таблице приведены данные об обнаруженных бракованных изделиях.

Необходимо построить контрольную карту качественного признака (с использованием аппроксимации нормальным распределением).

Число бракованных изделий в каждой из 25 выборок

размером в 100 единиц

Номер выборки	Число бракованных изделий	Номер выборки	Число бракованных изделий
1	2	3	4
1	8	14	4
2	6	15	5
3	1	16	4
4	6	17	2
5	3	18	8
6	2	19	4
7	7	20	3
8	6	21	9
9	7	22	7
10	3	23	5
11	5	24	3
12	4	25	5
13	6		

Задача 3.18. Компания, указанная в задаче 4.17, продолжает осуществлять случайную выборку из готовой продукции, полученной в ходе данного технологического процесса, объемом в 100 единиц.

Задача 3.19. В таблице содержится информация о числе бракованных изделий в пятнадцати следующих друг за другом выборках. Используя эти данные, оценить, является ли технологический процесс контролируемым.

Число бракованных изделий на 15 выборок объемом в 100 штук

Номер выборки	Число бракованных изделий	Доля брака	Номер выборки	Число бракованных изделий	Доля брака
1	2	3	4	5	6
1	5	0,05	9	4	0,04
2	4	0,04	10	7	0,07
3	2	0,02	11	11	0,11
4	4	0,04	12	4	0,04
5	6	0,06	13	3	0,03
6	4	0,04	14	4	0,04
7	5	0,05	15	2	0,02
8	3	0,03			

Задача 3.20. Для производства стержней из нержавеющей стали диаметром 60,30±0,25 мм используется токарный станок. Производственная возможность станка по данным измерений, произведенных в нормальных условиях, составляет 0,40 мм. Требуется:

Определить, может ли токарный станок удовлетворить требуемой спецификации.

Имеется второй токарный станок, производственная возможность которого равна 0,60 мм. Может ли токарный станок удовлетворить спецификации на производство стальных стержней?

Предположим, что для выполнения этой операции должен использоваться токарный станок, о котором шла речь в п.2. Стержни с диаметром меньше оговоренного в спецификации придется выбросить, а стержни с диаметром большим оговоренного в спецификации можно после предварительной сортировки пустить в дальнейшую переработку. Каково среднее значение диаметра, на которое может быть настроен токарный станок, если стержни с диаметром, меньшим оговоренного в спецификации, должны появляться не чаще одного раза из 1000?Какую долю стержней при данном значении параметра нагрузки придется пустить в дальнейшую переработку?

Задача 3.21. Компания занимается изготовлением комплектов изделий. Она располагает режущими станками для нарезки заготовок из нержавеющей стали на отрезки определенной длины. Производственные возможности трех станков по данным измерений равны:

режущий станок А : 0,16 см;

режущий станок В : 0,29 см;

режущий станок С : 0,10 см.

Заготовки для производства отдельных изделий комплекта различны, и, следовательно, их нарезка осуществляется в соответствии с разными спецификациями:

комплектующие изделие А – длина равна 21,25 ± 0,06 см;

комплектующие изделие B – длина равна 20,00 ± 0,09 см;
комплектующие изделие C – длина равна 21,20 ± 0,16 см.
Требуется:
Определить при условии, что каждый из имеющихся режущих станков налажен на изготовление определенного вида заготовок в определенный момент времени, можно ли одновременно выпускать все три типа заготовок? Как в этом случае следует распределить заготовки по станкам?
Найти значение верхней и нижней границы наладки каждого станка.

Задача 3.22. Компания выпускает продукцию нескольких видов. В настоящее время фасовочный станок налажен на расфасовку продукции в упаковку (банки) по 425г. По данным измерений, проводимых в течение длительного периода времени, было установлено, что стандартное отклонение станка равно 10 г. Контроль за работой фасовочного станка осуществляется с помощью выборок объемом в 5 банок, которые производятся через каждые 20 минут. Содержимое каждой банки тщательно взвешивается. Требуется построить для фасовочного станка контрольные карты средних арифметических и устойчивости технологического процесса.
Ниже приведены результаты измерений для восьми выборок. Нанести эти показатели на контрольные карты. Описать работу фасовочного станка за период времени, в течение которого производились выборки.

Номер выборки	Вес банки				
1	453,3	417,5	423,2	424,3	407,3
2	393,8	411,2	433,5	426,5	428,8
3	374,0	419,3	422,2	427,8	428,8
4	447,7	416,5	431,8	425,5	407,3
5	461,8	413,7	428,2	423,2	428,0
6	379,7	405,2	427,8	433,7	424,7
7	439,2	423,7	406,8	407,2	426,3
8	447,7	431,8	422,2	426,3	429,2

Задача 3.23. Компания выпускает детали для производства автомобилей. На одной из производственных линий осуществляется нарезка и обработка стальных осей. Длина каждой из заготовок, нарезаемых в настоящее время, равна 6,65 см. По результатам наблюдений за режущим станком в условиях, когда его работа была контролируемой, было установлено, что стандартное отклонение технологического процесса составляет 0,07 см. Контроль за ходом процесса осуществляется с помощью случайных выборок в количестве 4 осей, производимых через каждые 30 мин., и точных замеров осей, попавших в выборку.

Требуется :

Построить для данного режущего станка контрольные карты средних арифметических, изменчивости технологического процесса и размаха.
Ниже в таблице приведены результаты измерений по последним десяти выборкам из деталей, изготовленных на данном станке.
Нанести эти данные на контрольные карты средних арифметических, изменчивости технологического процесса и размаха, построенные в п.1. Описать работу станка за период времени, в течение которого производились выборки.
При условии, что режущий станок был ошибочно налажен таким образом, что средняя длина заготовки оказалась равной 6,78 см, определить вероятность того, что ближайшая следующая выборка не обнаружит эту ошибку.
Повторить расчеты границ регулирования в контрольных картах средних арифметических и изменчивости технологического процесса в предположении, что стандартное отклонение технологического процесса неизвестно.

Номер Выборки	Длина стальной оси, см			
1	6,79	6,68	6,60	6,61
2	6,46	6,56	6,75	6,59
3	6,39	6,60	6,61	6,63
4	6,65	6,72	6,73	6,56
5	6,62	6,67	6,70	6,70
6	6,65	6,58	6,75	6,79
7	6,69	6,73	6,61	6,61
8	6,65	6,51	6,72	6,73
9	6,55	6,66	6,71	6,58
10	6,61	6,70	6,54	6,74

Задача 3.24. Осуществляется поставка продукции от внешнего поставщика. Случайным образом производится выборка, и попавшие в нее изделия подвергаются проверке. Система проверки характеризуется тремя параметрами - удельным весом бракованных изделий p, объемом выборки n и максимально допустимым числом бракованных изделий в выборке c. Схема выборки осуществляется с помощью n и c.
Построить кривую оперативной характеристики для следующих двух схем выборочного контроля.
Схема A. Объем выборки n=8, c=1, т.е. осуществляется приемка партий продукции, если число бракованных изделий в выборке не более одного включительно.
Схема B. Объем выборки n=16, c=2, т.е. осуществляется приемка партий продукции, если число бракованных изделий в выборке не больше двух включительно.

Значение доли бракованных изделий p изменяется от 0,05 до 0,4 с шагом 0,05. Если производитель и потребитель приходят к соглашению о том, что AQL равен 5%, риск производителя L=0,05, Если LTPD составляет 25%, а риск потребителя B=0,05, какая из схем будет предпочтительней в данной ситуации?

Задача 3.25. Компания выпускает пружины. По окончании процесса производства осуществляется контроль готовой продукции с использованием следующей схемы выборки: из каждой партии случайным образом отбирается 35 пружин. Если в выборке обнаружено не более одного бракованного изделия, то осуществляется приемка всей партии продукции.

Заказчик установил, что AQL равен 1%, а LTPD=10%. Определите риск производителя и риск потребителя.

Задача 3.26. Администрация некоторого промышленного предприятия собирается сравнить две следующие схемы выборочного контроля качества поступающих деталей:

1) схема A: n=12, c=1;
2) схема B: n=25, c=2.

Администрация считает приемлемым AQL, равный 4%, и LTPD, равный 25%.

Требуется:

Построить кривую оперативной характеристики для каждой из схем.

Сравнить обе схемы и определить, какая из них лучше.

Задача 3.27. На предприятие розничной торговли поступила партия швейных изделий. Опираясь на данные приложения 1, сделать заключение о качестве товара (то есть соответственно о принятии или непринятии партии на реализацию), если партия швейных изделий:

а) объемом 300 шт., при выборочном контроле забраковано 3 шт.;
б) объемом 450 шт., при выборочном контроле забраковано 5 шт.

Задача 3.28. Оценить качество поступившей партии товара выборочным методом контроля, если известно, что в магазин поступила партия сорочек объемом в 200 шт., упакованная в 10 ящиков. Количество ящиков, подлежащих отбору, должно соответствовать указанным в таблице. Из проверенных изделий 5 шт. не соответствовали образцу-эталону при том, что партия товара может быть принята, если число забракованных изделий не превышает 5% от размера выборки.

Количество ящиков	Количество ящиков, подлежащих отбору
1-5	Все
6-99	5 штук
100-399	5%
400 и более	20 штук

Задача 3.29. При контрольной проверке качества поступивших в магазин овощей произведена 12% серийная выборка. Из партии, содержащей 50 ящиков (вес ящиков одинаков), методом механического отбора взято 6 ящиков.

Требуется с вероятностью 0,99 установить доверительные интервалы удельного веса бракованной продукции для всей партии овощей, если в результате сплошного обследования находившихся в ящике овощей были получены следующие данные об удельном весе брака:

№ ящика, попавшего в выборку	1	2	3	4	5	6
Удельный вес бракованной продукции, %	1,4	1,6	1,2	1,8	2	1,6

Задача 3.30. На складе оптового продуктового магазина ведется непрерывный контроль температуры и относительной влажности помещения в течение двух недель. Данные представлены в таблице:

Номер замера	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Температура, °С	24	25	22	26	28	25	24	25	23	23	22	21	23	24
Относительная влажность, %	72	72	75	78	75	72	72	73	74	72	71	72	73	72

Необходимо построить контрольную карту стабильности процесса хранения по обоим параметрам и оценить результаты.

Задача 3.31. На предприятие общественного питания поступила партия мясных полуфабрикатов в количестве 1000 шт. Для проверки качества поступившей продукции было отобрано 100 образцов (случайный бесповторный отбор), из которых 12 оказались не соответствующего нормативному образцу качества. Необходимо определить с вероятностью 0,995 пределы, в которых будет находиться процент брака для всей партии продукции.

УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ (КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ, УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ)

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1. Основные понятия планирования эксперимента.

План:

Что такое планирование эксперимента.
Задачи, в которых используется планирование эксперимента.
Понятие объекта исследования.
Заключение к лекции.

1. Что такое планирование эксперимента

Из названия видно, что речь идёт об экспериментальных методах. Большинство научных исследований связано с экспериментом. Он проводится в лабораториях, на производстве, на опытных полях и участках, в клиниках и т.д. эксперимент может быть физическим, психологическим и модельным. Он может непосредственно проводиться на объекте или на его модели. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда природой.
Как вы считает, можно ли поставить эксперимент на абстрактной математической модели?
Если модель достаточно точно описывает объект, то эксперимент на объекте может быть заменен экспериментом на модели. В последнее время наряду с физическими все большее распространение получают абстрактные математические модели. Можно получать новые сведения об объекте, экспериментируя на модели, если она достаточно точно описывает объект.
Эксперимент занимает центральное место в науке. Однако возникает вопрос, насколько эффективно он используется. Джон Бернал, например, отмечал, что научные исследования организуется и проводятся насколько хаотично, что их коэффициент полезного действия может быть оценен величиной порядка 2%.
Для того чтобы повысить эффективность исследований, требуется нечто совершенно новое. Одним из возможных путей является применение математических методов, построение математическое теории планирования экчперимента.
Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.
При этом существенно следующее:
- стремление к минимизации общего числа опытов;
- одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

2. Задачи, в которые используется планирование эксперимента.

Задачи, для решения которых может использоваться планирование эксперимента, чрезвычайно разнообразны.

Поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, выбор существенных факторов, оценка и уточнение констант теоретических моделей (например, кинетических), выбор наиболее приемлемых из некоторого множество гипотез о механизме явлений, исследование диаграмм состав – свойство – вот примеры задач, при решении которых применяется планирование эксперимента. Можно сказать, что там, где есть эксперимент, имеет место и наука о его проведении – планирование эксперимента.

Поиск оптимальных условий является одной из наиболее распространенных научно – технических задач. Они возникают в тот момент, когда установлено возможность проведения процесса и необходимо найти наилучшее (оптимальные в некотором смысле) условия его реализации.

Пусть, например, у химика возникла гипотеза о том, что при взаимодействии двух веществ должен поучаться некоторый интересующий его продукт. Чтобы убедится в правильности своей гипотезы, он начинает проводить эксперимент. Возможно, что ему повезло и он получил требуемый продукт. Однако выход продукта весьма низок, скажем, 2%. Вот, тут – то и возникает задача выбора оптимальных условий. Требуется как подобрать концентрации реагирующих веществ, температуру, давление, время реакции и другие факторы, чтобы сделать выход возможно более близким к 100%. В данном примере находятся условия провидения процесса, оптимальные в смысле максимизации выхода требуемого продукта. Но это далеко не единственно возможная постановка задачи. Найденные условия оказались бы другими, если бы ставилась, например, цель минимизации себестоимости продукта или минимизации количество вредных примесей. Следует подчеркнуть, что всегда необходимо четко формулировать, в каком смысле условия должны быть оптимальными. Этим определяется выбор цели исследования. Точная формулировка цели в значительное мере определяет успех исследования.

Задачи, сформулированные аналогичным образом, называются задачами оптимизации или просто оптимизацией. Выбор оптимального состава много компонентных смесей или сплавов, повышение производительности действующих установок, повышение качества продукции, снижение затрат на ее получение – вот примеры задач оптимизации.

Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации, называется экстремальным. Это названия связано с глубокой аналогией между оптимизацией и поиском экстремума некоторой функции. Давайте рассмотрим следующие две задачи.

1. Прочность бетона в значительной степени определяется маркой цемента, количеством наполнителя и количеством воды. Требуется установить связь между прочностью бетона и названными факторами.

2. Надёжность некоторого полупроводникового прибора зависит от ряда технологических факторов. Требуется так подобрать значения этих факторов, чтобы надёжность прибора повысилась.

Как вы думаете, какая из этих задач является экстремальной?

Чтобы облегчить вам выбор, укажем на признак, отличающий экстремальные задачи. Задача является экстремальной, если цель ее состоит в поиске экстремума некоторой функции. Чтобы установить, какая из двух задач является экстремальной, надо обратиться к их формулировкам и выяснить, где удовлетворяются требования экстремальности. В задаче 1 требуется установить связь между прочностью бетона и тремя факторами. Здесь не определено, какая прочность является оптимальной, и не требуется ее оптимизировать. В задаче 2 необходимо повысить надежность прибора. Сама постановка задачи указывает на то, что существующая надежность не удовлетворяет экспериментатора и требуется поиск таких условий, при которых ее значения повысятся. Задача типа 1 мы будем называть интерполяционнььми, а типа 2 — экстремальными.

3. Понятие объекта исследования.

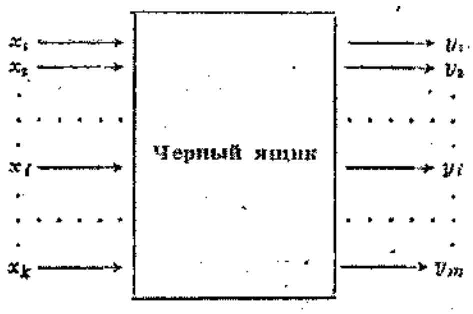


Рис. 1. Схема черного ящика

Чтобы продвинуться дальше, нам придется определить еще ряд важных понятий, первое из которых - «объект исследования». Для описания объекта исследования удобно пользоваться представлением о кибернетической системе, которая схематически изображена на рис. 1. Иногда такую кибернетическую систему называют «черным ящиком». Стрелки справа изображают численные характеристики целей исследования. Мы обозначаем их буквой игрек y и называем параметрами оптимизации. В литературе вы можете встретить другие названия: критерий оптимизации, целевая функция, выход «черного ящика» и т.д.

Для проведения эксперимента необходимо иметь возможность воздействовать на поведение «черного ящика». Все способы такого воздействия мы обозначаем буквой икс x и называем факторами. В решении задачи будем использовать математические модели объекта исследования. Под математической моделью мы понимаем уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде можно записать так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k),$$

Где символ (φ), как обычно в математике, заменяет слова: «функция от». Такая функция называется функцией отклика. Позже мы рассмотрим вопрос о том, как эту функцию можно выбрать и построить. А сейчас можно понять, как получаются условия проведения опытов в том эксперименте, который мы собираемся провести.

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений. Такие значения будем называть уровнями: Может оказаться, что фактор способен принимать бесконечно много значений (непрерывный ряд). Однако на практике точность, с которой устанавливается некоторое значение, не беспредельна. Поэтому мы вправе считать, что всякий фактор имеет определенное число дискретных уровней. Это соглашение существенно облегчает построение «черного ящика» и эксперимента, а также упрощает оценку их сложности.

Фиксированный набор уровней факторов (т.е. установление каждого фактора на некоторый уровень) определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные наборы состояний, то мы получим полное множество различных опытов.

Чтобы узнать число различных состояний, достаточно число уровней факторов (если оно для всех факторов одинаково) возвести в степень числа факторов k: p^k, где p - число уровней. Кроме того, вы увидите, что реальные объекты, с которыми вы сталкиваетесь, ежедневно, обладают огромной сложностью. Так, на первый взгляд простая система с пятью факторами на пяти уровнях их уже свыше миллиона!

В этих условиях мы проста вынуждены отказаться от таких экспериментов, которые включают все возможные опыты: перебор слишком велик. Тогда возникает вопрос: сколько и каких опытов надо включить в эксперимент, чтобы решить поставленную задачу? Здесь-то и приходит на помощь планирование эксперимента.

Однако нужно иметь в виду, что при планировании эксперимента не безразлично, какими свойствами обладает объект исследования. Укажем два основных требования, с которыми приходится считаться. Прежде всего существенно, воспроизводятся ли на объекте результаты эксперимента. Выберем некоторые уровни для всех факторов и в этих условиях проведем эксперимент. Затем повторим его несколько раз через неравные промежутки времени и сравним значения параметра оптимизации. Разброс этих значений характеризует воспроизводимость результатов. Если он не превышает некоторой заранее заданной величины (наших требований к точности эксперимента), то объект удовлетворяет требованию воспроизводимости результатов, а если превышает, то не удовлетворяет этому требованию. Мы будем рассматривать только такие объекты, для которых требование воспроизводимости выполняется.

Планирование эксперимента предполагает активное вмешательство в процесс и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют интерес. Поэтому такой эксперимент называется активным. Объект, на котором возможен активный эксперимент, называется управляемым. Это и есть второе требование к объекту исследования.

На практике нет абсолютно управляемых объектов. На реальный объект обычно действуют как управляемые, так и неуправляемые факторы. Неуправляемые факторы влияют на воспроизводимость эксперимента и являются причиной ее нарушения. Если требования воспроизводимости не выполняется, приходиться обращаться к активно - пассивному эксперименту.

Возможно, плохая воспроизводимость объясняется действием фактора, систематически изменяющегося (дрейфующего) во времени. Тогда нужно обращться к специальным методом планирования. Наконец, возможно, что все факторы неуправляемы. В этом случае возникает задача установления связи между параметром оптимизации и факторами по результатам наблюдений за поведением объекта, или как говорят, по результатам пассивного эксперимента(7). Эти случаи мы не будем рассматривать. Наша цель – изложение методов планирования экстремального эксперимента для воспроизводимых управляемых статических объектов.

Планирование экстремального эксперимента - это метод выбора количества и условий проведения опытов, минимально необходимых для отыскания оптимальных условий, т. е. для решения поставленной задачи.

Приступая к знакомству с планированием экстремального эксперимента, надо иметь в виду, что при оптимизации распространен так называемый детерминированный подход, особенно широко используемый в химии. При этом предполагается построение физической модели процесса на основании тщательного изучения механизма явлений (например, кинетики, гидродинамики), что позволяет получить математическую модель объекта в виде системы дифференциальных уравнений. Несомненно, что детерминированный и статический (связанный с планированием эксперимента) подходы должны разумно дополнять друг друга, а не противопоставляться как это иногда делается.

Теперь можно считать, что основные определения введены, и мы готовы перейти к детальному рассмотрению нашей задачи. Но сначала подведем итог.

4 Заключение к лекции.

Мы познакомились с основными определениями, которые используются в теории планирования эксперимента. Прежде чем приступать эксперименту, необходимо однозначно и непротиворечиво сформулировать его цель и выбрать подходящую количественную характеристику этой цели, которую мы назвали параметром оптимизации.

Понятие «объект исследования» требует точного формального определения. Для такого определения удалось приспособить кибернетическое понятие «черный ящик» - модель объекта. Экспериментатор, вставший на путь применения методов планирования эксперимента, должен уметь формулировать свою задачу в терминах «черного ящика».

Входы «черного ящика» называется факторами. Каждый фактор может принимать некоторое определенное число различных значений, называемых уровнями. Сочетание определенных уровней всех факторов определяет возможное состояние «черного ящика» и условия одного из возможных опытов.

Совокупность всех различных возможных состояний определяет сложность «черного ящика» и обшее число возможнш опыгов.

Результаты эксперимента используются для получения математической модели объекта исследования, которая представляет собой уравнение, связываюшее параметр оптимизации и факторы. Такое уравнение называется функцией отклика.

Использование для получения модели всех возможных опытов приводят к абсурдно большим экспериментам. Задача выбора необходимых для эксперимента опытов, методов математической обработки их результатов и принятия решений - это и есть задача планирования эксперимента. Частный случай этой задачи - планирование экстремального эксперимента, т. е. эксперимента, поставленного с целью поиска оптимальных условий функционирования объекта. Планирование экстремального эксперимента методов выбора минимального количество опытов, необходимых для отыскания оптимальных условий.

Лекция 2. Методы регрессионного анализа.

План:

Основные вопросы регрессионного анализа.

Обобщенная математическая модель процесса или объекта.

Основы регрессионного анализа.

Линейная регрессия от одного параметра.

1. Основные вопросы регрессионного анализа.

В тех случаях, когда информации о рассматриваемом процессе недостаточно или процесс настолько сложен, что невозможно составить его детерминированную модель, прибегают к экспериментально-статистическим методам. Процесс при этом рассматривают как «черный ящик». Различают пассивный и активный эксперимент.

Пассивный эксперимент является традиционным методом когда ставится большая серия опытов с поочередным варьированием каждой из переменных. К пассивному эксперименту относится также сбор исходного статистического материала в режиме нормальной эксплуатации на промышленном объекте. Обработка опытных данных в этом случае для получения математической модели проводится методами классического регрессионного и кореляционного анализа.

Активный эксперимент ставится по заранее составленному плану (планирование эксперимента), при зтом предусматривается одновременное изменение всех параметров, влияющих на процесс, что позволяет сразу установить силу взаимодействия параметров и поэтому сократить общее число опытов.

Используя прп обработке опытных данных принципы регрессионного и корреляционного анализа, удается найти зависимость между переменными и условиями оптимума. В обоих случаях математической моделью является функция отклика, связывающая параметр оптимизации, характеризующий результаты эксперимента, с переменными параметрами, которыми экспериментатор варьирует при проведении опытов:

$$y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k) \qquad (1)$$

Принято называть независимые переменные x1, x2,… x факторами, координатное пространство с координатами x1, x2,… xк — факторным пространством, а геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве — поверхностью отклика.

Эту поверхность можно иредставить в виде контурной диаграммы (рис. 1), отражающей, например, зависимость выхода реакции (в %) от температуры и концентрации. В рассматриваемом случае оптимальный выход сосредоточен в малой области поверхности. Если бы опыты и их обработка осуществлялись традиционным методом, когда изменяется только одна переменная, а все остальные поддерживаются постоянными, возникала большая вероятность попасть в ложный оптимум (точки на рис. 1). В то же время планирование эксперимента позволяет быстро выйти в район оптимума (крестики на рис. 1), двигаясь вдоль линии АВ.

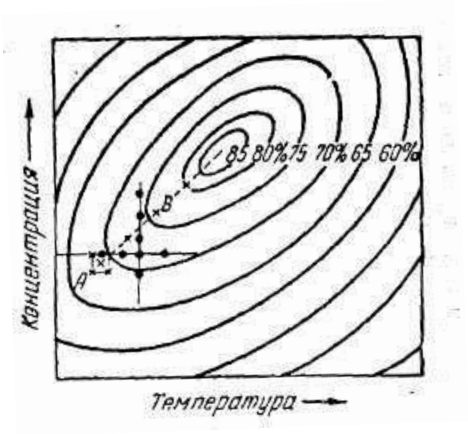


Рис 1. Поверхност отклика с оптимумом.

2. Обобщенная математическая модель процесса или объекта.

При использовании статистических методов математическая модель представляется в виде полинома – отрезка ряда Тейлора, в который разлагается неизвестная зависимость (1):

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{u,j=1 u \neq 1}^{k} \beta_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_j^2 + \ldots \qquad (2)$$

где $\beta_j = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=0}$ $\beta_{uk} = \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_u \partial x_j}\right|_{\vec{x}=0}$ $\beta_{jj} = \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}\right|_{\vec{x}=0}$

В связи с тем, что в реальном процессе всегда существует неуправляемые и неконтролируемые переменные, изменение величины носит случайный характер. Поэтому при обработки экспериментальных данных получаются так называемые выборочные коэффициенты регрессии b0, bi, buj, bjj, являющиеся оценками теоретических коэффициентов $\beta_0, \beta_j, \beta_{uj}, \beta_{jj}$. Уравнение регрессии, полученное на основании опыта, запишется следующим образом:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{u,j=1}^{k} b_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^{k} b_{jj} x_j^2 + \ldots \quad (3)$$

Коэффициент b0 называют свободным членом уравнения регрессии; коэффициенты bj – линейным эффектами; коэффициенты bjj – квадратичными эффектами; коэффициенты buj – эффектами взаимодействия.

Коэффициенты уравнения (3) определяются методом наименьших квадратов из условия:

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min \quad (4)$$

Здесь N – объем выборки из всей совокупности значений исследуемых параметров. Разность между объемом выборки N и числом связей, наложенных на эту выборку l, называется числом степеней свободы выборки f:

$$f = N - l \quad (5)$$

При отыскании уравнения регрессии число связей равно числу определяемых коэффициентов.

В табл. 1 показано число коэффициентов, которые должны быть определены, чтобы получит уравнения (полиномы) различных степеней для условия от 2 до 5 независимых параметров.

Таблица 1.

Число факторов (независимых параметров)	Степенное уравнение			
	Первой степени	Второй степени	Третьей степени	Четвертой степени
Число коэффицентов				
2	3	6	10	15
3	4	10	20	35
4	5	15	35	70
5	6	21	56	126

Из таблицы 1 следует, что число коэффициентов, подлежащих определению, увеличивается быстро как с числом независимых параметров, так и с порядком уравнения.

Вид уравнения регрессии выбирается путем экспериментального подбора.

3. Основы регрессионного анализа.

При изучении зависимости от одного переменного параметра полезно для определения вида уравнения регрессии построить эмпирическую линию регрессии. Для этого весь диапазон изменения x на поле корреляции (рис. 2) разбивается на разные интервалы Δx. Все точки, попавшие в данный интервал Δx_j, относят к его середине x_j. Для этого подсчитывают частные средние $\bar{y}_j$ для каждого интервала:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}}{n_j} \qquad (6)$$

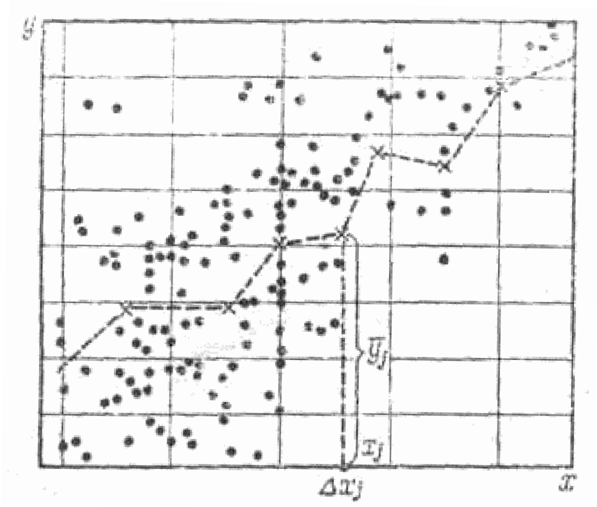


Рис.2. Корреляционное поле.

Здесь n_j – число точек в интервале Δx_j.

$$\sum_{j=1}^{k} n_j = N \qquad (7)$$

где k – число интервалов разбиения; N – объем выборки.

Затем последовательно соединяют точки (xj, $\bar{y}_j$) отрезками прямой. Полученная ломаная называется эмпирической линией регрессии y по x. По виду эмпирической линии регрессии можно подобрать уравнение регрессии $\hat{y} = f(x)$. Задача определения параметров уравнения регрессии сводится практически к определению минимума функции многих переменных. Если

$$\hat{y} = f(x, b_0, b_1, b_2, ...) \qquad (8)$$

есть функция дифференцируемая и требует b0, b1, b2, … выбрать так, чтобы

$$\phi = \sum_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i, b_0, b_1, b_2, ...)]^2 = \min \qquad (9)$$

необходимым условием минимума $\phi(b_0, b_1, b_2, ...)$ является выполнение равенств

$$\frac{\partial\phi}{\partial b_0} = 0 \qquad \frac{\partial\phi}{\partial b_1} = 0 \qquad \frac{\partial\phi}{\partial b_1} = 0 \qquad ... \qquad (10)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} 2[y_i - f(x_i, b_0, b_1, b_2, ...)]^2 \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_0} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{N} 2[y_i - f(x_i, b_0, b_1, b_2, ...)] \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_1} = 0 \\ &.. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

После преобразования получим:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_0} - \sum_{i=1}^{N} f(x_i, b_0, b_1, b_2, ...) \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_0} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_1} - \sum_{i=1}^{N} f(x_i, b_0, b_1, b_2, ...) \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_1} = 0 \\ &.. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Система уравнений (12) содержит столько же уравнений, сколько неизвестных коэффициентов b0, b1, b2, … входит в уравнение регрессии и называется математической статистике системой нормальных уравнений.

Величина Φ≥0 при любых b0, b1, b2, …; следовательно, у нее обязательно должен существовать хотя бы один минимум. Поэтому, если система нормальных уравнений имеет единственное решение, то оно и является минимумом для величины Φ. Решать систему (12) в общем виде нельзя. Для этого надо задаться конкретным видом функции f.

4. Линейная регрессия от одного параметра.

Требуется определить по методу наименьших квадратов коэффициенты линейного уравнения регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \qquad (13)$$

По выборке объема N.

Система нормальных уравнений для этого случая имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_i) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} y_i x_i - \sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_i) x_i = 0$$

или

$$Nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \qquad b_0\sum_{i=1}^{N} x_i + b_1\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \tag{14}$$

Коэффициенты b0 и b1 легко найти в этом случае с помощью определителей

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} \tag{15}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} \tag{16}$$

Для оценки силы линейной связи (16) вычисляется выборочный коэффициент корреляции :

$$r^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(N-1)s_x s_y} \tag{18}$$

где $s_x s_y$ – выборочные среднеквадратические отклонения.
Из уравнений (16) и (18) имеем:

$$r^* = \frac{b_1 s_x}{s_y} = b_1 \sqrt{\frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} y_i)^2}} \tag{19}$$

После того как уравнение регрессии найдено, необходимо провести статический анализ результатов. Этот анализ состоит в следующем: проверяется значимость всех коэффициентов регрессии в сравнении с ошибкой воспроизводимости и устанавливается адекватность уравнения. Такое исследование носит название регрессионного анализа.

Лекция №3 Методы корреляционного анализа

План:

Общие вопросы корреляционного анализа.
Метод множественной корреляции.
Нормировка для перехода от натуральных значения параметров к кодировании.
Множественная корреляция.

Общие вопросы корреляционного анализа.
Если считать, что уравнение регрессии найдено с достаточной точностью, то остаточная дисперсия обусловлена только наличием дисперсии воспроизводимости, т.е.

$$s_{ост}^{2} \approx s_{воспр}^{2} \qquad (1)$$

Чем меньше доля $s_{ост}^2$ в общей дисперсии s_y^2, тем сильные связь между у и х, ибо тем меньше доля случайности в этой связи. Поэтому силу связи можно характеризовать величиной

$$\xi = \frac{(N-1)s_{ост}^2}{(N-1)s_y^2} \qquad (2)$$

Связь тем сильнее, чем меньше ξ. Величина

$$\sqrt{1-\xi} = \theta \qquad (3)$$

называется корреляционным отношение. Чем больше θ, тем сильнее связь

$$0 \le \theta \le 1 \qquad (4)$$

Если $\theta = 1$, существует функциональная зависимость между параметрами. При $\theta = 0$, однако, величины у и х нельзя считать независимыми, так как связь между ними, не сказываясь на дисперсиях, может проявить себя в моментах более высокого порядка. Только в случае нормального распределения равенство нулю корреляционного отношения однозначно свидетельствует об отсутствии связи между случайными величинами. Корреляционное отношение, как и коэффициент корреляции в линейной регрессии, характеризует тесноту связи между случайными величинами. Вообще анализ силы по 0 называют корреляционным анализом.

В случае линейной регрессии корреляционное отношение равно коэффициенту корреляции:

$$\theta = \sqrt{1 - \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{s_{ост}^2}{s_y^2}} = r^* \qquad (5)$$

2. Метод множественной корреляции. Если необходимо исследовать корреляционную связь между многими величинами, пользуются уравнениями множественной регрессии:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_k x_k \qquad (6)$$

Здесь мы имеем дело уже не с линией регрессии, а с поверхностью регрессии при k=2 и с гиперповерхностью при k >2. В общем случае, как указывалось выше, эту поверхность называют поверхностью отклика.
При построении поверхности отклика на координатных осях факторного пространства откладываются численные значения параметров (факторов). Исходный статистический материал представляют в виде табл. 1
Таблица 1

№ опыта	x1	x2	x3	…	xk	y
1	x11	x21	x31		xk1	y1
2	x12	x22	x32		xk2	y2
3	x13	x23	x33		xk3	y3
.	.	.	.		.	.
.	.	.	.		.	.
.	.	.	.		.	.
N	x1N	x2N	x3N		xkN	yN

3. Нормировка для перехода от натуральных значений параметров к кодированным.
Прежде всего перейдем от натурального масштаба к новому, проведя н о р м и р о в к у всех значений случайных величин по формулам:

$$y_i^0 = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \qquad x_{ji}^0 = \frac{x_{ji} - \bar{x}_j}{s_{x_j}} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,...,N \\ i = 1,2,...,k \end{matrix} \qquad (7)$$

где y_i^0, x_{ji}^0 – нормированные значения соответствующих факторов;
$\bar{y}, \bar{x}$ – средние значения факторов; s_y, s_{x_j} – среднеквадратичные отклонения факторов:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{N-1}} \qquad s_{x_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_{ji} - \bar{x}_j)^2}{N-1}} \qquad (8)$$

В табл. 2 приведен исходный статистический материал в новом масштабе:

Таблица 2

№ опыта	x_1^0	x_2^0	x_3^0	…	y^0
1	x_{11}^0	x_{21}^0	x_{31}^0		y_1^0
2	x_{12}^0	x_{22}^0	x_{32}^0		y_2^0
3	x_{13}^0	x_{23}^0	x_{33}^0		y_3^0
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
N	x_{1N}^0	x_{2N}^0	x_{3N}^0		y_N^0

В новом масштабе имеем:

$$\bar{x}_j^0 = 0 \qquad \bar{y}_0 = 0$$
$$s_{x_j^0} = 1 \qquad s_{x^3} = 1 \qquad (9)$$

Выборочный коэффициент корреляции при этом равен:

$$\left.\begin{array}{l} r^*_{y^0 x_j^0} = \dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} y_i^0 x_{ji}^0 \\ r^*_{x_i^0 x_m^0} = \dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} x_{li}^0 x_{mi}^0 \\ l > m \;\; l,\, m = 1, 2, \ldots, k \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Вычисленный по формуле (10) выборочной коэффициент корреляции равен коэффициенту корреляции между переменными, выраженными в натуральном масштабе r^*_{yx}.

Уравнение регрессии между нормированными переменными не имеет свободного члена и принимает вид:

$$\hat{y}^0 = a_i x_1^0 + a_2 x_2^0 + ... + a_k x_k^0 \qquad (11)$$

Коэффициенты уравнения (6) находится из условия:

$$S = \sum_{i=1}^{N} (y_i^0 - \hat{y}_i^0)^2 = \min \qquad (12)$$

Условия минимума функции S определяются так же, как в случае зависимости от одной переменной:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 ... \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \qquad (13)$$

и система нормальных уравнений имеет вид:

$$a_i \sum_{i=1}^{N} (x_{1i}^0)^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^0 x_{2i}^0 + ... + a_k \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^0 x_{ki}^0 = \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^0 y_i^0$$
$$a_i \sum_{i=1}^{N} (x_{2i}^0 x_{1i}^0 + a_2 \sum_{i=1}^{N} (x_{2i}^0)^2 + ... + a_k \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^0 x_{ki}^0 = \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^0 y_i^0$$

....

....]

$$a_i \sum_{i=1}^{N} (x_{ki}^0 x_{1i}^0 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_{ki}^0 x_{2i}^0 + ... + a_k \sum_{i=1}^{N} (x_{ki}^0)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_{ki}^0 y_i^0 \qquad (14)$$

Умножим левую и правую части уравнений на 1/(N – 1). В результате при каждом коэффициенте aj получается, согласно формуле (14), выборочный коэффициент корреляции r*. Принимая ва внимание, что

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_{ji}^0)^2 = s_{x_j^0}^2 = 1 \qquad (15)$$

получаем систему нормальных уравнений

$$a_1 + a_2 r_{x_1x_2}^* + a_3 r_{x_1x_3}^* + ... + a_k r_{x_1x_k}^* = r_{yx_1}^*$$
$$a_1 r_{x_2x_1}^* = a_2 + a_3 r_{x_2x_3}^* + ... + a_k r_{x_2x_k}^* = r_{yx_2}^*$$

....

....

$$a_1 r_{x_kx_1} + a_2 r_{x_kx_2} + a_3 r_{x_kx_3} + ... + a_k = r_{yx_k}^* \qquad (16)$$

4. Множественная корреляция.

Следует иметь в виду, что $r^*_{x_l x_m} = r^*_{x_m x_l}$. Коэффициенты корреляции легко вычисляются простым перемножением соответствующих столбцов табл.2. Для многопараметрических процессов система (16) оказывается высокого порядка и для ее решения необходимо использовать вычислительную машину.

Решив систему (16), рассчитывают к о э ф ф и ц и е н т м н о ж е с т в е н н о й к о р р е л я ц и и

$$R = \sqrt{a_1 r^*_{yx_1} + a_2 r^*_{yx_2} + \ldots + a_k r^*_{yx_k}} \qquad (17)$$

Коэффициент множественной корреляции служит показателем силы связи в случае множественной регрессии:

$$0 \le R \le 1 \qquad (18)$$

В случае выборок небольшого объема в величину R необходимо внести на систематическую ошибку. Чем меньше число степеней свободы выборки f = N – l, тем сильные преувеличивается сила связи, оцениваемая коэффициентом множественной корреляции. Формула для коррекции:

$$R' = \sqrt{1 - (1 - R^2)\frac{N-1}{N-l}} \qquad (19)$$

где R' – скорректированное значение коэффициента множественной корреляции; l – число коэффициентов уравнения регрессии (в случае формулы величина l = k+1).

Для практического использования уравнения (12) необходимо перейти к натуральному масштабу по формулам:

$$b_j = a_j \frac{s_y}{s_{x_j}} \qquad j = 1, 2, \ldots, k \qquad j \neq 0 \qquad (20)$$

$$b_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^{k} b_i \bar{x}_j$$

При наличии параллельных опытов можно рассчитать дисперсию воспроизводимости и провести статический анализ уравнения регрессии.

Лекция №4. Виды и типа экспериментов

План.

Роль эксперимента в науке и технике.

Общие вопросы понятия эксперимента.

Основные виды и типа экспериментов.

Лабораторные и промышленные эксперименты

1. Роль эксперимента в науке и технике.
Во многих областях научной и практической деятельности современного человека значительное место занимают теоретические методы изучения различных объектов и процессов окружающего нас мира. Так, в металлообработке различными методами (литьем, обработкой давлением или на металлорежущих станках) более широкое применение находят результаты, полученные на основе теоретического решения задач теории пластичности, механики жидкости и газов, физики металлов, феноменологической теории разрушения материалов и других теоретических дисциплин. Однако, несмотря на высокую эффективность теоретических методов, при рассмотрении конкретных технологических проблем, особенно в условиях действующего производства, инженеру зачастую приходится сталкиваться с задачами, решение которых практически невозможно без организации и проведения того или иного экспериментального исследования.
Эксперимент является источником познания и критерием истинности теорий и гипотез как в науке, так и в инженерной практике эксперименты проводятся везде – на действующем производстве и в лабораториях НИИ и ВУЗов, в медицинских клиниках на сельскохозяйственных объектах, космосе и в глубинах океана. (Примеры).
Хотя объекты исследований очень разнообразны, методы экспериментальных исследовании имеют много общею:
– каким бы простым ни был эксперимент, вначале выбирают план его проведения;
– стремится сократить число рассматриваемых переменных, для того чтобы уменьшить объем эксперимента;
– стараются контролировать ход эксперимента;
– пытаются исключить влияние случайных внешних воздействий;
– оценивают точность измерительных приборов и точность получения данных;
– и наконец, в процессе любого эксперимента анализируют полученные результаты и стремятся дать их интерпретацию, поскольку без этого

решающего этапа весь процесс экспериментального исследования не имеет смысла.

К сожалению, зачастую работа экспериментатора настолько хаотична и неорганизованна, а ее эффективность так мала, что полученные результаты в состоянии оправдать даже тех средств, которые были израсходованы на проведение опытов. Поэтому вопросы организации эксперимента, снижения затрат на его проведение и обработку полученных результатов являются весьма и весьма актуальными.

2. Общие вопросы понятия эксперимента. Рассмотрим различные определения термина «эксперимент». Чаще всего его объединяют с понятием опыта, так как любой эксперимент предполагает проведение тех или иных опытов.

При этом под термином «опыт» понимают воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов.

Эксперимент с общефилософской точки зрения (от латинск. experimentum – проба, опыт) – это воспроизведение объекта познания, проверка научных гипотез и т.п.

– в результате эксперимента необходимо установить количественную зависимость между пластичностью проволоки и параметрами процесса термообработки, с учетом тех возможных колебаний химического состава, которые допустимы для данной марки стали.

Количественный эксперимент не только фиксирует факт существования исследуемого явления, но, кроме этого, позволяет установить соотношения или зависимости между количественными характеристиками явления и количественными характеристиками способов внешнего воздействия на объект исследования.

В настоящее время планирование и обработка результатов инженерных экспериментов не мыслима без использования компьютерных методов статистической обработки однако, никакие возможности современного пользовательского интерфейса не освобождает пользователей компьютера от необходимости изучения и понимания сути статистических методов, реализованных в таких системах.

3. Основные виды и типа экспериментов.

Эксперимент считают статистическим, если его результат зависит от случайных величин. Однако, не всякий эксперимент можно отнести к типу статистических. Есть класс экспериментов, где влияние случайной величины очень мало. Другой класс экспериментов составляют такие, в которых ошибка измерений меньше заданий величины, но закон её распределения неизвестен.

С появлением ЭВМ от реальных экспериментальных устройств стали переходить к математическому описанию эксперимента и разрабатывать его математическую модель. При этом эксперимент направлен не на изучение природа исследуемого процесса, а на изучение его модели. Такой эксперимент направлен не на изучение природа исследуемого процесса, а на изучение его модели. Такой эксперимент называют имитационным, он также как статистический направлена реализацию случайной функции у (х, со) при заданных значениях X.

При построении модели эксперимента важного роль играет априорная информация, которая составляет все, что известно исследователю до проведения эксперимента об изучаемом в его процессе явлении. Как этом свиданиям относятся физические представления и анализ данных предшествующих экспериментов. Для построении математической модели априорная информация должно быть формализовано.

При имитационном эксперимента исследование изучаемого явления выполняется на ЭВМ или другом устройстве, позволяющем воспроизводит этой явления с приемлемой точности. ……

Экспериментальный или поисковая эксперимент – это такой эксперимент, при котором определяются экстремальные значения функции регрессии или комбинация факторов, при которых функции регрессии или комбинация факторов, при которых функция отклика принимает экстремальные значения. Планирование такого стороны, и методами стохастического планирования, с другой стороны.

Планирование экстремальных экспериментов является частью теории адаптивного управления.

Отсеивающий эксперимент – это такой эксперимент, задача которого заключается в выделении и определенные значимых факторов. Это связана с тем, что во многих явлениях, зависящих от большого числа факторов существует некоторых количество значимых факторов можно считать не превосходящими ошибку, или погрешность эксперимента.

Эксперимент дискриминирующий, целью которого является проверка конкретной статистической гипотезы, применяют в тех случаях, когда возникает необходимость отыскания функции, совпадающей с истинной зависимостью, среди конкурирующих моделей.

В зависимости от способа сбора экспериментального материала, необходимого для нахождения математического описания исследуемого объекта различают вида эксперимента: пассивный и активный.

При пассивном эксперименте исследовать только регистрирует, фиксирует входные параметры и результаты наблюдении, в режиме нормальной работы не имея возможности изменять параметры по определенному плану и действуя интуитивно. Варьирование факторов исследуемого процесса при этом чисто случайное, получаемые зависимости отражают его только в узких пределах этих случайных изменений факторов. Пассивный метод имеет преимущество в том, что исключается затраты на дополнительный эксперимент. Недостаток – ограничение возможностей исследования и оптимизации процесса, в особенностей, если механизм его неизвестен или мало изучен. (Пример):

Активный эксперимент предусматривает использование принудительных изменений (возмущений), вводимых в исследуемый объект по заранее спланированной программе. Изменению (варьированию) в некоторых пределах, определяемых технологическими ограничениями могут подвергаться только управляемые параметры исследуемого объекта, входящие в группу входных переменных. (Ви неуправляемые и неконтролируемые параметры представляются в виде эквивалентного аддитивного шума е, относенного к выходу объекта, и управление связи имеет вид функции).

Лекция 5. Рандомизированные планы эксперимента.

План:

1. Типы планов эксперимента.

2. Классические планы.

3. Рандомизированный план эксперимента.

4. Заключение лекции.

1. Типы планов эксперимента.

Известно, что отсутствие у исследователя четкого плана эксперимента, как правило, ведет к провалу, к потере времени, к весьма незначительным результатам. Планирование эксперимента, как и любая другая целенаправленная деятельность человека, существовало всегда, но, естественно, по мере усложнения экспериментальной работы совершенствовались и методы ее планирования.

Прежде чем рассмотреть так называемое классическое планирование (классический план), обратим внимание на одно весьма важное обстоятельство, которое часто ускользает от внимания исследователя. Речь идет о воспроизводимых и невоспроизводимых экспериментах.

Под воспроизводимыми экспериментами понимают такие, в процессе которых в любой момент объект исследования и измерительное оборудование можно вернуть в исходное, начальное, состояние.

Строго говоря, привести пример воспроизводимого эксперимента затруднительно; всегда в процессе эксперимента происходят изменения (в большинстве случаев необратимые) как объекта исследования, так и измерительного оборудования. Однако эти изменения бывают настолько малы, что ими можно пренебречь. Они практически не обнаруживаемы, и можно во многих случаях считать эксперименты воспроизводимыми. Например, испытывая двигатель и снимая его характеристики, можно считать, что в любой момент или за относительно короткий отрезок времени можно вернуться к исходному режиму и воспроизвести его практически без каких-либо изменений.

Подавляющее большинство экспериментов в науке и технике (особенно в последней) относятся к невоспроизводимым. Наиболее яркий пример — исследование изнашивания детали какого-либо узла автомобиля при испытаниях его на надежность. В процессе лабораторного или эксплуатационного эксперимента объект исследования деформируется, меняя форму (например, овализация пальца шатуна) или уменьшаясь в размерах и т.д. Такое прогрессирующее ухудшение технического состояния объекта исследований не может позволить исследователю повторение (воспроизведение) состояния, в котором был объект к началу исследований. Поэтому влиять на порядок проведения такого эксперимента в смысле чередования режимов или повторения начальных режимов экспериментатор в этом случае не может.

Учитывая сказанное, вернемся в рассмотрению планов эксперимента.

2. Классический план.

эксперимента часто называется последовательным планом. Предположим, что функция цели зависит лишь от одного фактора. Это так называемый однофакторный эксперимент. Классическое планирование такого эксперимента заключается в том, что первоначально устанавливается нижнее или верхнее значение фактора, т. е. один из его предельных уровней, и затем последовательно снизу вверх, или наоборот, изменяются значения фактора скачками, согласно принятому интервалу варьирования. Такой последовательный план эксперимента чрезвычайно удобен при проведении, скажем, испытаний образца какого-либо материала в пределах упругих деформаций, когда нагрузка постепенно изменяется от меньших значений к большим, и наоборот. Помимо удобства последовательный план является единственно возможным, например, при испытаниях на трение, когда необходимо уловить момент перехода от трения покоя к трению скольжения и обратно.

Если имеется два, три и более управляющих фактора, то эксперимент называется многофакторным или просто факторным. Классическое планирование такого многофакторного эксперимента заключается в том, что все независимые переменные (факторы), «участвующие» в эксперименте, кроме одной, имеют постоянное и стабилизированное значение на каком-то определенном уровне, а одна переменная изменяется во всем диапазоне своих значений с принятыми интервалами. В результате эксперимента получаем функцию цели в зависимости от одной независимой переменной x1 при постоянных уровнях переменных x2, x3 и т. д. Затем варьируют следующий фактор, остальные стабилизируют и в результате получают функцию цели в зависимости от другого фактора, скажем x2, при постоянных уровнях факторов x1, x3, x4 и т. д.

Таким образом, классический план многофакторного эксперимента, которому уже более 200 лет, является суммой последовательных однофакторных экспериментов. Этот план может быть частичным и полным, что видно на примерах двухфакторного эксперимента, в котором каждый фактор (x1 и x2) имеет по пять уровней (рис. 1) Это так называемый сбалансированный эксперимент, при котором каждый фактор имеет одинаковое количество уровней.

Как видно из рис.1. а, количество опытов (без повторений) в частичном плане — 9, а в полном — 25 (рис. 1, в). При частичном плане из полученных результатов можно построить графическую иллюстрацию для функции цели всего из двух кривых (рис 1, б), в случае полного плана — два графика с пятью кривыми каждый (рис. 1, г).

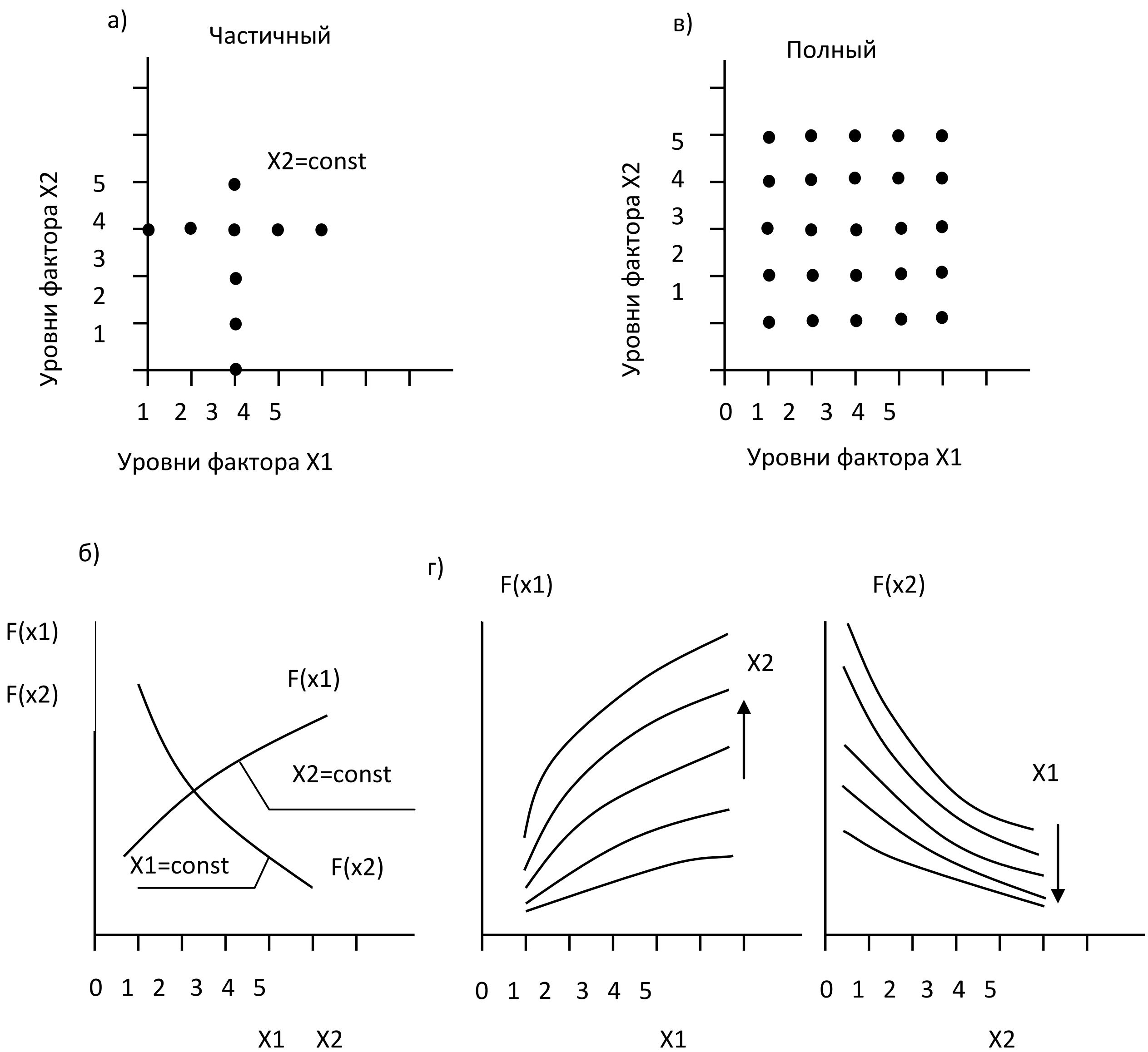


Рис.1. «Классический» план и графической оформление результатов двухфакторного эксперимента:

а и б – неполного (частичного). в и г - полного

Очевидно, что полный классический план может осуществляться только для воспроизводимых экспериментов, так как в процессе его проведения каждый фактор приходится несколько раз возвращать на исходный уровень. В примере рис.1 это надо сделать пять раз для каждого фактора.

Кроме того, полный план не обязательно должен быть сбалансированным; вполне допустимо, чтобы факторы имели различное количество уровней. Обычно тот фактор, который дает более сложную или важную зависимость для функции цели берется на большем число, уровней.

Частичный классический последовательный план подходит как для воспроизводимых, так и для невоспроизводимых экспериментов.

3. Рандомизированный план эксперимента.

Это план, и котором уровни факторов чередуются не в строгой последовательности от нижнего или верхнего уровней, а в чисто случайном порядке. Например, в процессе эксперимента скорость движения автомобиля меняется с интервалом в 10 км/час, начиная с 20 км/час, т. е. замеры производятся при скоростях 20, 30, 40, 50, 60, 70 и 30 км/час — всего семь бесповторных опытов. Случайный же порядок (рандомизированный план) будет следующим: 30, 60, 20, 80, 40, 70 и 50 км/час.

В современном планировании эксперимента принцип рандомизации — один из основных методов составления плана. И на нем следует остановиться подробнее.

Кроме управляющих факторов, т. е. независимых переменных, которыми исследователь может управлять по своему усмотрению, имеются контролируемые и возмущающие факторы, далеко не всегда поддающиеся необходимому учету. При проведении эксперимента по классическому плану всегда предполагается, что исследуемый процесс или явление можно отделить от плохо контролируемых и возмущающих факторов, причем со сколько угодно большой степенью точности. Однако в действительности это допущение редко оправдывалось, и мешающие факторы вносили значительную долю в общую погрешность эксперимента. Вот несколько примеров.

Влияние технического состояния измерительного прибора может вызвать систематическую ошибку измерения. Например, заедание или утечка могут привести к тому, что если предыдущий отсчет по прибору находился в верхней части интервала, то прибор покажет завышенное значение измеряемой величины. Если же предыдущий отсчет находился в нижней части интервала, то «заедание» прибора приведет к заниженному показанию.

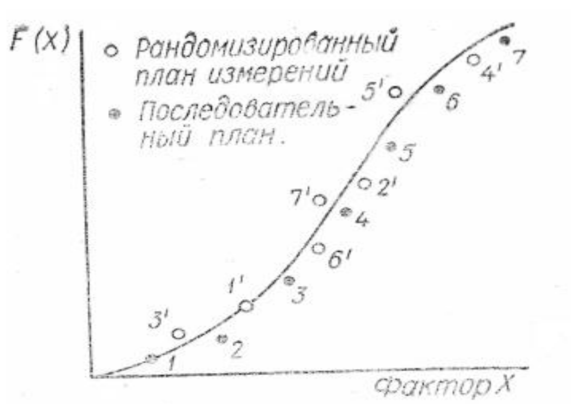


Рис. 1. Систематическая ошибка при неисправности прибора типа «заедание».

При проведении измерений по последовательному плану от меньших к большим

значениям измеряемой величины каждый из отсчетов будет заниженным (рис.1) и в общем результате эксперимента будет заложена систематическая ошибка постоянной величины, которую бывает очень трудно обнаружить.
В рандомизирован ном плане будет получено примерно одинаковое количество измерений при переходе от меньших значений измеряемой величины к большей и, наоборот, результаты этих измерений будут иметь некоторый разброс, но группироваться они будут вокруг точных значений, захватывая как бы в «вилку» истинную кривую.
Другой пример. Испытание автомобиля в дорожных условиях может происходить при заранее неучитываемых изменениях метеорологических условий: повышение или понижение температуры, давления, влажности.
Если один из управляющих факторов, например скорость движения, варьируется последовательно (классический план), то можно предположить, что функция пели будет изменяться вследствие изменения этого фактора и последовательного же изменения метеорологических условий. Если же (фактор будет меняться случайным образом, то неконтролируемые факторы (в данном случае метеорологические) «наложатся» на весь эксперимент, и результаты — функция цели — будут сравниваемыми за счет одинаковости средних условий.
До последнего времени исследователь стремился стабилизировать контролируемые и возмущающие факторы во время проведения эксперимента, затрачивая на это много сил и времени. Теперь же в эксперимент введен принцип случая, принцип рандомизации. Теория планирования эксперимента предлагает превратить «неудобные», «мешающие» факторы в случайные величины путем рандомизации условий.

4. Заключение лекции.
Проводя эксперимент по классическому плану, исследователь постарался бы с большими усилиями «стабилизировать испытуемые автомобили», т. е. уравнять распределение нагрузок на оси автомобилей, взять на испытание автомобили одной модели, одинакового технического состояния, даже водителей примерно одной квалификации. При этом он считал бы уровень фактора «Автомобили» за обычные повторности опытов. Иными словами, автомобили не были бы у него независимым фактором. Следовательно, обработка и анализ результатов оказались бы отличными от того анализа, который проводится при рандомизированных планах.
Обычно полную рандомизацию плана эксперимента проводят только в том случае, если априори (до опыта) ничего не известно о влиянии внешних условий, т. е. возмущающих факторах, или нет условий для группировки по какому-либо признаку.
Блочное планирование эксперимента с рандомизацией внутри блоков осуществляют тогда, когда заранее известно, что имеются источники неоднородности (например разные автомобили), что возможна группировка на

блоки, которая позволяет исключить влияние межблокового эффекта исследуемой функции цели.

Лекция 6. Латинские квадраты.

План:

1. Общие вопросы латинских квадратов.

2. Ограничения латинских квадратов.

3. Пример применения латинских квадратов при исследование транспортных средств.

4. Пример применения латинских квадратов при планирования измерительного эксперимента.

1. Общие вопросы латинских квадратов.
Среди блочных рандомизированных планов эксперимента особое место занимают планы типа латинского или греко-латинского квадрата.
Латинским квадратом называется квадратная таблица (матрица) элементов, которые встречаются один раз в каждой строке и каждом столбце таблицы.
Стандартный латинский квадрат или его каноническая форма следующая:

а б в г   1 2 3 4

б в г а   или   4 1

в г а б   3 4 1 2

Принцип построения канонической формы латинского квадрата заключается в том, что первый (левый) столбец и первая верхняя строка квадрата имеют «естественную» последовательность букв — в алфавитном порядке или цифр - в порядке возрастания натурального ряда. Следующие строки и столбцы получаются путем одношаговой циклической перестановки влево: буква б, стоящая на втором месте и первой строке, переходит на первое место во второй строке; буква а с первого места в первой строке переходит во второй на последнее и т. д.
В зависимости от количества букв или цифр в строке и столбце латинские квадраты бывают типа 3x3, или 4x4, или 5x5 и т.д. Осуществить рандомизацию эксперимента, используя план типа латинского квадрата, не представляет затруднений, так как количество возможны); вариантов весьма велико и случайный выбор необходимого варианта крайне прост. Количество возможных вариантов латинских квадратов:

Размер квадрата при					
n=	2	3	4	5	6
Число канонических форм	1	1	4	56	9408
Общее число вариантов	1	12	576	161280	8x108

2. Ограничения латинских квадратов.

С точки зрения принципа рандомизации в плаке эксперимента типа латинского квадрата имеются два ограничения: по столбцам и по строкам, т.е. вместо полностью рандомизированного плана в латинском квадрате рандомизация ведется раздельно по столбцам и отдельно по строкам, но так, чтобы каждый уровень фактора встречался в каждой строке и каждом столбце хотя бы один раз.

В латинском квадрате план эксперимента всегда сбалансирован, так как количество уровней каждого фактора одинаково (иначе не получился бы квадрат). Кроме того, латинский квадрат — это план неполного факторного эксперимента типа nm, где n — число уровней факторов или размер квадрата, а m — число факторов.

Как правило, латинский квадрат применяется при планировании эксперимента с тремя факторами, т.е. m=3, и, следовательно, количество опытов оказывается при применении такого плана меньше, чем при полном факторном эксперименте, так как вместо n3 опытов проводится только n2 опыта, а n2 <n3

Если m> 3, то получается греко-латинский квадрат.

В греко-латинском квадрате на рандомизацию накладывается еще одно (третье) ограничение, а количества факторов равно четырем. И если кроме факторов [А, Б, В, Г].

3. Пример применения латинских квадратов при исследование транспортных средств.

Пуст чтеются четыре типа автомобилей, четыре мерни шин для колес, четыре колеса и четыре разныт проесиля рисунков на работ поверхностях шин. Таким образом имеются факторы:

А Б В Г

I II III IV

1 2 3 4

ε β γ δ

Латинский квадрат будет именье вид:

	Автомобили

Колеса	I	II	III	IV
1 2 3 4	А α Б γ В δ Г β	Б β А δ Г γ В α	В γ Г α А β Б δ	Г δ в β Б α А γ

В этом квадрате по примеру, об испытаниях автомобильных шин, фактор [I, II, Ш, IV] представляет разные модели автомобилей, [А, Б, В, Г] — марки шин, [1, 2, 3, 4] — колеса, на которых установлены шины, т. е. переднее левое, переднее правое и т.д. Что касается уровней |α, β, γ, δ|, могут быть, например, четыре различных рисунка протектора. Как видно из этого плана, уровни четвертого фактора (рисунка) появляются только один раз в сочетании с каждым из уровней исследуемого фактора А, Б, В, Г.

4. Пример применения латинских квадратов при планирования измерительного эксперимента.

Для экспериментального женорования сложного технологического процесс необходима изтерять четыре величины а – расход жидкость; в – девятые в опледате; с – влажность продукта; d – температуру газов, три этом все указанные величины необходимо изтермил в пяты значениях: ниже приведен латинского квадрат, который позволяет вместо 625 изтерерий втолнить 25 изилреный резум этот, что сушетвнно сопрететь жило изтерпела экспериментов.

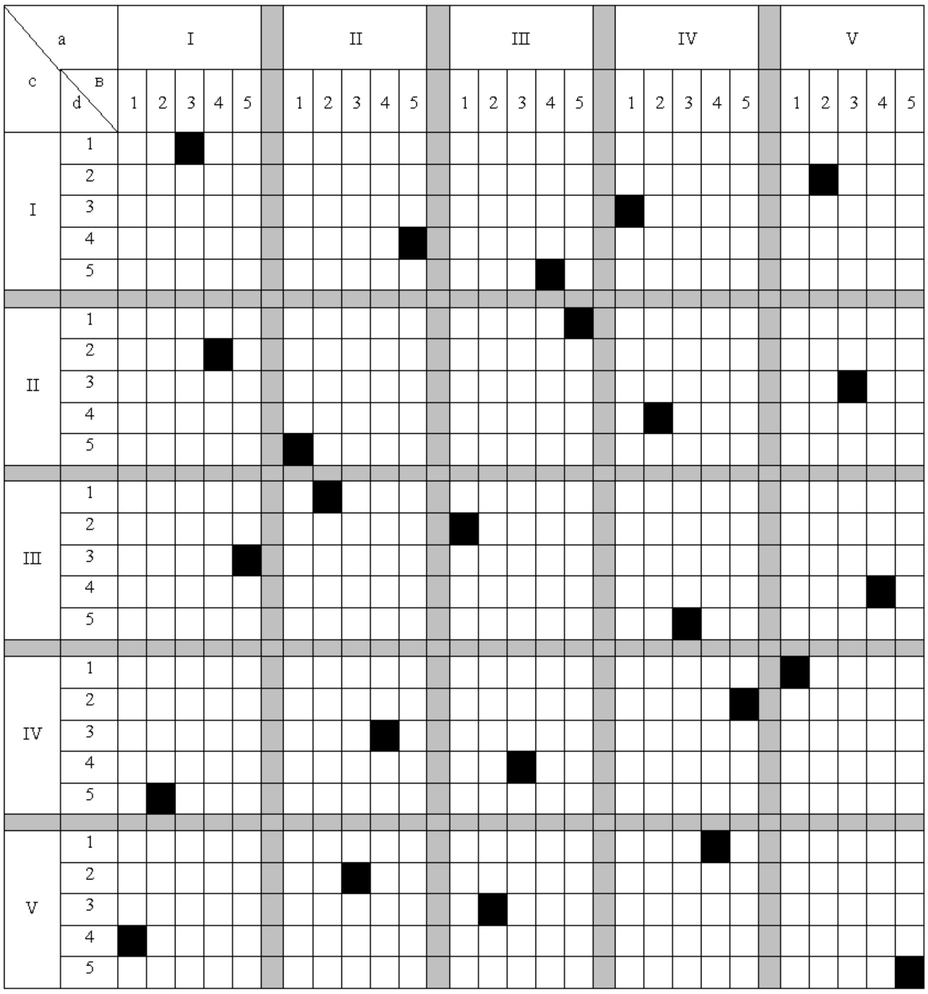


Рис.1. Латинский квадрат

Таким образом, добиваясь при решении измерительных задач сокращения затрат труда и времени, необходимо тщательным образом продумать процедуру выполнения измерений с целью минимизации их числа.

Лекция № 7 Анализ и проведение эксперимента

План

1 Постановка задачи и выбор откликов и факторов

2 Реализация плана эксперимента

3 Пример реализации плана эксперимента .

4 Анализ многофакторного эксперимента

1. Постановка задачи, выбор откликов и факторов

Краткое описание процесса, объекта.

Формулировка цели исследования (если задач несколько — аранжировать их по степени важности).

Выбор параметров (откликов). Заполните следующую таблицу, включив в нее все возможные отклики

Номер отклика	Название	Размерность	Область определения	Точность	Примечание

Желаемый результат. Число и точность.

Какой результат будет считаться отличным, хорошим, удовлетворительным, неудовлетворительным.

Выбор факторов

Список всех факторов, которые могут влиять на процесс.

Список факторов, включаемых в реальный эксперимент.

Номер фактора	Название	Размер-ность	Область определения	Область интереса	Точность	Примечание

Существуют ли возможности установления значения фактора на любом заданном уровне?

Сохраняются ли заданные значения уровней в течение опыта?

Могут ли некоторые комбинации уровней факторов привести к остановке процесса (например, взрыв, нетехнологичность и т. д.)?

Число опытов
Желаемое число опытов, ограничения на число опытов.
Желаемый срок проведения исследования.
Примерная длительность одного опыта.
Стоимость Ь затраты труда при проведении одного опыта серии.
Желаемое число уровней для одного фактора.
Возможность выполнения параллельных опытов и их желаемое число.
Возможность проведения параллельных измерений.
Желаемая стратегия проведения опытов (например, по одному в день и т. д.).
Учет априорной информации
Условия и результаты, достигнутые при изучении аналогичных процессов.
Результаты предварительного эксперимента и данные (литературные и собственные) о величине ошибки эксперимента.
Взаимодействия факторов.
В следующем параграфе приведен конкретный пример постановки задачи, в котором использованы некоторые части этой анкеты.
2. Реализация плана эксперимента
К проведению опытов необходимо тщательно подготовиться, собрать опытную установку, проверить и прокалибровать приборы, подготовить исходное сырье, составить специальный журнал.
Журнал заранее оформляют в соответствии с методикой и планом опытов так, чтобы была ясна последовательность действий. Первую страницу можно посвятить выбору цели исследования и параметрам оптимизации, с указанием их размерностей. Желательно перечислить все параметры, которые могут служить характеристиками процесса и указать, какая между ними существует корреляция. Если же сведения о корреляции отсутствуют, целесообразно подсчитать коэффициенты парной корреляций, проверить их значимость и выделить группу некоррелированных параметров. Па второй странице перечистить факторы и поместить таблицу уровней факторов и интервалов варьирования. Не забудьте указать единицы измерения факторов! Для матрицы планирования удобно отвести разворот журнала, чтобы имелась возможность дополнить ее до расчетной матрицы, записать повторные опыты и примечания.
Чтобы облегчить работу лаборанта и исключить ошибки при выборе условий опыта, в рабочей матрице планирования целесообразно проставлять не только кодовые значения факторов, но и натуральные.
При составлении рабочей матрицы планирования необходимо оставить место для столбцов, в которых отмечаются даты постановки опытов и фамилий лаборантов, если опыты проводят несколько человек. Имея перед собой план опытов, необходимо подсчитать количество исходного сырья и заранее его подготовить. Желательно, чтобы сырье было однородное. Если требование

однородности выполнить невозможно, нужно заблаговременно определить количество различных партий сырья и соответствующим образом разбить матрицу планирования на блоки. На этом вопросе мы далее остановимся подробно. Отдельные страницы нужно отвести для расчетов, которые необходимы для определения количеств всех компонентов реакции и т. п., а также для анализа результатов эксперимента. Все расчеты должны сохраняться до окончания работы.

Пример реализации плана эксперимента

Пример 1. В качество примера приведем оформление журнала при оптимизации процесса получения сульфадимизина.

Планирование эксперимента при оптимизации процесса получения сульфадимизнна

Странниц 1

Факторы, определяющие процесс; Зс, — время реакции, час; x2 — содержание ацетилацетона в реакционной массе, %; 5c3 — содержание уксусная кислоты в реакционной массе, %; 5c4 —температура реакционной массы, °С; 5c5— качество ацетилацетона, %; 5c6 — качество сульгина, %.

Выбор варьируемых факторов. Принято решение изменять в опыта первые три фактора. Качество ацетилацетона и сульгина решено поддерживать постоянным (таким, как на действующем производстве)

Температура реакционной среды является производной состава и давления. Поэтому она, если не применять специальных способов воздействия на температуру, по является независимой величиной и но может служить в качестве фактора. Однако температуру необходимо контролировать в течение всех опытов.

Страница 2

Выбор технологии. Сульгин загружается одновременно с ацетил ацетоном и уксусной кислотой. Реакция проводится при перемешивании реакционной смеси и Непрерывном отгоне воды.

Необходимые анализы. Анализ исходного сырья: ацетилацетона, сульгина, уксусной кислоты (следует описание методик). Анализы получаемых продуктов: сульфадимизина в осадке, сульфадимизина в фильтрате, сульгина в фильтрате (следует описание методик).

Описание экспериментальной установки. Опыты проводятся па лабораторной установке, состоящей из стеклянной конической колбы емкостью 250 мл, снабженной металлической якорной мешалкой и обратным холодильником. Температура реакционной массы измеряется термопарой, подключенной к электрическому потенциометру, и непрерывно записывается на картограмму. Колба обогревается электрической баней, наполненной вазелиновым маслом. Температура в бане автоматически регулируется с помощью реле и контактного термометра и поддерживается около 160° С.

Страница 3

Выбор основного уровня и интервалов варьирования. Для того чтобы выбрать уровни факторов, следует собрать и проанализировать литературные и заводские данные. По заводскому регламенту процесс проводится при следующих условиях: х,=27 час, х2=4%, х3=10%. При этом^/=84%.

Опубликованные данные и сведения из отчетов (априорная информация).

Влияние времени реакции (х). Данные об оптимальном времени реакции в лабораторных условиях противоречивы. Так, в отчете № 1 указано, что опыты проводились при х, =27 час, затем время уменьшили до 12 час. Уменьшение времени не снизило существенно выход реакции. В отчете № 2 описываются опыты с различным временем: 18, 24 и 30 час. Наилучший выход получен при х, =24 час.

Влияние избытка ацетилацетона fo). Данные о влиянии избытка ацетил ацетона от стехиометрического соотношения также противоречивы. В одном отчете указано, что содержание ацетилацетона сверх 10% является нецелесообразным, в другом оптимальным считается 40% избытка ацетилацетона.

Влияние уксусной кислоты (х3). Вопрос о влиянии процентного содержания уксусной кислоты специально по исследовав. Считается, что х,
целесообразно поддерживать около 16—17%. Предполагается, что ото растворитель и его концентрация может изменяться в широких пределах.

На основании анализа имеющихся сведений решено выбрать следующие уровни и интервалы варьирования факторов (табл. 1)

Таблица 1

Уровни факторов и интервалы варьирования

Факторы	Уровни			I	Размерность
	-1	0	+1		
X,	16	18	20	2	Час
X2	20	24	28	4	%
X3	12	15	13	3	%

Анализ многофакторного эксперимента

Условия опытов чрезвычайно разнообразны. Ведь мы занимаемся планированием многофакторного эксперимента, когда все факторы изменяются одновременно. Приступая к планированию эксперимента, мы должны отказаться от привычного однофакторного эксперимента, который проводится по принципу «изменяй один фактор, а прочие держи постоянными».

Мы хотим заниматься исследованием сложных многофакторных систем и понимаем, что однофакторный эксперимент нам не поможет. И это не только наше мнение. У. Р. Эшби во «Введении в кибернетику» писал: «Тот факт, что в течение столетий могли принимать такую догму, как «изменяйте факторы по одному», показывает, что ученые занимались в основном исследованием систем, допускающих этот метод, ибо в сложных системах он часто неприменим по существу».

Проанализируем, и чем состоит недостаток однофакторного эксперимента и почему им нецелесообразно пользоваться при исследовании многофакторных систем. При однофакторном эксперименте, варьируя одним фактором и стабилизируя все прочие на произвольно выбранных уровнях, экспериментатор получает зависимость параметра оптимизации только от одного фактора и определяет локальный оптимум. Далее он повторяет аналогичную процедуру для второго, третьего и k-го фактора. В результате длительной и кропотливой работы, требующей много средств и времени, опытные данные представляются десятками графиков, которые в сущности имеют иллюстративный характер.

За время эксперимента могут происходить изменения в аппаратуре, сырье и т.д. Все это вносит изменения в результаты эксперимента, вследствие чего данные многих опытов являются несопоставимыми. В планировании эксперимента разработана четкая стратегия экспериментирования. Экспериментатор может минимизировать число опытов, пользуясь шаговым принципом и дробным планированием.

Имеются способы борьбы с неконтролируемым дрейфом, вызванным изменением аппаратуры, сырья и т. п. (об этом мы расскажем вам в этой главе). Все это не предусмотрено в однофакторном эксперименте.

Давайте посмотрим, что значит однофакторный эксперимент при исследовании семифакторной системы. Итак, эксперимента тор хочет исследовать "влияние семи" факторов на некоторый параметр оптимизации и решил проводить однофакторный эксперимент. Для того чтобы построить кривую, обычно берут четыре-пять экспериментальных точек. Возьмем четыре точки. Необходимое количество опытов при реализации всевозможных комбинаций равно N=47= 16384. Совершенно ясно, что такое количество опытов реализовать невозможно. Значит, экспериментатор произвольна отбросит очень многие комбинации и реализует небольшую часть опытов, изменяя факторы по одному при постоянных значениях прочих факторов.

Лекция № 8 Измерения и выбор отклика

План:

Общие вопросы выбора обобщенного отклика

Простейшие способы выбора обобщенного отклика.

Шкала желательности.

Заключение к лекции.

1. Общие вопросы выбора обобщенного отклика

Путь к единому отклику часто лежит через обобщение.
Как уже говорилось, из многих откликов, определяющих объект, очень часто трудно выбрать один, самый важный. Если же это возможно, тогда нам предстоит познакомиться с более сложной ситуацией, когда необходимо множество откликов обобщать (свертывать) в единый количественный признак. С таким обобщением связан ряд трудностей.
Каждый отклик имеет свой физический смысл и свою размерность. Чтобы объединить различные отклики, прежде всего приходится ввести для каждого из них некоторую безразмерную шкалу. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых откликов - это делает их сравнимыми ^ Выбор шкалы - не простая задача, зависящая от априорных сведений об откликах, а также от той точности, с которой мы хотим определить обобщенный признак.
После того как для каждого отклика построена безразмерная шкала, возникает следующая трудность - выбор правила комбинирования исходных частных откликов в обобщенный показатель. Единого правила не существует. Здесь можно идти различными путями, и выбор пути неформализован.

2. Простейшие способы выбора обобщенного отклика
Пусть исследуемый объект характеризуют п частных откликов
Yu (u=1,2,….,n)
и каждый из этих откликов измеряется в N опытах
Тогда yul : =это -значение и-- его отклика в i- м опыте. Каждый из откликов уи имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность. Введем простейшее преобразование: набор данных для каждого уи поставим в соответствие с самым простым стандартным аналогомшкалой, на которой имеется только два значения: 0-брак, неудовлетворительное качество, 1-годный продукт, 'удовлетворительное качество. Преобразованные значения обозначим так: yui –преобразованное значение u-го отклика в i-м опыте. Здесь мы применили шкалу, в которой использовано числовое множество из двух элементов (в данным случае 0 и 1). Стандартизовав таким образом шкалу частных откликов, мы подошли ко второму этапу - их обобщению. .По какому же правилу следует комбинировать частные отклики?
Будем рассуждать следующим образом. В ситуации, когда каждый преобразованный частный отклик принимает только два значения 0 и 1, естественно желать, чтобы и обобщенный отклик принимал одно из этих двух возможных значений, причем так, чтобы значение 1 имело место, если, и только если, все частные отклики в этом опыте приняли значение 1 . А если хотя бы один из откликов обратился в 0, то и обобщенный отклик будет нулем.
При таких рассуждениях для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} y_{ui}},$$

где Yi - обобщенный отклик в i-м опыте;

$\prod_{u=1}^{n}$ - произведение частных откликов y,y^...ynl.

Корень мы ввели для того, чтобы связать эту формулу с другой, более сложной, которая будет рассмотрена далее. В данном же случае ничего не изменится, если написать

$$Y2= \prod_{u=1}^{n} y$$

Обратим ваше внимание на еще способ поучения обобщенного отклика, который может применяться в тех случаях, когда для каждого из частных откликов известен «идеал»., к которому нужно стремиться. Существует много способов введения метрики*, задающей «близость к идеалу». Дополним предыдущие обозначения еще одним: уио- наилучшее («идеальное») значение и- го отклика. Однако использовать разность при построении обобщенного, отклики невозможно по двум причинам. Она имеет размерность соответствующего отклика, а у каждого из откликов может быть своя размерность, что препятствует, как мы уже знаем, их объединению. Отрицательный или положительный знак разности также создает неудобство. Чтобы перейти, к безразмерным значениям, достаточно разность поделить на желаемое значение:

Чтобы нивелировать знаки, можно разность возводить в квадрат. Тогда обобщенный отклик получим по следующей формуле:

$$\sum_{u=1}^{n}\left(\frac{y_{ui}-y_{uo}}{y_{uo}}\right)^2$$

Если в некотором опыте все частные отклики совпадут с идеалом, то Y станет равным нулю. Это и есть то значение, к которому нужно стремиться. Чем ближе к нулю, тем лучше. Конечно, необходимо условиться о том, что считать нижней границей, если верхняя равна нулю. Обратите внимание, нуль здесь имеет другой смысл, чем в первым случае.

Среди недостатков такой оценки выделяется нивелировка частных откликов. Все они входят в обобщенный отклик на • равных правах. На практике уже различные показатели бывают далеко не равноправны. Устранит этот недостаток можно введением некоторого веса аи причем

Чтобы проранжировать отклики по степени их важности и найти соответствующие веса, можно воспользоваться экспертным оценками (3,4).

Мы рассмотрели простейшие способы построения обобщенного показателя. Для перехода к боле сложным способом нужно научиться фиксировать более тонкие различная на шкале преобразования откликов. Здесь в основном приходится опираться на опыт экспериментатора. Но, чтобы этот опыт разумно употребить в рамках формальных процедур, его тоже нужно формализовать.

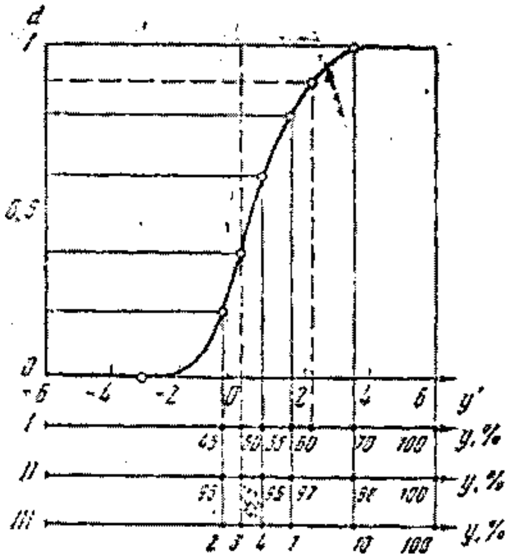
Наиболее естественный путь такой формализации - введение системы предпочтений экспериментатора на множестве значений каждого частного отклика, поучение стандартной шкалы и затем обобщение результатов.
Пользуясь системой предпочтений, можно получить более содержательную шкалу вместо шкалы классификаций с двумя классами.

3. Шкала желательности
Одним на наиболее удобных способов построения обобщенного отклика является обобщенная функция желательности Харрингтона, В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в, безразмерную шкалу желательности или предпочтительности. Шкала желательности относится к психофизическим шкалам. Ее назначение - установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Здесь под физическими параметрами понимаются всевозможные отклики, характеризующие функционирование исследуемого объекта. Среди них могут быть эстетические и даже статические параметры а под ихологическими параметрами понимаются чисто субъективно оценки экспериментатора желательности (предпочтительности) того или иного значения отклика. Чтобы получить шкалу желательности, удобно пользоваться между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой (психологической) системах.

Таблица 1
Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00-0,80
Хорошо	0,80-0,63
Удовлетворительно	0,63-0,37
Плохо	0,37- 0,20
Очень плохо	0,20- 0,00

Значение частного отклика, переведенное в безразмерную шкалу желательности, обозначается через du (и = 1,2,...,) и называется частной желательностью (от desirable фр. - желательный). Шкала желательности имеет интервал от нуля до единицы. Значение du =0 соответствует абсолютно неприемлемому уровню данного свойства, а значение du=самому лучшему значению свойства Понятию «очень хорошо» соответствуют значение на шкале желательности, а понятию «очень плохо» - 0 < du < 0,2 и т. д. Выбор отметок на шкале желательности 0,63 и 0,37 объясняется удобством вычислений: 0,63 «1-(1/e), 0,37 « 1/e. Значение du =0,37 обычно соответствует границе допустимых значений.



Эти числа на первый взгляд напоминают черную магию. Но все объясняется достаточно просто. В табл. 1. представлены числа, соответствующие некоторым точками кривой (рис. 1|), которая задается уравнением, где exp - принятое обозначение экспоненты. На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения отклика, записанные в условном масштабе. За начало отсчета 0 по этой осиf выбрано рис 1 функция желательности значение, соответствующее желательности 0,37. Выбор именно данной точки связан с тем, что оно является- точкой перегиба кривой, что в свою очередь создает определенные удобства при вычислениях. То же самое верно для значения желательности, соответствующего 0,63. Выбор этой кривой не является единственной возможностью. Однако она возникла в результате наблюдений за реальными решениями экспериментаторов и обладает такими полезными свойствами как непрерывность, монотонность и гладкость. Кроме того, эта кривая хорошо переедет тот факт, что в областях желательностей, близких к 0 и 1, «чувствительность» ее существенно ниже, чем в средней зоне.

Симметрично относительно нуля на оси у (-кодированная шкала) расположены кодированные значения отклика. Значение на кодированной шкале принято выбрать от 3 до 6. Например, на рис.1 использовано шесть интервалов в сторону убывания и шесть - в сторону возрастания. Ниже вы познакомитесь со случаем, когда выбрано три интервала. Выбор числа интервалов определяет крутизну кривой в средней зоне.

Обобщенная функция желательности является некоторым абстрактным построением и поэтому, прежде чем рекомендовать ее в качестве единого критерия оптимизации, представлялось интересным исследовать такие ее важные свойства, как адекватность, статистическая чувствительность и эффективность. Оказалось, что для шкал желательности статистическая чувствительность и эффективность частных и, обобщенной функций желательности не ниже, чем таковые для любого технологического показателя, им соответствующего.

Обобщенная функция желательности является количественным, однозначным, единым и универсальным показателем качества исследуемого объекта, и если добавить еще такие свойства, 'как адекватность, эффективность и статистическая чувствительность, то становится ясным, что ее можно использовать и в качестве критерий оптимизации.

Обобщенная функция желательности нашла широкое применение для оценки качества полимерных материалов, резиновых и латексных изделий, а также при разработке различных рецептур Используется она в последнее время также и в промышленности

4. Заключение к лекции.

Построение обобщенного параметра оптимизации на основе единого отклика связанно с созданием единого признака, количественно определяющего функционирование исследуемого объекта с многими выходными параметрами. При этом возникают некоторые трудности. Каждый выходной параметр - отклик -имеет свой физический смысл, свою размерность. Чтобы объединить различные отклики, необходимо ввести единую для всех откликов искусственную метрику. Набор данных каждого отклика нужно поставить в соответствие с некоторым стандартным аналогом, с безразмерной шкалой. Поэтому первым вопросом, который нужно решить при построении Обобщенного отклика является вопрос о выборе шкалы. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых откликов. Построение шкалы во многом зависит от уровня априорных сведений о выходных параметрах, а также от той точности, с которой мы хотим определить обобщенный отклик.

Второй важный вопрос- выбор правила комбинирования исходных частных откликов обобщенный показатель.

Лекция 9. Точность измерений.

План.

Понятие точности измерений.

Систематические и случайные ошибки.

Выражение ошибок в виде чисел.

Понятие неопределённости измерения.

1. Понятие точности измерений.

Надёжность результатов исследования в значительной степени зависит от точности измерений. Трудно представить себе измерение, совершенно лишённое ошибки; ошибки же опыта в зависимости от их величины и характера могут привести к серьезным последствиям: к неясности полученных закономерностей или, что ещё хуже, к верным выводам. Точность есть степень соответствия результата измерения действительному значению измеряемой величины. Чем это соответствие меньше, тем больше ошибка измерения. Существуют три источника ошибки:

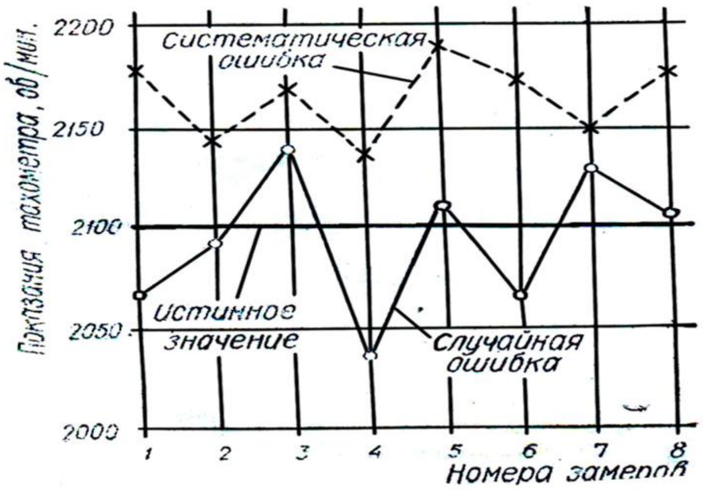
- первый источник заключён в датчике, который неправильно реагирует на измеряемую величину. Например, тензосопротивление плохо наклеено на упругий элемент и деформации упругого элемента;
- второй источник – измерительное устройство, в котором возможны погрешности из-за неправильного функционирования его механических или электрических элементов;
- третий источник – сам наблюдатель или исследователь, который из-за неопытности или усталости неправильно считывает показания прибора или ошибается при обработке осциллограммы.

Эти три источника ошибок приводят к появлению двух типов ошибок:

Систематические и случайные ошибки измерений.

- систематических, т.е. возникающих по вполне определённым причинам, связанным главным образом с измерительным устройством (заедание, люфт, т.е. свободный ход, подтекание и т.п.). Систематическая ошибка возникает, как правило, в одну сторону от действительного значения измеряемой величины и появляется независимо от количества последовательных отсчётов. Примером систематической ошибки может служить график показаний тахометра.

При наличии систематической ошибки в показания прибора вносят соответствующие поправки. Устранить её можно калибровкой прибора, т.е. проверкой его во всем диапазоне измеряемых величин с помощью известного эталона, образцового высокоточного прибора или ремонтом;



- случайных ошибок , причины которых неизвестны и из-за которых при последовательных отсчётах постоянной величины получаются различные результаты. Именно случайные ошибки обычно характеризуют точность измерений.

Полностью избежать при измерениях случайных ошибок практически невозможно, но установить возможную ошибку опыта и, следовательно, точность выполненных измерений необходимо во всех случаях.

Выражение ошибок в виде чисел.

Ошибки измерений по всей величине и характеру могут быть следующими:

- абсолютная ошибка Δ представляет собой разность между измеренной величиной ai и действительным (истинным) значением этой величины – x, т.е. Δ= ai – x. Абсолютная ошибка всегда имеет ту же размерность, что и измеряемая величина, так что если последняя имеет линейный размер, то и Δ имеет линейную размерность;

- относительная ошибка Δo есть отношение абсолютной ошибки к действительному значению величины

$$\Delta o = \pm \frac{\Delta}{x}$$

Безразмерным значением относительной ошибки или выражением её в процентах, т.е.

$$\Delta o = \pm \frac{\Delta}{x}100\%$$

оценивают точность измерения;

4. Понятие неопределённости измерения.
Неопределённость измерения – это параметр, связанный с результатом измерений, который характеризует разброс значений, которые могли бы обоснованно приписаны измеряемой величины.

В качестве параметра, связанного с результатом измерений, который характеризует разброс значений, обычно используют среднее квадратичное (стандартное) отклонение результата наблюдений, выраженная как стандартное отклонение среднего арифметического значения называют стандартной неопределённостью оценки величины. Из понятия «неопределённости» следует, что она является количественной мерой точности соответствующего результата измерений и выражает степень доверия, с которой может допускаться, что значение измеряемой величины в условиях измерения лежит внутри определённого интервала значений. Таким образом, неопределённость измерения можно назвать мерой:

1) наших знаний об измеряемой величине после измерения;
2) качества измерения с точки зрения точности;
3) надёжности результата измерения, в качестве оценки значения величины.

Лекция 10. Определение среднего и дисперсионного анализа.

План:

Средние значения величин.

Задача дисперсионного анализа.

Пример дисперсионного анализа.

Заключение по лекции.

1. Средние значения величин.

Средним арифметическим значением или просто средним значением величин x1, x2,…,xn

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (1)$$

Средним квадратичным отклонением величин x1, x2,…,xn от их среднего $\bar{x}$ называется

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_1-\bar{x})}^{\,2} \qquad (2)$$

Взвешенное среднее значение определяется

$$\bar{x} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_kx_k}{p_1 + p_2 + ... + p_k} = \frac{\sum p_ix_i}{\sum p_i} \qquad (3)$$

Взвешенное среднее квадратичное отклонение

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{p_1(x_1-\bar{x})^2+...+p_2(x_k-\bar{x})^2}{p_1+p_2+...+p_k}} = \sqrt{\frac{\sum p_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum p_i}} \qquad (4)$$

2. Задача дисперсионного анализа

С точки зрения конечной цели эксперименты можно их разбить на две группы: эксперименты с ограниченной задачей – установление степени влияния различных факторов на функцию цели и эксперименты с полной задачей – установление функциональной связи между факторами, нахождение хотя бы эмпирической формулы для функции цели.

В зависимости от группы, которой принадлежит рандомизированный эксперимент, применяются различные методы обработки и анализа результатов эксперимента: статистические (дисперсионный анализ) и нестатистические (детерминированные).

Задача дисперсионного анализа – оценка влияния одного или нескольких факторов (независимых переменных) на функцию цели или отклик. Сущностью метода является сравнение показателей вариации (колеблемости), т.е. дисперсий результатов измерений, сгруппированных по каждому из факторов, с дисперсией всей совокупности результатов.

Так как план эксперимента рандомизирован, т.е. случаен, то результаты измерений или наблюдений в целом заключают в себе влияние всех управляющих факторов. Степень вариации всей совокупности результатов также зависит от влияния факторов. Если с помощью специальных методов установить «вклад» каждого фактора в общую колеблемость совокупности, то тем самым устанавливается степень влияния каждого фактора на результат.

Выражение (5) часто называют математической моделью рандомизированного плана однофакторного эксперимента. Перепишем (5) несколько иначе и заменим входящие в него величины разностями: $T = \overline{y}_j - \overline{y}$, где $\overline{y}_j$ - среднее значение результатов опытов на j-м уровне и $\overline{y} = \mu$; $\varepsilon_{ji} = y_{ji} - \overline{y}_j$. Получим следующее тождество:

$$y_{ji} - \overline{y} = (\overline{y}_j - \overline{y}) + (y_{ji} - \overline{y}_j) \qquad (6)$$

Если ввести в квадрат левую и правую части и просуммировать результаты по всем уровням фактора и всем измерениям на каждом уровне, то получим следующее выражение:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (y_{ji} - \overline{y})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (\overline{y_i} - \overline{y})^2 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (y_{ji} - \overline{y})^2 \qquad (7)$$

так как

$$2\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (\overline{y}_j - \overline{y})(y_{ji} - \overline{y}_j) = 2\sum_{j=1}^{n} (\overline{y}_j - \overline{y}) * \sum_{i=1}^{n} (\overline{y}_{ji} - \overline{y}_j) = 0$$

Для сокращения письма двойные знаки сумм заменяются на SS и тогда получит такую форму

SSобщ=SSфак+SSош (8)

Пример дисперсионного анализа

Результаты однофакторного эксперимента и их первичная обработка

	Ноемера опытов	Уровни фактора 1-й	2-й	…	j-й	к-й	Общие суммы и средние по фактору	Формулы для членов суммы квадратов
Результаты	1 ⋮ i ⋮ n	y_{11} ⋮ y_{1i} ⋮ y_{1n}	y_{21} ⋮ y_{2i} ⋮ y_{2n}	…	y_{j1} ⋮ y_{ji} ⋮ y_{jn}	$y_{\kappa 1}$ ⋮ $y_{\kappa i}$ ⋮ $y_{\kappa n}$	—	$\sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{i=1}^{n} y_{ji}^2 = G$
Обработка	Суммы 1-го порядка по уровням	$\sum_{i=1}^{n} y_{1i}$	$\sum_{i=1}^{n} y_{2i}$	…	$\sum_{i}^{n} y_{ji}$	$\sum_{i=1}^{n} y_{\kappa i}$	$\sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{i=1}^{n} y_{ji}$	$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{i=1}^{n} y_{ji}\right)^2 = H$
	Средние по уровням фактора	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{1i}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{2i}$	…	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ji}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{\kappa i}$	$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{i=1}^{n} y_{ji} = \bar{y}$	—
	Суммы 2-го порядка по уровням	$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{1i}\right)^2$	$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{2i}\right)^2$	…	$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ji}\right)^2$	$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{\kappa i}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ji}\right)^2 = B$	—

Пример дисперсионного анализа.

На отклик y воздействует один фактор, который имеет k уровней и на каждом его уровне проводится n измерений (рис. 1), т.е. всего N=kn измерений. Очевидно, что на каждом уровне фактора имеется некоторый разброс вокруг среднего положения (жирная кривая), поэтому каждое i-е измерение на j-м уровне, т.е. yji будет равно следующей величине:

yji = μ+Tj+εji, (5)

где μ - общее среднее всех N опытов,

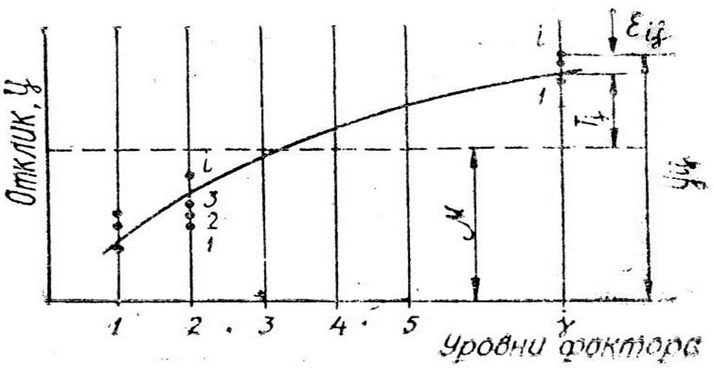


Рис.1 Графическая интерпретация математической модели однофакторного эксперимента.

Tj - «эффект» j-го уровня, т.е. разность между средним значением результатов

опытов на j-м уровне и общим средним эксперимента,

εji - случайная ошибка i-го измерения на j-м уровне, т.е. отклонение этого i-го измерения от средней на j-м уровне фактора.

4. Заключение по лекции.

Выражение (8) – основное уравнение дисперсионного анализа и читается так: сумма квадратов отклонений средних по уровням фактора от общего среднего равна сумме квадратов отклонений средних по уровням фактора от общего среднего плюс сумма квадратов отклонений внутри испытаний на каждом уровне. Суммы квадратов в дисперсионном анализе часто называют просто дисперсией, и, следовательно, это выражение есть несколько изменённая форма правила сложения дисперсий, так как общая дисперсия совокупности результатов опытов расчленяется на дисперсию факториальную, зависящую от влияния фактора, и случайную, или дисперсию ошибки эксперимента.

Факториальная дисперсия аналогична межгрупповой дисперсии, а дисперсия ошибки – внутригрупповой. Сравнивая эти дисперсии, определяют, является ли влияние фактора на величину функции цели существенно отличным (значимым) от влияния случайных причин или это влияние тоже случайно. При сравнении применяют дисперсии, рассчитанные на одну степень свободы варьирования; их именуют средней суммой квадратов или средним квадратом. Таким образом, в дисперсионном анализе применяют дисперсию, равную SS/r где r – число степеней свободы.

Число степеней свободы для общей, суммарной дисперсии равно общему числу независимым измерений (повторных или бесповторных) – N без одного, т.е. rобщ=N – 1. Число степеней свободы для факториальной дисперсии равно числу его уровней без одного, т.е. rфак.=к – 1, а число степеней свободы для дисперсии ошибки равно разности rош=rобщ. – rфак =N – к.

Лекция 11. Выбор уровней факторов для эксперимента.

План

Общие вопросы факторов

Определение фактора

Требования к факторам

Заключение.

1. Общие вопросы факторов.

Теперь нам предстоит рассмотреть способы воздействия, которые были названы факторами.

После того как выбран объект исследования и параметр отклика (оптимизации), нужно включить в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой - либо существенный фактор окажется неучтенным, то это может привести к неприятным последствиям. Так если неучтенный фактор произвольно флуктуировал - принимал случайные значения, которые экспериментатор не контролировал, - это значительно увеличит ошибку опыта. При поддержании фактора на некотором фиксированном уровне может быть получено ложное представление об оптимуме, так как нет гарантии, что фиксированный уровень является оптимальным.

Известно что число различных состояние объекта рк, где р- число уровней, а k- число факторов, и поэтому можно задать вопрос: «Ну, а как же преодолеть большое число опытов? Чем больше факторов, тем больше опытов». Действительно, число опытов растет по показательной функции. Размерность факторного пространства увеличивается, и математика в таких случаях говорят о «проклятии размерности».

Если число факторов больше пятнадцати, нужно обратиться к методом отсеивания несущественных факторов. Здесь можно воспользоваться формализацией априорной информации, методом случайного баланса и других. Иногда эти планы применяются и при меньшем числе факторов..

Мы не имеем возможности рассказать об отсеивающих экспериментах и о формализации априорной информации. В «Ограничениях» сказано, что рассматривается случай, когда множество факторов задано и число факторов не превышает пятнадцати.

Однако обратить ваше внимание на важность выбора факторов, влияющих на процесс, на опасность пропуска существенного фактора мы сочли совершенно необходимым. От удачного выбора факторов зависит успех эксперимента. Теперь поговорим о факторах. Начнем с определения.

2. Определение фактора

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение. Факторы соответствуют способом воздействия на объект исследования.

Так же, как и параметр отклика или оптимизации, каждый фактор имеет область определения. Мы будем считать фактор заданным, Если вместе с его названием указана область его определения. Под областью определения Понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор. Ясно, что совокупность значений фактора, которая используется в эксперименте, является подмножеством из множества значений, образующих область определения.

Область определения может быть непрерывной и дискретной. Однако в тех задачах планирования эксперимента, которые мы собираемся рассматривать, всегда используются дискретные, области определения. Так, для факторов с непрерывной областью определения, таких, как температура, время, количество вещества и т. п., всегда выбираются дискретные множество уровней. В практических задачах области определения факторов, как правило ограничены. Ограничения могут носить принципиальный либо технический характер.

Произведем классификацию факторов в зависимости от того, является ли фактор переменной величиной, которую можно оценивать количественно: измерять, взвешивать, титровать и т. п., или же он - некоторая переменная, характеризующаяся качественным свойствами.

Вы уже догадались, что факторы разделяются на, количественные и качественные. Качественные факторы - это разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т. д.

Хотя качественным факторам не соответствует числовая шкала в том смысле, как это понимается для количественных факторов, однако можно построить условную порядковую шкалу, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда, т. е. производит кодирование. Порядок уровней может быть произволен, но после кодирования он фиксируется.

В ряде случаев граница между понятием качественного количественного фактора весьма условна. Пусть например, при изучении воспроизводимости результатов химического анализа надо установить влияние положения тигля с навеской в муфельной печи. Можно разделить под печи на квадраты и считать номера квадратов уровнями качественного фактора, определяющего положение тигля. Вместо этого можно ввести два количественных фактора - ширину и длину пода печи. Качественным факторам не соответствует числовая шкала, и порядок уровней факторов не играет роли.

Время реакции, температура, концентрация реагирующих веществ, скорость подачи веществ, величина pH - это примеры наиболее часто встречающихся количественных факторов. Различные реагенты, адсорбенты, вулканизующие агенты, кислоты, металлы являются примером уровней качественных факторов.

I. Стадия конденсации, xi- температура реакции конденсации, °С;

x2- время прилива ацетона, мин; 3c3- время выдержки, час;5c4- соотношение компонентов, г/г; x5- скорость перемешивания, об/сек.

II. Стадия отгонки спиртоэфирной смеси. x6 -конечная температура сухого остатка, °С.

III . Стадия выделения ацетилацетона из нагнрацетгшацетона. x1 - величина pH; xъ - скорость подачи соляной кислоты, мл/сек; - температура при выделении, °С.

IV. Стадия вакуум - ректификации сырца ацетилацетона. x]Q ~ температура отгонки спирта - эфирной смеси 1-й фракции, °С; xи~ температура отгонки спирта - эфирной смеси 2-й фракции, °С; xп~ температура отгонки спирта - эфирной 3-й фракций, время отгонки 1-й фракции, время отгонки 2-й фракции, отгонки 3-й фракции, мин.

Как вы думаете, можно ли включать в планирование эксперимента факторы, относящиеся к различным стадиям?

Давайте рассуждать вместе.

В рассматриваемом примере процесс получения ацетилацетона, состоящий из четырех стадий, удобно представить как единое целое в виде одного «черного ящика» (рис. LJ^). На этот «черный ящик» воздействуют 15 факторов. Почему возникла необходимость все стадии как единое целое?

Параметр - оггпшйзации измеряется в конце последней стадии. На предыдущих стадиях выходной параметр не измеряется: отсутствуют нужные аналитические методики. Возможны и другие причины, например, параметр оптимизации отде'льной стадии противоречит общей цели оптимизации. Но было бы неправильным считать, что во всех случаях при оптимизации многостадийных процессов нужно рассматривать все стадии как единое целое. Весьма часто оптимизация отдельных стадий вполне оправдана и очевидна.

Так, процесс получения сульфамидизина состоит из трех химических стадии: получения сульгина, получения ацетил ацетона (это стадия, как вы знаете из рассматриваемого примера, в свою очередь состоит из четырех частей) и конденсации сульгина с ацетилацетоном. Сульгин и ацетилацетон имеет самостоятельное значение. Процессы их получения выделены в отдельные производства, зачастую территориальная не объединенные. Оптимизировать совместно все три стадии не представляется возможным и целесообразным.

Таким образом в планировании эксперимента можно включат факторы, относящиеся к различным стадиям, но не во всех' случаях это является необходимым.

3. Требования, предъявляемые к фактором
при планировании эксперимента.

Мы дали определение понятию «фактор» и привели примеры факторов. Теперь сформулируем требования, предъявляемые к факторам.

При планировании эксперимента факторы должны быть управляемыми.

Это значит, что экспериментатор, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т.е. может управлять фактором. В этом состоит особенность «активного» эксперимента. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора. '

Например что вы изучаете процесс синтеза аммиака. Колонна синтеза установлено на открытой площадке. Является ли температура воздуха фактором, который можно включить в планирование эксперимента.

Температура воздуха - фактор неуправляемый. Мы еще не научились делать погоду по заказу. А в планирования могут участвовать только те факторы, которыми можно управлять, - устанавливать и поддерживать на выбранном уровне в течение опыта или менять по заданной программе. Температурой окружающей среды в данном случае управлять невозможно. Ее можно только контролировать.

Чтобы точно определить фактор, нужно указать последовательность действий (операций), с помощью которых устанавливаются его конкретные значения (уровни). Такие определение фактора будем называть операциональным. Так, если фактором является давление в некотором аппарате, то совершенно необходимо указать, в какой – точке и с помощью какого прибора оно измеряется и как оно устанавливается. Введение операционального определения обеспечивает однозначное понимание фактора.

С операциональным определением связаны выбор размерности фактора и точность его фиксирования. Мы привыкли считать, что выбор размерности фактора не представляет особой трудности. Экспериментатор хорошо ориентируется в том, какую размерность нужно использовать. Это действительно так в тех случаях, когда существует устоявшаяся традиция, построены измерительные шкалы, приборы, созданы эталоны и т. д. Так обстоит дело при измерении температуры, времени, давления и т. д. Но бывает, что выбор размерности превращается в весьма трудную проблему выбора измерительных шкал, сложность которой далеко выход за рамки нашего рассмотрения.

Замена одной измерительной шкалы другой называется преобразованием шкал. Оно может быть использовано для упрощения модели объекта.

Точность замера факторов должна быть возможно более высокой. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. При изучении процесса, который длится десятки часов, нет необходимости учитывать доли минуты, а в быстрых процессах, необходимо учитывать, быть может, доли секунды. Если факторы измеряются с большой ошибкой или особенность объекта исследования такова, что значения факторов трудно поддерживать на выбранном уровне (уровень фактора «плывет»), то экспериментатору, следует обратиться к конфлюэнтному анализу.
Факторы должны быть непосредственными воздействиями на объект. Факторы должны быть однозначны. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов. Но в планирования могут участвовать сложные факторы, такие, как соотношения между компонентами, их логарифмы и т. п.
Необходимость введения сложных факторов возникает при желании представить динамические особенности объектов статической форме. Пусть, например, требуется найти оптимальный режим подъема температуры в реакторе. Если относительно температуры известно, что она должна нарастать линейно, то в качестве фактора вместо функции (в данном случае линейной) можно использовать тангенс угла наклона, т. е. градиент. Положение усложняется, когда исходная температура 'не зафиксирована. Тогда ее приходится вводить в качестве еще одного фактора. Для более сложных кривых пришлось бы,ввести большее число факторов (производные высоких порядков, координаты особых точек и т. д.). Поэтому целесообразно пользоваться сложным качественным фактором - номером кривой. Различные варианты кривых рассматриваются в качестве уровней. Это могут быть разные режимы термообработки сплавов, переходные процессы в системах управления и т. д. Мы показали, как можно сложный фактор -функцию представить с помощью простых1 однозначных факторов.

4.Заключение,

Итак, мы установили что факторы - это переменные величины, соответствующие способам воздействия внешней среды на объект. Они определяют как сам объект, так и его состояние. Требования к фактором: управляемость и однозначность.
Управлять фактором - это значит установить нужное значение и поддерживать его постоянным в течение опыта или менять по заданной программе. В этом состоит особенность «активного» эксперимента. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчинятся воле экспериментатора.
Факторы должны непосредственно воздействовать на объект исследования. Трудно управлять фактором, если (он является функцией других переменных, но в планировании эксперимента могут участвовать сложные факторы, такие,

как логарифмы, соотношения и т. д. Факторы должны быть определены операционально.
Требования к совокупности факторов: совместимость и отсутствие линейной корреляции. Выбранное множество факторов должно быть достаточно полным. Если какой - либо существенный фактор пропущен, это приведет к неправильному Определений оптимальных условий или к большой ошибке опыта. Факторы могут быть количественными и качественными.

Лекция 12. Факторный эксперимент
План:

1. Общие вопросы факторного эксперимента

2. Принятие решений перед планированием эксперимента

3. Выбор основного уровня

4. Выбор интервалов варьирования

1. Общие вопросы факторного эксперимента
Прежде чем приступить к планированию, попытаемся дать ответы на вопросы поставленные ранее. Прежде всего, как выбрать локальную область факторного пространства, где ее выбирать и какого размера она должна быть? Это важный этап принятия неформализованных решений, предшествующих построению плана первой серии эксперимента.
Здесь мы впервые сталкиваемся с проблемой принятия решений при планировании эксперимента. Далее мы уже не расстанемся с этой темой. Поэтому уместны несколько слов об особенностях этих этапов решения задачи. Весь процесс исследования можно считать состоящим из последовательности этапов, часть которых полностью формализована, а часть требует «интуитивных» решений. Причем, по мере развития теории формальные этапы будут играть все большую роль, но до конца не вытеснят неформализованные этапы. В силу того, между прочим, не ожидается создание «логарифмической линейки» по планированию эксперимента и надо тратить время на его изучение.

2. Принятие решений перед планированием эксперимента
При выборе области эксперимента, прежде всего надо оценить границы областей определения факторов. При этом должны учитываться ограничения нескольких типов. Первый тип – принципиальное ограничение для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах. Например, если фактор-температура, то нижним пределом будет абсолютный нуль. Второй тип – ограничения, связанные технико-экономическими соображениями, например, со стоимостью сырья, дефицитностью отдельных

компонентов, временем ведения процесса. Третий этап ограничений, с которым чаще приходиться иметь дело, определяется конкретными условиями проведения процесса, например, существующей аппаратурой, технологией, организацией. В реакторе, изготовленном из некоторого материала нельзя поднять температуру выше температуры плавления этого материала или выше рабочей температуры данного катализатора.

Оптимизация обычно начинается в условиях, когда объект уже подвергался некоторым исследованиям. Информацию, содержащуюся в результатах предыдущих исследований, будем называть априорной (т.е. полученной до начала эксперимента). Мы можем использовать априорную информацию для получения представления о параметре оптимизации, о факторах, о наилучших условиях ведения процесса и характере поверхности отклика, т.е. о том, как сильно меняется параметр оптимизации при небольших изменениях значений факторов, а также о кривизне поверхности. Для этого можно использовать графики однофакторных экспериментов, осуществлявшихся в предыдущих исследованиях или описанных в литературе. Если однофакторную зависимость нельзя представить линейным уравнением (в рассматриваемой области), то в многомерном случае, несомненно, будет существенная кривизна. Обратное утверждение, к сожалению, не очевидно.

Итак, выбор экспериментальной области факторного пространства связан с тщательным анализом априорной информации.

Поясним наши рассуждения примером.

Пример 1. Изучалось ионообменное разделение смесей группы редкоземельных элементов растворами иминодиуксусной кислоты. Параметр оптимизации – содержание неодима в выходном растворе (Элюаре) в процентах. Рассматривалось всего два фактора: концентрация элюента (входного раствора), % вес ( ) и pH элюента ( ). Как построить область определения факторов? Начнем с . Известно, что при >3 работать нельзя, т.к. предел растворимости данного вещества при нормальной температуре. Значит нельзя указать четкую границу. Известно только, что чем ниже концентрация, тем дольше идет процесс. При $\tilde{x}$ время протекания процесса находится в разумных пределах. Это и определяет нижнюю границу. Ради большой выгоды ее можно сдвинуть, тогда как изменить верхнюю границу практически нельзя.

Для выбора области определения использовались теоретические представления о процессе, из которых следует, что разделение происходит благодаря одновременному присутствию в системе двух соединений: моно и ди-комплексов. Специальные предварительные опыты показали, что при pH<3 кислота находится в недиссоциированном состоянии, а при pH>8 оба соединения разрушаются. Следовательно, может изменяться от 3 до 8.

Вы видите, как непросто решается этот важный вопрос. Но это только начало. Теперь в области определения надо найти локальную подобласть для

планирования эксперимента. Процедура выбора этой подобласти включает два этапа: выбор основного уровня и выбор интервалов варьирования.
3. Выбор основного уровня.
Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации, соответствует комбинация (или несколько комбинаций) уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве. Ее можно рассматривать как исходную точку для построения плана эксперимента. Назовем ее основным (нулевым) уровнем. Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно нулевого уровня.
В равных случаях мы располагаем различными сведениями об области наилучших условий. Если имеются сведения о координатах одной наилучшей точки и нет информации о границах определения факторов, то остается рассматривать эту точку в качестве основного уровня. Аналогичное решение принимается, если границы известны и наилучшие условия лежат внутри области.
Положение усложняется, если точка лежит на границе (или весьма близко к границе) области. Тогда приходится основной уровень выбирать с некоторым сдвигом от наилучших условий.
Может случиться, что координаты наилучшей точки неизвестны, но есть сведения о некоторой подобласти, в которой процесс идет достаточно хорошо. Тогда основной уровень выбирается либо в центре, либо в случайной точке этой подобласти. Сведения о подобласти можно получить, анализируя изученные ранее победные процессы, из теоретических соображений или из предыдущего эксперимента.
Наконец, возможен случай с несколькими эквивалентными точками, координаты которых различны. Когда отсутствуют дополнительные данные (технологического, экономического характера и т.д.), выбор произволен. Конечно, если эксперимент недорог и требует немного времени. Можно преступить к построению планов экспериментов вокруг нескольких точек.
Следующий пример иллюстрирует одну из возможных ситуаций.
Пример 2. На рис.1 изображена область определения для двух факторов. Кружком отмечены наилучшие условия, известные из априорной информации. Известно также, что имеется возможность дальнейшего улучшения параметра оптимизации, а данное значение нас не удовлетворяет. Эту точку нельзя рассматривать в качестве основного уровня. Дело в том, что она расположена на границе области определения. Требование симметрии экспериментальных точек относительно нулевого уровня привело бы в этом случае к выходу за границы области определения, чего делать также нельзя.
Резюмируем наши рассуждения о принятии решений при выборе основного уровня в виде блок-схемы.
После того как нулевой уровень выбран, переходим к следующему шагу-выбору интервалов варьирования.

4. Выбор интервалов варьирования.

Теперь наша цель состоит в том, чтобы для каждого фактора выбрать два уровня, на которых он будет варьироваться в эксперименте.

Представьте себе координатную ось, на которой откладываются значения данного фактора, для определенности-температуры. Пусть основной уровень уже выбран и равен 100 оС. Это значение изображается точкой. Тогда два интересующих нас уровня можно изобразить двумя точками, симметричными относительно первой. Будем называть один из этих уровней верхним, а второй – нижним. Обычно за верхний уровень принимается тот, который соответствует большему значению фактора, хотя это не обязательно, а для качественных факторов вообще безразлично.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни фактора. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным и верхним (или нижним) уровнем. Таким образом, задача выбора сводится к более простой задаче выбора интервала варьирования.

Заметим еще, что для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, а основной нулю. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать с помощью преобразования.

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{I_j},$$

где - кодированное значение фактора,

- натуральное значение основного уровня,

– интервал варьирования

j – номер фактора.

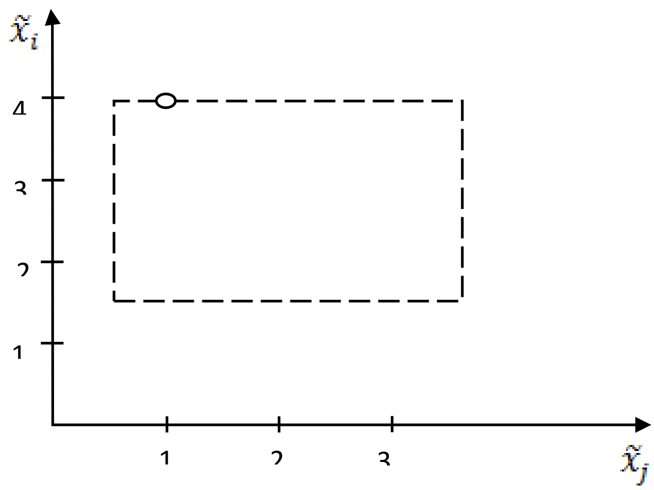
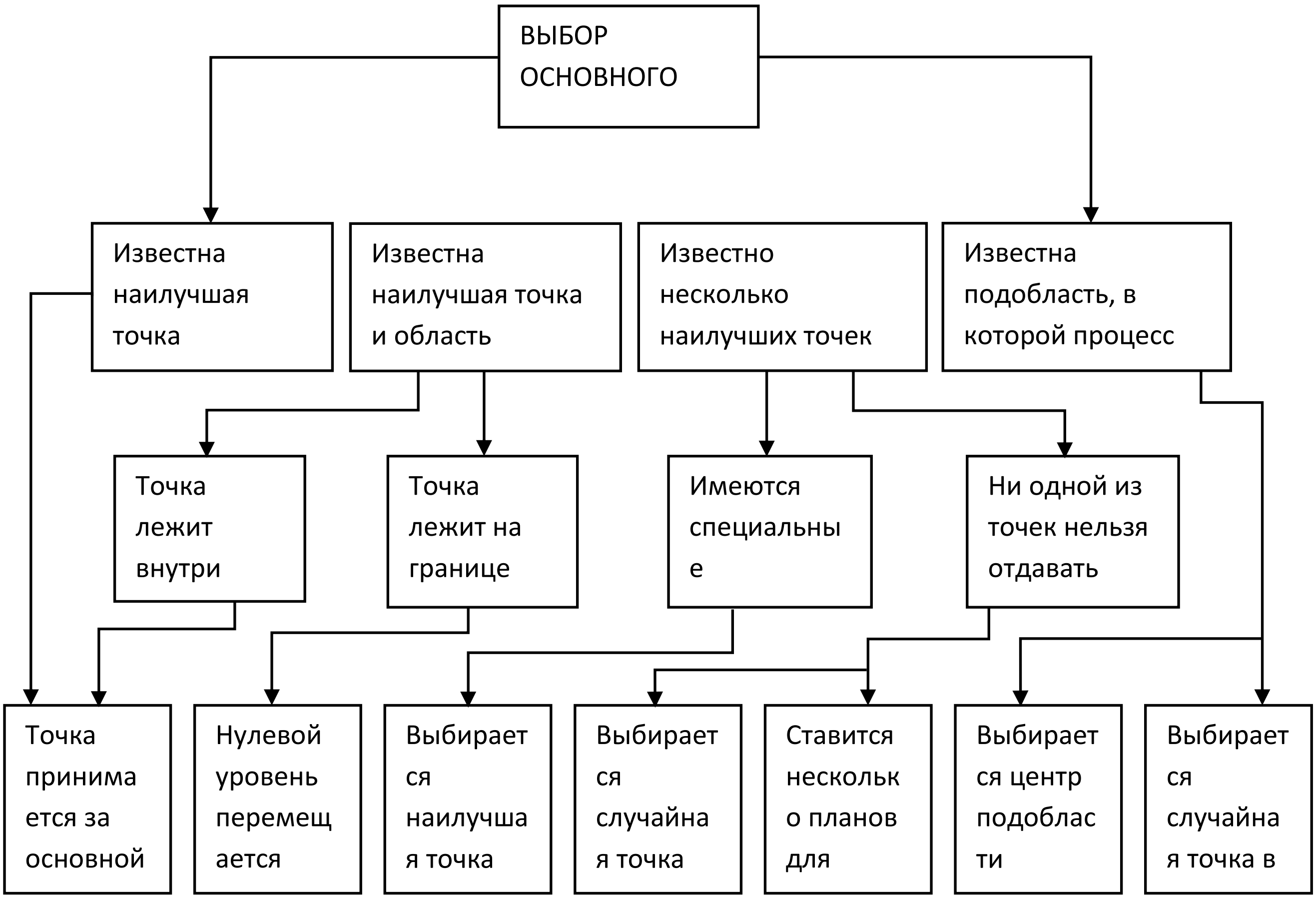


Рис. 1. Область определения двух факторов

Для качественных факторов, именующих два уровня, один уровень обозначается +1, а другой -1; порядок уровней не имеет значения.

Пусть процесс определяется четырьмя факторами. Основной уровень и интервалы варьирования выбраны следующим образом.

Основной уровень				
Интервал	3	30	1,5	15
варьирования	2	10	1	10



Остановимся на первом факторе. Отметим на координатной оси три уровня: нижний, основной и верхний.

Натуральные значения 1 2 3 5

Кодированные значения -1 0 +1

Нужно найти кодированное значение для $\tilde{x}_1$. Это значение лежит между 1,0 и 3,0, т.е. между -1 и 0 в координатном масштабе. Так как в натуральном масштабе 2,0 лежит посередине между 1,0 и 3,0, то ему соответствует -0,5 в кодированном масштабе. (Для $\tilde{x}_1$ будет x1=-0,25, для $\tilde{x}_1$ будет x1=-0,75 и т.д.)

На выбор интервалов варьирования накладываются естественные ограничение сверху и снизу. Интервал варьирования не может быть меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора. Иначе верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми. С другой стороны, интервал не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровни оказались за пределами области определения. Внутри этих ограничений обычно еще остается значительная неопределенность выбора, которая устраняется с помощью интуитивных решений.

Обратите внимание, что при решении задачи оптимизации мы стремимся выбрать для первой серии экспериментов такую подобласть, которая давала бы возможность для шагового движения в оптимуму. В задачах же интерполяции интервал варьирования охватывает всю описываемую область.

Выбор интервалов варьирования – задача трудная, т.к. она связана с неформализованным этапом планирования эксперимента. Возникает вопрос, какая априорная может быть полезна на данном этапе? Это сведения о точности, с которой экспериментатор фиксирует значения параметра оптимизации. Обычно эта информация является ориентировочной (в некоторых случаях она может оказаться просто ошибочной), но это разумная единственная основа, на которой можно начинать планировать эксперимент. В ходе эксперимента ее часто приходится корректировать.

Точность фиксирования фактора определяется точностью приборов и стабильностью уровня в ходе опыта. Для упрощения схемы принятия решений мы введем приближенную классификацию, полагая, что есть низкая, средняя и высокая точности. Можно, например, считать, что поддержание температуры в реакторе с погрешностью не более 1% соответствует высокой, не более 5% - средней, а более 10% - низкой точности.

Источником сведений о кривизне поверхности отклика, могут служить уже упоминавшиеся графики однофакторной зависимости с нелинейностью поверхности, всегда приводит к выбору узкого интервала. Довольно часто выбирается средний интервал и лишь в двух случаях широкий. В обеих последних блок-схемах отсутствуют однозначные решения.

Пример 3. Давайте продолжим рассмотрение примера 1. Вы помните, что область определения факторов была выбрана следующим образом: для от 0,5 до 3, для от 3 до 8. Основной уровень: =1,5 , =7,0.

Экспериментатор имел такую априорную информацию: точность фиксирования факторов средняя, поверхность отклика линейная, диапазон изменения

параметра оптимизации довольно узок. Принимаемое решение – широкий интервал варьирования. Экспериментатор выбрал такие интервалы: I1 = 0,5 , I2 = 1,0, что составляет 20 % от области определения факторов. Это несомненно широкие интервалы варьирования. Отметим, еще, что для основной уровень выбран вблизи границы области определения. Поэтому рекомендация о выборе широкого интервала варьирования приводит к совпадению верхнего уровня с этой границей. Так на практике осуществляется выбор интервалов варьирования. Мы продолжим рассмотрение этого примера и посмотрим, как оправдываются принятые решения.
Итак, вооружившись умением выбирать основной уровень и интервалы варьирования факторов, мы готовы приступить к построению плана проведения эксперимента.

Лекция 13. Методы выбора моделей
План:

Общие вопросы лекций.

Методика выбора модели.

Полиноминальные модели.

Заключения.

Общие вопросы лекций.
Модели бывают разные. Моделей бывает много. Чтобы выбрать одну из них, надо понять, что мы хотим от модели, какие требования мы к ней предъявляем. Теперь мы, пожалуй, сможем сформулировать эти требования.
Исходя из выбранной стратегии, ясно, что главное требование к модели-это способность предсказывать направление дальнейших опытов, причем предсказывать с требуемой точностью. Так как до получения модели мы не знаем, какое направление нам понадобится, то естественно требовать, чтобы точность предсказания во всех возможных направлениях была одинакова.
Это значит, что в некоторой подобласти, в которую входят и координаты выполненных опытов, предсказанное с 1 помощью модели значение отклика не должно' отличаться от фактического больше чем на некоторую заранее заданную" величину.' Модель, которая удовлетворяет такому или какому-либо аналогичному требованию, называется адекватной. Проверка выполнимости этого требования называется проверкой адекватности модели. Разработаны специальные статистические методы, с помощью которых проверяется адекватность.
2. Методика выбора модели.
Если несколько различных моделей отвечают нужным требованиям, то следует предпочесть ту из них, которая является самой простой.

Например логарифмическая функция. На некотором отрезке [xmin,xmax] она с удовлетворительной точностью описывается двумя уравнениями:
В уравнении (2) коэффициент, который мы можем оценить, например, по результатам эксперимента. Какое из уравнений, (1) или (2), по вашему мнению, проще?
Простота-вещь относительная. Если вы заранее не с формулируете точно, что называется простым, а что сложным, то невозможно произвести выбор. Вот почему на наш вопрос не было никакого другого ответа, кроме «не знаю».
На будущее мы договоримся, что при прочих равных условиях мы всегда будем предпочитать степенные ряды. Точнее, отрезки степенных рядов - алгебраические полиномы. При таком соглашении можно сказать, что уравнение (2) проще, чем уравнение (1).
Фактически мы произвели выбор класса моделей. Мы сказали, что всегда, когда это возможно, будем искать модель среди полиномов. Построение полинома возможно в окрестностях любой точки факторного пространства, поскольку мы предположили, что функция является аналитической.

Выбрать - значит сравнить. А как сравнить между собой классы моделей, если свойства объекта заранее неизвестны? Остается предполагать, что нам будут редко встречаться задачи, в которых ирходные постулаты окажутся существенно неверными. Если это так, то мы действительно выбрали наиболее простой, удобный и математически разработанный класс моделей.

Возможно, что кто-то заранее выбрал для нашей задачи конкретную модель. Тогда тоже возникает необходимость в планировании эксперимента для оценки ее коэффициентов. Но мы не будем рассматривать задачи этого типа.

Давайте выпишем полиномы для случая двух факторов. Они будут различаться по максимальным ртепеням входящих в них переменных.

Полином нулевой степени: y = Ьо

Полином первой степени: y = Ьо + Ьxx{ + Ь2x2

Полином второй степени: . y = Ь0 +bxx} +b2x2 + bKxix2 \bnx]2 + Ь22x22

Полином третьей степени:

x2x +b x x2 +h x3 +h r3
3. Полиномиальные модели
Итак, мы представили неизвестную нам функцию отклика полиномом. Операция замены одной функции другой, в каком-то смысле эквивалентной функцией называется аппроксимацией. Значит, мы аппроксимировали неизвестную функцию полиномом.
Но полиномы бывают равных степеней. Какой взять на первом шаге?

Эксперимент нужен только для того, чтобы найти численные значения коэффициентов полинома. Поэтому чем больше коэффициентов, тем больше опытов окажется необходимым. А мы стремимся сократить их число. Значит, надо найти такой полином, который содержит как можно меньше коэффициент но удовлетворяет требованиям, предъявленным к модели. Чем ниже степень полинома при заданном числе факторов, тем меньше в нем коэффициентов.

Мы хотим, чтобы модель хорошо предсказывала направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. Такое направление называется направлением градиента. Ясно1, что движение в этом направлении приведет к успеху быстрее, чем движение в любом другом направлении.

Как вы думаете, можно ли в этой связи всегда использовать полином первой степени?

С одной стороны, он содержит информацию о направлении градиента, с другой в нем минимально возможное число коэффициентов при данном числе факторов. Единственное опасение в том, что неясно, будет ли линейная модель всегда адекватной. Ответ зависит ещё и от объекта. Этим нам и предстоит сейчас заняться, чтобы завершить столь утомительную главу.

Вопрос в том, как выбрать подобласть в факторном пространстве, чтобы линейная модель оказалась адекватной. Условие аналогичности функции отклика гарантирует нам эту возможность. Всегда существует такая окрестность любой точки, в которой линейная модель адекватна. Размер такой области заранее не известен, но адекватность, как вы помните, можно проверять по результатам эксперимента. Значит, , выбрав сначала произвольную подобласть, мы, рано или поздно; найдем её требуемые размеры. И как. только это случиться, воспользуемся движением по градиенту.

На следующем этапе мы будем искать линейную модель уже в другой подобласти. Цикл повторяется до тех пор, пока движение по градиенту не перестанет давать эффект. Это значить, что мы попали в область, близкую к оптимуму. Такая область называется «почти стационарной». Здесь линейная модель уже не нужна. Либо попаданием в почти стационарную область задача решена, либо надо переходить к полиномам более высоких степеней, например второй степени, чтобы подробнее описать область оптимума.

Удачный выбор подобласти имеет, как вы видите, большое значение для успеха всей работы. Он связан с интуитивными решениями, которые принимает экспериментатор на каждом этапе. Как ('это делается, мы рассмотрим ниже в следующей главе в гл. 11 и 13.

Кроме задачи оптимизации, иногда возникает задача построения интерполяционной модели. В этом случае нас не интересует оптимум. Просто мы хотим предсказывать результат с требуемой точностью во всех точках некоторой заранее заданной области. Тут не приходится выбирать подобласть. Необходимо последовательно увеличивать степень полинома до тех пор, пока модель не окажется адекватной. Если адекватной оказывается линейная, или

неполная квадратная модель, то ее построение аналогично тому, что требуется для оптимизации. Поэтому мы попутно будем рассматривать и эту задачу..
4.3аключения
Итак, мы выбрали модель, которую будем систематически использовать на первом этапе планирования эксперимента. Это алгебраический полином перво'й степени -'линейная модель.
Чтобы произвести такой выбор, нам понадобилось научиться изображать поверхность отклика в факторном пространстве, задаваемом прямоугольными декартовыми координатами, по осям которых откладываются в некотором масштабе значения (уровни) факторов и значения параметров оптимизации. Поверхность отклика задана только в совместной области определения факторов. В этой области каждому возможному набору значений факторов (состоянию объекта) соответствует единственное значение параметра оптимизации. Для уменьшения размерности факторного пространства 'при геометрическом построении поверхности отклика можно использовать сечения.
Мы выяснили, что математическая модель требуется для предсказания направления градиента, т.е. направления, в котором величина параметра оптимизации улучшается быстрее, чем в любом другом, направлении. Такая модель позволяет избежать полного перебора состояний объекта и тем самым уменьшить количество опытов, необходимых для отыскания оптимума.
Отказ от полного перебора требует оплаты в виде предположений о свойствах поверхности отклика, которые мы не сможем проверить. Такие предположения можно выбрать по-разному. Мы выбрали предположения об аналитичности функции отклика и об единственности оптимума. Аналитической называется такая функция, которую можно разложить в степенной ряд в окрестностях любой точки из области ее определения.
Используя эти предпосылки, мож^о предложить процедуру поиска оптимума, основанную на шаговом принципе. Этот принцип гласит: проводи короткие (насколько возможно) серий опытов, по их результатам строй математическую модель, используй модель для оценки градиента, ставь новые опыты только в этом направлении. Получается циклический процесс, который заканчивается при попадании в область, близкую к оптимуму («почти стационарную» область).
Чтобы выбрать теперь , конкретную . модель; надо сформулировать конкретные требования. К ним относятся адекватность и простота.
Под адекватностью понимается способность модели предсказывать результаты эксперимента в некоторой области с требуемой точностью. После реализации опытов можно проверить адекватность модели.
Простота-вещь относительная. Мы просто условились считать алгебраические полиномы самыми простыми. Это соглашение базируется на накопленном разными исследователями опыте работы с такими моделями и обычно удовлетворяет экспериментатора. Кроме того, полином линеен относительно неизвестных коэффициентов, что упрощает обработку наблюдений.

Так мы выбрали класс моделей. Осталось выбрать, степень полинома и подобласть, в которой надо начинать эксперимент. Эти выборы связаны между собой. Однако важно, что в принципе возможен такой выбор области, при котором линейная модель окажется адекватной. Этого достаточно, чтобы оценить градиент.
Выбор области связан с теми интуитивными решениями, которые принимает экспериментатор на каждом этапе работы.
Попутно мы упомянули о задаче построения интерполяционных моделей, которые используются для предсказания откликов во всей области. Область фиксируется заранее. Надо последовательно повышать степень полинома до тех пор, пока не найдется адекватная модель.
Так как же, наконец, выбирать условия проведения опытов в первом эксперименте, что такое на практике экспериментальный план?

ЛЕКЦИЯ №14 Задача обработки результатов эксперимента.

План:

Общие вопросы задач обработки результатов эксперимента.

Обработка результатов исследованияфизических прцессов.

Подбор математических моделей.

Анализ точности полученный модели.

1. Общие вопросы задач обработки результатов эксперимента.
Обработка результатов эксперимента заключается в применении методов мат. статистики для оценки значений разл. физ. величин (св-ва вещества, параметры технол. Прцессов и др.), характеризующих изучаемые объекты, и (или) зависимости этих величин от одного либо нсск. изменяемых внеш. условий (напр., температура, давление, тип катализатора). Обработка результатов эксперимента (О.р.) включает, как правило, также и огределение точности данных полученных при его проведении.
Результаты измерений обычно содержат случайные ошибки, поэтому статистич. оценки выполняют только при наличии серии измерений - т. наз. случайной выборки. Для оценки измеряемого значения к-л величины или исследуемой зависимости её от внеш. условий по данным выборки рассчитывают т. наз. выборочные параметры, характеризующие статистич. распределение ошибок в провиденном эксперименте. Такое распределение, как правило, подчиняется т.наз. нормальному закону, конкретный вид которого определяет два параметра -выборочное среднее и выборочная дисперсия (см.ниже.)

Точность получаемых оценок устанавливают с помощью статистич. критериев Стьюдента (t-критерий), Фишера (F-критерий) и т.д. При этом количеств, мерами служат т. наз. доверит, вероятность ри уровень значимости статистич. критерия Р = 1-р. При заданных требованиях на точность результатов измерений доверит, вероятность (уровень значимости) определяет надежность полученной оценки.

Обработка результатов измерений значения физической величины. Проводится, если условия опыта не изменяются или их возможные изменения не учитываются. Такая О.р. состоит в оценки значения выборочного среднего (среднего арифметического) и определении её точности. При этом различают О.р. прямых и косвенных измерений.

Прямые измерения. При таких измерениях числовое значение определяемой величины непосредственно считывается с показаний прибора (нап., весов). Если при повторных измерениях одной и той же величины а получается неразличимые результаты х для принятой градуировки шкалы прибора, то в этом случае качества абс. погрешности измерений м.б. принята цена деления шкалы. Если же при п повторных измерениях регистрируется различные отсчеты по шкале прибора, то их совокупность может рассматриваться как выборка случайных величин Xt, X2, Xп. В качестве наиб, вероятной оценки значения измеряемой величины в этом случае обычно полагают выборочное среднее

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi; \qquad (1)$$

К-рое принимают за приближенное значение а, т.е. а ~ х

Так как ошибки измерений случайны, полученная оценка результата х также случайна. Мерой её погрешности служат т.наз. выборочный стандарт среднего

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{Sx2fn}\ , \qquad (2)$$

Где Sx - выборочная дисперсия, которая может вычисляться на основании той же выборки :

$$S_x{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Xi-X)\wedge 2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi\wedge 2-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} Xi)\wedge 2}{n-1}\ , \qquad (3)$$

Значение погрешности найденной оценки х определяется величиной т. наз. доверит, интервала 8р, который «накрывает» истинное значение а с заданной доверит. Вероятностью, т.е.

а = X ± SB , (4)

Величина доверит. Интервала при достаточно больших объемах выборки (п>30-50) зависит только от принимаемого значения р\ нал.:

для р = 0,68 $\varepsilon\beta = S_{\bar{x}}$; (4)

для р = 0,95 $\varepsilon\beta = 2S\bar{x}$; (5а)

для р = 0,99 $\varepsilon\beta = 3S\bar{x}$; (5б)

При значениях п < 30, что наиболее характерно для эксперимента, существенна зависимость sp также и от числа опытов. В этом случае для вычисления ер в качестве коэф. используют табл. значение t-критерия (см. табл. на форзаце в конце тома), соответств >тощее уровню значимости p=1-P и числу степеней свободы выборочной дисперсии f = п-1:

$$\mathcal{E}\beta=t(p,f)\sqrt{\frac{Sx}{n}}\ ; \tag{6}$$

Если значения границ доверит, интервала х- ёр и х+ Ер имеют разные знаки, оценки результата незначима, и с вероятностью Р можно полагать, что х~0. Обычно принимают Р=0,95, реже 0,99 и 0,999.

Пример 1. При взвешивании образца анализируемого в-ва получены следующие результаты: 47,12; 47,08; 47,13г. Оценить истинную массу образца и определить точность этой оценки для Р=0,95. В данном случае п=3; р =1- р = 1-0,95=0,05; f=n-l=3-l=2. Пс формулам (1)-(3) вычисляют выборочные среднее и дисперсию:

$$S_x^2=\frac{(47{,}12-47{,}11)\wedge 2+(47{,}08-47{,}11)\wedge 2+(47{,}13-47{,}11)\wedge 2}{3-1}=0{,}0007г^2.$$

$$\bar{X}=\frac{(47{,}12+47{,}08+47{,}13)}{3}=47{,}11г.$$

Далее по таблицам распределения Стьюдента находят величину t(p,f) = t(0,05; 2)= 4,30 и по ф-ле (6) рассчитывают величину доверит, интервала:

$$\mathcal{E}\beta=4{,}30\sqrt{\frac{0{,}0007}{3}}=0{,}07г.$$

Оценка массы образца по ф-ле (4) составляет 47,11±0,07г. С увеличением числа измерений еь уменьшается. Так, если дополнить проведенные измерения результатами еще двух взвешиваний (47,09 и 47,13г), то п= 5, f= п-1=5-1 =4, и аналогично предыдущему определяют х=47,11г; Sx2=0,00055r2; t(0,05; 4)=2,78; 8р=0,03г.Т.обр., точность оценки массы возрастает более чем в два раза; 47,11±0,03г.

Косвенные измерения. Таким измерениям наз.расчет величины у по результатам прямых измерений хь Х2,..., хк неск. величин ai, &2,..., ак. В общем случае вычислит, процедура определения у представляется в виде ф-ции к переменных:

$$y=y(x_1, x_2,\dots, x_к). \tag{7}$$

Тогда выборочное среднее находят подстановкой в расчетные фль: выборочных средних прямо измеренных величин:

$\bar{y} = y(x_1, x_2, ..., x_к)$. (8)

Выборочную дисперсию вычисляют по ф-ле:

$S_y^2 = \sum_{i=1}^{k}(\frac{dy}{dxi}) \wedge 2\ Sx$; (9)

Где частная производная ф-ции у по прямо измеренной величине Xj. При определении доверит, интервала для результата косвенного измерения общее чи:ло опытов п принимается равным Y,f=i nU гДе п-число измерений Xj; число степеней свободы f=n-k. Последовательность расчетов: 1) вычисляют выборочные средние и дисперсии прямо измеренных величин. 2) По формулам (8) и (9) находят выборочные среднее и дисперсию искомой величины. 3) По табл. распределение Стьюдента находят значения t-критерия и вычисляют доверительный интервал полученной оценки измерения.

2. Обработка результатов исследования физических процессов

Обработка результатов исследования зависимости физической величины от изменяющихся условий опытов (построение математической модели). Проводится с целью построения аналит.(в виде ур-ния) зависимости значения величины у, характеризующей изучаемый обект и наз.откликом, от одного либо ряда изменяющихся внеш. условий ипи факторов хь хг, ..., хк> к-рыеобразуют т.наз. факторное пространство.
Введем некоторое понятия матричной алгебры, используемые при получении оценок зависимостей и определении их точности. Матрицей А называют нзк-рую таблицу чисел; порядок или размер, матрицы т х п определяет число её строк т и число столбцов п. Элементы матрицы А обозначают через ау; где первый индекс указывает на его принадлежность к i-му столбцу (для матрицы В-элементы by, для матрицы D-dy, и т.д.). Матрицу, состоящую из одного столбца, называют вектором а, матрицу содержащую одинаковое число строк и столбцов (при т-п), квадратной матрицей. Элемент матрицы у которого значения ъ ндексов равны (i-j), называют диагональным. Матрицу все элементы которой, кроме ди£тональных, равны нулю, называют диагональной; если все её диагональные элементы равны 1, матрицу называют единичной и обозначают через Е. матрицу у которой строки замене! :ы столбцами, а столбцы строками, называют транспонированной и обозначают через А\ еслл А=А\ такую матрицу называют симметричной. Сумма двух матриц А и В одинакового поэядка т х n-матрица D=A+B того же порядка, для которой dij=aij+by (i=l,2,...,n). произведения матрицы U порядка m x s на матрицу порядка sxn матрица Q=UV порядка т х п, где

$q_{ij} = \sum_{k=i}^{i} \cup \, ij \; Vkj \quad i=1, 2, \ldots, m \quad j=1, 2, \ldots, n$

Произведением матрицы U порядка т х s на вектор v порядка s служит вектор q=Uj, порядка т,
где
$q_i = \sum_{k=i}^{i} \cup \, ij \; Vk \quad i=1, 2, \ldots, m$

Обратной матрице по отношению к данной матрице А называют такую матрицу А"1, произведением которой на исходную является единичная матрица АА"1=А"1А=Е
Далее в тексте вводится матрицы Ф, N и С, а также векторы х, у, ур и t, принятые в мат.статистике. В зависимости от организации опытов принято различать пассивный и активный эксперименты. При проведение пассивного эксперимента для каждого измерения значения отклика yi(i=l, 2, п) регистрируется совокупность значений факторов X1=(хц1 X2j,... ХкО, представляющая собой точку в факторном пространстве с соответствующими значениями координат. Ценность пассивного эксперимента существенно зависит от того, насколько широко пределы изменение факторов; как правило, область его применения - действующие хим.произ-ва. Активный эксперимент (см.Планирование эксперимента) отличагтся возможностью целенаправленного изменения значений факторов по заранее выбранному плану со стабилизацией этих значений в каждом опыте, что позволяет постановку т.наз.параллелных опытов, т.е. воспроизведение опытов для многократных измерений откликах в одних и тех же точках факторного пространства. Построение мат.модели (ур-ния регрессии)

$$y = y(x,b) ; \qquad (10)$$

Состоит в нахождение значений её параметров - выборочных коэф. эегрессии b=(bo, bi, Ьг ...Ьт) и проводится обычно т.наз. методом наим. квадратов. Последний обеспечивает минимизацию суммы квадратов отклонений (остаточной суммы квадратов) резуль гатов расчета по ур-нию регрессии yi(p)=y(xj; b) от соответствующих эксперим.значений отклика у; во всех зарегистрированных точках факторного пространства (i=l,2,..., п), ствечающих условиям опытов:

$$R = \sum_{i=1}^{m} (yi^{(p)} - yi) \wedge 2. \qquad (П)$$

Наиб, просто задача определения параметров решается для линейньх по ним мат.моделей.
При О.р. пассивного эксперимента такие модели в общем случае представляет в виде суммы I=m+1 базовых ф-ции от факторов - т.наз. рег-рессоров - с коэф., ксторые и являются искомыми парметрами:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{m} bj\varphi j(x), \qquad (12)$$

Где (pj(x) - регрессоры модели. Ь; - пораметрб/ модели подбор математических моделей.

Конкретный вид математических моделей подбирают так, чтобы достигнуть удовлетворительной точности описания эксперим. данных. Например, при описании исследуемого св-ва соед. многочленом (полиномом) второго порядка от двух переменных (т-ры и давления) ур-ние мат.моделт (12) примет вид:

$$y(x) = y(x_1, x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_2^2 + b_5x_1x_2 ; \qquad (13)$$

В данном случае регрессорами являются следующие ф-ции факторов:

$$\varphi_0(X) = 1,\ \varphi_1(X) = X_1,\ \varphi_2(X) = X_2,\ \varphi_3(X) = X_1^2,\ \varphi_4(X) = X^2{}_2,\ \varphi_5(X) = X_1X_2. \qquad (14)$$

Самый простой вид имеет линейная функция одной переменной - прямая линия на плоскости x-y:

$$y(x) = b_0 + b_1x. \qquad (15)$$

Для мат.модели этого класса вычислит.процедура метода наим. квадратов сводится к решению системы линейных алгебраич. уровнений порядка I относительно вектора неизвестных параметров модели Ь. Эту систему составляют след. образом:

1) Формируют матрицу Ф порядка n x I, столбцы к-рой пред стан ляют собой значения регрессоров для каждого опыта

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi0(X1) & \varphi1(X1) & \varphi m(X1) \\ \varphi0(X2) & \varphi1(X2) & \varphi m(X2) \\ \varphi0(Xn) & \varphi1(Xn) & \varphi m(Xn) \end{bmatrix} \qquad (16)$$

2) Эту матрицу транспортируют и умножают на исходную, получая в результате симметричную матрицу (порядка I) коэф., или параметров системы уровнений

Ы=ФЛФ; (17)

3) Умножают транспонированную матрицу на вектор значений этклика y=(yi, уг,..., УпХ получая вектор правых частей (порядка I) системы ур-ний;

4) Составляют т.наз. систему нормальных ур-ний, к-рую принято записывать в виде:

$$(\Phi`\Phi)b=(\Phi`y) \qquad (18)$$

В частном случае при построении модели в виде линейной ф-ции одной переменной в соответствии с ур-нием (15) решение системы (18) сводится к вычислению значений параметров bi и bo по ф-лам:

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} XiYi - \sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} Yi}{n\sum_{i=1}^{n} Xi - (\sum_{i=1}^{n} Xi)\wedge 2}$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Yi - b1\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} \; . \qquad (19а,б)$$

Практич. применение ф-ла (18) и (19) может потребовать предварит, изменения масштаба факторов из-за возможной значит, погрешности в расчете параметров модели, обусловленной вычислить св-вами этих ф-л. Если порядок значений элементов в с толбцах матрицы Ф превышает 101, то выполняют пересчет значений соответствующих факторов либо путем перехода к др. единицам измерения (напр., от секунд к часам), либо их преобразованию к безразмерному виду с размещением на интервале от - 1 до 1(т.наз. нормирование) по формуле:

$$X_{ui}^{(H)} = \frac{2Xui-2Xu(min)-\Delta Xu}{\Delta Xu}, \qquad (20)$$

Где Дхи= хишах- х umin; х ишш и xumax -миним. и макс, значения u-го фактора в опытах. Лучшие по точности значения параметров модели получают при но рмировании всех факторов хи(х), и=1,2,..., к, поскольку в данном случае они проводится к величинам одного масштаба. Для восстановления ур-ния мат.модели в исходных единицах измерения и масштабах факторов в ф-ле (12) осуществляют обратную подстановку согласно формуле (20)

4.АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННЫЙ МОДЕЛИ.

Анализ точности построенной модели проводят разными методами в зависимости от характера и св-в факторов и отклика. Наиб, распространенный т.наз. регрессионный анализ, который состоит в выделении относительно значимых факторов сопоставлением их вклада с погрешностью эксперимента и в проверке мат.модели на адекватно сть описание изучаемого объектом исходным данным путем сравнения погрешности вычисления значения отклика по полученному ур-нию регрессии с воспроизводимостью опытов. Использование регрессионного анализа требует выполнения след. условий, предъявляемых к обрабатываемым эксперимен. данным: а)ошибки измерений факторов пренебрежимо малы в сопоставлении с ошибкой измерения отклика; б)ошибки измерений отклика распределены по нормальному закону; в) выборочные дисперсии откликов во всех опытах однородны (соизмеримы). При проведении пассивного эксперимента обычно не удается полностью удовлетворить перечисленным условиям или получить необходимые данные в дос гаточном объеме. Поэтому на практике при О.р. принимают нек-рые допущения или ограничиваются неполным использованием этой методике. В основе её сводят к расчету т.наз. эстаточной дисперсии:

$$S_{ост}^{2} = \frac{R}{n-l}, \qquad (21)$$

В котором для определения остаточной суммы квадратов R по ф-ле (11) результаты вычислений yi(p) получают при умножении матрицы Ф на вектор параметров модели Ь: у(р)=ФЬ, (22) А также к попытке упрощения вида мат. Модели исключением относительно незначимых регрессоров, для чего находят вектор t:

$$t_j = \frac{|b|}{\sqrt{Cjj}} \quad j = 0, 1, \ldots, m, \qquad (23)$$

Где Cjj-диагональные элементы т.наз. ковариационный матрицы:

$C=N^{-1}$. (24)

Регрессор которому соответствует миним. значение tj, исключают v з модели, составляют и решают новую систему ур-ний. Рассчитывают новое значение осте точной дисперсии, и если оно оказывается меньше, чем для исходной модели, принимают упрощенную модель. Процедура после-доват. исключение регрессоров может продолжат ься, пока уменьшается остаточная дисперсия.

Если дисперсия отклика известна и рассчитана по специально поставленным параллельным опытом (что часто исключается в условиях пассивного эксперимента), мат.модель м.б. проверена на адекватность описания объекта исходным данным с к спользованием F-распределения Фишера. Для этого вычисляют отношение остаточн эй дисперсии к выборочной дисперсии отклика (большей по значению к меньшей). Если это отношение оказывается меньше табличного значения F-критерия:

$$\frac{S6}{Sm} < F\ (p, f_1, f_2)\ , \quad (25)$$

Где fi, f2- число степеней свободы соотв. большей и меньшей дисперсий, то различие этих дисперсий принимается незначимым, ошибка определения значений отклика по ур-нию регрессии - сравнимой с воопроизводимостью опытов, а мат.модель - адекватно описывающей экспериментально исследоЕанный объект. Причиной неадекватности модели объекту м.б. неучтенные существ, факторы или неправильный выбор её вида.

Пример 2. Найти аналит. зависимость вязкости азота и. позволяет от давления Р при 25°С по след. данным:

Р, МПа 3,50 6,90 13,71 34,12 68,15 ц, мПа°с 0,0185 0,0:90 0,0208 0,0286 0,0415

Использование этих данных в качестве координат для изображения соответствующих точек на плоскости Р - ц позволяет сделать вывод о том, что упомянутая зависимость в рассматриваемом интервале давлений близка к линейной {см.ф-лу(15)}:

ц =b0+biP

Параметры bi и bo м.б. определены по ф-лам (19) с использованием результатов вычислений, сведенных в табл.(ьномер опыта):

I	Pi	Hi	Pi Hi	P,2	цр	up-Hi
1	3,50	0,0185	0,0647	12,25	0,0177	0,0007
2	6,90	0,0190	0,1311	47,61	0,0189	0,0001
3	13,71	0,0208	0,2852	187,96	0,0215	0,0007
4	34,12	0,0286	0,9758	1164,10	0,0288	0,0003
5	68,15	0,0415	2,8282	1644,40	0,0413	-0,0002
S	126,38	0,1284	4,2850	6056,32		

$$b_1 = \frac{5 \times 4{,}2850 - 126{,}38 \times 0{,}1284}{5 \times 6056{,}32 - 126{,}38 \wedge 2} = 0{,}00036$$

$$b_0 = \frac{0{,}1284 - 0{,}00036 \times 126{,}38}{5} = 0{,}0165.$$

$$\mu = 0{,}0165 + 0{,}00036\ P.$$

Полученная модель имеет вид:

Лекция 15. Дробный факторный эксперимент.

План:

Минимизация числа опытов.

Дробная реплика.

Выбор полуреплик.

Область применения дробных реплик.

Количество опытов в полним факторном эксперименте значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейной модели. Другими словами, полный факторный экспериментe обладает большой избыточностью опытов. Было бы заманчивым сократить их число за счет той информации, которая не очень существенна при построении линейных моделей. При этом нужно стремиться к тому, чтобы матрица планирования не лишилась своих оптимальных свойств. Сделать это не так просто, но все же возможно. Итак, начнем поиск путей минимизации числа опытов.

1 Минимизация числа опытов.

Начнем с самого простого – полного факторного эксперимента 22. Напишем еще раз эту хорошо известную нам матрицу (табл.1)

Номер опыта	X0	X1	X2	(x3) x1x2	y	Номер опыта	X0	X1	X2	(x 3) x1 x2	y
1	+	-	-	+	У1	3	+	-	+	-	У 3
2	+	+	-	+	У2	4	+	+	+	+	У 4

Пользуясь этим планированием, можно вычислить четыре коэффициента и представить результаты эксперимента в виде неполного квадратного уравнения:

У=b0+ b1x1+b2x2+b12x1x2.

Если имеются основания считать, что в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента b0, b1 и b2. Остается одна степень свободы. Употребим ее для минимизации числа опытов. При линейном приближении b12 → 0 и вектор-столбец x1x2 можно использовать для нового фактора x3. Поставим этот фактор в скобках над взаимодействием x1x2 и посмотрим, каковы будут оценки коэффициентов. Здесь уже не будет тех раздельных оценок, которые мы имели в полном факторном эксперименте 2k.

b1 → β1+β23; b2 → β2+β13; b3 → β3+β12;

Но нас это не должно огорчать. Ведь мы постулируем линейную модель и, следовательно, все парные взаимодействия незначимы. Главное, мы нашли средство минимизировать число опытов: вместо восьми опытов для изучения трех факторов оказывается можно поставить четыре! При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т.п.), в чем вы можете самостоятельно убедиться. Найденное правило можно сформулировать так: чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащей взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Посмотрите, пожалуйста, на три матрицы, приведенные ниже. Эти матрицы предлагаются взамен полного факторного эксперимента 23, требующего, как вы знаете, восьми опытов. Каким бы из них вы воспользовались?

Матрица №1

№	X0	X1	X2	X3	y
1	+	-	-	+	У1
2	+	+	+	-	У2
3	+	-	+	-	У3
4	+	+	-	+	У4

Матрица №2

№	X0	X1	X2	X3	y
1	+	-	-	+	У1
2	+	+	+	+	У2
3	+	-	+	-	У3

Матрица №3

№	X0	X1	X2	X3	y
1	+	-	-	+	У1
2	+	+	+	+	У2
3	+	-	+	-	У3
4	+	+	-	-	У4

Проверим свойства матрицы №1. Каждый вектор-столбец матрицы, кроме первого, содержит равное число +1 и –1. Это означает, что выполняется условие:

$$\sum_{1}^{4} x_{ji} = 0$$

Теперь перемножим каждую пару вектор-столбцов и посмотрим, будет ли сумма произведений равна нулю. К сожалению:

$$\sum_{1}^{4} x_{2i} x_{3i} = -4$$

Т.е. совершена ошибка в выборе матрицы. Постараемся ее найти. Вектор-столбцы для x1 и x2 не вызывают сомнения. Ведь эта часть матрицы – полный факторный эксперимент 22. А как построен вектор-столбец для x3? Элементы этого столбца обратны по знаку элементам соседнего столбца x2. Два этих столбца оказались взаимосвязанными x3=-x2. При этом b3 → β3 - β2 и b2 → β2 - β3. В таком планировании не могут быть отдельно оценены основные эффекты. Значит, мы потеряли информацию о двух линейных коэффициентах нашей модели. Таким планированием воспользоваться невозможно.

Матрица №2 содержит всего три опыта. Три опыта недостаточны для оценки четырех коэффициентов: b0, b1, b2 и b3. Кроме того , ни одно из свойств, присущих полному факторному эксперименту здесь не выполняется, за исключением нормировки. Матрица №3 сохраняет все свойства полного факторного эксперимента. Она дает возможность оценить свободный член b0 и три коэффициента при линейных членах, потому что для x3 использован вектор-столбец x1x2 полного факторного эксперимента 22.
Если мы в дополнение к столбцам матрицы №3 вычислим еще столбцы для произведений x1x3 и x2x3, то увидим, что элементы столбца x1x3 совпадут с элементами столбца x2, а элементы столбца x2x3 – с элементами столбца x1. Найденные нами коэффициенты будут оценками для совместных эффектов.
b1 → β1+β23; b2 → β2+β13; b3 → β3+β12;

Такое планирование нас вполне устраивает. Мы смешали эффекты взаимодействия с основными эффектами. (Но все основные эффекты оцениваются друг от друга!) Так как постулируется линейная модель, то предполагается, что эффекты взаимодействия близки к нулю, и поэтому b1 ≈ β1, b2 ≈ β2, b3 ≈ β3.

Мы рассмотрели самый простой случай: матрицу из четырех опытов для трехфакторного планирования. С увеличением числа факторов вопрос о минимизации числа опытов превращается в довольно сложную задачу. Рассмотрим ее детально. При этом нам не обойтись без новых определений и понятий.

2 Дробная реплика.

Поставив четыре опыта для оценки влияния трех факторов, мы воспользовались половиной полного факторного эксперимента 23, или «полурепликой». Если бы мы x3 приравняли 2- x1 x2, то получили бы вторую половину матрицы 23. В этом случае b1 → β1+β23; b2 → β2+β13; b3 → β3+β12. При реализации обеих реплик можно получить раздельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия, как и в полном факторном эксперименте 23.
Объединение этих двух полуреплик и есть полный факторный эксперимент 23.
Матрица из восьми опытов для четырехфакторного планирования будет репликой от полного факторного эксперимента 24 , а для пятифакторного планирования – четверть-репликой от 25. В последнем случае два линейных эффекта приравниваются к эффектам взаимодействия. Для обозначения дробных реплик, в которых ρ линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, удобно пользоваться условным обозначением 2k-p. Так полуреплика от 26 запишется в виде 26-1, а четверть-реплика
от 25 – в виде 25-2.
Таблица 2

Условия обозначения дробных реплик и число опытов.

Число факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Число опытов	
			Для дробной реплики	Для полного факт. эксп.
3	1/2-реплика от 23	23-1	4	8
4	½-реплика от 24	24-1	8	16
5	1/4-реплика от 25	25-2	8	32
6	1/8-реплика от 26	26-3	8	64
7	1/16-реплика от 27	25-1	8	128
5	1/2-реплика от 25	26-2	16	32
6	1/4-реплика от 26	28-4	16	64
7	1/8-реплика от 27	29-5	16	128
8	1/16-реплика от 28	210-6	16	256
9	1/32-реплика от 29	211-7	16	512
10	1/64-реплика от 210	212-8	16	1024
11	1/128-реплика от 211	213-9	16	2048
12	1/256-реплика от 212	214-10	16	4096
13	1/512-реплика от 213	215-11	16	8192
14	1/1024-реплика от 214	213-12	16	16384
15	1/2048-реплика от 215	212-13	16	32768

Условные обозначения дробных реплик и количество опытов приведены в табл. 2

3 Выбор полуреплик При построении полкреплики 23-1 существует всего две возможности: приравнять x3к+x1x2 или к-x1x2. Поэтому есть только две полуреплики 23-1 (табл. 2)

Номер опыта	I. x3=x1x2				Номер опыта	II. x3=-x1x2			
	x1	x2	x3	x1x2x3		x1	x2	x3	x1x2x3
1	+	+	+	+	1	+	+	-	-
2	-	-	+	+	2	-	-	-	-
3	+	-	-	+	3	+	-	+	-
4	-	+	-	+	4	-	+	+	-

Для произведения трех столбцов матрицы I выполняется соотношение +1= x1x2x3, а матрицы II – -1= x1x2x3. Вы видите, что все знаки столбцов произведений одинаковы и в первом случае равны единице, а во втором – минус единице.

Символическое обозначение произведения столбцов, равного +1 или -1, называется определяющим контрастом. Контраст помогает определять смешанные эффекты. Для того, чтобы определить, какой эффект смешан по данным, нужно помножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, если 1= x1x2x3, то для x1 имеем X1=x21x2x3=x2x3, так как всегда x2=1, для x2 находим x2=x1x22x3=x1x3, для x3 – x3=x1x2x23=x1x2.

Это значит, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками b1 → β1+β23; b2 → β2+β13; b3 → β3+β12.

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется генерирующим соотношением.

Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, носят названия планов с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Такие планы принято обозначать 23-1III.

При выборе полуреплики 24-1 возможно восемь решений:

1) x4=x1x2 4) x4=-x2x3 7) x4=x1x2x3
2) x4=-x1x2 5) x4=x1x3 8) x4=-x1x2x3
3) x4=x2x3 6) x4=-x1x3

Разрешающая способность этих полуреплик различна. Так, реплики 1-6 имеют по три фактора в определяющем контрасте, а 7-8 по четыре. Реплики 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность и называются главными. Разрешающая способность задается системой смешивания данной реплики. Она будет максимальной, если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наибольшего возможного порядка.

Реплики, в которых нет ни одного главного эффекта, смешанного с другим главным эффектом или парным взаимодействием, а все парные взаимодействия смешаны друг с другом, носят названия планов с разрешающей способностью 4 (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Они имеют обозначение 24-14. Полуреплика, заданная определяющим контрастом 1=+x1x2x3x4, имеет только четные комбинации букв в каждой строке. Ее можно записать следующим образом, считая строку (1) четной:

(1), ad, bd, ab, ac, cd, bc, abcd.

А Полуреплика, заданная 1=-x1x2x3x4, имеет только нечетные комбинации:

a, b, c, d, abd, acd, abc, bcd.

Такие полуреплики называют главными полурепликами, так как они обладают наибольшей разрешающей способностью.

Пусть выбраны полуреплики, заданные определяющими контрастами 1=x1x2x3x4 и 1=-x1x2x3x4. Совместные оценки здесь определяются соотношениями:

x1=x2x3x4	x1x3=x2x4	x3=x1x2x4
x2=x1x3x4	x1x4=x2x3	x4=-x1x2x3
x3=x1x2x4		x1x2=x3x4
x4=x1x2x3	x1=-x2x3x4	x1x2=x3x4
x1x2=x3x4	x2=-x1x3x4	x1x4=x2x3

Такой тип смешивания дает возможность оценивать линейные эффекты совместно с эффектами взаимодействия второго порядка, а взаимодействия первого порядка – совместно друг с другом.

Если полуреплики заданы генерирующими соотношениями x4=x1x2 и x4=-x1x2, то в этом случае определяющими контрастами являются 1=x1x2x4 и 1=-x1x2x4, следовательно, мы получаем планы с разрешающей способностью III и некоторые основные эффекты смешиваем с парными взаимодействиями.

4 Область применения дробных реплик.

Дробные реплики находят широкое применение при получении линейных моделей. Целесообразность их применения возрастает с ростом количества факторов. В табл. 2 показано, что при исследовании влияния 15 факторов можно в 2048 раз сократить число опытов, применяя реплику большой дробности (16 опытов вместо 32768). Эффективность применения дробных реплик зависит от удачного выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия, а также от умелой стратегии экспериментирования в случае значимости некоторых взаимодействий. Априорные сведения о взаимодействиях могут оказать большую услугу экспериментатору.

При построении дробных реплик используют следующее правило: для того, чтобы сократить число опытов при введении в планирование нового фактора, нужно поместить этот фактор в вектор-столбец матрицы, принадлежащей взаимодействию, которым можно пренебречь.

Реплики, которые используются для сокращения опытов в 2m раз, где m=1, 2, 3, 4, …, называются регулярными. Они пользуются большой популярностью, так как позволяют производить расчет коэффициентов уравнения так же просто, как и в случае полного факторного эксперимента.

При применении дробных реплик линейные эффекты смешиваются с эффектами взаимодействий. Чтобы определить систему смешивания, нужно знать определяющие контрасты и генерирующие соотношения. Определяющим контрастом называется символическое обозначение произведения любых столбцов, равное ±1.

Чтобы определить, какие взаимодействия смешаны с данным линейным эффектом, нужно умножить определяющий контраст на этот линейный эффект и получить генерирующие соотношения. Например, если имеются следующие генерирующие соотношения: x1=x2x3, x2=x1x3 и x3=x1x2, то определяющий контраст будет 1=x1x2x3.

Эффективность реплики зависит от системы смешивания. Реплики, у которых линейные эффекты смешаны со взаимодействиями наивысшего порядка, являются наиболее эффективными, так как обладают наибольшей разрешающей способностью.

Для освобождения линейных эффектов от взаимодействий первого порядка можно использовать метод «перевала». Смысл метода в добавлении новой реплики, все знаки которой противоположны исходной реплике.

С ростом числа факторов быстро увеличивается число реплик различной дробности. Эти реплики характеризуются обобщающими определяющими контрастами, которые получаются перемножением по два, по три и т.д. исходных определяющих контрастов.

Лекция 16. Полный факторный эксперимент типа 2к.

1. Общие вопросы полного факторного эксперимента типа 2к.

Первый этап планирования эксперимента для получения линейной модели основан, как мы договорились, на варьировании факторов на двух уровнях. В этом случае, если число факторов известно, можно сразу найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов. Простая формула, которая для этого используется, уже приводилась в гл. 1, и мы ее напомним: N = 2к, где N -число опытов, k-число факторов, 2-число уровней. В общем случае эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом. Если число уровней каждого фактора равно двум то имеем полный факторный эксперимент типа 2к.

2.Матрица планирования эксперимента 22.
Табл.1

Номер опыта	x1	x2	y	Номер опыта	x1	x2	y
1	-1	-1	y1	3	-1	+1	y3
2	+2	-1	y2	4	+1	+1	y4

Нетрудно написать все сочетания уровней в эксперименте с двумя факторами. Напомним, что в планировании эксперимента используются кодированные значения факторов: +1 и -1 (часто для простоты записи единицы опускают). Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытом, а столбцы - значениям факторов. Будем называть такие таблицы матрицами планирования эксперимента.

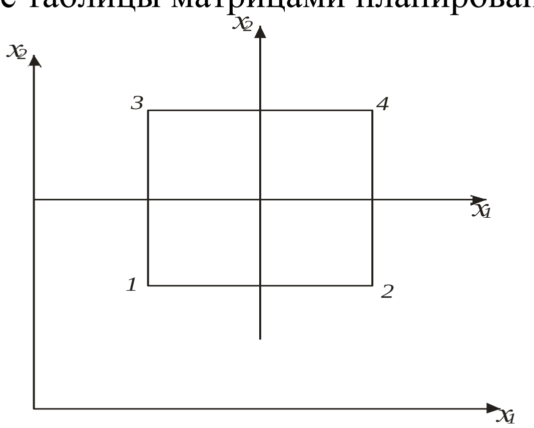


Рис.1: Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^2

Матрица планирования для двух факторов приведена в табл. 1.
Каждый столбец в матрице планирования называют вектор - столбцом, а каждую строку - вектор - строкой. Таким образом, в табл. 1 мы имеем два вектора - столбца независимых переменных и один вектор-столбец параметра оптимизации. То что записано в этой таблице в алгебраической форме, можно изобразить геометрически. Найдем в области определения факторов точку, соответствующую основному уровню, и проведем, через нее новые оси координат, параллельные осям натуральных значений факторов. Далее, выберем масштабы по новым осям так, чтобы интервал варьирования для каждого фактора равнялся единице. Тогда условия проведения опытов будут соответствовать вершинам квадрата, центром которого является основной уровень, а каждая сторона параллельна одной из осей координат и равна двум интервалам (рис. 1). Номера вершин квадрата соответствуют номерам опытов в матрице планирования. Площадь, ограниченная квадратом, называется областью эксперимента. Иногда удобнее считать областью эксперимента площадь, ограниченную окружностью, описывающей квадрат. В задачах интерполяции область эксперимента есть область предсказываемых значений у.
Запись матрицы планирования, особенно для многих факторов, громоздка. Для ее сокращения удобно ввести условные буквенные обозначения строк.
Это делается следующим образом. Порядковый номер фактора ставится в соответствие строчной букве латинского алфавита: хх-а,хг-b, ... и т. д. Если теперь для строки матрицы планирования выписать латинские буквы только для факторов, находящихся на верхних уровнях, то условия опыта будут заданы однозначно. Опыт со всеми факторами на нижних уровнях условимся обозначать (1). Матрица планирования месте с принятыми буквенными обозначениями приведена в табл.2.
Таблица 2.
Матрица планирования эксперимента 22

Номер опыта	x1	x2	Буквенные обозначения строк	У
1	-1	-1	(1)	y1
2	+1	-1	a	y2
3	-1	+1	b	y3
4	+1	+1	ab	y4

Теперь вместо полной записи матрицы планирования можно пользоваться только буквенными обозначениями. Ниже приведена буквенная запись еще одного плана: c,b,a,abc,(1)bc,ac,ab. Матрица планирования приведена в табл.3

3. Матрица планирования эксперимента 22

Табл.3

Номер опыта	x1	x2	x3	Буквенные обозначения строк	y
1	-1	-1	+1	c	y1
2	-1	+1	-1	b	y2
3	+1	-1	-1	a	y3
4	+1	+1	+1	abc	y4
5	-1	-1	-1	(1)	y5
6	-1	+1	+1	bc	y6
7	+1	-1	+1	ac	y7
8	+1	+1	-1	ab	y8

Таким образом вы построили полный факторный эксперимент 23. Он имеет восемь опытов и включает 'все возможные комбинации уровней трех факторов.

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней легко найти прямым перебором (или просто запомнить), то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц. Из многих возможных обычно используется три приема, основанных на переходе от матриц меньшей размерности, к матрицам большей размерности. Рассмотрим первый. При добавлении нового фактора каждая комбинация уровней исходного плана встречается дважды: в сочетании нижним и верхним уровнями нового фактора. Отсюда естественно появляется прием: записать исходный план для одного уровня нового фактора, а затем повторить его для другого уровня. Вот как это выглядит при переходе от эксперимента 22к 23(табл. 4):

Таблица

Построение матрицы планирования эксперимента 23

Табл.4

Номер опыта	x1	x2	x3	y	Номер опыта	x1	x2	x3	y
1	-	-	+	y1	5	-	-	-	y5
2	-	+	+	y2	6	-	+	-	y6
3	+	-	+	y3	7	+	-	-	y7
4	+	+	+	y4	8	+	+	-	y8

Этот прием распространяется на построение матриц любой размерности.

Рассмотрим второй прием. Для этого введем правило перемножения столбцов матрицы. При построчном перемножении, двух столбцов матрицы произведение единиц с одноименными знаками дает +1, а с разноименными - 1. Воспользовавшись этим правилом, получим для случая, который мы рассматриваем, вектор-столбец произведения x1x2в исходном плане. Далее повторим еще раз исходный план, а у столбца произведений знаки наменяем на обратные.

Этот прием тоже можно перенести на построение матриц любой размерности, однако он сложнее, чем первый.

Третий прием основан на правиле чередования, знаков. В первом столбце знаки меняются поочередно, во втором столбце они чередуются через два, в третьем - через 4, в четвертом - через 8 и т. д. по степеням двойки. Если в табл. 6.4 поменять местами столбцы для x1 и x2, то получится нужная матрица.

По аналогии с полным факторным экспериментом 22 можно дать геометрическую интерпретацию полного факторного эксперимента 23 . Геометрической интерпретацией полного факторного эксперимента 23 служит куб, координаты вершин которого задают условия опытов.

Если поместить центр куба в точку основного уровня факторов, а масштабы по осям выбрать так, чтобы интервал варьирования равнялся единице, то получится куб, изображенный на рис. 2. Куб задает область эксперимента, а центр куба является ее центром.

К сожалению, мы не умеем рисовать картинки для числа факторов k>3. Но фигура, задающая область эксперимента в многомерном пространстве, является некоторым аналогом куба. Будем называет ту фигуру гиперкубом.

4. Свойства полного факторного эксперимента типа 2К

Мы научились строить матрицы планирования полных факторных экспериментов с факторами на двух уровнях. Теперь выясним, какими общими свойствами эти матрицы обладают независимо от числа факторов. Говоря о свойствах матриц, мы имеем в виду те из них, которые определяют качество модели. Ведь эксперимент и планируется для того, чтобы получить модель, обладающую некоторыми оптимальными свойствами. Это значит, что оценки коэффициентов модели должны быть наилучшими и что точность предсказания параметра оптимизации не должна зависеть от направления в факторных м пространстве, ибо заранее неясно, куда предстоит двигаться в поисках оптимума.

Два свойства следуют непосредственно из построения матрицы. Первое из них - симметричность относительное центра эксперимента формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов вектор - столбца каждого фактора равна нулю, или

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0,$$

где j-номер фактора, N-число опытов, j=1,2,...к.

Второе свойство - так называемое условие нормировки формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждогостолбца равна числу опытов, или

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N,$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются +1 и -1.

Мы рассмотрели свойства отдельных столбцов матрицы планирования. Теперь остановимся на свойстве совокупности столбцов.

Сумма по членных произведений, любых двух, вектор – столбцов матрицы равна нулю, или $\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0, j \neq u, j,u = 0,12,...k$. Это важное свойства называется ортогональностью матрицы планирования.

Последнее, четвертое свойство называется ротатабельностью, т.е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Даны две матрицы планирования:

а)

X1	X2
-	-
+	+
-	+
+	-

б)

X1	X2
-	+
+	-
-	+
+	-

Давайте проверим, как выполняются все три свойства для каждой из матриц.

Первое свойство $\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0$ выполняется для всех столбцов обеих матриц.

Действительно, для первого столбца матрицы

а) имеем (-l)+(+l)+(-l)+(+l) = 0.

Аналогичный результат получается для всех других столбцов.

Второе свойство $\sum_{i=1}^{N} x^2{}_{ji} = N$ -также выполняется для обеих матриц.

Например, для того же столбца имеем (-1)2 + (+1)2 + (-1)2 + (+1)2 = 4.

С третьим свойством, однако, дело обстоит иначе. Если для матрицы

а) формула $\sum_{i=1}^{N} x_{ji}x_{ui} = 0, j \neq u$ выполняется, то в случае б) это не так. Действительно (- l)(+1) + (+ l)(- l) + (-1)(+1) + (+1)(- 1) = -4 $\neq$ 0.

сетей, а также теоретические соображения. Из графиков сведения о кривизне можно получить визуально. Некоторое представление о кривизне дает анализ табличных данных, так как наличию кривизны соответствует непропорциональное изменение параметра оптимизации при равномерном изменении фактора. Мы будем различать три случая: функция отклика линейна, функция отклика существенно нелинейно и информация о кривизне отсутствует.

Наконец, полезно знать, в каких диапазонах меняются значения параметра оптимизации в разных точках факторного пространства. Если имеются результаты некоторого множества опытов, то всегда можно найти наибольшее или наименьшее значения параметра оптимизации. Разность между этими значениями будем называть диапазоном изменения параметра оптимизации для данного множества опытов. Условимся различать широкий и узкий диапазоны. Диапазон будет узким, если он несущественно отличается от разброса значений параметра оптимизации в повторных опытах. (Этот разброс, определяет ошибку опыта.) В противном случае будем считать диапазон широким. Учтем также случай, когда информация отсутствует. Итак, для принятия решений используется априорная информация о точности фиксирования факторов, кривизне поверхности отклика и диапазоне изменения параметра оптимизации. Каждое сочетание градаций перечисленных признаков определяет ситуацию, в которой нужно принимать решение.
При принятых нами градациях возможно 33=27 различных ситуаций.

Теперь мы приблизились к принятию решения о выборе интервалов варьирования. Для интервалов также введем градацию. Будем рассматривать широкий, средний и узкий интервалы варьирования, а также случай, когда трудно принять однозначное решение. Размер интервала варьирования составляет некоторую долю от области определения фактора. Можно, например, условиться о следующим: если интервал составляет не более 10% от области определения, считать его узким, не более 30%-средним и в остальных случаях - широким. Это, конечно, весьма условно, и в каждой конкретной задаче приходится специально определять эти понятия, которые зависят не только от размера области определения, Но и от характера поверхности отклика, и от точности фиксирования факторов.
Вернемся снова к блок-схеме. Вы видите, что средний интервал варьирования в этой схеме выбирается дважды, причем в девятой ситуации как редко применяемая альтернатива. Здесь отсутствует информация об обоих признаках, и выбор широкого интервала представляется более естественным.
Наибольшие трудности возникают, когда поверхность отклика нелинейно. Появляется противоречие между низкой точностью фиксирования факторов и кривизной. Первая требует расширения интервала, а вторая - сужения. Решение оказывается неоднозначным. Как поступить? Приходится рассматривать дополнительные рекомендации (см. блок-схему). Прежде всего нужно выяснить, нельзя ли увеличить точность эксперимента либо за счет инженерных решений, либо за счет увеличения числа повторных опытов. Если это возможно, то решения принимаются на основе блок-схемы (рис.3) для средней точности фиксирования факторов. Если это невозможно, то для принятия решения нет достаточных оснований и оно становится интуитивным.

Эта блок-схема, как и последующие, служит весьма грубым приближением к действительности. На практике учитывается еще масса обстоятельств. Например, решения, принимаемые по каждому фактору в отдельности, корректируются при рассмотрении совокупности факторов.

На рис. Изображена блок-схема для случая средней точности фиксирования факторов.

Характерен выбор среднего интервала варьирования. Лишь в случае нелинейной поверхности и широкого диапазона рекомендуется узкий интервал варьирования. При »сочетаниях линейной поверхности с узким диапазоном и отсутствием информации о диапазоне выбирается широкий интервал варьирования. Пунктиром, как и выше, показаны редко применяемые альтернативы.

Наконец, на рис. 4 построена блок-схема для случая высокой точности фиксирования фактических начертание высокой точности.

Лекция № 17 Теоретические предпосылки обработки результатов экспериментов.

План.

Обобщенная модель технического объекта.

Основные понятия при планировании и обработке результатов эксперимента.

Модель объекта как кибернетическая система.

Представление функции отклика.

1.Обобщенная модель технического объекта

Для сложных технических объектов, относящихся к плохо организованным системам, кибернетическая модель представляется в вире «черного ящика» с к+п+1 входами (факторами) и т выходами_(показателями качества функционирования системы).

Каждый из выходных параметров у (рис зависит ст состояния контролируемой управляемой части выходов, определяемой к - мерным векторам X=(xi,X2, x^), контролируемой неуправляемой части входов, определяемой п- мерным вектором Z=(Z], Z2, zn), и неконтролируемой части, определяемой / - мерным вектором W=(wi, м>2,...,Wi).

Действие неконтролируемых возмущающих входных параметров проявляется в том, что выходной параметр системы (технического объекта) при известных контролируемых управляемых и неуправляемых входных параметрах характеризуется неоднозначно. Технический объект, в котором влияние случайных возмущающих параметров велико, является стохастическим объектом. Для его изучения истользуется математический аппарат теории вероятности.

При экспериментально-статическом исследовании технического объекта связь между входными и выходными параметрами описывается обычно математической моделью в виде полинома. Для оценки его коэффициентов необходимо иметь статический материал, характеризующий состояние технического объекта в процессе функционирования. Данная информация может быть получена либо путем пассивного эксперимента, т.е. пассивного наблюдения за функционированием технического объекта, либо путем планирования эксперимента, т.е. активного вмешательства в функционирование технического объекта и постановки опытов в определенных точках допустимой области пространства управляемых входных параметров.

Для сложных технических объектов, относящихся к плохо организованным системам, пассивный эксперимент не нашел широкого применения. Что касается планирования эксперимента, оно является мощным инструментом экспериментально -статического исследования и оптимизации сложных плохо организованных систем. Планирование эксперимента исключает слепой поиск, зг ачительно сокращает число опытов и, как следствие, затраты и сроки проведения эксперимента, а также дает возможность получить математические модели.

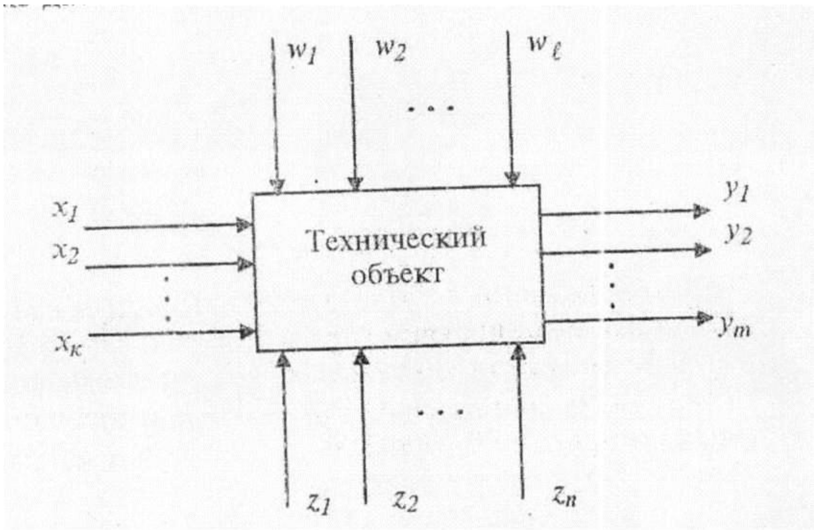


Рис. «Черный ящик»: x,, x2, ...уКк- контролируемые управляемые входные параметры; ц, Ziy z„ — контролируемые неуправляемые входные параметры ; w,, w2, wt - неконтролируемые входные

Основным достоинством методов планирования эксперимента является их универсальность, т.е. пригодность в большинстве эбластей исследований: в металловедении и металлургии, машиностроении и обработки материалов, химии и химической технологии, медицине и биологии, электронике и вычислительной технике и др.

Наиболее приемлемой является обобщенная модель в виде «черного ящика» с множеством входов (факторов) и множеством выходов (показателей качества функционирования системы). При экспериментально - статистическом и выходными параметрами описывается математической моделью в виде полинома.

2. Основные понятия при планировании и обработка результатов эксперимента. Математические модели планирования/эксперимента основаны на кибернетической модели в виде «черного ящика» (см. рис. &j§st.). При рассмотрении такой кибернетической системы контролируемые управляемые входные параметры x/, xг, , xк называют факторами, а выходные параметры^/, у 2, ут ~ параметрами (критериями) оптимизации.

Факторы' могут быть количественными и качественными. К первым относятся входные параметры, которые можно оценивать количественно: измерять, взвешивать и т.д. Качественные факторы характеризуются качественными свойствами и, в отличие от количественных, им не соответствует числовая шкала. Однако и для них можно построить условную порядковую шкалу, которая устанавливает соответствие между уровнями качественного фактора и числами натурального ряда.

Факторы должны быть управляемыми и отвечать требованию непосредственного воздействия на технический объект. Под управляемостью фактора понимается возможность установки и поддерживания выбранного нужного уровня фактора постоянным в течение всего опыта или его изменение по заданной программе. Требования непосредственно воздействия заключаются в отсутствии функциональной зависимости фактора от других факторов, так как при наличии такой зависимости им трудно управлять.

Каждый фактор при проведении опыта может принимать одно из нескольких значений, называемых уровнями. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний кибернетической системы. Этсму фиксированному набору уровней соответствует определенная точка в многомерном пространстве факторов, называемым факторным пространством.

3. Модель объекта как кибернетическая система.

Кибернетическая система реагирует по-разному-каждый фиксированный набор уровней факторов. Однако существует вполне определенная связь между уровнями факторов и реакцией (откликом) системы. Эта реакция называется функцией отклика, а ее геометрический образ - поверхностью отклика (рис. if®fi,6).

Функция отклика имеет следующий вид

$$y_l \psi =_l (x_1, x_2, \ldots x_k)(l = 1,2,\ldots m)$$

Естественно исследовать неизвестен заранее вид зависимости \|/. Он по данным планируемого эксперимента получает приближенные уравнения

$$y_l = \varphi_l (x_1, x_2, \ldots, x_k)(l = 1,2,\ldots, m)$$

Этот эксперимент необходимо поставить так, чтобы при минимальном количестве опытов, варьируя уровня факторов по специально сформулированным правилам, можно было получить математическую модель и найти оптимальные значения выходных параметров кибернетической системы.

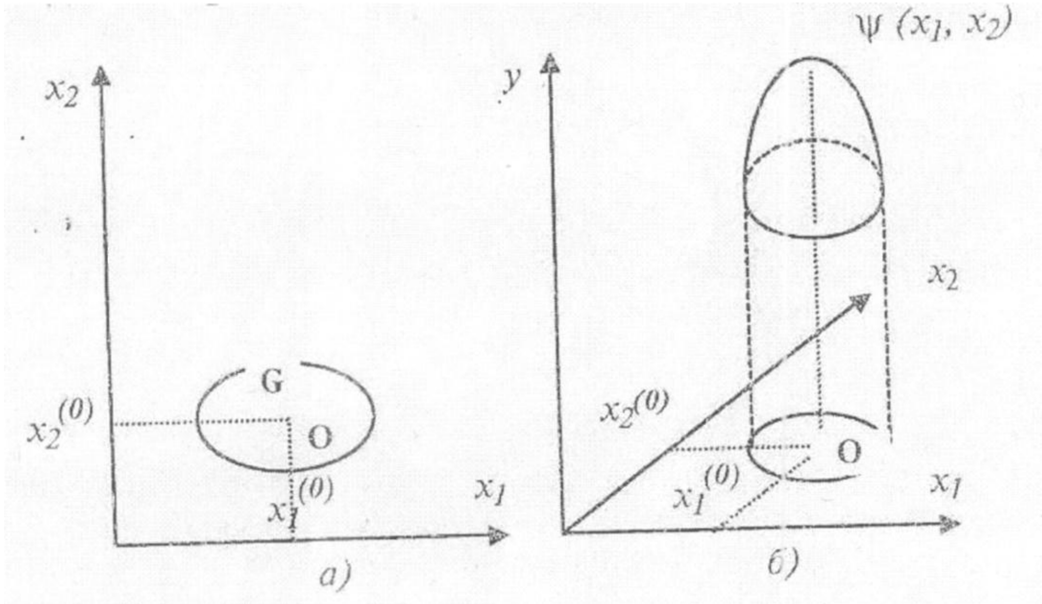


Рис.3 Допустимая область факторного пространства (а) и пс верхносл

4. Представление функции от клика.

Функцию отклика с достаточной точностью можно представить в виде полинома степени dot к переменных

$$M\{y\} = \eta = \beta_0 + \sum_{1 \le i \le k} \beta_i x_i + \sum_{1 \le i \le j \le k} \beta_{ij} x_i x_j + \ldots + \sum \beta_{i1 i_2} \cdots_{ik} x_1^{i1} x_2^{i2} \ldots x_k^{ik}, \sum ij = d,$$

где M{y} или tj- математическое ожидание отклика.

Точность, с которой данный полином описывает тот или иной процесс в кибернетической системе, зависит от порядка (степени) ряда, т.е. от того, с каким показателем степени представлены последние члены ряда. Для сокращения числа опытов на первой стадии исследования очень часто ограничиваются моделью (3.03), с содержащей только линейные члены и взаимодействия первого порядка.

$$M\{y\} = \eta = \beta_0 + \sum_{1 \le i \le k} \beta_i x_i + \sum_{1 \le i \le j \le k} \beta_{ij} x_i x_j + \ldots + \beta_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1 x_2 \ldots x_k$$

Лишь для описания почти стационарной (оптимальней) области в модели (2biS) учитываются еще члены второго, иногда третьего порядка.

По результатам планируемого эксперимента определяются выборочные коэффициенты регрессии bo, bit by, которые являются оценками для теоретических коэффициентов регрессии т.е.

$$b_i \to \beta_i, b_{ij} \to \beta_{ij},$$
$$b_0 \to \beta_0 + \sum \beta_{ii} + \sum \beta_{iii} + \dots$$

В результате модель (уравнение регрессии), получаемая на основе экспериментальных данных, в отличие от модели (3jQ4), имееr вид

$$M\{y\} = \eta = b_0 + \sum_{1 \le i \le k} b_i x_i + \sum_{1 \le i \le j \le k} b_{ij} x_i x_j + \dots + \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1 x_2 \dots x_k$$ ✓

где п - оценка математического ожидания отклика

Уравнение регрессии дает представление о влиянии изучаемых факторов на процесс кибернетической системы, о взаимодействии факторов и о направлении движения к оптимальной области. Такая аппроксимация небольшого участка поверхности отклика гиперплоскостью необходима, чтобы попасть в почти в стационарную (оптимальную) область. 1 [осле попадания в указанную область при помощи модели задача считается решенной. Если же необходимо адекватно §§1 область оптимума, то переходят к полиномам более высоких степеней - второй, инокда третьей.

Резюме. В кибернетической системе существует вполне определенная связь между значениями факторов и реакцией (откликом) системы. Эта реакция называется функцией отклика, а ее геометрический образ - поверхностью отклика. Функцию отклика с достаточной точностью можно представить в виде полинома степени d от к переменных. Точность, с которой данный полином описывает тот или иной процесс в кибернетической системе, зависит от степени ряда.

Лекция 18. Разработка плана экстремального эксперимента.

План

Что такое параметр оптимизации.

Виды параметров оптимизации.

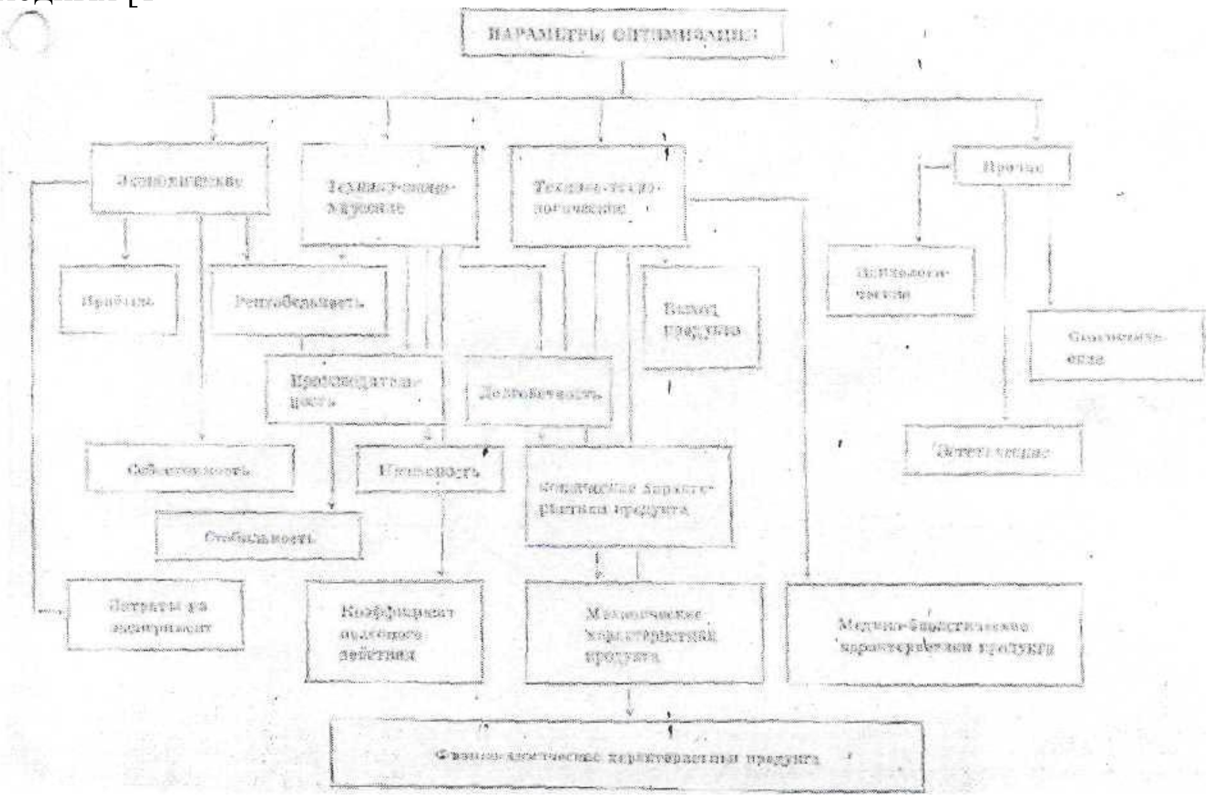
Требования к параметру оптимизации.

Заключение лекции.

1. При планировании экстремального эксперимента очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Сделать это совсем не так просто, как кажется на первый взгляд. Цель исследования должно быть сформулировано очень четко и допускать количественную оценку. Будем называть характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной вами системы. Реакция объекта многогранна, много аспектная. Выбор того аспекта, который представляет наибольший интерес, как раз и задается целью исследования.
При традиционном нематематическом подходе исследователь стремится как-то учесть разные аспекты, взвесить их и принят согласованное решение о том, кокой опыт лучше. Однако разные экспериментаторы проведут сравнение опытов неодинаково. Различия если хотите одно из проявлений таланта исследователя или его бездарности.
Прежде чем сформулировать требования к параметрам оптимизации и рекомендации по их выбору, познакомимся с различными видами параметров.

2. Виды параметров оптимизации.
В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть весьма разнообразными. Чтобы ориентироваться в этом многообразии, введем некоторую классификацию (рис.2). Мы не стремимся к созданию полной и детальной классификации. Наша задача - построить такую условную схему, которая включала бы ряд практически важных случаев и помогала экспериментатору ориентироваться в реальных ситуациях.
Реальные ситуации, как правило, сложны. Они часто требуют одновременного учета нескольких, иногда очень многих параметров. В принципе каждый объект может характеризоваться сразу всей совокупностью параметров, приведенных на рис.2, или любим подмножеством из этой совокупности. Движение к оптимуму возможно, если выбран один-единственный параметр оптимизации. Тогда прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве

параметров оптимизации, а служат ограничениями. Другой путь - построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множество исходных [1-



3].

Прокомментируем некоторые элементы схемы.

Экономические параметры оптимизации, такие как прибыл, себестоимость и рентабельность, обычно используется при исследовании действующих промышленных объектов, тогда как затраты на эксперимент имеет смысл оценивать в любых исследованиях, в том числе и лабораторных. Если цена опытов одинаково (см. «ограничения»), затраты на эксперимент пропорциональны числу опытов, которые необходимо поставит для решения данной задачи. Это значительной мере определяет выбор плана эксперимента.

Среди технико-экономических параметров наибольшее распространение имеет производительность. Такие параметры, как долговечность, надежность и стабильность, связаны с длительными наблюдениями. Имеется некоторый опыт их использования при изучении дорогостоящих объектов, например радиоэлектронной аппаратуры.

Почти во всех исследованиях приходится учитывать количество и качество получаемого продукта. Как меру количества продукта используют выход, например, процент выхода химической реакции, выход годных изделий.

Показатели качества чрезвычайно разнообразны. В нашей схеме они сгруппированы по видам свойств. Характеристики количества продукта образуют группу технико-технологических параметров.
Под рубрикой «прочие» сгруппированы различные параметры, которые реже встречаются, но не являются менее важными. Сюда попали статические параметры, используемые для улучшения характеристик случайных величин или случайных функций. В качестве примеров назовем задачи на минимизацию дисперсии случайной величины, на уменьшение числа выбросов случайного процесса за фиксированный уровень и т. д. Последняя задача возникает, в частности, при выборе оптимальных настроек автоматических регуляторов или при улучшении свойств нитей (проволока, пряжа, искусственное волокно и т. др.)

3. Требования к параметру оптимизации
Параметр оптимизации - это признак, по которому мы хотим оптимизировать процесс. Он должен быть количественным, задаваться числом. Мы должны уметь его измерять при любой возможной комбинации выбранных уровне факторов. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, будем называть областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, выход реакции- это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100%. Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, число кровяных телец в пробе кровивот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.
Уметь измерять параметр оптимизации - это значит располагать подходящим прибором. В "ряде случаев такого прибора может не существовать или он слишком дорог. Если нет способа количественного измерения результата, то приходится воспользоваться приемом, называемым ранжированием (ранговым подходом). При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки - ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т. д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет, хорошо, плохо). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку.
Ранг - это количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный (субъективный) характер. Мы ставим в соответствие качественному признаку некоторое число ранг.
Для каждого физически измеряемого параметра оптимизации можно построить ранговый аналог. Потребность в построении такого аналога возникает, если имеющиеся в распоряжении исследователя численные характеристики неточны или неизвестен способ построение удовлетворительных численных оценок. При прочих равных условиях всегда

можно отдавать предпочтение физическому измерению, так как ранговый подход менее чувствителен и с его помощью трудно изучать тонкие эффекты.

Следующее требование: параметр оптимизации должен выражаться одним числом. Иногда это получается естественно, как регистрация показания прибора. Например, скорость движения машины определяется числом на спидометре. Чаще приходится производить некоторые вычисления. Так бывает при расчете выхода реакции. В химии часто требуется получать продукте с заданным отношением компонентов, например, А: В=3:2.

Один из возможных вариантов решения подобных задач состоит в том, чтобы выразить отношение одним числом (1,5) и в качестве параметра оптимизации пользоваться значениями отклоненный (или квадратов отклонений) от этого числа.

Еще одно требование, связанное с количественной природной параметра оптимизации,- однозначность в статическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации. (Однако обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.)

Для успешного достижения цели исследования необходимо, чтобы параметр оптимизации действительно оценивал эффективность функционирования системы в заранее выбранном смысле. Это требование является главным, определяющим корректность постановки задачи. «Если мы требуем поде и не знаем, что подразумеваем под этим, мы встретимся с призраком, стучащимся к нам в дверь» (5).

Представление об эффективности не остается постоянным в ходе исследования. Оно меняется по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов. Это приводит к последовательному подходу при выборе параметр оптимизации. Так, например, на первых стадиях исследования технологических процессов в качестве параметр оптимизации часто используется выход продукта. Однако в дальнейшем, когда возможность повышения выхода исчерпана, нас начинают интересовать такие параметры, как себестоимость, чистота продукта и т. д.

Говоря об оценке эффективность, функционирования системы, важно помнить, что речь идет о системе а целом. Часто система состоит из ряда подсистем, каждая из которых может оцениваться своим локальным параметром оптимизации. При этом оптимальность каждой из подсистем по своему параметру оптимизации «не исключает возможности гибели системы в целом» (6).

Следующее требование к параметру оптимизации - требование универсальности или полноты. Под универсальностью параметра оптимизации понимается го способность всесторонне характеризовать объект. В частности, технологические параметры оптимизации недостаточно универсальны: они не учитывают экономику. Универсальностью обладают, например, обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров (3).

Пример выбора параметра оптимизации, обладающего полнотой, рассмотрен в работе (8) для процессов "зонной перекристаллизации. Обычно применяемый для этой цели коэффициент распределения, представляющий отношение концентраций примесей в твердой и жидкой фазах, излишне специфичен. Предложен более полный параметр оптимизации - энтропийная функции S

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \log c_{ij}$$

где c_{ij} - концентрация i-й примеси (при их числе т) в j-м участке слитка (при их числе n)..

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел физический смысл, был простым и легко вычисляемым.

Требование физического смысла связано с последующей Интерпретацией результатов эксперимента. Не представляет труда объяснить, что значит максимум извлечения, максимум содержания ' ценного компонента. Эти и подобные им технологические параметры оптимизации имеют ясный физический смысл, но иногда для них может не выполняться, например, требование статической эффективности. Тогда рекомендуется переходить к преобразованию параметра оптимизации. Преобразование, например типа arcsin $\sqrt{y}$,может сделать например оптимизации статистически эффективным (например, дисперсии становятся однородными), но остается неясным: что же значит достигнуть экстремума этой величины?

Второе требование часто также оказывается весьма существенным. Для процессов разделения термодинамические параметры оптимизации более универсальны. Однако на практике ими пользуется мало: их расчет довольно труден.

Пожалуй, из этих двух требований первое является более существенным, потому что часто удается найти идеальную характеристику системы и сравнить ее с реальной характеристикой. Иногда при этом целесообразно нормировать параметр с тем, чтобы он принимал значения от пули до единицы.

Кроме высказанных требований и пожеланий при выборе параметра оптимизации нужно еще иметь в виду, что параметр оптимизации в некоторой степени оказывает влияние на вид математической модели исследуемого объекта. Экономические параметры, в силу их аддитивной природы, легче представляются простыми функциями, чем физико-химические показатели. Не случайно методы линейного программирования, основанные на простых моделях, получили широкое распространение именно в экономике. Температура плавления сплава является, как известно, сложной, многоэкстремальной характеристикой состава, тогда как стоимость сплава зависит от состава линейно.

Итак, вы наверное уже поняли, что найти параметр оптимизации, удовлетворяющей всем требованиям, все равно, что поймать жар-птицу.

4. Резюме

Мы познакомились с некоторыми практически важными аспектами весьма сложной проблемы - выбора параметра оптимизации. Параметр оптимизации - это реакция (отклик) на воздействия факторов, которые определяют поведение изучаемой системы.

Параметры оптимизации бывают экономическими, технико-экономическими, статическими, психологическими и т. д. Параметр оптимизации должен быть:

эффективным с точки зрения достижения цели; универсальным;

количественным и выражаться одним; числом; статически эффективным;

имеющим физический смысл, простым и легко реализуемым; существующим для всех различимых состояний.

В тех случаях, когда возникают трудности с количественной оценкой параметров оптимизации, приходится обращаться к ранговому подходу. В ходе исследования могут меняться априорные представления об объекте исследования, что приводит к последовательному подходу при выборе параметра оптимизации. Из многих параметров, характеризующих объект исследования, только один, часто обобщенный, может служить параметром оптимизации. Остальные рассматриваются как ограничения.

Лекция. 19 Анализ факторов математических моделей

План

Общие вопросы выбора математический модели

Геометрические образы определения факторов

В этой главе мы хотим дать рекомендации по выбору модели. Дело это не простое и связано со многими обстоятельствами и соображениями.

Мы говорили, что под моделью понимаем вид функции отклика (см. гл. 1)

У = f (x1, x2, …, xk).

Выбрать модель — значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение. Тогда останется спланировать и провести эксперимент для оценки численных значений констант (коэффициентов) этого уравнения. По как выбрать модель? Чтобы постепенно продвигаться к ответу на этот вопрос, давайте сначала построим геометрический аналог функции отклика— поверхность отклика. Будем для наглядности рассматривать случай с двумя факторами.

Заметим, что в случае многих факторов геометрическая наглядность теряется. Мы попадаем в абстрактное многомерное пространство, где у нас пет навыка ориентирования. Приходится переходить на язык алгебры. Тем не менее простые примеры, которые мы сейчас рассмотрим, помогут вам, как мы думаем, при работе с многими факторами.

Мы хотим изобразить геометрически возможные состояния «черного ящика» с двумя входами. Для этого достаточно располагать плоскостью с обычной декартовой системой координат. По одной оси координат будем откладывать в некотором масштабе значения (уровни) одного фактора, а по другой оси — второго. Тогда каждому состоянию «ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

Но, как вы помните из предыдущей главы, для факторов существуют области, определения. Это значит, что у каждого фактора есть минимальное и максимальное возможные значения, между которыми он может изменяться либо непрерывно, либо дискретно. Если факторы совместимы, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник, внутри которого лежат точки, соответствующие состояниям «черного ящика

2. Геометрические образы определения факторов

Пунктирными линиями на рис. 1 обозначены границы областей определения каждого из факторов, а сплошными — границы их совместной области определения.

Чтобы указать значение параметра оптимизации, требуется еще одна ось координат. Если ее построить, та поверхность отклика будет выглядеть так, как на рис. 2. Пространство, в котором строится поверхность отклика, мы будем называть факторным пространством.

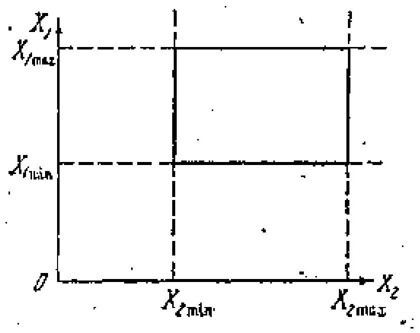


Рис. 1. Область определения факторов

Оно задается координатными осями, но которым откладываются значения факторов и параметра оптимизации1. Размерность факторного пространства зависит от числа факторов. При многих факторах поверхность отклика уже нельзя изобразить наглядно и приходится ограничиваться только алгебраическим языком.

Но для двух факторов можно даже не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью.

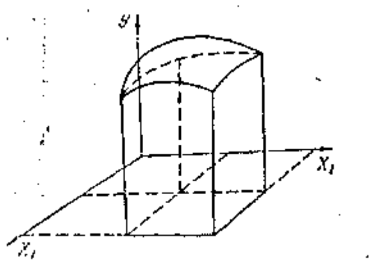


Рис. 2

Для этого достаточно произвести сечение поверхности отклика плоскостями, параллельными плоскости X1OX2, и полученные в сечениях лини спроектировать па эту плоскость. Так. строят, например, изображения гор и

1 Иногда под факторным пространством понимается пространство, образованное только осями фактории.

морских впадин на географических картах (рис. 3). Точка М па рисунке — это и есть та оптимальная точка, которую мы ищем. Каждая линия соответствует постоянному значению параметра оптимизации. Такая линия, называется линией рапного отклика.

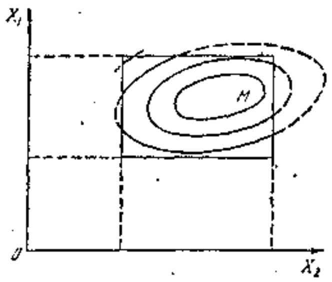


Рис. 3. Проекция сечений поверхности отклика на плоскость

Существует соответствие между состоянием «ящика» и значением параметра оптимизации: каждому возможному состоянию «ящика» соответствует одно значение параметра оптимизации. Однако обратное неверно: одному возможному значению параметра оптимизации может соответствовать и одно, и несколько, и сколько угодно состояний «ящиков».

Правда, эти утверждения справедливы, если не учитывать ошибок в определении значений параметра оптимизации. К вопросу об оценке и учете этих ошибок мы вернемся ниже, а пока не будем принимать их во внимание.

Теперь, когда мы можем представить себе поверхность отклика, пора вернуться к основному вопросу: как ставить эксперимент, чтобы найти оптимум при минимуме затрат? Это прежде всего вопрос стратегии.

Если бы мы располагали таблицей, в которой содержались бы все возможные состояния объекта и соответствующие им отклики, то особой необходимости в построении математической модели не было бы. Просто мы бы выбрали то (или те) состояние, которое соответствует наилучшему отклику. По мы ужо знаем, сколь велик перебор возможных состояний (см. гл. 1), и должны отказаться от практической реализации этой возможности.

Другая возможность — случайный выбор некоторого числа состояний и определение откликов в них, в надежде, что среди этих состояний попадутся оптимальное или по крайней мере близкие к нему состояния. Мы не будем рассматривать эту интересную возможность, так как, к сожалению, она не вписывается в нашу тему [1].

Наконец, третья возможность — строить математическую модель, чтобы с ее помощью предсказывать значения откликов в тех состояниях, которые по изучались экспериментально. Если не можем измерить отклик в каждом состоянии, то сумеем хоть предсказывать результат. Причем даже не в каждом состоянии, а только в наиболее интересных, в тех, которые приближают нас к оптимуму.

Такая стратегия приводит нас к шаговому принципу, лежащему в основе рассматриваемого метода планирования эксперимента [2, 3].

3. Шаговый принцип определения фактора.

За отказ ох полного перебора состояний надо чем-то платить. Цена – это предположения, которые мы должны сделать относительно свойств неизвестной нам модели до начала эксперимента (как говорят, априори).

Некоторые из предположения мы никогда не сможем проверить. Такие предположения называются постулатами. Если в действительности они не выполняются, то весьма возможно, что мы не найдем оптимум. Точнее, мы примем за оптимум то, что на самом деле им не является (хотя, быть может, нас и удовлетворит).

Какие же предположения о свойствах поверхности отклика мы делаем? Главное – это непрерывность поверхности, ее гладкость и наличие единственного оптимума (быть может, и на границе области определения факторов).

Эти постулаты позволяют представить изучаемую фупкцию в виде степенного ряда в окрестности любой возможной точки факторного пространства (такие функции в математике называются аналитическими). Кроме того, если мы придумаем какой-то способ постепенного приближения к оптимальной точке, нужно, чтобы результат не зависел от исходной точки. Если оптимум один, то неважно, приближаемся мы к нему справа или слева, а если их несколько, да они еще неравноценны. . .

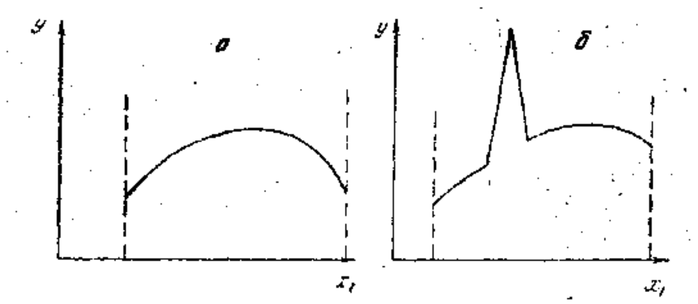


Рис.4. Примеры функций отклика для одного фактора

На рис.4 приведены две картинки, изображающие функции отклика для одного фактора. На рис. 4, а показан благоприятный случай. На рис. 4, б — много нарушении. Здесь и два экстремума (оптимума) и пик (нарушение гладкости и непрерывности).

Если и поисках оптимума мы намнем последовательно двигаться слева направо, то найдем наименьший из максимумов и вряд ли узнаем о существовании второго, наибольшего. Правда, он так локализован и остер, что его не мудрено пропустить и при движении с правого конца, если ставить опыты но во всех точках.

Возможно, вы обратили внимание па то, что требование непрерывности не согласуется с представлением о дискретных уровнях факторов. Однако и действительности что не страшно. Мы ведь можем считать, что фактор принимает непрерывный ряд значений (если даже некоторые значения не имеют смысла или физически нереализуемы). Важно только помнить о таком соглашении при использовании результатов. А для построения математической модели это создает значительные удобства.

Так как мы заранее считаем, что предпосылки выполняются, то надо максимально использовать возможности, которые при этом открываются.

Если, например, мы будем знать значения параметра оптимизации в нескольких соседних точках факторного пространства мы сможем (в силу гладкости и непрерывности функции отклика) представить себе результаты, которые можно ожидать в других соседних точках. Следовательно, можно найти такие точки, для которых ожидается наибольшее увеличение (или уменьшение, если мы ищем минимум) параметра оптимизации. Тогда ясно, что следующий эксперимент надо переносить именно в эти точки. Надо продвигаться в этом направлении, пренебрегая остальными. (Вот где экономятся опыты!) Сделав новый эксперимент, снова можно оценить направление, в котором скорее всего следует двигаться. В силу единственности оптимума мы, таким образом, рано или поздно непременно его достигнем. Это и есть шаговый принцип.

Сделаем некоторые пояснения. Мы выбираем в факторном пространстве какую-то точку и рассматриваем множество точек в ее окрестности, т.е. выбираем в области определения факторов малую подобласть. Здесь мы хотим провести эксперимент, па основании которого должна быть построена первая модель. Эту модель мы намерены использовать для предсказания результатов опытов в тех точках, которые не входили в эксперимент. Если эти точки лежат внутри нашей подобласти, то такое предсказание называется интерполяцией, а если вне — экстраполяцией. Чем дальше от области эксперимента лежит точка, для которой мы хотим предсказать результат, тем с меньшей уверенностью это можно делать. Поэтому мы вынуждены экстраполировать недалеко и использовать результаты экстраполяции для выбора условий проведения следующего эксперимента. Дальше цикл повторяется.

Попутно полученную модель можно использовать для проверки различных гипотез о механизме изучаемого явления или о его отдельных сторонах. Например, если вы предполагаете, что увеличение значения некоторого фактора должно приводить к увеличению значения параметра оптимизации, то с помощью модели можно узнать, так ли это. Такая проверка называется интерпретацией модели.

4. Способы поиска оптимума.

На рис. 5 изображены два варианта поиска оптимума для одной и топ же поверхности. Крестиками па рисунке обозначены условия опытов. В случае а использован подход, который иногда называют классическим (метод Гаусса—Зейделя). Он состоит в том, что сначала последовательно изменяются' значения одного фактора. (На рисунке этот эксперимент обозначен 1.) Затем находится и фиксируется наилучшее значение этого фактора. В этих условиях последовательно изменяются значения второго фактора (2) и т. д. (если больше факторов).

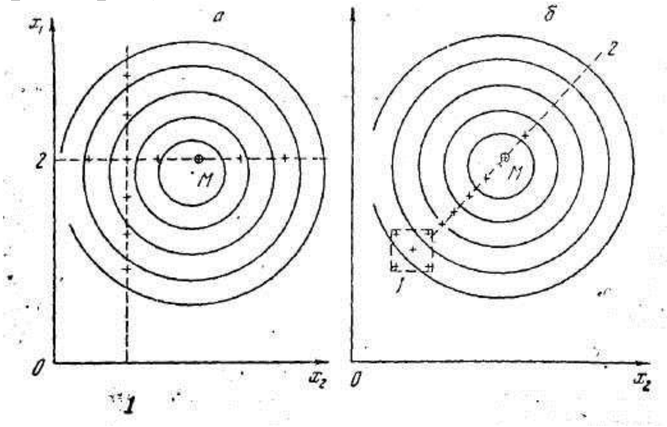


Рис. 5. Два способа поиска оптимума

В случае б представлен простейший вариант шаговой процедуры. Сначала изучается локальная область (1), затем определяется наиболее интересное направление m в этом направлении ставятся следующие опыты (2).

Оказалось (см. рис. 15), что в обоих случаях достигнут одинаковый результат при одинаковом суммарном количество опытов.

Как вы думаете, всегда ли эти две процедуры эквивалентны?

Что нам требуется? Выяснить, нет ли нарушений наших предпосылок. Легче всего установить, сколько оптимумов (экстремумов) имеет изображенная функция. Если экстремумов больше одного, то уже нарушена предпосылка. Кроме того, существенно, нет ли каких-нибудь нарушении гладкости и непрерывности функции (например, пиков).

Дело в том, что эффективность зависит от вида поверхности, а также от того, в какой последовательности перебираются факторы в случае а и из окрестностей какой точки начат эксперимент в случае б.

Попробуйте вместо окружностей, которые задают линии равных откликов, нарисовать эллипсы, главные оси которых составляют некоторый острый угол с осями координат. Вы увидите, что эффективность, процедур окажется различной.

Вот иллюстрация, которая сразу показывает правильность вашего ответа (рис. 6). Это, разумеется, только иллюстрация. В жизни не всегда удастся за один цикл достигнуть оптимума.

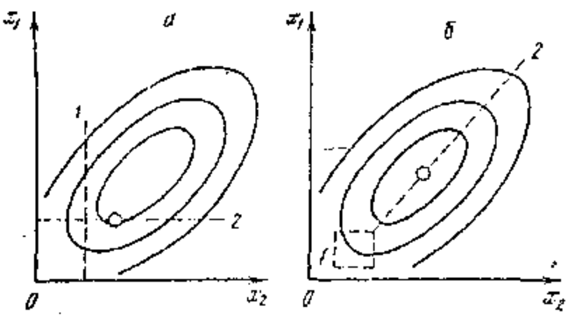


Рис. 16. Два способа поиска оптимума.

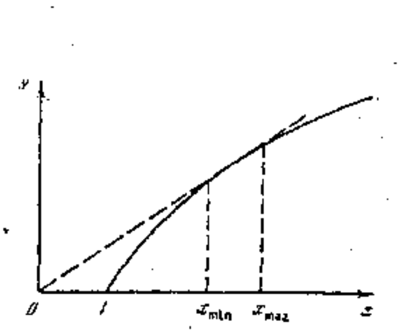


Рис. 17. График логарифмической функции

Лекция. 20. Обработка результатов эксперимента

1. Применения метода наименьших квадратов.

Начнем с простого случая: один фактор, линейная модель. Интересующая нас функция отклика (которую мы будем также называть уравнением регрессии) имеет вид

$$y=b_0+b_1x_1$$

Это хорошо известное вам уравнение прямой линии. Наша цель — вычисление неизвестных коэффициентов b0 и b1. Мы провели эксперимент, чтобы использовать при вычислениях его результаты. Как это сделать наилучшим образом?

Если бы все экспериментальные точки лежали строго на прямой линии, то для каждой из них было бы справедливо равенство

$$y_i-b_0-b_1x_{1i}=0,$$

где i = 1, 2, . . . , .N — помер опыта. Тогда не было бы никакой проблемы. На практике это равенство нарушается и вместо пего приходится писать

$$y_i-b_0-b_1x_{1i}=\xi_i,$$

где ξ — разность между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значениями у в 1-й экспериментальной точке. Эту величину иногда называют невязкой.

Действительно, невязка возникает но двум причинам: из-за ошибки эксперимента и из-за непригодности модели. Причем эти причины смешаны и мы не можем, не получив дополнительной информации, сказать, какая из них преобладает.

Можно постулировать, что модель пригодна. Тогда невязка будет порождаться только ошибкой опыта. (Еще можно, конечно, постулировать, что ошибка опыта равна пулю. Тогда невязка будет связана только с пригодностью модели, и пригодной будет такая модель, для которой все невязки равны пулю.)

Обычно оценивают независимо ошибку опыта (помните предыдущую главу?) и проверяют пригодность модели.

Конечно, мы хотим найти такие коэффициенты регрессии, при которых невязки будут минимальны. Это требование можно записать по-разному. В зависимости от этого мы будем получать разные оценки коэффициентов. Вот одна из возможных записей

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \min,$$

которая приводит к методу наименьших квадратов.

Возможен и метод наименьших кубов

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^3| = \min,$$

так как условие, которое мы выбираем, произвольно.

Беда заключается в том, что он хуже МНК с другой точки зрения: мы будем получать оценки коэффициентов со значительно меньшей точностью. Да и в вычислительном отношении этот путь сложнее.

Существует и метод, в котором минимизируется сумма модулей (абсолютных величин) невязок. Но этот путь связан с дополнительными вычислительными трудностями. Условие МНК — это удачный компромисс.

В последнее время были предложены другие подходы. Можно, например, минимизировать модуль максимальной невязки. Это записывается так:

$$\min \max_i |\xi_i|.$$

Предложении можно сделать сколько угодно, по мы не будем более на них останавливаться и перейдем непосредственно к МНК.

Когда мы ставим эксперимент, то обычно стремимся провести больше (во всяком случае не меньше) опытов, чем число неизвестных коэффициентов. Поэтому система линейных уравнений оказывается переопределенной и часто противоречивой (т. е. она может иметь бесконечно много решений пли может не иметь решений).

$$\xi_i = y_i - b_0 - b_1 x_{1i}$$

Переопределенность возникает, когда число уравнений больше числа неизвестных; противоречивость — когда некоторые из уравнений несовместимы друг с другом.
Только если все экспериментальные точки лежат на прямой, то система становится определенной и имеет единственное решение.
МНК обладает тем замечательным свойством, что он делает определенной любую произвольную систему уравнений. Он делает число уравнении равным числу неизвестных коэффициентов.

2. Уравнения регрессии

Наше уравнение регрессии имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1.$$

В нем два неизвестных коэффициента. Значит, применяя МНК, мы получим два уравнения. Давайте попробуем их получить.
Мы писали

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \min.$$

Это соотношение можно записать иначе

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - b_0 - b_1 x_{1i})^2 = \min.$$

Вы, конечно, помните из курса математики, что минимум некоторой функции, если он существует, достигается при одновременном равенстве пулю частных производных по всем неизвестным, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial b_0} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial b_1} = 0.$$

Вот откуда берутся наши уравнения для определения коэффициентов. Теперь как говорится, дело техники:

$$-2\sum_{i=1}^{N}(y_i-b_0-b_1x_{1i})=0, \quad -2\sum_{i=1}^{N}(y_i-b_0-b_1x_{1i})x_{1i}=0.$$

Для вычислений удобно раскрыть скобки и провести простые преобразования, которые дают

$$Nb_0+\sum_{i=1}^{N}x_{1i}b_1=\sum_{i=1}^{N}y_i, \quad \sum_{i=1}^{N}x_{1i}b_0+\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^2b_1=\sum_{i=1}^{N}y_ix_{1i}.$$

Окончательные формулы для вычисления коэффициентов регрессии, которые удобно находить с помощью определителей, имеют вид

$$b_0=\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^2-\sum_{i=1}^{N}y_ix_{1i}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}}{N\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^2-\left(\sum_{i=1}^{N}x_{1i}\right)^2};$$

$$b_1=\frac{N\sum_{i=1}^{N}y_ix_{1i}-\sum_{i=1}^{N}y_i\sum_{i=1}^{N}x_{1i}}{N\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^2-\left(\sum_{i=1}^{N}x_{1i}\right)^2}.$$

Посмотрим теперь, как вычисляются суммы, входящие в эти формулы.

3.Методика представления результатов эксперимента.

Номер опыта	x_1	y
1	x_{11}	y_1
2	x_{12}	y_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
i	x_{1i}	y_i
.	.	.
.	.	.
.	.	.
N	x_{1N}	y_N

Результаты эксперимента представляются следующей матрицей (табл.). Для выполнения вычислений ее расширяют так, как представлено в таблице.

Вы, конечно, заметили, что в этой таблице сделано больше вычислений, чем требуется для расчета b0 и b1. Эти «лишние» данные нужны для проверки правильности расчетов.

Возможны два способа проверки. Первый из условия

$$\sum_{i=1}^{N}(x_{1i}+y_i)^2=\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^2+2\sum_{i=1}^{N}y_ix_{1i}+\sum_{i=1}^{N}y_i^2,$$

которое хорошо вам известно еще из школьной математики. (Оно должно выполняться не только для сумм, но и в каждой строчке таблицы.) Второй способ использует условие y = b0 + b1 x1.

Подставляя в это соотношение y и x1 из последней строки таблицы и один из коэффициентов, можно найти другой коэффициент и сравнить с расчетным.

Вторая из проверок является наиболее полной, наиболее жесткой. Она проверяет не только вычисления сумм, по и вычисления коэффициентов.

Таблица 1.

Расчетная таблица для вычислений коэффициентов регрессии

Номер опыта	x_1	y	x_1^2	yx_1	y^2	x_1+y	$(x_1+y)^2$
1	x_{11}	y_1	x_{11}^2	y_1x_{11}	y_1^2	$x_{11}+y_1$	$(x_{11}+y_1)^2$
2	x_{12}	y_2	x_{12}^2	y_2x_{12}	y_2^2	$x_{12}+y_2$	$(x_{12}+y_2)^2$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
i	x_{1i}	y_i	x_{1i}^2	y_ix_{1i}	y_i^2	$x_{1i}+y_i$	$(x_{1i}+y_i)^2$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
N	x_{1N}	y_N	x_{1N}^2	y_Nx_{1N}	y_N^2	$x_{1N}+y_N$	$(x_{1N}+y_N)^2$
$\sum$	$\sum_{i=1}^{N} x_{1i}$	$\sum_{i=1}^{N} y_i$	$\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2$	$\sum_{i=1}^{N} y_ix_{1i}$	$\sum_{i=1}^{N} y_i^2$	—	$\sum_{i=1}^{N} (x_{1i}+y_i)^2$
Среднее значение	$\bar{x}_1$	$\bar{y}$					

4. Проверка результатов обработки.

На практике используют обо проверки, чтобы в случае ошибок в таблице по считать зря коэффициенты.
Имейте в виду: никакая проверка не гарантирует вас от ошибок в записи исходных данных. Будьте внимательны!
Имейте в виду: никакие результаты вычислений нельзя ни использовать, ни даже обсуждать, лона они не проверены. Иначе вы рискуете впасть в заблуждение и, в лучшем случае, потерять время.
Ну вот мы и научились вычислять коэффициенты. Давайте нанесем исходные данные и полученное уравнение на график (рис. 1).
Выделим для удобства рассмотрения несколько экспериментальных точек и отрезок нашего уравнения в большем масштабе (рис. 2).
Мы выбрали пять экспериментальных точек, которые пронумеровали цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Четвертая точка оказалась лежащей на липни. МНК состоит в том, чтобы минимизировать сумму квадратов отрезков, характеризующих расхождение между экспериментальными точками и полученным уравнением. Мы минимизировали сумму квадратов пунктирных отрезков. Если бы наше уравнение регрессии имело вид то мы минимизировали бы сумму сплошных отрезков.

$$x_1 = b_0 + b_1 y,$$

Во всех формулах тогда пришлось бы xi и у поменять местами и коэффициенты получились бы другими (если, конечно, не все повязки равны нулю).
Мы находим невязки по оси у, поэтому и минимизируется сумма квадратов вертикальных отрезков. Обе линии совпадут только в том случае, если все невязки равны пулю, т. е. если все экспериментальные точки лежат точно па прямой линии.
Теперь мы можем узнать, какая же получилась сумма квадратов невязок. Будем называть ее остаточной суммой квадратов.

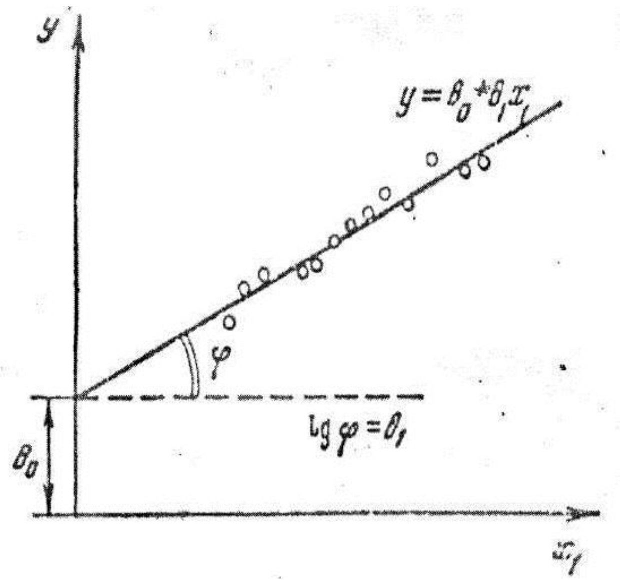


Рис. 1. Линейное уравнение регрессии

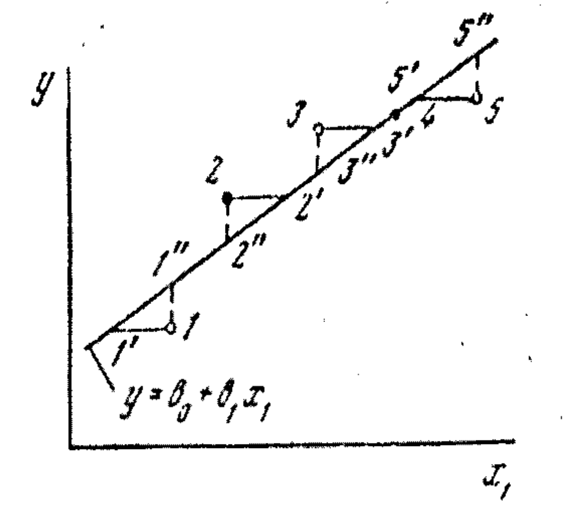


Рис. 2. Линейное уравнение регрессии (фрагмент)

Из рисунков видно, что для этого надо вычислить по уравнению значения у в условиях каждого опыта. Будем называть такое значение предсказанным и обозначать у. Затем надо найти все невязки (отрезки), возвести их в квадрат и сложить (табл.3).

Лекция.21. Вычислительный эксперимент

План:

Основой вычислительного эксперимента.
Этапы вычислительного эксперимента.
Решение прикладных задач.
Резюме.

1. Основой вычислительного эксперимента.

Основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой - прикладная математика, а технической — компьютеры.

Вычислительный эксперимент используется как средство для решения сложных прикладных задач в различных отраслях науки и техники. Несмотря на разнообразие решаемых задач для вычислительного эксперимента характерен общий технологический цикл, который условно подразделяется на ряд этапов.

2. На первом этапе создается математическая модели исследуемого объекта, как правило, в виде дифференциальных или интегродифференциальных уравнений. Конструирование математической модели осуществляется чаще всего специалистами той или иной предметной области (физиками, химиками, биологами, медиками, экономистами и т.д.) в тесном содружестве с математиками. Математики оценивают возможность решения возникшей математической задачи и проводят предварительное исследование модели: правильно ли поставлена задача, имеет ли она решение, единственно ли оно и т.д. На втором этапе разрабатывается метод расчета сформулированной математической задачи или, как говорят, вычислительный алгоритм. Он представляет собой совокупность цепочек алгебраических формул, по которым ведутся вычисления, и логических условий, устанавливающих последовательность применения этих формул.

Следует отметить, что для решения одной и той же математической задачи можно разработать множество вычислительных алгоритмов — хороших и плохих. Поэтому возникает необходимость в разработке рационального вычислительного алгоритма, для чего используется теория численных методов.

На третьем этапе создается программа реализации разработанного вычислительного алгоритма на компьютерах.

Четвертый этан связан с реализацией вычислительного эксперимента. Компьютер в процессе расчета может выдать любую информацию, которая интересует исследователя. Естественно, точность этой информации определяется достоверностью математической модели. Поэтому в серьезных прикладных исследованиях никогда сразу не начинают проводить полномасштабные расчеты по только что составленной программе. Им всегда предшествует период проведения тестовых расчетов, необходимых для "отладки" программы.

При проведении предварительных расчетов тестируется также сама математическая модель — выясняется насколько хорошо она описывает изучаемый объект, процесс или явление, в какой степени адекватна реальности. Для этого проводится "обсчет" некоторых контрольных экспериментов, по которым имеются достаточно надежные измерения. Сопоставляя результаты эксперимента и результаты расчет, уточняют математическую модель.

Рис.1

На пятом этане вычислительного эксперимента осуществляется обработка результатов расчета на компьютерах, проводится их всесторонний анализ и делаются выводы. При этом выводы могут быть двух типов: или устанавливается необходимость уточнения математической модели, или полученные результаты, пройдя проверку по различным критериям, становятся научными достижениями и передаются заказчику. На практике чаще всего имеют место те и другие выводы.

Рассмотренная схема технологического цикла вычислительного эксперимента представлена на рис.1.

3. Решение прикладных задач на компьютерах — сложный научно-производствепиый процесс и, чтобы им овладеть и уметь управлять, необходимо его изучать [12].

Вычислительный эксперимент применяется. »фи решении различных прикладных задач во многих отраслях науки и техники.

В ядерной энергетике прогнозируется работа реакторов на основе детального моделирования происходящих в них физических процессов. Причем вычислительный эксперимент тесно сопрягается с натурным, что ускоряет и удешевляет весь исследовательский цикл.

В космической технике рассчитываются траектории летательных аппаратов, задачи обтекания, обрабатываются радиолокационные данные, изображения со спутников и т.д.

В экологии решаются вопросы прогнозирования и управления экологическими системами.
В химии рассчитываются химические реакции, определяются их константы, исследуются химические процессы па макро — и микроуровне с целью их интенсификации и т.д.
В технике рассчитываются процессы получения кристаллов и пленок, технологические процессы создания материалов с заданными свойствами и т.д.
Классической областью применения вычислительного эксперимента является физика, например, при изучении сильно нелинейных процессов в микромире.
Указанные и другие примеры применения вычислительного эксперимента говорят об эффективности методологии нового современного подхода к теоретическому анализу прикладных проблем.
Рис.1. Схема технологического цикла вычислительного эксперимента

4 Резюме. Вычислительный эксперимент широко применяется в различных отраслях науки и технике при решении сложных прикладных задач. Основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой — прикладная математика, а технической — Компьютер. Независимо от разнообразия решаемых задач для вычислительного эксперимента характерен общий технологический цикл, включающий пять этапов: создание математической модели; разработка вычислительного алгоритма; программирование; расчет на компьютер; обра ботка результатов расчета, анализ и выводы.

Вопросы и задания для самоконтроля

Какие виды экспериментальных исследований Вы знаете?
В чем заключается методология проведения эксперимента':
Что предусматривает план-программа эксперимента?
В чем заключается методика эксперимента?
Как осуществляется подбор эмпирических формул?
В чем заключается анализ результатов теоретико-экспериментальных исследований?
Что такое вычислительный эксперимент?
Обмените технологический цикл проведения вычислительного эксперимента.
Приведите примеры отраслей науки и техники эффективного применения вычислительного эксперимента.

Фойдаланиладиган асосий адабиётлар руйхати

1. Марченко Г.Н. Проведение эксперимента с использованием статистических методов планирования. –Ташкент: Мехнат, 1992.
2. Раджабов Т.Д., Шустров В.А. Обработка результатов эксперименталных измерений. – Ташкент: ТашПИ, 1989.
3. Математическая теория планирования эксперимента. Под.ред. С.М.Ермакова. -М.: Наука, 1973.
4. Перегудов Л.В., Саидов М.Х., Аликулов Д.Е. Илмий ижод методологияси. – Тошкент: Молия, 2002
5. Сиденко В.М., Грушко И.М. Основы научных исследований. – Харьков: Высшая школа, 1987.
6. Закин Я.Х., Рашидов Н.Р., Основы научного исследования. – Тошкент: Ўқитувчи, 1981.
7. Руководство по выражению неопределенности измерения. - Санкт-Петербург: ВНИИМ им. Д.И.Менделеева, 1999.
8. Математические методы планирования эксперимента. Под.ред. В.В.Пиненко. – Новосибирск: 1981.
9. Мудров В.Ч., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. -М.: Наука, 1986.
10. Перегудов Л.В., Саидов М.Х., Аликулов Д.Е., Методология научного творчества. - Тошкент, Молия, 2002
11. Гультяев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB, учебный курс. - Санкт-Петербург, 2000.

Интернет ва ЗиёНет сайтлари

1. www.gov.uz
2. www.bilim.uz
3. http: // www.patent.uz.
4. www.standart.uz.
5. http: // www.firps.ru
6. http:// www. 0rbita.uz