

Guliston davlat universiteti fizika-matematika fakulteti bitiruvchisi
Kurbonov Jaxongir Tursunqul o'g'lining
“Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish”
mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga rahbar

XULOSASI

J.T. Kurbonov tomonidan tavsiya etilayotgan ushbu malakaviy bitiruv ishi tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topishni o'rganish masalalariga bag'ishlangandir.

Ushbu ish kirish, ikki bob, to'qqista paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Birinchi bobda tasodifiy miqdor tushunchasi, diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni, taqsimot funksiya, uzluksiz tasodifiy miqdor tushunchalari keltirilgan.

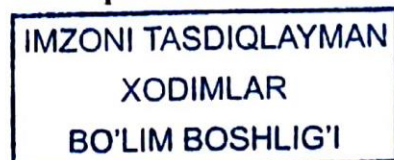
Ikkinchi bobda ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar o'rganilgan bo'lib, unda ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, ko'p o'lchovli taqsimot funktsiyalarning xossalari, tasodifiy miqdorlar bog'liqsizligi, tasodifiy miqdorlarning funktsiyalari, ko'p o'lchovli ba'zi muhim taqsimotlar hamda ba'zi muhim ikki o'lchovli taqsimotlardan-ikki o'lchovli normal taqsimot, doiradagi tekis taqsimot va kvadratdagi tekis taqsimotlar haqida ma'lumot berilgan. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalariga doir masalalar ishlab ko'rsatilgan. Yana tasodifiy sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimot qonunini topish masalasi ham o'rganildi, u yerda biz asosiy e'tiborni qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan holga qaralgan. Ushbu malakaviy bitiruv ishida o'rganilgan ba'zi muhim diskret va uzluksiz taqsimotlarni o'rganish va ularni tekshirish alomatlariga oid tushunchalardan matematika yo'nalishida tahsil olayotgan talabalariga ehtimollar nazariyasi va matematik statistika umumiy kursini o'qitish jarayonida keng foydalanish mumkindir.

Umuman J.T. Kurbonovning ushbu “Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish” mavzusidagi bitiruv malakaviy ishi malakaviy ishlarga qo'yiladigan “Nizom” talablariga javob beradi deb hisoblayman va uni himoyaga tavsiya etaman.

Himiy rahbar:



kat.o'qit. F.Sh.Norboev



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

**5130100 - “Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun**

Kurbonov Jaxongir Tursunqul o'g'lining

“Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish”

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Rahbar: 
imzo katta o'q. F.Sh. Norboev

BMI “Matematika” kafedrasining 2019 yil 14 iyun № 11 sonli yig'ilishida
ko'rib chiqildi va himoyaga tavsiya etiladi.

Kafedra mudiri 
imzo fiz-mat.f.n., dots. H. Norjigitov
f.i.sh. ilmiy daraja, ilmiy

unvon

**Fizika matematika fakulteti dekani tomonidan himoya qilishga ruxsat
etiladi.**

Fakultet dekani 
imzo t.f.n. dots. S. Allayorov
f.i.sh. ilmiy daraja, ilmiy

unvon



Guliston – 2019

Guliston davlat universiteti fizika-matematika fakulteti bitiruvchisi Kurbonov Jaxongir Tursunqul o'g'lining "Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish" mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga

TAQRIZ

J.T. Kurbonovning ushbu bitiruv malakaviy ishi ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalaridan bo'lgan tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topishni o'rganishga bag'ishlangan.

Ushbu ish kirish, ikki bob, to'qqista paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Birinchi bobda ehtimolliklar fazosi, diskret va uzluksiz tasodifiy miqdor va taqsimot funksiya tushunchalari keltirilgan. Ba'zi muhim taqsimotlardan binomial, geometrik, Puasson, ko'rsatkichli, tekis, normal, gamma, Koshi taqsimotlarning taqsimotlari, grafiklari va muhim ko'rsatkichlari topib ko'rsatilgan.

Ikkinchi bobda esa ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning birgalikdagi taqsimot funktsiyalari, xususan, sodda holda ya'ni, ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonunlari berilgan. Ba'zi muhim ikki o'lchovli taqsimotlardan-ikki o'lchovli normal (Gauss) taqsimot, doiradagi tekis taqsimot va kvadratdagi tekis taqsimotlar haqida ma'lumot berilgan. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni, taqsimot funktsiyalari va ularning sonli xarakteristikalarini topishga doir masalalar ishlab ko'rsatilgan.

Umuman J.T. Kurbonovning ushbu "Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish" mavzusidagi bitiruv malakaviy ishi malakaviy ishlarga qo'yiladigan talablarni to'liq qanoatlantiradi va uni a'lo bahoga baholash mumkin.

Taqrizchi



**СВХТХҚТМОҲМ аниқ ва табиий
фанлар методикаси кафедраси
катта ўқитувчиси О. Даминов**

Guliston davlat universiteti fizika-matematika fakulteti bitiruvchisi Kurbonov Jaxongir Tursunqul o'g'lining "Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish" mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga

TAQRIZ

J.T. Kurbonovning ushbu bitiruv malakaviy ishi ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalaridan bo'lgan tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topishni o'rganishga bag'ishlangan.

Ushbu ish kirish, ikki bob, to'qqista paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Birinchi bobda ehtimolliklar fazosi, diskret va uzluksiz tasodifiy miqdor va taqsimot funksiya tushunchalari keltirilgan. Ba'zi muhim taqsimotlardan binomial, geometrik, Puasson, ko'rsatkichli, tekis, normal, gamma, Koshi taqsimotlarning taqsimotlari, grafiklari va muhim ko'rsatkichlari topib ko'rsatilgan.

Ikkinchi bobda esa ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning birgalikdagi taqsimot funktsiyalari, xususan, sodda holda ya'ni, ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonunlari berilgan. Ba'zi muhim ikki o'lchovli taqsimotlardan-ikki o'lchovli normal (Gauss) taqsimot, doiradagi tekis taqsimot va kvadratdagi tekis taqsimotlar haqida ma'lumot berilgan. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni, taqsimot funktsiyalari va ularning sonli xarakteristikalarini topishga doir masalalar ishlab ko'rsatilgan.

Umuman J.T. Kurbonovning ushbu "Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish" mavzusidagi bitiruv malakaviy ishi malakaviy ishlarga qo'yiladigan talablarni to'liq qanoatlantiradi va uni a'lo bahoga baholash mumkin.

Taqrizchi



**СВХТХҚТМОҲМ аниқ ва табиий
фанлар методикаси кафедраси
катта ўқитувчиси О. Даминов**

Guliston davlat universiteti fizika-matematika fakulteti bitiruvchisi Kurbonov Jaxongir Tursunqul o'g'lining "Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish" mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga

TAQRIZ

J.T. Kurbonovning ushbu bitiruv malakaviy ishi ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalaridan bo'lgan tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topishni o'rganishga bag'ishlangan.

Ushbu ish kirish, ikki bob, to'qqista paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Birinchi bobda ehtimolliklar fazosi, diskret va uzluksiz tasodifiy miqdor va taqsimot funksiya tushunchalari keltirilgan. Ba'zi muhim taqsimotlardan binomial, geometrik, Puasson, ko'rsatkichli, tekis, normal, gamma, Koshi taqsimotlarning taqsimotlari, grafiklari va muhim ko'rsatkichlari topib ko'rsatilgan.

Ikkinchi bobda esa ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning birgalikdagi taqsimot funktsiyalari, xususan, sodda holda ya'ni, ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonunlari berilgan. Ba'zi muhim ikki o'lchovli taqsimotlardan-ikki o'lchovli normal (Gauss) taqsimot, doiradagi tekis taqsimot va kvadratdagi tekis taqsimotlar haqida ma'lumot berilgan. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni, taqsimot funktsiyalari va ularning sonli xarakteristikalarini topishga doir masalalar ishlab ko'rsatilgan.

Umuman J.T. Kurbonovning ushbu "Tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni va taqsimot funktsiyalarini topish" mavzusidagi bitiruv malakaviy ishi malakaviy ishlarga qo'yiladigan talablarni to'liq qanoatlantiradi va uni a'lo bahoga baholash mumkin.

Taqrizchi



**СВХТХҚТМОҲМ аниқ ва табиий
фанлар методикаси кафедраси
катта ўқитувчиси О. Даминов**

Mundarija

Kirish.....	3
I bob. Tasodifiy miqdorlar.....	
1.1-§. Tasodifiy miqdor tushunchasi.....	
1.2-§. Taqsimot funktsiya xossalari	
1.3-§. Uzlüksiz tasodifiy miqdorlar.....	
II bob. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar.....	
2.1-§. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar.....	
2.2-§. Ko'p o'lchovli taqsimot funktsiyalarning xossalari	
2.3-§. Tasodifiy miqdorlar bog'liqsizligi.....	
2.4-§. Tasodifiy miqdorlarning funktsiyalari.....	
2.5-§. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar.....	
Xulosa.....	
Foydalanilgan adabiyotlar.....	

Kirish

Mavzuning dolzarbligi. Ko'pincha ξ tasodifiy miqdor ustida kuzatish olib borish natijasida hosil qilingan $x_1, x_2, \dots, x_n$ miqdorlarga boshqa η tasodifiy miqdorning ta'sirini o'rganishga to'g'ri keladi. ξ va η orasidagi munosabat statistik yoki korrelyatsion munosabat deyiladi. Bog'liklik miqdorini – ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikasi, ya'ni korrelyatsiya koeffitsienti yordamida aniqlash mumkin bo'ladi. Korrelyatsiya koeffitsienti ikkita belgining o'zaro bog'lanish darajasini ko'rsatadi, lekin bir belgining ikkinchi belgiga qarab son jihatdan qanday o'zgarishini ochib bera olmaydi. Bu munosabatni x va y belgilar orasidagi regressiya tenglamasi deb ataluvchi bog'lanish ma'lum darajada ochib bera oladi. Bu esa ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining muhim tushunchalari bo'lmish bog'liq tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalarini chuqur o'rganish muhimligini anglatadi.

Bitiruv-malakaviy ishning maqsadi. Talabalarga ehtimollar nazariyasi kursining muhim tushunchalaridan biri bo'lmish bog'liq tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalarini chuqurroq o'rgatish va tadbirlari haqida ko'proq ma'lumot to'plashdan iboratdir.

Bitiruv-malakaviy ishning vazifasi. Talabalarga ehtimollar nazariyasi kursida muhim o'rin tutuvchi tasodifiy miqdor, ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot hamda zichlik funktsiyalari, bog'liq va bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar, ularning sonli xarakteristikalari hamda tasodifiy miqdorlar sonli xarakteristikalarining tadbirlarini mukammal o'rgatishdan iborat.

Bitiruv-malakaviy ishning muammosi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanida ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar chuqur o'rganilmaydi. Bunga asosiy sabablardan biri soat etishmasligidir. Shuning uchun ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar hamda ularning tadbirlarini o'rganish foydadan holi emas.

Bitiruv-malakaviy ishning ob'ekti. Mazkur bitiruv-malakaviy ishda tasodifiy miqdor, ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot hamda

zichlik funktsiyalari, bog'liq va bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar, ularning sonli xarakteristikalarini kabi terminlar ishning asosiy ob'ekti hisoblanadi.

Bitiruv-malakaviy ishning ilmiy farazi. Matematika yo'nalishi talabalarida ehtimollar nazariyasi faniga ijodiy yondashuvni kuchaytiradi va fanga qiziqishni orttiradi.

Bitiruv-malakaviy ishning yangiligi. Odatda talabalarga bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar o'rgatiladi. Ajratilgan o'quv rejadagi dars soatlarining kamligi sababli ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalarini deyarli o'rganilmaydi. Bitiruv-malakaviy ishda o'rganilgan tushunchalar talabalarga ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, ularning sonli xarakteristikalarini hamda ularning tadbirlarini chuqur o'rganish imkonini beradi.

Bitiruv-malakaviy ishning fan uchun ahamiyati. Bitiruv-malakaviy ishda ko'rilgan mavzularga talabalarda qiziqish ortganligi sababli, ehtimollar nazariyasi faniga qiziquvchi talabalar soni ortadi, bu esa matematika yanada rivojlanishi uchun ahamiyatlidir.

Bitiruv-malakaviy ishning amaliyot uchun ahamiyati. Ushbu malakaviy bitiruv ishida tanlangan misol va masalalarni matematika yo'nalishida tahsil olayotgan talabalariga ehtimollar nazariyasi umumiy kursini o'qitish jarayonida keng foydalanish mumkindir.

I bob. Tasodifiy miqdorlar

1.1-§. Tasodifiy miqdor tushunchasi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir. Tasodifiy miqdor bu tasodifga bog'liq holda u yoki bu son qiymatlarni qabul qiluvchi miqdor. Masalan, o'yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar soni, tavakkaliga olingan n ta mahsulotlar ichidagi yaroqsizlarining soni, n ta o'q uzulganda nishonga tekkan o'qlar soni, asbobning beto'xtov ishlash vaqti va hokozolar tasodifiy miqdorlarga misol bo'la oladi. ξ - tasodifiy miqdor, tajribaning harbir mumkin bo'lgan oqibatiga mos qo'yilgan sondan iborat. Tajriba natijalarining to'plami elementar hodisalar bilan tariflangani tufayli tasodifiy miqdorga Ω elementar hodisalar fazosining $\xi = \xi(\omega)$ funksiyasi sifatida qarash mumkin. Tasodifiy miqdorning tarifini keltirishdan avval bir qancha misollar ko'ramiz.

1-Misol. Tajriba tangani 2 marta tashlashdan iborat. Elementar hodisalar maydoni

$$\Omega = \{gg, gr, rg, rr\}$$

ko'rinishga ega. ξ -gerb chiqishlar soni bo'lsin. ξ ning miqdori elementar hodisalarning $\xi = \xi(\omega)$ funksiyasidan iborat. $\xi(\omega)$ funksiyaning qiymatlar jadvali ushbu ko'rinishga ega:

ω	gg	gr	rg	rr
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

2-Misol. Tanga birinchi bor gerb chiqqunicha tashlansin. Bu holda

$$\Omega = \{z, pz, ppz, pppz, \dots, pppp\dots z, \dots\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}.$$

ξ - tanga tashlashlar soni bo'lsin. U holda ξ elementar hodisalarning funksiyasi bo'lib, agar $\omega = \omega_n$ ($n = 1, 2, \dots$) bo'lsa, $\xi(\omega) = n$ bo'ladi.

3-Misol. Radiusi R ga teng bo'lgan doiraviy tekis ekranda tasodifiy ravishda zarracha paydo bo'lish hodisasi kuzatilayotgan bo'lsin. ξ orqali zarrachadan ekran markazigacha bo'lgan masofani belgilaylik Bu holda $\Omega = \{\omega; \omega = (x, y); x^2 + y^2 \leq R\}$ - to'plamdan iborat bo'ladi. ξ elementar hodisalarning funksiyasi bo'lib, $\xi(\omega) = x^2 + y^2$ tenglik o'rinli.

Yuqorida ko'rilgan misollar tasodifiy miqdorni elementar hodisalar fazosining funksiyasidan iborat deb izohlash mumkin ekanligini ko'rsatadi. Ammo Ω da aniqlangan ihtiyoriy funksiyani tasodifiy miqdor deb qarash mumkin emas. Amaliyotda ko'pincha $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning qiymati u yoki bu to'plamga tegishli bo'lish ehtimoli nimaga teng degan savolga javob berishga to'g'ri keladi. Demak, sonlar o'qidagi etarlicha keng $\{B\}$ to'plamlar sinfi uchun, biz $\{\omega; \xi(\omega) \in B\}$

to'plam hodisalarning $\mathcal{A}$ σ -algebrasiga tegishli bo'lishiga va, demak $P(\{\omega; \xi(\omega) \in B\})$ ehtimolni hisoblash mumkin ekanligiga ishonch hosil qilishimiz kerak.

1-Tarif. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimollik fazosi va $\xi = \xi(\omega)$ Ω da aniqlangan sonli funksiya bo'lsin. Agar har qanday haqiqiy x uchun

$$\{\omega; \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad (1)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Funksional analiz kursidan malumki (1) shartni qanoatlantiruvchi Ω da aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga $\mathcal{A}$ σ -algebraga nisbatan **o'lchovli** funksiya deyiladi. Shunday qilib $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazodagi tasodifiy miqdor $\mathcal{A}$ σ -algebraga nisbatan o'lchovli funksiya iborat.

2-Tarif. Ihtiyoriy $x \in R$ son uchun aniqlangan

$$F(x) = F_{\xi}(x) = P(\{\xi \leq x\})$$

funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning **taqsimot funksiyasi** deyiladi.

Tasodifiy miqdorning yana bir eng sodda misoli sifatida $A \in \mathcal{A}$ **hodisani** $I_A(\omega)$ **indikatorini** qarash mumkin;

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \omega \in A, \\ 0, & \text{agar } \omega \notin A. \end{cases}$$

$$\{\omega; \xi(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 0, \\ \bar{A}, & 0 \leq x < 1; \\ \Omega, & x \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

munosabatdan $I_A(\omega)$ funksiyaning tasodifiy miqdor ekanligi kelib chiqadi. Uning taqsimot funksiyasi (2) munosabatga ko'ra

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ P(\bar{A}), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

ko'rinishga ega.

Endi $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ bo'lsin, u holda

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega); x_i \in R \quad (3)$$

Ko'rinishda ifodalangan tasodifiy miqdorga **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi. Agar (3) yig'indi chekli bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorga **sodda** (yoki **elementar**) tasodifiy miqdor deyiladi.

Tasodifiy miqdorlarning yana bir qancha misollarini ko'ramiz.

4-Misol. Simmetrik bir jinsli tanga tashlansin. Bu holda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ bo'lib, bu erda $\omega_1 = \text{"g"}$, $\omega_2 = \text{"r"}$, $\mathcal{A}$ esa Ω ning barcha qism to'plamlaridan iborat, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1, \\ -1, & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

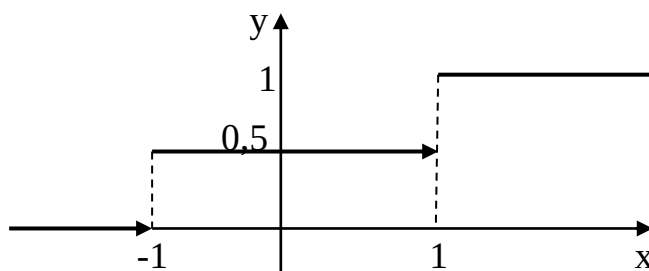
deylik. Bu holda

$$\{\omega; \xi(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < -1; \\ \{\omega_2\}, & -1 \leq x < 1; \\ \Omega, & x \geq 1 \end{cases}$$

munosabat o'rinli. Shunday qilib, $\xi(\omega)$ -tasodifiy miqdor. Uning taqsimot funksiyasi

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1/2, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Uning grafigi 1-shaklda keltirilgan.



1-shakl

5-Misol. $[a, b]$ kesmaga tasodifiy ravishda nuqta tashlansin, yani nuqta $[a, b]$ kesmaning birorta qism to'plamiga tushish ehtimoli u to'plamning Lebeg o'lchoviga proporsional bo'lsin. Bunda $\Omega = [a, b]$ kesmaga teng bo'lib, $\mathcal{A}$ esa $[a, b]$ kesmadagi barcha Borel to'plamlaridan iborat bo'ladi $\xi = \xi(\omega)$ funksiyani

$$\xi(\omega) = \omega, \omega \in [a, b]$$

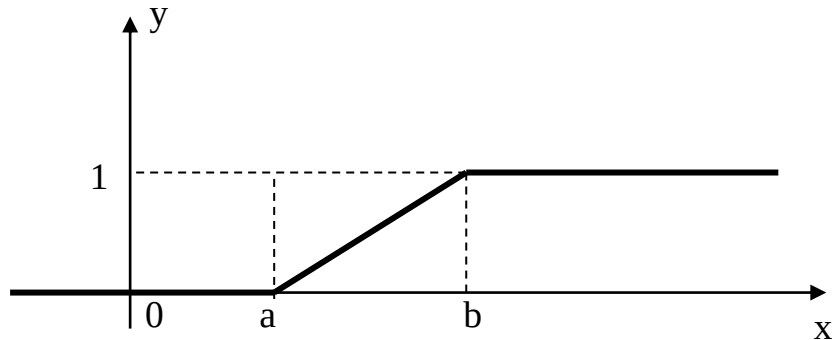
formula orqali belgilaymiz, yani $\xi - [a, b]$ oraliqqa tushgan nuqtaning koordinatasidan iborat.

$$\{\omega; \xi(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < a; \\ [a, x], & a \leq x < b; \\ \Omega = [a, b], & x \geq b \end{cases}$$

munosabatning o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas. Shunday qilib, harqanday $x \in \mathbb{R}$ uchun $\{\omega; \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$, yani $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor. $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Bu taqsimot funksiya (2-shakl) $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimotini aniqlaydi.



2-shakl

Endi ehtimollar fazosi va unda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lmagan funksiyaga misol keltiramiz.

6-Misol. $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} - [0, 1]$ oralig'idagi Lebeg o'lchovli to'plamlarning σ -algebrasi bo'lsin. $P(A) = \lambda(A)$, $A \in \mathcal{A}$ deymiz, bu erda $\lambda(A)$ - A to'plamning Lebeg o'lchovi. U holda $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -ehtimolliklar fazosi. $E - [0, 1]$ oralig'idagi Lebeg bo'yicha o'lchovsiz to'plam bo'lsin. $\xi(\omega) = I_E(\omega)$ - E to'plamning indikatori. U holda, agar $0 \leq x < 1$ bo'lsa $\{\omega; \xi(\omega) \leq x\} = \bar{E} \notin \mathcal{A}$. Demak yuqorida tasvirlangan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan $\xi(\omega)$ funksiya tasodifiy miqdor emas.

$\xi(\omega)$ - $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va $B \subseteq \mathbb{R}$ - sonlar o'qidagi to'plam bo'lsin. $\mathcal{A}_{\xi}$ orqali ushbu

$$\mathcal{A}_{\xi} = \{ B; B \subseteq \mathbb{R}; \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

to'plamlar sinfini belgilaylik, bu erda $\xi^{-1}(B) = \{\omega; \xi(\omega) \in B\}$ - B to'plamining proobrazi. Avvalo shuni aytish lozimki, $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning tarifidan $B = (-\infty; x]$, $x \in \mathbb{R}$ ko'rinishdagi yarim intervallar $\mathcal{A}_{\xi}$ sinfga tegishli ekanligi kelib chiqadi.

Ushbu teorema Borel to'plamlarining σ -algebrasi $\mathcal{A}_{\xi}$ sinfiga yotishini ko'rsatadi.

1-Teorema. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollik fazosi, ξ undagi tasodifiy miqdor, B esa sonlar o'qidagi ixtiyoriy Borel to'plami bo'lsin. U holda

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega; \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

munosabat orinli, yani har qanday Borel to'plamining proobrazi tasodifiy hodisadan iborat.

Isboti. $a, \varepsilon; a \leq b$ ihtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsin. U holda tengliklardan $\{\omega; \xi(\omega) \in (a, b]\} = \{\omega; a < \xi(\omega) \leq b\} = \{\omega; \xi(\omega) \leq b\} \setminus \{\omega; \xi(\omega) \leq a\}$ tengliklardan $\xi^{-1}((a, b]) = \xi^{-1}((-\infty, b]) \setminus \xi^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ munosabatning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak $(a, \varepsilon]$ ko'rinishidagi barcha yarim intervallar $\mathcal{A}_\xi$ to'plamga tegishli. Shu bilan birga R sonlar o'qidagi ihtiyoriy $B, B_1, B_2, \dots$ to'plamlar uchun

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_i), \quad (4)$$

$$\xi^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{\xi^{-1}(B)}, \quad (5)$$

$$\xi^{-1}(R) = \Omega \quad (6)$$

tengliklar o'rinli ekanligini osongina isbotlash mumkin. (4)-(6) tengliklardan $\mathcal{A}_\xi$ to'plamlar sinfi barcha $(a, \varepsilon]$ yarim intervallarni o'z ichiga oluvchi σ -algebra ekanligi kelib chiqadi. Borel to'plamlarining σ -algebrasi $\mathcal{B}$ $(a, b]$ ko'rinishidagi barcha yarim intervallarni o'z ichiga oluvchi minimal σ -algebra bo'lgani uchun $B \subseteq \mathcal{A}_\xi$. Shunday qilib teoremaning davosi ihtiyoriy B Borel to'plami uchun o'rinli.

3-Tarif. $(R, \mathcal{B}(R))$ -sonli tʻʻfri chiziq va undagi Borel to'plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{R} = \mathcal{B}(R)$ σ -algebra bo'lib, $\xi = \xi(\omega)$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lsin.

$(R, \mathcal{B}(R))$ o'lchovli fazoda

$$P_\xi(B) = P(\{\omega; \xi(\omega) \in B\}), B \in \mathcal{B}(R)$$

formula orqali aniqlangan P_ξ -ehtimollik o'lchoviga ξ tasodifiy miqdorning **ehtimollik taqsimoti** deyiladi.

Sunday qilib har qaysi ξ tasodifiy miqdor yangi $(R, \mathcal{B}(R), P_\xi)$ ehtimollar fazosini vujudga keltiradi.

1.2-§. Taqsimot funksiyalarning xossalari

$F(x) - \xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsin. U holda $F(x)$ taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega:

F1. Monotonlik xossasi: agar $x_1 \leq x_2$ bo'lsa $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo'ladi.

F2. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,

F3. O'ngdan uzluksizlik xossasi: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} F(x) = F(x_0)$.

Isboti. F1 xossaning isboti $\{\xi \leq x_1\} \subseteq \{\xi \leq x_2\}$ munosabatdan va ehtimolning 3) asosiy xossasidan kelib chiqadi. F2 xossani isbotlash uchun biz ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonli ketma-ketliklarni qaraymiz, bunda x_n ketma-ketlik $-\infty$ ga monoton

kamayadi ($x_n \downarrow -\infty$), y_n esa $+\infty$ ga monoton o'sadi ($y_n \uparrow +\infty$). Agar $A_n = \{\omega; \xi(\omega) \leq x_n\}$ va $B_n = \{\omega; \xi(\omega) \leq y_n\}$ deb belgilasak $A_n \downarrow \emptyset$ va $B_n \uparrow \Omega$ bo'lgani uchun F2 xossa ehtimolning quyidan va yuqoridan uzluksizlik xossalari kelib chiqadi (1.1-teoremaning 4 va 2 punktlariga qaralsin).

F3 xossa ham xuddi F2 kabi isbotlanadi: $A = \{\omega; \xi(\omega) \leq x_0\}$ $A_n = \{\omega; \xi(\omega) \leq x_n\}$ bo'lsin, bu erda $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi bo'lib $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ tenglik o'rinli. Demak A_n hodisalar ketma-ketligi monoton kamayuvchi bo'lib $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ tenglik o'rinli bo'lgani sababli (yani $A_n \downarrow A$) 1.1 teoremaning 3) punktiga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ yoki $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ tenglik kelib chiqadi.

$F(x) = F_{\xi}(x)$ funksiya umuman olganda chapdan uzluksiz emas, chunki ehtimolning o'ngdan uzluksizlik xossasidan

$$p_x = F(x) - F(x-0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x) - F(x-1/n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x-1/n < x \leq x) = \\ = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi \in (x-1/n, x]\}\right) = P(\{\xi = x\})$$

tenglik o'rinli.

Bundan barcha $x \in R$ sonlar uchun $P\{\xi = x\} = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa va faqat shu holdagina $F_{\xi}(x)$ funksiyaning uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib $p_0 = P(\{\xi = x_0\}) = F(x_0) - F(x_0 - 0)$ tenglikdan $F(x)$ funksiyaning uzulish nuqtalarida $p_0 > 0$ tengsizlikning o'rinliliigi kelib chiqadi. Har qanday natural n soni uchun $F(x)$ funksiyaning $p_0 = P(\{\xi = x_0\}) \geq \frac{1}{n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi uzilish nuqtalarining soni n dan katta bo'lmagani sababli, taqsimot funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lishi kelib chiqadi.

$F_{\xi}(x) = F(x)$ taqsimot funksiyaning uzilish nuqtalarini $x_1, x_2, \dots$ orqali belgilaylik. Agar ξ —diskret tasodifiy miqdor bo'lsa $p_k = p_{x_k} = P(\{\xi = x_k\})$, $k = 1, 2, \dots$ ehtimollar

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \quad (7)$$

tenglikni qanoatlantiradi va aksincha. Agar p_k , $k = 1, 2, \dots$ ehtimollar (7) tenglikni qanoatlantirsa, u holda ξ tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor bo'ladi.

ξ —diskret tasodifiy miqdorning P_{ξ} taqsimoti eng ko'pi bilan sanoqli sondagi x_k nuqtalarda to'plangan bo'lib uni

$$P_{\xi}(B) = \sum_{\{k; x_k \in B\}} p(x_k)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin.

Endi amaliyotda eng ko'p uchraydigan diskret taqsimotli tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Binomial taqsimot. Agar diskret tasodifiy miqdor ξ uchun $x_k = k, k = 0, 1, \dots, n$ bo'lib

$$p_k = P(\{\xi = k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, 0 < p < 1$$

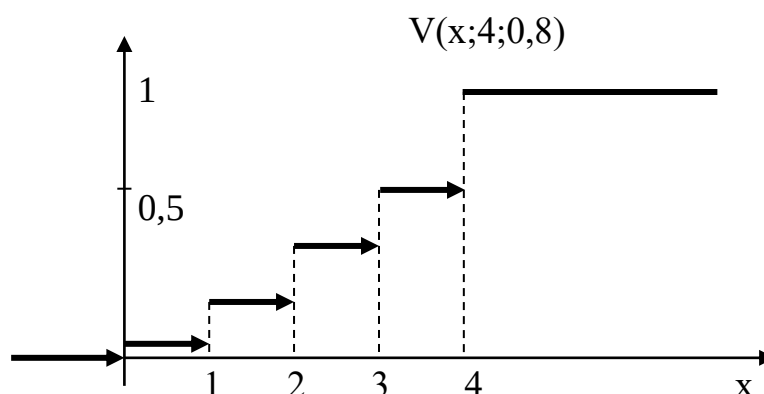
bo'lsa, u holda ξ tasodifiy miqdorga (n, p) parametrli binomial tasodifiy miqdor $P_n(k) = p_k$ ehtimollarga esa (n, p) parametrli binomial taqsimot deyiladi. (n, p) parametrli binomial tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$B(x, n, p) = \sum_{k \leq x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, x \in R$$

ko'rinishga ega. Binomial taqsimot n ta bog'liqsiz tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishlar soni μ_n ni A hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimolligi p bo'lgan holdagi taqsimotidan iborat.

7-Misol. Oraliq nazorat uchun o'tqazilayotgan yozma ishda student $n = 4$ ta masala oldi. Har bir masalani to'g'ri echish ehtimoli 0,8 bo'lsin. μ orqali to'g'ri echilgan masalalar sonini belgilaylik. Bu holda biz $(4; 0,8)$ parametrli binomial taqsimotga egamiz. Uning taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi quyidagi jadvalda va 3-shaklda keltirilgan

μ	0	1	2	3	4
P_μ	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096



3-shakl.

(n, p) parametrli binomial taqsimotni maksimallashtiruvchi k sonini, yani ro'y berishlar soni μ_n ning eng katta ehtimol bilan qabul qiluvchi qiymatini topamiz. Buning uchun quyidagi nisbatni ko'ramiz:

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

Agar $k < (n+1)p$ bo'lsa, $P_n(k) > P_n(k-1)$ yani, k o'sishi bilan $P_n(k)$ funksiya monoton o'sadi; agar $k > (n+1)p$ bo'lsa $P_n(k) < P_n(k-1)$ yani $P_n(k)$ ehtimollar monoton kamayadi. $m = [(n+1)p] - (n+1)p$ sonidan katta bo'lmagan eng katta butun son bo'lsin, u holda $k = m$ da $P_n(k)$ ehtimol eng katta qiymatga erishadi. Agar $(n+1)p$ butun son bo'lsa, $P_n(k)$ ehtimolni maksimallashtiradigan k ning qiymati ikkita: $k = (n+1)p$ va $k = (n+1)p - 1$.

Yuqorida 7-misolda $(n+1)p = 5 \cdot 0,8 = 4$ bo'lgani uchun $P_4(k)$ ni maksimallashtiruvchi k ning qiymati ikkita $k = 3$ va $k = 4$. Bunda $P_4(k) = 0,4096$. Shunday qilib student 3 ta yoki 4 ta masalani echish ehtimoli 0,8192 ga teng.

Puasson taqsimoti. Agar ξ -diskret tasodifiy miqdor $x_k: 0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni

$$p_k = \pi(k; \lambda) = P(\{\xi = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \lambda > 0$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, uni λ parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor yoki qisqacha Puasson tasodifiy miqdori deyiladi.

λ parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Pi(x; \lambda) = \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, x \in R$$

ko'rinishga ega.

Puasson taqsimoti bazan kam uchraydigan hodisalar qonuni degan nom bilan ham ataladi, chunki u har doim ko'p tajriba o'tqazilib, ularning har birida kuzatilayotgan hodisaning ehtimoli kichik bo'lgan hollarda uchraydi.

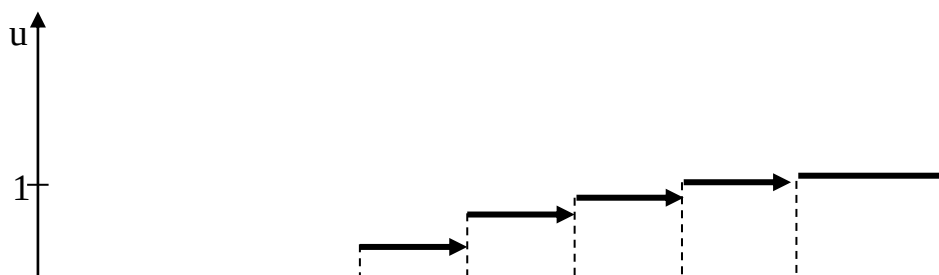
Geometrik taqsimot. Agar ξ tasodifiy miqdor $x_k: 0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni

$$\Gamma(k; p) = p_k = P(\{\xi = k\}) = p(1-p)^k; 0 < p < 1 \quad (8)$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, uni p parametrli geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

8-Misol. O'tqazilayotgan fizikoviy tajribada kutilayotgan natija chiqish ehtimoli 0,4 bo'lsin. ξ orqali kutilgan natija birinchi marta chiqquncha o'tkazilgan tajribalar sonini belgilaylik. U holda ξ tasodifiy miqdor 0,4 parametrli geometrik taqsimotga ega. Quyida uning (8) formula orqali hisoblangan taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi (4-shakl) keltirilgan:

ξ	0	1	2	3	...
P_ξ	0,4	0,24	0,144	0,0864	...



0,5

4-shakl.

ξ -geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin, u holda

$$P(\{\xi = n + m / \xi \geq n\}) = P(\{\xi = m\}), m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

tenglik o'rinli.

Darhaqiqat,

$$\begin{aligned} P(\{\xi = n + m / \xi \geq n\}) &= \frac{P(\{\xi = n + m, \xi \geq n\})}{P(\{\xi \geq n\})} = \frac{P(\{\xi = n + m\})}{P(\{\xi \geq n\})} = \\ &= \frac{p(1-p)^{n+m}}{\sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^k} = p(1-p)^m = P(\{\xi = m\}). \end{aligned}$$

(9) tenglikni yuqorida keltirilgan misolda sharhlaylik. 8-misolda ξ tasodifiy miqdorni natijani "kutish" vaqti deb sharhlash mumkin. Bu holda (9) tenglikni $(n-1)$ ta tajribada natija chiqmaganlik shartida, yana $m-1$ ta tajribadan so'ng birinchi marta natija chiqish ehtimoli m chi tajribada birinchi marta natija chiqish sharsiz ehtimoliga teng deb izohlash mumkin. Bu (9) tenglik bilan ifodalanadigan xossa **so'nggi tasirning yo'qligi** deb ataladi.

Kezi kelganda shuni qayd qilish lozimki barcha diskret taqsimotlar ichida, faqat geometrik taqsimotgina so'nggi tasirning yo'qlik xossasiga ega.

1.3-§.Uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Agar ξ tasodifiy miqdorning $F_{\xi}(x)$ taqsimot funksiyasi barcha $x \in R$ nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorga uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

4-Tarif. Agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F(x) = F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du \quad (10)$$

ko`rinishda ifodalash mumkin bo`lsa, bunday tasodifiy miqdorga **absolyut uzluksiz** tasodifiy miqdor deyiladi. Bu erdagi $p(x)$ funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** deyiladi.

(10) tenglikdan zichlik funksiyaning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0) \quad F'(x) = p(x);$$

$$2^0) \quad p(x) \geq 0;$$

$$3^0) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1;$$

$$4^0) \quad \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = P(\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}), x_1 \leq x_2.$$

Endi eng ko`p ishlatiladigan absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Tekis taqsimot. $[a, b]$ oralig`ida tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor (5-misolga qarang) absolyut uzluksiz tasodifiy miqdor bo`lib, uning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a; \text{ ёки } x > b \end{cases}$$

ko`rinishga ega.

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning $[a, b]$ oraliqning ichidagi (x_1, x_2) intervalga tushish ehtimoli, $F(x_2) - F(x_1) = \frac{(x_2 - x_1)}{(b - a)}$ ga teng bo`lib, u shu intervalning uzunligiga proporsional.

Eksponensial taqsimot.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega bo`lgan tasodifiy miqdorga  $\lambda$ ; ( $\lambda > 0$ ) –parametrli eksponensial qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu holda taqsimot funksiya

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \end{cases}$$

ko`rinishga ega ekanligini topish qiyin emas.

Turli elementlarning atomlarining emirilish vaqti eksponensial taqsimotga ega. Bunda $T = \frac{1}{\lambda}$ son emirilish vaqtining o`rta qiymati deyiladi.

Eksponensial taqsimotga ega bo`lgan  $\xi$  tasodifiy miqdor so`nggi tasirning yo`qlik xossasiga ega.  $\xi$  tasodifiy miqdorni atomning emirilish vaqti deb izohlab  $A = \{x_1 < \xi \leq x_1 + x_2\}$  hodisani ko`ramiz va bu hodisaning $B = \{\xi > x_1\}$ hodisa ro`y bergandagi shartli ehtimolini hisoblaymiz:

$$P(A) = P(\{x_1 < \xi \leq x_1 + x_2\}) = 1 - e^{-\lambda(x_1+x_2)} - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_1}(1 - e^{-\lambda x_2});$$

$$P(B) = P(\{\xi > x_1\}) = 1 - P(\{\xi \leq x_1\}) = e^{-\lambda x_1}$$

tengliklardan

$$P(A/B) = \frac{e^{-\lambda x_1}(1 - e^{-\lambda x_2})}{e^{-\lambda x_1}} = 1 - e^{-\lambda x_2}$$

munosabatning o'rinli ekanligi kelib chiqadi, yani atom x_1 vaqt yashagach uning yana x_2 vaqt ichida emirilish ehtimoli, xuddi shu atomni x_2 vaqt ichida emirilishining sharsiz ehtimoli bilan bir xil. Xuddi shu xususiyat so'nggi tasirning yo'qlik xossasidan iborat.

So'nggi tasirning yo'qligi eksponensial taqsimlangan tasodifiy miqdorning xarakterlovchi xossadan iborat. Boshqacha qilib aytganda, barcha absolyut uzluksiz taqsimotli tasodifiy miqdorlar ichida faqat eksponensial taqsimotli tasodifiy miqdorgina so'nggi tasir yo'qlik xossasiga ega (geometrik taqsimotga qaralsin).

Normal taqsimot. Taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

ko'rinishga ega bo'lgan tasodifiy miqdorga (a, σ^2) parametrli normal (yoki Gauss) qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$\varphi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko'rinishga ega.

$$\varphi_{a,\sigma}(x) > 0 \quad \text{va} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x) dx = 1$$

ekanligini ko'rsataylik:

$$\begin{aligned} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x) dx \right]^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x) \varphi_{a,\sigma}(y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)^2\right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\} du dv. \end{aligned}$$

Oxirgi integralda $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ deb o'zgaruvchi almashtirsak

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x) dx \right]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \exp\{-r^2/2\} dr d\theta = - \int_0^{\infty} d \exp\{-r^2/2\} = 1$$

kelib chiqadi.

Demak $\varphi_{a,\sigma}(x)$ zichlik funksiya $\Phi_{a,\sigma}(x)$ esa taqsimot funksiya ekan. Normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini turli a va σ parametrlarga bog'liq holdagi grafiklari 5-shaklda keltirilgan

5-shakl.

$\varphi_{a,\sigma}(x)$ zichlik funksiya $x=a$ nuqtada eng katta qiymatga erishadi va uning grafigi $x=a$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan. Bu funksiya uchun OX o'q gorizontal asimptota $x=a+\sigma$, $x=a-\sigma$ nuqtalar esa funksiyaning burilish nuqtalaridan iborat.

Xususan $a=0$, $\sigma=1$ bo'lganda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{0,1}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

ko'rinishiga ega bo'ladi va $\Phi(x)$ taqsimotga standart normal qonun deyiladi

$\Phi_{a,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ tenglik o'rinli bo'lgani uchun normal qonunning a va σ parametrlariga taqsimotning "siljish" va "masshtab" parametrlari deb qarash tabiiy.

Gamma taqsimot. Zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

dan iborat bo'lgan tasodifiy miqdor (α, λ) parametrli gamma qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi, bu erda

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Eyler gamma funksiyasi. Uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ko`rinishga ega.

Umumiy holda gamma taqsimot aniq ifodalanmasa ham, u bazi juda muhim xususiyatlarga ega. Masalan, agar $\alpha = k$ yani α butun qiymatlarni qabul qilsa, biz ommoviy xizmat ko`rsatish nazariyasida muhim rol o`ynaydigan Erlang taqsimotini hosil qilamiz. Agar $\alpha = k/2, \lambda = 1/2$ bo`lsa, gamma taqsimot  $\chi^2$  (xi- kvadrat) deb ataluvchi taqsimotga aylanadi,  $k$ , bu holda  $\chi^2$  taqsimotning ozodlik darajasi soni deyiladi. Nihoyat,  $\alpha = 1$  bo`lsa biz eksponensial taqsimotning xuddi o`ziga kelamiz.

Koshi taqsimoti. Zichlik funksiyasi

$$p_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}, x \in R, \sigma > 0$$

ko`rinishda bo`lgan tasodifiy miqdor (a, σ) parametrli Koshi qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.  $(0;1)$  parametrli Koshi qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (17-shakl)

$$K(x) = K(x;0,1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

ko`rinishga ega.  $K(x;a,\sigma) = K\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$  tenglik o`rinli bo`lgani uchun xuddi normal qonundagi kabi bu erda ham a va σ parametrlarga siljish va masshtab parametrlari deb qaraladi.

Singulyar taqsimot funksiyalar. Zichlik funksiyaga ega bo`lmagan uzluksiz tasodifiy miqdorlar ham mavjud. Bunday tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalariga singulyar taqsimot funksiyalari deyiladi. Singulyar taqsimot funksiya uzluksiz, barcha o`sinh nuqtalaridan tashkil topgan to`plamning Lebeg o`lchovi 0 ga teng, yani deyarli barcha nuqtalarda $F'(x) = 0$ bo`lib  $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$  tenglik o`rinli. Bunday funksiyaning misoli sifatida o`quvchiga analiz kursidan malum bo`lgan ushbu Kantor funksiyasini olishimiz mumkin: $F(x) = 0$, agar $x \leq 0$, $F(x) = 1$, agar $x \geq 1$. $F(x)$ funksiyaning $[0,1]$ oraliqdagi qiymatlarini aniqlash uchun, quyidagi amallarni bajaramiz. Avval bu oraliqni $1/3$ va $2/3$ nuqtalar bilan teng uch $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$ va $[2/3,1]$ bo`laklarga bo`lamiz. Ichki oraliqda $F(x) = 1/2$ deymiz. qolgan ikki oraliqning har birini yana teng uch bo`lakga bo`lib, harbir ichki oraliqlarda $F(x)$ funksiya mos ravishda $1/4$ va $3/4$ qiymatlarni qabul qiladi deymiz. har bir qolgan oraliqlar o`z navbatida yana uch bo`lakka bo`linib uning ichki bo`laklarida $F(x)$ funksiya uning aniqlangan qo`shni qiymatlarini o`rta arifmetigiga teng deb olamiz va hokazo.

$F(x)$ taqsimot funksiya o`zgarmas qiymatlar qabul qiluvchi ichki  $[1/3,2/3]$ ,  $[1/9,2/9]$ ,  $[7/9,8/9]$ , ... oraliqlarning uzunliklar yig`indisi

$$1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots = \frac{1}{3}(1 + 2/3 + 4/9 + \dots) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = 1.$$

Demak $F(x)$ funksiyani o`lish nuqtalarining Lebeg o`lchovi 0 ga teng.

Taqsimot funksiyalarning mumkin bo`lgan tiplari haqida boshqa to`xtalmay, haqiqatda taqsimot funksiyalar yuqorida keltirilgan uchta tip bilan tugallanishi haqidagi mulohaza bilan kifoyalanamiz. Aniqroq aytganda ixtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyani

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x)$$

ko`rinishida ifodalash mumkin, bu erda $c_i \geq 0, c_1 + c_2 + c_3 = 1$, $F_1(x)$ -diskret taqsimot funksiya, $F_2(x)$ -absolyut uzluksiz taqsimot funksiya, $F_3(x)$ esa singulyar taqsimot funksiya.

II bob. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar

2.1-§. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar

Kelgusida biz uchun tasodifiy miqdorlar bilan bir qatorda tasodifiy vektorlar yoki ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar tushunchasi ham juda zarur.

Faraz qilaylik $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollik fazosida aniqlangan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektorga **tasodifiy vektor** yoki **n -o'lchovli tasodifiy miqdor** deyiladi.

$a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. U holda

$$\{\omega; a_1 < \xi_1(\omega) \leq b_1, \dots, a_n < \xi_n(\omega) \leq b_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\omega; a_i < \xi_i(\omega) \leq b_i\} \in \mathcal{A} \quad (11)$$

munosabat o'rinli. $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ R^n dagi nuqtani Δ orqali esa $\Delta = \{x \in R^n; a_1 < x_1 \leq b_1, \dots, a_n < x_n \leq b_n\}$ - n o'lchovli yarim ochiq parallelepipedni belgilasak, u holda (11) munosabatni

$$\{\omega; (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in \Delta\} \in \mathcal{A} \quad (12)$$

shaklda ifodalash mumkin.

R dan olingan ixtiyoriy $\{B_k\}$ ketma-ketlik uchun o'rinli bo'lgan ushbu

$$\begin{aligned} \bigcap_k \{\omega; (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B_k\} &= \{\omega; (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in \bigcap_k B_k\} \\ \bigcup_k \{\omega; (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B_k\} &= \{\omega; (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in \bigcup_k B_k\} \end{aligned} \quad (13)$$

tengliklardan va (12) munosabatdan foydalanib (12) munosabatning Δ - R^n dan olingan ixtiyoriy Borel to'plami bo'lgan hol uchun ham o'rinli ekanligini isbotlash mumkin.

5-Tarif. (R^n, B_{R^n}) o'lchovli fazoda

$$P_\xi(B) = P\{\omega; \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in B_{R^n}$$

formula orqali aniqlangan P_ξ ehtimol o'lchoviga $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning ehtimollik taqsimoti deyiladi.

(12) munosabatdan har qanday $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ uchun $\{\omega; \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{A}$ hodisadan iborat ekanligi kelib chiqadi. Demak uning ehtimoli haqida so'z yuritishimiz manoga ega.

6-Tarif. R^n da aniqlangan ushbu

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\{\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n\})$$

n o'lchovli funksiya $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi.

Ko'p o'lchovli taqsimot funksiyani biz bazan qulaylik uchun $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ indekslarni tushirib qoldirib $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ shaklida yozamiz.

Δ_{a_k, b_k} orqali $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning k argumenti bo'yicha $(a_k, b_k]$ yarim intervalda olingan ushbu

$$\Delta_{a_k, b_k} F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

funksiya orttirmasini belgilaylik. Agar $(a, b] = \{x \in R^n; a_1 < x_1 \leq b_1, \dots, a_n < x_n \leq b_n\}$ orqali R^n dagi yarim ochiq parallelepipedni belgilasak, u holda

$$P_{\xi}((a, b]) = \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} \dots \Delta_{a_n, b_n} \quad (14)$$

tenglik o`rinli.

(14) formulaning isbotini a_k, b_k argumentlar bo`yicha birin-ketin o`tzazish mumkin:

$$\begin{aligned} P(\{a_1 < \xi_1 \leq b_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n\}) &= P(\{\xi_1 \leq b_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n\}) - \\ &\quad - P(\{\xi_1 \leq a_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n\}) = \Delta_{a_1, b_1} F(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ P(\{a_1 < \xi_1 \leq b_1, a_2 < \xi_2 \leq b_2, \xi_3 \leq x_3, \dots, \xi_n \leq x_n\}) &= P(\{a_1 < \xi_1 \leq b_1, \xi_2 \leq b_2, \dots, \xi_n \leq x_n\}) - \\ &\quad - P(\{a_1 < \xi_1 \leq b_1, \xi_2 \leq a_2, \xi_3 \leq x_3, \dots, \xi_n \leq x_n\}) = \Delta_{a_2, b_2} P(\{a_1 < \xi_1 \leq b_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n\}) = \\ &= \Delta_{a_2, b_2} (\Delta_{a_1, b_1} F(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

va hokazo.

2.2-§. Ko`p o`lchovli taqsimot funksiyalarning xossalari

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo`lsin. Ko`p o`lchovli $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ taqsimot funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

F1⁰. Monotonlik xossasi: $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya har qaysi argumenti bo`yicha kamayuvchi emas va o`ngdan uzluksiz.

$$\begin{aligned} F2^0. \lim_{x_k \rightarrow \infty} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= F(x_1, \dots, x_{k-1}, \infty, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\ &= F_{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n); k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

$$F3^0. \lim_{x_k \rightarrow \infty} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; k = 1, 2, \dots, n.$$

$$F4^0. \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} \dots \Delta_{a_n, b_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

F1⁰, F2⁰, F3⁰ xossalar bir o`lchovli taqsimot funksiyalarning mos xossalari kabi isbotlanadi, F4⁰ xossaning isboti esa (14) formuladan kelib chiqadi.

F2⁰ va F3⁰ ko`p o`lchovli taqsimot funksiyaning **uyg'unlik xossalari** deb ataladi.

F1⁰-F4⁰ xossalarga ega bo`lgan ixtiyoriy  $n$  o`lchovli $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya birorta $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasidan iborat.

Bir o`lchovli taqsimot funksiyalar uchun F4<sup>0</sup> xossa F1<sup>0</sup> xossadan kelib chiqadi, ammo  $n$  o`lchovli taqsimot funksiyalar uchun F4⁰ xossa mustaqil bo`lib u birinchi uchta xossadan kelib chiqmaydi.

9-Misol. Ushbu

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x_1 + x_2 < 1; \\ 1, & \text{agar } x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

ikki o'lchovli funktsiyani ko'raylik. Bu funktsiya uchun F_1^0 - F_3^0 xossalar o'rinli ekanligi osongina tekshiriladi. Ammo

$$\Delta_{0,1}\Delta_{0,1}F(0,0) = \Delta_{0,1}[F(1,0) - F(0,0)] = F(1,1) - F(0,1) - F(1,0) + F(0,0) = -1$$

tenglikdan $F(x_1, x_2)$ funktsiyaning F_4^0 xossaga ega emasligi kelib chiqadi.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar qism to'plamini barcha tasodifiy miqdorlarning $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ taqsimot funktsiyasi orqali F_2^0 xossa yordamida keltirib chiqariladigan birgalikdagi taqsimot funktsiyasiga **marginal** (xususiy) taqsimot funktsiya deyiladi.

Masalan $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ taqsimot funktsiya malum bo'lsa, har qaysi ξ_k tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini

$$F_{\xi_k}(x) = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(+\infty, \dots, +\infty, x + \infty, \dots, +\infty)$$

tenglik orqali aniqlashimiz mumkin.

7-Tarif. Agar R^n fazoning chekli yoki sanoqli $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}); k = 1, 2, \dots$ nuqtalari uchun

$$P(\{\xi_1 = x_1^{(k)}, \xi_2 = x_2^{(k)}, \dots, \xi_n = x_n^{(k)}\}) = p_{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}} = p_{x^{(k)}}$$

$$\sum_k p_{x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}} = \sum_k p_{x^{(k)}} = 1$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorga n o'lchovli diskret tasodifiy vektor deyiladi. Diskret tasodifiy vektorning taqsimot qonuni, R fazodagi kabi

$$P_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(B) = \sum_{\{k; x^{(k)} \in B\}} p_{x^{(k)}}, B \in \mathcal{B}(R^n), \quad x^{(k)} \in R^n$$

formula orqali beriladi.

Polinomial taqsimot. Agar ξ m -o'lchovli diskret tasodifiy vektor uchun $x_k = k = (k_1, k_2, \dots, k_m), k_i \in Z, k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ bo'lib

$$p_k = P(\{\xi = k\}) = P(\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} \quad (15)$$

$p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ bo'lsa, u holda ξ vektor $(n; p_1, p_2, \dots, p_m) = (n; p)$ parametrli polinomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy vektor va $\phi(k; n, p_1, p_2, \dots, p_m) = p_k$ ehtimollarga esa $(n; p_1, p_2, \dots, p_m)$ parametrli polinomial taqsimot deyiladi. (15) tenglikning o'ng tomoni $(p_1 + p_2 + \dots + p_m)^n$ polinomning $p_1, p_2, \dots, p_m$ sonlarning darajalari bo'yicha yoyilmasini umumiy holdan iborat bo'lgani sababli, yuqoridagi taqsimotni polinomial taqsimot deb atalishi tabiiy.

Agar $m=2, p_1=p, p_2=1-p$ bo'lsa polinomial taqsimot (n, p) -parametrli binomial taqsimotga aylanadi.

10-Misol. Ikkita shahmatchilar orasida shahmat turniri o'tqazilayotgan bo'lsin. Birinchi o'yinchi harbir o'yinni, avvalgi o'yin qanday yakunlanganidan qat'iy nazar, p ehtimol bilan yutib, q ehtimol bilan yutqizadi va $1-p-q$ ehtimol bilan o'yin durang bo'ladi deylik. U holda n ta o'yindan so'ng birinchi shahmatchi o'yinni k marta yutib, l marta yutqizish ehtimoli ($k+l \leq n$) ushbu

$$p(n; k, l) = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!} p^k q^l (1-p-q)^{n-k-l}$$

songa teng.

8-Tarif. Agar ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ uchun

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \quad (16)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya mavjud bo'lsa, u holda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorga n o'lchovli absolyut uzluksiz tasodifiy vektor, $p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaga esa uning zichlik funksiyasi deyiladi.

(16) munosabatdan zichlik funksiyaning ushbu xossalari kelib chiqadi:

1⁰). Deyarli barcha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ nuqtalarda

$$p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

tenglik o'rinli.

$$2^0). \quad p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0.$$

$$3^0). \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

$$4^0). \quad p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ zichlik funksiyaning uzluksiz nuqtalarida}$$

$$P(\{x_i < \xi_i < x_i + \Delta x_i, i=1, 2, \dots, n\}) = p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n + o(\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n);$$

$\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ munosabat o'rinli.

Ko'p o'lchovli normal taqsimot. $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ - n o'lchovli vektor va $R = \|r_{ij}\|$ birorta $n \times n$ o'lchovli, musbat aniqlangan, simmetrik matrisa bo'lsin. R musbat aniqlangan matrisa bo'lgani uchun, uning teskari matrisasi $R^{-1} = A = \|a_{ij}\|$ mavjud.

Zichlik funksiyasi

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \right\}$$

ko'rinishga ega bo'lgan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - n o'lchovli tasodifiy vektor $(m; R)$ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy vektor deyiladi. Bu erda $|A| = \det A$ orqali A matrisaning determinanti belgilangan.

R matrisaga $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektorning **kovariasion matrisasi** $\bar{m}$ vektorga esa, uning **o'rta qiymat vektori** deyiladi.

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - n o'lchovli $(\bar{m}, R)$ parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy vektor bo'lsin. U holda $(n-1)$ o'lchovli $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ vektor ham, o'rta qiymat vektori $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$ va kovariasion matrisasi R matrisani oxirgi satr va ustunini o'chirgandan hosil bo'ladigan R' matrisaga teng bo'lgan normal taqsimotga ega. Buni

$$\varphi_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

tenglikdan (bu tenglik taqsimot funksiyaning F2 xossasidan kelib chiqadi) keltirib chiqarish mumkin.

11-misol. O'rta qiymat matrisasi (m_1, m_2) , kovariasion matrisa esa

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (\sigma_1, \sigma_2 > 0; \quad -1 < r < 1)$$

bo'lgan normal qonun bo'yicha taqsimlangan ikki o'lchovli tasodifiy vektor bo'lsin. U holda

$$|R| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-r^2)$$

$$F = R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} & \frac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ \frac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-r^2)}$$

tengliklardan $\varphi_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$ zichlik funksiya

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

ko'rinishga ega ekanligi kelib chiqadi.

2.3-§. Tasodifiy miqdorlar bog'liqsizligi

Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizlik tushunchasi ehtimollar nazariyasidagi eng muhim tushunchalardan biri bo'lib, u hodisalarning bog'liqsizligini tasodifiy miqdorlarga ko'chirishdan iborat.

9-tarif. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Agar ixtiyoriy $B_k \in \mathcal{B}_R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) Borel to'plamlari uchun

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \dots P(\xi_n \in B_n) \quad (17)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \dots, \xi_n$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Agar ixtiyoriy n uchun $\xi_1, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqsiz deyiladi.

(17) tenglikdan $B_k = (-\infty, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ bo'lgan xususiy holda

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n) \quad (18)$$

tenglikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan (18) munosabatdan (14) tenglikka ko'ra ixtiyoriy $a_k \leq b_k$ sonlar uchun

$$P(\{a_1 < \xi_1 \leq b_1, a_2 < \xi_2 \leq b_2, \dots, a_n < \xi_n \leq b_n\}) = \prod_{k=1}^n P(\{a_k < \xi_k \leq b_k\})$$

ekanligi, yani (17) tenglikning $B_k = (a_k, b_k]$ yarim intervallar uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Ehtimollarning barcha yarim intervallardagi qiymatlari, uning Borel to'plamlaridagi qiymatlarini yagona usul bilan aniqlagani uchun oxirgi tenglikdan (17) munosabatning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib (18) tenglikni $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi uchun tarif sifatida qabul qilish mumkin.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda

$$F_{\xi_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} p_{\xi_i}(x) dx; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tenglikdan (18) ga ko'ra

$$\begin{aligned} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_2}(x) dx \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_n}(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(u_1) p_{\xi_2}(u_2) \dots p_{\xi_n}(u_n) du_1 du_2 \dots du_n. \end{aligned}$$

Aksincha,

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(u_1) p_{\xi_2}(u_2) \dots p_{\xi_n}(u_n) du_1 du_2 \dots du_n$$

munosabatdan (18) tenglikka kelimiz.

Shunday qilib $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n -$ absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - n$ o'lchovli tasodifiy vektor absolyut uzluksiz bo'lib

$$P_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)\dots p_{\xi_n}(x_n)$$

tenglikning o'rinli ekanligi zarur va etarli.

Diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun

$$P(\{\xi_1 = x_1^{(k)}, \xi_2 = x_2^{(k)}, \dots, \xi_n = x_n^{(k)}\}) = P(\{\xi_1 = x_1^{(k)}\})P(\{\xi_2 = x_2^{(k)}\}) \dots P(\{\xi_n = x_n^{(k)}\})$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va etarli ekanligini tekshirish qiyinchilik tug'dirmaydi.

Tasodifiy miqdorlar yoki tasodifiy hodisalarning bog'liqsizligini formal tarifi, sababli bog'liq bo'lmagan hodisalarga mansublik manosiidagi real bog'liqsizlik tushunchasiga nisbatan ancha keng. Shu, sababli bog'liqlilik yo'q deyishga hechqanday asosimiz bo'lmagan hollarda ham "matematik" bog'liqsizlik o'rinli bo'lishi mumkin ekanligi kelib chiqishi mumkin.

12-Misol. $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ -ikki o'ldchovli diskret tasodifiy miqdor bo'lib

$$P(\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\}) = P(\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\}) = P(\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -1\}) = P(\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -1\}) = 1/4$$

bo'lsin. U holda

$$P(\{\xi_1 = \varepsilon_1, \xi_1 \xi_2 = \varepsilon_2\}) = P(\{\xi_1 = \varepsilon_1, \xi_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1\}) = 1/4 = P(\{\xi_1 = \varepsilon_1\})P(\{\xi_1 \xi_2 = \varepsilon_2\}), \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1,$$

tenglikdan ξ_1 va $\xi_1 \xi_2$, garchan ular tuzilishiga ko'ra sababli bog'liqli bo'lsalar ham, bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ekanligi kelib chiqadi.

2.4-§. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

$g(x)$ - R da aniqlangan funksiya bo'lsin. $g^{-1}(B)$ orqali $B \subset R$ to'plamning proobrazini belgilaylik, yani $g^{-1}(B) = \{x \in R; g(x) \in B\}$.

10-Tarif. Agar ixtiyoriy Borel to'plami $B \in \mathfrak{R}$ uchun $g^{-1}(x)$ proobraz ham Borel to'plamidan iborat bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya Borel funksiyasi deyiladi.

R da aniqlangan uzluksiz va bo'lakli uzluksiz funksiyalar Borel funksiyalariga misol bo'ladi.

2-Teorema. $g(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ Borel funksiyalaridan iborat bo'lib, ξ , ξ_1 va ξ_2 lar $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda ushbu takidlar o'rinli.

1. $\eta = g(\xi)$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor.

2. Agar ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\eta_1 = g_1(\xi_1)$ va $\eta_2 = g_2(\xi_2)$ tasodifiy miqdorlar ham bog'liqsiz bo'ladi.

Isboti. 1. $\eta = \eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ ni murakkab funksiya deb qaraymiz. $B \in \mathfrak{R}$ bo'lsin. $g(x)$ Borel funksiyasi bo'lgani uchun $g^{-1}(B) = B_1 \in \mathfrak{R}$ munosabat o'rinli. $\xi - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lgani uchun $\xi^{-1}(B_1) \in \mathcal{A}$, demak $\eta^{-1}(B) = \xi^{-1}(B_1) \in \mathcal{A}$, yani $\eta - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor.

2. $B_1, B_2 \in \mathfrak{R}$ ixtiyoriy Borel to'plamlari bo'lsin. U holda

$$P(\{\eta_1 \in B_1, \eta_2 \in B_2\}) = P(\{g_1(\xi_1) \in B_1, g_2(\xi_2) \in B_2\}) = P(\{\xi_1 \in g_1^{-1}(B_1), \xi_2 \in g_2^{-1}(B_2)\})$$

tenglik o'rinli. Bundan, $g_1^{-1}(B_1)$ va $g_2^{-1}(B_2)$ Borel to'plamlari bo'lganligi va ξ_1, ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ekanligini hisobga olsak

$$\begin{aligned} P(\{\eta_1 \in B_1, \eta_2 \in B_2\}) &= P(\{\xi_1 \in g_1^{-1}(B_1)\})P(\{\xi_2 \in g_2^{-1}(B_2)\}) = \\ &= P(\{g_1(\xi_1) \in B_1\})P(\{g_2(\xi_2) \in B_2\}) = P(\{\eta_1 \in B_1\})P(\{\eta_2 \in B_2\}) \end{aligned}$$

munosabat kelib chiqadi. Demak η_1 va η_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz. Teorema isbot bo'ldi.

13-Misol. Agar $g(x)$ funksiya monoton o'suvchi funksiya bo'lib $g^{-1}(x)$ uning teskari funksiyasi bo'lsa, u holda

$$F_\eta(x) = F_{g(\xi)}(x) = P(\{g(\xi) \leq x\}) = P(\{\xi \leq g^{-1}(x)\}) = F_\xi(g^{-1}(x)) \quad (19)$$

Bu tenglikdan, agar $F_\xi(x)$ uzluksiz taqsimot funksiya bo'lsa, u holda $g(x) = F_\xi(x)$ deb olib $\eta = F_\xi(\xi)$ $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor ekanligini keltirib chiqaramiz. Aksincha, η - $[0,1]$ da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsa, $\xi = F^{-1}(x)$ tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyaga ega. Shunday qilib biz, tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor yordamida oldindan berilgan taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni qurish imkoniga egamiz.

$$g(x) = bx + a, b > 0 \text{ bo'lsa } (19) \text{ tenglikdan } F_{b\xi+a}(x) = F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right) \text{ munosabatni hosil}$$

qilamiz. Bu munosabatdan biz normal va Koshi taqsimot funksiyalarini ko'rganda foydalangan edik.

Agar $g(x)$ funksiya qat'iy o'suvchi funksiya bo'lib differensiallanuvchi bo'lsa va $p(x)$ ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'lsa, u holda $\eta = g(x)$ tasodifiy miqdor ham absolyut uzluksiz bo'lib

$$p_\eta(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} p_\xi(g^{-1}(x))$$

munosabat o'rinli. Bu oxirgi tenglik (19) tenglikning har ikki tomonidan hosila olib topiladi.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar va $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ - Borel σ -algebrasiga nisbatan o'lchovli funksiya bo'lsin, yani ihtiyoriy Borel to'plami $B \in \mathfrak{R}$ uchun $g^{-1}(B) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n; g(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B\}$ proobraz R^n dagi Borel to'plamidan iborat (10- tarifga qaralsin). U holda Ω da aniqlangan $\eta = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi.

Haqiqatan ham, ihtiyoriy $B \in \mathfrak{R}_n$ uchun $g^{-1}(B) \in \mathfrak{R}$ munosabatdan

$$\{\omega; \eta(\omega) \in B\} = \{\omega; g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B\} = \{\omega; (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in g^{-1}(B)\} \in \mathcal{A},$$

kelib chiqadi.

Kompozisiya formulalari. Agar $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ absolyut uzluksiz taqsimotga ega bo'lsa, u holda $\eta = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F_{\eta}(x) = P(\{g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq x\}) = \int \dots \int_{g(x_1, \dots, x_n) \leq x} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (20)$$

formula orqali topish mumkin.

ξ_1, ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar va $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ bo'lgan muhim xususiy holni ko'ramiz. $p_{\xi_1}(x), p_{\xi_2}(x)$ mos zichlik funksiyalar bo'lsin. U holda ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz bo'lgani uchun

$$p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2)$$

tenglik o'rinli. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ yig'indining taqsimot funksiyasini (20) formula orqali topamiz:

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = P(\{\xi_1 + \xi_2 \leq x\}) = \iint_{x_1 + x_2 \leq x} p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{x_1 + x_2 \leq x} p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{x-x_1} p_{\xi_2}(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-x_1) p_{\xi_1}(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x_1) \int_{-\infty}^x p_{\xi_2}(x_2 - x_1) dx_2 dx_1.$$

$$\text{Ushbu } F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-x_1) p_{\xi_1}(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-x_1) dF_{\xi_1}(x_1) \text{ va}$$

$$p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x-x_1) dx_1$$

formulalarga **kompozision** yoki **yig'ish** formulalari deyiladi va mos ravishda $F_{\xi_1 + \xi_2} = F_{\xi_1} * F_{\xi_2}$ va $p_{\xi_1 + \xi_2} = p_{\xi_1} * p_{\xi_2}$ kabi belgilanadi.

14-Misol. ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bolib mos ravishda (a_1, σ_1) va (a_2, σ_2) parametrli normal taqsimotga ega bo'lsin. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz.

Echish. Kompozision formuladan foydalanamiz:

$$p_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(u) p_{\xi_2}(x-u) du = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-u-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} du$$

munosabatdan

$$\frac{(u-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-u-a_2)^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left(u - \frac{a_1 \sigma_2^2 + (x-a_2) \sigma_1^2}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2 + \frac{(x-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

tenglikka asosan topamiz

$$p_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2(u-A)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} du, \quad (21)$$

bu erda $a = a_1 + a_2, \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ va $A = \frac{a_1\sigma_2^2 + (x - a_2)\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$.

$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma_1\sigma_2}} \exp\left\{-\frac{\sigma^2(u-A)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right\}$ funksiya ixtiyoriy fiksirlangan x uchun $(A, \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma})$ parametrli normal zichlik funksiya bo'lgani uchun undan $(-\infty, +\infty)$ oralig'ida olingan integral birga teng va, (21) tenglikdan

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, bog'liqsiz normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning yig'indisi yana normal taqsimotga ega.

2.5-§. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar

1. Matematik kutilmasi

Xar bir tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funksiyasi orqali to'la aniqlanishini biz avvalgi bobda ko'rgan edik. Kuzatuvchi nuqtai nazaridan, birxil taqsimot funksiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni, garchan ular turli ehtimollar fazosida aniqlangan bolib, turli hodisalarni tasvirlasalar ham bir-biridan ajratib bo'lmaydi. Ammo taqsimot funksiyalar turlicha bo'lgan tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lib ularni taqqoslash talab qilinsa. malum qiyinchiliklar paydo bo'ladi. Bazi hollarda bunday qiyinchiliklar osongina echiladi. Masalan, agar Bernulli sxemasida bizni yutuqlar soni qiziqtirayotgan bo'lsa, u holda ikkita Bernulli sxemasidan qaysi birida yutuqning ehtimoli katta bo'lsa, xuddi shunisini tanlash kerak ekanligi tabiiy. Umumiy holda esa ikkita taqsimot funksiyani qanday taqqoslash tushunarli emas, va shuning uchun ham harbir tasodifiy miqdorni biror son (balki bir qancha sonlar) bilan xarakterlash maqsadga muvofiq bo'lib, ular tasodifiy miqdorlarni malum manoda tartiblashga sabab bo'lar edi. Tasodifiy miqdorlarning bunday xarakteristikalaridan biri uning **o'rta qiymati** yoki **matematik kutilmasidir**.

Ushbu bobda biz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini o'rganamiz.

2. Diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi

ξ -tasodifiy miqdor chekli sondagi $a_1, a_2, \dots, a_r$ qiymatlarni $p_k = P(\xi_k = a_k)$ ehtimollar bilan qabul qilsin. ξ tasodifiy miqdorni n marta o'tqazilgan tajribada kuzataylik va uning bu tajribalarda qabul qilgan qiymatlarini $x_1, x_2, \dots, x_n$ orqali belgilaylik. U holda bu kuzatilgan qiymatlarning o'rta qiymatini ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{i=1}^r a_i \frac{k_i}{n} = \sum_{i=1}^r a_i N_n(\{\xi = a_i\}), \quad (1)$$

bu erda k_i va $N_n(A)$ orqali mos ravishda biz o'tkazgan tajribalar seriyasidagi $A = \{\xi = a_i\}$ hodisaning ro'y berishlar soni va chastotasi belgilangan. (1) formulada chastotalarni ehtimollar bilan almashtirib, biz ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (yoki o'rta qiymati) deb ataluvchi ushbu

$$\sum_{i=1}^r a_i p_i = M\xi$$

qiymatni hosil qilamiz. Ihtiyoriy diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ham yuqoridagi kabi aniqlanadi.

1-Tarif. $\{x_k\}$ qiymatlarni p_k ehtimollar bilan qabul qiluvchi ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb

$$M\xi = \sum_k x_k p_k \quad (2)$$

yig'indiga aytiladi. Shu bilan birga, agar ξ tasodifiy miqdor sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, u holda (2) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi zarur, aks holda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emas deb hisoblanadi.

1-Mulohaza. Diskret tasodifiy miqdorni tariflashda u qabul qiluvchi qiymatlarining tartibi biz uchun ahamiyatga ega emas, shuning uchun ham (2) qatorning yig'indisi qo'shiluvchilarning tartibiga bog'liq emas, bu esa qator absolyut yaqinlashgandagina o'rinli.

Agar $\xi \geq 0$ bo'lsa, u holda (2) tenglikning o'ng tomonidagi qator yoki absolyut yaqinlashadi yoki $+\infty$ ga uzoqlashadi. Oxirgi holda $M\xi = +\infty$ deb hisoblanadi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblashga doir bir qancha misollar ko'ramiz.

1-Misol. ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni birxil $p_i = P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}$ ehtimollar bilan qabul qilsin. U holda

$$M\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

bo'lib, matematik kutilma $x_1, x_2, \dots, x_n$, sonlarning o'rta (arifmetik) qiymatiga teng.

2-Misol. (n, p) parametrlri binomial taqsimotga ega bo'lgan μ_n tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$\begin{aligned} M\mu_n &= \sum_{i=0}^n iP_n(i) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j (1-p)^{n-1-j} = \end{aligned}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = np.$$

3-Misol. ξ -parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. U holda

$$M_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Demak Puasson taqsimotining matematik kutilmasi uning parametri λ ga teng.

4-Misol. p -parametrli geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ushbu

$$M_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} k p q^k = p q \sum_{k=0}^{\infty} k q^{k-1} = p q \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)_q = p q \left(\frac{1}{1-q} \right)_q = \frac{p q}{(1-q)^2} = \frac{p q}{p^2} = \frac{q}{p}; \quad (q = 1 - p)$$

$$M_{\xi} = \frac{1-p}{p} \quad \text{ko'rinishga ega.}$$

5-Misol. Musbat butun sonli ξ -tasodifiy miqdor uchun

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)} \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ bo'lsin. U holda}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$$

va, demak $M_{\xi} = +\infty$.

6-Misol. ξ -tasodifiy miqdor $x_k = (-1)^k k$ qiymatlarni $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$ ehtimollar bilan qabul qilsin, $k = 1, 2, \dots$. U holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k k| \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$$

bo'lgani uchun ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emas.

3. Diskret tasodifiy miqdor matematik kutilmasining asosiy xossalari

$\xi = \xi(\omega)$ - $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. Agar Ω fazoni chekli yoki sanoqli $\Omega = \sum_i A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ yig'indi shaklida ifodalash mumkin bo'lib, har bir $A_i \in \mathcal{A}$ hodisada $\xi(\omega)$ o'zgarmas qiymat qabul qilsa: $(\xi(\omega) = x_i, \omega \in A_i)$, u holda ξ sodda tasodifiy miqdor deyiladi.

Tushunarliki, sodda tasodifiy miqdor

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_i x_i I_{A_i}(\omega) \quad (3)$$

ko'rinishda ifodalanadi.

Ihtiyoriy diskret tasodifiy miqdor sodda tasodifiy miqdor va aksincha, harqanday sodda tasodifiy miqdor diskret ekanligini ko`rish qiyin emas.

Darhaqiqat, agar diskret tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots$ qiymatlarni kabul qilsa, uni (3) yig`indi shaklida yozish mumkin, bunda $A_i = \{\omega; \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}$. 1-tarifdan sodda tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi = \sum_i x_i P(A_i) \quad (4)$$

yig`indiga teng ekanligi kelib chiqadi.

Sodda tasodifiy miqdor matematik kutilmasining yuqorida (4) formula orqali keltirilgan tarifi manoli bo`lishi uchun uni to`g`ri ekanligiga, yani  $M\xi$ ,  $\xi$  tasodifiy miqdorning faqat o`ziga bog`liq bo`lib, uning (3) ko`rinishida ifodalanishiga bog`liq emasligiga ishonch hosil qilishimiz zarur. $\xi = \xi(\omega)$ sodda tasodifiy miqdor (3) ifodadan tashqari yana boshqa

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_j y_j I_{B_j}(\omega)$$

ko`rinishga ega bo`lsin, bu erda $\sum_j B_j = \Omega$ va $B_j B_k = 0, j \neq k$.

$C_{ij} = A_i \cap B_j$ deymiz va C_{ij} to`plamda  $\xi(\omega)$  miqdorning  $z_{ij}$  qiymati bir vaqtning o`zida ham x_i ga, ham y_j ga teng va har qanday i uchun $A_i = \sum_k A_i B_k$ va har bir j uchun $B_j = \sum_i A_i B_j$ bo`lgani sababli

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij}) \right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij}) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j), \end{aligned}$$

munosabat o`rinli, chunki absolyut yaqinlashuvchi qatorning hadlarini ihtiyoriy tartibda yig`ish mumkin.

Endi diskret tasodifiy miqdorlar matematik kutilmasining asosiy xossalarini keltiramiz.

1-Teorema. 1°. Agar ξ va η - diskret tasodifiy miqdorlar bo`lib,  $M\xi, M\eta$  matematik kutilmalar mavjud bo`lsa, u holda ihtiyoriy a va b haqiqiy sonlar uchun $a\xi + b\eta$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud bo`lib

$$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$$

tenglik o`rinli.

2°. Agar $\xi \geq 0$ bo`lsa  $M\xi \geq 0$ . Agar  $M\xi$  va  $M\eta$  matematik kutilmalar mavjud bo`lib $\xi \geq \eta$ bo`lsa, u holda  $M\xi \geq M\eta$  bo`ladi.

3°. Agar $|\xi| \leq \eta$ bo`lib  $M\eta$  chekli bo`lsa, $M\xi$ ham chekli bo`ladi. Agar  $M\xi$  va  $M\eta$  matematik kutilmalar chekli bo`lsa, u holda $M(\xi + \eta)$ xam chekli.

Isbot. 1°. $\xi(\omega)$ va $\eta(\omega)$ tasodifiy miqdorlar $A_1, A_2, \dots$ va $B_1, B_2, \dots$ to'plamlar indikatorlarining chiziqli kombinasiyalaridan iborat bo'lsin, yani

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \eta(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j I_{B_j}(\omega).$$

$C_{ij} = A_i B_j$ deb belgilaymiz $\bigcup_{i,j} A_i B_j = \Omega$ va $\omega \in C_{ij}$ uchun $a\xi(\omega) + b\eta(\omega) = ax_i + by_j$ tenglik o'rinli. Bundan matematik kutilmaning tarifiga ko'ra topamiz:

$$\begin{aligned} M(a\xi + b\eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (ax_i + by_j) P(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (ax_i + by_j) P(A_i B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} ax_i \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) + \sum_{j=1}^{\infty} by_j \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) = a \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) + \\ &+ b \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j) = aM\xi + bM\eta. \end{aligned}$$

2°. Agar $\xi \geq 0$ bo'lsa (3) munosabatdan $x_i \geq 0$ bo'lgani sababli $M\xi \geq 0$. Agar $\xi \geq \eta$ bo'lsa, u holda $\xi = \eta + (\xi - \eta)$ tenglikdan 1° xossaga ko'ra $M\xi = M\eta + M(\xi - \eta)$ bo'lgani sababli $M\xi \geq M\eta$ kelib chiqadi, chunki $\xi \geq \eta$ tengsizlikdan $M(\xi - \eta) \geq 0$.

3°. $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \eta = \sum_{j=1}^{\infty} y_j I_{B_j}(\omega)$ va $|\xi| \leq \eta$ bo'lsin. U holda $\omega \in A_i B_j$ munosabatdan ixtiyoriy i, j uchun $|x_i| \leq y_j$ ekanligi kelib chiqadi. Shu bilan birga

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) = P(B_j) \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) = P(A_i)$$

tengliklar o'rinli. Bundan foydalanib, absolyut yaqinlashuvchi qatorning hadlarini ixtiyoriy tartibda yig'ish mumkin ekanligini hisobga olib, topamiz:

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j) = M\eta < \infty. \end{aligned}$$

5. Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi (umumiy hol)

2-Teorema. Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ - diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashsa, u holda $M\xi_n$ matematik kutilmalar ketma-ketligi Koshi manosida fundamental bo'ladi.

Isboti. ξ - diskret tasodifiy miqdor uchun

$$|M\xi| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i) \leq \sup_i |x_i| \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sup_i |x_i| = \sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)| \quad (5)$$

munosabat o`rinli. Bundan foydalanib, topamiz

$$|M\xi_n - M\xi_m| = |M(\xi_n - \xi_m)| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Demak $\{M\xi_n\}$ ketma-ketlik fundamental ekan. Teorema isbotlandi.

3-Tarif. $\xi = \xi(\omega) - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor, $\xi_n(\omega)$ esa $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashuvchi diskret tasodifiy miqdorlarning ixtiyoriy ketma-ketligi bo`lsin. U holda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb ushbu

$$M\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n$$

qiymatga aytiladi.

2-Mulohaza. Etarlicha katta n sonidan boshlab $M\xi_n$ matematik kutilmalar birvaqtda yoki mavjud, yoki mavjud emasligi ravshan. Oxirgi holda $M\xi$ mavjud emas deyiladi.

ξ tasodifiy miqdorning yuqorida keltirilgan tarifi manoli ekanligini ko`rsatamiz.

Birinchidan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdor uchun unga tekis yaqinlashuvchi diskret tasodifiy miqdorlarning ketma-ketligi mavjud.

Darhaqiqat, harqanday natural n va butun k sonlar uchun

$$A_k^{(n)} = \left\{ \omega; \frac{k}{n} \leq \xi(\omega) < \frac{k+1}{n} \right\} = \left\{ \frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n} \right\} = \xi^{-1} \left\{ \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right\} \in F \quad \text{va} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(n)} = \Omega$$

munosabatlar o`rinli.

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} I_{A_k^{(n)}}(\omega) \quad (6)$$

deb belgilaymiz. U holda $|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \frac{1}{n}$.

Ikkinchidan, agar $\xi_n(\omega)$ va $\eta_n(\omega)$ diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M\eta_n$$

tenglik o`rinli, yani  $M\xi$ ,  $\xi$  tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashuvchi  $\xi_n(\omega)$  ketma-ketlikni tanlashga bog`liq emas.

Darhaqiqat, (5) tenglikdan

$$\begin{aligned} 0 &\leq |M\xi_n - M\eta_n| = |M(\xi_n - \eta_n)| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\xi_n(\omega) - \eta_n(\omega)| \leq \\ &\leq \left(\sup_{\omega \in \Omega} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| + \sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega) - \eta_n(\omega)| \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

munosabatning o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

Matematik kutilmaning tarifidan va 1-teoremadan bevosita ushbu teorema kelib chiqadi.

3-Teorema. 1°. ξ va η tasodifiy miqdorlar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalarga ega bo'lib, a va b – ihtiyoriy sonlar bo'lsin. U holda $M(a\xi + b\eta)$ mavjud bo'lib

$$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$$

tenglik o'rinli.

2°. Agar $\xi \geq 0$ bo'lsa $M\xi \geq 0$. Agar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar mavjud bo'lib $\xi \geq \eta$ bo'lsa, u holda $M\xi \geq M\eta$ bo'ladi.

3°. Agar $M\xi$ chekli bo'lsa $M\eta$ ham chekli. Agar $|\xi| \leq \eta$ bo'lib $M\eta$ chekli bo'lsa, u holda $M\xi$ ham chekli.

Bu teorema diskret tasodifiy miqdorlar uchun isbotlangan 1 teoremaning analogidan iborat.

4-Teorema. (Matematik kutilmaning multiplikativlik xossasi). Agar ξ va η bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar chekli bo'lsa, u holda

$$M\xi \cdot \eta = M\xi \cdot M\eta$$

tenglik o'rinli.

Isboti. ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsin. Agar ξ va η sodda tasodifiy miqdorlar bo'lib $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{A_k}(\omega)$, $\eta = \sum_{j=1}^{\infty} y_j I_{B_j}(\omega)$ ko'rinishga ega bo'lsa, u holda ihtiyoriy k, j butun sonlar uchun $P(A_k B_j) = P(A_k) \cdot P(B_j)$ tenglik o'rinli. Demak

$$\begin{aligned} M\xi \cdot \eta &= M\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_k y_j I_{A_k B_j}(\omega)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_j P(A_k B_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_k y_j P(A_k) P(B_j) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k) \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j) = M\xi \cdot M\eta. \end{aligned}$$

Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda (6) formula orqali ifodalangan $\xi_n(\omega)$ va

$$\eta_n(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{j}{n} I_{B_j^{(n)}}(\omega), B_j^{(n)} = \left\{ \omega; \frac{j}{n} \leq \eta(\omega) < \frac{j+1}{n} \right\}$$

sodda tasodifiy miqdorlar ham bog'liqsiz bo'ladi. Demak yuqorida isbotlanganiga ko'ra $M\xi_n \eta_n = M\xi_n M\eta_n$ tenglik o'rinli. $\xi_n(\omega)$ ketma – ketlik $\xi(\omega)$ ga $\eta_n(\omega)$ ketma-ketlik $\eta(\omega)$ ga tekis yaqinlashgani uchun $\xi_n(\omega) \cdot \eta_n(\omega)$ ketma-ketlik $\xi(\omega) \eta(\omega)$ ga tekis yaqinlashadi. Demak matematik kutilmaning tarifiga ko'ra

$$M\xi \cdot \eta = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n \eta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n M\eta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n \lim_{n \rightarrow \infty} M\eta_n = M\xi \cdot M\eta.$$

Teorema isbot bo'ldi.

1-Natija. Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular chekli matematik kutilmalarga ega bo'lsalar, u holda

$$M_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} = M_{\xi_1} \cdot M_{\xi_2} \dots M_{\xi_n}$$

tenglik o`rinli.

5-Teorema. (Monoton yaqinlashish haqidagi teorema). $\xi_n(\omega)$ -manfiy bo`lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun  $\xi_n \leq \xi_{n+1}, n=1,2,\dots$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$  munosabatlar o`rinli bo`lsin. Agar  $M_{\xi_n}$  matematik kutilmalar mavjud bo`lib $\sup_n M_{\xi_n} < \infty$ bo`lsa, u holda  $\xi$  tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi chekli bo`lib $M_{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{\xi_n}$ tenglik o`rinli.

Isboti. $0 \leq \xi_n(\omega) \leq \xi(\omega)$ bo`lgani uchun 3 teoremaning 2° xossasiga ko`ra $0 \leq M_{\xi_n} \leq M_{\xi}$ va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\xi_n} \leq M_{\xi}. \quad (7)$$

$A_{nj}^{(k)} = \left\{ \omega; \frac{j-1}{k} \leq \xi_n < \frac{j}{k} \right\}$ va $\xi_{nk} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{k} I_{A_{nj}^{(k)}}(\omega)$ bo`lsin. U holda  $\xi_{nk} \leq \xi_{n,k+1}, \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{nk} = \xi_n$  munosabatlar o`rinli. $\eta_k = \max_{1 \leq n \leq k} \xi_{nk}$ sodda tasodifiy miqdor va $0 \leq \eta_k = \max_{1 \leq n \leq k} \xi_{nk} \leq \max_{1 \leq n \leq k+1} \xi_{n,k+1} = \eta_{k+1}$ bo`lgani uchun  $\eta_k$  monoton o`sadi. $\eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k$ bo`lsin. U holda har bir  $k$  uchun  $\eta_k \leq \xi_k$  bo`lgani sababli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{\xi_k} = M_{\eta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M_{\xi_k}. \quad (8)$$

Shu bilan birga, $n \leq k$, bo`lsa  $\xi_{nk} \leq \eta_k \leq \eta$  va bundan  $k \rightarrow \infty$  deb barcha  $n$  lar uchun  $\xi_n \leq \eta$  tengsizlikning o`rinli ekanligini hosil qilamiz. Demak $\xi \leq \eta$ va $M_{\xi} \leq M_{\eta}$ tengsizliklar, (7) va (8) munosabatlar bilan birga teoremani isbotlaydi.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M_{\xi} = \sum_k x_k P(\xi = x_k)$$

formula orqali ifodalanishi bizga malum. quyida absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz:

6-Teorema. Agar ξ tasodifiy miqdor $p_{\xi}(x)$ zichlik funksiyaga ega bo`lib

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p_{\xi}(x) dx < \infty$$

bo`lsa, u holda

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx \quad (9)$$

tenglik o`rinli.

Isboti. Biz $p_{\xi}(x)$ Riman integrallanuvchi va (9) tenglikning o`ng tomonida Riman xosmas integrali turibdi deb faraz qilamiz (teoremaning isboti Lebeg integrali uchun ham o`rinli).

$A_k = \left\{ \frac{k}{2^n} < \xi(\omega) \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}$ deymiz va $\xi_n = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{A_k}(\omega)$ sodda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n = M\xi$ tenglik yʻrinli. Shu bilan birga

$$M\xi_n = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} P(A_k) = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(u) du$$

va

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n xp(x) dx &= \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} xp(x) dx \leq \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k+1}{2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{n} + \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(x) dx \leq \frac{1}{n} + \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \end{aligned}$$

munosabatlar oʻrinli.

$$\int_{-n}^n xp(x) dx - \frac{1}{2^n} \leq M\xi_n \leq \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$$

tengsizlikdan $n \rightarrow \infty$ boʻlganda (9) tengsizlikning oʻrinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblashga doir bir nechta misollar keltiramiz.

7-Misol. $\xi - [a, b]$ oraligʻida tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor boʻlsin. Bu holda $x < a$ yoki $x > b$ boʻlsa $p(x) = 0$ ekanligini hisobga olsak

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}.$$

Kutilganidek $M\xi$ $[a, b]$ oraliqning oʻrtasi bilan ustma-ust tushar ekan.

8-Misol. (a, σ) parametrli normal taqsimotga ega boʻlgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_{a, \sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\} dx.$$

Oxirgi integralda $y = \frac{(x-a)}{\sigma}$ almashtirish bajarib, topamiz

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma y + a}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \cdot y}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy + a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy + a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = a. \end{aligned}$$

Bu erda birinchi integral integrallanuvchi funksiya toq funksiya bo'lgani sababli nolga teng, ikkinchisi esa standart normal zichlik funksiyadan olingan integral bo'lgani uchun birga teng ekanligini ko'rish qiyin emas. Shunday qilib, $M\xi = a$, yani normal taqsimotning birinchi parametri uning matematik kutilmasidan iborat ekan.

9-Misol. ξ tasodifiy miqdor Koshi zichlik funksiyasiga ega bo'lsin;

$$K(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

U holda $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|dx}{\pi(1+x^2)} = \infty$ bo'lgani uchun, ξ ning matematik kutilmasi mavjud emas.

10-Misol. (α, λ) -parametrli gamma taqsimotning matematik kutilmasini hisoblaymiz. Gamma taqsimotning zichlik funksiyasi

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0; \\ \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x > 0. \end{cases}$$

bo'lgani sababli

$$M\xi = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \cdot \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

5. Tasodifiy miqdor funksiyasining matematik kutilmasi

ξ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lib, $g(x)$ - R da aniqlangan qandaydir Borel funksiyasi va $\eta = g(\xi)$ bo'lsin. U holda η ham $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'ladi (11 bob teorema 2). Uning matematik kutilmasini hisoblash uchun 11 bob 7-§ dagi formulalardan η tasodifiy miqdorning taqsimotini topib, so'ngra avvalgi paragrafdagi tarifdan foydalanish mumkin. Ammo biz boshqa, qulayroq usulni qo'llaymiz.

Avval $x_1, x_2, \dots$ qiymatlarni $p_k = P(\xi = x_k)$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi ξ diskret tasodifiy miqdorni ko'ramiz. Bu holda $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdor $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_k), \dots$ qiymatlarni p_k ehtimollar bilan qabul qilishi bizga malum. Shuning uchun ham, agar

$$\sum_{i=1}^{\infty} |g(x_i)| p_i < \infty$$

shart bajarilsa, u holda η tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$$

formula orqali aniqlanadi.

Endi ξ tasodifiy miqdor absolyut uzluksiz bo`lib,  $p_\xi(x)$  uning zichlik funksiyasi bo`lgan holni qaraymiz.

7-Teorema. Agar ξ $p_\xi(x)$ zichlik funksiyaga ega bo`lib,  $g(x)$   $R$  da aniqlangan uzluksiz funksiya bo`lsa va

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| p_\xi(x) dx$$

integral absolyut yaqinlashsa, u holda

$$M\eta = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x) dx \quad (10)$$

tenglik o`rinli.

Isboti. Avval $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz $g(x)$ funksiya uchun teoremani isbotlaymiz. Har qaysi $n = 1, 2, \dots$ sonlar uchun $x_{nk} = a + \frac{b-a}{n}k$ va

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b]; \\ g(x_{nk}), & x_{n,k-1} < x \leq x_{nk}, \end{cases} \text{ deb belgilaymiz.}$$

$\varepsilon > 0$ ixtiyoriy musbat son bo`lsin. U holda faqat  $\varepsilon$  ga bog`liq bo`lgan shunday  $n_0$  natural son topiladiki, barcha  $n \geq n_0$  va harqanday  $x \in [a, b]$  sonlar uchun  $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$  tengsizlik o`rinli yani $g_n(x)$ funksiyalar ketma-ketligi $g(x)$ funksiyaga $[a, b]$ oraliqda tekis yaqinlashadi. $\eta_n = g_n(\xi)$ sodda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz. Yuqorida isbotlanganiga ko`ra  $\eta_n$  tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi  $\eta = g(\xi)$  tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashadi. Demak matematik kutilmaning tarifiga ko`ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Mg_n(\xi) = Mg(\xi) \quad (11)$$

Ikkinchi tomondan

$$Mg_n(\xi) = \sum_{k=1}^n g(x_{nk}) \int_{x_{n,k-1}}^{x_{nk}} p_\xi(x) dx = \int_a^b g_n(x) p_\xi(x) dx.$$

Bu tenglikdan va yuqorida sbotlangan $|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ tengsizlikdan, $n \geq n_0$ sonlar uchun

$$\left| \int_a^b g(x) p_\xi(x) dx - Mg_n(\xi) \right| \leq \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan, (11) tenglikka ko`ra (10) formulaga kelimiz.

Endi $g(x) \geq 0$ bo`lgan holga o`tamiz. Ushbu

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & |x| \leq n; \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz. $\eta_n = g_n(\xi)$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdorga monoton yaqinlashadi. Monoton yaqinlashish haqidagi teorema ko'ra $Mg_n(\xi) \uparrow Mg(\xi)$ munosabat o'rinli. Bundan va

$$Mg_n(\xi) = \int_{-n}^n g(x)p(x)dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_{\xi}(x)dx$$

munosabatdan (10) tenglik manfiy bo'lmagan $g(x)$ funksiyalar uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Umumiy holda, $g(x) = \max\{g(x); 0\} + \min\{g(x); 0\} = g^+(x) - g^-(x)$ tenglikdan va teoremaning musbat $g(x)$ funksiyalar uchun o'rinli ekanligidan topamiz:

$$Mg(\xi) = Mg^+(\xi) - Mg^-(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g^+(x)p_{\xi}(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g^-(x)p_{\xi}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_{\xi}(x)dx.$$

Teorema isbot bo'ldi.

3-Mulohaza. (10) formula $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya R_n fazoni R fazoga akslantiruvchi n -o'lchovli uzluksiz bo'lgan umumiy holda ham o'rinli ekanligini yuqoridagi kabi isbotlash mumkin. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ n o'lchovli tasodifiy vektor absolyut uzluksiz bo'lib, $p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ uning zichlik funksiyasi bo'lsin. U holda matematik kutilma

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

formula orqali hisoblanadi.

4-Mulohaza. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozish malum qiyinchiliklarga olib keladigan bazi hollarda matematik kutilmani hisoblash uchun (10) formuladan foydalanmay, balki boshqa (matematik kutilmaning xossalariidan foydalanuvchi) turli usullar ishlatiladi:

11-Misol. Standart normal taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0$$

va $\eta = \sigma \cdot \xi + a$ tasodifiy miqdor (a, σ^2) parametrli normal taqsimlangan. Demak matematik kutilmaning additivlik xossasiga ko'ra $M\eta = \sigma \cdot M\xi + a = a$ ekanligi kelib chiqadi. Bu tenglikni biz 8-misolda keltirib chiqargan edik.

12-Misol. n ta bog'liqsiz tajribalardan iborat bo'lgan Bernulli sxemasida, kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishlar soni μ ni $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ yig'indi shaklida ifodalash mumkin, bu erda μ_j - A hodisa j nchi tajribada ro'y bersa 1 ro'y bermasa 0 qiymat qabul qblubchi tasodifiy miqdor.

$$M\mu_j = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

bo'lgani uchun, matematik kutilmaning additivlik xossasiga ko'ra

$$M\eta = M\eta_1 + M\eta_2 + \dots + M\eta_n = np$$

tenglik kelib chiqadi. Bu 2-misoldagi natija bilan birxil, ammo juda kam hisoblashlar yordamida olingan.

6.Dispersiya. Yuqori tartibli momentlar

Tasodifiy miqdorni sonli xarakteristikalaridan yana biri uning dispersiyasidir.

4-Tarif. ξ tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ songa aytiladi. $\sigma = \sqrt{D\xi}$ qiymatga ξ tasodifiy miqdorning **o`rta kvadratik chetlanishi** yoki **standart chetlanish** deyiladi.

$D\xi$ dispersiya ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanday tarqalgan ekanligini xarakterlovchi sondan iborat.

Dispersiyaning bazi xossalarini keltiramiz:

1°. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Haqiqatan ham

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2M(\xi \cdot M\xi) + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

2°. Agar ξ tasodifiy miqdor yagona o`zgarmas  $C$  sonni 1 ehtimol bilan qabul qilsa, yani  $P(\xi = C) = 1$  bo`lsa, u holda $D\xi = 0$. Darhaqiqat, $MC = C$ tenglikdan $D\xi = M(\xi - C)^2 = (C - C)^2 \cdot 1 = 0$. Demak $D\xi = 0$.

3°. Ihtiyoriy C son uchun $D(C\xi) = C^2 D\xi$, $D(\xi + C) = D\xi$ tengliklar o`rinli.

Isboti. $D(C\xi) = M(C\xi - MC\xi)^2 = M(C\xi - CM\xi)^2 = C^2 M(\xi - M\xi)^2 = C^2 D\xi$.

$$D(\xi + C) = M(\xi + C - M(\xi + C))^2 = M(\xi - M\xi + C - C)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

4°. Agar ξ va η o`zaro bog`liq bo`lmagan tasodifiy miqdorlar bo`lsa, u holda $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ tenglik o`rinli.

Isboti. Tarifga ko`ra $D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta - M(\xi + \eta))^2$. Bundan matematik kutilmaning additivlik xossasidan foydalanib topamiz

$$D(\xi + \eta) = M(\xi - M\xi)^2 + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + M(\eta - M\eta)^2 = D\xi + D\eta,$$

chunki $\xi - M\xi$ va $\eta - M\eta$ tasodifiy miqdorlarning bog`liq emasligidan $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)M(\eta - M\eta) = 0$ tenglik kelib chiqadi.

4-xossa, faqat ikkita emas, balki juft-jufti bilan bog`liqsiz bo`lgan n ta tasodifiy miqdorlar yig`indisi uchun ham o`rinli ekanligini ko`rish qiyin emas.

13-Misol. (n, p) parametrlil binomial taqsimotga ega bo`lgan μ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblaymiz.

μ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun 1° xossadan foydalanamiz $M\mu$ matematik kutilma 2 misolda topilgan edi: $M\mu = np$. Endi $M\mu^2$ matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
M\mu^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) C_{n-1}^j p^j (1-p)^{n-1-j} = np(M\mu(n-1) + 1) = np((n-1)p + 1) = (np)^2 + npq. \quad (12)
\end{aligned}$$

Demak $D\mu = npq$. (12) natijaga ushbu usul bilan osongina kelish mumkin: $\mu(n)$ tasodifiy miqdorni n ta bog'liqsiz tajribalardan iborat bo'lgan Bernulli sxemasida kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishlar soni ekanligini hisobga olib uni

$$\mu = \mu(n) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

ko'rinishidagi yig'indi shaklida ifodalash mumkin, bu erda μ_j orqali j nchi tajribada A hodisa ro'y bersa 1, aks holda 0 qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdor belgilangan. Har bir qo'shiluvchining dispersiyasi

$$D\mu_j = (0 - M\mu_j)^2 \cdot q + (1 - M\mu_j)^2 \cdot p = (-p)^2 q + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq$$

va μ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liqsiz bo'lgani uchun, 4 xossaga ko'ra ushbu

$$D\mu = D\mu(n) = D\mu_1 + D\mu_2 + \dots + D\mu_n = npq$$

tenglikka kelamiz.

14-Misol. λ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Buning uchun biz dispersiyaning 1° xossasidan foydalanamiz. Bizga $M\xi = \lambda$ ekanligi malum (3-misol). $M\xi^2$ -matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
M\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \\
&= \lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \right) = \lambda \cdot (M\xi + 1) = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

Shunday qilib

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

yani Puasson taqsimotining dispersiyasi, uning matematik kutilmasi kabi, λ parametrغا teng.

15-Misol. $[a, b]$ oralig'ida tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi (10) formulaga asosan topiladi:

$$D\xi = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} \left[\left(b - \frac{b+a}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{b+a}{2} \right)^3 \right] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

16-Misol. (a, σ^2) parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \varphi_{a,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx;$$

$y = \frac{(x-a)}{\sigma}$ almashtirish bajarib, quyidagini hosil qilamiz;

$$D\xi = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy.$$

Hosil bo'lgan integralni, $v = \frac{y}{\sqrt{2\pi}}, du = y \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$ deb olib, bo'laklab integrallaymiz

$$D\xi = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \sigma^2.$$

Demak, (a, σ^2) parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning ikkinchi parametriga teng ekan.

17-Misol. (α, λ) -parametrli gamma taqsimotning dispersiyasini hisoblaymiz:

$M\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$ ekanligini hisobga olib, dispersiyaning 1° xossasidan foydalanamiz.

$$M\xi^2 = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha+1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

5-Tarif. $\xi - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va $k > 0$ qandaydir son bo'lsin Agar $M|\xi|^k$ matematik kutilma mavjud bo'lsa, u holda $a_k = M\xi^k$ songa ξ tasodifiy miqdorning **k-tartibli boshlang'ich momenti**, $m_k = M|\xi|^k$ songa esa, uning **k-tartibli absolyut momenti** deyiladi.

$\xi - M\xi$ tasodifiy miqdorning momentlarini **markaziy momentlar** deyiladi.

Agar $M\xi = 0$ bo'lsa, u holda markaziy moment boshlang'ich momentga teng bo'ladi. ξ tasodifiy miqdorning birinchi tartibli boshlang'ich momenti uning matematik kutilmasi bilan, ikkinchi tartibli markaziy momenti esa dispersiyasi bilan ustma-ust tushadi.

18- Misol. Normal taqsimotning markaziy momentlari. $\xi - (a, \sigma^2)$ parametrli normal taqsimotga ega bo'lsin. U holda $M\xi = a, D\xi = \sigma^2$ ekanligi bizga malum. ξ tasodifiy miqdorning markaziy momentlarini hisoblaymiz.

$$\beta_m = M(\xi - a)^m = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^m \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Bu erda $z = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajarib, topamiz

$$\beta_m = \frac{\sigma^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^m \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz.$$

Agar m toq bo'lsa, u holda $\beta_m = 0$ bo'ladi, agar m –juft bo'lsa ($m=2k$) , u holda

$$\beta_{2k} = M(\xi - a)^{2k} = \frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^{2k} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \quad \text{da} \quad \frac{z^2}{2} = t \quad \text{almashtirish bajarib, topamiz}$$

$$\beta_{2k} = M(\xi - a)^{2k} = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{k-1/2} e^{-t} dt = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \sigma^{2k} = (2k-1)!! \sigma^{2k}.$$

19-Misol. λ - parametrlı ko'rsatkıchlı taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning yuqori tartibli momentlari hisoblansin.

Echish. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

formula orqali ifodalanishi bizga malum. ξ tasodifiy miqdorning k –tartibli momentini 7-teoremadagi (10) formuladan foydalanib topamiz.

$$a_k = M\xi^k = \int_0^{\infty} x^k \lambda \cdot e^{-k\lambda} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k}.$$

Xulosa

Ehtimollar nazariyasi “tasodifiy tajribalar”, ya’ni natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlatni o‘rganuvchi matematik fandır. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o‘zgarmas (ya’ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo‘lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi *tasodifiy hodisa* ro‘y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko‘p matra takrorlash mumkin bo‘ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o‘tishida natijalari turlicha bo‘lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro‘y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo‘lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro‘y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o‘yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifiyatsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarhini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo‘lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog‘liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug‘illanadi. Tasodifiyat insoniyatni doimo qiziqtirib kelgandır. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o‘laroq nisbatan qisqa, ammo o‘ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy ma’lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o‘rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to‘g‘ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o‘lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o‘lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi

qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug'urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo'lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarning o'rganishdan emas, balki eng sodda qimor o'yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o'yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojida katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog'liqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi "katta sonlar qonuni" tegishlidir. Ehtimollar nazariyasi rivojida yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bog'liqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, ma'lum bo'ldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol' o'ynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremlar "markaziy limit teoremlar" deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749-1827) ham tegishlidir. U birinchi bo'lib ehtimollar nazariyasi asoslarini qat'iy va sistematik ravishda ta'rifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbirlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojida etarlicha darajada oldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bog'liqdir. U normal qonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli ma'lumotlarni qayta ishlashning muhim usuli – "kichik kvadratlar usuli"ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini o'q uzish masalalariga qo'lladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta rol' o'ynovchi taqsimot qonuni nomlangandir. XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir. Keyinchalik ehtimollar nazariyasi rivojiga Rossiya olimlari V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918), A.Ya. Xinchin (1894-1959), V.I. Romanovskiy (1879-1954), A.N. Kolmogorov

(1903-1987) va ularning shogirdlari bebaho hissa qo'shdilar. O'zbekistonda butun dunyoga taniqli Sarimsokov (1915-1995) va S.X. Sirojiddinov (1920-1988) larning muhim rollarini alohida ta'kidlab o'tish joizdir.

Ushbu malakaviy bitiruv ishida ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning muhim tushunchalaridan biri bo'lmish bog'liq tasodifiy miqdorlar sonli xarakteristikalarini hamda ularning tadbiqlari o'rganildi. Bunda ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, taqsimot qonunlari, taqsimot va zichlik funktsiyalari, diskret va uzluksiz tipda bo'lgan hol uchun tasodifiy miqdorlar sonli xarakteristikalarini ko'rildi. Bir nechta misollar orqali korrelyatsion munosabatlar o'rganilib, ularning regressiya tenglamalari tuzildi. Ushbu ishdan oliy ta'lim muassasalari talabalari foydalanishlari mumkin.

Asosiy qism ikkita bob, sakkista paragrafdan iborat bo'lib, ulardan oltitasi birinchi bobda va yana ikkitasi esa ikkinchi bobda o'rganilgandir. Birinchi bobda ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonuni, birgalikdagi taqsimot funktsiyasi, zichlik funktsiyasi, tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi hamda shartli taqsimot qonunlari o'rganilgan. Ikkinchi bobda ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hamda ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarining tadbiqlari ko'rib chiqilgan.

Ushbu malakaviy bitiruv ishida o'rganilgan bog'liq tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalariga oid tushunchalardan matematika yo'nalishida tahsil olayotgan talabalariga ehtimollar nazariyasi umumiy kursini o'qitish jarayonida keng foydalanish mumkindir.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. A.A.Borovnov. "Teoriya veroyatnostey". Moskva, „Nauka”, 2002 g.
2. B.V.Gnedenko. "Kurs teorii veroyatnosti". Moskva, "Nauka", 1988 g.
3. A.N.Shiryaev. "Veroyatnost". Moskva, „Nauka”, 1989 g.
4. A.A.Abdushukurov, T.Zuparov „Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika". Toshkent, "Tafakkur Bo'stoni", 2015 yil.
5. A.A.Abdushukurov. „Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika". Toshkent, "universitet", 2010 yil.
6. Y.Stoyanov. "Kontrprimero' v teorii veroyatnostey". M., „Faktorial", 1999 g.
7. S.X.Sirojiddinov, M.M.Mamatov. „Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika". Toshkent, „O'qituvchi", 1980 yil.
8. A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev., „Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to'plami". Toshkent 2003 yil.
9. V.E.Gmurman. „Ehtimollar nazaryasi va matematik statistikadan masalalar echishga doir qo'llanma". Toshkent, „O'qituvchi", 1980 yil.
10. A.S.Rasulov, G.Raimov „Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika", Uchebnoe posobie, Toshkent, Izdatelstvo UMED, 2002 g.
11. V.E.Gmurman. „Teoriya veroyatnostey i matematichiskaya statistika", Moskva „Vo'sshaya shkola", 1977 g.
12. G.I.Agapov. „Zadachnik po teorii veroyatnostey", Moskva, „Vo'sshaya shkola", 1986 g.
13. „Sbornik zadach po teorii veroyatnostey i matematichiskoy statistiki" pod redaktsiey A.A.Sveshnikova, Moskva, „Nauka", 1977 g.
14. „Teoriya statistiki s osnovami teorii veroyatnostey" pod redaktsiey chlena korr. RAN I.I.Eliseevoy, Moskva, „YuNITI", 2001 g.
15. N.Sh.Kremer. „Teoriya veroyatnostey i matematichiskaya statistika" Uchebnix dlya VUZov, Moskva, „YuNITI", 2001 g.
16. B.A.Sevastyanov. „Kurs teorii veroyatnosti i matematichiskoy statistiki", Moskva, „Nauka", 1982 g.

17. V.Feller. „Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i eyo prilozheniya”. T-1, T.M., „Mir”, 1967 g.
18. B.A.Sevastyanov, V.P.Chistyakov, A.M.Zubkov. „Sbornik zadach po teorii veoyatnostey”. Moskva, „Nauka”, 1980 g.
19. R.Ibragimov, A.Mashrabboev. „Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to’plami”. Namangan, 2004 yil.
20. [www. ziyonet.uzG'get_file.php? fill-znuz_266622](http://www.ziyonet.uzG'get_file.php?fill-znuz_266622)
21. [www. ziyonet.uzG'get_file.php? fill-znuz_](http://www.ziyonet.uzG'get_file.php?fill-znuz_)
22. [www. ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG' 10408](http://www.ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG'10408)
23. [www. ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG' 010408](http://www.ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG'010408)
24. [www. ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG' 010409](http://www.ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG'010409)
25. [www. ziyonet.uzG'get_file.php? fillqArchNFrr:ck.rar.](http://www.ziyonet.uzG'get_file.php?fillqArchNFrr:ck.rar)
26. [www. ziyonet.uzG'get_file.php? fillqArchNFrr:ck.rar.](http://www.ziyonet.uzG'get_file.php?fillqArchNFrr:ck.rar)
27. [www. ziyonet.uzG'get_file.php? fill-ArchFicwI.bc.rar.](http://www.ziyonet.uzG'get_file.php?fill-ArchFicwI.bc.rar)
28. [www. ziyonet.uzG'get_file.php? fill- znuz_901_20071123163619.zip.](http://www.ziyonet.uzG'get_file.php?fill-znuz_901_20071123163619.zip)
29. [www. ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG' 10408G'offsetG'30](http://www.ziyonet.uzG'uzcG'libraryG'lbidG'10408G'offsetG'30)