ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА УРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО МУҲАНДИСЛИК-ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ

«ОЛИЙ МАТЕМАТИКА» кафедраси

«Олий математика» фанидан техника олий ўқув юрти йуналишидаги талабалари учун кузги мавсум

МАЪРУЗАЛАР ТУПЛАМИ

БУХОРО–2018 й

Ушбу маърузалар матни “Олий математика” кафедрасининг 2018 йил 20 август кунги йиғилишида (мажлис баёни №1) ва институт-услубий кенгашининг 2018 йил 29 август кунги мажлисида (мажлис баёни № 1) муҳокама этилди ва чоп этишга тавсия килинди.

<u>М У А Л Л И Ф Л А Р :</u> **Юнусов Ғ.Ғ.**
БухМТИ “Олий математика” кафедрасининг мудири, доцент

<u>Т А К Р И З Ч И Л А Р :</u> **Маматова Н.**
БухДУ кафедра мудири, доцент.

Ушбу тупламда “Олий математика” фанининг ишчи укув дастуридаги туп-ламлар назарияси, математик мантик, чизикли алгебра, векторлар алгебраси ва аналитик геометрия булимлари буйича 36 та маърузалар матни, адабиётлар руйхати келтирилган.

М У Н Д А Р И Ж А:

Кириш

Мамлакатимизда кабул килинган ва амалга оширилаётган “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” буйича таълим ислохотининг II боскичидаги энг асосий вазифа - тайёрланаётган мутахассисларнинг сифатини оширишдан иборатдир.

Юкори малакали, ракобатбардош, замонавий кадрлар тайёрлашда уларга бериладиган математик билимлар катта ахамиятга эга. Шу сабабли иктисод йуналишлари буйича таълим олувчи бакалаврларнинг укув режаларида «Олий математика» фанини укитиш кузда тутилган. Талабалар учун бу фанни укитишда ушбу максадлар куйилади:

1. Касбий фаолият учун етарли хажмда математик билимлар ва усуллар хакида тушунчалар ва куникмалар хосил килиш.
2. Абстракт ва мантикий фикрлаш кобилиятларини хосил килиш ва ривожлантириш.
3. Математика ва унинг иктисодий тадбиклари буйича адабиётларни мустакил урганиш оркали билимлар доирасини кенгайтира олиш.
4. Иктисод ихтисослиги буйича умумкасбий ва махсус фанларни узлаштириш учун керакли математик пойдеворни хосил килиш.
5. Касб фаолияти жараёнида пайдо буладиган амалий масалаларнинг математик моделларини ишлаб чикиш ва уни тахлил этиб, тегишли хулосалар чикариш.

«Олий математика» фани куйидаги асосий булимлардан иборат:

1. Тупламлар назарияси.
2. Математик мантик.
3. Чизикли алгебра
4. Векториал алгебра.
5. Аналитик геометрия.
6. Дифференциал хисоб.
7. Интеграл хисоб.
8. Куп узгарувчили функциялар.
9. Оддий дифференциал тенгламалар.
10. Сонли ва даражали каторлар.

Ушбу маърузалар тупламида «Олий математика» фанининг тупламлар назарияси, математик мантик, чизикли алгебра, векториал алгебра, аналитик геометрия булимлари буйича фанни ишчи укув дастурида кузда тутилган мавзулар ёритилган.

1 - МАЪРУЗА

МАТЕМАТИКАНИНГ АСОСИЙ РИВОЖЛАНИШ БОСКИЧЛАРИ. ХОЗИРГИ ЗАМОН МАТЕМАТИКАСИНИНГ ТАРКИБИ, АХАМИЯТИ ВА ТАДБИКЛАРИ .

Маъруза режаси:

1. Математика фанининг предмети.
2. Математика фанини абстрактлиги.
3. Математиканинг шаклланиш даври.
4. Элементар математика даври.
5. Урта Осиёда элементар математика тараккиёти.
6. Олий математика даври.
7. Хозирги замон математикаси.
8. Узбекистон математика мактаби.
9. Математиканинг амалиётдаги ахамияти ва кулланилиши.

Адабиётлар:

[9]. 4-24 бет, 114-123 бет, [14]. 5-8 бет.

Энг аввало “Математика” фани нимани ургатади? деган саволни куямиз. Бу жуда мураккаб савол булиб, унга таълим даражаси турли булган одамлар турли жавоблар берадилар. Масалан, бошлангич синф укувчилари математика-нарсаларни санаш коидаларини ургатади деб жавоб берадилар ва бу жавобни нотугри деб булмайди. Чунки бу математиканинг мухим кисми булмиш арифметикани мохиятини ташкил этади ва у дастлабки тарихий даврларда математикани тулик уз ичига олган. Урта синф укувчилари бу жавобга математикани чизиклар, фигуралар, жисмларни, яъни геометрик объектларни хам урганади деб кушимча киладилар. Юкори синф укувчилари эса бу саволга математика функцияларни урганишини хам илова киладилар. Талабалар олий укув юртларида математиканинг дифференциал тенгламалар, эхтимолликлар назарияси ва математик статистика каби янгидан-янги булимларини урганадилар ва шу сабабли уларнинг жавоблари укувчилар жавобига нисбатан кенгрок ва туларок булади.

Аммо барча бу жавоблар бир томонлама характерга эга булиб, математиканинг у ёки бу йуналишларини ифодалайди. Бу саволга умумий холда жавоб бериш учун жуда куп математиклар, файласуфлар харакат килганлар. Хозирча бу саволга энг коникарли жавоб XX асрнинг буюк математиги ***А.Н.Колмогоров*** (1903-1987) томонидан келтирилган ва куйидагича ифодаланади.

Т А Ъ Р И Ф : Математика хакикий оламнинг микдорий муносабатлари ва фазовий формалари хакидаги фандир.

Математика сузи грек тилидан олинган булиб, микдорлар хакидаги фан деган маънони билдиради.

Математика бошка табиий фанлардан шу билан фарк киладики, у реал оламни, атрофимиздаги объект ва жараёнларни абстрактлаштирилган холда урганади ва шу сабабли унинг натижалари умумий характерга эга.

Масалан, биология тирик хаётни урганувчи фан булиб, унда кулланиладиган усуллар хусусий характерга ва бу усулларни физикага ёки тилшунosликга тадбик этиб булмайди. Худди шундай гапларни физика, химия, геология ва бошка фанлар тугрисида айтиш мумкин.

Аммо арифметиканинг конун – коидаларини биология объектларига хам, физик-химик тадкикотларга хам, иктисодий масалаларни ечишда хам, кишлок хужалигида хам бир хил муваффакият билан куллаш мумкин. Шу сабабдан хам XIX асрнинг буюк математиги ***Гаусс*** «Арифметика - математиканинг подшохидир, математика эса барча фанларнинг подшохидир.» -деб бежиз айтмаган.

Албатта, математика бундай улкан бахога эришиши учун узок тараккиёт йулини босиб утишга тугри келган. ***А.Н.Колмогоров*** узининг 1954 йилда кобуснома учун ёзилган ва "Математика " деб аталган маколасида бу тараккиётни ушбу турт даврга ажратади.

I. Математиканинг шаклланиш даври.

II. Элементар математика даври.

III. Узгарувчи микдорлар математикаси даври. Бу даврни шартли равишда "Олий математика "даври деб хам айтиш мумкин.

IV. Хозирги замон математикаси даври.

Шуни таъкидлаб утиш керакки, хар бир кейинги даврда элементар математикани ривожланиши тухтаб колган эмас.

I. Математиканинг шаклланиш даври эрамиздан олдинги VI-V асргача давом этди. Бу даврда инсоният турли предметларни санашни урганди. Санок системалари олдин огзаки холда ишлатилган. Ёзма санок системаларини кашф этилиши билан натурал сонлар устида турли арифметик амаллар бажариш конун-коидалари топила бошланди. Йулларни узунлигини улчаш, даромадларни ва етиштирилган хосилни таксимлаш каби масалалар натижасида каср сонлар тушунчаси ва улар устида арифметик амаллар бажариш коидалари ишлаб чикилди.

Натижада, энг кадимий математик фан- арифметикага асос солинди. Майдонларни улчаш, жисмлар хажмларини хисоблаш, турли иш куролларини яратишга эхтиёж пайдо булиши билан геометриянинг куртаклари шакллана бошланди. Шуниси кизикки, бу жараёнлар турли халкларда бир-бирига богликмас равишда, параллел куринишда амалга ошди.
Айникса бу жараёнлар Миср ва Вавилон давлатларида яккол намоён булди.

II. Элементар математика даври эрамиздан олдинги V асрдан бошлаб XVII аср бошларигача давом этди. Олдинги даврдаги математик билимлар таркок,хусусий куринишдаги натижалардан, конун-коидалардан иборат эди. Уларни бирлаштириш, умумий куринишга келтириш кадимги Грециядан бошланди ва математика фанини илмий пойдеворига асос солинди.
Евклиднинг "Негизлар" асарида элементар геометрия фани аксиоматик равишда ифодаланди ва бу асар 2 минг йил давомида бошка математик фанларни асосини яратишга мисол,намуна сифатида хизмат килиб келди.Кадимги Гре-

цияда математиканинг (асосан геометрияни) ривожланишига ***Пифагор, Аристотель, Архимед , Герон, Диофант, Птоломей*** каби мутафаккирлар катта хисса кушдилар.Турли гидротехник курилишлар (масалан, Архимед винти), харбий машиналар, Архимедни тош отувчи курилмалари, ойналар системасида кемаларни ёндириб юбориш, денгизда сузиш учун керакли билимлар, геодезия ва картография, астрономик кузатишлар билан боглик масалалар математикани ривожланишига катта туртки булди.

Курилаётган даврнинг IX-XV асрлари давомида математиканинг ривожланишига Урта Осиё олимларининг хиссаси катта булди. Бу вактда араблар жуда куп ерларни босиб олиб, араб халифалигига бирлаштирдилар. Бу ерларда олимлар ягона араб тилидан фойдалана бошладилар ва бу улар орасидаги алокаларни мустахкамланишига олиб келди. Бундан ташкари уша даврда катта илмий тадкикодлар давлат томонидан молиялаштирила бошланди. Бу омиллар бу ерда илмни ривожланишига, катта кутубхоналар ташкил этилишига, расадхоналар курилишига олиб келди.

IX асрда яшаб ижод этган хоразмлик олим ***Мухаммад ибн Мусо ал Хоразмий*** биринчи булиб узининг *“Алжабр”* асарида алгебра фанига асос солди. Европалик олимлар бу китоб оркали квадрат тенгламаларни ечиш усули билан танишдилар. X асрда Беруний $x^3+1=3x$ куринишдаги куб тенгламани такрибий ечиш усулини топди. XI-XII асрда яшаган ***Умар Хайём*** куб тенгламаларни умумий холда текширди, уларни синфларга ажратди ва ечилиш шартларини топди. XIII асрда ижод этган озарбайжон математиги ***Насриддин Тусий*** сферик тригонометрияни асос солинишига якун ясади ва ***Евклиднинг*** “Негизлар” китобини араб тилига таржима килди. XV асрда буюк астроном ва математик ***Мирзо Улугбек*** (1394-1449) ”Зижи Курагоний”асарида 1018 та юлдузнинг координаталарини нихоятда катта аниклик билан хисоблаб берди. Бу ишда расадхонада энг замонавий аник асбоблардан фойдаланилгани билан бир каторда йирик математиклар хам ишлаганини курсатиб утиш керак. Улардан энг машхури ***Гиёсиддин Жамшид ибн Масуд али Кушчи*** булиб хисобланади. У унли касрлар устида арифметик амаллар бажариш конун–коидаларини батафсил баён килиб берди (унгача Урта Осиёда асосан олтмишлик санок системаси кулланилган). Европада бу натижаларга атиги XVI асрда эришилди. Али Кушчи Ньютон биноми формуласини натурал сонлар учун огзаки куринишда ифодалади, ”Айлана хакидаги рисола” асарида π сонини 17 хона аникликда хисоблади, астрономик хисоблашлар учун керак булган синуслар жадвалини тузиш учун тенгламаларни итерацион усулда сонли ечиш йулини курсатди.

Хиндистоннинг математикага кушган энг катта хиссаси - унли санок системаси учун ракамлар ва нолни кашф этилишидир. Бу ракамлар европаликларга араб математиклари асарлари оркали маълум булгани учун хозирги пайтда нотугри равишда «араб ракамлари» деб аталади.

Элементар математиканинг ривожланишига Хитой олимларининг хам катта улуши бор.

XII-XV асрлар давомида Гарбий Европа математиклари асосан кадимги Греция ва Шарк математикларининг ишларини урганиш билан шугулланиб келганлар, математик билимларни оммалаштириш максадида турли асарлар ёзганлар, математик символларни кашф этганлар. Аммо XVI асрдан бошлаб бу ерлик олимлар томонидан йирик кашфиётлар килина бошланди ва юксалиш даври бошланди. Масалан, поляк олими ***Коперник*** нинг астрономик кашфиёти, италиялик олим ***Галилей***нинг механика буйича катор кашфиётлари математикани ривожланишига туртки булди.

Италиялик математиклар ***Тарталия, Феррари, Кардано*** учинчи ва туртинчи тартибли алгебраик тенгламаларни ечиш усулларини топдилар (олдин бу тенгламалар такрибий ечилар эди.) Француз математиги ***Виет*** n- даражали тенглама илдизлари билан унинг коэффициентлари орасидаги мунособатларни топди.

III.Олий математика даври XVII асрдан бошланди. Элементар математикада катталиклар ва геометрик объектлар кузгалмас, узгармас микдорлар каби каралар эди. Математикада энди харакатланувчи ва узгарувчи микдорларни куришга тугри кела бошлади. Масалан, Бойль-Мариот (1662) газ хажми билан унинг босими уртасида узаро богланиш мавжуд эканлигини, ***Гук*** (1660) эса каттик жисмнинг деформацияланиши ε ва кучланиши σ орасида $\sigma=\alpha\varepsilon$ куринишдаги чизикли богланиш мавжуд эканлигини аникладилар. Бу конунларда икки узгарувчи микдор орасидаги узаро богланишни урганишга тугри келди ва бундай богланишлар функция тушунчасига олиб келди. Элементар математикада (арифметикада) сон кандай асосий ахамиятга эга булса, олий математикада функция шундай асосий ахамиятга эгадир. Функцияларни урганиш математик тахлил деган фанга олиб келди. Бу фанда лимит, хосила, интеграл каби тушунчалар киритилди. Немис математиги ***Лейбниц*** 1682-1686 йилларда ва инглиз математиги, механиги ***Ньютон*** 1665-1666 йилларда дифференциал ва интеграл хисобни кашф этдилар.

Бу даврда математикани ривожланишига ***Декарт, Фурье, Паскаль, Ферма, Гюйгенц, Бернулли, Эйлер, Лагранж, Даламбер, Коши*** каби буюк олимлар катта хисса кушдилар. Бу даврда математик тахлилни ривожлантириш билан бир каторда аналитик геометрия, дифференциал тенгламалар, эхтимоллар назарияси каби янги фанларга асос солинди.

IV. Хозирги замон математикаси даври XIX аср бошидан хисобланади. Олдинги даврларда математиканинг ривожланиши амалий масалаларни ечиш натижасида амалга ошган булса, энди математика уз ички конуниятлари буйича хам ривожлана бошлади. Бу ривожланиш олдин топилган тушунчаларни, натижаларни умумлаштириш, уларни мантикий жихатдан тугалланганлигига эришиш, олдинги натижаларни хозирги замон ютуклари асосида кайта куриб чикиш, тахлил этиш каби йуналишларда амалга ошади. Масалан, x^2-1=0 квадрат тенглама $x = \pm 1$ илдизга эга эканлиги маьлум, аммо унга жуда ухшаш $x^2+1=0$ тенглама хакикий сонлар ичида илдизга эга эмас. Шу сабабли хакикий сонлардан кенгрок, умумийрок булган комплекс сонлар тушунчасини киритишга тугри келди. XIX асрда комплекс сонлар ва уларнинг функцияларини урганиш натижасида «Комплекс тахлил» фани пайдо булди. Бу назариянинг амалиётга тадбиклари кейинчалик топилди.

Алгебраик тенгламаларни ечиш масалалари билан шугулланиш натижасида ***Абель, Галуа*** (1830) томонидан гурухлар назарияси яратилди. XX асрдагина гурухлар назарияси кристалларни урганишда, квант физикасида уз тадбигини топди.

XIX асрда математика фанининг жуда куп сохаларга кулланилиши, таркибини жуда кенгайиши натижасида унинг пойдеворини илмий нуктаи-назардан кайта куриб чикиш ёки яратиш масалалари мухим ахамиятга эга булди. Математик фанларнинг асосий пойдевори сифатида тупламлар назарияси ва математик мантик олинди. XX асрда жуда куп математик фанлар пойдевори тупламлар назарияси асосида яратилди. XIX-XX асрда янги математик фанларга хам асос солинди ва ривожлантирилди. Масалан, тупламлар назарияси, математик мантик, хакикий узгарувчили функциялар назарияси, функционал тахлил, топология, математик физика масалалари.

Узбекистонда математика фанининг ривожланишига тухталиб утайлик. Узбекистонда математика фани буйича ютуклар Тошкентда 1920 йилда университет ташкил этилиши билан боглик. Узбекистонга келган рус олимлари ичида В.И.Романовский хам бор эди. У математик статистика буйича кузга куринган олим эди ва у узбек математика мактабини яратишга катта хисса кушди. Узбек математикларидан биричи булиб академик ***Кори-Ниёзий***ни курсатиш мумкин. У математика буйича катта илмий ишлар килмаган булсада, математикани таргиб килиш,узбек тилида дарсликлар ёзиш билан Узбекистонда математикани ривожланишига катта хисса кушди. Дунёга танилган математикларимиздан академик ***Т.А.Саримсоков*** (1915-1995), академик ***С.Х. Сирожиддинов***(1920-1988), ***М.С. Салохитдинов*** функционал тахлил, математик статистика, математик физика тенгламалари буйича жуда катта кашфиётлар килиб, узбек математика мактабини жахонга таниттирдилар.

Математиканинг амалий тадбиклари буйича баъзи бир мисолларни келтирамиз.

1.1845 йилда француз математиги ***Леверье*** Уран планетаси траекторияси тенгламасини текшириб, бизга номаълум осмон жисми борлигини, унинг траекториясини ва массасини назарий йул билан, яъни “калам учида” хисоблаб топди. У курсатган координаталар буйича 1846 йил 23 сентябрь куни немис астрономи Галле телескопда Нептун планетасини кашф этди. Худди шундай равишда 9-планета 1915 йилда килинган математик хисоблар асосида 1930 йили кашф этилди.

2. Нейтрон, кварк каби элементлар заррачаларининг мавжудлиги ва уларнинг хоссалари тажрибалар асосида эмас,хисоблашлар асосида кашф этилди.

3.Самолётларнинг учиш узоклиги катталаша бориши билан уларни автоматик бошкариш масаласи пайдо булди. Бу масалани Л.С. Понтрягин (Россия) ва Белман (АКШ) каби математиклар хал килиб, оптимал бошкариш назарияси деган янги фанга асос солдилар.

4.Телефон алокасини ривожланиши билан алока булимларида абонентларни навбатда канча кутиб туриш вактлари каби масалалар натижасида американлик олим Эрланг “Оммавий хизмат курсатиш назарияси” номли янги математик фанга асос солди.

5.Космосни узлаштириш муаммоларини ечишда математика роли бенихоят каттадир. Академик Келдыш (Россия) рахбарлик килган ”Амалий математика” илмий-текшириш институтида бу масалаларни ечиш усуллари ишлаб чикилди ва улар ЭХМ лар ёрдамида амалга оширилди.

6.Иктисодиётда халк хужалигини бошкариш учун америкалик иктисодчи-олим Леонтьев томонидан тармоклараро мувозанатнинг математик моделлари ишлаб чикилди ва унинг тенгламалари ечилиб, ишлаб чикаришни окилона бошкаришга эришилди.

7.Академик Канторович (Россия) материаллардан андоза олишнинг камчиким йулларини ахтариш билан шугулланди ва натижада чизикли дастурлаш номли янги математик фанга асос солди. Бу фан натижалари асосида халк хужалигида жуда катта иктисодий фойдага эришилди ва шу сабабли Канторович иктисодиёт буйича Нобел мукофотига сазовор булди.

Бундай мисолларни яна куплаб келтириш мумкин ва улар математиканинг канчалик даражада ахамиятли эканлигини ифодалайди.

Уз-узини назорат этиш саволлари.

1. Математика фани предмети академик А.Н. Колмогоров томонидан кандай таърифланган?
2. Математика бошка табиий фанлардан кандай хусусияти билан ажралиб туради?
3. Математиканинг ривожланиш даври А.Н. Колмогоров томонидан неча даврга ажратилган?
4. Математиканинг шаклланиш даври кандай хусусиятларга эга?
5. Элементар математика даври кайси асрларга тугри келади?
6. Элементар математика даври кандай хусусиятларга эга?
7. Урта Осиёлик олимларнинг элементар математика ривожланишига кушган хиссаларини курсатиб утинг.
8. Олий математика даври кайси асрларга тугри келади?
9. Олий математика даврининг асосий хусусиятлари нималардан иборат?
10. Хозирги замон математикасининг асосий хусусияти нимадан иборат?
11. Узбек математикларидан кимларни биласиз ва уларнинг хизматлари нимадан иборат?
12. Математиканинг амалий масалаларни ечишга тадбикларидан кайси бирини биласиз?

2- МАЪРУЗА.

ТУПЛАМЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.

Таянч иборалар: туплам, кисм туплам, буш туплам, бирлашма, кесишма, айирма, тупламларнинг декарт купайтмаси.

Маъруза режаси:

1. Туплам тушунчаси ва унинг элементлари.
2. Кисм туплам.
3. Тупламлар тенглиги.
4. Буш туплам.
5. Тупламлар йигиндиси (бирлашмаси) ва бу амалнинг хоссалари.
6. Тупламларнинг купайтмаси (кесишмаси) ва бу амалнинг хоссалари.
7. Тупламлар айирмаси.
8. Тупламларнинг декарт купайтмаси.

Адабиётлар:

[4] I боб, §1-2, [8] I боб, § 1-4 [10] I боб, § 1-6 [11] I боб § 1-3

Олдинги маърузада айтилгандек тупламлар назарияси деярли барча математик фанларнинининг асосида ётади.Бу назария асослари 1879-1884 йилларда немис математиги ***Георг Кантор*** томонидан чоп этилган бир катор маколаларда ёритиб берилди. Туплам тушунчаси математиканинг асосий тушунчаларидан булиб, у жуда умумий характерга эга ва шу сабабли унга аник таъриф бериб булмайди. Масалан, институтимиздаги I курс талабалари туплами,[0;1] кесмадаги нукталар туплами, натурал сонлар туплами,бирор заводдаги станоклар туплами ва хоказо. Шундай килиб туплам деганда купинча бир умумий хусусиятга эга булган турли куринишдаги объектлар мажмуасини тушунамиз. Математикада тупламлар A,B,C,D,… каби бош лотин харфлар билан белгиланади. Тупламга кирувчи объектлар унинг элементлари дейилади ва мос равишда a,в,c,d,… каби белгиланади. «а элемент А тупламга тегишли» деган ибора символик куринишда $\mathbf{a\in A}$ каби ёзилади. $\mathbf{b\notin A}$ каби ёзувлар эса **b** элемент **A** тупламга тегишли эмаслигини билдиради.

1-ТАЪРИФ: Агар **A** тупламга тегишли хар бир **a** элемент бошка бир **B** тупламга хам тегишли булса ($\mathbf{a\in A\Rightarrow a\in B}$), у холда **A** туплам **B** тупламининг кисми дейилади ва $\mathbf{A\subset B}$ (еки $\mathbf{B\supset A}$) каби белгиланади.

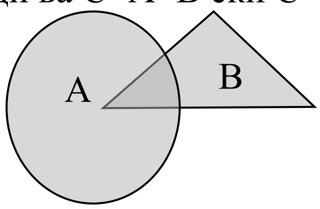
М и с о л: Иктисод йуналишдаги талабалар туплами олийгох талабалар тупламининг кисм туплами булади.

2- ТАЪРИФ: Агарда **A** ва **B** тупламлар учун $\mathbf{A\subset B}$ ва $\mathbf{B\subset A}$ шартлар бир пайтда бажарилса, бу тупламлар тенг дейилади ва $\mathbf{A=B}$ каби ёзилади.

М и с о л: 1) **A**={-1;1}, **B**={x^2-1=0 тенглама ечимлари} учун **A=B** булади.
2) **A**={тугри бурчакли учбурчаклар}, **B**={томонлари а,в,с булган ва $c^2=a^2+в^2$ шартни каноатлантирувчи учбурчаклар} тупламлар учун **A=B.**
3)A= {бадиий асарни ёзиш учун ишлатилган харфлар},
B= {алфавитдаги харфлар} булса, **A=B** булади.
3-*ТАЪРИФ:* Бирорта хам элементга эга булмаган туплам буш туплам дейилади ва $\varnothing$ каби белгиланади.

Ихтиёрий A туплам учун $A\subset A$ ва $\varnothing\subset A$ шартлар доимо бажарилади.Арифметикада 0 сони кандай вазифани бажарса, тупламлар назариясида $\varnothing$ туплам шунга ухшаш вазифани бажаради.
М и с о л:{ $\sin x = 2$ тенгламанинг ечимлари}=$\varnothing$,
{ периметри 0 булган квадратлар }=$\varnothing$.
Арифметикада хакикий сонлар устида кушиш ва купайтириш амаллари киритилган. Бу амаллар шундай киритилганки, кушиш ва айириш натижасида яна хакикий сонлар пайдо булади ва бу амаллар маълум бир хоссаларга (конунларга)эга булади. Бу амалларни ва уларнинг хоссаларини билмасак, куп арифметик масалаларни ечиб билмас эдик. Худди шундай сабабга кура тупламлар устида кушиш ва купайтириш амалларини киритишга эхтиёж пайдо булди.

Аммо бу амаллар арифметикадаги кушиш ва купайтириш амалларидан фарк килади.
4-*ТАЪРИФ:* A ва B тупламларнинг йиғиндиси (бирлашмаси) деб шундай C тупламга айтиладики, унинг элементлари A ва B тупламлардан хеч булмаганда биттасига тегишли булади ва C=A+B еки $C=A\cup B$ каби белгиланади.



$C=A\cup B$

Шундай килиб $A\cup B$ туплам элементлари ёки A га ,ёки B га,ёки хам A га, хам B га тегишли элементлардан иборатдир, яъни $c\in A\cup B \Rightarrow c\in A$ ёки $c\in B$ ёки $c\in A$ ва $c\in B$.

Худди шунингдек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_п$ – тупламлар йиғиндиси $C=A_1\cup A_2\cup A_3 \cup \ldots\cup A_п = \bigcup_{к=1}^{n} A_к$ каби белгиланади.Бу ерда C хеч булмаганда битта $A_к$ тупламга тегишли элементлар туплами сифатида аникланади.
М и с о л. 1) A={жуфт сонлар}, B={ток сонлар}$\Rightarrow A\cup B$=Z={бутун сонлар}.
2) A_1 ={1 курс талабалари}, A_2={2 курс талабалари},… . A_5={5 курс талабалари}$\Rightarrow A_1\cup A_2\ldots\cup A_5$={институтдаги барча талабалар}.
3) A={1,2,3,4,5}, B={2,4,6,8}$\Rightarrow A\cup B$={1,2,3,4,5,6,8}.
4) A={жуфт сонлар}, B={туртга булинадиган сонлар}$\Rightarrow A\cup B$=A.
Умуман олганда $B\subset A$ ёки B=A булса, у холда $A\cup B$=A булади.
Демак, тупламларда арифметикадаги кушиш амали учун «$в\neq 0$ булса, унда $а+в\neq а$ булади» деган тасдик уринли булмаслиги мумкин экан. Аммо арифметикадаги

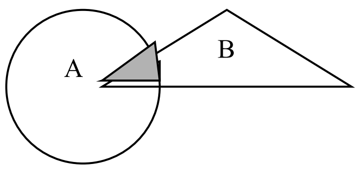
а+0=а деган хосса тупламлар учун сакланиб колади, яъни $\forall A$ туплам учун $A\cup\varnothing=A$ булади.

Арифметикада кушиш амали учун а+в=в+а (коммутативлик) ва (а+в)+с=а+(в+с) (ассоциативлик) конунлари уринли. Бу конунлар тупламларни кушиш амали учун хам сакланиб колади, яъни $\forall A$ ва B,C тупламлар учун куйидаги тенгликлар уринли:

$$A\cup B=B\cup A,\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

Бу тенгликлар кушиш таърифидан бевосита келиб чикади.

5 – ТАЪРИФ: А ва В тупламларнинг купайтмаси (кесишмаси) деб шундай С тупламга айтиладики, унинг элементлари хам А га, хам В га тегишли булади ва $C=AB$ ёки $C=A\cap B$ каби белгиланади.



$$C=A\cap B$$

Шундай килиб $c\in A\cap B\Rightarrow c\in A,\ c\in B$.Худди шунингдек $A_1, A_2, A_3,\dots,A_n$ тупламларнинг купайтмаси $C=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_к=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$ каби белгиланади ва С туплам барча $A_к$ ларга тегишли элементлардангина иборат булади.

М и с о л:

1) А={жуфт сонлар}={2,4,6,8,10,12…},
   В={3 га булинадиган сонлар}={3,6,9,12…} булса, у холда

$$A\cap B=\{6,12,18,\dots\}=\{6 \text{ га булинадиган сонлар}\}$$

2) А={талабалар},В={футболчилар}$\Rightarrow A\cap B$={футбол билан шугулланувчи талабалар}.

Арифметикада сонларни купайтириш учун коммутативлик ва ассоциативлик конунлари уринли. Тупламлар купайтмаси таърифидан бу конунлар бу ерда хам сакланиб колишини куриш мумкин, яъни

$$A\cap B=B\cap A,\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

Арифметикада кушиш ва купайтириш амаллари узаро дистрибутивлик конуни билан богланган, яъни (а+в)с=ас+вс. Бу конун тупламлар учун хам уринлидир, яъни

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

Шу тенгликни исботлаймиз.

$x\in(A\cup B)\cap C$ булсин. Унда $x\in A\cup B$ ва $x\in C$ булади. $x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ еки $x\in B$ булсин. Бундан $x\in A\cap C$ ёки $x\in A\cap C$. Бундан $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ ва $x\in B$ хол хам худди шундай каралади.

Шундай килиб, $x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$, яъни

$$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)\qquad(1).$$

Энди $y\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$ булсин. Унда $y\in A\cap C$ еки $y\in B\cap C$ еки $y\in A\cap C$ ва $y\in B\cap C$.

$y\in A\cap C$ булсин.Бу холда $y\in A, y\in C\Rightarrow y\in A\cup B, y\in C\Rightarrow y\in(A\cup B)\cap C$.

$y \in A \cap C$, $y \in B \cap C \Rightarrow y \in A$, $y \in B, y \in C \Rightarrow y \in A \cup B$, $y \in C \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$.

Демак, $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$, яъни

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C \qquad (2).$$

(1) ва (2) муносабатлардан, 2- таърифга асосан, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ эканлиги келиб чикади.

Худди шундай тарзда яна бир ушбу дистрибутивлик конунини исботлаш мумкин:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

6- ТАЪРИФ: А ва В тупламларнинг айирмаси деб, шундай С тупламга айтиладики, у А га тегишли, аммо В га тегишли булмаган элементлардан ташкил топади ва $C=A\setminus B$ каби белгиланади.

Демак, $x \in A\setminus B \Rightarrow x \in A$ ва $x \notin B$. $\forall A$ туплам учун $A\setminus A=\varnothing$, $A\setminus\varnothing=A$, $\varnothing\setminus A=\varnothing$ муносабатлар уринлидир.

Мисол : 1) Z={бутун сонлар}, B={жуфт сонлар} булса, Z\B={ток сонлар}.

2) A={барча талабалар}, B={I курс талабалари} булса, A\B={II–V курс талабалари}.

3) A={1,2,3,4,5}, B={1,3,7,9} булса, A\B={2,4,5}, B\A={7,9}.

7- ТАЪРИФ: А ва В тупламларнинг декарт купайтмаси деб $A\times B$ каби белгиланадиган ва (x,y), $x\in A$, $y\in B$ куринишдаги жуфтликлардан тузилган янги тупламга айтилади.

Масалан, A=[0,1], B=[0,2] булса, $A\times B$ учлари $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$, $M_3(1,1)$ ва $M_4(0,1)$ нукталарда жойлашган туртбурчакдаги нукталарни ифодалайди. Агарда A=R, B=R (R- хакикий сонлар туплами) булса, $A\times B=R^2$, яъни текисликдаги барча нукталарни ифодалайди.

Декарт купайтмаси учун $A\times B \neq B\times A$, яъни коммутативлик конуни бажарилмайди.

Уз-узини назорат этиш саволлари.

1. Туплам деганда нима тушунилади?
2. Туплам элементи кандай аникланади?
3. Тупламларга мисоллар келтиринг.
4. Кисм туплам кандай таърифланади?
5. Качон иккита туплам тенг дейилади?
6. Кандай туплам буш туплам дейилади?
7. Тупламлар йигиндиси кандай таърифланади?
8. Тупламлар йигиндиси амали кандай хоссаларга эга?
9. Тупламлар купайтмаси кандай таърифланади?
10. Тупламлар купайтмаси амали кандай хоссаларга эга?
11. Тупламлар айирмаси кандай таърифланади?
12. Тупламлар устидаги амаллар чизмада кандай ифодаланади?
13. Тупламларнинг декарт купайтмаси кандай аникланади?

3-МАЪРУЗА

МАТЕМАТИК МАНТИК ХАКИДА ТУШУНЧА. МУЛОХАЗАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.

Таянч иборалар: мантик фани, математик мантик, мулохаза, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция, ростлик жадвали, мулохаза инкори.

Маъруза режаси:

1. Мантик фани ва унинг асосчиси.
2. Урта Осиёда мантик фанининг ривожланиши.
3. Математик мантик ва унинг асосчиси.
4. Математик мантик фанининг ахамияти ва тадбиклари.
5. Мулохаза тушунчаси.
6. Мулохазалар йигиндиси (дизъюнкцияси) ва бу амалнинг хоссалари.
7. Мулохазалар купайтмаси (конъюнкцияси) ва бу амалнинг хоссалари.
8. Мулохазалар хулосаси (импликацияси).
9. Мулохазалар эквиваленцияси.
10. Мулохазанинг инкори.
11. Мантикий амалларнинг ростлик жадвали.

Адабиётлар:

[5] §1, I боб, § 1.1

Тафаккур конунлари, шакллари ва усулларини хамда тугри фикр юритиш ва хулоса чикаришни урганадиган фан ***мантик (логика)*** деб аталади.

"**Логика**" грекча "logika " сузидан олинган булиб, суз ёки акл деган маъноларни англатади.

Мантик фанининг асосчиси булиб юнон файласуфи ***Аристотел (Арасту)*** хисобланади. Арасту узининг "Органон", "Метафизика" каби асарларида мантик фани конунларини ёритган. Урта Осиёлик олимлардан ***Форобий*** ва ***Абу Али ибн Сино*** мантик фанини ривожланишига уз хиссаларини кушганлар.

Мантикий конунларни математик формулалар ва белгилар билан ифодалаш хамда уларни математик усулларда урганиш натижасида ***математик мантик*** фани шаклланди. Бу фаннинг шаклланишида немис математиги ва файласуфи ***Лейбниц***нинг хизматлари катта булди.

Хозирги пайтда математик мантик кибернетика, автоматлар назарияси, бошкарув назарияси каби фанларда кенг кулланилмокда.

Математик мантик фанининг асосий тушунчаларидан бири мулохаза булиб хисобланади.

ТАЪРИФ 1: Рост ёки ёлгонлиги аник маълум булган дарак гаплар ***мулохаза*** дейилади.

Масалан, “Бир йилда 12 ой бор” (рост), “25 туб сон” (ёлгон) каби тасдиклар мулохаза булади.

Аммо таърифлар, сурок ёки ундов гаплар, рост ёки ёлгонлиги аник булмаган дарак гаплар мулохаза булмайди.

– Тилимизда “ва”, “ёки”, “эмас” каби богловчилар ёрдамида соддарок гаплардан мураккаброк гаплар хосил килинади.

— — Математик мантик фанида бу богловчилар мулохазалар устида тегишли амалларни аниклайди. Бу амалларни таърифлаш учун барча мулохазалар тупламини P, унга кирувчи мулохазаларни эса A,B,C … ёки A_1 , A_2, A_3, … каби бош лотин харфлари билан белгилаймиз. Мулохазанинг “рост” ёки “ёлгон” эканлигини мос равишда 1 ёки 0 деб белгилаймиз.

Т А Ъ Р И Ф 2 : А ва В мулохазаларнинг ***дизъюнкцияси (йигиндиси)*** деб уларнинг камида биттаси рост булганда рост булувчи янги мураккаб мулохазага айтилади ва $A\vee B$ каби белгиланади.

$A\vee B$ дизъюнкция “А ёки В” каби укилади ва $A\vee B=B\vee A$ коммутативлик конунига буйсунади.

Масалан, A={талаба I курсда укийди}, B={талаба II курсда укийди} мулохазалар учун A$\vee$~~$\wedge$~~B ={талаба I ё~~е~~ки II курсда укийди} деган маънони билдиради.

Т А Ъ Р И Ф 3: А ва В мулохазаларнинг ***конъюнкцияси (купайтмаси)*** деб, уларнинг иккаласи хам рост булгандагина рост булувчи янги мураккаб мулохазага айтилади ва $A\wedge B$ каби белгиланади.

$A\wedge B$ конъюнкция «А ва В» каби укилади ва $A\wedge B=B\wedge A$ коммутативлик конунига буйсунади.

Масалан, A={ талаба I курсда укийди}, B={талаба «менежмент» йуналиши буйича укийди} мулохазалар учун $A\wedge B$ ={талаба «менежмент» йуналиши буйича I курсда укийди} деган маънога эга булади.

Т А Ъ Р И Ф 4: А ва В мулохазаларнинг ***импликацияси (хулосаси)*** деб А рост, В ёлгон булгандагина ёлгон буладиган янги мураккаб мулохазага айтилади ва $A\Rightarrow B$ каби белгиланади.

$A\Rightarrow B$ импликация «Агар А булса, у холда В булади» ёки «А дан В келиб чикади» деб укилади. Бу амалда А-шарт,В-хулоса деб аталади.

Масалан, A={талаба I курсда укийди } , B={талаба Бухоро шахрида яшайди} мулохазалар учун $A\Rightarrow B$= {Агар талаба I курсда укиса, у Бухоро яшайди},

$B\Rightarrow A$={Агар талаба Бухорода яшаса, у I курсда укийди}

деган маъноларни билдиради

Т А Ъ Р И Ф 5 : А ва В мулохазаларнинг ***эквиваленцияси*** деб, уларнинг иккаласи хам ёлгон ёки рост булгандагина рост буладиган янги мураккаб мулохазага айтилади ва $A\Leftrightarrow B$ каби белгиланади.

~~A⇔~~A⇔B эквиваленция “А булиши учун В зарур ва етарли” ёки “А факат ва факат В булганда булади” деган маънони билдиради хамда $A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$ коммутативлик конунига буйсунади.

Бу амаллар таърифини куйидаги жадвал куринишида ифодалаш мумкин :

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Бундай жадваллар ***ростлик жадваллари*** деб аталади.

Бу амаллар иккита А ва В мулохазалар оркали аникланади ва шу сабабли бинар амаллар деб аталади.

Т А Ъ Р И Ф 6 : А мулохазанинг ***инкори*** деб у рост булганда ёлгон, ёлгон булганда эса рост киймат кабул килувчи янги мулохазага айтилади ва $\rceil A$ каби белгиланади.

$\rceil A$ инкор “А эмас” деган маънони билдиради ва битта мулохаза оркали аниклангани учун унар амал хисобланади.~~деб аталади.~~

Масалан, $A = \{25$ ток сон$\}$ мулохаза учун $\rceil A = \{25$ ток эмас$\}$ ёки $\rceil A = \{25$ жуфт сон $\}$ деган маънони ифодалайди.

Таърифга асосан $A=1$(рост) булса, $\rceil A=0$ ва аксинча $A=0$ (ёлгон) булса, $\rceil A=1$ булади.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Мантик фани нима билан шугулланади?
2. Мантик фани асослари ким томонидан яратилган ва унинг кайси асарларида ёритилган?
3. Урта Осиёлик мутафаккирлардан мантик фани ривожига ким уз хиссасини кушган?
4. Математик мантик фани мохияти нимадан иборат ва унинг асосчиси ким?
5. Математик мантикнинг ахамияти нимадан иборат?
6. Мулохаза деб нимага айтилади?
7. Мулохазалар йигиндиси кандай таърифланади ва бу амал кандай хоссаларга эга?
8. Мулохазалар купайтмаси кандай аникланади ва бу амал кандай хоссаларга эга?
9. Мулохазалар импликацияси ва эквиваленцияси кандай аникланади?
10. Мулохазанинг инкори амали кандай аникланади?
11. Мантикий амалларнинг ростлик жадвали деб нимага айтилади?

4-МАЪРУЗА

МАТРИЦАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.

Таянч иборалар: матрица, матрица тартиби, матрица элементи, туртбурчакли матрица, квадрат матрица, устун матрица, сатр матрица, матрицалар тенглиги, диагонал элементлар, диагонал матрица, бирлик матрица, нол матрица, матрицани сонга купайтмаси, матрицалар йигиндиси, айирмаси, матрицалар купайтмаси.

Маъруза режаси:

1. Матрица, унинг тартиби ва элементлари.
2. Матрицаларнинг турлари.
3. Матрицалар тенглиги.
4. Бирлик ва нол матрица.
5. Матрицани сонга купайтириш.
6. Матрицаларнинг алгебраик йигиндиси.
7. Матрицаларни кушиш амалининг хоссалари.
8. Матрицалар купайтмаси.
9. Матрицалар купайтмаси амалининг хоссалари.
10. Матрицанинг иктисодий тадбигига мисол.

Адабиётлар:

[1] I боб, §22-23, [3] IV боб, §1 , [8] V боб, §60-61, [14]. 9-16.

ТАЪРИФ 1: m та сатр ва n та устундан иборат тугри туртбурчак шаклидаги $m\cdot n$ та сондан тузилган жадвал mxn тартибли матрица деб аталади.

Матрицалар A,B,C каби бош лотин харфлар билан, уларни ташкил этувчи сонлар эса a_{ij}, $в_{ij}$, c_{ij} каби белгиланади. Бу сонлар шу матрицанинг элементлари деб аталади. Бу ерда i - элемент жойлашган сатрни~~нг~~, j эса устуннинг тартиб ракамини билдиради.

Масалан, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$ матрица -2x3 тартибли булиб, унда $a_{11}=1$, $a_{13}=1.2$, $a_{22}=7.5$.

Агарда A матрицанинг тартибини курсатишга эхтиёж булса, у A_{mxn} куринишда ёзилади.

ТАЪРИФ 2: A_{mxn} матрицада $m = n$ булса, у квадрат, $m \neq n$ булса тугри туртбурчакли матрица дейилади.

Бунда, агар $m = 1$ булса, сатр матрицага ва $n = 1$ булса, устун матрицага эга буламиз. m=1 ва n =1 булганда матрица битта сонни ифодалайди. Демак, матрица маълум бир маънода сон тушунчасини умумлаштиради.

ТАЪРИФ 3: A ва B матрицалар тенг дейилади (A=B деб ёзилади), агарда улар бир хил тартибли ва уларнинг мос элементлари узаро тенг булса, яъни $a_{ij} = в_{ij}$ шарт бажарилса.

Масалан,

$$A=\begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

булса, $A = B$ деб ёзиш мумкин.

$A=\{a_{ij}\}$ матрицада a_{ii} куринишдаги элементлар диагонал элементлар дейилади.

Т А Ъ Р И Ф 4: Барча диагонал элементлари бирга тенг (a_{ii} =1), колган барча элементлари эса нолга тенг (a_{ij} =0, $i \neq j$) булган квадрат матрица бирлик матрица дейилади ва Е каби белгиланади.

Масалан, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ бирлик матрицалардир.

~~Т~~Т А Ъ Р И Ф 5 : Барча элементлари нолга тенг (a_{ij} =0) булган матрица нол матрица дейилади ва 0 каби белгиланади.

Масалан,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

нол матрицалар булади.

Т А Ъ Р И Ф 6 : Бир хил m x n тартибли A ва B матрицалар йигиндиси ёки айирмаси деб шундай m x n тартибли C матрицага айтиладики, унинг элементлари $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ каби аникланади ва C=A+B деб ёзилади.

Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицалар учун

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Матрицалар йигиндиси учун A+B=B+A (коммутативлик),
A+(B+C) = (A+B)+C (ассоциативлик) конунлари уринли булади.

Бундан ташкари A – A = 0 , A ± 0 = A , A+A =2A тенгликлар хам уринли булади.

Т А Ъ Р И Ф 7: Ихтиёрий m x n тартибли $A =\{a_{ij}\}$ матрицанинг λ сонга купайтмаси деб $\{\lambda\, a_{ij}\}$ матрицага айтилади ва у λ A каби белгиланади.

Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

матрица учун

$$6A = \begin{pmatrix} 6\cdot5 & 6\cdot4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot0 & 6\cdot2 & 6\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}$$

Матрицаларни кушиш ва сонга купайтириш амаллари учун куйидаги тengликлар уринли булади:

$$\lambda\,(A\pm B) = \lambda A \pm \lambda B\,, \quad (\lambda \pm \mu)\,A = \lambda\,A \pm \mu\,A,$$

$$0 \cdot A = O\,, \quad \lambda \cdot O = O$$

Т А Ъ Р И Ф 8 : $A_{m\times p}$ ва $B_{q\times n}$ матрицалар учун p=q шарт бажарилганда уларнинг купайтмаси (AB) деб шундай $C_{m\times n}$ матрицага айтиладики, унинг c_{ij} элементлари $(i = \overline{1,m}\ ;\ \ j = \overline{1,n})$ ушбу

$$c_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{p} a_{i\kappa}\, в_{\kappa j}$$

тенглик билан аникланади.

-Шундай килиб, c_{ij} элемент A матрицанинг i – сатр элементларини B матрицанинг j - устун мос элементларига купайтириб, уларни кушиб чикишдан хосил килинади, яъни “сатрни устунга купайтириш” коидаси билан топилади.

Масалан,

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_{2x2} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

матрицалар учун m=3, p=q=2, n = 2 булгани учун уларни купайтириш мумкин ва $AB=C_{3x2}$ матрица куйидагича булади:

$$C_{3x2} = \begin{pmatrix} 3\cdot6+1\cdot1 & 3\cdot(-4)+1\cdot2 \\ 0\cdot6+(-2)\cdot1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot2 \\ 4\cdot6+5\cdot1 & 4\cdot(-4)+5\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & -4 \\ 29 & -6 \end{pmatrix}$$

Матрицалар купайтмаси учун $AB\neq BA$, яъни коммутативлик конуни уринли булмайди. Аммо $A\,(BC) = (AB)\,C$ (ассоциативлик), $A\,(B+C) = AB + AC$, $(A+B)\,C = AC + BC$ дистрибутивлик конунлари бажарилади.

Бундан ташкари $AE = EA = A$, $A\cdot0 = 0\cdot A = 0$, $(\lambda\ A)\ B = A\ (\lambda\ B)$ ~~Т~~тенгликлар хам уринли булади.

Маъруза нихоясида матрицаларнинг иктисодий маъноси ва тадбикларини ифодаловчи мисолларни келтирамиз.

1-мисол. Алохида иктисодий тармоклар уртасида ишлаб чикариш ресурслари таксимоти жадвали куйидагича берилган булсин.

(Умумий хажмга нисбатан фоиз хисобида, ракамлар шартли)

Ресурслар	Иктисодий тармоклар		
	Саноат	Кишлок хужалик	Бошка тармоклар
1.Ёкилги	45	30	25
2.Электр энергияси	53	27	20
3.Мехнат ресурслари	38	21	41
4.Сув ресурслари	40	48	12

Бу жадвални матрица ёрдамида куйидаги кулай куринишда ифодалаш мумкин: $A_{4\times 3}=\begin{pmatrix} 45 & 30 & 25 \\ 53 & 27 & 20 \\ 38 & 21 & 41 \\ 40 & 48 & 12 \end{pmatrix}$

Бу ёзувда А матрица хар бир элементи аник маънога эга. Масалан, a_{11}=45 саноат тармоклари ёкилгининг 45 % ни, a_{21}=53 эса электр энергиясининг 53 % ини истеъмол килишини курсатади, a_{22}=27 кишлок хужалиги электр энергиясининг 27 % ини сарфлашини, a_{33}=41 эса мехнат ресурсларининг 41 % бошка тармокларда банд эканлигини ифодалайди ва хоказо.

2-Мисол. Корхона p_1,p_2 ва p_3 каби белгиланган 3 хил махсулот ишлаб чикариши маълум булсин. Бу махсулотларни ишлаб чикариш учун 2 хил хомашё s_1 ва s_2 ишлатилсин. Агар a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2) оркали i-турдаги махсулот бирлигини ишлаб чикариш учун j-тур хомашёдан канча харажат этилганини белгиласак,унда махсулотлар бирлигини ишлаб чикариш учун хомашёлар харажати меъёрини $A_{3x2}=(a_{ij})$ матрица оркали кулай куринишда ифодалаш мумкин.Масалан,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Агар ишлаб чикариш режаси C=(100 80 130) сатр матрица ва хомашё бирлигининг бахоси $B=\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$ устун матрицалар куринишида берилган булса, у холда махсулот ишлаб чикариш режасига мос келадиган хомашё харажатларининг микдорини бевосита куйидагича аниклаш мумкин:

1-тур хомашё харажати S_1= 2·100+5·80+1·130=730 бирлик,

2-тур хомашё харажати S_2= 3·100+2·80+4·130=980 бирлик.

Матрицаларни купайтириш амали оркали S=(S_1 S_2) хомашё харажати сатр матрицаси эса куйидагича топилади:

$$S=C\cdot A=(100\ \ 80\ \ 130)\times\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=(730\ \ 980).$$

Умумий хомашё харажати бахоси $Q=S\cdot B=730\cdot 30+980\cdot 50=70900$ пул бирилигин ташкил этади. Бу иктисодий масаланинг ечимини матрицалар устида амаллар оркали кискача куйидагича ифодалаш мумкин:

$$Q=S\cdot B=(C\cdot A)\cdot B=C\cdot(A\cdot B)=70900 .$$

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Матрица деб нимага айтилади?
2. Матрицанинг тартиби кандай аникланади?
3. Матрицалар кандай турларга ажратилади?
4. Кандай элементлар диагонал элементлар дейилади?
5. Бирлик матрица кандай таърифланади?
6. Качон матрица нол матрица дейилади?
7. Кайси шартда матрицаларни кушиш ёки айириш мумкин?
8. Матрицалар йигиндиси ёки айирмаси кандай топилади?
9. Матрицалар йигиндиси амали кандай хоссаларга эга?
10. Матрицани сонга купайтириш кандай аникланади?
11. Кайси шартда матрицаларни купайтириш мумкин?
12. Купайтма матрица тартиби кандай топилади?
13. Матрицалар купайтмаси кандай аникланади?
14. Матрицаларни купайтириш амали кандай хоссаларга эга?
15. Матрицанинг иктисодий тадбигига мисол келтиринг?

5-МАЪРУЗА

АНИКЛОВЧИЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

Таянч иборалар: аниклoвчи таърифи, иккинчи тартибли аниклoвчи, учинчи тартибли аниклoвчи, аниклoвчи хоссалари, алгебраик тулдирувчи, аниклoвчиларни сатр ёки устун буйича ёйиш (Лаплас теоремаси), юкори тартибли аниклoвчилар.

Маъруза режаси:

1. Аниклoвчи хакида тушунча.
2. II тартибли аниклoвчи ва уни хисоблаш формуласи.
3. III тартибли аниклoвчи ва уни хисоблаш формуласи.
4. Аниклoвчининг хоссалари.
5. Аниклoвчининг нолга тенг булиш шартлари.
6. Аниклoвчи элементининг алгебраик тулдирувчиси.
7. Лаплас теоремаси.
8. Юкори тартибли аниклoвчиларни хисоблаш.

Адабиётлар:

[1] I боб, §9-10 [3] I боб, §1 [8] V боб, §65-69,
[14]. 16-26.

Т А Ъ Р И Ф: n – тартибли квадрат матрица элементларидан маълум бир коида асосида хосил килинадиган сонли ифода n – тартибли аниклoвчи деб аталади. Масалан, иккинчи тартибли аниклoвчи деб, иккинчи тартибли квадрат матрицадан куйидагича хосил килинган ва белгиланган сонли ифодага айтилади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1)$$

Масалан,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58$$

Учинчи тартибли аниклoвчи эса куйижДаги сонли ифода каби аникланади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \qquad (2)$$

Учинчи тартибли аниклoвчини хисоблашга мисол келтирамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 6 & -2\\ 1 & 5 & 4\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot5\cdot0+6\cdot4\cdot3+1\cdot(-1)\cdot(-2)-$$

$$-(-2)\cdot5\cdot3-6\cdot1\cdot0-4\cdot(-1)\cdot(2)=112$$

Аникловчилар ва матрицалар орасида куйидаги ухшашлик ва фарклар мавжуд:

1) Матрица сонлар жадвали булса, аникловчи эса сонли ифода булиб, унинг киймати сондан иборатдир;

2) Мтрица ёйсимон чизиклар билан белгиланса, аникловчи тугри чизиклар билан белгиланади

3) Улар ичидаги сонлар элементлар дейилади

4) Улар сатрлар ва устунлардан иборат;

5) Аниқловчиларда устун ва сатрлар сони тенг булиши керак, аммо матрицаларда эса бундай бўлиши шарт эмас.

Энди ихтиёрий тартибли аникловчиларнинг хоссалари билан танишамиз. Аниклик ва соддалик учун бу хоссаларни учинчи тартибли аникловчилар учун ифодалаймиз. Бу хоссаларни уринли эканлигини (2) формула ёрдамида текшириб куриш мумкин ва буни талабаларга мустакил иш сифатида хавола киламиз.

1. Агар аникловчининг барча сатрлари мос устунлар билан алмаштирилса, у холда аникловчиниг киймати узгармайди.

Масалан,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

Бу хоссадан аникловчининг сатр ва устунлари тенг мохиятли эканлиги келиб чикади.

2. Аникловчининг иккита ихтиёрий сатрлари (устунлари) урни узаро алмашса, аникловчининг факат ишораси тескарисига узгаради.

Масалан,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

3. Агар аникловчининг иккита сатр (устун) элементлари бир хил булса, у холда унинг киймати нолга тенг.

Исбот : Бунинг учун бир хил элементли сатрларни (устунларни) уринларини алмаштирамиз. Натижада аникловчи куриниши узгармай колади. Бундан, олдинги хоссага асосан, $\Delta = -\Delta$ тенглик хосил булади ва ундан $\Delta=0$ эканлиги келиб чикади.

4. Сатрнинг(устуннинг) умумий купайтувчисини аникловчи белгисидан ташкарига чикариб, купайтма шаклида ёзиш мумкин.

Масалан,

$$\begin{vmatrix}ka_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{21} & a_{22} & a_{23}\\ ka_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

5. Агар аникловчининг бирор сатри (устуни) ноллардан иборат булса, у холда аникловчининг киймати нолга тенг булади.

6. Агар аникловчининг ихтиёрий иккита сатр (устун) элементлари узаро пропорционал булса, у холда унинг киймати нолга тенг,

Масалан, аникловчининг I ва II сатрлари пропорционал булса,

$$\begin{vmatrix} к\,a_{11} & кa_{12} & кa_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = к \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = к \cdot 0 = 0$$

7. Агар аникловчининг бирор сатри (устуни) икки хад йигиндисидан иборат булса, у холда бу аникловчи иккита мос аникловчилар йигиндисига ёйилади

Масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+в_{31} & a_{32}+в_{32} & a_{33}+в_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{vmatrix}$$

Умумий холда n - тартибли ($n \in N$) аникловчи куйидагича ёзилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Юкори тартибли аникловчиларни умумий холда хисоблаш формулалари жуда мураккаб куринишда булади. Шу сабабли унинг элементининг алгебраик тулдирувчиси тушунчаси киритилади.

ТАЪРИФ: a_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) элементнинг алгебраик тулдирувчиси деб аникловчининг i-сатри ва j- устунини ташлаб юборишдан хосил булган (~~даги~~ n-1) тартибли аникловчи~~га~~ кийматини $(-1)^{i+j}$ га купайтмасига айтилади ва A_{ij} каби белгиланади.

Масалан,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

~~А~~аникловчининг куйидаги туккизта алгебраик тулдирувчилари мавжуд ~~.~~:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Худди шундай, n - тартибли аникловчининг алгебраик тулдирувчилари n^2 та (n– 1)- тартибли аникловчилардан иборат булади.

Юкори тартибли аникловчиларни хисоблаш алгебраик тулдирувчилар ёрдамида куйидаги теорема оркали осонрок бажарилади.

ТЕОРЕМА(Лаплас): Учинчи тартибли аникловчининг киймати унинг исталган сатр(устун) элементларини уларнинг мос алгебраик тулдирувчиларига купайтмаларининг йигиндисидан иборат булади, яъни

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\bullet A_{11}+a_{12}\bullet A_{12}+a_{13}\bullet A_{13} \\ \Delta &= a_{21}\bullet A_{21}+a_{22}\bullet A_{22}+a_{23}\bullet A_{23} \\ \Delta &= a_{31}\bullet A_{31}+a_{32}\bullet A_{32}+a_{33}\bullet A_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\bullet A_{11}+a_{21}\bullet A_{21}+a_{31}\bullet A_{31} \\ \Delta &= a_{12}\bullet A_{12}+a_{22}\bullet A_{22}+a_{32}\bullet A_{32} \\ \Delta &= a_{13}\bullet A_{13}+a_{23}\bullet A_{23}+a_{33}\bullet A_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Бу тенгликларнинг уринли эканлигини тугридан-тугри хисоблашлар ёрдамида курсатиш мумкин. (3) ёки (4) аникловчини сатрлар ёки устунлар буйича ёйилмаси дейилади.

ИЗОХ. Ихтиёрий n-тартибли аникловчилар учун хам келтирилган теоремани индукция усулида исботлаш мумкин.

Юкори тартибли аникловчи кийматини топишда хисоблашларни камайтириш максадида унинг ноллари купрок булган сатр ёки устун буйича ёйиш максадга мувофикдир.

М и с о л : Туртинчи тартибли аникловчини иккинчи сатр буйича ёйиб, кийматини Лаплас теоремаси оркали хисоблаймиз.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\, 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\bullet 66 - 18 = 198 - 18 = 180$$

__Изох:__ Аникловчининг бирор сатр (устун) элементларини бошка сатр (устун) мос элементларининг алгебраик тулдирувчиларига купайтириб, купайтмаларни кушиб чиксак, йигиндида доимо 0 хосил булади.

Масалан,

$$a_{11} \bullet A_{21} + a_{12} \bullet A_{22} + a_{13} \bullet A_{23} = 0,$$
$$a_{12} \bullet A_{11} + a_{22} \bullet A_{21} + a_{32} \bullet A_{31} = 0.$$

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. II тартибли аникловчи кандай хисобланади?
2. III тартибли аникловчи кайси усулларда хисобланади?
3. Аникловчи ва матрица уртасида кандай ухшашлик ва фарклар булади?
4. Аникловчида сатр ва устунлар кандай мохиятли?
5. Аникловчида сатрлар ёки устунлар урни алмаштирилса нима булади?
6. Кайси шартларда аникловчини хисобламасдан унинг киймати нол булишини айтиш мумкин?
7. Аникловчи элементининг алгебраик тулдирувчиси деб нимага айтилади?
8. Аникловчилар учун Лаплас теоремаси кандай ифодаланади?
9. Юкори тартибли аникловчилар кандай хисобланади?

6-МАЪРУЗА .

ЧИЗИКЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ.

Таянч иборалар: чизикли тенгламалар системаси, системанинг коэффициентлари,системанинг озод хадлари, системанинг ечимлари,биргаликда булган тенгламалар системаси, биргаликда булмаган система, аник ва аникмас системалар,система матрицаси, системанинг кенгайтирилган матрицаси, матрицанинг ранги, Кронекер-Капелли теоремаси, системанинг базис ечимлари, системанинг эркли ечимлари, бир жинсли тенгламалар системаси, бир жинсли тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари.

Маъруза режаси:

1. Чизикли тенгламалар системаси.
2. Системанинг ечимлари ва улар буйича турлари.
3. Матрицанинг ранги.
4. Кронекер-Капелли теоремаси.
5. Системанинг базис ва эркли ечимлари.
6. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси.
7. Бир жинсли системанинг тривиал ва нотривиал ечимлари.
8. Бир жинсли системанинг фундаментал ечимлари.

Адабиётлар:

[1]. §20, §26, §27; [14]. 38-39, 29-35, 48-56 бетлар.

Купгина амалий масалалар, шу жумладан иктисодий масалалар, чизикли тенгламалар системаси тушучасига олиб келади.

ТАЪРИФ 1: n номаълумли m та чизикли тенгламалар системаси деб куйидаги куринишдаги системага айтилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n=в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=в_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n=в_m \end{cases} \qquad (1)$$

Бу ерда a_{ij} ва $в_i$ (i=1,2,…,m, j=1,2,…n) – берилган ва ихтиёрий узгармас сонлар булиб, a_{ij} сонлари (1) системанинг ***коэффициентлари***, $в_i$ эса ***озод хадлари*** дейилади.

Йигинди белгиси ёрдамида (1) системани кискача куйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = в_i \ , \ i=1,2,\ldots, m. \qquad (2)$$

Агарда (1) ёки (2) чизикли тенгламалар системасининг a_{ij} коэффициентларидан тузилган туртбурчакли матрицани А, x_j номаълумлар ва $в_i$ озод хадлардан хосил килинган устун матрицаларни мос равишда X ва B каби белгиласак, унда матрицаларни купайтириш амалидан фойдаланиб бу системани ихчам ва кулай булган AX=B куринишда ёзиш мумкин.

Т А Ъ Р И Ф 2 : (1) ёки (2) системанинг ***ечими*** деб шундай $x_1=k_1$, $x_2=k_2$, …, $x_n=k_n$ n та сонларга айтиладики, улар тенгламалар системасига куйилганда хар бир тенглама каноатлантирилади, яъни айниятга айланади.

Масалан,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 32 \end{cases}$$

n=3 номаълумли m=2 та тенгламалар системасининг ечими $x_1=1$, $x_2= -2$ ва $x_3=5$ эканлигини бевосита текшириш оркали курсатиш мумкин.

Т А Ъ Р И Ф 3 : Агар чизикли тенгламалар системаси хеч булмаганда битта ечимга эга булса, у холда бу система ***биргаликда*** дейилади; агар ечимга эга булмаса система ***биргаликда эмас*** дейилади. Биргаликдаги тенгламалар системаси ягона ечимга эга булса,у ***аник*** дейилади. Биргаликдаги тенгламалар системаси куп ечимга эга булса, у ***ноаник*** тенгламалар системаси дейилади.

Масалан,юкорида курилган система биргаликда булган ноаник системадир,чунки у $x_1=c$, $x_2=(8-14c)/3$ ва $x_3=(34-19c)/3$ куринишдаги чексиз куп ечимга эга.Бунда с ихтиёрий сон булиб, с=1 булганда юкорида куриб утилган $x_1=1$, $x_2=-2$ ва $x_3=5$ ечимлар хосил булади.

Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 10x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг биринчиси биргаликда ва аник (ягона $x_1=1$ ва $x_2=0$ ечимга эга), иккинчиси эса биргаликда эмас (унинг биринчи тенгламаси уринли булганда иккинчи тенгламасининг унг томони 4 эмас,балким 2 булиши керак).

Берилган (1) тенгламалар системасини биргаликда ёки биргаликда эмаслигини умумий холда аниклаш учун унинг коэффициентларидан тузилган ушбу mxn тартибли A матрицани киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Бу матрицага озод хадлар устунини бирлаштириб,ушбу mx(n+1)тартибли

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & в_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & в_4 \end{array} \right) \qquad (4)$$

кенгайтирилган A_1 матрицани хосил киламиз.

Энди куйидаги тушунчаларни киритамиз.

<u>Т А Ъ Р И Ф 4 :</u> mxn тартибли С матрицанинг ихтиёрий k та сатр ва устунларини колдириш оркали хосил килинган k- тартибли ($k \le \min(m,n)$) квадрат матрицанинг аникловчиси С матрицанинг ***k-тартибли минори*** дейилади.

<u>Т А Ъ Р И Ф 5 :</u> С матрицанинг нолдан фаркли минорларининг энг катта тартиби шу матрицанинг ***ранги*** дейилади ва rangC ёки r(C) каби белгиланади.

Масалан, 3x4 тартибли

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги r(C)=2 булишини текшириб куриш мумкин.

КРОНЕКЕР-КАПЕЛЛИ ТЕОРЕАМАСИ: Агар (1) система матрицаси А ва унинг кенгайтирилган матрицаси A_1 ларнинг ранги узаро тенг, яъни $r(A)=r(A_1)$ булса ва факат шу холда (1) чизикли тенгламалар системаси биргаликда булади.

Бу теоремани исботсиз кабул этамиз.

Биргаликда булган чизикли тенгламалар системаси учун куйидаги тасдиклар уринли булишини курсатиш мумкин:

1. Агар биргаликдаги система матрицасининг ранги r(A) тенгламалар системасига кирувчи номаълумлар сони n га тенг, яъни r(A)=n булса, у холда (1) система ягона ечимга эга булади.
2. Агар биргаликдаги система матрицасининг ранги r(A) номаълумлар сони n дан кичик ($r(A)<n$)булса, у холда (1) система ноаник булиб, чексиз куп ечимга эга.

(1) системада $r(A)= r<n$ булсин. Агар $x_1,x_2,\dots,x_r$ номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган матрицанинг аникловчиси нолдан фаркли булса, у холда $x_1,x_2,\dots,x_r$ номаълумлар ***асосий ёки базис узгарувчилар*** дейилади. Колган n-r та номаълум эса эса ***асосий булмаган ёки эркли узгарувчилар*** деб аталади.(1) системанинг барча n-r та асосий булмаган узгарувчилари нолга тенг булган ечими ***базис ечим*** дейилади.

<u>М и с о л :</u> Ушбу системани текширинг ва ечимини топинг:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \end{cases}$$

<u>Е ч и ш :</u> Асосий ва кенгайтирилган матрицаларларни тузамиз:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \qquad A_1=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

Бу ерда $r(A)= r(A_1)= r=2$ эканлигини текшириб куриш мумкин. Система матрицасининг ранги номаълумлар сонидан кичик,яъни $r=2<4$ булгани учун бу система чексиз куп ечимга эгадир.Бу системанинг x_1 ва x_2 узгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тузилган аникловчи нолдан фаркли ва шу сабабли уларни асосий узгарувчилар деб олиш мумкин.Бундан ташкари система матрицасининг ранги $r=2$ булгани учун унинг бир тенгламасини,масалан учинчисини,ташлаб юбориш мумкин.Асосий узгарувчиларни хосил килинган тенгламалар системасининг чап томонида колдириб, колган x_3 ва x_4 асосий булмаган узгарувчиларни тенгламаларнинг унг томонига утказамиз:

$$\begin{cases} x_1+2x_2 = -6+2x_3-3x_4\\ 2x_1 -x_2 = 5- x_3 + x_4.\end{cases}$$

Бу системани мактабдан таниш булган кушиш усулида ечиб,

$$x_1=(4-x_4)/5, \qquad x_2=(5x_3-7x_4-17)/5.$$

эканлигини топамиз.Асосий булмаган x_3 ва x_4 узгарувчиларга ихтиёрий $x_3=c_1$ ва $x_4=c_2$ кийматлар бериб, системанинг чексиз куп ечимлари куйидаги куринишда булишини топамиз:

$$x_1=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}c_2, \quad x_2=-\frac{17}{5}+c_1-\frac{7}{5}c_2, \quad x_3=c_1, \quad x_4=c_2.$$

Т А Ъ Р И Ф 6 : Агар (1) системанинг унг томонидаги барча озод хадлар 0 га тенг булса, у холда бу система чизикли ***бир жинсли*** тенгламалар системаси дейилади.

Демак, n номаълумли m та бир жинсли чизикли тенгламалар системаси куйидаги куринишга эга булади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots + a_{mn}x_n = 0\end{cases} \qquad (5)$$

Чизикли бир жинсли тенгламалар системаси хамма вакт биргаликдадир, чунки у хеч булмаганда $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0$ ечимга эга.Бу (5) системанинг ***тривиал ечими*** дейилади. Агар (5) системада $m=n$ ва унинг аникловчиси $\Delta_A\neq 0$ булса, у холда бу система факат тривиал ечимга эга булади.Агар (5) системанинг ечими ичида камида битта нолдан фаркли сон мавжуд булса,у ***нотривиал***

ечим деб аталади. Нотривиал ечимлар $m<n$ булганда ёки $m=n$ булиб, систематнинг аникловчиси $\Delta_A=0$ булганда мавжуд булиши мумкин. Бошкача айтганда чизикли бир жинсли тенгламалар система нолдан фаркли ечимга эга булиши учун унинг коэффициентларидан тузилган А матрицанинг ранги узгарувчилар сонидан кам , яъни $r(A)<n$ булиши керак.

Бир жинсли (5) системанинг $x_1=к_1$, $x_2=к_2,\ldots$, $x_n=к_n$ ечимини $e_1=(к_1,к_2,к_3,\ldots,к_n)$ сатр матрица куринишда белгилаймиз. Чизикли биржинсли тенгламалар системасининг ечимлари куйидаги хоссаларга эга:

1. Агар $e_1=(к_1,к_2,к_3,\ldots,к_n)$ (5) системасининг ечими булса, у холда ихтиёрий λ сони учун $\lambda e_1=(\lambda к_1, \lambda к_2, \lambda к_3,\ldots, \lambda к_n)$ хам шу системасининг ечими булади.
2. Агар $e_1=(к_1,к_2,к_3,\ldots,к_n)$ ва $e_2=(l_1, l_2, l_3,\ldots, l_n)$ (5) системасининг ечимлари булса, у холда уларнинг чизикли комбинацияси
$$c_1e_1+ c_2e_2 = (c_1к_1+c_2l_1,\ c_1к_2+c_2l_2,\ldots,\ c_1к_n+c_2l_n)$$
хам (5) системаинг ечими булади.

<u>ТАЪРИФ 6 :</u> (5) системанинг кандайдир e_1, e_2, …, $e_к$ ечимлари чизикли богликмас дейилади,агарда $c_1e_1+c_2\ e_2+\ \ldots+c_к\ e_к=0$ тенглик факат ва факат $c_1=c_2=\ldots=c_к=0$ булганда бажарилса.

Чизикли бир жинсли тенгламалар системаси ечимларининг хар кандай чизикли комбинацияси яна шу системанинг ечими булишлиги юкоридаги хоссалардан келиб чикади. Шунинг учун шундай чизикли боглик булмаган ечимларни топиш керакки, улар оркали системанинг барча колган ечимлари чизикли ифодалансин.

<u>ТАЪРИФ 7 :</u> Чизикли боглик булмаган $e_1,e_2,\ldots, e_к$ ечимлар системаси ***фундаментал ечимлар*** системаси дейилади, агар (5) системанинг хар кандай ечимини шу $e_1,e_2,\ldots, e_к$ ечимларнинг чизикли комбинацияси куринишида ифодалаб булса.

ТЕОРЕМА: Агар чизикли биржинсли тенгламалар системаси номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган А матрицанинг ранги r номаълумлар сони n дан кичик булса, у холда (5) системанинг хар кандай фундаментал ечимлар системаси n-r та ечимдан иборат булади ва (5) системанинг умумий ечими

$$c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + \ldots + c_к e_к$$

куринишда булади. Бу ерда e_1, e_2, …, $e_к$ – ихтиёрий фундаментал ечимлар системаси, c_1, c_2, …, $c_к$ –ихтиёрий сонлар ва $к=n-r$.

n номаълумли m та (1) чизикли тенгламалар системасининг умумий ечими унга мос булган бир жинсли (5) чизикли тенгламалар системасининг умумий ечими билан (1) системанинг кандайдир хусусий ечимлари йигиндисига тенглигини курсатиш мумкин.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Чизикли тенгламалар системаси кандай куринишда булади?
2. Системанинг коэффициентлари, номаълумлари ва озод хадлари деб нимага айтилади?
3. Системанинг ечимлари кандай таърифланади?
4. Качон система биргаликда ва качон биргаликда эмас дейилади?
5. Качон система аник ва качон аникмас дейилади?
6. Матрицанинг ранги кандай аникланади?
7. Кроникер-Капелли теоремаси нимани аниклайди?
8. Кайси шартда чизикли тенгламалар системаси ягона ечимга эга?
9. Кайси шартда чизикли система чексиз куп ечимга эга?
10. Системанинг базис узгарувчилари деб нимага айтилади?
11. Системанинг эркли узгарувчилари деб нимага айтилади?
12. Кандай ечим базис ечим деб аталади?
13. Качон чизикли система бир жинсли дейилади?
14. Тривиал ва нотривиал ечимлар кандай таърифланади?
15. Кайси шартда бир жинсли система нотривиал ечимга эга ?
16. Бир жинсли система ечимлари кандай хоссаларга эга?
17. Фундаментал ечимлар системаси кандай таърифланади?
18. Фундаментал ечимлар сони кандай топилади?

7 - МАЪРУЗА .

ЧИЗИКЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШНИНГ КРАМЕР ВА ГАУСС УСУЛЛАРИ.

Таянч иборалар: чизикли тенгламалар системаси, коэффициент, озод хад, асосий аникловчи, ёрдамчи аникловчи, Крамер формуласи, Гаусс усули.

Маъруза режаси:

1. Чизикли тенгламалар системаси.
2. Чизикли тенгламалар системасининг ечимлари.
3. Системанинг асосий ва ёрдамчи аникловчилари.
4. Крамер формулалари.
5. Системанинг ягона, чексиз куп ёки ечимга эга булмаслик шартлари.
6. Гаусс усулининг тугри йули.
7. Гаусс усулининг тескари йули.
8. Крамер ва Гаусс усулларининг кулайликлари хамда камчиликлари.
9. Чизикли тенгламалар системасини иктисодий масалаларни ечишга тадбигига доир мисоллар.

Адабиётлар:

[1] I боб, §20-21 [3] I боб, §2 [8] IV боб, §51-57, V боб, §70
[14]. 40-47, 55-56 бетлар.

Бу маърузада олдин куриб утилган чизикли тенгламалар системасининг хусусий,яъни номаълумлар ва тенгламалар сони тенг (n=m) булган холда ечимини топиш масаласи билан шугулланамиз.

Дастлаб, мактаб математика курсидан маълум булган, икки номаълумли чизикли тенгламалар системасини (n=m=2) курамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=в_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Бу ерда a_{ij} системанинг коэффицентлари, $в_i$ системанинг озод хадлари, x_j системанинг номаълумлари ва (1) системадаги тенгламаларни айниятга айлантирувчи $x_j=\alpha_j$ сонлари системанинг ечимлари деб аталишини эслатиб утамиз.. Бунда система ечими ягона, чексиз куп ёки мавжуд булмаслиги мумкинлиги бизга маълум.

(1) система учун Δ асосий ва иккита Δ_1, Δ_2 ёрдамчи аникловчиларни куйидагича киритамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} в_1 & a_{12} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{21} & в_2 \end{vmatrix}$$

Δ асосий аникловчи системанинг коэффицентларидан хосил килиниб, ёрдамчи аникловчилар эса унинг устунларини озод хадлар билан алмаштиришдан хосил килинади.

(1) система тенгламаларини дастлаб мос равишда a_{22} ва $-a_{12}$ ларга купайтириб, сунгра кушамиз:

$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\,x_1+(a_{12}\,a_{22}-a_{22}a_{12})x_2=в_1a_{22}-в_2\,a_{12}$

Бу тенгликни киритилган аникловчилар оркали куйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} в_1 & a_{11} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_1 = \Delta_1 \qquad (2)$$

Шунингдек (1) система тенгламаларини мос равишда $(-a_{21})$ ва a_{11} ларга купайтириб кушсак, у холда

$(a_{11}a_{21}-a_{21}a_{11})x_1+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=в_2a_{11}-в_1a_{21}$

Юкоридагидек

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{22} & в_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta_2 \qquad (3)$$

Агар номаълумларга нисбатан (2) ва (3) чизикли тенгламаларни ечсак,

$$x_1 = \Delta_1/\Delta \text{ ва } x_2 = \Delta_2/\Delta \qquad (4)$$

формулаларга эга буламиз. Улар (1) система ечими учун ***Крамер формулалари*** деб юритилади.

Энди уч номаълумли 3 та тенгламалар системасини карайлик:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=в_1 \\ a_{31}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=в_1 \end{cases} \qquad (5)$$

Бу системанинг ечими учун хам Крамер формулаларини чикариш кийин эмас.

Куйидаги асосий аникловчини киритамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бунда i устунни $в_1$, $в_2$, $в_3$ озод хадлар устуни билан алмаштириб Δ_i, $i=1,2,3$ ёрдамчи аникловчиларни хосил киламиз.

a_{ij} элементнинг алгебраик тулдирувчисини A_{ij} каби белгилайлик.

(5) система тенгламаларини мос равишда Δ аникловчидаги биринчи устун элементларининг алгебраик тулдирувчиларига (A_{11},A_{21},A_{31}) купайтириб кушиб чикайлик.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})x_2+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+$$
$$+a_{33}A_{31})x_3=в_1A_{11}+в_2A_{21}+в_3A_{31};$$

Охирги мунособатни аникловчилар тилига утказсак ва Лаплас формуласидан фойдалансак, $\Delta x_1+0x_2+0x_3=\Delta_1$ ёки $\Delta x_1=\Delta_1$ тенгламани оламиз.

Шунингдек 2-устун ёки 3-устун элементлари алгебраик тулдирувчиларини мос равишда (5) система тенгламаларига купайтириб кушиб чиксак, $\Delta x_2 = \Delta_2$ ва $\Delta x_3 = \Delta_3$ тенгламаларни оламиз.

Бу тенгламалардан (5) система учун

$$x_1=\Delta_1/\Delta\ , \qquad x_2=\Delta_2/\Delta\ , \qquad x_3=\Delta_3/\Delta$$

Крамер формулаларини хосил киламиз.

М и с о л : Система Крамер усулида ечилсин:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

Е ч и ш : Асосий ва ёрдамчи аникловчиларни хисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =18, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =-5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} =-1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =7.$$

Крамер формулаларига асосан

$x_1 = \Delta_1/\Delta = -5/18$, $x_2 = \Delta_2/\Delta = -1/18$, $x_3 = \Delta_3/\Delta = 7/18$.

ИЗОХ: (1) ёки (5) система ягона ечимга эга булиши учун $\Delta \neq 0$ булиши керак. Агарда $\Delta=0$ ва $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ булса система чексиз куп ечимга эга булади. Агарда $\Delta=0$ ва $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ёрдамчи аникловчилардан камида биттаси нолдан фаркли булса , система ечимга эга булмайди.

Энди системани Гаусс усулида ечишни куриб чикамиз. Бу усул мохиятини (5) системани ечиш оркали курсатамиз. (5) системани Гаусс усулида ечиш учун унинг иккинчи тенгламасидан x_1 номаълумни, учинчи тенгламасидан эса x_1 ва x_2 номаълумларни йукотиб, куйидаги учбурчак куринишдаги системага келамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=в_1 \\ c_{22}x_2+c_{23}x_3=d_2 \\ c_{33}x_3=d_3 \end{cases}$$

Бу Гаусс усулининг тугри йули деб аталади.

Учбурчакли системанинг охирги тенгламасидан бошлаб, бирин-кетин x_3, x_2 ва x_1 номаълумни кетма–кет топамиз. Бу Гаусс усулининг тескари йули деб аталади.

М и с о л :

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=20 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-11 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=9 \end{cases}$$

<u>Е ч и ш</u> : Иккинчи ва учинчи тенгламалардан x_1 номаълумни йукотамиз:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=20 \\ -17x_2+16x_3=82 \\ 8x_2-5x_3=-31 \end{cases}$$

Энди учинчи тенгламадан x_2 номаълумни йукотамиз:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=20 \\ -17x_2+16x_3=82 \\ 43x_3=129 \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан $x_3=3$, сунгра иккинчи тенгламадан $x_2=-2$ ва нихоят биринчи тенгламадан $x_1=1$ эканлигини топамиз.

Умумий , $n=m\geq 4$ булган холда хам Крамер формулалари ва Гаусс усули юкорида куриб утилган сингари булади.

Крамер ва Гаусс усулларининг кулайликлари ва камчиликларини курсатамиз.

1) Крамер формулалари ихтиёрий чизикли система учун бир хил куринишга эга.
2) Крамер формулаларида ечимларнинг ихтиёрий бири топилиши мумкин.
3) Крамер формуласи икки ва уч номаълумли система учун кулай.
4) Турт ва ундан ортик номаълумли система учун Крамер формулаларидан фойдаланиш мураккаб.
5) Гаусс усули аникловчиларни хисоблашни талаб этмасдан, факат коэффициентлар ва озод хадлар устида арифметик амаллар бажариш оркали амалга оширилади.
6) Гаусс усулини компьютерда амалга ошириш осон.
7) Гаусс усулида жуда куп арифметик амаллар бажариш талаб этилади.
8) Гаусс усулида номаълумлардан факат бирини топиб булмайди.

Чизикли тенгламалар системаси иктисодий масалаларни ечишда жуда кенг микёсда кулланилади. Купгина иктисодий масалаларни чизикли тенгламалар системаси ёрдамида ечиш жараёнида хатто янги чизикли дастурлаш фани вужудга келди.

Куйидаги масалаларга мурожаат этайлик.

1-масала. Оёк кийим фабрикаси 3 хил махсулот, яъни этик, туфли ва ботинка ишлаб чикаришга ихтисослаштирилган булсин. Шу махсулотларни ишлаб чикариш учун 3 хил S_1, S_2 ва S_3 хомашё ишлатилсин. Хар бир жуфт оёк кийимига сарф буладиган хомашё харажати меъёри ва хомашёларнинг бир кунлик сарфланадиган микдори куйидаги жадвалда берилган булсин:

Хомашё тури	Бир жуфт оёк кийими и/ч.га сарф буладиган хомашё			Хомашёнинг бир кунлик сарф микдори. (шартли ракамлар)
	Этик	Туфли	Ботинка	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Бу маълумотлар асосида хар бир оёк кийиминнинг бир кунлик ишлаб чикарилиш микдори топилсин.

Ечиш: Масалани ечиш учун этик, туфли ва ботинканинг бир кунлик ишлаб чикарилиш микдорларини мос равишда x_1,x_2 ва x_3 деб белгилаймиз.Унда,масала шартларига асосан, куйидаги чизикли тенгламалар системасини хосил киламиз:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини юкорида куриб утилган усуллардан бири ёрдамида ечиб, x_1=200, x_2=300 ва x_3=200 эканлигини топамиз. Демак, фабрика бир кунда 200 жуфт этик, 300 жуфт туфли ва 200 жуфт ботинка ишлаб чикарар экан.

2-масала. 1-чи ва 2-автохужаликларга 2 та заводдан автомобиллар жунатилади. 1-автохужаликнинг эхтиёжи 200 автомобил, 2- автохужаликнинг эхтиёжи эса 300 автомобилни ташкил этсин. 1-завод 350 та, 2- завод эса 150 та автомобил ишлаб чикарган. Заводлардан хар бир автохужаликка етказиб бериладиган битта автомобилга килинадиган сарф-харажат куйидаги жадвалда берилган:

Завод	Бир автомобилни етказиб беришга буладиган харажат	
	1- автохужалик	2- автохужалик
1-завод	15 $	20 $
2-завод	8 $	25 $

Автомобилларни етказиб беришга ажратилган сарф-харажат микдори 7950 пул бирлигини ташкил этса, заводлардан автомобилларни хужаликларга етказиб беришнинг режаси топилсин.

Ечиш: Бу масалани ечиш учун i-заводдан j-автохужаликка етказиб бериладиган автомобиллар микдорини x_{ij} (i,j=1,2) деб белгиласак , масала шартига кура куйидаги система хосил булади:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12} = 350 \\ x_{21} + x_{22} = 150 \\ x_{11} + x_{12} = 200 \\ 15x_{11}+20x_{12}+8x_{21}+25x_{22}=7950. \end{cases}$$

Бу 4 номаълумли 4 та чизикли тенгламалар системаси булиб, уни бирор усулда ечиш натижасида x_{11}=50, x_{12}=300, x_{21}=150, x_{22}=0 жавобни хосил киламиз. Бу ечим аник иктисодий мазмунга эгадир, яъни 2-заводда ишлаб чикарилган барча 150 автомобилни 2-чи автохужаликка, 1-заводда ишлаб чикарилган 350 та автомобилларнинг 300 тасини 1- автохужаликка ва колган 50 тасини эса 2- автохужаликка юборилса, ташиш харажатлари курсатилган микдорда булади.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Чизикли тенгламалар системаси кандай куринишд булади?
2. Системанинг коэффициентлари ва озод хадлари деб нимага айтилади?
3. Системанинг ечими кандай таърифланади?
4. Системанинг асосий аникловчиси деб нимага айтилади?
5. Системанинг ёрдамчи аникловчилари кандай хосил килинади?
6. Система ечими учун Крамер формулалари кандай куринишда булади?
7. Кайси шартларда система ягона ёки чексиз куп ечимга эга булади?
8. Система кайси шартда ечимга эга булмайди?
9. Гаусс усулининг мохияти нимадан иборат?
10. Крамер усули кандай афзалликларга ва камчиликларга эга?
11. Гаусс усули кандай афзаллик ва камчиликларга эга?
12. Чизикли тенгламалар системасининг иктисодий масалаларни ечишга доир мисоллар келтиринг.

8 – МАЪРУЗА

ТЕСКАРИ МАТРИЦА. ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ МАТРИЦАЛАР УСУЛИДА ЕЧИШ.

Таянч иборалар: тескари матрица, тескари матрица хоссаси, матрицалар усули, Леонтьевнинг тармоклараро мувозанат модели.

Маъруза режаси:

1. Тескари матрица таърифи.
2. Тескари матрицани мавжудлик ва ягоналик шарти.
3. Тескари матрицани топиш алгоритми.
4. Чизикли тенгламалар системасини матрицалар усулида ечиш.
5. Матрицалар усулининг афзалликлари ва камчиликлари.
6. Леонтьевнинг тармоклараро мувозанат модели.

Адабиётлар:

[1] I боб, §24-25 [3] IV боб, §2-4, [14]. 26-29, 40-41, 56-60 бетлар.

Т А Ъ Р И Ф : Берилган А квадрат матрицага тескари матрица деб шундай бир (уни келажакда A^{-1} каби белгилаймиз) квадрат матрицага айтиладики, агарда $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ (Е-бирлик матрица) шарт бажарилса.

Агарда

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

булса,

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

матрица А га тескари матрица булишини Лаплас теоремаси ёрдамида курсатиш мумкин. Бунда A_{ij} лар А матрицанинг a_{ij} элементининг алгебраик тулдирувчиларидир (i=1,2,3; j=1,2,3).

М и с о л : Тескари матрица топилсин:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43$$

Дастлаб А матрица элементларининг алгебраик тулдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}= 6 - 16 = -10, \qquad A_{21}= -\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(-9 – 8) =17,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}= 6 - 16 = -10, \qquad A_{23}= -\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}= -(4 + 12) =-16,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \qquad A_{32} = \begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}= -(-4 – 12) = 16,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}= 8 + 9 = 17.$$

Натижада тескари матрица куриниши куйидагича булади:

$$A^{-1} = 1/43 \begin{pmatrix}16 & 17 & -10\\ -17 & -10 & 16\\ -10 & -16 & 17\end{pmatrix}$$

Текшириш утказамиз. Дархакикат,

$$A^{-1}A = 1/43 \begin{pmatrix}16 & 17 & -10\\ -17 & -10 & 16\\ -10 & -16 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix} =1/43\begin{pmatrix}43 & 0 & 0\\ 0 & 43 & 0\\ 0 & 0 & 43\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Бу тенгликдан тескари матрица тугри топилганлигига ишонч хосил киламиз.

Энди уч номаълумли учта чизикли тенгламалар системасини ечишнинг матрицалар усули билан танишамиз.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12} x_2 +a_{13} x_3 = в_1\\ a_{21}x_1 + a_{22} x_2 +a_{23} x_3 = в_2\\ a_{31}x_1 + a_{32} x_2 +a_{33} x_3= в_3\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

система берилган булсин. Куйидаги ёрдамчи матрицаларни киритамиз:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}в_1\\ в_2\\ в_3\end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Матрицаларни купайтириш таърифига асосан (1) системани AX=B куринишида ёза оламиз. Охирги матрицали тенгламани хар иккала томонини чапдан A^{-1} га купайтирамиз ва X ечимлар матрицасини хосил киламиз:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \;=>\; X = A^{-1}B.$$

М и с о л : Тенгламалар системаси матрица усулида ечилсин:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Е ч и ш : Каралаётган система учун юкорида топилган формулаларга асосан, куйидаги тенгликларни ёза оламиз :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/43 \begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Демак, системанинг ечими $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ булади.

Хулоса килиб шуни айтиш керакки, тескари матрица тушунчаси ихтиёрий n- тартибли квадрат матрица учун хам юкоридагидек аникланади. Матрица усули хар кандай сондаги тенгламалар системаси учун ($\Delta \neq 0$) хам кулланилиши мумкин ва тенгламалар системаси, унинг ечимлари матрица куринишида ихчам ифодаланади. Бу усулнинг камчилиги шундан иборатки, тескари матрицани топиш мураккаб ва жуда куп хисоблашларни талаб этади.

Маърузанинг нихоясида тенгламалар системасини матрица усулида ечишнинг иктисодиётдаги тадбигига мисол сифатида Леонтьевнинг тармоклараро мувозанат моделини куриб чикамиз.

Халк хужалиги n та тармокдан иборат деб, x_i оркали бир йилда i- тармокнинг (i=1,2,…,n) ишлаб чикарган ялпи махсулоти хажмини, x_{ij} (i,j=1,2,…,n) оркали i-тармокда ишлаб чикарилган ялпи махсулотнинг j- тармокда истеъмол килиниш микдорини ва y_i оркали i-тармокда ишлаб чикарилган ялпи махсулотнинг ноишлаб чикаришга сарфланадиган микдорини белгилаймиз.

Бу маълумотлар асосида тармоклараро мувозанат (баланс) моделини тузиш талаб этилади.

Ихтиёрий i-тармокда ишлаб чикарилган ялпи махсулот микдори x_i шу тармок махсулотларини n та тармокда сарфланган x_{ij} микдорлари ва шу тармокнинг ноишлаб чикаришга сарфлаган махсулот микдори y_i йигиндисига тенг булади,яъни

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

(2) тенгламалар баланс муносабатлари дейилади. Бу тенгламалар пул кийматларда ёки натурал микдорларда тузилиши мумкин.

Энди тугри харажатлар коэффициенти деб аталувчи ва a_{ij} каби белгиланиб, $a_{ij}=x_{ij}/x_j$ (i,j=1,2,3,….,n) формула билан аникланувчи катталикни киритамиз.Бу коэффициент j- тармокнинг бир бирлик махсулотини ишлаб чикариш учун сарфланадиган i-тармок махсулоти микдорини ифодалайди ва уни узгармас деб караш мумкин.Бу холда $x_{ij}= a_{ij}\cdot x_j$ булади ва бу тенгликни (2) системага куйсак,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (3)$$

тенгламалар системаси хосил булади. Бу система тармоклараро баланс модели дейилади ва у 1936 йилда американлик иктисодчи олим,Нобел мукофоти совриндори В.Леонтьев томонидан яратилган. Агар

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(бу ерда $a_{ij}\geq 0$, $x_i\geq 0$, $y_i\geq 0$) белгилашлардан фойдалансак, у холда (3) система матрицалар оркали X=AX+Y куринишда ифодаланиши мумкин. A ва Y маълум булса,бу тенгламадан X ни топиш мумкин. Бунинг учун уни

$$X-AX=Y \Rightarrow (E-A)X=Y \qquad (4)$$

шаклда ёзамиз. Бундан, агар $(E-A)\neq 0$ булса $X=(E-A)^{-1}\cdot Y$ ни топамиз. $S=(E-A)^{-1}$ матрица тулик сарф-харажат матрицаси дейилади. (3) система ёки (4) тенглама тармоклараро мувозанатнинг Леонтьев модели дейилади.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Тескари матрица кандай таърифланади?
2. Тескари матрицанинг мавжудлик ва ягоналик шарти нимадан иборат?
3. Тескари матрица кандай топилади?
4. Чизикли тенгламалар системаси матрица куринишда кандай ёзилади?
5. Система матрица усулида кандай ечилади?
6. Матрицалар усулининг кандай кулайликлари ва камчиликлари бор?
7. Тармоклараро мувозанатнинг Леонтьев модели кандай куринишда булади?

9 - МАЪРУЗА.

ВЕКТОРЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.

Таянч иборалар: скалярлар, векторлар, вектор модули, векторнинг геометрик талкини, нол вектор, коллинеар векторлар, векторлар тенглиги, векторлар йигиндиси, векторлар айирмаси, векторларни сонга купайтмаси, орт векторлар, векторнинг ёйилмаси, векторнинг координаталари.

М а ъ р у з а   р е ж а с и :

1. Скаляр ва вектор катталиклар.
2. Векторнинг геометрик маъноси.
3. Векторларнинг коллинеарлиги ва тенглиги.
4. Векторлар устида арифметик амаллар ва уларнинг хоссалари.
5. Орт векторлар ва векторнинг ортлар буйича ёйилмаси.
6. Векторнинг координаталари.
7. Координаталари билан берилган векторлар устида амаллар.

Адабиётлар:

[1] I боб, §1-7 [3] III боб, §1-2, [14]. 63-66 бетлар.

Хаётда учрайдиган барча катталиклар математикада икки турга, яъни скаляр ва вектор катталикларга ажратилади.

Т А Ъ Р И Ф 1: Факат сонли кийматлари билан аникланадиган катталиклар **скалярлар** деб аталади.

Масалан, масса, хажм, узунлик, модда зичлиги, гурухдаги талабалар сони скалярлар булади. Скалярлар $a, в, c$ каби белгиланади.

Т А Ъ Р И Ф 2: Сонли киймати ва йуналиши билан аникланадиган катталиклар **векторлар** дейилади.

Масалан, куч, тезлик, босим, харакат, оким вектор катталиклар булади. Векторлар $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ каби белгиланади.

Т А Ъ Р И Ф 3: $\vec{a}$ векторнинг сонли киймати унинг **модули** ёки **узунлиги** деб аталади ва $|\vec{a}|$ каби белгиланади.

Геометрик нуктаи-назардан векторлар йуналтирилган кесмалар сингари каралади. Йуналтирилган кесманинг боши А ва охири В нуктада булса, тегишли вектор $\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади. Бунда А нукта векторнинг боши, В нукта эса векторнинг учи, кесма узунлиги вектор узунлиги дейилади, яъни $|AB| = |\overrightarrow{AB}|$.

<u>Т А Ъ Р И Ф 4:</u> Боши ва учи битта нуктадан иборат булган вектор **<u>нол вектор</u>** дейилади.

Нол вектор $\vec{0}$ каби белгиланиб, унинг модули $|\vec{0}| = 0$ булади. Бу вектор йуналиши тугрисида суз юритиб булмайди.

<u>Т А Ъ Р И Ф 5:</u> Бир тугри чизикда ёки параллел тугри чизикларда жойлашган векторлар **<u>коллинеар</u>** векторлар деб аталади.

Масалан, ABCD параллелограмм булса, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар коллинеар, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{AB}$ векторлар эса колллинеар булмайди.

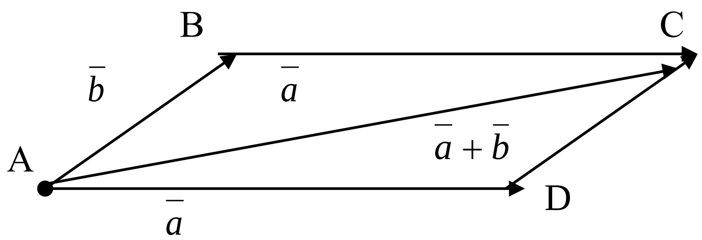
<u>И з о х.</u>Нол вектор $\vec{0}$ хар кандай $\vec{a}$ векторга коллинеар деб хисобланади.

<u>Т А Ъ Р И Ф 6:</u> Иккита $\vec{a}$, $\vec{в}$ векторлар тенг дейилади ва $\vec{a} = \vec{в}$ каби белгиланади, агарда куйидаги учта шарт бажарилса:

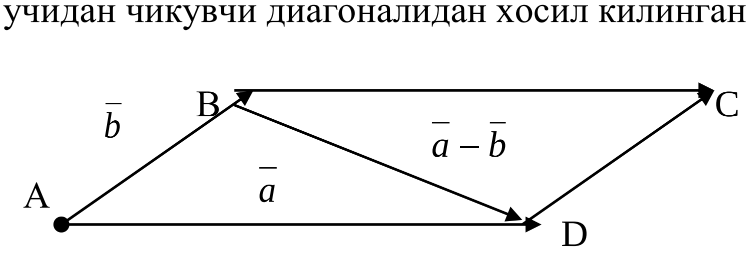
1. $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторлар коллинеар;
2. $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторлар бир хил узунликка эга, яъни $|\vec{a}| = |\vec{в}|$;
3. $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ бир хил йуналишга эга.

Масалан, ABCD параллелограммда $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{DC}$ булади. Бу ердан векторларни параллел кучириш мумкинлиги келиб чикади.

Энди иккита $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторларни кушиш ва айириш амалини киритамиз. Бунинг учун параллел кучириш оркали уларнинг бошларини битта A нуктага келтирамиз. Унда бу векторларни $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{в} = \overrightarrow{AB}$ каби белгилаб, ABCD параллелограммни хосил киламиз.



Бу холда $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторларнинг йигиндиси деб параллелограммнинг A учидан чикувчи диагоналидан хосил килинган $\overrightarrow{AC}$ векторга айтилади ва $\vec{a} + \vec{в}$ каби белгиланади. Бу векторларнинг $\vec{a} - \vec{в}$ айирмаси параллелограммнинг B учидан чикувчи диагоналидан хосил килинган $\overrightarrow{BD}$ векторга айтилади.



Векторларни кушиш амали куйидаги хоссаларга эга:

1. $\vec{a} + \vec{в} = \vec{в} + \vec{a}$ **2.** $(\vec{a} + \vec{в}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{в} + \vec{c})$ **3.** $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

<u>Т А Ъ Р И Ф 7:</u> $\vec{a}$ векторни λ сонга (скалярга) купайтмаси деб, $\lambda\vec{a}$ каби белгиланадиган ва куйидаги шартлар билан аникланадиган векторга айтилади:

1. $\left|\lambda\vec{a}\right|=|\lambda|\cdot\left|\vec{a}\right|$, яъни векторнинг узунлиги. $|\lambda|$ марта узгаради;
2. $\lambda\vec{a}$ ва $\vec{a}$ векторлар коллинеар;
3. $\lambda>0$ булса $\lambda\vec{a}$ ва $\vec{a}$ бир хил йуналган,
   $\lambda<0$ булса $\lambda\vec{a}$ ва $\vec{a}$ карама-карши йуналган.

Масалан, ABCD трапеция булиб, унинг асослари AD=8 ва BC=4 булса, унда $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{CB}$ тенгликлар уринли булади.

<u>И з о х.</u> $\lambda=0$ булса, хар кандай $\vec{a}$ вектор учун $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ булади.

Векторнинг сонга купайтириш амали куйидаги хоссаларга эга:

1. $\lambda(\beta\vec{a})=\beta(\lambda\vec{a})$ 2. $(\lambda\pm\beta)\vec{a}=\lambda\vec{a}\pm\beta\vec{a}$ 3. $\lambda(\vec{a}\pm\vec{в})=\lambda\vec{a}\pm\lambda\vec{в}$

Бу ерда α ва β ихтиёрий сонлар, $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ ихтиёрий векторлардир.

<u>Т А Ъ Р И Ф 8:</u> (-1) $\vec{a}$ вектор $\vec{a}$ векторга карама-карши вектор дейилади ва -$\vec{a}$ каби белгиланади. Бунда доимо $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ булади.

Энди бир текисликда жойлашган векторларнинг координаталари тушунчасини киритамиз. Бунинг учун бу текисликда XOY координаталар системасини оламиз. OX(OY) координата укида жойлашган, мусбат йуналишда йуналган ва узунлиги бирга тенг булган $\vec{i}(\vec{j})$ векторни киритамиз. Киритилган $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ векторлар орт **<u>векторлар</u>** ёки кискача **<u>ортлар</u>** деб аталади. Энди берилган $\vec{a}$ векторни йуналтирилган кесма сифатида караб, унинг OX ва OY укдаги проекцияларини караймиз. Бу проекциялар хам йуналтирилган кесма булиб, улар $\vec{a}$ векторнинг OX ва OY укдаги проекциялари деб аталади ва $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$ каби белгиланади. Унда, векторларни кушиш таърифидан фойдаланиб, $\vec{a}=\overrightarrow{a_x}+\overrightarrow{a_y}$ тенгликни ёзиш мумкин.

Энди $\vec{a}$ вектор проекцияларининг узунлигини $\left|\overrightarrow{a_x}\right|=|x|$, $\left|\overrightarrow{a_y}\right|=|y|$ каби белгилаймиз. $\overrightarrow{a_x}$ ва i орт $\left(\overrightarrow{a_y}\text{ ва } \vec{j}\text{ орт}\right)$ коллинеар векторлар булади, чунки улар OX(OY) координата укида жойлашган. Унда $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$ булгани учун, векторларни сонга купайтмаси таърифига асосан, $\overrightarrow{a_x}=x\vec{i}$ ва $\overrightarrow{a_y}=y\vec{j}$ деб ёзиш мумкин. Бу ерда $\overrightarrow{a_x}$ ва $\vec{i}$ орт бир хил йуналган булса, $x=\left|\overrightarrow{a_x}\right|$ деб, карама-карши йуналган булса, $x=-\left|\overrightarrow{a_x}\right|$ деб олинади. Худди шундай тарзда у киймати $\pm\left|\overrightarrow{a_y}\right|$ каби олинади.

Бу холда текисликдаги ихтиёрий $\vec{a}$ векторини $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ ортлар оркали

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j} \qquad (1)$$

куринишда ёзиш мумкин.

<u>Т А Ъ Р И Ф 9:</u> (1) тенглик $\vec{a}$ векторнинг ортлар буйича ёйилмаси, x ва y сонлари эса унинг координаталари деб аталади ва $\vec{a}(x,y)$ каби ифодаланади. Масалан, $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ векторнинг координаталари x=2, y= -3 булади.

Нол вектор учун $\vec{0} = 0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}$ булгани учун унинг координаталари x=0, y=0 булади.

Хар кандай $\vec{a}$ вектор узининг x ва y координаталари билан (1) тенглик оркали тулик аникланади. Координаталари билан берилган векторларнинг тенглиги, коллинеарлиги ва улар устидаги кушиш, айириш, сонга купайтириш амалларининг натижалари осон аникланади.

<u>ТЕОРЕМА 1:</u> $\vec{a}(x_1,y_1)$ ва $\vec{в}(x_2,y_2)$ векторлар тенг булиши учун уларнинг мос координаталари тенг, яъни $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ булиши зарур ва етарли.

<u>ТЕОРЕМА 2:</u> $\vec{a}(x_1,y_1)$ ва $\vec{в}(x_2,y_2)$ векторлар коллинеар булиши учун уларнинг мос координаталари пропорционал, яъни

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \Rightarrow x_1 = kx_2, y_1 = ky_2$$

булиши зарур ва етарли.

Масалан, $\vec{a}$ (3,-2) ва $\vec{в}(9,-6)$ коллинеар векторлар, чунки 9/3=(-6/-2)=3.

<u>ТЕОРЕМА 3:</u> $\vec{a}(x_1,y_1)$ ва $\vec{в}(x_2,y_2)$ векторлар йигиндиси ёки айирмасининг координаталари мос координаталарнинг йигиндиси ёки айирмасига тенг булади, яъни

$$\vec{a}(x_1,y_1) \pm \vec{в}(x_2,y_2)= \vec{c}(x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2)$$

Масалан, $\vec{a}$ (4,-2) ва $\vec{в}(5,9)$ булса, $\vec{a}+\vec{в}$=(4+5,-2+9)=(9,7) , $\vec{a}-\vec{в}$=(4-5,-2-9)=(-1,-11) координатали векторлардан иборат булади.

<u>ТЕОРЕМА 4:</u> $\vec{a}(x,y)$ векторнинг λ сонга купайтмасининг координаталари унинг хар бир координатасини λ сонга купайтиришдан хосил булади, яъни

$$\lambda\cdot\vec{a}\ (x,y)=\vec{c}(\lambda x,\lambda y)$$

Масалан, $\vec{a}(4,-7)$ булса, $3\vec{a}$=(3·4,3·(-7))=(12,-21) координатали вектор булади.

Бу теоремаларнинг исботи талабаларга мустакил иш сифатида берилади.

Фазодаги векторларнинг координаталари тушунчасини киритиш учун OX, OY ва OZ уклари буйича $\vec{i}, \vec{j}$ ва $\vec{k}$ орт векторларни киритамиз. Унда юкорида курсатилган сингари, фазодаги ихтиёрий $\vec{a}$ векторни

$$\vec{a}= x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

куринишда ёзиш мумкин булади. Бу тенглик $\vec{a}$ векторнинг ортлар буйича ёйилмаси деб аталиб, ундаги x,y ва z сонлари унинг координаталари дейилади ва $\vec{a}(x,y,z)$ каби ёзилади. Фазодаги векторлар учун хам юкорида курилган теоремалардаги тасдиклар уринли булади.

Уз-узини назорат этиш саволлари.

1. Кандай катталиклар скалярлар дейилади?
2. Скаляр микдорларга мисоллар келтиринг.
3. Кандай катталиклар векторлар деб аталади?
4. Векторларга мисоллар келтиринг.
5. Векторларнинг геометрик маъноси нимадан иборат?
6. Векторнинг модули деб нимага айтилади?
7. Кандай вектор нол вектор дейилади?
8. Кандай векторлар коллинеар дейилади?
9. Качон векторлар тенг деб хисобланади?
10. Векторлар йигиндиси кандай аникланади?
11. Векторлар йигиндиси кандай хоссаларга эга?
12. Векторни сонга купайтмаси кандай аникланади?
13. Векторни сонга купайтмаси кандай хоссаларга эга?
14. Орт векторлар деб кандай векторлар тушунилади7
15. Векторнинг ортлар буйича ёйилмаси кандай аникланади?
16. Векторнинг координаталари кандай топилади?
17. Координаталари билан берилган векторларнинг тенглик ва коллинеарлик шарти нимадан иборат?
18. Координаталари билан берилган векторлар устида арифметик амаллар кандай бажарилади?

10 - МАЪРУЗА

ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР КУПАЙТМАСИ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ТАДБИКЛАРИ.

Таянч иборалар: скаляр купайтма, скаляр купайтманинг механик маъноси, скаляр купайтма хоссалари, векторларнинг ортогоналлиги, скаляр купайтманинг координаталардаги ифодаси, икки вектор орасидаги бурчак.

Маъруза режаси:

1. Скаляр купайтма таърифи.
2. Скаляр купайтманинг механик маъноси.
3. Скаляр купайтма хоссалари.
4. Векторларнинг ортогоналлиги.
5. Скаляр купайтманинг координаталардаги ифодаси.
6. Скаляр купайтманинг тадбиклари.
7. Скаляр купайтманинг иктисодий маъносига мисол.

Адабиётлар.

[1] I боб, §8 [3] III боб, §3-4 [14]. 66-68 бетлар.

ТАЪРИФ: $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг **скаляр купайтмаси** деб $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ёки ($\vec{a}$, $\vec{b}$) каби белгиланадиган ва

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1)$$

формула билан аникланадиган сонга айтилади. Бу ерда φ оркали $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасида бурчак белгиланган.

Бу ерда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг (1) формула оркали купайтирилганда сон, яъни скаляр катталик хосил булади ва шу сабабли $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторларнинг скаляр купайтмаси дейилади.

Скаляр купайтманинг механик маъносини курамиз. $\vec{F}$ куч моддий нуктага таъсир этиб, уни тугри чизик буйлаб $\vec{S}$ вектор буйича харакатлантирган булсин. Агарда куч ва харакат йуналишлари орасидаги бурчак φ булса, бажарилган А иш микдори

$$A = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi$$

формула билан аникланиши бизга физика курсидан маълум. Аммо бу формулани (1) га асосан $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$ деб ёзиш мумкин. Демак, $\vec{F}$ куч ва $\vec{S}$ харакат векторларининг скаляр купайтмаси бажарилган ишни ифодалайди.

Скаляр купайтманинг таърифидан унинг куйидаги хоссалари келиб чикади:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 3. $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}$

4. $(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{b}\cdot\vec{c}$

ТАЪРИФ: $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар орасидаги бурчак $\varphi=90^0$ булса, улар ортогонал векторлар дейилади ва $\vec a\perp\vec b$ каби белгиланади.

Масалан, олдинги маърузада куриб утилган орт векторлар ортогоналдирлар, яъни $\vec i\perp\vec j$, $\vec i\perp\vec k$ ва $\vec j\perp\vec k$.

ТЕОРЕМА. Нолдан фаркли $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар ортогонал булиши учун уларнинг скаляр купайтмаси $\vec a\cdot\vec b=0$ булиши зарур ва етарли.

И с б о т. Зарурийлиги. $\vec a\perp\vec b$ булсин. Унда улар орасидаги бурчак $\varphi=90^0$ булади ва скаляр купайтма таърифига асосан

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos 90^0=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot 0=0$$

Етарлилиги. $|\vec a|\neq 0$, $|\vec b|\neq 0$ булиб, $\vec a\cdot\vec b=0$ булсин. Унда скаляр купайтма таърифидан

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi=0\Rightarrow\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=90^0\Rightarrow\vec a\perp\vec b$$

эканлиги келиб чикади.

Энди текисликда ётувчи ва координаталари билан берилган $\vec a(x_1,y_1)$, $\vec b(x_2,y_2)$ векторларнинг скаляр купайтмасини топамиз. Бунинг учун $\vec i\cdot\vec i=|\vec i|^2=1$, $\vec j\cdot\vec j=1$ ва $\vec i\cdot\vec j=0$ ва $\vec j\cdot\vec i=0$ эканлигидан ва скаляр купайтманинг 3) ва 4) хоссаларидан фойдаланамиз.

$$\vec a\cdot\vec b=(x_1\vec i+y_1\vec j)(x_2\vec i+y_2\vec j)=x_1x_2\vec i\,\vec i+x_1y_2\vec i\,\vec j+y_1x_2\vec j\,\vec i+y_1y_2\vec j\,\vec j=$$
$$=x_1x_2\cdot 1+x_1y_2\cdot 0+y_1x_2\cdot 0+y_1y_2\cdot 1=x_1x_2+y_1y_2$$

Демак

$$\vec a(x_1,y_1)\cdot\vec b(x_2,y_2)=x_1y_2+y_1y_2\,, \qquad (2)$$

яъни векторларнинг скаляр купайтмаси уларнинг мос координаталари купайтмаларининг йигиндисига тенг булади.

Масалан, $\vec a(3,6)$ ва $\vec b(5,-2)$ булса, $\vec a\cdot\vec b=3\cdot 5+6\cdot(-2)=15-12=3$ натижани оламиз.

Худди шундай тарзда фазодаги $\vec a(x_1,y_1,z_1)$ ва $\vec b(x_2,y_2,z_2)$ векторларнинг скаляр купайтмаси учун

$$\vec a(x_1,y_1,z_1)\cdot\vec b(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

формула уринли булишини курсатиш мумкин.

Энди скаляр купайтма тадбиклари сифатида куйидаги масалаларни курамиз.

1-масала. $\vec a(x,y,z)$ векторнинг модулини топинг.

Ечиш. Скаляр купайтманинг 2) хоссасига ва (3) формулага асосан

$$|\vec a|=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}=\sqrt{x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z}=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4)$$

Масалан, $\vec a(3,4,12)$ векторнинг модули

$$|\vec a|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

2-масала. $\vec a(x_1,y_1,z_1)$ ва $\vec b(x_2,y_2,z_2)$ векторлар орасидаги φ бурчакни топинг.

Ечиш. Скаляр купайтма таърифи (1), (3) ва (4) формулаларга асосан

$$cos\varphi=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (5)$$

Масалан, $\vec{a}(1,0,1)$ ва $\vec{b}(0,1,1)$ векторлар орасидаги φ бурчак учун

$$cos\varphi=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

натижани оламиз ва ундан $\varphi=60^0$ эканлигини топамиз.

3-масала. $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ ва $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ векторларнинг ортогоналлик шартини топинг.

Ечиш. $\vec{a}\perp\vec{b}$ булгани учун улар орасидаги бурчак $\varphi=90^0$ булади ва шу сабабли $\cos\varphi=0$. Унда (5) формуладан

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (6)$$

тенгликни хосил киламиз. Бу икки векторнинг ортогоналлик шартидир.

Масалан, $\vec{a}(3,-2,1)$ ва $\vec{b}(5,7,-1)$ векторлар ортогоналдир, чунки

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot 5+(-2)\cdot 7+1\cdot(-1) = 15-14-1=0$$

4-масала. Фазодаги $A(x_1,y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нукталар орасидаги d масофани топинг.

Ечиш. Бу нукталарни кесма билан туташтириб, $\overrightarrow{AB}$ векторни хосил киламиз. Маълумки, бу векторнинг координаталари унинг учи билан боши координаталари айирмасига тенг булади, яъни $\overrightarrow{AB}$ $(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$. Унда (4) формулага асосан,

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (7)$$

тенгликка эга буламиз.

Масалан, A(5,-3,1) ва B(8,1,13) нукталар орасидаги масофа

$$d=\sqrt{(8-5)^2+(1-(-3))^2+(13-1)^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

булади.

Текисликдаги векторлар учун 1-4 масалаларнинг ечимларини топишни талабага мустакил иш сифатида хавола этамиз.

Скаляр купайтманинг иктисодий маъносини курсатиш учун уч хил махсулотларнинг нарх ва микдорларини ифодаловчи ушбу $\vec{p}(p_1,p_2,p_3)$ ва $\vec{q}(q_1,q_2,q_3)$ векторларни киритамиз. Унда уларнинг скаляр купайтмаси

$\vec{p}\cdot\vec{q}=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$ учала махсулот кийматини ифодалайди.

Уз-узини назорат этиш саволлари.

1. Векторларнинг скаляр купайтмаси кандай аникланади?
2. Векторлар скаляр купайтмасининг механик маъноси нимадан иборат?
3. Скаляр купайтма кандай хоссаларга эга?
4. Кандай векторлар ортогонал векторлар дейилади?
5. Векторларнинг ортогоналлигини зарурий ва етарли шарти нимадан иборат?
6. Скаляр купайтма векторларнинг координаталари оркали кандай ифодаланади?
7. Икки вектор орасидаги бурчак кандай топилади?
8. Икки векторнинг ортогоналлик шарти координаталарда кандай ифодаланади?
9. Икки нукта орасидаги масофа кандай топилади?
10. Скаляр купайтмани иктисодий маъносига мисол келтиринг.

11-МАЪРУЗА

ВЕКТОРИАЛ КУПАЙТМА, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ТАДБИКЛАРИ

Таянч иборалар: векториал купайтма, векториал купайтма хоссалари, векториал купайтмани хисоблаш, коллинеар векторлар.

Маъруза режаси:

1. Векториал купайтма таърифи.
2. Векториал купайтманинг механик маъноси.
3. Векториал купайтманинг хоссалари.
4. Ортларнинг векториал купайтмаси.
5. Координаталари билан берилган векторларнинг векториал купайтмаси.
6. Векториал купайтма ёрдамида ечиладиган масалалар.
7. Векторларнинг коллинеарлик шарти.

Адабиётлар:

[1] I боб, §11 [3] III боб, §5-6

ТАЪРИФ: $\vec{a}$ векторнинг $\vec{в}$ векторга ***векториал купайтмаси*** деб, куйидаги учта шартни каноатлантирувчи янги $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{в}$ векторга айтилади:

1. $\vec{c}$ нинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторларга курилган паралеллеограмм юзига тенг булиб, куйидагича ифодаланади:

$\left|\vec{a} \times \vec{в}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \sin\varphi$, бу ерда $\varphi = \vec{a} \wedge \vec{в}$, яъни векторлар орасидаги бурчакни ифодалайди.

2. $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторлар текислигига перпендикуляр, яъни

$$\vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{a}, \qquad \vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{в}.$$

3. $\vec{c}$ вектор шундай йуналганки, унинг учидан караганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{в}$ векторга энг киска бурилиш соат стрелкаси харакатига тескари булади.

Агарда **F** радиус вектори ***r*** булган моддий А нуктага таъсир этувчи куч булса, у холда **F**×***r*** векториал купайтма **F** кучни А нуктага нисбатан моментини ифодалайди.

Векториал купайтма хоссалари.

1.Векториал купайтмада купайтувчиларнинг урни алмашса, купайтманинг факат ишораси узгаради, яъни $\vec{a} \times \vec{в} = -(\vec{в} \times \vec{a})$

2. Векториал купайтмада узгармас λ купайтувчини ташкарига чикариш мумкин, яъни

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{в}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{в} = \lambda(\vec{a} \times \vec{в})$$

3. Векториал купайтма учун таксимот конуни уринли, яъни

$$\vec{a} \times (\vec{в} + \vec{m}) = \vec{a} \times \vec{в} + \vec{a} \times \vec{m}$$

ТЕОРЕМА. Иккита нолмас $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторлар коллинеар булишлари учун уларнинг векториал купайтмаси нолга тенг булиши зарур ва етарли. яъни

$$\vec{a} \,||\, \vec{в} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{в} = 0$$

Исботи: $\vec{a} \,||\, \vec{в}$ булсин. У холда $\varphi=0$ еки $\varphi=\pi$ ва $\sin\varphi=0$. Демак. $\left|\vec{a} \times \vec{в}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \sin\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \cdot 0 = 0$. Узунлиги нолга тенг булган векторнинг узи хам нол вектор булади, яъни $\vec{a} \times \vec{в} = 0$.

Энди, аксинча $\vec{a} \times \vec{в} = 0$ булсин. У холда $|\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{в}| = 0$ булади. Бунда $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{в}| \neq 0$ булгани учун факат $\sin\varphi=0$, яъни $\varphi=0$ ёки $\varphi=\pi$ эканлиги келиб чикади. Бу эса $\vec{a} \,||\, \vec{в}$ эканлигини билдиради.

Натижа: Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$ булади.

Мисол: $(\vec{a} - 2\vec{в}) \times (2\vec{a} + \vec{в})$ купайтмани соддалаштиринг.

Ечиш: $(\vec{a} - 2\vec{в}) \times (2\vec{a} + \vec{в}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{в} - 2\vec{в} \times 2\vec{a} - 2\vec{в} \times \vec{в} = 5\vec{a} \times \vec{в}$

Векториал купайтмани координаталарда хисоблаш.

Аввал координата укларидаги $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ ортларнинг векториал купайтмасини хисоблаймиз. Векториал купайтманинг таърифига асосан

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Энди **i** x **j** векторни хисоблаймиз. Орт векторлар таърифига асосан

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Бу ердан ва векториал купайтманинг таърифидан **i** x **j** вектор OZ уки буйлаб йуналган ва унинг узунлиги 1 га тенг. Демак, **i** x **j** = **k** экан. Худди шунга ухшаш **j** x **k =i** , **k**x**i =j.** Векториал купайтманинг 1 – хоссасига биноан

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторлар узининг координаталари билан берилган булсин, яъни

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ; \qquad \vec{в} = в_x\vec{i} + в_y\vec{j} + в_z\vec{k}\ ;$$

Бу холда $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторларнинг векториал купайтмасини топамиз. Векториал купайтма хоссалари ва ортларнинг векториал купайтмасига асосан

$$\vec{a} \times \vec{в} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (в_x\vec{i} + в_y\vec{j} + в_z\vec{k}) = a_x в_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x в_y(\vec{i} \times \vec{j}) +$$

$$+ a_x в_z(\vec{i} \times \vec{k}) + a_y в_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y в_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y в_z(\vec{j} \times \vec{k}) + a_z в_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z в_y(\vec{k} \times \vec{j}) +$$

$$+ a_z в_z(\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + a_x в_y\vec{k} - a_x в_z\vec{j} - a_y в_x\vec{k} + 0 + a_y в_z\vec{i} + a_z в_x\vec{j} + a_z в_y\vec{i} + 0 =$$

$$= (a_y в_z - a_z в_y)\vec{i} + (a_z в_x - a_x в_z)\vec{j} + (a_x в_y - a_y в_x)\vec{k} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\ .$$

Бунда c_x, c_y, c_z координаталар оркали мос кавслардаги ифодалар белгиланди. Бу координатларни мос равишда аникловчилар ёрдамида хам курсатса булади:

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ в_z & в_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix}\vec{к}$$

ёки

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}$$

<u>Мисол.</u> $\vec{a}(2; 3; -1)$ ва $\vec{в}(3; -1; -4)$ векторларнинг векториал купайтмасини топинг.

Ечиш:

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}$$

Энди векториал купайтманинг баъзи бир тадбикларини курамиз.

<u>1-масала.</u> $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ ва $\vec{в}(в_x, в_y, в_z)$ векторларга ясалган паралелограммнинг юзини топинг.

<u>Е ч и ш :</u> Векториал купайтманинг таърифига асосан паралеллограмм юзи куйидагича топилади:

$$S = |\vec{a} \times \vec{в}| = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ в_z & в_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_y & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix}^2}$$

<u>Мисол.</u> $\vec{a}(2; 3; -1)$ ва $\vec{в}(3; -1; -4)$ векторларга ясалган параллелограмм юзасини топинг.

<u>Е ч и ш :</u> Олдин курсатилганга асосан

$$\vec{a} \times \vec{в} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}$$

булгани учун, изланган S юза

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

<u>Натижа.</u> $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторлардан ясалган учбурчакнинг юзи

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{в}|$$

формула билан топилади.

<u>2-масала.</u> $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ ва $\vec{в}\,(в_x, в_y, в_z)$ векторларнинг коллинеарлик шартини топинг.

<u>Е ч и ш :</u> Олдин курилган теоремада $\vec{a}$ ва $\vec{в}$ векторлар коллинеар булиши учун уларнинг векториал купайтмаси $\vec{a}\times\vec{в}=0$ булиши керак эканлиги курса-тилган эди. Бу тенгликни координаталарда ифодалаймиз:

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}=0.$$

Бу аникловчининг биринчи сатри векторлардан, иккинчи ва учинчи сатрлари эса скалярлардан иборат булгани учун, юкоридаги тенглик факат

$$\frac{a_x}{в_x}=\frac{a_y}{в_y}=\frac{a_z}{в_z}$$

булганда уринли булади. Бу тенглик векторларнинг коллинеарлик шартини ифодалайди.

<u>М и с о л.</u> $\vec{a}\,(m,3,2)$ ва $\vec{в}\,(4,6,n)$ векторлар m ва n параметрларнинг кандай кийматларида коллинеар булишини топинг.

<u>Е ч и ш.</u> Коллинеарлик шартига асосан

$$\frac{m}{4}=\frac{3}{6}=\frac{2}{n}\Rightarrow m=2, n=4.$$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Векториал купайтма кандай таърифланади?
2. Векториал купайтманинг механик маъноси нимадан иборат?
3. Векториал купайтма кандай хоссаларга эга?
4. Ортларнинг векториал купайтмаси кандай топилади?
5. Векториал купайтма координаталарда кандай ифодаланади?
6. Иккита векторлардан хосил килинган параллелограмм ва учбурчак юзалари кандай топилади?
7. Векторларнинг коллинеарлик шарти нимадан иборат?

12 -МАЪРУЗА

ВЕКТОРЛАРНИНГ АРАЛАШ КУПАЙТМАСИ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ТАДБИКЛАРИ.

Таянч иборалар: аралаш купайтма, унинг геометрик маъноси, компланар векторлар, аралаш купайтма хоссалари, аралаш купайтмани координаталар оркали ифодалаш, аралаш купайтма тадбиклари.

М а ъ р у з а   р е ж а с и :

1. Векторларнинг аралаш купайтмаси.
2. Аралаш купайтманинг геометрик маъноси.
3. Аралаш купайтманинг хоссалари.
4. Координаталари билан берилган векторларнинг аралаш купайтмасини хисоблаш.
5. Аралаш купайтма ёрдамида ечиладиган масалалар.
6. Векторларнинг компланарлик шарти.

Адабиётлар:

[1] I боб, §12 [3] III боб, §7

Учта **а, в, с** векторларни узаро купайтириш масаласини курайлик. Агар **а** ва **в** векторларни скаляр купайтириб, натижани **с** векторга купайтирсак, у холда **с** векторга коллинеар вектор хосил булади. Агарда биринчи иккита векторни векториал купайтириб, сунгра хосил булган натижани учинчи **с** векторга яна векториал купайтирсак, натижада яна бир янги вектор хосил киламиз. Бундан ташкари учта векторни куйидаги усулда хам купайтириш мумкин.

Т А Ъ Р И Ф 1: **а, в, с** векторларнинг аралаш купайтмаси деб **а** х **в** векториал купайтмани **с** векторга скаляр купайтмаси каби аникланадиган сонга айтилади ва **а в с** каби белгиланади.

Шундай килиб таърифга асосан аралаш (вектор – скаляр) купайтма

$$\mathbf{a\,в\,c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{в}) \cdot \mathbf{c}$$

куринишда булади.

Т А Ъ Р И Ф 2: Векторлар компланар дейилади, агарда улар битта текисликда ёки параллел текисликларда жойлашган булса.

Аралаш купайтманинг геометрик маъносини куриб утайлик. Бунинг учун компланар булмаган **а,в, с** векторларни карайлик. Маълумки, **а** х **в** узунлиги купайтувчи векторлардан тузилган параллелограммнинг юзасига тенг ва параллелограмм текислигига перпендикуляр йуналган вектордан иборат булади. Агар **а** х **в** векторга **с** векторни проекциялаcак, у холда шу проекция параллелограмм текислигига перпендикуляр булиб, унинг модули **а, в, с** векторларга курилган параллелопипед баландлиги Н кийматини ифодалайди. Унда бу параллелопипед хажми учун

$$V=S_{асос}\cdot H= |(\mathbf{а} \times \mathbf{в})\mathbf{c}|$$

формулага эга буламиз. Шундай килиб, аралаш купайтма параллелепипед хажмини ифодалар экан.

Энди аралаш купайтманинг хоссаларини куриб утамиз:

1. Аралаш купайтмада векториал ва скаляр купайтма амаллари урнини алмаштириш мумкин, яъни

$$(\mathbf{а} \times \mathbf{в}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{а} \cdot (\mathbf{в} \times \mathbf{c}) \, .$$

Шу сабабли аралаш купайтмада амалларни курсатмасдан, кискача **авс** каби ёзиш мумкин.

2. Аралаш купайтмада купайтувчилар урнини соат милига тескари йуналиш буйича доиравий равишда алмаштирилса, унинг киймати узгармасдан колади, яъни

$$\mathbf{а\,в\,с} = \mathbf{с\,а\,в} = \mathbf{в\,с\,а} = \mathbf{а\,в\,с}.$$

Бунга аралаш купайтманинг айланма хоссаси деб юритишади.

3. Аралаш купайтмада ёнма – ён турган векторларни урни алмаштирилса, унинг ишораси тескарисига узгаради, яъни

$$\mathbf{а\,в\,с} = -\,\mathbf{в\,а\,с} = -\,\mathbf{с\,в\,а} = -\,\mathbf{а\,с\,в}$$

Скаляр хамда векториал купайтмаларнинг кандай шароитда нолга тенг булишини тахлил килган эдик. Бу саволни энди аралаш купайтма учун куриб чикайлик. Куйидаги холлар булиши мумкин:

1) купайтувчи векторлардан камида биттаси нол вектор;
2) купайтувчи векторлардан камида иккитаси коллинеар;
3) купайтувчи векторлар компланар.

Биринчи холда аралаш купайтманинг нол булиши уз – узидан келиб чикади. Иккинчи холда, яъни иккита вектор коллинеар булса, унда уларнинг векториал купайтмаси нол ва шу сабабли аралаш купайтма хам нолга тенг булади. Учинчи холда **а** х **в** ва **с** векторлар перпендикуляр булади ва шу туфайли уларнинг скаляр купайтмасидан хосил булган аралаш купайтма нол булади.

Натижада куйидаги тасдикни оламиз:

ТЕОРЕМА. Нолдан фаркли учта векторнинг компланар булиши учун уларнинг аралаш купайтмаси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.

Координаталари билан берилган $\mathbf{а}=(a_x,a_y,a_z)$, $\mathbf{в}=(в_x,в_y,в_z)$, $\mathbf{c}=(c_x,c_y,c_z)$ векторларнинг аралаш купайтмасини хисоблаш формуласини келтириб чикарамиз. Векториал купайтмани хисоблаш формуласига асосан

$$\mathbf{а} \times \mathbf{в} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix} = (a_y\, в_z - a_z\, в_y)\,\mathbf{i} + (a_z\, в_x - a_x в_z)\,\mathbf{j} +$$

$$+ (a_x в_y - a_y в_x)\mathbf{k} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} \, .$$

Скаляр купайтмани хисоблаш формуласи ва юкоридаги тенгликка хамда аникловчининг сатр буйича ёйилмасига асосан

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{в})\mathbf{c} = Ac_x + Bc_y + Cc_z = \begin{vmatrix} c_z & c_x & c_y \\ a_x & a_y & a_z \\ в_z & в_x & в_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_z & c_x & c_y \end{vmatrix}$$

Демак, аралаш купайтма купайтувчи векторларнинг координаталаридан тузилган III тартибли аникловчи каби хисобланади.

Масалан, **а**=(3,1,-2), **в**=(4, 0, 1), **с**=(0,2,-1) векторларнинг аралаш купайтмасини топамиз:

$$\mathbf{a\ в\ c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 - 6 + 4 = -18.$$

Аралаш купайтманинг координаталардаги куринишидан фойдаланиб, учта векторларнинг компланарлик шартини топамиз:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Аралаш купайтмадан фойдаланиб, куйидаги масалаларни ечамиз :

М а с а л а 1 : **а , в , с** векторлардан тузилган учбурчакли пирамида хажмини топинг.

Е ч и ш : Берилган **а** , **в** ва **с** векторлардан тузилган пирамиданинг асосидаги **а**, **в** векторлар хосил килган учбурчак юзасини S , баландлиги $|\mathbf{a} \times \mathbf{в}| = h$ ва хажмини V деб олсак , $V= Sh/3$ тенглик уринли булади. Шу векторлардан тузилган параллелопипед асоси юзаси 2S, баландлиги эса h булади. Бу параллелопипед хажмини V_0 деб олсак, $V_0=2Sh =|\mathbf{a\ в\ c}|$ булади.

Бу холда пирамида хажми

$$V = V_0/6 = |\mathbf{a\ в\ c}|/\ 6 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

формула билан хисобланади.

М а с а л а 2 : Фазодаги туртта $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ ва $M_4(x_4, y_4, z_4)$ нукталарни бир текисликда ётиш шартини топинг .

Е ч и ш : M_1 , M_2 , M_3 ва M_4 нукталар бир текисликда ётиши учун

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1 , y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1 , y_4 - y_1, z_4 - z_1)$ векторларни компланар булиши зарур ва етарли, яъни

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

шарт келиб чикади..

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Векторларнинг аралаш купайтмаси кандай таърифланади?
2. Аралаш купайтманинг геометрик маъноси нимадан иборат?
3. Аралаш купайтма натижасида канака катталик хосил булади?
4. Аралаш купайтма кандай хоссаларга эга?
5. Аралаш купайтма координаталар оркали кандай топилади?
6. Учта вектордан хосил килинган параллелопипед ва пирамида хажми кайси формула билан топилади?
7. Учта векторнинг компланарлик шарти нимадан иборат?
8. Туртта нукта кайси шартда бир текисликда ётади?

13 - МАЪРУЗА

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ. ТУГРИ ЧИЗИК ТЕНГЛАМАЛАРИ.

Таянч иборалар: геометрик объект тенгламаси, аналитик геометрия предмети, иккита асосий масала, икки нукта орасидаги масофа, айлана тенгламаси, кесмани берилган нисбатда булиш, урта нукта координаталари, тугри чизикнинг нормал тенгламаси, нуктадан тугри чизиккача булган масофа.

М а ъ р у з а   р е ж а с и :

1. Геометрик объект тенгламаси.
2. Аналитик геометрия предмети ва асосий иккита масаласи.
3. Икки нукта орасидаги масофа ва айлана тенгламаси.
4. Кесмани берилган нисбатда булиш.
5. Тугри чизикнинг нормал тенгламаси.
6. Нуктадан тугри чизиккача масофа.

Адабиётлар:

[1] I боб, §13-17 [3] II боб, §1-4, V боб §1 [14].95-104 бетлар.

Текисликда XOY Декарт координаталар системаси киритилган булсин. Бу холда текисликдаги хар бир М нукта унинг координаталари деб аталадиган (x,y) сонлар жуфтлиги билан тулик аникланади ва M (x,y) каби ёзилади. Текисликдаги турли геометрик объектларни нукталар туплами каби караш мумкин.

Т А Ъ Р И Ф 1 : Текисликдаги геометрик объектларни уларнинг M(x,y) нукталарининг координаталари оркали ифодаловчи тенгликлар шу ***объектнинг тенгламаси*** деб аталади.

Тенглама одатда $F(x,y) = 0$ куринишда ёзилади. Агарда $M_0(x_0,y_0)$ нукта учун $F(x_0,y_0) = 0$ шарт бажарилса, M_0 шу тенглама билан аникланган геометрик объектга тегишли булади. Акс холда M_0 нукта бу объектга тегишли булмайди. Шундай килиб, геометрик объект узининг $F(x,y) = 0$ тенгламаси билан тулик аникланади.

Т А Ъ Р И Ф 2 : Геометрик объектларни уларнинг тенгламалари оркали урганувчи математик фан ***аналитик геометрия*** деб аталади.

Аналитик геометрия асосчиси булиб француз математиги ва файласуфи Рене Декарт хисобланади.

Аналитик геометрияда асосан **иккита масала** каралади:

1. Берилган геометрик объектнинг тенгламасини топиш.

2. Геометрик объектнинг тенгламаси буйича унинг хоссаларини урганиб, объектни аниклаш.

Бу масалаларни ечишда векторлар алгебрасидан кенг фойдаланилади. Мисол тарикасида аналитик геометриянинг куйидаги масалаларини курамиз.

М а с а л а 1 : Текисликдаги $M_1(x_1,y_1)$ ва $M_2(x_2,y_2)$ нукталар орасидаги d масофани топинг.

Е ч и ш : Берилган нукталар буйича $\mathbf{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1\}$ векторни хосил киламиз. Берилган нукталар орасидаги масофа шу векторнинг узунлигига тенг, яъни

$$d=|\mathbf{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

формулага эга буламиз.

Масалан, $M_1(3,1)$ ва $M_2(-2,6)$ нукталар орасидаги масофа (1) га кура

$$d=\sqrt{(-2-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,.$$

Икки нукта орасидаги масофа формуласидан фойдаланиб, маркази M(а,в) нуктада жойлашган R радиусли айлана тенгламасини топамиз. N(x,y) шу айланада жойлашган ихтиёрий нукта булсин. Айлана таърифига асосан у |MN|=R тенгламани каноатланлирувчи нукталар тупламининг геометрик урнидан иборат. Натижада, (1) формулага кура

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-в)^2}=R\Rightarrow(x-a)^2+(y-в)^2=R^2 \qquad (2)$$

Бу айлана тенгламасини ифодалайди. Айлананинг (2) куринишдаги тенгламасига унинг каноник (энг информатив, энг кулай) тенгламаси дейилади.

Масалан, маркази M(2,3) ва радиуси R=5 булган айлана

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

тенгламага эга булади. Бу ердан N(5,7) нукта шу айланага тегишли эканлиги келиб чикади, чунки

$$(5-2)^2+(7-3)^2=25.$$

К(2,6) нукта айланада ётмайди, чунки унинг тенгламасини каноатлантирмайди:

$$(2-2)^2+(6-3)^2=9\neq 25.$$

М а с а л а 2. Учлари $M_1(x_1,y_1)$ ва $M_2(x_2,y_2)$ нукталарда жойлашган M_1M_2 кесмани берилган $\lambda>0$ нисбатда булувчи $M_0(x_0,y_0)$ нукта координаталарини топинг.

Е ч и ш : $\mathbf{M_1M_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1\}$ ва $\mathbf{M_0M_2}=\{x_2-x_0,y_2-y_0\}$ векторларни караймиз. Улар бир тугри чизикда ётгани учун коллинеар ва масала шартига кура $|\mathbf{M_1M_0}|=\lambda\,|\mathbf{M_0M_2}|$. Айтганларга асосан $\mathbf{M_1M_0}=\lambda\,\mathbf{M_0M_2}$ деб ёзиш мумкин. Бу тенгликни векторларнинг координаталари оркали ифодалаймиз (координаталар куринишидаги икки вектор тенг булиши учун уларнинг мос координаталари тенг булиши керак):

$$x_0-x_1=\lambda\,(x_2-x_0)\,,\ y_0-y_1=\lambda\,(y_2-y_0).$$

Бу тенгликлардан изланган x_0 ва y_0 координаталарни топамиз:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

Хусусий, $\lambda=1$, холда M_1M_2 кесманинг урта нуктаси координаталарини топамиз :

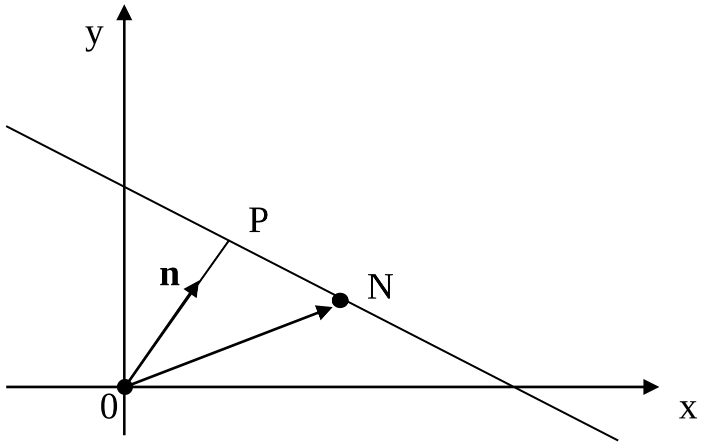
$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (4)$$

Масалан, $M_1(3,-5)$ ва $M_2(1\ ,1)$ нукталарни туташтирувчи кесманинг урта нуктаси

$$x_0 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad , \qquad y_0 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

координаталар билан аникланади.

Энди текисликда бирор ***l*** тугри чизик берилган булсин ва унинг тенгламасини топиш талаб этилсин. Бунинг учун бу тугри чизикка перпендикуляр булган **n** бирлик вектор ва координата бошидан бу тугри чизиккача булган масофа $|0P| =$ p маълум деб оламиз. Агарда **n** вектор OX координата уки билан α бурчак ташкил этган булса, **n** = $\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ деб ёзиш мумкин. N(x,y) берилган тугри чизикдаги ихтиёрий бир нукта, **ON** = {x,y} ва **n** векторлар орасидаги бурчак φ булсин ($\angle PON=\varphi$). Хосил булган **n** $\cdot$**ON** скаляр купайтмани икки усулда хисоблаймиз.



$\mathbf{n} \cdot \mathbf{ON} = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ **;**

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{ON} = |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{ON}| \cos\varphi = 1 \cdot |\mathbf{ON}| \cdot |OP| / |\mathbf{ON}| = |OP| = p.$

Демак, берилган тугри чизикдаги барча N(x,y) нукталар учун

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (5)$$

тенглик уринлидир.Бу текисликдаги тугри чизикнинг ***нормал тенгламаси*** дейилади. Агарда $K(x_0,y_0)$ берилган ***l*** тугри чизикда ётмаган нукта булса, ундан бу тугри чизиккача булган d масофа

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| \qquad (6)$$

формула билан аникланишини исботлаш мумкин.

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Геометрик объект тенгламаси деб нимага айтилади?
2. Аналитик геометрия предмети нимадан иборат?
3. Аналитик геометриянинг икки асосий масаласини курсатинг.
4. Икки нукта орасидаги масофа кандай топилади?
5. Айлана тенгламаси кандай куринишда булади?

6. Кесмани берилган нисбатда булувчи нукта координаталари кандай топилади?

7. Кесманинг урта нуктаси координаталари формуласини ёзинг.

8. Тугри чизикнинг нормал тенгламасини ёзинг.

9. Нуктадан тугри чизиккача масофа кандай топилади?

14 –МАЪРУЗА

ТУГРИ ЧИЗИКНИНГ ТУРЛИ ТЕНГЛАМАЛАРИ.

Таянч иборалар: умумий тенглама, кесмалардаги тенглама, бурчак коэффициентли тенглама, йуналтирувчи вектор, каноник тенглама, берилган нуктадан утувчи тугри чизиклар дастаси тенгламаси, икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси.

Маъруза режаси:

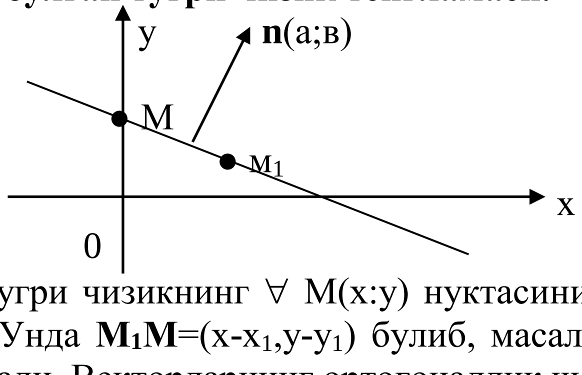
1. Берилган нуктадан утувчи ва берилган векторга перпендикуляр тугри чизик тенгламаси.
2. Тугри чизикнинг умумий тенгламаси ва унинг тахлили.
3. Тугри чизикларнинг кесишиш нуктаси.
4. Йуналтирувчи вектор ва тугри чизикнинг каноник тенгламаси.
5. Берилган нуктадан берилган йуналиш буйича утувчи тугри чизик тенгламаси.
6. Тугри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.
7. Тугри чизиклар дастаси тенгламаси.
8. Берилган икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси.
9. Тугри чизикнинг кесмалардаги тенгламаси.

Адабиётлар:

[1] I боб, §17-18 [3] V боб, § 2,7 [14]. 96-101 бетлар.

Олдинги, маърузада тугри чизикнинг ***нормал тенгламаси*** курсатилган эди. Энди тугри чизикларнинг бошка куринищдаги тенгламалари билан танишиб чикамиз.

1. Берилган $M_1(x_1,y_1)$ нуктадан утувчи ва берилган n(a,в) векторга перпендикуляр булган тугри чизик тенгламаси.



Изланаётган ℓ тугри чизикнинг ∀ M(x:y) нуктасини оламиз ва $\mathbf{M_1M}$ векторни хосил киламиз. Унда $\mathbf{M_1M}=(x-x_1,y-y_1)$ булиб, масала шартида **n** векторга перпендикуляр булади. Векторларнинг ортогоналлик шартига кура

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{M_1M}=0\Rightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \qquad (1)$$

тенгламани оламиз. Шундай килиб M(x:y) нукта ℓ да ётса, у холда $\mathbf{M_1M}$ ва **n** векторлар перпендикуляр. Акс холда эса $\mathbf{M_1M}\cdot\mathbf{n}\neq 0$ булади, яъни M(x;y) нукта (1) тенгламани каноатлантирмайди.

<u>М и с о л :</u> M(2:-5) нуктадан утувчи ва **n**=2i-3j векторга перпендикуляр булган тугри чизик тенгламасини топинг.

<u>Е ч и ш :</u> (1) тенгламага асосан $2(x-2)-3(y+5)=0 \Rightarrow 2x-3y-19=0$

2.Тугри чизикнинг умумий тенгламаси.

Олдинги пунктда тугри чизикнинг тенгламаси икки номаълумли чизикли тенглама булиши келиб чиккан эди (аналитик геометриянинг биринчи асосий масаласи).

Энди булса $\forall$ икки номаълумли чизикли тенглама

$$Ax+By+C=0 \qquad (2)$$

текисликда тугри чизикни ифодалашини курсатамиз (аналитик геометриянинг 2-асосий масаласи). Берилган тенгламани шаклини куйидагича алмаштирамиз:

$$Ax+By+C= Ax+B(y+C/B)=0\Rightarrow A(x-0)+B(y-(-C/B))$$

Бу эса, олдинги пунктдаги (1) га асосан, **n**(A,B) векторга перпендикуляр ва M(0; -C/B) нуктадан утувчи тугри чизик тенгламасидир. Куриниб турибдики (2) тенгламада A ва B коэффициентлар бир вактда 0 га тенг булмаслиги керак.

(2) тугри чизикнинг ***умумий тенгламаси*** дейилади. Унда **n(**A,B**)** вектор шу тугри чизикка перпендикуляр булиб, унинг ***нормал вектори*** дейилади.

Агар C=0 булса, Ax+By=0 тенглама хосил булади. Бу тенгламани O(0:0) нукта координаталари каноатлантирганлиги учун, у координаталар бошидан утувчи тугри чизиклар тенгламасини ифодалайди.

Хусусан y=0 (A=0, C=0, B$\neq$0) OX укининг, x=0 (A$\neq$0, C=0, B=0) эса OY укининг тенгламасидир.

3. Тугри чизикларнинг кесишиш нуктаси.

Иккита тугри чизик умумий тенгламалари $a_1x+b_1y+c_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2=0$ билан берилган булсин. Тугри чизикларнинг $M(x_0,y_0)$ кесишиш нуктаси хар иккала тугри чизикка тегишли булгани учун унинг координаталари куйидаги тенгламалар системасини каноатлантиради:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$$

<u>М и с о л 1:</u> 2x+y –1=0 ва x+2y+1=0 тугри чизикларнинг $M_0(x_0;y_0)$ кесишиш нуктасини топинг.

<u>Ечиш.</u> $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow M_0(1;-1).$

4. Тугри чизикнинг кесмалардаги тенгламаси.

Координата бошидан утмайдиган тугри чизик OX ва OY укларидан узунлиги $|a|$ ва $|b|$ булган кесмалар ажратган булсин. Бу тугри чизик тенгламасини топиш учун M(a,0) ва N(0,b) нукталар унда ётишидан фойдаланамиз. Бу нукталар координаталарини Ax+By+C=0 умумий тенгламага куйиб, A=-C/a, B=-C/b эканлигини топамиз. Бу ердан

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow (-C/a)x+(-C/b)y+C=0 \Rightarrow -C(x/a+y/b-1)=0 \Rightarrow x/a+y/b=1$$

Демак, изланган тугри чизик тенгламаси

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

булади. Бу тугри чизикнинг ***кесмалардаги тенгламаси*** дейилади.

<u>М и с о л 2:</u>: 2x+3y-6=0 тугри чизикни ясанг.

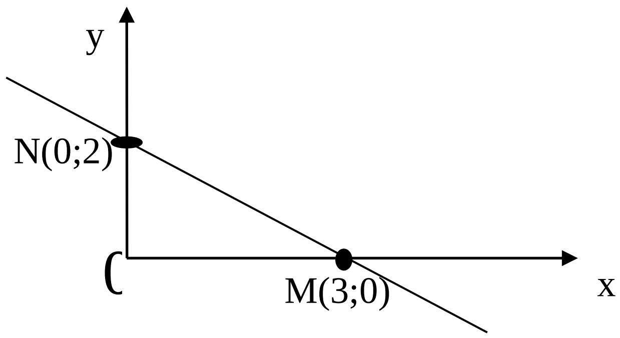
<u>Е ч и ш :</u> Уни ОХ уки билан кесишиш нуктаси М ни топамиз. Бунинг учун куйидаги системани ечиш кифоя:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ \quad y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{M(3;0)}$$

Демак берилган тугри чизикнинг ОХ уки билан кесишиш нуктаси топилди. Энди унинг ОУ уки билан кесишган нуктаси N ни топамиз:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ \quad x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \text{N(0;2)}$$

М ва N нукталарни ясаб ва уларни туташтириб, берилган тугри чизикни хосил киламиз.



Бу ердан берилган тугри чизикнинг кесмалардаги тенгламаси x/3+y/2=1 эканлигини курамиз.

Демак, умумий тенгламадан кесмалардаги тенгламага утиш учун уни карама-карши ишора билан олинган озод хадга булиш керак.

5. Тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори.
Тугри чизикнинг каноник тенгламаси.

Текисликдаги l тугри чизикнинг бирор $M_1(x_1,y_1)$ нуктаси берилган хамда $\vec{S}=m\cdot\vec{i}+n\cdot\vec{j}$ вектор шу тугри чизикка параллел булсин. У холда берилган M_1 нукта ва $\vec{S}$ вектор тугри чизикнинг холатини тула белгилайди. Шу сабабли $\vec{S}$ тугри чизикнинг ***йуналтирувчи вектори***, M_1 эса унинг ***бошлангич нуктаси*** дейилади. Берилган тугри чизикда ётувчи ихтиёрий М(x,y) нуктани оламиз ва $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,\ y-y_1)$ векторни хосил киламиз. Шартга асосан бу ва $\vec{S}$ векторлар коллинеар, яъни уларнинг мос координаталари пропорционалдир:

$$\frac{y-y_1}{m}=\frac{x-x_1}{n} \qquad (3)$$

Хосил булган (3) тенглама берилган тугри чизикнинг ***каноник тенгламаси*** дейилади.

ИЗОХ: Агар тугри чизик ОХ укига параллел, яъни тугри чизик $\vec{i}$ векторга параллел булса, у холда m=0 булади ва унинг каноник тенгламаси

$$\frac{y-y_1}{0}=\frac{x-x_1}{n}\Rightarrow 0(x-x_1)=n(y-y_1)\Rightarrow y=y_1.$$

Шундай килиб ОХ укига параллел тугри чизикнинг тенгламаси $y=y_1$ булади. Аксинча тугри чизик ОУ укига параллел булса, унинг каноник тенгламаси $x = x_1$ булади.

6. Берилган нуктадан берилган йуналиш буйича утувчи тугри чизик тенгламаси. Тугри чизиклар дастаси.

Айтайлик l тугри чизик ва ОХ уки орасидаги бурчак α булсин. Агар тугри чизик ОХ укига параллел ёки у билан устма уст тушса, унда $\alpha=0$ булади. Агарда $\alpha\neq 90^0$ булса, у холда тугри чизикнинг холатини α бурчак ва l га тегишли булиб, координаталари билан берилган $M_1(x_1:y_1)$ нукта тула аникланишини курсатамиз. Йуналтирувчи вектор сифатида l га параллел булган, яъни ОХ уки билан α бурчак ташкил килувчи $\vec{e}$ бирлик векторни караймиз. Маълумки ихтиёрий бирлик вектор узининг йуналтирувчи косинуслари билан аникланади, яъни $\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$. Бунда $\cos\beta=\sin\alpha$ булгани учун

$$\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}.$$

Тугри чизикнинг (3) каноник тенгламасига $m=\cos\alpha$ ва $n=\sin\alpha$ деб, куйидаги натижани оламиз:

$$\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=\frac{x-x_1}{\cos\alpha}\Rightarrow tg\alpha\;(x-x_1)=y-y_1$$

Агар бунда $k=tg\alpha$ деб олсак, у холда

$$y-y_1=k\,(x-x_1) \qquad (4)$$

тенгламага эга буламиз. Бу берилган нуктадан берилган йуналиш буйича утувчи тугри чизик тенгламаси булиб, унда k – тугри чизикнинг ***бурчак коэффициенти*** дейилади.

Мисол: M(1;2) нуктадан утиб, ОХ уки билан $\pi/3$ бурчак ташкил килувчи тугри чизик тенгламасини тузинг.

Ечиш: Изланаётган тугри чизикнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k=tg\alpha=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

Натижада тугри чизикнинг тенгламаси (4) га асосан куйидагича булади:

$$y-y_1=k(x-x_1)\Rightarrow y-2=\sqrt{3}(x-1)\Rightarrow\sqrt{3}\,x-y-1-2\sqrt{3}=0.$$

Текисликнинг бирор M_0 нуктаси оркали утувчи тугри чизиклар туплами ***тугри чизиклар дастаси***, умумий нукта M_0 эса ***дастанинг маркази*** дейилади.

7. Тугри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.

Тугри чизик ОХ уки билан α бурчак ташкил килиб, ОУ укини $B(0,b)$ нуктада кесиб утсин. Шу тугри чизик тенгламасини топамиз. Бунинг учун тугри чизиклар дастасининг тенгламасига $x_1=0$, $y_1=b$ куйиб,

$$y-b=k(x-0)\Rightarrow y=kx+b \qquad (5)$$

тенгламани оламиз. Бу тугри чизикнинг ***бурчак коэффициентли тенгламаси*** дейилади. Хусусан агар $b=0$ булса, $y=kx$ координаталар бошидан утувчи тугри чизиклар дастасининг тенгламасини ифодалайди. Агарда k=0 булса, у холда OX укига параллел тугри чизикнинг $y=b$ тенгламасига эга буламиз.

8. Берилган икки нукта оркали утувчи тугри чизик тенгламаси.

Текисликда $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нукталар берилган булсин. Шу нукталардан утувчи тугри чизик тенгламасини топиш учун $M_1(x_1, y_1)$ нуктани бошлангич, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ векторни эса йуналтирувчи деб олиш мумкин. Шу сабабли изланган тугри чизикнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

куринишда булади.

Масалан, $M_1(2,1)$ ва $M_2(-3,0)$ нукталардан утувчи тугри чизик тенгламаси куйидагича булади:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -x+2=-5y+5 \Rightarrow x-5y+3=0.$$

<u>**Уз-узини назорат этиш саволлари:**</u>

1. Берилган нуктадан утувчи ва берилган векторга перпендикуляр тугри чизик тенгламасини ёзинг.
2. Тугри чизикнинг умумий тенгламаси кандай куринишда булади?
3. Тугри чизикнинг умумий тенгламасини тахлил этинг.
4. Икки тугри чизикнинг кесишиш нуктаси кандай топилади?
5. Тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори деб нимага айтилади?
6. Тугри чизикнинг каноник тенгламаси кандай куринишда булади?
7. Тугри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламасини ёзинг.
8. Бурчак коэффициентли тенгламадаги параметрлар кандай геометрик маънога эга?
9. Берилган нуктадан утувчи тугри чизиклар дастасининг тенгламаси кандай куринишда булади?
10. Берилган икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламасини ёзинг.
11. Тугри чизикнинг кесмаларадаги тенгламасини ёзинг ва ундаги параметрларнинг геометрик маъносини курсатинг.

15 - МАЪРУЗА

ТУГРИ ЧИЗИКЛАРГА ДОИР АЙРИМ МАСАЛАЛАР.

Таянч иборалар: икки тугри чизик орасидаги бурчак, тугри чизикларнинг параллелик шарти, перпендикулярлик шарти, нуктадан тугри чизиккача масофа.

Маъруза режаси:

1. Икки тугри чизик орасидаги бурчак.
2. Тугри чизикларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шарти.
3. Нуктадан тугри чизиккача булган масофа.

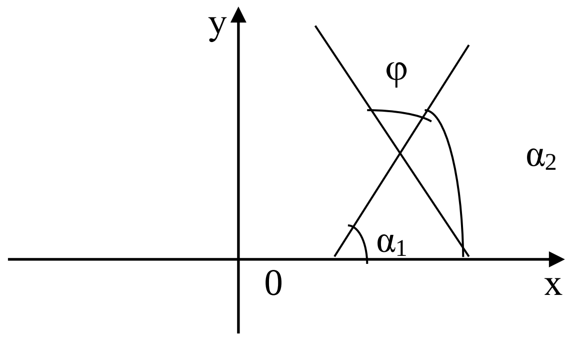
Адабиётлар:

[1] I боб, §19 [3] V боб, §3,5,6 [14]. 101-104 бетлар.

Икки тугри чизик орасидаги бурчак.

Текисликнинг бирор М нуктасида кесишувчи иккита тугри чизик орасидаги бурчакни топиш билан шугулланамиз. Бу тугри чизиклар узларининг бурчак коэффицентли тенгламалари билан берилган булсин, яъни

$y_1=k_1x+в_1$ ва $y_2=k_2x+в_2$



Бу тугри чизиклар орасидаги бурчакни φ билан ва уларнинг OX уки билан хосил килган бурчакларини мос равишда α_1 ва α_2 билан белгилаймиз. Чизмага асосан изланаётган бурчак тангенсини топамиз:

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}$$

Бунда $tg\alpha_1=k_1$ ва $tg\alpha_2=k_2$ эканлигини хисобга олсак ва $\varphi\neq 90^0$ шартни каноатлантирса, у холда тугри чизиклар орасидаги бурчакни

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \qquad (1)$$

формула оркали аниклашимиз мумкин.

Агар тугри чизиклар $A_1x+B_1y+C_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2=0$ умумий тенгламалари билан берилган булса, уларнинг $\mathbf{n_1}(A_1,B_1)$ ва $\mathbf{n_2}(A_2,B_2)$ нормал векторлари-га мурожаат киламиз. Унда изланган φ бурчак нормал векторлар орасидаги бурчак билан тенг булади ва векторлар орасидаги бурчак формуласига асосан

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

формула билан топилади.

Тугри чизикларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

Агар иккита тугри чизик || ёки устма-уст тушса, у холда

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Аксинча, агар $k_1 = k_2$ булса, у холда tg φ = 0 => φ = 0. Шундай килиб, икки тугри чизикнинг || булишининг зарурий ва етарли шарти $k_1 = k_2$ булади.

Агар тугри чизиклар ⊥ булсалар, у холда (1) формула маъносиз булади. Айтайлик $0<\varphi<90^0$ булсин. Бунда cosφ≠0, sinφ≠0 булгани учун φ бурчакни котангенсини (1)га асосан куйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathrm{ctg}\varphi=1/\mathrm{tg}\varphi =(1+ \mathrm{tg}\,\alpha_1\, \mathrm{tg}\,\alpha_2)/ (\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1) = (1 + k_1\, k_2) / (k_2 - k_1)$$

Бу формулада φ = π/2 десак, ctg φ=0 => $k_1\, k_2 = -1$ натижани оламиз. Аксинча бу тенглик бажарилса, у холда ctgφ =0⇒φ=π/2 эканлигини куриш кийин эмас.

Демак, иккита тугри чизикнинг перпендикулярлигининг зарурий ва етарли шарти $k_1\, k_2= -1$ булади.

<u>1-м и с о л:</u> 6x+2y-1=0 ва x-3y+2 =0 тугри чизикларнинг перпендикулярлигини курсатинг.

<u>Е ч и ш :</u>

$2y_1 =-6x+1$	$3y_2 = x+2$
$y_1 =-3x + ½$	$y_2 = x/3 +2/3$
$k_1 = -3$	$k_2 = 1/3$

Натижада $k_1\, k_2 = -1$ эканлигини курамиз, яъни φ = 90° ва бу тугри чизиклар узаро перпендикуляр экан.

<u>2-м и с о л :</u> М(-3:-1) нукта оркали утувчи ва 2x+y-3=0 тугри чизикка перпендикуляр булган тугри чизик тенгламаси топилсин.

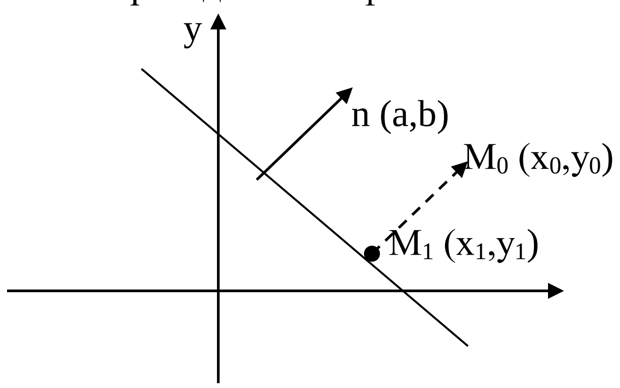
<u>Е ч и ш :</u> Берилган тугри чизикнинг бурчак коэффициенти $k_1=-1/2$ га тенг. Демак ,унга перпендикуляр булган тугри чизикнинг бурчак коэффициенти $k_2=-1/k_1=2$ ва унинг тенгламаси y=2x+b куринишга эга. М(-3,-1) нукта изланаётган тугри чизикда ётгани учун унинг координаталари бу тенгламани каноатлантиради:

$$-1= 2\cdot (-3)+b\Rightarrow b=5.$$

Натижада изланган тугри чизик тенгламаси y=2x +5 эканлигини топамиз.

Нуктадан тугри чизиккача булган масофа.

Айтайлик M_0 $(x_0;y_0)$ нукта ва ундан утмайдиган бирор тугри чизик узининг умумий тенгламаси ax+вy+c=0 билан берилган булсин. Берилган нукта ва шу тугри чизик орасидаги масофани топиш масаласини куямиз.



0 x

Берилган тугри чизикка перпендикуляр булган $\vec{n}=(a;b)$ ва **M_1M_0**$=(x_0-x_1;\ y_0-y_1)$ векторлар параллел булади. Бунда $\bar{n}$ тугри чизикнинг нормал вектори, M_1 эса тугри чизикка M_0 нуктада утказилган перпендикуляр асосини ифодалайди. Чизмага асосан ва скаляр купайтманинг хар иккала куринишига биноан

$$\bar{n}\cdot \mathbf{M_1M_0} = |\bar{n}|\,|\mathbf{M_1M_0}|\cos 0 = a(x_0 - x_1) + b\,(y_0 - y_1),$$

$$\sqrt{a^2+в^2}\cdot d = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) \qquad (2)$$

Бунда $d=|\mathbf{M_1M_0}|$ изланаётган масофани ифодалайди.

$M_1(x_1;y_1)$ нукта берилган тугри чизикда ётганлиги учун унинг координаталари тугри чизик тенгламасини каноатлантиради, яъни

$$a\,x_1 + в\,y_1 + c = 0 \Rightarrow a\,x_1 + в\,y_1 = -c.$$

Буларни хисобга олиб, (2) ни куйидагича ёзиш мумкин:

$$a\,x_0 + в\,y_0 - (a\,x_1 + в\,y_1) = (\pm d)\sqrt{a^2+в^2}\,,$$

$$a\,x_0 + в\,y_0 + c = (\pm d)\sqrt{a^2+в^2}\,,$$

$$d = \pm\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \qquad (3)$$

3-м и с о л : $2x-3y+1=0$ тугри чизик ва $M(2;1)$ нукталар орасидаги масофани топинг.

Е ч и ш: Берилганларни (3) формулага куйиб, берилган нукта ва тугри чизик орасидаги масофани топамиз:

$$d = |2\cdot 2 - 3\cdot 1 + 1| \,/\, \sqrt{4+9} = 2 \,/\, \sqrt{13}$$

Изох: Олдинги маърузада нормал тенгламаси билан берилган тугри чизик билан $M_0(x_0,y_0)$ орасидаги масофа

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

формула билан хам топилиши курсатилган эди.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Икки тугри чизик орасидаги бурчак кандай топилади?
2. Тугри чизикларнинг перпендикулярлик шарти нимадан иборат?
3. Тугри чизикларнинг параллеллик шартини ёзинг.
4. Нуктадан тугри чизиккача булган масофа кандай топилади?

16 - МАЪРУЗА

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛАР.
АЙЛАНА ВА ЭЛЛИПС.

Таянч иборалар: иккинчи даражали тенглама, иккинчи тартибли чизиклар, айлана умумий тенгламаси, эллипс таърифи, эллипснинг каноник тенгламаси, фокус, эксцентриситет, фокал радиус, директриса.

Маъруза режаси:

1. Иккинчи даражали тенглама ва иккинчи тартибли чизиклар.
2. Айлананинг умумий тенгламаси.
3. Эллипс ва унинг каноник тенгламаси.
4. Эллипс тенгламасининг тахлили ва эллипс графиги.
5. Эллипснинг эксцентриситети.
6. Эллипс директрисалари ва фокал радиуслари.

Адабиётлар:

[1] I боб, §13, §35-36 [3] VII боб, §1-3 [14]. 104-108 бетлар.

Ушбу II даражали тенглама

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

текисликдаги иккинчи тартибли чизикнинг умумий тенгламаси дейилади. Бу ерда A, B, C лардан камида биттаси нолга тенг эмас. (1) тенглама коэффициентларининг кийматларига караб турли иккинчи тартибли чизикларни тасвирлаши мумкин. Биз куйида шу эгри чизикларни тенгламалари билан танишамиз.

Айлананинг умумий тенгламаси.

Радиуси r га тенг ва маркази C(a;b) нуктада ётган айлана тенгламасини келтириб чикарамиз. M(x,y) шу айланадаги ихтиёрий бир нукта булсин. Икки нукта орасидаги масофани топиш формуласига асосан

$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Бу маркази C(a;b)нуктада булиб, радиуси r га тенг булган айлананинг тенгламасидир. Агар a=b=0 булса $x^2+y^2= r^2$. Бу маркази координаталар бошида ётган айлананинг тенгламасидир.

(2) тенгламадаги кавсларни очсак,

$$x^2+y^2-2ax-2вy+a^2+в^2-r^2=0,$$

яъни (1) куринишдаги тенгламани оламиз. Охирги тенгламага

$$D=-2a; \qquad E=-2b; \qquad F=a^2+b^2-r^2$$

белгилашларни куйиб, ушбу

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (3)$$

айлананинг умумий куринишдаги тенгламаси деб аталувчи тенгламани оламиз.

Шундай килиб, иккинчи тартибли (1) умумий тенглама айлананинг тенгламаси булиши учун x^2 ва y^2 олдидаги коэффициентлар тенг ва ху купайтма олдидаги коэффициентнинг нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.

Масалан, $x^2+y^2-2x+3y+2=0$ тенгламани курамиз. Бу тенгламада х ва у катнашган хадларни алохида – алохида гурухлаб ва тула квадрат ажратиб, куйидаги айлана тенгламасини хосил килиш мумкин:

$$x^2-2x+1-1+y^2+3y+9/4-9/4+2=(x-1)^2+(y+3/2)^2-5/4=0$$

$$(x-1)^2+(y+3/2)^2=5/4$$

Бу маркази C(1,-3/2) нуктада жойлашган ва радиуси $r=\sqrt{5}/2$ булган айлана тенгламасидир.

Эллипс ва унинг каноник тенгламаси

ТАЪРИФ: Эллипс деб, хар бир нуктасидан берилган икки нуктагача (фокусларгача) масофаларнинг йигиндиси узгармас 2а сонига тенг булган текислик нукталарининг геометрик урнига айтилади.

Бу 2а узгармас сон фокуслар орасидаги 2с масофадан катта деб олинади.

Биз F_1 ва F_2 фокусларни координаталар бошига нисбатан симметрик килиб оламиз. Унда фокуслар $F_2(-c;0)$ ва $F_1(c;0)$ координаталарга эга булади.Агар M(x;y) эллипсда ётган ихтиёрий нукта булса,унда эллипс таърифига асосан F_1M+F_2M йигинди узгармас сон булиши керак, яъни

$$F_1M+F_2M=2a\,. \qquad (4)$$

Икки нукта орасидаги масофани топиш формуласига асосан

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,, \qquad F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Бу натижаларни (4)-тенгликка куйиб, уни соддалаштирамиз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

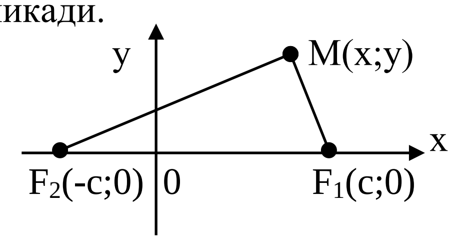
$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4a^2-4xc=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,; \qquad a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2 \qquad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (5)$$

F_1MF_2 учбурчакдан $MF_1+MF_2>F_1F_2$, бундан эса $2a>2c$, $a>c$ булиши кераклиги келиб чикади.



Натижада $a^2 – c^2>0$ булади ва уни $a^2 – c^2 = b^2$ деб белгилаб олиш мумкин. Бу холда (5) тенглик $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ куринишга келади. Бу тенгламани a^2b^2 га булиб, ушбу тенгламага келамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

Хосил булган тенглама эллипснинг ***каноник тенгламаси*** дейилади.

Эллипснинг шакли

Элиппснинг каноник тенгламасига асосан (х; у) нукта эллипсда ётса, у холда (-х; у), (-х; -у), (х; -у) нукталар хам унда ётади. Шунинг учун хам координата уклари эллипс учун симметрия уклари булиб хисобланади.

Эллипснинг координата уклари билан кесишган нукталари эллипснинг учлари дейилади. Уларни топиш учун (6) га мос равишда х=0 ва у=0 кийматларни куйиб, хосил булган тенгламаларни ечамиз:

$$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b,$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a.$$

Натижада эллипснинг куйидаги туртта учлари хосил булади:

$A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$

$A_1A_2=2a$ – эллипснинг катта уки, $B_1B_2=2в$ - кичик уки, а ва в эса унинг ярим уклари дейилади.

Каноник тенгламадан

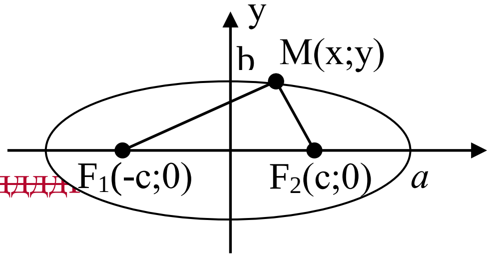
$$\frac{x^2}{a^2}\le 1 \Rightarrow x^2\le a^2 \Rightarrow |x|\le a, \qquad \frac{y^2}{в^2}\le 1 \Rightarrow y^2\le в^2 \Rightarrow |y|\le в,$$

натижаларни оламиз. Демак эллипс чегараланган эгри чизик булади

Координата уклари эллипс учун симметрия чизиклари эканлигидан унинг шаклини факат биринчи чоракда аниклаш кифоя. Унда $x\ge 0$, $y\ge 0$ булгани учун (6) тенгламадан

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

функцияни хосил киламиз. Бу функция учун $x\in[0;a]$ булиб, х ошиб борганда, у узгарувчи в дан бошлаб нолгача камайиб боради ва эллипснинг биринчи чоракдаги кисмини хосил килади. Бу кисмни симметрия асосида давом эттириб, эллипс шакли куйидагича булишини топамиз:



~~Fkghkjgh jgjдддд.~~ a x x

Эллипснинг эксцентриситети.

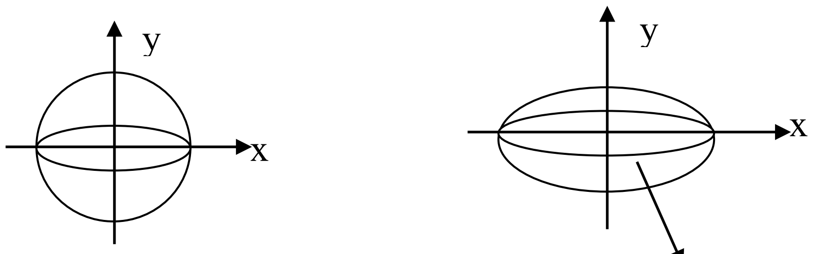
ТАЪРИФ: Эллипснинг фокуслари орасидаги 2с масофани унинг катта уки узунлиги 2*а* га нисбати эллипснинг ***эксцентриситети*** деб аталади ва ε каби белгиланади.

Таърифга асосан ε=2с/2а=с/а ва с∈(0;а) булгани учун о<ε<1 куш тенгсизлик уринли булади. Каноник тенглама буйича ε куйидагича топилади:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\Rightarrow \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Бу ерда ε =0 булса, а=в булади ва эллипс айланага утади. Демак айлана эллипснинг хусусий холи булади.

ε бирга якинлашган сари эллипс ОХ укига якинлашади, яъни в нолга якин булади.



Эллипс нуктасининг фокал радиуслари.

Эллипснинг ихтиёрий М(х,у) нуктасидан F_1 ва F_2 фокусларигача булган r_1 ва r_2 масофалар шу нуктанинг ***фокал радиуслари*** дейилади. Эллипс таърифига асосан $r_1+r_2=2a$ булади. Икки нукта орасидаги масофа формуласига асосан

$$r_1=MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad r_2=MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ .$$

Бу фокал радиусларни квадратга кутариб айирсак, у холда

$$r_2^2-r_1^2=4cx \text{ ва } r_1+r_2=2a$$

тенгламалар системаси хосил булади ва уни ечиб фокал радиуслар учун куйидаги формулаларни оламиз:

$$r_1=a-\varepsilon x \qquad r_2=a+\varepsilon x$$

Эллипснинг директрисалари.

Эллипснинг катта укига перпендикуляр ва кичик укига параллел булган х=±ℓ (ℓ>0) тугри чизикларни караймиз. Эллипснинг ихтиёрий М(х;у) нуктасидан шу нуктага якин х=±ℓ (ℓ>0) перпендикуляр тугри чизиккача (d_1) хамда якин фокусигача булган r_1 масофалар нисбатини оламиз:

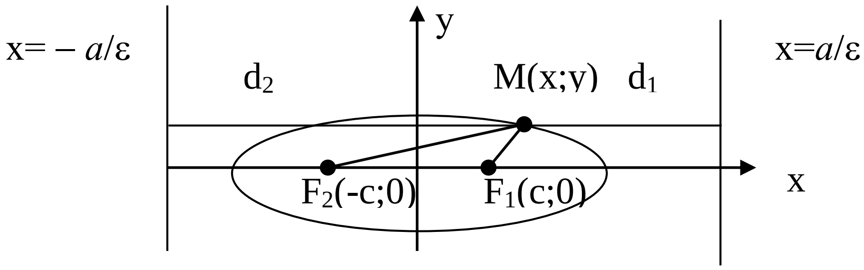
$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{\lambda-x}=\varepsilon\,\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{\lambda-x}$$

Агар ℓ сифатида $\ell = a/\varepsilon$ олинса, у холда юкоридаги нисбат узгармас булиб, доимо ε га тенг булади. М(x;y) нуктадан $x = -\ell$ тугри чизигигача булган масофани d_2 оркали белгиласак, у холда юкоридагидек мулохазалар юритиб, $r_2/d_2 = \varepsilon$ тенгликни хосил киламиз.

Эллипс марказининг чап ва унг томонида бир хил масофада жойлашган $x = \pm a/\varepsilon$ тугри чизикларига эллипснинг ***директрисалари*** дейилади.

Айланада директриса булмайди, чунки унда $\varepsilon = 0$.

Шундай килиб эллипснинг ихтиёрий нуктасидан фокусигача ва мос директрисасигача булган масофалар нисбати узгармас сон булиб, доимо ε га тенг булади.



Мисол: $x^2+4y^2=4$ эллипснинг барча характеристикаларини топинг.

Ечиш: Дастлаб эллипснинг каноник тенгламасини хосил киламиз:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \Rightarrow a^2=4;\ b^2=1 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=3.$$

Унда фокуслар $F_1(-\sqrt{3},0)$ ва $F_2(\sqrt{3},0)$, ярим уклар а=2 ва в=1 булади. Булардан эксцентриситет ва директрисаларни топамиз:

$$\varepsilon=\frac{c}{\mathrm{a}}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \mathrm{x}=\pm\frac{\mathrm{a}}{\varepsilon}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Фокал радиуслар $r_1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ r_2=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$ формулалар билан топилади.

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Иккинчи даражали тенгламанинг умумий куриниши кандай булади?
2. Айлананинг умумий тенгламасини ёзинг ва у буйича айлана маркази хамда радиуси кандай топилишини курсатинг.
3. Эллипс кандай таърифланади?
4. Эллипснинг каноник тенгламасини ёзинг ва ундаги параметрлар маъносини курсатинг.
5. Эллипснинг эксцентриситети кандай аникланади ва у нимани ифодалайди?
6. Эллипснинг фокал радиуслари деб нимага айтилади ва улар кандай топилади?
7. Эллипс директрисалари деб нимага айтилади?

17 - МАЪРУЗА

ГИПЕРБОЛА ВА ПАРАБОЛА.

Таянч иборалар: гипербола таърифи, гиперболанинг каноник тенгламаси, фокус, ук, асимптота, эксцентриситет, директриса, фокал радиус, парабола таърифи, каноник тенгламаси, парабола фокуси ва унинг хоссаси, парабола эксцентриситети.

Маъруза режаси:

1. Гипербола ва унинг каноник тенгламаси.
2. Гипербола графиги ва асимптоталари.
3. Гипербола эксцентриситети, директрисалари ва фокал радиуслари.
4. Парабола ва унинг каноник тенгламаси.
5. Парабола графиги ва эксцентриситети.

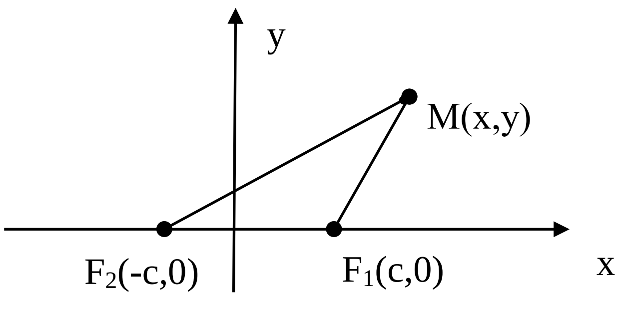
Адабиётлар:

[1] I боб, §35-36 [3] VII боб, §4-5 [14]. 109-119 бетлар.

ТАЪРИФ: Гипербола деб, фокуслар деб аталувчи икки нуктагача масофаларининг айирмаси узгармас 2a сонга тенг булган текисликдаги нукталарнинг геометрик урнига айтилади.

Бу узгармас 2a сони фокуслар орасидаги 2c масофадан кичик булиши керак.

Фокусларни координаталар бошига нисбатан симметрик килиб оламиз. Унда уларни $F_1(c,0)$ ва $F_2(-c,0)$ деб ифодалаш мумкин. $M(x,y)$ гиперболадаги ихтиёрий бир нукта булсин.



Таърифдан фойдаланиб гипербола тенгламасини чикарамиз. Таърифга асосан $|F_2M|-|F_1M| = 2a$ булади. Бу ерда

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,, \quad |MF_1| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ва бу масофаларни юкоридаги тенгликка куйиб, соддалаштирамиз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

$$a^2(x\text{-}c)^2+a^2y^2=c^2x^2\text{-}2cx\,a^2+a^4$$

$$a^2x^2\text{-}2cx\,a^2+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2\text{-}2cx\,a^2+a^4$$

$$(a^2\text{-}c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \Rightarrow (c^2\text{-}a^2)x^2\text{-}a^2y^2=a^2(c^2\text{-}a^2).$$

F_1MF_2 учбурчакдан $|F_2M|-|F_1M|<|F_1F_2| \Rightarrow 2a<2c \Rightarrow a<c$ булгани учун $в^2=c^2\text{-}a^2$ деб белгилаш мумкин ва охирги тенгликни унга булиб, ушбу тенгламани хосил киламиз:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1 \qquad (1)$$

Бу тенгламага гиперболанинг ***каноник тенгламаси*** дейилади.

Эллипсдагидек бу ерда хам $r_2=|F_2M|$ ва $r_1=|F_1M|$ гиперболанинг фокал радиуслари дейилади.

Гиперболанинг координата уклари билан кесишган нукталарини топамиз:

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow \quad x=\pm a$$

Агар x=0 десак, у холда $y^2=-в^2 \Rightarrow y\in\varnothing$ булиб, гиперболани ОУ уки билан кесишмаслигига ишонч хосил киламиз. Шундай килиб, гиперболани ОХ укидаги кесишиш нукталари $A_2(a;0)$ ва $A_1(-a;0)$ булиб, улар гиперболанинг ***учлари*** дейилади. Гипербола учлари орасидаги $2a$ масофани гиперболанинг ***хакикий уки*** ва $B_2(0;\,в)$, $B_1(0;\,-в)$ нукталар орасидаги $2в$ масофани эса гиперболанинг ***мавхум уки*** деб аталади. Мос равишда a ва $в$ сонларига гиперболанинг ярим хакикий ва ярим мавхум уклари дейилади. Укларнинг урта нуктаси гиперболанинг маркази дейилади.

Гиперболанинг шакли.

Агар (x,y) гиперболада ётган нукта булса, у холда, $(\pm x, \pm y)$ нукталар хам гиперболага тегишли булади, яъни гипербола координата укларига нисбатан симметрикдир.

Гиперболанинг каноник тенгламасидан

$$\frac{x^2}{a^2}\geq 1 \Rightarrow x^2\geq a^2 \Rightarrow \quad |x|\geq a.$$

Агар юкоридагидек, факат биринчи чорак билан кифоялансак, у холда

$$y=\frac{в}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

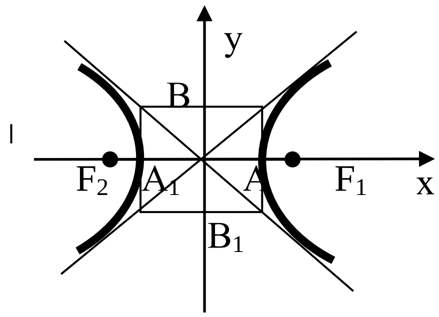
функцияда x узгарувчи a дан ∞ гача узгариб борганда, y узгарувчи $в$ дан ∞ гача усади, яъни гипербола чегараланмаган эгри чизикдир. I чоракдаги гипербола графигини симметрия буйича давом эттириб, гипербола иккита булакдан иборат эгри чизик булишини курамиз. Бу булаклар гиперболанинг шохлари деб аталади.

Гиперболанинг асимптоталари.

ТАЪРИФ: Берилган эгри чизик асимптотага эга дейилади, агарда шундай *l* тугри чизик мавжуд булсаки, эгри чизик бу тугри чизикка чексиз якинлашиб борса.

Гиперболанинг $A_1A=2a$ ва $BB_1=2в$ укларидан ясалган тугри туртбурчак диаганаллари ётган тугри чизиклар гиперболанинг асимптоталари булишини курсатиш мумкин.

Гиперболанинг графиги ва асимптоталари куйидаги чизмада курсатилган:



Асимптоталарнинг тенгламалари куйидаги куринишга эга:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (2)$$

Агарда $a=в$ булса, гипербола тенг ёнли дейилади. Унда y=±x асимптоталарни координата уклари сифатида олсак, гипербола тенгламаси бизга мактабдан таниш булган $x \cdot y=\mathrm{k} \Rightarrow y=\mathrm{k}/x$ куринишга келади.

М и с о л. $a=3$ ва $в=2$ га тенг булса, гипербола ва унинг асимптоталари тенгламаси ёзилсин.

Е ч и ш . Гиперболанинг (1) каноник тенгламаси ва (2) асимптоталар тенгламасига асосан ушбу натижаларни оламиз:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1, \qquad \mathrm{y} = \pm \frac{2}{3} x$$

Гиперболанинг эксцентриситети.

ТАЪРИФ: Гиперболани фокуслари орасидаги 2c масофани унинг хакикий уки узунлиги $2a$ га нисбати гиперболанинг ***эксцентриситети*** дейилади ва ε каби белгиланади.

Таърифга ва каноник тенгламага асосан

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} > 1. \qquad (3)$$

Агар a параметр $в$ га нисбатан кичик булса, гиперболанинг шохлари OX укига караб сикик булади, $в$ канча a га якин булса унинг шохлари шунча ёйик булади.

Гиперболанинг M нуктасидан F_1 ва F_2 фокусларигача булган масофалар шу нуктанинг ***фокал радиуслари*** дейилади.

Эллипснинг фокал радиусларини топиш йулидан фойдаланиб, гиперболанинг фокал радиусларини топамиз:

$r_1= -a+\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$ (унг шох учун), $r_1=a - \varepsilon x$, $r_2= -a-\varepsilon x$ (чап шох учун)

Ми с о л : $x^2 / 16 - y^2 / 9=1$ гиперболанинг абциссаси 8 га тенг, ординатаси мусбат булган нуктасининг фокал радиуслари хисоблансин.

Е ч и ш : Масала шарти ва (3) формулага асосан

$x=8$, $y>0$, $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{16+9}=5$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$

ва (4) формулага асосан унг шох фокал радиуслари

$r_1=-a+\varepsilon x=-4+{}^5/_4\cdot 8=6$, $r_2=a+\varepsilon x=4+{}^5/_4\cdot 8=14$

Гиперболанинг директрисалари.

ТАЪРИФ: Гиперболанинг ***директрисалари*** деб унинг марказидан $\pm a/\varepsilon$ масофада утиб, фокал укига перпендикуляр булган тугри чизикларга айтилади.

Таърифга асосан директриса тенгламалари $x=\pm a/\varepsilon$ булади.

Экцентриситет $\varepsilon>1$ булгани учун $a/\varepsilon<a$. Демак директриса O марказ билан A_1 ва A учлар орасидан утади.

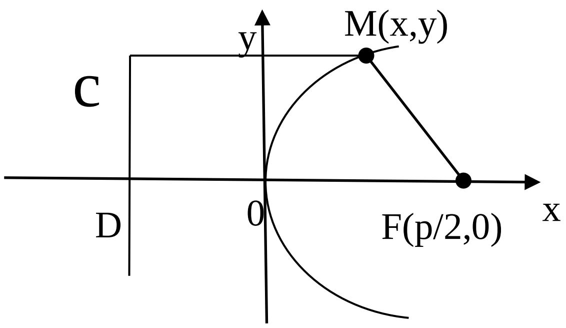
ТЕОРЕМА: Гиперболанинг ихтиёрий нуктасидан фокусигача масофанинг мос директрисагача масофасининг нисбати узгармас булиб, ε экцентриситетга тенг булади, яъни $r/d=\varepsilon$.

Теоремани исботини укувчига хавола киламиз.

ТАЪРИФ: Парабола деб, хар бир нуктасидан берилган нуктагача (фокусигача) ва берилган тугри чизиккача (директрисагача)масофалари узаро тенг булган текислик нукталарининг геометрик урнига айтилади.

Бунда директриса фокусдан утмаслиги керак.

Парабола тенгламасини топиш учун F фокус ва l директриса орасидаги масофани FD=p, координата бошини улар уртасида деб оламиз. Унда фокус $F(p/2,0)$, директриса тенгламаси $x=-p/2$ булади. Параболага тегишли ихтиёрий $M(x,y)$ нуктани оламиз.



Таърифга кура CM=MF ва

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad CM=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

булгани учун куйидаги тенгликни хосил киламиз:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|\Rightarrow x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4}\Rightarrow y^2=2px \quad (5)$$

Хосил булган (5) тенглама параболанинг ***каноник тенгламаси*** дейилади. Бу парабола OX укига нисбатан симметрик булади ва p параболанинг параметри дейилади.

Параболанинг ихтиёрий M нуктасидан директирисагача булган масофа CM=d, фокусигача булган масофа FM=r деб белгиласак, таърифга асосан r=d ва параболанинг эксцентриситети $\varepsilon=r/d=1$ булади. Парабола учун директириса тенгламаси $x=-p/2$, булади.

Мисол: OX уки параболанинг симметрия уки, унинг учи координаталар бошида ётади. Парабола учидан фокусигача булган масофа 4 бирликка тенг. Парабола тенгламасини тузинг.

Ечиш: Масала шартига ва (5) формулага асосан

$OF=4 \Rightarrow p/2=4 \Rightarrow p=8 \Rightarrow y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 8x=16x$.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Гипербола кандай таърифланади?
2. Гиперболанинг каноник тенгламаси кандай куринишда булади?
3. Гипербола каноник тенгламасидаги параметрлар нимани ифодалайди?
4. Гипербола асимптоталари кандай тенглама билан ифодаланади?
5. Гипербола эксцентриситети деб нимага айтилади ва у кандай кийматлар кабул кила олади?
6. Гиперболанинг фокал радиуслари деб нимага айтилади ва улар кандай топилади?
7. Гипербола директрисалари кандай хоссага эга?
8. Парабола кандай таърифланади?
9. Параболанинг каноник тенгламаси кандай куринишда булади?
10. Параболанинг эксцентриситети нимага тенг?
11. Парабола каноник тенгламасидан унинг фокуси ва директрисаси кандай топилади?

18 - МАЪРУЗА.

ФАЗОДА ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАЛАРИ.

Таянч иборалар: текисликнинг вектор тенгламаси, нормал тенгламаси, умумий тенгламаси, текисликнинг нормал вектори, текисликнинг кесмалардаги тенгламаси.

Маъруза режаси:

1. Текислик ва унинг вектор тенгламаси.
2. Текисликнинг нормал тенгламаси.
3. Текисликнинг умумий тенгламаси.
4. Текисликнинг нормал вектори ва уни топиш.
5. Текислик умумий тенгламасини тахлил этиш.
6. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси.

Адабиётлар:

[1] I боб, §14-15 [3] VI боб, §1-2 [14]. 119-120 бетлар.

Фазодаги хар бир M нукта учта x,y,z координаталар билан аникланади. Шу сабабли фазодаги геометрик объект тенгламаси уч узгарувчили, яъни F(x,y,z) = 0 куринишда булади.

Фазода энг асосий геометрик обеъктлардан бири булиб текислик хисобланади. Унинг тенгламаси куйидаги теорема билан аникланади.

ТЕОРЕМА: 1)Агарда фазода текислик берилган булса, унинг тенгламаси уч узгарувчили чизикли тенгламадан иборат булади.

2) Фазода уч номаълумли чизикли тенглама берилган булса, бу тенглама бирор текисликни аниклайди.

ИСБОТ: 1) Фараз килайлик фазода кандайдир текислик берилган булсин. Уни уч узгарувчили битта чизикли тенглама ифодалашини курсатамиз.

Декарт координаталар системасида берилган текисликни ихтиёрий бир нуктасини M(x;y;z), унинг радиус-векторини ***r*** каби белгилаймиз. Текисликдаги бошка бир $T(x_0;y_0;z_0)$ нуктадан координаталар бошигача булган масофани p оркали белгилаймиз, яъни OT=p. OT перпендикуляр устида текисликка йуналган $\mathbf{n^0}$ бирлик векторни оламиз. M(x;y;z) нукта текисликнинг исталган нуктаси булса хам **OM**=**r** радиус–векторнинг бирлик $\mathbf{n^0}$ векторга проекцияси узгармас булиб, p масофага тенг. Бундан

$$np_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM} = p \quad \text{ва} \quad np_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM} = \vec{r}\vec{n}^0 \Rightarrow \vec{r}\vec{n}^0 - p = 0 \qquad (1)$$

натижани оламиз. Хосил килинган (1) тенглама текисликнинг ***вектор тенгламаси*** дейилади. Агарда

$$\mathbf{r}=(x;y;z), \quad \mathbf{n^0}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$$

деб олсак, скаляр купайтманинг координаталаридаги ифодасидан

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (2)$$

тенгламани хосил киламиз. Бу текисликнинг ***нормал тенгламаси*** дейилади. Ундан хар кандай текисликка чизикли уч номаълумли тенглама мос келишини курамиз.

2) Айтайлик бизга

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

уч номаълумли чизикли тенглама берилган булсин. Агар M(x;y;z) (3) тенглама аниклайдиган сиртнинг ихтиёрий нуктаси булса, унинг радиус–вектори **r**=(x;y;z) ва ёрдамчи ***n*=**(A;B;C) узгармас векторни киритайлик. Булардан фойдаланиб (3) тенгламани скаляр купайтма ёрдамида куйидагича ифодалаймиз:

$$\mathbf{nr}+D=0 \qquad (4)$$

(3) тенгламани |**n**| га буламиз. Натижада куйидаги холлар кузатилади:

I. Агар D<0 булса, у холда $\mathbf{n^0r}+D/|\mathbf{n}|=0$ ва $p=-D/|\mathbf{n}|$ десак, $\mathbf{rn^0}-p=0$ вектор тенгламани оламиз. Бу тенгламани каноатлантирувчи барча M(x;y;z) нукталарнинг геометрик урни, (1) га асосан, текисликдан иборат булади.

II. Агар D>0 булса, (4) ни -|**n**| га буламиз ва яна $p = D/|\mathbf{n}|$ десак, $\mathbf{r\,(-n^0)}-p=0$ вектор тенгламани оламиз.

III. Агар D=0 булса, у холда (4) ни |**n**| ёки -|**n**| га булиб, $\mathbf{rn^0}=0$ вектор тенгламани хосил киламиз.

Демак, (3) тенгламадан (1) тенглама келиб чикади ва бундан унга фазода текислик мос келиши исботланади.

(3) куринишдаги тенгламага текисликнинг ***умумий тенгламаси*** дейилади.

Айтайлик M(x;y;z) текисликнинг ихтиёрий ва $M_1(x_1;y_1;z_1)$ эса унинг маълум бир нуктаси булсин. У холда бу нукталар текислик умумий тенгламасини каноатлантиради, яъни

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

Уларни биринчисидан иккинчисини айирсак,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (5)$$

Бу берилган M_1 нуктадан утувчи ***текисликлар дастасининг тенгламаси*** булади. (5) тенглама **n**=(A;B;C) ва $\mathbf{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)$ векторларнинг ортогоналлик шартини ифодалайди.

Текисликка перпендикуляр булган ихтиёрий нолдан фаркли вектор шу текисликнинг ***нормали*** деб аталади.

$\mathbf{M_1M}$ вектор текисликда ётганлиги сабабли, **n** вектор хам шу текисликнинг нормалларидан биридир. Демак (3) ёки (5) тенгламадаги узгарувчиларнинг олдидаги A, B, C коэффициентлар оркали хосил килинган **n(A,B,C)** текисликнинг нормалларидан бири экан.

Шундай килиб нормал тенглама (3) тенгламанинг хусусий холи булади. Текисликнинг умумий тенгламасидан нормал тенгламасига утиш учун (3) ни

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

сонига купайтириш керак (*M* ва D нинг ишоралари карама – карши булиши керак). Натижада ушбу тенгламага келамиз:

$$MAx+MBy+MCz+MD=0$$

Бунда M ***нормаллаштирувчи купайтувчи*** дейилади.

$$MA=\cos\alpha, \quad MB=\cos\beta, \quad MC=\cos\gamma, \quad MD=-p$$

эканлигини хисобга олсак, нормал тенгламани топиш учун куйидагиларга эга буламиз:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad p = \mu\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

<u>Мисол:</u> Текисликнинг 2x-y+2z-5=0 умумий тенгламасини нормал тенглама куринишга келтиринг.

<u>Ечиш:</u> Нормаллаштирувчи купайтувчини топамиз ва уни берилган тенгламага купайтирамиз:

$$M=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-\frac{5}{3}=0$$

Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш.

Текисликнинг умумий тенгламаси

$$Ax+By+Cz+D=0$$

берилган булсин. Маълумки бунда A,B,C коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фаркли булиши керак, яъни текисликнинг нормали **n**=A***i***+B***j***+C***k*** нол вектор булмаслиги керак.

Куйида умумий тенглама унда катнашаётган коэффициентларнинг турли кийматларида кандай текисликларни ифодаланишини куриб утамиз.

1. $D=0\Rightarrow Ax+By+Cz=0$ - текислик координаталар бошидан утади.
2. $A=0\Rightarrow By+Cz+D=0$ - текислик OX укига параллел булади.
3. $B=0\Rightarrow Ax+Cz+D=0$ - текислик OУ укига параллел булади.
4. $C=0\Rightarrow Ax+By+D=0$ - текислик OZ укига параллел булади.
5. $A=0$, $D=0\Rightarrow By+Cz=0$ - текислик OX укидан утади.
6. $B=0$, $D=0\Rightarrow Ax+Cz=0$ - текислик OУ укидан утади.
7. $C=0$, $D=0\Rightarrow Ax+By=0$ - текислик OZ укидан утади.
8. $A=0$, $B=0\Rightarrow Cz+D=0\Rightarrow Z=-D/C$ - текислик XOУ текислигига параллел булади.
9. $A=0$, $C=0\Rightarrow By+D=0\Rightarrow y=-D/B$ - текисликXOZ текислигига параллел булади.
10. $B=0$, $C=0\Rightarrow Ax+D=0\Rightarrow x=-D/A$ - текислик УOZ текислигига параллел булади.
11. $A=0$, $B=0$, $D=0\Rightarrow Cz=0$ - XOУ текислиги хосил булади.
12. $A=0$, $C=0$, $D=0\Rightarrow By=0$ - XOZ текислиги хосил булади.

13.B=0, C=0, D=0$\Rightarrow$ Ax=0 - YOZ текислиги хосил булади.

Текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси.

Фазода координаталар бошидан утмайдиган ва координата укларини мос равишда *а, в* ва *с* нукталарда кесиб утувчи текислик тенгламасини тузамиз. Бунинг учун текисликнинг умумий

$$Ax+By+Cz+D=0$$

тенгламасидан фойдаланамиз. Бу ерда A,B,C,D коэффициентларни куйидаги мулохазалардан топамиз. Текислик (*а*;0;0), (0;*в*,0) ва (0;0; *с*) нукталардан утганлиги учун, уларнинг координаталари умумий тенгламани каноатлантиради, яъни

$$\begin{array}{lcll} Aa+D=0 & & A=-D/a & & a=-D/A \\ Bв+D=0 & \Rightarrow & B=-D/в & \Rightarrow & в=-D/B \\ Cc+D=0 & & C=-D/c & & c=-D/C\ . \end{array}$$

Коэффициентларнинг топилган кийматларини тенгламага куйсак, у холда

$$-D\frac{x}{a}-D\frac{y}{в}-D\cdot\frac{z}{c}+D=0$$

ва хосил булган бу тенгламани (-D) га булсак хамда ихчамласак, у холда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1 \qquad (1)$$

(1) текисликнинг ***кесмаларга нисбатан тенгламаси*** дейилади.

М и с о л : 3x-4y+z-5 =0 текислик тенгламасини кесмаларга нисбатан куринишга келтиринг.

Е ч и ш : Юкоридагидек мулохаза юритиб *а*, *в*, *с* ларни топиш мумкин:

$$a=-\frac{D}{A}=\frac{5}{3};b=-\frac{D}{B}=-\frac{5}{4};c=-\frac{D}{C}=+\frac{5}{1}=5$$

Демак текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси

$$\frac{x}{5/3}+\frac{y}{-5/4}+\frac{z}{5}=1$$

эканлиги келиб чикади.

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Текисликнинг вектор тенгламаси кандай куринишда булади?
2. Текисликнинг нормал тенгламасини ёзинг ва ундаги параметрлар маъносини курсатинг.
3. Текисликнинг умумий тенгламаси кандай куринишда булади?
4. Текисликнинг нормал вектори деб нимага айтилади?
5. Текислик умумий тенгламасидан унинг нормал вектори кандай топилади?
6. Текисликнинг умумий тенгламасидан нормал тенгламасига кандай утилади?
7. Текисликнинг умумий тенгламасида баъзи параметрлар нол булганда хосил буладиган текисликларни аникланг.
8. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси кандай куринишда булади?
9. Текисликнинг кесмалардаги тенгламасидаги параметрлар кандай маънога эга булади?

19 – М А Ъ Р У З А

ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАЛАРИГА ДОИР МАСАЛАЛАР.

Таянч иборалар: берилган нуктадан утувчи текисликлар тенгламаси, учта нуктадан утувчи текислик тенгламаси, текисликлар орасидаги бурчак, текисликларни перпендикулярлик ва параллеллик шарти, нуктадан текисликкача масофа.

М а ъ р у з а   р е ж а с и :

1. Берилган нуктадан утувчи текисликлар тенгламаси.
2. Берилган учта нуктадан утувчи текислик тенгламаси.
3. Икки текислик орасидаги бурчак.
4. Текисликларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шарти.
5. Учта текисликнинг кесишиш нуктаси.
6. Нуктадан текисликкача булган масофа.

Адабиётлар:

[1] I боб, §16-19   [3] VI боб, §3-4   [14]. 119-120 бетлар.

1. Берилган нуктадан утувчи текисликлар тенгламаси.

Айтайлик текислик берилган M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ нуктадан утсин ва унинг тенгламаси куринишини топиш талаб этилсин. Изланаётган текисликнинг умумий тенгламасини караймиз:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

M_1 нукта текисликда ётгани учун бу тенгламани каноатлантириши керак:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

Хосил булган бу тенгликни юкоридаги тенгламадан айириб, изланган

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 ,$$

яъни берилган M_1 нуктадан утувчи текисликлар тенгламасини хосил киламиз. Ундаги коэффициентларга турли кийматлар бериб, M_1 нуктадан утувчи текисликлар дастасини оламиз.

2. Берилган учта нуктадан утувчи текислик тенгламаси.

Фазода учта нукта $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ берилган булиб, улардан утувчи текислик тенгламасини топиш талаб килинган булсин. Бу нукталарга мос келувчи радиус-векторларни мос равишда

$$\vec{r}_1\{x_1;y_1;z_1\},\vec{r}_2\{x_2;y_2;z_2\},\vec{r}_3\{x_3;y_3;z_3\}$$

каби белгилаймиз.

Агар текисликнинг ихтиёрий M(x,y,z) узгарувчи нуктасига мос келувчи радиус-векторни $\bar{r}=\{x;y;z\}$ десак, у холда $\bar{r}-\bar{r}_1, \bar{r}_2-\bar{r}_1, \bar{r}_3-\bar{r}_1$ учта вектор каралаётган битта текисликда ётади. Векторларнинг компланарлик шартига асосан уларнинг аралаш купайтмаси нолга тенг булади:

$$[(\bar{r}-\bar{r}_1)\times(\bar{r}_2-\bar{r}_1)](\bar{r}_3-\bar{r}_1)=0$$

Бу берилган учта нуктадан утувчи текисликнинг вектор куринишли тенгламаси булади. Бу аралаш купайтмани векторларнинг координаталари оркали ифода-лаб,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

яъни берилган учта нуктадан утувчи текисликнинг координаталар куриниши-даги тенгламасини хосил киламиз.

Берилган учта нуктадан утувчи текислик тенгламасини бошкача, вектор-лардан фойдаланмасдан хам чикариш мумкин.

Дархакикат, берилган нукталарнинг биридан, масалан, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ нукта-дан утган текислик тенгламасини ёзамиз:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (1)$$

Шартга кура бу тенгламани иккинчи $M_2(x_2;y_2;z_2)$ ва учинчи $M_3(x_3;y_3;z_3)$ нук-талар хам каноатлантириши керак, яъни

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0$$
$$A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)=0.$$

Агар охирги тенгламаларни C га булсак ва хосил булган

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)/C+B(y_2-y_1)/C+(z_2-z_1)=0 \\ A(x_3-x_1)/C+B(y_3-y_1)/C+(z_3-z_1)=0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан A/C ва B/C нисбатларини топиб, (1) тенгламага куй-сак, у холда уч нуктадан утувчи текислик тенгламаси хосил булади.

Мисол: Берилган (1;2;3), (-1;0;0) ва (3;0;1) нукталардан утувчи текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш: Биринчи усулга кура

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$-4(x-1)+6(y-2)-4(z-3)-4(z-3)+4(y-2)+6(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)+10(y-2)-8(z-3)=0 \Rightarrow (x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0.$$

Бу ерда ухшаш хадларни ихчамлаб, изланаётган текисликнинг тенгламасини хосил киламиз:

$$x+5y-4z+1=0$$

4. Текисликлар орасидаги бурчак. Текисликларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

Иккита текислик узларининг

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

умумий тенгламалари билан берилган булсин. Улар орасидаги икки ёкли α бурчакни топиш масаласини текисликларнинг мос $\bar{n}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ ва $\bar{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ нормаллари орасидаги бурчакни топиш масаласига келтириш мумкин. Фазодаги икки вектор орасидаги бурчак формуласига асосан

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2)$$

Агар юкорида келтирилган текисликлар перпендикуляр булса, у холда $\bar{n}_1$ ва $\bar{n}_2$ векторлар хам ортогонал булади. Натижада

$$\bar{n}_1\,\bar{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (3)$$

Бу текисликларнинг перпендикулярлик шартини ифодалайди.

Худди шундай равишда текисликларнинг параллеллик шарти уларнинг нормалларини коллениарлик шартидан келиб чикади, яъни

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (4)$$

1–масала: Берилган текисликка параллел ва берилган нуктадан утувчи текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш: Берилган нукта $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва берилган текислик тенгламаси $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ булсин. У холда M_1 нуктадан утувчи ихтиёрий текислик тенгламаси

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

куринишга эга булади. Ундаги коэффициентларни текисликларнинг паралеллик шартидан, яъни (4) нисбатлар тенглигидан топилади.

Масалан, $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$ деб олсак, нисбатлар бирга тенг булади ва изланаётган текислик тенгламасини хосил киламиз:

$$A_1(x-x_1) + B_1(y-y_1) + C_1(z-z_1) = 0 \qquad (5).$$

2-масала: Берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нукталардан утувчи ва тенгламаси $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ булган текисликка перпендикуляр текислик тенгламаси тузилсин.

Е ч и ш : M_1 нуктадан утувчи текислик тенгламасини ёзамиз:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1) = 0 \Rightarrow \frac{A}{C}(x - x_1) + \frac{B}{C}(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

Бу тенгламани M_2 нукта хам каноатлантириши хамда текисликларнинг перпендикулярлик шартидан ушбу системани хосил киламиз:

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \\ A_1A+B_1B+C_1C=0 \end{cases}$$

Бу система тенгламаларини С га булиб, хосил булган

$$\begin{cases} \dfrac{A}{C}(x-x_1)+\dfrac{B}{C}(y-y_1)+(z-z_1)=0 \\ \dfrac{A}{C}A_1+\dfrac{B}{C}B_1+C_1=0 \end{cases}$$

системадан A/C ва B/C нисбатларни топамиз. Топилган нисбатларнинг кийматларини юкоридаги тенгламага куйиб, изланаётган текислик тенгламасини хосил киламиз.

3-масала: Берилган учта текисликнинг кесишиш нуктасини топинг.

Ечиш: Текисликларнинг кесишиш нуктаси уларнинг учаласига хам тегишли булгани учун, унинг x,y,z координаталарини топиш учун берилган текисликларнинг умумий тенгламаларини система килиб ечамиз:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

4-масала: Берилган $M_1(x_1; y_1; z_1;)$ нуктадан умумий тенгламаси $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ билан берилган текисликкача булган d масофани топинг.

Ечиш: Изланган масофа текисликнинг нормал тенгламаси оркали куйидаги формула билан хисобланишини курсатиш мумкин:

$$d=\pm(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p). \qquad (7)$$

Бундаги $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ йуналтирувчи косинусларни ва p параметрни топиш учун берилган умумий тенгламани нормаллаштирувчи купайтувчига купайтириб, ушбу формулани хосил киламиз:

$$d=\frac{|A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}. \qquad (8)$$

М и с о л: N(1;2;3) нуктадан 2x-2y+z-3=0 тенглама билан ифодаланувчи текисликкача булган масофани топинг.

Ечиш: (8) формулага асосан изланган масофани топамиз:

$$d=\frac{|2\cdot 1+(-2)\cdot 2+1\cdot 3+(-3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Берилган нуктадан утувчи текисликлар тенгламасини ёзинг.
2. Берилган учта нуктадан утувчи текислик тенгламаси кандай топилади?
3. Икки текислик орасидаги бурчак кандай топилади?
4. Икки текисликнинг перпендикулярлик шарти нимадан иборат?
5. Икки текисликнинг параллеллик шарти нимадан иборат?
6. Учта текисликнинг кесишиш нуктаси кандай топилади?
7. Нуктадан текисликкача булган масофа кандай топилади?

20 - МАЪРУЗА

ФАЗОДАГИ ТУГРИ ЧИЗИК ТЕНГЛАМАЛАРИ.

Таянч иборалар: йуналтирувчи вектор, бошлангич нукта, тугри чизикнинг вектор тенгламаси, каноник тенгламаси, параметрик тенгламаси, умумий тенгламаси.

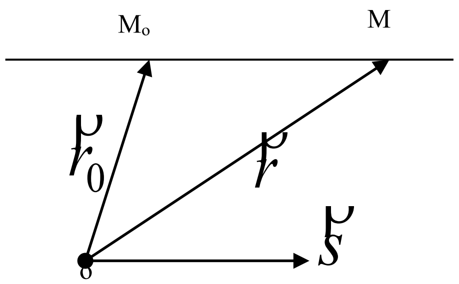
Маъруза режаси:

1. Фазодаги тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори ва бошлангич нуктаси.
2. Фазодаги тугри чизикнинг вектор тенгламаси.
3. Фазодаги тугри чизикнинг параметрик ва каноник тенгламаси.
4. Фазодаги тугри чизикнинг умумий тенгламаси.

Адабиётлар:

[1] I боб, §17-18 [3] VI боб, §5 [14]. 120-121 бетлар.

Фазодаги тугри чизикка параллел булган хар кандай **s** векторга шу тугри чизикнинг ***йуналтирувчи вектори*** дейилади. Айтайлик $M_0(x_0;y_0;z_0)$ тугри чизикнинг маълум бир нуктаси, M(x;y;z) эса тугри чизикнинг ихтиёрий нуктаси булсин. M_0 шу тугри чизикнинг ***бошлангич нуктаси*** дейилади. Бу нукталарнинг радиус- векторлари $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r}\ (x, y, z)$ ва $\mathbf{M_0M}$ $(x\text{-}x_0,\ y\text{-}y_0,\ z\text{-}z_0)$ векторни оламиз. Унда, куйидаги чизмага асосан, $\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}$ тенгликка ишонч хосил килиш мумкин:



Агар **s**(m,n,p) шу тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори булса, у холда $\mathbf{M_0M}$ ва **s**(m;n;p) векторлар коллинеар, яъни $\mathbf{M_0M} = t\cdot\mathbf{s}$, бунда t – узгармас сон. Натижада ушбу тенгламани хосил киламиз:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\,\mathbf{s} \qquad (1)$$

Бу фазодаги тугри чизикнинг ***вектор куринишидаги тенгламаси*** дейилади. Агар (1) вектор тенгламани координаталарда ифодаласак, у холда

$$(x;\ y;\ z)= (x_0;\ y_0;\ z_0) +t\ (m;\ n;\ p)\Rightarrow (x;\ y;\ z)= (x_0+tm;\ y_0+tn;\ z_0+tp) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=x_0+tm\ ,\quad y=y_0+tn\ ,\quad z= z_0+tp \qquad (2)$$

Хосил булган тенгламаларда t параметр узгариши билан x; y; z узгарувчилар тугри чизикнинг турли нукталарини ифодалайди, яъни (2) тугри чизикни тулик аниклайди. Шу сабабли (2) тугри чизикнинг ***параметрик тенгламаси*** дейилади. Агарда (2) дан t ни топсак, у холда

$$t=\frac{x-x_0}{m},t=\frac{y-y_0}{n},t=\frac{z-z_0}{p}\Rightarrow\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (3)$$

Бу тугри чизикнинг ***каноник тенгламаси*** дейилади. Унда махраждаги m,n,p сонлари йуналтирувчи вектор координаталари, суратдаги x_0,y_0,z_0 сонлари эса бошлангич нуктанинг координаталари булишини таъкидлаб утамиз.

Бу тенгламани **s** ва $\mathbf{M_0M}$ векторларнинг коллинеарлик шартидан хам бевосита олишимиз мумкин эди.

Тугри чизикнинг ушбу каноник тенгламаси берилган булсин:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ .$$

Бунда p $\neq$0 деб оламиз. Бу тенгламани иккига ажратиб,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

тенгламалар системасини хосил киламиз ва бу система хам тугри чизикни ифодалайди. Аммо уларнинг хар бири текислик тенгламасидир. Биринчи тенглама ОУ укига параллел, иккинчи тенглама эса ОХ укига параллел текисликни ифодалайди. Бу текисликларнинг кесишмасида (3) каноник тенгламаси билан берилган тугри чизик хосил булмокда.

Умуман олганда, фазода тугри чизикнинг нукталари иккита текислик тенгламаларидан тузилган куйидаги системанинг ечимларидан иборат булади:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\ . \end{cases}$$

Бу тенгламалар системаси фазодаги тугри чизикнинг ***умумий тенгламаси*** дейилади. Бу тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори **s** текисликларнинг

$\mathbf{n_1}$=(A_1; B_1; C_1), $\mathbf{n_2}$=(A_2; B_2; C_2)

нормалларига перпендикуляр булади. Шунинг учун хам тугри чизикка параллел $\mathbf{n_1}$x$\mathbf{n_2}$ векторни унинг йуналтирувчи вектори сифатида олиш мумкин.

1-мисол: Фазодаги тугри чизикнинг умумий тенгламасини каноник куринишга келтиринг.

$$\begin{cases} 2x-3y+z-5=0 \\ 3x+y-2z-4=0 \end{cases}$$

Ечиш: Изланаётган тугри чизикда ётувчи бирор M_0 нуктанинг координаталарини аниклаймиз. Тенгламалар системасида номаълумлар 3 та, лекин тенгламалар сони эса иккита. Шунинг учун битта номаълумни эркин килиб оламиз. Масалан, z=1 деб оламиз. Натижада берилган система

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 3x+y=6 \end{cases}$$

куринишни олади. Бу системадан x=2, y=0 эканлигини топамиз. Демак, $M_0(2;0;1)$ нукта тугри чизикда ётади. Йуналтирувчи вектор эса текисликларнинг $\mathbf{n_1}$ ва $\mathbf{n_2}$ нормаллари векториал купайтмаси каби топилади:

$$\vec{n}_1 x \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i}+7\mathbf{j}+11\mathbf{k}.$$

Демак, йуналтирувчи вектор **s**(-7;7;11). Унда тугри чизикнинг каноник тенгламаси куйидагича булади:

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-0}{7} = \frac{z-1}{11}$$

2-мисол. Тугри чизикнинг умумий тенгламасини параметрик ва каноник куринишга келтиринг:

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ 3x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

Ечиш: Тенгламаларни хар бирини x ва y га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} 2x+y=z-1 \\ 3x-y=3-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=2-z \\ 5y=7z-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z+\frac{2}{5} \\ y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{x-2/5}{-1/5} \\ z=\frac{y+9/5}{7/5} \end{cases}$$

Натижада тугри чизикнинг ушбу каноник тенгламасига келамиз:

$$\frac{x-2/5}{-1/5} = \frac{y+9/5}{7/5} = \frac{z}{1}$$

Бу ердан параметрик тенгламаларни олиш кийин эмас. Дархакикат, хар бир нисбатни t га тенглаштирсак, у холда

$$x=\frac{-t}{5}+\frac{2}{5}; \quad y=\frac{7}{5}t-\frac{9}{5}; \quad z=t$$

изланган параметрик тенглама булади.

<u>Уз – узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Фазодаги тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори деб нимага айтилади?
2. Фазодаги тугри чизикнинг бошлангич нуктаси деб нимага айтилади?
3. Фазодаги тугри чизикнинг вектор тенгламасини ёзинг.
4. Фазодаги тугри чизикнинг параметрик тенгламаси кандай куринишда булади?
5. Фазодаги тугри чизикнинг каноник тенгламасини ёзинг ва ундаги параметрларнинг маъносини курсатинг.
6. Фазодаги тугри чизикнинг умумий тенгламаси кандай куринишда булади?
7. Тугри чизикнинг умумий тенгламасидан каноник ва параметрик тенгламасига кандай утилади?

21 - МАЪРУЗА

ФАЗОДАГИ ТУГРИ ЧИЗИКЛАРГА ДОИР МАСАЛАЛАР.

Таянч иборалар: фазодаги икки тугри чизик орасидаги бурчак, тугри чизикларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шарти, берилган нуктадан утувчи тугри чизиклар тенгламаси, берилган икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси, тугри чизик ва текислик орасидаги бурчак, тугри чизик ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шарти, икки тугри чизикни бир текисликда ётиш шарти.

Маъруза режаси:

1. Фазодаги икки тугри чизик орасидаги бурчак.
2. Тугри чизикларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари.
3. Берилган нуктадан утувчи тугри чизиклар тенгламаси.
4. Берилган икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси.
5. Тугри чизик ва текислик орасидаги бурчак.
6. Тугри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари.
7. Берилган нуктадан утувчи ва берилган текисликка параллел тугри чизиклар дастаси тенгламаси.
8. Икки тугри чизикнинг бир текисликда ётиш шарти.

Адабиётлар:

[1] I боб, §19 [14]. 121-122 бетлар.

1. Икки тугри чизик орасидаги бурчак.

Фазода иккита тугри чизик узларининг каноник тенгламалари билан берилган булсин:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ ва } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Улар орасидаги α бурчакни топиш масаласини курамиз. Бу масалани уларнинг йуналтирувчи векторлари орасидаги бурчакни топиш масаласига келтириш мумкин. Йуналтирувчи $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$, $\vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ векторлар орасидаги бурчак куйидаги формула ёрдамида топилади:

$$\cos\alpha=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (1)$$

М и с о л : Каноник тенгламалари билан берилган куйидаги тугри чизиклар орасидаги бурчак топилсин:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}, \qquad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

Е ч и ш : (1) формулага асосан

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Бундан $\alpha = 45^0$ эканлигини курамиз.

2. Тугри чизикларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

Агар тугри чизиклар перпендикуляр булса, у холда (1) формулада $\cos\alpha=0$ булади. Бундан эса икки тугри чизикнинг перпендикулярлик шарти келиб чикади:

$$m_1m_2 + n_1 n_2 + p_1p_2 = 0$$

Агар тугри чизиклар параллел булса, у холда уларнинг йуналтирувчи векторлари хам узаро параллел булади ва бундан икки тугри чизикнинг параллеллик шарти келиб чикади:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

3.Берилган нуктадан утувчи ва берилган тугри чизикка параллел булган тугри чизик тенгламаси.

Айтайлик фазода М(а;в;с) нукта ва каноник тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

булган тугри чизик берилган булсин. Берилган М нуктадан утувчи тугри чизик тенгламасини

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-в}{n} = \frac{z-c}{p}$$

каби ифодалаш мумкин. Тугри чизикларнинг параллеллик шартига асосан

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}$$

муносабат уринли булади. Бундан, $m=m_1$, $n=n_1$ ва $p=p_1$ деб олиш мумкинлигини курамиз. Демак изланаётган тугри чизик тенгламаси

$$\frac{x-a}{m_1} = \frac{y-в}{n_1} = \frac{z-c}{p_1}$$

куринишда булади.

4. Берилган икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси.

Айтайлик фазонинг иккита нуктаси узининг координаталари билан берилган булсин. Улар $M_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $M_2(x_2;y_2;z_2)$ булсин. Шу нукталардан утувчи тугри чизик тенгламасини топамиз.

Изланаётган тугри чизикнинг каноник тенгламасини тузиш учун унда ётувчи бирор нуктанинг координаталарини ва йуналтирувчи векторини билиш кифоя. Шундай нукта сифатида берилган нукталардан исталганини, айтайлик M_1 ни оламиз. Йуналтирувчи вектор сифатида эса унда ётувчи $\mathbf{M_1M_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ векторни танлаймиз. Натижада берилган икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламасини хосил киламиз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

5. Тугри чизик ва текислик орасидаги бурчак.

Айтайлик, тугри чизик ва текислик мос равишда узларининг каноник ва умумий тенгламалари билан берилган булсин:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p},\quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Маълумки текислик ва уни кесувчи тугри чизик орасидаги бурчакни аниклаш учун шу тугри чизикни текисликка проекциялаб, хосил булган чизикли бурчак топилади. Уни α оркали белгилайлик. Шу бурчакнинг синусини тугри чизикнинг $\mathbf{s}(m,n,p)$ йуналтирувчи вектори ва текисликнинг $\mathbf{n}(A,B,C)$ нормал вектори оркали топамиз:

$$\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)=\frac{|Am+Bn+Cp\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

6. Тугри чизик ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

Айтайлик куйидаги

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p},\quad Ax+By+Cz+D=0$$

тенгламалари билан берилган тугри чизик ва текислик узаро параллел булсинлар. У холда тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори $\mathbf{s}(m,n,p)$ ва текислик нормали $\mathbf{n}(A,B,C)$ узаро перпендикуляр буладилар. Бундан тугри чизик ва текисликнинг параллеллик шарти куйидагича эканлиги келиб чикади:

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Бу тенгликни $\sin\alpha=0$ шартдан хам келтириб чикариш мумкин эди.

Энди берилган тугри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик шартини келтириб чикарайлик. Тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори ва текислик нормали коллинеар векторлар эканлигидан, икки векторнинг коллинеарлик шартига асосан

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C} \quad \text{ёки} \quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

булади. Бу тугри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик шартини ифодалайди.

7. Берилган нуктадан утувчи ва берилган текисликка параллел булган тугри чизиклар дастасининг тенгламаси.

Берилган М(а;в;с) нуктадан утувчи тугри чизикларнинг каноник тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}$$

Бу тугри чизикка параллел булган текислик тенгламаси $Ax+By+Cz+D=0$ булсин. Тугри чизик ва текисликнинг параллеллик шартидан $Am+Bn+Cp=0$ муносабатни оламиз. Нисбатларнинг тенглигидан эса $m=x-a$, $n=y-в$, $p=z-c$ деб олишимиз мумкин. У холда изланаётган тугри чизиклар дастасининг куйидаги тенгламасини хосил киламиз:

$$A(x-a)+B(y-в)+C(z-c)=0.$$

8.Икки тугри чизикнинг бир текисликка ётиш шарти.

Иккита тугри чизик узларининг каноник тенгламалари билан берилган булсин:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Уларнинг йуналтирувчи векторларини мос равишда $\mathbf{s_1}(m_1;n_1;p_1)$ ва $\mathbf{s_2}(m_2;n_2;p_2)$ каби белгилаймиз. Тугри чизикларнинг $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ва $M_2(x_2,y_2,z_2)$ бошлангич нукталарининг радиус-векторларини $\mathbf{r_1}(x_1;y_1;z_1)$ ва $\mathbf{r_2}(x_2;y_2;z_2)$ каби белгилаймиз. Унда бу нукталарнинг биридан иккинчисига йуналган $\mathbf{M_1M_2}$ вектор $\mathbf{r_2}$ **-** $\mathbf{r_1}$ булади. Векторларни айириш коидасига асосан $\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ тенгликни ёза оламиз. Геометрик мулохазаларга асосан берилган иккита тугри чизикнинг битта текисликда ётиши учун $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$ ва $\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}$ векторларнинг компланар булиши зарур ва етарлидир. Бундан аралаш купайтма $(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1})\,\mathbf{s_1}\,\mathbf{s_2}=0$ ёки

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Бу икки тугри чизикнинг бир текисликда ётиш шартини ифодалайди.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Фазодаги икки тугри чизик орасидаги бурчак кандай топилади?
2. Икки тугри чизикнинг перпендикулярлик (параллеллик) шарти нимадан иборат?
3. Берилган икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси кандай куринишда булади?
4. Тугри чизик ва текислик орасидаги бурчак кандай топилади?
5. Тугри чизик ва текисликнинг перпендикулярлик (параллеллик) шарти нимадан иборат?
6. Берилган нуктадан утувчи ва берилган текисликка параллел тугри чизиклар тенгламасини ёзинг.
7. Кайси шартда икки тугри чизик бир текисликда ётади?

<u>22 - МАЪРУЗА</u>

ФУНКЦИЯ ВА У БИЛАН БОГЛИК БУЛГАН ТУШУНЧАЛАР.

Таянч иборалар: узгармас микдор, узгарувчи микдор, функция, аникланиш сохаси, узгариш сохаси, функция графиги, функциянинг берилиш усуллари, усувчи ва камаювчи функция, жуфт ва ток функция, даврий функция, мураккаб функция, тескари функция, асосий элементар функциялар, элементар функциялар.

<u>М а ъ р у з а р е ж а с и :</u>

1. Узгармас ва узгарувчи микдорлар.
2. Функция таърифи.
3. Функциянинг аникланиш ва узгариш сохаси.
4. Функция графиги.
5. Функцияни берилиш усуллари.
6. Функция турлари.
7. Мураккаб ва тескари функция.
8. Асосий элементар ва элементар функциялар.

<u>Адабиётлар:</u>

[1] II боб, §1-2 [2] I боб, §6-8

Атрофимиздаги турли жараёнларни математик усулларда тадкикот килаётганимизда узгармас ва узгарувчи микдорларга дуч келамиз.

<u>Т А Ъ Р И Ф:</u>. Факат битта сонли киймат кабул киладиган катталиклар узгармас микдорлар дейилади.

Масалан, ёруглик тезлиги **c**, эркин тушиш тезланиши **g**, айлана узунлигини унинг диаметрига нисбати π, изотермик жараёнларда харорат $\mathbf{t^0}$ узгармас микдорлардир.

<u>Т А Ъ Р И Ф :</u> Турли сонли кийматлар кабул кила оладиган катталиклар узгарувчи микдорлар дейилади.

Масалан, текис харакатда вакт **t** ва босиб утилган масофа **s** узгарувчи микдорлардир.

Бирор жараённи урганаётганимизда бир нечта узгарувчи микдорлар уртасидаги узаро богланишларга дуч келамиз.
Масалан, текис харакатда тезликни **v**, вактни **t** ва босиб утилган йулни **s** десак, у холда бу узгарувчилар узаро $\mathbf{s=v\cdot t}$ куринишда богланади. Бундай богланишларни жуда куп келтириш мумкин ва шу сабабли уларни атрофлича урганиш максадида функция тушунчаси киритилади.

<u>Т А Ъ Р И Ф :</u> Агарда x узгарувчини хар бир мумкин булган сон кийматига y узгарувчининг ягона бир сон киймати мос куйилган булса, y узгарувчи x узгарувчининг функцияси дейилади.

Бирор y узгарувчи x узгарувчининг функцияси эканлиги $y=f(x)$ каби белгиланади (f харфи урнига F, h, g, φ каби бошка харфларни хам куллаш мумкин). Бу ерда x эркли узгарувчи ёки аргумент, y эса эрксиз узгарувчи ёки функция деб аталади.

Т А Ъ Р И Ф : $y=f(x)$ функцияда x аргументнинг y функция маънога эга буладиган барча сон кийматлари туплами шу функциянинг аникланиш сохаси дейилади ва **D{f}** каби белгиланади. Функция кабул киладиган барча кийматлар туплами эса шу функциянинг узгариш сохаси дейилади ва **E{f}** каби белгиланади.

Масалан, $f(x) =\sin\sqrt{x}$ функция учун $D\{f\}=[0,\infty)$, $E\{f\}=[-1,1]$ булади.

Т А Ъ Р И Ф : ХОУ текисликдаги $(x, f(x))$, $x\in D\{f\}$, координатали нукталарнинг геометрик урни $y=f(x)$ функциянинг графиги дейилади.

Масалан, $y=x^2$ функция графиги параболадан, $y=\cos x$ функция графиги синусоидадан, $y=2x+5$ функция графиги эса тугри чизикдан иборатдир.

Функциялар аналитик куринишда, яъни формулалар оркали, жадвал ёки график куринишда берилиши мумкин. Масалан, айлана радиуси x ва унинг юзаси y орасидаги богланиш функцияси $y=\pi x^2$ формула оркали аналитик куринишда, Брадиснинг математик жадваллар китобчасида функциялар жадвал куринишида, юрак ишлашини ифодаловчи функция кардиограмма оркали график куринишда ифодаланади.

Т А Ъ Р И Ф : $y=f(x)$ функция бирор $D\subset D\{f\}$ сохада усувчи (камаювчи) дейилади, агарда $\forall x_1, x_2\in D$ учун $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ шарт бажарилса.

Масалан, $y=x^2$ функция$(-\infty;0)$ сохада камаювчи, $(0,\infty)$ сохада эса усувчи булади.

Т А Ъ Р И Ф : $y=f(x)$ функция нол нуктага нисбатан симметрик булган $D\{f\}$ аникланиш сохасида жуфт(ток) дейилади, агарда $\forall x\in D\{f\}$ учун $(-x\in D\{f\})$ $f(-x)= f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ шарт бажарилса.

Масалан, $f(x)=x^2$ – жуфт функция, $f(x)=x^3$ эса ток функция булади. Лекин, $f(x)=x^2 -3x+1$, $f(x)=2x -3$ функциялар на жуфт ва на токдир.

Т А Ъ Р И Ф : $y=f(x)$ функция даврий деб аталади, агарда шундай $T>0$ сон мавжуд булсаки, $\forall x\in D\{f\}$учун $f(x+T)= f(x)$ шарт бажарилса. Бу шартни каноатлантирувчи энг кичик T сони шу функциянинг даври дейилади.

Масалан, $y=\sin x$ даври $T=2\pi$, $y=\{x\}$ (x нинг каср кисми) даври $T=1$ булган даврий функциялардир. $y=x^2$ функция эса даврий эмас.

Т А Ъ Р И Ф: $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ функциялар берилган булиб, $x\in D\{\varphi\}$ булганда $E\{\varphi\} \subset D\{f\}$ шарт бажарилсин. Бу холда, $F(x)=f(\varphi(x))$ функция маънога эга булади ва у мураккаб функция деб аталади. Бу ерда φ ички, f эса ташки функция дейилади.

Масалан, $y=\sin x^2$ функция учун $\varphi(x)=x^2$ ички, $f(\varphi)=\sin\varphi$ эса ташки функция булади. $y=\sin^2 x$ мураккаб функцияда эса $\varphi(x)=\sin x$ ички, $f(\varphi)=\varphi^2$ ташки функция булади.

Т А Ъ Р И Ф: $y=f(x)$ функциядан x аргументни y функция оркали ифодалашдан хосил булган $x=\varphi(y)$ куринишдаги φ функция f функцияга тескари функция деб аталади ва f^{-1} каби белгиланади.

Одатда аргумент *x*, функция эса *y* оркали белгиланганлиги учун, тескари функция $y=\varphi(x)$ ёки $y=f^{-1}(x)$ куринишда ёзилади. Тескари функцияни $f(y)=x$ тенглама ечими каби топишимиз мумкин.

Масалан, $f(x)=3x-1$ булса, $3y-1=x$ тенгламадан бу функция учун тескари функция $f^{-1}(x)=(x+1)/3$ эканлигини аниклаймиз.

Шуни таъкидлаб утиш керакки,бунда $D\{f\}=E\{f^{-1}\}$, $E\{f^{-1}\} = D\{f\}$ муносабатлар уринли булади.

Мактаб математикасидан бизга маълум булган куйидаги функцияларни эслатиб утамиз:

1. Даражали функция $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Масалан, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y= 1/x$.
2. Курсаткичли функция. $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$). Масалан, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$
3. Логарифмик функция $y=\log_a x$, ($a>0, a\neq 1$). Масалан, $y=\log_2 x$, $y=\lg x$, $y=\ln x$.
4. Тригонометрик функциялар $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$.
5. Тескари тригонометрик функциялар $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$.

Бу функциялар асосий элементар функциялар деб аталади.

Чекли сондаги асосий элементар функциялар устида арифметик амаллар ва мураккаб функция хосил килиш оркали тузилган функциялар элементар функциялар дейилади. Масалан , $2\ln\sin x+x^2/5$ элементар функция булади.

$y=\{x\}$, $y=[x]$ (x нинг бутун кисми), $y=|x|$ каби функциялар элементар булмаган функцияларга мисол булади.

Функциянинг иктисодиётда кулланилиши.

Функциялар иктисодиёт назарияси ва амалиётда жуда кенг кулланилади. Функцияларни иктисодиётга тадбик этиш спектри жуда кенг ва хилма хилдир. Энг оддий чизикли, бир узгарувчили функциялар хам мураккаб куринишга эга булган куп узгарувчили хамда вактга боглик булган функциялар хам урганилаётган иктисодий объектларнинг турли даврлардаги холатлари ва богланишларини ифодалаши мумкин.

Чизикли, ночизикли, каср-чизикли, даражали (квадратик, кубик ва хакозо), курсаткичли (экспоненциал), логарифмик ва бошка трансцендент функциялар иктисодиётда кулланилади. Баъзи иктисодий жараёнларнинг даврийлиги ва тебранувчанлиги туфайли тригонометрик функциялар кулланилади.

Куп кулланиладиган функциялар куйидагилар:

1. Фойдалилик (афзаллик) функцияси кенг маънода кандайдир иктисодий харакат самараси, натижаси ёки фойдаси билан шу иктисодий харакат кулами (микдори) ва тезлиги орасидаги богланишни ифодалайди.
2. Ишлаб чикариш функцияси – ишлаб чикариш фаолияти натижасида *y* билан унинг омиллари ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) орасидаги богланишни ифодалайди, яъни $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$- куп узгарувчили функция.
3. Ищлаб чикариш функциясининг хусусий холи булган, махсулот ишлаб чикариш функцияси- ишлаб чикарилган махсулот хажми билан унда ишлатилган ресурслар орасидаги богланишни ифодалайди.

4. Сарф-харажат функцияси – ишлаб чикариш функциясининг хусусий холи булган сарф-харажат функцияси ишлаб чикарилган махсулот хажми билан ишлаб чикариш харажатлари орасидаги богланишни ифодалайди.
5. Талаб, таклиф ва истеъмол функциялари. Алохида товар ва хизматларга талаб, таклиф ва истеъмол микдорлари билан уларни характерловчи турли омиллар (масалан нарх, бахо, даромад…) орасидаги богланишларни ифодалайди.

Иктисодий ходиса ва жараёнлар турли омилларнинг таъсири натижасида руй беришини урганиш учун куп узгарувчили функциялар кенг кулланилишини хисобга олиш керак. бундай функциялар ичидан мултипликатив функцияларни алохида курсатиш мумкин. Улар натижавий узгарувчини омилий узгарувчиларнинг купайтмаси куринишда ифодалайди, хамда бирор омилнинг катнашмаслиги натижавий курсаткични пулга айлантиради, бу эса иктисодий ходиса ёки жараённинг том маъносини тула характерлайди.

Юкоридаги функциялардан ташкари сепарабель ва аддитив функциялар хам иктисодий богланишларни урганишда кулланилади.

Агар унча мухим булмаган 2-даражали омилларни хисобга олмай ёки уларни маълум даражада узгармас деб хисобласак, у холда битта асосий омилнинг иктисодий фаолият натижасига таъсири бир узгарувчили функция ёрдамида урганилади.

Масалан, турли таворларга булган талаб эхтиёжнинг даромадга богланишни урганиш куйидаги торнквист функциялари

$$y=\frac{в_1(x-a_1)}{x-c_1},\ \ (x>a_1,\ \ c_1<x),\quad y=\frac{в_2(x-a_2)}{x-c_2},\ \ (x>a_2,\ \ c_2<x),$$

$$y=\frac{в_3x(x-a_3)}{x-c_3},\ \ (x>a_3,\ \ c_3<x)$$ ёрдамида амалга оширилиш мумкин, бу

ерда a_1, a_2, a_3-даромад даражалари, $в_1$, $в_2$, $в_3$ 1, 2, 3 –гурух товарларга булган талабнинг кондирилиш даражалари, c_1, c_2, c_3 1, 2, 3 –даражали товарлар кийматлари даромадни ифодаловчи узгарувчи, y –талаб эхтиёжни характерловчи узгарувчи.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Кандай микдорлар узгармас дейилади? Мисоллар келтиринг.
2. Кандай микдорлар узгарувчи дейилади? Мисоллар келтиринг.
3. Функция кандай таърифланади?
4. Функциянинг аникланиш сохаси деб нимага айтилади?
5. Функциянинг узгариш (кийматлар) сохаси кандай таърифланади?
6. Функция графиги деб нимага айтилади?
7. Функция кандай усулларда берилиши мумкин?
8. Кайси шартда функция усувчи (камаювчи) дейилади?
9. Кайси шартда функция жуфт (ток) деб аталади?
10. Даврий функция деб кандай функцияга айтилади?

11.Мураккаб функция кандай таърифланади?
12.Тескари функция кандай аникланади?
13.Кайси функциялар асосий элементар функциялар дейилади?
14.Элементар функциялар деб кандай функцияларга айтилади?

23 - МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ.

Таянч иборалар: функциянинг чекли лимити, функсиянинг чексиз лимити, лимитнинг ягоналиги, чап ва унг лимит, лимитнинг мавжудлик шарти, чексиз кичик микдор, чексиз кичик микдорларнинг хоссалари, алгебраик йигиндининг лимити, купайтманинг лимити, булинманинг лимити, ажойиб лимитлар.

Маъруза режаси:

1. Функция лимити.
2. Чап ва унг лимитлар.
3. Лимитнинг мавжудлик шарти.
4. Лимитнинг ягоналиги.
5. Чексиз кичик микдорлар ва уларнинг хоссалари.
6. Лимит мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти.
7. Лимитларнинг асосий хоссалари.
8. Ажойиб лимитлар.

Адабиётлар:

[1] II боб, §5-10 [2] II боб, §1-7

Олий математиканинг мухим тушунчаларидан бири лимит булиб, унинг ёрдамида эгри чизикка уринма, эгри чизик ёйи узунлиги, функция узлуксизлиги ва хосиласи, аник интеграл каби жуда куп тушунчалар киритилади.

ТАЪРИФ: Агарда олдиндан берилган ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун унга боглик шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сон топилсаки, $0<|x-a|<\delta$ шартни каноатлан-тирувчи хар кандай $x\in D\{f\}$учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик уринли булса, A сони $y=f(x)$ функциянинг $x\to a$ булгандаги лимити деб аталади ва бу тасдик

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

куринишда ёзилади.

Мисол сифатида, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ эканлигини курсатамиз. Бу ерда $x\to 3$ булгани учун $2<x<4$, яъни $|x+3|<7$ деб олишимиз мумкин. Бу холда ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

тенгсизлик уринли булиши учун $|x-3|<\varepsilon/7$, яъни $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ деб олиш мумкин. Демак, лимит таърифига асосан, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ тенглик уринли булади.

ТАЪРИФ: $y=f(x)$ функция $x\to a$ булганда чексиз ($+\infty$ ёки $-\infty$) лимитга эга дейилади, агарда хар кандай катта $N>0$ сон учун шундай $\delta=\delta(N)>0$ сон мавжуд булсаки, $0<|x-a|<\delta$ шартни каноатлантирувчи хар кандай $x\in D\{f\}$ учун $|f(x)|>N$ тенгсизлик уринли булса.

Таърифдаги тасдик $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ куринишда ёзилади.

Масалан, $\lim\limits_{x\to 2} (x^3-8)^{-2}=\infty$ эканлигини курсатиш мумкин.

Т А Ъ Р И Ф : А сони $y=f(x)$ функциянинг $x\to\pm\infty$ булгандаги лимити дейилади, агарда хар кандай кичик $\varepsilon>0$ сон учун шундай катта $M=M(\varepsilon)>0$ сон мавжуд булсаки, $|x|>M$ шартни каноатлантирувчи барча $x\in D\{f\}$ учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик уринли булса.

Бу тасдик $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ куринишда ёзилади.

Масалан, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x}=1$ эканлигини курсатамиз. Ихтиёрий кичик $\varepsilon>0$ учун $|f(x)-A|=|\dfrac{x+1}{x}-1|=|1/x|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши учун, $|x|>\varepsilon^{-1}$, яъни $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ деб олишимиз мумкин. Бу ердан, таърифга асосан, юкоридаги тенглик уринли эканлиги келиб чикади.

Т А Ъ Р И Ф : $y=f(x)$ функциянинг $x\to\pm\infty$ булгандаги лимити чексиз дейилади, агарда хар кандай катта $N>0$ сони учун шундай $M=M(N)$ сон мавжуд булсаки, $|x|>M$ шартни каноатлантирувчи барча $x\in D\{f\}$ учун $|f(x)|>N$ тенгсизлик уринли булса.

Таърифдаги тасдик $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ куринишда ёзилади.

Масалан, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ эканлигини таъриф буйича исботлаш мумкин.

Баъзи холларда функциянинг чап ва унг лимити тушунчалари керак булади.

Т А Ъ Р И Ф : $y=f(x)$ функциянинг аргументи x кандайдир а сонига факат чап ($x<a$) ёки унг ($x>a$) томондан якинлашиб борганда функция лимити бирор A_1 ёки A_2 сонидан иборат булса, у функциянинг *a* нуктадаги чап ёки унг лимити деб аталади ва $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ ёки $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$ куринишда ёзилади.

Масалан , $\mathrm{sgn}x=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$ функция учун

$$A_1=\lim_{x\to 0-0} \mathrm{sgn}x=-1,\ A_2=\lim_{x\to 0+0} \mathrm{sgn}x=1.$$

Агарда бирор а нуктада $y=f(x)$ функция А лимитга эга, яъни $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ булса, у холда $A_1=A_2=A$ тенглик уринли булиши чап ва унг лимит таърифидан келиб чикади. Аксинча, агар чап ва унг лимитлар тенг булса, у холда лимитнинг таърифидан функция лимити мавжудлиги келиб чикади.

Шуни таъкидлаб утиш керакки, функция лимити хар доим хам мавжуд булавермайди. Масалан, $y=\mathrm{sgn}x$ функция $x\to 0$ булганда лимитга эга эмас, чунки бу холда $A_1=-1$ ва $A_2=1$ булиб, $A_1\neq A_2$. Аммо бу функция $x\to a$, $a\neq 0$, булганда 1 ёки –1 лимитга эгадир.

ТЕОРЕМА: Агар $x\to a$ булганда функция лимити мавжуд булса, у холда бу лимит ягона булади.

И с б о т: Тескарисини фараз килайлик, яъни функция $x\to a$ булганда иккита A ва B лимитларга эга булсин.Лимит таърифига кура, хар кандай кичик $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ ва $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ сонлар топиладики, $0<|x-a|<\delta_1$ ва $0<|x-a|<\delta_2$ шартларда $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ ва $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ тенгсизликлар бажарилади. Агар $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ деб олсак $0<|x-a|<\delta$ булганда

$$| A-B|=|A- f(x)+ f(x)+B|\leq |f(x)-A|+ |f(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

тенгсизлик уринли булади. Бу ерда ε ихтиёрий кичик сон булганидан ва A, B сонлар x га боглик эмаслигидан $|A-B|=0$, яъни $A=B$ эканлиги келиб чикади. Демак функция лимити мавжуд булса, у факат ягона булади.

Лимитларга доир турли тасдикларни исботлашда чексиз кичик миқдор ва уларнинг хоссалари мухим ахамиятга эга.

Т А Ъ Р И Ф : $\alpha(x)$ функция $x\to a$ ($|a|<\infty$ ёки $a=\pm\infty$) булганда чексиз кичик микдор деб аталади, агарда $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ шарт бажарилса.

ТЕОРЕМА : Агар $x\to a$ булганда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик микдорлар булиб, $f(x)$ бирор M сони билан чегараланган, яъни $|f(x)|\leq M$ булса, у холда $\alpha(x)\pm\beta(x)$; $\alpha(x)\ \beta(x)$; $f(x)\ \alpha(x)$; $C\alpha(x)$ (C= const) функциялар хам чексиз кичик микдорлар булади.

И с б о т : $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик микдорлар, яъни $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to a}\beta\ (x)=0$ булгани учун лимит таърифига асосан ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ топиладики, $0<|x-a|<\delta$ шартларда $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$, $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ тенгсизликлар бир пайтда уринли булади. Натижада $0<|x-a|<\delta$ булганда

$$|\alpha(x)\pm\beta(x)|\leq |\alpha(x)|+|\beta(x)| <\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

$$|\alpha(x)\ \beta(x)|= |\alpha(x)|\ |\beta(x)| <\varepsilon/2\ \varepsilon/2=\varepsilon^2/2,$$

$$|f\ (x)\ \alpha\ (x)|= |f\ (x)|\ |\alpha\ (x)| <|M|\ \varepsilon/2\ , \qquad | c\ \alpha(x)|=|c|\ |\alpha(x)| < |c|\ \varepsilon/2$$

тенгсизликлар уринли булади. Булардан ва лимит таърифига асосан

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)\pm\beta(x))=0, \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)\ \ \beta(x)=0$$

$$\lim_{x\to a}\ f\ (x)\ \alpha\ (x)=0, \quad \lim_{x\to a}\ c\ \alpha(x)=0$$

натижаларни оламиз. Теорема исботланди.

НАТИЖА: Чекли сондаги чексиз кичик микдорларнинг алгебраик йигиндиси, купайтмаси яна чексиз кичик микдордан иборат булади.

Бу натижани олдинги теоремани бир неча марта куллаб исботлаш мумкин.

ЛЕММА: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ тенглик уринли булиши учун f(x) функция $f(x)=A+\alpha(x)$ куринишда булиши зарур ва етарли. Бунда $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, яъни $\alpha(x)$ чексиз кичик микдордир.

Лемма исботи лимит ва чексиз кичик микдор таърифидан келиб чикади.

АСОСИЙ ТЕОРЕМА: Агар $x\to a$ булганда f(x) ва g(x) функциялар чекли лимитларга эга булсалар, унда

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x) \quad (1)$$

$$\lim_{x\to a} cf(x)= c\lim_{x\to a} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\, \lim_{x\to a} g(x) \quad (3)$$

тенгликлар уринли булади. Агар $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ булса,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad (4)$$

тенглик уринлидир.

<u>И с б о т.</u> $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ булсин. Бу холда, леммага асосан, $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ деб ёза оламиз. Бу ерда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар $x\to a$ булганда чексиз кичик микдорлардир. Бу тенгликлардан фойдаланиб

$$f(x)\pm g(x) =(A+\alpha(x)) \pm (B+\beta(x))=(A\pm B)+(\alpha(x) \pm\beta(x))$$

натижани оламиз. Чексиз кичик микдорлар хоссасига асосан бу ерда $\gamma(x)=\alpha(x) \pm\beta(x)$ функция $x\to a$ булганда чексиз кичик микдор булади. Бу холда юкоридаги тенгликдан ва леммага асосан

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) =A\pm B= \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$$

тенглик уринли эканлигига ишонч хосил киламиз.

Теоремадаги колган тенгликлар хам шу тарзда исботланади.

Юкорида курсатилганидек, функция хар доим хам лимитга эга булавермайди. Шу сабабли функция лимитини хисоблашдан олдин унинг мавжудлигини текшириб куришга тугри келади. Шу максадда куйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз:

ТЕОРЕМА 1: Агар $\varphi(x) \leq f(x)\leq\psi(x)$ тенгсизликлар ихтиёрий x учун уринли булиб, $x\to a$ булганда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларининг лимитлари мавжуд ва $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)= \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$ булса, у холда $x\to a$ булганда f(x) функция учун хам лимит мавжуд булиб, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ муносабат уринли булади.

ТЕОРЕМА 2: Агарда f(x) функция усувчи (камаювчи) булиб, юкоридан (куйидан) бирор M(m) сони билан чегараланган булса, у холда бу функция $x\to a$

булганда лимитга эга ва бу лимит учун $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq M$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq m$) муносабатлар уринли булади.

Турли функцияларнинг лимитини хисоблашда куйидаги тенгликлардан фойдаланиш мумкин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e=2.7182818284\ldots\ldots$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^{a},\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

Булар математикада ажойиб лимитлар деб аталади ва уларнинг исботи келгуси маърузаларда берилади.

Функция лимитининг иктисодиётда кулланилиши. Узлуксиз фоиз ставкаси масаласи.

Банкдаги бошлангич омонат микдори Q_0 га тенг. Банк хар йили p% устама тулайди. t йилдан сунг омонат микдори Q_t нинг микдори топилсин.
Хар йили омонат микдори p% га ошса, у холда омонат хар йили (1+p/100) марта ошади, яъни $Q_1=Q_0(1+p/100)$, $Q_2=Q_1(1+p/100)=Q_0(1+p/100)^2,\ldots$, $Q_t=Q_{t-1}(1+p/100)=Q_0(1+p/100)^t$.
Агар хар йили омонат k марта устама фоиз кушилса, у холда t йилда kt марта устама фоиз туланади, умумий омонат микдори $Q_t=Q_0(1+\dfrac{p}{100k})^{k\cdot t}$, га тенг булади. (k=2 булса 1-йилда 2 марта, k=4 булса, хар кварталда ва k=12 булса, хар ойда, k=365 булса, хар куни,k=8760 булса хар соатда ва хакозо, $k\to\infty$ да узлуксиз равишда устама фоиз туланади).

Агар $n\to\infty$ да

$$Q_t=\lim_{k\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{k\cdot t}\right]=Q_0\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}=Q_0e^{\frac{pt}{100}}.$$

Бу формула омонат микдорининг экспоненциал конун асосида усишини курсатади.

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Функциянинг чекли лимити кандай таърифланади?
2. Функциянинг чексиз лимити кандай таърифланади?
3. Функциянинг чап (унг) лимитлари деб нимага айтилади?
4. Кандай шартда функциянинг лимити мавжуд булади?
5. Лимити мавжуд булмаган функцияга мисол келтиринг.
6. Чексиз кичик микдор деб нимага айтилади?
7. Чексиз кичик микдорлар кандай хоссаларга эга?

8. Функция лимити мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти нимадан иборат?
9. Лимитларнинг асосий хоссалари нималардан иборат?
10. Ажойиб лимитларни ёза оласизми?

24 - МАЪРУЗА

УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

Таянч иборалар: функциянинг нуктадаги узлуксизлиги, аргумент орттирмаси, функция орттирмаси, функцияни ораликда узлуксизлиги, асосий элементар функцияларнинг узлуксизлиги, функцияни нуктада чап ва унг томондан узлуксизлиги, функциянинг узилиш нукталари, I ва II тур узилиш нукталари, узилиш нуктасида функцияни сакраши, кесмада узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари.

Маъруза режаси:

1. Функциянинг нуктадаги узлуксизлиги таърифи.
2. Аргумент ва функция орттирмаси.
3. Функциялар узлуксизлигини орттирмалар оркали ифодаланиши.
4. Асосий элементар функцияларнинг узлуксизлиги.
5. Узлуксиз функцияларнинг асосий хоссалари.
6. Элементар функцияларнинг узлуксизлиги.
7. Функциянинг нуктада чап ва унг томондан узлуксизлиги.
8. Функциянинг оралик ва кесмада узлуксизлиги.
9. Функциянинг узилиш нукталари ва уларнинг турлари.
10. Кесмада узлуксиз функциянинг хоссалари.

Адабиётлар:

[1] II боб, §13-16 [2] II боб, §9-10

$y=f(x)$ функция x_0 нуктада ва унинг бирор атрофида аникланган булсин.

ТАЪРИФ: $y= f(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз дейилади, агарда у бу нуктада аникланган ва куйидаги шарт бажарилса:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0) \qquad (1)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ эканлигини хисобга олиб, (1) узлуксизлик шартини

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(\lim_{x\to x_0} x)$$

каби ёзиш мумкин.

Демак, $f(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз булиши учун функция олиш ва лимит олиш амалларини урнини алмаштириш мумкин булиши керак экан.

Амалий масалаларда функция узлуксизлигини орттирма тушунчаси оркали текшириш кулай.

Агар x нукта x_0 нукта атрофидан олинган булса, $x-x_0$ айирма аргумент орттирмаси дейилади ва Δx каби белгиланади. Бу холда $f(x)-f(x_0)$ айирма функция орттирмаси дейилади ва Δf ёки Δy каби белгиланади.

Демак, Δx аргументнинг узгаришини, Δf эса функция узгаришини ифодалайди. Агарда $x \to x_0$ булса, у холда $\Delta x \to 0$ булади. $x=x_0+\Delta x$ эканлигидан фойдаланиб, (1) узлуксизлик шартини

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \qquad (2)$$

куринишида ёзиш мумкин. Бу шартни $\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ эканлигидан фойдаланиб,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f=0 \qquad (3)$$

куринишда ёзиш мумкин. Демак f(x) функция узлуксиз булиши учун аргументнинг “кичик” Δx узгаришига функциянинг хам “кичик” Δf узгариши мос келиши керак.

Мисол сифатида $y=x^2$ функциянинг хар кандай x_0 нуктада узлуксиз эканлигини (3) шарт ёрдамида курсатамиз:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$$
$$=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x^2)-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$$

АСОСИЙ ТЕОРЕМА: Барча асосий элементар функциялар аникланиш сохасидаги хар бир x_0 нуктада узлуксиздир.

Бу теоремани исботсиз кабул киламиз.

ТЕОРЕМА: Агарда f(x) ва g(x) функциялар x_0 нуктада узлуксиз булса, у холда $f(x)\pm g(x)$, f(x) g(x) функциялар хам бу нуктада узлуксиз булади. Агарда кушимча равишда $g(x_0)\neq 0$ шарт бажарилса, f(x)/g(x) нисбат хам x_0 нуктада узлуксиздир. Агарда $U_0=g(x_0)$ нуктада f(x) функция узлуксиз булса, f(g(x))=F(x) мураккаб функция хам x_0 нуктада узлуксиз булади.

<u>Исбот:</u> Теореманинг исботи лимитлар хоссаларидан ва узлуксизликнинг (1) шартидан келиб чикади.

Масалан, $h(x)=f(x)\pm g(x)$ функциянинг x_0 нуктада узлуксизлигини курсатамиз. Теорема шартига асосан

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

булгани учун

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=h(x_0).$$

Таърифга асосан h(x) функция x_0 нуктада узлуксиз булади. Теореманинг колган кисмини исботи талабаларга мустакил иш сифатида тавсия этилади.

Асосий терема ва бу теоремадан куйидаги натижа келиб чикади.

<u>Натижа:</u> Барча элементар функциялар аникланиш сохасидаги хар бир x_0 нуктада узлуксиз булади.

<u>Т А Ъ Р И Ф:</u> y= f(x) функция бирор чекли ёки чексиз (*а*,*в*) интервалнинг хар бир нуктасида узлуксиз булса, у шу интервалда узлуксиз дейилади.

Масалан, $y=(1-x^2)^{-1/2}$ функция (-1,1) интервалда узлуксиздир.

<u>Т А Ъ Р И Ф :</u> y=f(x) функция *а* нуктада аникланган булиб,

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a) \ (\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a))$$

шартни каноатлантирса, у холда f(x) функция *а* нуктада унгдан(чапдан) узлуксиз дейилади.

Масалан, $$y=\begin{cases} 1, x\geq 0 \\ -1, x<0 \end{cases} \qquad (4)$$

функция x=0 нуктада унгдан узлуксиз, чунки

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)= \lim_{x\to 1+0} 1=1=f(0).$$

Аммо

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)= \lim_{x\to 1-0} (-1)=-1\neq f(0),$$

яъни x=0 нуктада функция чапдан узлуксиз эмас.

Агарда y=f(x) функция x=*а* нуктада узлуксиз булса, у холда бу функция шу нуктада хам чапдан, хам унгдан узлуксиз булади.

Аксинча, x=*а* нуктада функция чапдан ва унгдан узлуксиз булса, бу нуктада функция узлуксиздир.

Шундай килиб, f(x) функциянинг *а* нуктада узлуксиз булиши учун

$$\lim_{x\to a+0} f(x)= \lim_{x\to a-0} f(x)= f(a) \qquad (5)$$

шарт зарур ва етарлидир.

<u>Т А Ъ Р И Ф:</u> y=f(x) функция учун бирор *а* нуктада (5) тенглик бажарилмаса, у шу нуктада узлукли, *а* эса унинг узилиш нуктаси дейилади.

Масалан, (4) функция учун x=0, $y=(1-x^2)^{-2}$ функция учун эса x=±1 унинг узилиш нуктаси булади.

Агарда *а* нукта y=f(x) функциянинг узилиш нуктаси булиб, бу нуктада функциянинг чап ва унг лимитлари чекли сонлардан иборат булса, x=*а* функциянинг I тур узилиш нуктаси дейилади. Масалан, (4) функция учун x=0 I тур узилиш нуктаси булади. Бу холда Δ=f(a+0)-f(a-0) функциянинг а нуктадаги сакраши деб аталади.

Агарда y=f(x) функциянинг *а* узилиш нуктасида унинг чап ва унг лимитларидан камида биттаси чексиз ёки мавжуд булмаса x=*а* II тур узилиш нуктаси дейилади.

Масалан,

$$y=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ x^{-2}, x<0 \end{cases}$$

функция x=0 нуктада II тур узилишга эга, чунки f(0+0)=0, f(0-0)=∞ булмокда.

Худди шундай, $f(x)=(x-2)^{-1}$ функция учун x=2 II тур узилиш нуктаси булади, чунки f(2-0)= –∞, f(2+0)= ∞.

<u>Т А Ъ Р И Ф:</u> y=f(x) функция [a,в] кесмада узлуксиз дейилади, агарда у (a,в) интервалда узлуксиз, x=a (x=в) чегаравий нуктада унгдан(чапдан) узлуксиз булса.

Масалан, y=sinx функция хар кандай [a,в] кесмада узлуксиздир.

Агарда функция [*а*,*в*] кесмада узлуксиз булса, унинг графигининг шу кесмага мос келувчи кисми яхлит (узлуксиз) чизикдан иборат булади. Агарда f(x) функция x_0 нуктада узилишга эга булса, унинг графиги хам шу нуктада узиладиган чизикдан иборат булади. Узлуксизликнинг бу геометрик талкини узлуксиз функцияларнинг куйидаги хоссалари ва уларнинг исботини тасаввур этишга имкон беради.

1 – хосса : Агарда f(x) функция $[a,в]$ кесмада узлуксиз булса, бу кесмада камида битта шундай x_1 (x_2) нукта мавжудки, хар кандай $x\in[a,в]$ учун $f(x_1)\geq f(x)$ $(f(x_2)\leq f(x))$ муносабат бажарилади.

Бу хоссадаги $f(x_1)$ ёки $f(x_2)$ берилган f(x) функциянинг $[a,в]$ кесмадаги энг катта ёки энг кичик киймати деб аталади ва

$$\max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

каби белгиланди. Хакикатдан хам, функция графигининг энг баланд ёки энг паст жойлашган нукта ёки нукталаридан бирининг абсциссаси x_1 ёки x_2 деб олсак , хоссада айтилган тасдик келиб чикади.

Масалан, $f(x)=x^2$, $x\in[2,4]$ функция учун $x_1=2$, $x_2=4$ булади, чунки бу кесмада $4\leq x^2\leq 16$, яъни $f(2)\leq f(x)\leq f(4)$ муносабат уринли.

2 - хосса: Агар f(x) функция [а,в] кесмада узлуксиз ва унинг чегараларида турли ишорали кийматларни кабул килса, яъни f(а) f(в)<0 шарт бажарилса, у холда камида битта шундай $c\in$(а,в) нукта мавжудки, унда f(c)=0 тенглик бажарилади.

Бу хоссанинг геометрик маъноси шундан иборатки, курсатилган шартларда функция графиги [а,в] кесмада узлуксиз чизикдан иборат булиб, унинг бир учи ОХ координата укидан пастда, иккинчи учи эса ундан юкорида булади. Шу сабабли функция графиги ОХ укини камида битта x=c нуктада кесиб утади ва шу нуктада f(c)=0 булади.

Бу хосса ёрдамида f(x)=0 куринишдаги тенгламанинг илдизлари ётган ораликларни топиш мумкин. Масалан, $x-\cos x=0$ тенглама $(0,\pi)$ ораликда илдизга эга, чунки $f(x)=x-\cos x$ функция $[0,\pi]$ кесмада узлуксиз ва $f(0)= -1<0$, $f(\pi)=\pi+1>0$. Демак кандайдир $x_0\in(0,\pi)$ нуктада $f(x_0)=0$ булади ва x_0 берилган тенглама илдизини ифодалайди.

3 - хосса: Агарда f(x) функция $[a,в]$ кесмада узлуксиз ва $f(a)=A$, $f(в)=B$, $A\neq B$ булса, хар кандай $\mu\in(A,B)$ сон учун камида битта шундай $c\in(a,в)$ нукта топиладики, унда $f(c)=\mu$ тенглик уринли булади.

Бу хоссани геометрик нуктаи назардан куйидагича талкин этиш мумкин. ОУ координата укида жойлашган ва $A<\mu<B$ шартни каноатлантирадиган μ нуктадан ОХ укига параллел тугри чизик утказсак, бу тугри чизик $y= f(x)$, $x\in[a,в]$, функция графигини хеч булмаганда битта М нуктада кесиб утади. Шу нуктанинг абсиссаси x=c учун $f(c)=\mu$ тенглик бажарилади.

Масалан, $f(x)=x^3$, $x\in[1,3]$, функция учун A=1, B=27 ва хар кандай $\mu\in(1,27)$ учун $c=\sqrt[3]{\mu}$ деб олсак, $f(c)=c^3=(\sqrt[3]{\mu})^3=\mu$ тенглик бажарилади. Бу хоссадан ушбу натижани чикариш мумкин:

Натижа: Агарда f(x) функция $[a,в]$ кесмада узлуксиз ва бу ерда унинг энг катта ва энг кичик кийматлари М ва m булса, у холда функция кийматлари [m,M] кесмани тулик тулдиради.

Уз – узини назорат этиш саволлари:

1. Качон функция нуктада узлуксиз дейилади?
2. Аргумент ва функция орттирмалари кандай аникланади?
3. Орттирмалар тилида функция узлуксизлиги кандай ифодаланади?
4. Асосий элементар функциялар узлуксизми?
5. Узлуксиз функцияларнинг асосий хоссалари нимадан иборат?
6. Элементар функциялар узлуксизлиги хакида нима дейиш мумкин?
7. Качон функция нуктада чап (унг) томондан узлуксиз дейилади?
8. Функциянинг нуктада узлуксиз булишининг зарурий ва етарли шарти нимадан иборат?
9. Функциянинг узилиш нукталари кандай аникланади?
10. Узилиш нукталари кандай турларга ажратилади?
11. Качон функция ораликда (кесмада) узлуксиз дейилади?
12. Кесмада узлуксиз функция кандай хоссаларга эга?

25 - МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯ ХОСИЛАСИ ВА УНИНГ ГЕОМЕТРИК, МЕХАНИК МАЪНОСИ.

Таянч иборалар: хосила таърифи, хосиланинг геометрик маъноси, хосиланинг механик маъноси, дифференциалланувчи функция, дифференциалланувчи функциянинг узлуксизлиги.

М а ъ р у з а   р е ж а с и :

1. Функция хосиласи.
2. Хосиланинг геометрик маъноси.
3. Хосиланинг механик маъноси.
4. Дифференциалланувчи функциянинг узлуксизлиги.

Адабиётлар:

[1] II боб, §1-2   [2] III боб, §1-4

y=f(x) функция (a,в) ораликда аникланган булиб, x ва x+Δx шу ораликдаги нукталар булсин. Бу холда аргументнинг Δx орттирмасига функциянинг Δf=f(x+Δx)-f(x) орттирмаси мос келади.

Т А Ъ Р И Ф : y=f(x) функция Δf орттирмасининг Δx аргумент орттирмасига нисбати $\Delta x \to 0$ булганда чекли лимитга эга булса, бу лимит киймати функциянинг x нуктадаги хосиласи деб аталади ва $f'(x)$ ёки $y'(x)$ каби белгиланади.

Таърифга асосан

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Мисол сифатида $f(x)=x^2$ функция хосиласини таърифга асосан топамиз:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Демак, $(x^2)'=2x$ булар экан.

y=f(x) функция хосиласининг геометрик маъносини аниклаш учун бу функциянинг графигида абциссаси x ва x+Δx , ординаталари эса f(x) ва f(x+Δx) булган M ва N нукталарни оламиз. Бу нукталардан утувчи MN кесувчининг OX укининг мусбат йуналиши билан хосил килган бурчагини β каби белгилаймиз. Бу холда тегишли чизмани чизиб, $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ натижани олиш мумкин. Энди $\Delta x \to 0$ булсин. Бу холда N нукта M нуктага якинлашиб боради, MN кесувчи эса функция графигининг M нуктасига утказилган уринмага якинлашиб боради. Бу уринманинг OX уки мусбат йуналиши билан хосил килган бурчагини α деб белгиласак, юкоририда айтилганларга кура $\Delta x \to 0$ булганда $\beta \to \alpha$ ёки $tg\,\beta \to tg\alpha$ мунособат уринли булади. Демак,

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Шундай килиб, $f'(x)$ хосила киймати функция графигининг $M(x,f(x))$ нуктадаги уринмасининг $k=tg\alpha$ бурчак коэффициентига тенг булар экан.

Хосиланинг механик маъносини курсатиш учун x аргументни вакт моменти, $y=f(x)$ функцияни эса тугри чизик буйлаб харакатланаётган моддий нуктанинг x вакт моментигача босиб утган масофаси деб караймиз. Бу холда Δf орттирма Δx вакт ичида моддий нуктанинг босиб утган йулини, $\Delta f/\Delta x$ нисбат эса унинг v (уртача) тезлигини ифодалайди. $\Delta x \to 0$ булганда v (уртача) тезлик моддий нуктанинг x вакт моментидаги
v (оний) тезлигига якинлашиб боради, яъни

$$v(\textit{оний}) = \lim_{\Delta x \to 0} v(\textit{уртача}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Демак, $f'(x)$ хосила $f(x)$ функциянинг узгариш тезлигини ифодалайди.

Агар $y=f(x)$ функция x нуктада чекли $f(x)$ хосилага эга булса, у шу нуктада дифференциалланувчи дейилади. Функциянинг дифференциалланувчанлиги ва узлуксизлиги орасидаги богланиш куйидаги теорема оркали ифодаланади.

ТЕОРЕМА: Агарда $y=f(x)$ функция x нуктада дифференциалланувчи булса, у шу нуктада узлуксиз булади.

<u>И с б о т :</u> Функция узлуксизлиги таърифига асосан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \qquad (2)$$

муносабатни курсатиш кифоя. Хосила таърифини ифодаловчи (1) тенглик ва лимитни мавжудлиги хакидаги олдин куриб утилган леммага асосан

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

тенгликни ёзиш мумкин. Бу ерда $\Delta x \to 0$ булганда $\alpha(\Delta x)$ чексиз кичик микдор булади. Бу холда, лимит хисоблаш коидаларига асосан,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)) = f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Демак, (2) муносабат уринли ва шу сабабли $f(x)$ функция x нуктада узлуксиз булади.

И З О Х : Теоремадаги тасдикнинг тескариси умуман олганда уринли эмас.

Масалан, $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуктада узлуксиз, аммо бу нуктада дифференциалланувчи эмас. Хакикатан хам, $x=0$ нуктага Δx орттирма берганимизда $\Delta f=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x$ тенгик уринли булади. Бу ердан

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Демак, $\Delta x \to 0$ булганда $\Delta f/\Delta x$ нисбат лимитга эга эмас, яъни $f'(0)$ хосила мавжуд эмас.

Т А Ъ Р И Ф : y=f(x) функция ($a,в$) ораликнинг хар бир нуктасида дифференциалланувчи булса, у шу ораликда дифференциалланувчи деб аталади.

Масалан, $y=x^2$ функция хар кандай ораликда дифференциалланувчи. $y=|x|$ функция эса x=0 нуктани уз ичига олмайдиган ораликларда (масалан, (-1,0), (0,1), (2,4) ораликларда) дифференциалланувчи, x=0 нуктани уз ичига олувчи ораликларда (масалан, (-1,1), (-5,3) ораликларда) дифференциалланувчи булмайди

Хосиланинг иткисодий маъноси.

Мехнат унумдорлиги хакидаги масала.

t вактда ишлаб чикарилган махсулот хажми u=u(t) функция оркали ифодалансин ва $t=t_0$ вактдаги мехнат унумдорлигини топиш керак булсин. t_0 дан $t_0+\Delta t$ вактгача ишлаб чикарилган махсулот микдори $u_0=u(t_0)$ дан $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t)$ гача узгаради. У холда уртача мухнат унумдорлигини шу вакт оралигида $z_{\text{урт}}=\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ ни ташкил этади. t_0 вактдаги мехнат унумдорлигини эса $\Delta t\to 0$ даги лимитни хисоблаш оркали хисоблаш мумкин, яъни $z=\lim\limits_{\Delta t\to 0} z_{\text{урт}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t)$ бу эса u(t) функциядан вакт буйича олинган хосилани ифодалайди.

Хосиланинг иктисодий мазмунини ифодаловчи яни бир масала.

Ишлаб чикариш харажатларини y ни ишлаб чикарилган махсулот микдори x нинг функцияси деб караш мумкин: y=y(x), Δx- махсулотнинг усиши (орттирмаси), Δy-ишлаб чикариш харажатларнинг усиши (орттирмаси) булса, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$-ишлаб чикарилган махсулот бирлигига мос келадиган сарф-харажатнинг уртача орттирмаси.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'(t)$- хосила ишлаб чикариш харажатларнинг лимит киймати булиб, такрибан кушимча махсулот бирлигини ишлаб чикаришга кетган кушимча харажатни ифодалайди. Шундай килиб хосила, бирор иктисодий объект ёки жараённинг вакт ёки бошка бирор иктисодий омилга нисбатан узгариш тезлигини ифодалайди.

Иктисодий жараёнларни урганиш ва бошка амалий масалаларни ечиш учун купинча функциянинг эластиклиги тушунчаси ишлатилади. y(x) функциянинг эластиклиги $E_x(y)$ деб y=y(x) функция нисбий орттирмаси $\dfrac{\Delta y}{y}$ ни аргумент x нинг нисбий орттирмаси $\dfrac{\Delta x}{x}$ га нисбатининг $\Delta x\to 0$ даги лимитига аталади, яъни $E_x(y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{y}:\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\dfrac{x}{y}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{x}{y}\cdot y'$ функциянинг эластиклиги x аргумент 1% га узгарганда $y=y(x)$ функциянинг неча % га узгаришини тахминан ифодалайди. Функция эластиклиги куйидаги хоссаларга эга.

1. $y=y(x)$ функциянинг эластиклиги унинг усиш суръати $T_y=(\ln y)'=y'/y$ билан x нинг купайтмасига тенг, яъни $E_x(y)=x\cdot T_y$.
2. $u(x)\cdot v(x)$ функциянинг эластиклиги улар эластикларининг йигиндисига тенг. $E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v)$.
3. $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ нинг эластиклиги улар эластикларининг айирмасига тенг. $E_x(u/v)=E_x(u)-E_x(v)$.

Функция эластиклиги талаб ва истеъмолни тахлил этишда кулланилади. Масалан, талаб – y x- бахонинг ёки даромаднинг функцияси булса, у холда $E_x(y)=x\cdot y'/y$ эластиклик коэффициенти бахо ёки даромад x 1% га узгарганда талаб ёки истеъмол микдори y неча % га узгаришини ифодалайди.

Булардан ташкари ишлаб чикариш ва истеъмол, талаб ва таклиф назарияси конунлари хам аник математик талкинга эга эканлигини куйидаги мисолларда куриш мумкин.

1. Ишлаб чикарувчи учун товар ишлаб чикаришнинг оптимал даражаси лимит харажатларини лимит даромадга тенглиги билан аникланади, яъни x_0 ишлаб чикариш даражаси ишлаб чикарувчи учун оптимал булади, агарда $ЛS(x_0)=ЛD(x_0)$, ЛS- лимит харажатлар, ЛD-лимит даромад. Агар C(x) деб фойда функциясини белгиласак, у холда $C(x)=D(x)-S(x)$. Хамда ишлаб чикариш даражаси оптимал булиши учун фойда максимал булиши керак. x нинг шундай x_0 кийматини топиш керакки C(x) функция максимумга эришсин. Ферма теоремасига асосан бундай нуктада $C'(x)=0$ булади. $C'(x)= D'(x)-S'(x)$, яъни $C'(x_0)= D'(x_0)- S'(x_0)$ ёки $D'(x_0) = S'(x_0)$ бундан эса $ЛD'(x_0) =ЛS'(x_0)$ келиб чикади.
2. Тежамлирок ишлаб чикариш даражаси ишлаб чикариш назариясининг энг мухим тушунчаларидан биридир, унинг мохияти товар ишлаб чикаришнинг уртача харажатларини минимумлаштиришдан иборат. Бу иктисодий конун куйидагича: яънада тежамлирок ишлаб чикариш даражаси уртача ва лимит ишлаб чикариш харажатларининг тенглиги билан аникланади. Уртача харажатлар $УS(x)$ - $\dfrac{S(x)}{x}$ билан аникланади, яъни товар ишлаб чикариш харажатларини ишлаб чикарилган товар микдори x га нисбати оркали аникланади. Бу функциянинг минимуми хосилани нолга айлантирувчи нуктада булади.
$$(УS(x))'=\left(\frac{S(x)}{x}\right)'=\frac{S'\cdot x-S}{x^2}\Rightarrow S'\cdot x-S=0 \text{ ёки } S'(x)=\frac{S(x)}{x}, \text{ яъни } ЛS(x)=УS(x).$$
3. Таникли иктисодий конунлардан бири камаювчи даромад конуни куйидагичадир. Ишлаб чикаришнинг усиши натижасида хар бирлик янги ишлаб чикариш ресурсига мос келадиган кушимча махсулот микдори

маълум бир вактдан камая боради, бошкача килиб айтганда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ микдор (Δx- ресурс орттирмаси, Δy- ишлаб чикариш махсулот орттирмаси) x усиши билан камая боради. Шундай килиб, z=f(x) x- ишлаб чикаришга жалб этилган ресурс микдорига боглик ишлаб чикарилган махсулот функцияси камаювчи функциядир.

4. u=u(x) – фойдалалик функцияси (x-товар, u-фойдалилик) хам камаювчи функциядир. Камаювчан фойдалилик конуни куйидагича: товар микдорининг усиши билан унинг кушимча фойдалилиги камая боради.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Функциянинг нуктадаги хосиласи кандай таърифланади?
2. Хосиланинг геометрик маъноси нимадан иборат?
3. Хосиланинг механик маъноси нимадан иборат?
4. Дифференциалланувчи функциянинг узлуксизлиги хакида нима дейиш мумкин?
5. Узлуксиз функциянинг дифференциалланувчанлиги тугрисида нима дейиш мумкин?
6. Качон функция ораликда дифференциалланувчи дейилади?

26 - МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ КОИДАЛАРИ. ХОСИЛАЛАР ЖАДВАЛИ.

Таянч иборалар: хосилани топиш алгоритми, алгебраик йигинди хосиласи, купайтма хосиласи, булинма хосиласи, мураккаб функция хосиласи, тескари функция хосиласи, асосий элементар функцияларнинг хосилалари, хосилалар жадвали.

Маъруза режаси:

1. Функция хосиласини таъриф буйича хисоблаш алгоритми.
2. Функциялар алгебраик йигиндисининг хосиласи.
3. Функциялар купайтмасининг хосиласи.
4. Функциялар булинмасининг хосиласи.
5. Мураккаб функциянинг хосиласи.
6. Тескари функция хосиласи.
7. Хосилалар жадвали.

Адабиётлар:

[1] III боб, §3-9 [2] III боб, §5-15

Умумий холда $y=f(x)$ функциянинг хосиласини топиш, яъни уни дифференциаллаш, куйидаги алгоритм буйича амалга оширилади:

1) x аргументга $\Delta x\neq 0$ орттирма бериб, $x+\Delta x$ нуктани топамиз;
2) функция орттирмасини $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ тенглик буйича хисоблаймиз;
3) $\Delta f/\Delta x$ нисбатни топамиз ва унинг $\Delta x\to 0$ булгандаги лимитини хисоблаймиз. Бу лимит мавжуд булса, унинг киймати $f'(x)$ хосилани аниклайди.

Мисол сифатида $f(x)=\sin x$ функция хосиласини юкоридаги алгоритм буйича топамиз:

1) x ва $x+\Delta x$ нукталарда функцияни хисоблаймиз;
2) тригонометрик формуладан фойдаланиб, функция орттирмасини куйидагича ёзамиз:

$$\Delta f=\sin(x+\Delta x)-\sin x= 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)$$

3) $\Delta f/\Delta x$ нисбатни тузамиз ва унинг лимитини хисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta f/\Delta x)= \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)/\Delta x=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos(x+\Delta x/2)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Бу ерда купайтманинг лимити, $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$ ажойиб лимитдан ва $y=\cos x$ функция узлуксизлигидан фойдаланилди.

Демак, $(\sin x)'=\cos x$ булади. Худди шундай усулда $(\cos x)'= -\sin x$ эканлиги аникланади. Бундан ташкари

$$(a^x)'= a^x \ln a\ , \quad (\log_a x)'= \frac{1}{x}\log_a e$$

эканлигини исботлаш мумкин.

Аммо, хар кандай функция хосиласини бу алгоритм буйича хисоблаш осон эмас ва мухими шарт хам эмас. Умумий холда функция хосиласини хисоблашни куйидаги дифференциаллаш коидалари буйича амалга ошириш мумкин.

1- коида: Узгармас С сонинг хосиласи нолга тенг , яъни $(C)'=0$.

И с б о т : Узгармас С сонни x аргументнинг хар кандай кийматида бир хил киймат кабул килувчи $f(x)=C$ функция деб караш мумкин. Бу холда,

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0, \qquad \Delta f/\Delta x=0,$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0 .$$

2-коида: $u=u(x)$, $v=v(x)$ функциялар x нуктада дифференциалланувчи булса, бу нуктада $u \pm v$, $u\cdot v$ ва $v(x)\neq 0$ шартда u/v функциялар хам дифференциалланувчи булиб, уларни хисоблаш учун

$$(u \pm v)'= u' \pm v' \ , \quad (u\cdot v)'= u'\cdot v + u\cdot v' , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

формулалар уринли булади.

И с б о т : Функция орттирмаси таърифидан фойдаланиб, хар кандай Δx аргумент орттирмасида $\Delta(u \pm v) =\Delta u \pm \Delta v$ эканлигини курсатиш мумкин. Бу холда лимит хоссаси ва хосила таърифига асосан

$$(u+v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'+v'.$$

Худди шундай,

$$\Delta(u\cdot v) = u\cdot\Delta v +\Delta u\cdot v +\Delta u\cdot\Delta v, \qquad \Delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u\Delta v-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

мунособатлардан фойдаланиб, 2-коидадаги колган формулаларни хам исботлаш мумкин.

Натижа 1: Функцияга ихтиёрий С узгармас сонни кушсак, унинг хосиласи узгармайди.

Хакикатдан хам $(f(x)+C)'=f'(x)+C'= f'(x)+0= f'(x)$.

Натижа 2 : Узгармас С купайтувчини хосила белгисидан ташкарига чикариш мумкин.

Хакикатдан хам, купайтманинг хосиласи формуласи ва 1-коидага асосан

$$(C\cdot f(x))'=C'\cdot f'(x)+C\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=C\cdot f'(x)$$

Натижа 3 : $(\mathrm{tg}x)' =1/ \cos^2 x$, $(\mathrm{ctg}x)' = -1/ \sin^2 x$.

Хакикатан хам, булинманинг хосиласи формуласига кура

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Худди шундай равишда $(\mathrm{ctg}x)'$ хосила топилади.

3-коида: *$y=f(u)$* мураккаб функцияда *$f(u)$* ва *$u(x)$* функциялар аргументлари буйича дифференциалланувчи булсин. Бу холда $y=f(u)$ мураккаб функция x буйича дифференциалланувчи булиб, унинг хосиласи

$$f'_x = f'(u) \cdot u'(x)$$

формула билан топилади.

<u>И с б о т :</u> *$u(x)$* функция дифференциалланувчи булганлигидан унинг узлуксизлиги келиб чикади ва шу сабабли $\Delta x \to 0$ булганда $\Delta u \to 0$ булади. Хосила таърифига асосан

$$f'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'(x).$$

Масалан, $(\sin x^2)' = (u=x^2) = (\sin u)'_x = \cos u \cdot u' = 2x \cos x^2$.

Бу коиданинг тадбики сифатида $y=x^\alpha$ даражали функциянинг y' хосиласини топамиз. Бу холда

$$\ln y = \ln x^\alpha = \alpha \ln x \Rightarrow (\ln y)'_x = (\alpha \ln x)' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = \frac{\alpha}{x} y = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

4-коида:. *$y = f(x)$* дифференциалланувчи ва *$f'(x) \neq 0$* булса, $x=f^{-1}(y)$ тескари функция хам дифференциалланувчи булади ва унинг хосиласи $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ формула буйича топилади.

<u>И с б о т :</u> $x=f^{-1}(y)$ тескари функциянинг аргумент орттирмаси $\Delta y \neq 0$ булгандаги орттирмаси Δx булсин. Берилган $f(x)$ функция дифференциалланувчи булгани учун узлуксиздир ва шу сабабли унга тескари $f^{-1}(y)$ функция хам узлуксиз булади. Демак, $\Delta y \to 0$ булганда $\Delta x \to 0$ булади. Бу холда, хосила таърифига асосан,

$$x_y' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \frac{1}{y'_x}.$$

Мисол сифатида $y=\arcsin x$ функция хосиласини топамиз. Бу ерда $D\{f\}=[-1;1]$, $E\{f\}=[-\pi/2, \pi/2]$ булгани учун, $x=\sin y$ тескари функциянинг хосиласи $x'_y = \cos y \neq 0$, $y \in (-\pi/2\ \pi/2)$, шартни каноатлантиради. Бу холда

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

Аммо $y \in (-\pi/2\ \pi/2)$ булганда $\cos y > 0$ ва

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}\ ,\ x\in(-1,1)$$

тенглик уринли. Бу натижани олдинги тенгликка куйиб,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

формулани хосил киламиз. Худди шундай усулда

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\mathrm{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

формулаларни хосил килиш мумкин.

Шундай килиб, барча асосий элементар функциялар аникланиш сохасида дифференциалланувчи ва уларнинг хосилалари куйидаги формулалар билан хисобланади:

1) $(x^{\alpha})' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, α- ихтиёрий хакикий сон;

2) $(a^x)' = a^x\cdot \ln a$, $(e^x)' = e^x$; 3) $(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\mathrm{tg}x)' = \ = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg}\ x)' = -(\mathrm{arcctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Бу хосилалар жадвалидан ва куриб утилган

I. $(C)' = 0$ II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, III. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$,

IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ V. $[f(u)]' = f'_u \cdot u'_x$ VI. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

хосила олиш коидаларидан фойдаланиб, хар кандай элементар функциянинг хосиласини хисоблаш мумкин.

Масалан, $(e^x\cdot\sin 2x)' = (e^x)'\sin 2x + e^x(\sin 2x)' = e^x\cdot\sin 2x + e^x\cdot\cos 2x\cdot(2x)' =$
$= (\sin 2x + 2\cdot\cos 2x)\, e^x$,

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}x.$$

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Таъриф буйича функция хосиласини топиш алгоритми кандай кадамлардан иборат?
2. Узгармас соннинг хосиласи нимага тенг?
3. Функциялар алгебраик йигиндисини хосиласи кандай хисобланади?
4. Функциялар купайтмасининг хосиласи кандай топилади?
5. Функциялар нисбатининг хосиласи кандай хисобланади?
6. Хосила олишда узгармас купайтувчини нима килиш мумкин?
7. Мураккаб функциянинг хосиласи кандай топилади?
8. Тескари функциянинг хосиласи кандай топилади?
9. Асосий элементар функцияларнинг хосилаларини ёзинг.

27 - МАЪРУЗА

КЕСМАДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ХАКИДАГИ ТЕОРЕМАЛАР.

Таянч иборалар: Ролл теоремаси, Лагранж теоремаси, Коши теоремаси.

Маъруза режаси:

1. Кесмада дифференциалланувчи функциялар.
2. Ролл теоремаси.
3. Лагранж теоремаси.
4. Коши теоремаси.

Адабиётлар:

[1] III боб, §19 [2] IV боб, §1-3

Биз куйида дифференциал хисобнинг асосий теоремаларидан булиб хисобланадиган теоремаларни келтирамиз.

1-ТЕОРЕМА (Ролл теоремаси): f(x) функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва унинг ички нукталарида дифференциалланувчи булиб, чегараларида тенг кийматлар кабул килсин, яъни $f(a)=f(b)$ булсин. У холда шу кесма ичида камида битта шундай “c” нукта топиладики, унда функция хосиласи нолга тенг, яъни $f'(c)=0$ булади.

Исбот: Кесмада узлуксиз функция шу кесмада узининг энг кичик (m) ва энг катта (M) кийматларига эришиши бизга маълум.

Агар m=M булса, у холда албатта f(x)=const булади ва теорема тасдиги кесманинг хар бир нуктасида бажарилади.

Айтайлик m<M булсин. Кесма чегараларида функция кийматлари узаро тенг булгани учун функциянинг энг катта ва энг кичик кийматлари кесманинг факат ички нукталарида эришилади.

Агар бирор $a<c<b$ нуктада $f(c) = M$ булса, у холда $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c) < 0$ булади. Бу ердан куйидаги натижалар келиб чикади:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0, \text{ агар } \Delta x>0 \text{ булса,}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0, \text{ агар } \Delta x<0 \text{ булса.}$$

Кесманинг ички нукталарида функциянинг дифференциалланувчанлигидан фойдаланиб, юкоридаги муносабатларда лимитга утсак, у холда куйидаги хулосаларга келамиз:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad \text{ва} \quad f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0$$

Аммо $f'(c)\geq 0$ ва $f'(c)\leq 0$ тенгсизликлар факат $f'(c)=0$ булгандагина биргаликда булади.

f(c)=m хол хам худди шундай курилади. Теорема исбот килинди.

Шундай килиб, дифференциалланувчи функциянинг тенг кийматлари орасида функция хосиласининг хеч булмаганда битта ноли мавжуд булар экан.

Ролл теоремаси куйидаги геометрик талкинга эга: узлуксиз функция (a, b) ораликдаги хар бир нуктада ягона уринмага эга булса ва кесманинг чегараларида бир хил кийматлар кабул килса, у холда шу уринмалар орасида камида биттаси OX укига параллел булади.

2-ТЕОРЕМА (Лагранж теоремаси): f(x) функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва кесманинг ички нукталарида хосилага эга булса, у холда (a,b) ораликда камида битта шундай “c” нукта топиладики, унда

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{ёки} \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

тенглик уринли булади.

<u>И с б о т :</u> Теорема шартини каноатлантирувчи f(x) функция оркали ушбу ёрдамчи функцияни киритамиз:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Бу функциянинг (a,b) ораликдаги хосиласини топамиз:

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Киритилган $\varphi(x)$ функция $\varphi(a)=0$ ва $\varphi(b)=0$ шартларни каноатлантиради. Унда Ролл теоремасига асосан камида битта шундай c нукта топиладики, $c\in(a,b)$ ва $\varphi'(c)=0$ булади. Бундан

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

натижа келиб чикади. Теорема исбот булди.

Лагранж теоремасининг геометрик маъноси шундан иборатки, f(x) функция графигининг $A(a, f(a))$ ва $B(b, f(b))$ нукталарини туташтирувчи AB ватарга параллел ва кандайдир C(c, f(c)) нуктадан утувчи уринма мавжуд.

3-*ТЕОРЕМА* (Коши теоремаси): f(x) ва g(x) функциялар $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва унинг ички нукталарида дифференциалланувчи булсин. Агар $\forall\ x\in(a,b)$ учун $g'(x)\neq 0$ булса, у холда камида битта шундай $c\in(a,b)$ нукта топиладики, унда ушбу тенглик уринли булади:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

<u>И с б о т:</u> Теорема шартига кура $\forall x\in(a,b)$ учун $g'(x)\neq 0$ эканлигидан $g(b)\neq g(a)$ келиб чикади. Хакикатан хам, агар $g(b)=g(a)$ булса, унда Ролл теоремасига асосан, камида битта “c” нуктада $g'(c)=0$ булар эди. Бу эса теорема шартига зид. Шу сабабли куйидаги ёрдамчи функцияни киритиш мумкин:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Бу функция [a,b] кесмада аникланган ва узлуксиз булиб,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

хосилага эга. Киритилган ёрдамчи F(x) функция F(a)= F(b)=0 шартни каноатлантиришини текшириб куришимиз мумкин. Демак, F(x) функция [a,b] кесмада Ролл теоремасининг хамма шартларини каноатлантиради. Шунинг учун [a,b] кесма ичида камида битта шундай c нукта (a<c<b) топиладики, унда F′(c)=0 булади, яъни

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Бундан эса теорема тасдиги тугри эканлиги келиб чикади, яъни

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Изох: Коши теоремасидан хусусий g(x)=x холда Лагранж теоремаси келиб чикади.

Куриб утилган бу учта теореманинг ахамияти функцияни тула текшириш ва аникмасликларни очишда куринади.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Ролль теоремасини шартлари ва тасдиги нимадан иборат?
2. Ролль теоремасининг геометрик маъносини курсатинг.
3. Лагранж теоремасини ифодаланг.
4. Лагранж теоремасининг геометрик маъноси нимадан иборат?
5. Коши теоремаси кандай ифодаланади?
6. Кайси холда Коши теоремасидан Лагранж теоремаси келиб чикади?

28 - МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ. ЮКОРИ ТАРТИБЛИ ХОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР.

Таянч иборалар: функция дифференциали, дифференциал мавжудлигини зарурий ва етарли шарти, алгебраик йигинди дифференциали, купайтма дифференциали, булинма дифференциали, дифференциалнинг инвариантлиги, юкори тартибли хосилалар, юкори тартибли дифференциаллар, параметрик функция хосиласи.

Маъруза режаси:

1. Функция дифференциали.
2. Дифференциалнинг такрибий хисобдаги татбиги.
3. Дифференциалнинг геометрик маъноси.
4. Дифференциаллаш коидалари.
5. Юкори тартибли хосилалар.
6. Юкори тартибли дифференциаллар.
7. Параметрик функция хосиласи.

Адабиётлар:

[1] III боб, §12-15, § 17-18 [2] III боб, §22-23

Берилган $y=f(x)$ функцияда x аргумент орттирмаси Δx булганда функция орттирмаси $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ каби аникланишини эслатиб утамиз.

ТАЪРИФ: Агарда $\Delta x\to 0$ булганда функция орттирмасини

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x \qquad (1)$$

куринишда ифодалаб булса, унда $A\cdot\Delta x$ ифода шу функциянинг ***дифференциали*** дейилади ва df каби белгиланади. Бунда A Δx га боглик эмас, $\alpha(\Delta x)$ эса чексиз кичик микдордир.

Демак, функция дифференциали унинг орттирмасини Δx га нисбатан чизикли кисмини ифодалайди.

Таъриф буйича, яъни (1) тенглик оркали функция дифференциалини топиш анча мураккаб масаладир. Шу сабабли уни осонрок усулда топиш масаласи пайдо булади. Бу масала куйидаги теоремада уз ечимини топади.

ТЕОРЕМА: Агар $y=f(x)$ функция бирор $(a,в)$ ораликда дифференциалланувчи, яъни $f'(x)$ хосилага эга булса, унинг дифференциали

$$df = f'(x)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

формула билан топилиши мумкин.

Исбот: Хосила таърифи ва лимитнинг мавжудлиги хакидаги леммага (28-маърузага каранг) асосан куйидаги тенгликларни ёзиш мумкин:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Охирги тенгликни (1) билан солиштириб ва дифференциал таърифидан фойдаланиб, (2) формулага эга буламиз. Теорема исбот булди.

Энди f(x)=x хусусий холни курамиз. Бу холда df =dx булади ва (2) формулага асосан $dx=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$. Демак *x* эркли узгарувчи (аргумент) учун $\Delta x=dx$, яъни орттирма ва дифференциал тушунчалари бир нарсани ифодалайди. Шу сабабли дифференциални хисоблашнинг (2) формуласини

$$df = f'(x)dx \qquad (3)$$

куринишда ёзиш мумкин.Демак, функция дифференциалини топиш учун унинг хосиласини dx га купайтириш кифоя. Масалан, $dx^2 = (x^2)'dx=2x\,dx$,

$d\sin x=(\sin x)'dx=\cos x\,dx$ булади.

(3) формуладан хосилани $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ каби белгилаш маъноси келиб чикади.

(1) тенглик ва дифференциал таърифидан

$$\Delta f = df + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (4)$$

тенгликни ёзиш мумкин. Бу тенгликдан аргумент орттирмаси Δx кичик булганда функция орттирмаси Δf ва дифференциали df кийматлари бир-бирига якин булишини, яъни $\Delta f \approx df$ булишини курамиз.

1-Мисол. $f(x)=x^2$ функциянинг x=40 ва $\Delta x=0{,}01$ булгандаги орттирмаси ва дифференциали топилсин.

Ечиш. $df=2xdx=2\cdot 40\cdot 0{,}01=0{,}8$

$$\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 40\cdot 0{,}01+0{,}0001=0{,}8+0{,}0001=0{,}8001.$$

Бу натижалардан куриниб турибдики, Δf ва df кийматлари анчалик якин экан. Шу сабабли (4) формуладан ушбу такрибий хисоблаш формуласини келтириб чикариш мумкин:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (5)$$

(5) формула такрибий хисоблашларда кенг фойдаланилади.

2-мисол. $\sin 31°$ хисоблансин.

Ечиш. f(x)=sinx функцияни киритамиз. Унда f′(x)=cosx. ва x=30°, Δx=1° десак, у холда (5) формуладан куйидаги натижани оламиз:

$$\sin 31^0=\sin(30°+1°)\approx\sin 30°+\cos 30°\cdot 1°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{1{,}73}{2}\cdot\frac{3{,}14}{180}=0{,}52.$$

Бунда 1°=π/180 эканлигидан фойдаландик. Демак, sin31°≈0,52.

3-мисол. $\sqrt{25{,}002}$ ифода хисоблансин.

Ечиш. f(x)=$\sqrt{x}$ функцияни киритсак ва x=25, Δx=0,002 десак, у холда (5) такрибий формуладан, f'(x)=1/2$\sqrt{x}$ эканлигини хисобга олиб,

$$\sqrt{25{,}002}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 0{,}002=5+\frac{0{,}002}{10}=5{,}0002$$

такрибий кийматни оламиз.

Шундай килиб дифференциални хисоблаш функция хосиласини аргумент дифференциалига купайтириш билан якунланади. Шунинг учун хам хосила хисоблаш коидалари осонгина дифференциал хисоблаш учун кучирилади:

1. dC=0, C=const 2. dCf(x) = Cdf(x) 3. d[$f(x)$±g(x)]= d$f(x)$±dg(x)

4. d$f(x)g$ (x)= $f(x)dg$(x)+g(x) $df(x)$ 5. $d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\frac{\varphi(x)df(x)-f(x)d\varphi(x)}{[\varphi(x)]^2}$

Энди y=f(u), u=u(x), мураккаб функциянинг дифференциалини хисоблаш масаласини курамиз. Бунда ташки f(u) ва ички u(x) функциялар дифференциалланувчи деб каралади. Дифференциални хисоблашнинг (3) формуласи ва мураккаб функцияни хисоблаш коидасига асосан ушбу тенгликни ёзиш мумкин:

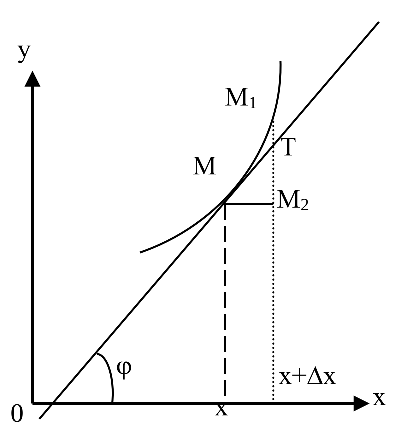
$$df(u)=(f(u))'dx=f'(u)\cdot u'dx=f'(u)\cdot du \qquad (6)$$

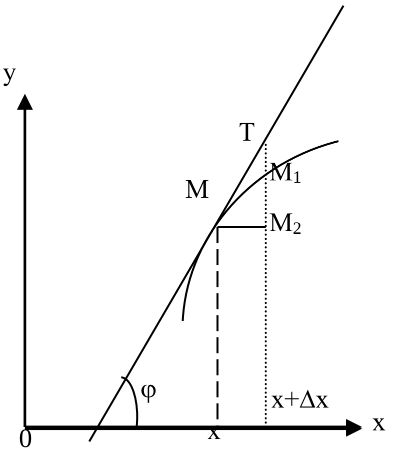
Бу ердан, (3) ва (6) формулаларни таккослаб, оддий ва мураккаб функция дифференциали бир хил усулда хисобланишини курамиз. Бу ***дифференциалнинг инвариантлик хоссаси*** дейилади. Демак, y=f(x) функцияда x урнига бирор u=u(x) функция куйиб, f(u) мураккаб функция хосил килинса, унинг дифференциали куриниши узгармай колади.

Масалан, y=cos$\sqrt{x}$ функция учун dy=-sin$\sqrt{x}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$dx =-sin$\sqrt{x}$ d($\sqrt{x}$).

Энди дифференциалнинг геометрик маъносини курамиз.

Айтайлик y=f(x) функциямиз куйидаги иккита куринишда булсин ва унинг M(x;f(x)) нуктасига утказилган уринма OX укининг мусбат йуналиши билан φ бурчак хосил килсин.





Агар x аргументга Δx орттирма берсак, у холда функция Δf орттирма олади. Чизмада $M_1(x+\Delta x;\ f(x+\Delta x))$, $M_2(x+\Delta x;\ f(x))$ нукталарни караймиз.
Графикнинг $M(x,f(x))$ нуктасига утказилган уринманинг ихтиёрий бир T нуктасини оламиз. Маълумки, $\Delta f=M_1M_2$, $\Delta x=MM_2$ булади.

Энди MTM_2 тугри бурчакли учбурчакдан ва хосиланинг геометрик маъносидан ушбу тенгликни оламиз:

$$tg\varphi=\frac{M_2T}{MM_2}\Rightarrow M_2T=tg\varphi\cdot MM_2=f'(x)\Delta x$$

Бу ердан ва дифференциал таърифидан $M_2T=df$ тенгликни оламиз. Демак, $y=f(x)$ функциянинг дифференциали x аргумент Δx га узгарганда функция графигининг $M(x;f(x))$ нуктасига утказилган уринманинг хосил килган орттирмасига тенг.

Энди функциянинг юкори тартибли хосиласи ва дифференциали тушунчаларини киритамиз.

Маълумки, $y=f(x)$ функциянинг биринчи тартибли хосиласи $f'(x)$, умуман олганда, x узгарувчининг янги функцияси булади. Шу сабабли $f'(x)$ функциянинг хосиласи тугрисида суз юритиш мумкин.

Т А Ъ Р И Ф: Агар $f'(x)$ дифференциалланувчи функция булса, унинг хосиласи $y=f(x)$ ***функциянинг II тартибли хосиласи*** дейилади ва $f''(x)$ ёки $f^{(2)}(x)$ каби белгиланади.

Демак, II тартибли хосила $f''(x)=(f'(x))'$ каби аникланади ва хисобланади. Масалан,$f(x)=x^4$ функция учун $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$.

Биринчи тартибли хосила $f'(x)$ тезликни ифодаласа, иккинчи тартибли хосила $f''(x)$ тезланишни ифодалайди.

Хосила тартиби тушунчаси киритилгач $f'(x)$ хосила I тартибли, $f(x)$ функциянинг узи эса 0 – тартибли хосила, яъни $f(x)=f^{(0)}(x)$ деб каралади.

Худди шундай тарзда учинчи тартибли $f'''(x)$, туртинчи тартибли $f^{(IV)}(x)$ ва хоказо n- тартибли хосилалар тушунчаси киритилади. Умуман олганда n– тартибли хосила куйидаги реккурент формула оркали топилади:

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))',\ \ n=1,2,3,\ldots \qquad (7)$$

Масалан, $f(x)=x^3$ учун $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ ва $n\geq 4$ булганда $f^{(n)}(x)=0$ булади. Баъзи функциялар учун юкори тартибли хосилалар ифодасини бирданига ёзиш мумкин. Масалан, $f(x)=a^x$ булса,$f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$,
$f(x)=\sin x$ булса, $f^{(n)}(x)=\sin(x+\pi n/2)$ булади.

$df=f'(x)dx$ ифодада биринчи купайтувчи x аргументнинг функцияси, иккинчи купайтувчи $dx=\Delta x$ эса x га боглик булмаган узгармас сон булади. Демак df дифференциал хам x узгарувчининг функцияси экан. Ундан (3) формула буйича дифференциал оламиз ва натижада хосил булган ифодани ***иккинчи тартибли дифференциал*** деб атаймиз ва d^2f каби белгилаймиз:

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=dx\,d(f'(x))=dx\,f''(x)dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2.$$

Худди шундай тарзда n – тартибли дифференциал

$$d^nf=d(d^{n-1}f)=f^{(n)}(x)(dx)^n=f^{(n)}(x)dx^n$$

каби аникланади ва хисобланади. Масалан, $f(x)=x^3$ учун $df=6x^2\,dx$, $d^2f=12xdx^2$. Юкори тартибли дифференциллардан фойдаланиб, юкори тартибли хосилаларни

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

каби ёзиш мумкин.

Т А Ъ Р И Ф: Агар x ва y узгарувчилар орасидаги богланиш учинчи бир t узгарувчи (параметр) оркали $x=\varphi(t)$ ва $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, функциялар куринишда берилган булса, x ва y орасидаги $y=f(x)$ функция ***параметрик*** куринишда берилган дейилади.

Масалан, $x=t^2$, $y=t^6$ параметрик куринишда берилган функция $y=f(x)=x^3$ функцияни ифодалайди.

Параметрик куринишда берилган функцияни хар доим хам дастлаб $y=f(x)$ куринишда ёзиб, сунгра унинг хосиласини хисоблаб булмайди. Шу сабабли параметрик куринишда берилган функциянинг хосиласини топиш масаласини курамиз. Айтайлик $y=f(x)$ функция $x=\varphi(t)$ ва $y=\psi(t)$ параметрик куринишда берилган булсин. Агар φ ва ψ функциялар кераклича дифференциалланувчи булсалар, у холда куйидаги формулалар уринли булади:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy/dt)}{dx}=\frac{d(dy/dx)/d(t)}{dx/d(t)}=\frac{d(\psi'(t)/\varphi'(t))}{\varphi'(t)}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Бу тенгликлар параметрик куринишда берилган функция хосиласини топишни ифодалайди.

<u>4- М и с о л:</u> $y=f(x)$ функция $x=2\cos t$ ва $y=3\sin t$ функциялар оркали параметрик куринишда берилган булсин. $y'(x)$ ва $y''(x)$ хосилалар топилсин.

<u>Е ч и ш:</u> Юкоридаги формулаларга асосан

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}ctgt;\qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sin^2 t}\frac{1}{(-2\sin t)^3}=-\frac{3}{16}\frac{1}{\sin^5 t}.$$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Функция дифференциали кандай таърифланади?
2. Функция дифференциали хосила оркали кандай топилади?
3. Функция орттирмаси ва дифференциали орасида кандай богланиш мавжуд?
4. Дифференциалнинг геометрик маъносини курсатинг.

5. Дифференциаллаш коидалари нималардан иборат?
6. Дифференциалнинг инвариантлик хоссаси нимадан иборат?
7. Юкори тартибли хосилалар кандай аникланади?
8. Юкори тартибли дифференциаллар кандай ифодаланади?
9. Параметрик куринишда берилган функциянинг хосиласи кандай топилади?

29 - МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯНИ ХОСИЛА ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ.

Таянч иборалар: функция монотонлигининг зарурий ва етарли шарти, функция экстремумлари, экстремумнинг зарурий шарти, критик нукта, экстремумнинг етарли шарти, экстремумни II тартибли хосила оркали текшириш.

Маъруза режаси:

1. Функциянинг монотонлик ораликлари.
2. Дифференциалланувчи функциянинг монотонлик ораликларини топиш.
3. Функция экстремумлари.
4. Экстремумнинг зарурий шарти.
5. Критик нукталар.
6. Экстремумнинг зарурий шартини I тартибли хосила оркали ифодалаш.
7. Экстремумнинг зарурий шартини II тартибли хосила оркади ифодалаш.

Адабиётлар:

[1] IV боб, §1-6 [2] V боб, §1-6

y=f(x) функция дифференциалланувчи булса, унинг жуда куп хусусиятларини $f'(x)$ хосила ёрдамида аниклаш мумкин. Шу сабабли хосила функцияни текшириш учун асосий ва кучли курол булиб хисобланади.

I. Функциянинг монотонлик ораликлари.

Т А Ъ Р И Ф 1: Агарда y=f(x) функция (а,в) ораликда аникланган ва бу ораликдаги ихтиёрий $x_1< x_2$ нукталарда $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$) шартни каноатлантирса, у шу ораликда ***усувчи (камаювчи)*** деб аталади.

Масалан, $y=x^2$ фукция $(-\infty ,0)$ ораликда камаювчи, $(0,\infty)$ ораликда эса усувчи булади.

Функциянинг усиш ва камайиш ораликлари биргаликда унинг ***монотонлик ораликлари*** дейилади.Бу ораликларни хосила оркали кандай топиш мумкинлиги ушбу теоремадан келиб чикади.

ТЕОРЕМА 1: **а)** Агарда дифференциалланувчи f(*x*) функция бирор ораликда усувчи (камаювчи) булса, унинг хосиласи бу ораликда $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) шартни каноатлантиради.

в) Агарда бирор ораликда функциянинг хосиласи $f'(x)>0$, ($f'(x)<0$) шартни каноатлантирса, у холда шу ораликда функция усувчи (камаювчи) булади.

Изох: Теореманинг **а)** ва **в)** кисмлари функция монотонлигининг зарурий ва етарли шартларини ифодалайди.

Исбот: **а)** y=f(x) функция (*а*,*в*) ораликда усувчи ва x, x +Δx нукталар шу ораликка тегишли булсин.Агарда Δx>0 булса,

$$x+\Delta x>x\Rightarrow f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) >0 \Rightarrow \Delta f/\Delta x>0$$

мунособатлар уринли булади. Худди шундай $\Delta x<0$ булганда хам $\Delta f/\Delta x>0$ булади. Бу ердан, хосила таърифи ва лимит хоссасига асосан,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

эканлиги келиб чикади.

Худди шундай усулда камаювчи $y=f(x)$ функция учун $f'(x) \leq 0$ эканлиги исботланади.

в) Функциянинг хосиласи $(a,в)$ ораликдаги хар бир x нуктада $f'(x)>0$ шартни каноатлантирсин. Бу холда, чекли орттирмалар хакидаги Лагранж теоремасига асосан, бу ораликдаги хар кандай $x_1<x_2$ нукталар учун

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(\xi),\ x_1 < \xi < x_2$$

тенглик бажарилади.Бу тенгликда $x_2-x_1>0$ ва $f'(\xi)>0$ булгани учун ундан $f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ эканлиги, яъни функция усувчи эканлиги келиб чикади.

Худди шундай усулда $f'(x)<0$ булса, функция камаювчи эканлиги исботланади.

Демак, берилган $y=f(x)$ функциянинг усиш (камайиш) ораликларини топиш учун $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) тенгсизликни ечиш керак.

Масалан, $f(x)=x+1/x$ функция учун $f'(x)=1-1/x^2>0$ тенгсизликнинг ечими $(-\infty,-1) \cup (1, \infty)$ сохадан иборат ва бу сохада берилган функция усувчи булади. $x=0$ нуктада функция аникланмаганлигини хисобга олиб, у $(-1, 0) \cup (0,1)$ сохада камаювчи эканлигини курамиз.

II. Функция экстремумлари.

<u>Т А Ъ Р И Ф 2</u>: $y=f(x)$ функция бирор x_0 нукта ва унинг атрофидаги ихтиёрий x нукталар учун аникланган булиб, $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) шартни каноатлантирса, у шу x_0 нуктада ***максимумга (минимумга)*** эришади деб аталади.

Масалан, $f(x)=\sin x$ функция $x=\pi/2$ нуктада $\sin(\pi/2)=1$ максимумга, $x=3\pi/2$ нуктада эса $\sin(3\pi/2)=-1$ минимумга эришади.

Функциянинг максимум ва минимум кийматлари биргаликда унинг ***экстремумлари*** дейилади.

ТЕОРЕМА 2 (Экстремумнинг зарурий шарти): Агарда дифференци-алланувчи $y=f(x)$ функция x_0 нуктада экстремумга эга булса, у холда унинг хосиласи бу нуктада $f'(x_0)=0$ шартни каноатлантиради.

<u>Исбот:</u> Аниклик учун функция x_0 нуктада максимумга эга булсин. Бу холда $|\Delta x|$ етарли кичик булса, $f(x_0+\Delta x) \leq f(x_0) \Rightarrow \Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \leq 0$ тенгсизлик бажарилади.Бундан $\Delta x>0$ ($\Delta x<0$) булганда, $\Delta f/\Delta x \leq 0$ ($\Delta f/\Delta x \geq 0$) эканлиги келиб чикади . Шу сабабли бир томондан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0 \quad ,$$

иккинчи томондан эса

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \, .$$

Теорема шартига $f'(x_0)$ кура хосила мавжуд булгани учун, бу иккала тенгсизликдан $f'(x_0)=0$ эканлиги келиб чикади.

Функция x_0 да минимумга эга булган хол хам худди шундай каралади.

Масалан, f(x) =sinx функция x=π/2 нуктада максимумга эга ва бу нуктада унинг хосиласи $f'(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$ тенгликни каноатлантиради.

$f(x)=|x|$ функция x=0 нуктада минимумга эга,аммо унинг хосиласи бу нуктада мавжуд эмас.

Хулоса : Узлуксиз функция экстремумга хосиласи нолга тенг ёки мавжуд булмаган нукталардагина эга булиши мумкин.

Т А Ъ Р И Ф 3: Функция хосиласи нолга тенг ёки мавжуд булмаган нукталар шу функциянинг ***критик ёки стационар нукталари*** дейилади.

Демак, функция x_0 нуктада экстремумга эга булса, x_0 нукта унинг критик нуктаси булади. Аммо бу тасдикнинг тескариси хар доим хам уринли булмайди, яъни экстремумнинг юкорида курсатилган зарурий шарти доимо хам етарли эмас.

Масалан, $y=x^3$ функция учун x=0 критик нукта булади, лекин бу нуктада функция экстремумга эга эмас.

ТЕОРЕМА 3 (Экстремумнинг етарли шарти.): Агарда x_0 критик нуктани чапдан унгга караб босиб утишда $f'(x)$ хосила уз ишорасини узгартирса (яъни x_0 критик нуктанинг бирор атрофидаги хар кандай $x_1<x_0$, $x_2>x_0$ нукталар учун $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$ шарт бажарилса), у холда x_0 критик нуктада f(x) функция экстремумга эришади. Жумладан, $f'(x_1)>0$, $f'(x_2)<0$ ($f'(x_1)<0$, $f'(x_2)>0$) булса, x_0 критик нуктада функция узининг максимумига (минимумига) эришади.

Исбот: Дастлаб $f'(x)<0$ $(x<x_0)$ ва $f'(x)>0$ $(x > x_0)$ холни курамиз. Бу холда, 1-теоремага асосан, x_0 нуктанинг чап атрофида функция камаювчи, унг атрофида эса усувчи булади. Демак, x_0 нуктада функция минимумга эришади. Худди шундай тарзда $f'(x)>0$ $(x<x_0)$ ва $f'(x)<0$ $(x>x_0)$ шартларда функция x_0 нуктада максимумга эга булиши исботланади.

Масалан, $f(x)=x^2+1$ функция хосиласи $f'(x)=2x$ булиб, $x_0=0$ критик нукта булади.Бу функция хосиласи $x<0$ булганда манфий ва $x>0$ булганда мусбат киймат кабул килади. Демак, функция $x_0=0$ критик нуктада минимумга эга ва унинг минимум киймати f(0)=1 булади.

Изох: Агарда функция хосиласи x_0 критик нуктадан утишда ишорасини узгартирмаса, бу нуктада функция экстремумга эга булмайди.

Хакикатан хам, $x<x_0$ ёки $x>x_0$ булганда $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) булсин. Бу холда x_0 нуктанинг чап атрофида хам, унг атрофида хам f(x) функция усувчи (камаювчи) булади ва шу сабабли x_0 нуктада экстремумга эга булмайди.

Масалан,$f(x)=x^3$ функциянинг хосиласи $f'(x)=3x^2$ критик $x=0$ нукта атрофида факат мусбат кийматларни кабул килади ва шу сабабли бу нуктада функция экстремумга эга эмас.

Агарда функция узининг x_0 критик нуктасида икки марта дифференциалланувчи булса, унинг экстремумини куйидаги теорема оркали аниклаш кулайрокдир.

ТЕОРЕМА 4: Агарда x_0 критик нуктада $f'(x_0)=0$ ва $f''(x_0)\neq 0$ булса, x_0 нуктада f(x) функция экстремумга эга. Жумладан, $f''(x_0)<0$ булса, $f(x_0)$ функциянинг максимуми, $f''(x_0)>0$ булса, $f(x_0)$ функциянинг минимуми булади.

Бу теоремани исботсиз кабул киламиз.

Масалан, $f(x)=x^4-4x$ функция учун $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=0$ тенгламадан $x_0=1$ критик нукта эканлигини аниклаймиз. Функциянинг II тартибли хосиласи $f''(x)=12x^2$ бу критик нуктада $f''(1)=12>0$ кийматни кабул килади. Демак, берилган функция $x_0=1$ критик нуктада минимумга эга ва бу минимум $f(1)=1-4=-3$ булади.

Изох: Агарда x_0 критик нуктада иккинчи тартибли хосила $f''(x_0)=0$ булса, унда функциянинг x_0 нуктада экстремумга эга булиши ёки булмаслиги, биринчи тартибли хосила оркали, 3-теорема ёрдамида аникланади.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Функциянинг усиш (камайиш) ораликлари деб нимага айтилади?
2. Функциянинг монотонлик ораликлари кандай аникланади?
3. Дифференциалланувчи функцияларнинг монотонлик ораликлари кандай топилади?
4. Функциянинг максимуми (минимуми) деб нимага айтилади?
5. Функциянинг экстремумлари кандай таърифланади?
6. Экстремумнинг зарурий шарти нимадан иборат?
7. Экстремумнинг зарурий шарти етарли буладими? Мисол келтиринг.
8. Критик нукта деб нимага айтилади?
9. Экстремумнинг етарли шарти I тартибли хосила оркали кандай ифодаланади?
10. Экстремумнинг етарли шарти II тартибли хосила оркали кандай ифодаланади?

30 - МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯНИ ХОСИЛА ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ (ДАВОМИ).

Таянч иборалар: функция графигининг кавариклиги ва ботиклиги, кавариклик ва ботикликнинг зарурий ва етарли шарти, бурилиш нуктаси ва уни топиш, функция асимптоталари, функцияни тулик текшириш. боскичлари

Маъруза режаси:

1. Функциянинг ботиклик ва кавариклик сохалари.
2. Функциянинг ботиклик ва кавариклик сохаларини топиш.
3. Функциянинг бурилиш нукталари ва уларни топиш.
4. Функция асимптоталари ва уларни топиш.
5. Функцияни тулик текшириш.

Адабиётлар:

[1] IV боб, §7-9 [2] V боб, §9-11

Олдинги маърузада хосила ёрдамида функцияни монотонлик ораликлари ва экстремумларини топиш масаласини курган эдик.Бу тушунчалар куйидаги геометрик маънога эга.Функциянинг усиш сохасида унинг аргументи x чапдан унгга караб узгарганда, функция графиги пастдан юкорига караб усиб боради. Камайиш сохасида эса аксинча, яъни функция графиги юкоридан пастга караб камайиб боради. Функциянинг экстремумлари унинг графигида юкори ёки пастки учларни ифодалайди.

Бу маърузада функцияни хосила ёрдамида урганишни давом эттирамиз.

III Функция графигининг кавариклик ва ботиклик сохалари.

Т А Ъ Р И Ф 4: $y= f(x)$ функция графиги (а,в) ораликда ***каварик (ботик)*** дейилади, агарда у узининг хар кандай $M (x, f(x))$, нуктасига утказилган уринмасидан пастда (юкорида)жойлашган булса.

Масалан, $y=\sin x$ функциянинг графиги $(0,\pi)$ ораликда каварик, $(\pi,2\pi)$ ораликда эса ботик булади.

ТЕОРЕМА 5: Агарда $f(x)$ функция (а,в) ораликнинг хар бир нуктасида икки марта дифференциалланувчи ва ихтиёрий $x\in$(а,в) нуктада $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ шарт бажарилса, функция графиги бу ораликда ботик (каварик) булади.

Бу теореманинг исботини адабиётлар руйхатида курсатилган дарсликлардан куриш мумкин.

Мисол: $f(x)=x^3$ функция учун $f''(x)=6x>0$ тенгсизлик ечими $(0,\infty)$ сохадан иборат булади ва бу сохада унинг графиги ботик булади.Худди шундай f

$''(x)=6x<0$ тенгсизлик ечими булмиш $(-\infty;0)$ сохада функция графиги каварик булади.

Т А Ъ Р И Ф 5: Функция графиги бирор $M(x_0, f(x_0))$ нуктадан утаётганда ботиклигини каварикликка ёки аксинча кавариклигини ботикликка узгартирса, бу нукта унинг ***бурилиш (эгар) нуктаси*** дейилади.

Масалан, куриб утилган $f(x)=x^3$ функция учун координаталар боши $O(0,0)$ бурилиш нуктаси булади.

ТЕОРЕМА 6: Агарда бирор x_0 нуктада иккинчи тартибли хосила $f''(x_0)=0$ булиб, бу нуктадан утишда $f''(x)$ уз ишорасини узгартирса, $M(x_0, f(x_0))$ нукта функция графигининг бурилиш нуктаси булади.

Исбот: $f''(x)<0$, $x<x_0$ ва $f''(x)>0$, $x>x_0$ холни курамиз. Олдинги теоремага асосан, x_0 нуктанинг чап томонида функция графиги каварик, унг томонида эса ботик булади. Демак, $M(x_0, f(x_0))$ нукта атрофида функция графиги ботикликни каварикликка узгартиради, яъни бу нукта графикнинг бурилиш нуктаси булади.

Мисол сифатида $f(x)=x^3-3x^2$ функция графигининг бурилиш нуктасини топамиз. Бу ерда $f''(x)=6x-6=0$ тенгламадан $x_0=1$ натижани оламиз.Бу ерда $x<1$ булганда $f''(x)<0$ (график каварик) ва $x>1$булганда $f''(x)>0$ (график ботик) булгани учун $M(1,-2)$ функция графигининг бурилиш нуктаси булади.

IV.Функция графигиниг асимптоталари.

ТА Ъ Р И Ф 6 : $y= kx+b$ тенглама билан берилган тугри чизик $f(x)$ функция графигининг ***огма асимптотаси*** дейилади, агарда

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$$

шарт бажарилса.

Т А Ъ Р И Ф 7: $x=a$ тенгламали вертикал тугри чизик $y= f(x)$ функция графигининг вертикал асимптотаси дейилади, агарда x аргумент a нуктага якинлашиб борганда ,функциянинг чап ва унг

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

лимитларидан камида биттаси чексиз булса.

Одатда вертикал асимптоталар функциянинг аникланиш сохаси буйича унинг узилиш нукталари оркали топилади. Масалан, $f(x) =1/(x^3-1)$ функция графиги учун $x=1$ тугри чизик вертикал асимптота булади.

Функциянинг огма асимптоталарининг мавжудлиги ва уларнинг тенгламаси куйидаги теорема буйича аникланади.

ТЕОРЕМА 7: $y=f(x)$ функция графиги огма асимптотага эга булиши учун

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

лимитлар мавжуд хамда чекли булиши зарур ва етарлидир.Бу холда огма асимптота $y= kx+b$ тенглама билан топилади.

<u>Исбот:</u> Зарурийлик шарти. Берилган шартларни зарурийлигини курсатамиз. y= kx+b тугри чизик огма асимптота булсин. Унда 6-таъриф ва лимит хоссаларига асосан куйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$$

Бу ердан, энг сунгги лимит киймати нол булгани учун,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

эканлиги келиб чикади. Огма асимптота таърифидан яна бир марта фойдаланиб,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

натижани оламиз.

Етарлилик шарти. Теорема шартидаги иккинчи лимитга асосан

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$$

тенгликни ёза оламиз. Бу ердан, 6-таърифга асосан, y=kx+b тугри чизик функциянинг графиги учун огма асимптота булиши келиб чикади.

Масалан, $f(x)=(2x^2+3x-5)/x$ функция учун

$$k=\lim_{x\to\infty}f(x)/x=2,\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=3$$

эканлигини топамиз. Демак, бу функциянинг графиги учун y=2x-3 тугри чизик огма асимптота булади.

Юкорида олинган натижалар буйича y=f(x) функция хусусиятларини куйидаги тартибда тулик тадкикот килиш мумкин:

1. Функциянинг D{f} аникланиш сохасини топамиз;

2. Функцияни жуфт ёки токликка текширамиз;

3. Функцияни даврийликка текширамиз, даврий булса, унинг даврини аниклаймиз;

4. Функциянинг узилиш нукталарини топамиз ва уларнинг турини аниклаймиз;

5. f(*x*) =0 тенгламадан функция нолларини топамиз ва улар оркали функция уз ишорасини саклайдиган ораликларни ва OX уки билан кесишиш нукталарини аниклаймиз;

6. $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$ тенгсизликларни ечиб, функциянинг усиш ва камайиш, яъни монотонлик сохаларини аниклаймиз;

7. $f''(x)=0$ ёки $f''(x)=\pm\infty$ шартлардан критик нукталарни топамиз ва бу нукталарда функцияни I ёки II тартибли хосила ёрдамида экстремумга текширамиз.

8. $f''(x)>0$ ва $f''(x)<0$ тенгсизликларни ечиб, функция графигининг ботиклик ва кавариклик сохаларини топамиз;

9. $f''(x)=0$ ёки $f''(x)=\pm\infty$ шартларни каноатлантирувчи нукталарни топиб, уларнинг орасидан функция графигининг бурилиш нукталарини аниклаймиз;

10. Функция графигининг асимптоталарини, агарда улар мавжуд булса, топамиз.

11. 1-10 кадамларда олинган натижалар асосида функция графигини чизамиз.

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Функциянинг ботиклик (кавариклик) сохалари кандай таърифланади?
2. Дифференциалланувчи функциянинг ботиклик (кавариклик) сохалари кандай топилади?
3. Функциянинг бурилиш нуктаси нима?
4. Дифференциалланувчи функциянинг бурилиш нукталари кандай топилади?
5. Функция графигининг огма асимптоталари кандай таърифланади?
6. Функция графигининг вертикал асимптоталари кандай таърифланади?
7. Вертикал асимптоталар кандай топилади?
8. Огма асимптоталар мавжудлиганинг зарурий ва етарли шарти нимадан иборат?
9. Функцияни тулик текшириш боскичларини курсатинг.

31 - МАЪРУЗА

АНИКМАСЛИКЛАР ВА УЛАРНИ ЛОПИТАЛ КОИДАЛАРИ ЁРДА-МИДА ОЧИШ.

Таянч иборалар: 0/0, ∞/∞ куринишдаги аникмасликлар, аникмасликларни очиш, Лопиталнинг биринчи коидаси, Лопиталнинг иккинчи коидаси, Лопитал коидаларнинг тадбиклари, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}, $\infty - \infty$ куринишдаги аникмасликлар ва уларни очиш.

Маъруза режаси:

1. 0/0 , ∞/∞ куринишдаги аникмасликлар ва уларни очиш.
2. Лопиталнинг I коидаси.
3. Лопиталнинг II коидаси.
4. Лопитал коидалари ёрдамида ажойиб лимитларни исботлаш.
5. Бошка куринишдаги аникмасликлар ва уларни очиш.

Адабиётлар:

[1] III боб, §20 [2] IV боб, §4-5

Т А Ъ Р И Ф 1: Агар f (x) ва g (x) функциялар $x\to a$ да чексиз кичик микдорлар булса, яъни

$$\lim_{x\to a} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

муносабатлар уринли булса, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функция х$\to a$ да $\dfrac{0}{0}$ ***куринишдаги аник-маслик*** дейилади.

Масалан, $\dfrac{\sin x}{x}$ функция $x\to 0$ да, $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ функция х$\to$1 да, $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ функция эса $x\to\infty$ да $\dfrac{0}{0}$ куринишдаги аникмасликлардан иборат.

Т А Ъ Р И Ф 2: Агар f (x) ва g (x) функциялар $x\to$а да чексиз катта мик-дорлар булса, яъни

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$$

муносабатлар уринли булса, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функция $x\to a$ да $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***куринишдаги аникмаслик*** дейилади.

Масалан, $\dfrac{\ln|\ \sin x\ |}{\ln|x|}$ функция $x\to 0$ да, $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ функция $x\to\infty$ да $\dfrac{\infty}{\infty}$ куринишдаги аникмасликдир.

Т А Ъ Р И Ф 3 : $\dfrac{0}{0}$ ёки $\dfrac{\infty}{\infty}$ куринишдаги $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ аникмасликнинг $x\to a$ даги лимитини топиш шу ***аникмасликни очиш*** деб аталади.

Шуни таъкидлаб утиш керакки, аникмасликни очиш , яъни $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ лимитни хисоблаш учун булинманинг лимити формуласидан фойдаланиб булмайди, чунки ёки $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (махраж нолга тенг)ёки сурат ва махраж лимитлари чекли эмас.

Лимитлар мавзуси буйича мисоллар ечганимизда аникмасликларни очиш масаласи билан шугулланган эдик. Аммо унда хар бир аникмасликни очиш учун купайтувчиларга ажратиш,кушмасига купайтириш, энг катта даражасига булиш, ажойиб лимитларга келтириш каби сунъий усуллардан фойдаланилган эди. Шундай килиб, хар бир аникмасликни очиш учун узига хос хусусий усулдан фойдаланган эдик. Энди аникмасликларни очишнинг умумий коидасини куриб чикамиз. Бу коидани француз математиги Франсуа Лопитал (1661-1704й.) узининг 1696 йилда босмадан чиккан «Чексиз кичик микдорлар тахлили» деган китобида биринчи марта келтирган ва шунинг учун у Лопитал коидаси номи билан тарихга кирган.Аслида бу коидани Лопиталнинг устози ва дусти, швейцариялик математик Иоганн Бернулли (1667-1748) топган.И. Бернулли Парижга келган пайтида бой оиладан чиккан ва математика билан кизикувчи Лопитал билан танишади. Лопиталнинг илтимосига кура у уша пайтларда Лейбниц ва Ньютон томонидан янги яратилган дифференциал хисоб буйича Лопиталга маърузалар укийди. Лопиталнинг хизмати шундан иборатки, у бу маърузалар асосида дифференциал хисоб буйича юкорида курсатилган биринчи дарсликни ёзди.

Т Е О Р Е М А 1 : f (x) ва g (x) функциялар a нукта атрофида аникланган ва дифференцилланувчи булиб, $g'(x)\neq 0$ ва

$$\lim_{x\to a} f(x)=0\ ,\qquad \lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad (1)$$

тенгликлар бажарилсин. Бу холда, агарда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ мавжуд булса, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ хам мавжуд булади ва ушбу тенглик уринли булади:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2).$$

<u>И с б о т :</u> Аввал $a<\infty$ холни курамиз. Теорема шартига кура a нукта атрофида f (x) ва g (x) функциялар дифференциалланувчи булгани учун, улар бу ерда узлуксиз буладилар ва шунинг учун хам, (1) шартга кура,

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=0, \qquad g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad (3)$$

тенгликлар уринли булади. a нукта атрофидаги ихтиёрий (a,x) ораликни караймиз. Теорема шартларига асосан бу ораликда f(x) ва g(x) функциялар узлуксиз, дифференциалланувчи ва $g'(x)\neq 0$, яъни улар Коши теоремаси шартларига буйсунади. Шунинг учун, Коши теоремасига асосан , шундай $c\in(a, x)$ нукта мавжудки,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

Бу ерда (3) тенгликлардан хам фойдаланилди. (4) тенгликда $x\to a$ да лимит оламиз ва бунда $c\to a$ булишидан,чунки $c\in(a, x)$, фойдаланиб,ушбу натижаларни оламиз:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (5)$$

Лимитнинг киймати ундаги узгарувчи микдорни кандай белгиланишига боглик эмас ва шунинг учун (5) тенгликни куйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (6)$$

(5) ва (6) тенгликлардан исботланиши керак булган

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (7)$$

натижани оламиз.

Энди a=∞ холни курамиз, яъни $x\to\infty$. Бу холда $z=\frac{1}{x}$ янги узгарувчини киритсак, унда $x\to\infty$ булганда $z\to 0$ булади.Бу ерда $x=\frac{1}{z}$ булгани учун ва (7) тенгликка асосан

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f(\frac{1}{z})\right]'}{\left[g(\frac{1}{z})\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}{g'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

натижани оламиз.Теорема тулик исбот булди.

Т Е О Р Е М А 2 : f (x) ва g (x) функциялар 1 – теорема шартларини каноатлантирсин, аммо

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \qquad (8)$$

муносабат уринли булсин. Бу холда хам (2) тенглик уз кучини саклаб колади.

Бу теорема исботини дарсликлардан куриб чикиш мумкин.

Куриб утилган теоремалардаги (2) тенглик билан ифодаланадиган тасдиклар мос равишда ***Лопиталнинг I ва II коидалари*** деб аталади.

Шундай килиб $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ куринишдаги $\frac{f(x)}{g(x)}$ аникмасликни Лопитал коидаси ёрдамида очиш учун f(x) сурат ва g (x) махраждан алохида-алохида хосила олиб, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ хосилалар нисбатининг лимитини топиш керак.

Лопитал коидасининг тадбиклари сифатида олдин куриб утилган ва математикада ажойиб лимитлар деб аталувчи бир нечта лимитни хисоблаймиз.

1. f (x) =sinx, g (x) = x функциялар x→0 да чексиз кичик микдорлар булади ва шунинг учун $\frac{\sin x}{x}$ ифода x→ 0 да $\frac{0}{0}$ куринишдаги аникмаслик булади . Лопиталнинг I коидасига асосан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Бу натижа 1 ажойиб лимитни ифодалайди.

2. f (x) =ln (1+x) , g (x)=x функциялар учун f (0) =ln1=0 , g (0)=0. Демак, x→0 булганда $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln(1+x)}{x}$ ифода $\frac{0}{0}$ куринишдаги аникмасликдан иборат.

Бу аникмасликни очиш учун Лопиталнинг I коидасига мурожаат киламиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Бу лимит математикада III ажойиб лимит деб аталади.

Худди шундай равишда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$$

эканлигини курсатиш мумкин.

3. f (x) =e ^{x} –1 , g (x)=x дифференциалланувчи функциялар учун f(0)=0, g(0)=0 булади. Унда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=1.$$

Бу натижа IV ажойиб лимит дейилади.

Талабаларга мустакил иш сифатида

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

эканлигини курсатиш тавсия этилади.

4. f (x) =(1+x)$^{\alpha}$ –1 (α -∀ хакикий сон) ва g (x)=x функциялар x=0 нукта атрофида дифференциалланувчи ва f(0)=0, g(0)=0. Бу холда

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^\alpha-1]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha\cdot(1+0)^{\alpha-1}=\alpha\,.$$

Бу натижа V ажойиб лимит дейилади.

Изохлар: **1.** Агарда (2) формулада $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ифода x→a булганда яна 0/0 ёки ∞ / ∞ куринишдаги аникмасликдан иборат булиб, $f'(x)$ ва $g'(x)$ хосилалар 1-теорема ёки 2-теорема шартларини каноатлантирсин.Бу холда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ мавжуд булса, куйидаги тенглик уринли булади:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} \qquad (9)$$

Шундай килиб, аникмасликни очиш учун Лопитал коидасини бир неча марта кетма-кет куллаш мумкин. Бунинг учун хар гал теорема шартларини текшириб куриш керак.

Мисол сифатида куйидаги лимитни хисоблаймиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{1}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ мавжуд булса, унда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ мавжуд. Аммо тескари тасдик доимо хам уринли булавермайди, яъни $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ мавжуд булиб, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ мавжуд булмаслиги мумкин.

<u>М и с о л :</u> f(x)=x+sinx, g(x)=x, x→∞. Бу холда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1$$

Аммо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)=1+\lim_{x\to\infty}cosx$$

булгани учун бу лимит мавжуд эмас.

Шартли равишда $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ каби белгиланган аникмасликлардан ташкари шартли равишда $\infty\cdot 0$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ каби белгиланадиган аникмасликлар хам мавжуд.

Т А Ъ Р И Ф 4 : Агарда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ булса, f(x) ·g(x) ифода x→a булганда ***0·∞ куринишдаги аникмаслик*** дейилади.

Бу аникмасликни очиш учун уни f(x) ·g(x)=$\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ куринишда ёзиб, $\dfrac{0}{0}$ аникмасликка ёки f(x)·g(x)=$\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ куринишда ёзиб, $\dfrac{\infty}{\infty}$ аникмасликка келтирилади ва сунгра Лопитал коидаси кулланилади.

<u>М и с о л:</u>

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

Т А Ъ Р И Ф 5 : Агарда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ булса, $[f(x)]^{g(x)}$ ифода x→a булганда ***1^{∞} куринишдаги аникмаслик*** дейилади.

Бу аникмасликни очиш учун $y=[f(x)]^{g(x)}$ деб белгилаймиз. Бу тенгликни иккала томонидан логарифм оламиз:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x}=g(x)\ln f(x)=[\ln f(x)]g(x) \;,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln[\lim_{x\to a} f(x)]=\ln 1=0 \;.$$

Демак , [lnf(x)]g(x) ифода 0·∞ куринишидаги аникмаслик ва уни Лопитал коидаси ёрдамида очиш мумкин. Фараз киламиз

$$\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\{[\ln f(x)]g(x)\}=b$$

булсин.Бу ердан келиб чикадики,

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln[\lim_{x\to a} y]=b \Rightarrow \lim_{x\to a} y=e^b \Rightarrow \lim_{x\to a}\,[f(x)]^{g(x)}=e^b.$$

Мисол сифатида $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$, g(x)=x, x→∞ деб олиб,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{X}=e,$$

яъни иккинчи ажойиб лимитни исботлаймиз.

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{X}\Rightarrow \ln y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{X}=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Шундай килиб, бизнинг мисолда b=1 чикди. Демак

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{X}=e^{1}=e.$$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. 0/0 куринишдаги аникмаслик таърифини беринг.
2. ∞/∞ куринишдаги аникмаслик кандай таърифланади?
3. Аникмасликларни очиш деб нимага айтилади?
4. Лопиталнинг I коидаси нимадан иборат?
5. Лопиталнинг II коидаси нимадан иборат?
6. Лопитал коидаси ёрдамида I ажойиб лимит кандай исботланади?
7. Лопитал коидасига тескари тасдик уринлими?
8. 0/0 ва ∞ ⁄ ∞ аникмасликдан ташкари яна кандай аникмасликларни биласиз?
9. II ажойиб лимит Лопитал коидаси ёрдамида кандай исботланади?

32 - МАЪРУЗА

БОШЛАНГИЧ ФУНКЦИЯ. ИНТЕГРАЛЛАР ЖАДВАЛИ.

Таянч иборалар: Бошлангич функция, аникмас интеграл, интеграл остидаги ифода, интеграллар жадвали.

Маъруза режаси:

1. Бошлангич функция ва унинг хоссалари.
2. Аникмас интеграл ва унинг хоссалари.
3. Интеграллар жадвали.

Адабиётлар:

[**1**]. III боб, §1-3 [**2**]. IX боб, §1

а) Бошлангич функция ва унинг хоссалари.

ТАЪРИФ: Бирор ораликда аникланган $f(x)$ функция учун бу ораликнинг хамма кийматларида

$$F'(x)=f(x)$$

тенглик уринли булса, у холда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг ***бошлангич функцияси*** дейилади.

М и с о л : 1) $F(x)=\dfrac{a^x}{ln\, a}$, ($a \neq 1, a>0$) бутун сонлар укида $f(x)=a^x$ функциянинг бошлангич функцияси булади, чунки x нинг исталган кийматида

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{ln\, a}\right)'=a^x=f(x)$$

тенглик тугри булади.

2) $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ функция сонлар укининг хамма нукталарида $f(x)=x^4$ функциянинг бошлангич функцияси булади, чунки x нинг исталган кийматида унинг хосиласига нисбатан

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=x^4=f(x)$$

тенглик уринли булади.

Берилган функциянинг бошлангич функциясини топиш масаласи бир кийматли хал килинмайди. Хакикатан хам, агар $F(x)$функция $f(x)$ нинг бошлангич функцияси булса,у холда $F(x)+C$ функция хам (бунда C ихтиёрий узгармас сон) $f(x)$ нинг бошлангич функцияси булади, чунки C нинг исталган киймати учун $(F(x)+C)'=f(x)$ булади.

М и с о л : F(x)= $\frac{a^x}{ln\,a}$ функция $f(x)=a^x$ функциянинг бошлангич функцияси юкорида курилди.

$$(F(x)+C)' = \left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)' = a^x = f(x)$$

тенгликдан эса $\frac{a^x}{\ln a}+C$ функция хам a^x функциянинг бошлангич функцияси эканлиги келиб чикади.

Юкоридаги мулохазалардан бошлангич функцияларнинг куйидаги хоссаси келиб чикади.

ЛЕММА: Агар F(x) ва Ф(x) функция $f(x)$ функциянинг бошлангич функциялари булса, у холда Ф(x) = F(x)+C тенглик уринли булади, бунда C ихтиёрий узгармас сон.

И с б о т : F(x) ва Ф(x) функция $f(x)$ нинг бошлангич функциялар булгани учун

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ва} \quad \Phi'(x) = f(x)$$

тенглик тугри булади.

Ёрдамчи Q(x) функцияни киритамиз :

$$\Phi(x) - F(x) = Q(x).$$

Унинг хосиласи x нинг хамма кийматларида нолга тенг, хакикатан хам

$$Q'(x) = [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Энди $Q'(x)=0$ тенгликдан Q(x) функциянинг узгармас сон экани келиб чикишини курсатамиз. Фараз килайлик, x_0 аргументнинг тайинланган киймати, x эса унинг истаган киймати булсин. $[x_0, x]$ ораликда Лагранж формуласини тузамиз:

$$Q(x) - Q(x_0) = Q'(\xi)(x - x_0)\ ,$$

бунда $x_0<\xi<x$ булади.

Бу ердан $Q'(x)=0$ тенглик x нинг хамма кийматида, шу жумладан ξ да хам $Q'(\xi)=0$ булгани учун $Q(x) - Q(x_0)=0$ яъни $Q(x)=Q(x_0)$ ни хосил киламиз. Бу холда Q(x) функциянинг киймати x нинг хамма кийматида бир хил булишини билдиради. Шундай килиб, Q(x)=C ёки

$$\Phi(x) - F(x) = C$$

тенглик уринли булади. Лемма исботланди.

Исботланган леммадан, берилган функциянинг иккита бошлангич функцияси бир-биридан факат узгармас сонга фарк килиши келиб чикади.

б) Аникмас интеграл ва унинг хоссалари.

ТАЪРИФ: Агар F(x) функция бирор ораликда $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси булса, у холда F(x)+C (бунда C ихтиёрий доимий) функциялар туплами шу кесмада $f(x)$ функциянинг ***аникмас интеграли*** дейилади ва

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

каби белгиланади. Бу ерда $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ интеграл остидаги ифода, x интеграллаш узгарувчиси дейилади.

Аникмас интегрални топиш жараёни интеграллаш дейилади. Кесмада узлуксиз булган исталган функция шу ораликда бошлангич функцияга эга, демак, аникмас интегралга хам эга эканини исботсиз айтиб утамиз.

М и с о л : 1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 2) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Аникмас интеграл куйидаги хоссаларга эга :

I. Аникмас интегралнинг хосиласи интеграл остидаги функцияга тенг,яъни

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Исбот: $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

II. Аникмас интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг,яъни

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

III. Бирор функциянинг хосиласидан олинган аникмас интеграл шу функция билан ихтиёрий узгармаснинг йигиндисига тенг,яъни

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

IV. Бирор функциянинг дифференциалидан олинган аникмас интеграл шу функция билан узгармас йигиндисига тенг,яъни

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

V. Узгармас k купайтувчини интеграл белгиси ташкарисига чикариш мумкин,яъни

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

VI. Чекли сондаги функцияларнинг алгебраик йигиндисидан олинган аникмас интеграл шу функцияларнинг хар биридан олинган аникмас интегралларнинг алгебраик йигиндисига тенг,яъни

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

в) Асосий интеграллар жадвали.

1. $\int dx = x + c$ 2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

7. $\int e^x dx = e^x + c$

8. $\int sin\, xdx = -cos\, x + c$

9. $\int cos\, xdx = sin\, x + c$

10. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$

11. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c$

14. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + c$

15. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + c$

16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1.Берилган функцияларнинг бошлангич функцияси деб нимага айтилади?
2.Бошлангич функция кандай хоссаларга эга?
3.Берилган функциянинг аникмас интеграли деб нимага айтилади?
4.Аникмас интегралнинг энг оддий хоссаларини келтиринг.
5. Интеграллар жадвалини ёзинг.

33- МАЪРУЗА

ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ.

Таянч иборалар: Бевосита интеграллаш, дифференциал остига киритиш, узгарувчиларни алмаштириш, булаклаб интеграллаш.

Маъруза режаси:

1. Интеграллашнинг энг оддий усуллари.
2. Аникмас интегралда узгарувчини алмаштириш.
3. Булаклаб интеграллаш усули.

Адабиётлар:

[**1**]. VI боб, §4-6 [**2**]. IX боб, §2,4

а) ***Бевосита интеграллаш усули*** деб V ва VI хоссаларни куллаш ва асосий интеграллар жадвалидан фойдаланиб интеграллашга айтилади.

М и с о л : Интегрални топинг:

$$\int \frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx$$

Ечими: Суратни махражга булиб, кейин V ва VI хоссаларни куллаб, интеграл остидаги функцияни алмаштирамиз ва интеграллар жадвалидан фойдаланамиз:

$$\int \frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{7}{x}-5+\frac{1}{x^2}\right)dx=7\int\frac{dx}{x}-5\int dx+\int\frac{dx}{x^2}=7\ln|x|-5x-\frac{1}{x}+c.$$

б) ***Дифференциал белгиси остига киритиш усули*** аникмас интегралнинг ушбу инвариантлик хоссасига асосланган:

$$\int f(x)dx=F(x)+c \Rightarrow \int f(u)du=F(u)+c.$$

Бу ерда $u=u(x)$ ихтиёрий дифференциалланувчи функцияни ифодалайди.

М и с о л : $1)\int (x+4)^5dx=\int (x+4)^5d(x+4)=\frac{(x+4)^6}{6}+c.$

Бу ерда $dx=d(x+4)$лигидан фойдаландик.

$$2)\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{2}{2}\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

Бу ерда олдин интегрални 2 сонга купайтирдик ва айни шу пайтда уни 2 сонга булдик. Ундан кейин $2xdx=dx^2=d(1+x^2)$ эканлигидан фойдаландик .

$$3)\int\frac{dx}{4x-11}=\frac{4}{4}\int\frac{dx}{4x-11}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x-11)}{4x-11}=\ln|4x-11|+c.$$

в) ***Аникмас интегралда узгарувчиларни алмаштириш усули.***

Интеграллар жадвалига кирмаган интегрални хисоблаш керак булсин. x ни t эркли узгарувчининг бирор дифференциалланувчи функцияси оркали ифодалаб, интеграллашнинг янги t узгарувчисини киритамиз: $x=\varphi(t)$,бунга тескари $t=\psi(x)$ функция мавжуд булсин, у холда

$$dx=\varphi'(t)dt$$

булиб

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

эканини исботлаймиз. Тенгликнинг хар иккала томонининг хосилалари тенг эканлиги курсатилса, теорема исботланган булади.

F(x) функция $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси булсин, у холда

$$\left(\int f(x)dx\right)'=F(x)\ ,$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot\frac{dx}{dt}=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=$$

$$=f(\varphi(t))=f(x).$$

Теорема исботланди.

М и с о л : 1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ интегрални топинг.

Ечими: $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=\begin{bmatrix}\sqrt{x+4}=t,x+4=t^2\\ x=t^2-4\\ dx=2tdt\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t}=2\int\frac{dt}{t^2-2^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$$

М и с о л : 2) $\int\sqrt{1-x^2}dx$ интегрални топинг.

Ечими: $$\int\sqrt{1-x^2dx}=\begin{bmatrix}x=\cos tdx=-\sin tdt\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t\end{bmatrix}=$$

$$=-\int\sin^2 tdt=-\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int\cos 2tdt-\frac{1}{2}\int dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int cos2td2t-\frac{1}{2}t=\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}t+c=\frac{1}{4}\sin 2\arccos x-\frac{1}{2}\arccos x+c=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\arccos x\cdot\cos\arccos x-\frac{1}{2}\arccos x+c=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}-\frac{1}{2}\arccos x+c$$

г) Булаклаб интеграллаш усули.

Фараз килайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар x нинг дифференциалланувчи функциялари булсин. Бу функциялар купайтмасининг дифференциалини топамиз:

$$d(u\cdot v)=vdu+udv\ .$$

Бундан

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Охирги тенгликнинг иккала кисмини интеграллаб, куйидагини хосил киламиз:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

ёки

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Бу формула булаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Одатда, $\int x^n \cos x dx, \int x^n \sin x dx, \int \sqrt{a - x^2}\, dx, \int x^n a^x dx, \int x^n \ln x dx$ ва шуларга ухшаш интеграллар булаклаб интеграллаш формуласи оркали хисобланади.

М и с о л : 1) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$ интегрални топинг.

Ечими: $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1 - x^2} = u, dx = dv \\ \dfrac{-xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = du, x = v \end{array} \right] =$

$$= x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x\sqrt{1 - x^2} - \int \frac{1 - x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\, dx - \arccos x + C$$

Куйидаги тенглик хосил булди:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = x\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\, dx - \arccos x + C$$

Демак,

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x \cdot \sqrt{1 - x^2}}{2} - \frac{arc\cos x}{2} + C.$$

М и с о л :2) $\int x \cdot 5^x dx$ интегрални топинг.

Ечими:

$$\int x \cdot 5^x dx = \left[\begin{array}{l} x = u, 5^x dx = dv \\ dx = du, \dfrac{5^x}{ln 5} = v \end{array} \right] = \frac{x \cdot 5^x}{ln 5} - \frac{1}{ln 5} \int 5^x dx = \frac{x \cdot 5^x}{ln 5} - \frac{1}{ln^2 5} \cdot 5^x + C.$$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1.Бевосита интеграллаш усули таърифини келтиринг.
2.Дифференциал остига киритиш усули нимадан иборат?
3.Булаклаб интеграллаш формуласини чикаринг.
4.Аникмас интегралда узгарувчиларни алмаштириш усули нимадан иборат?

34 - МАЪРУЗА

КВАДРАТИК УЧХАД КАТНАШГАН БАЪЗИ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ. ЭНГ СОДДА РАЦИОНАЛ КАСРЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ.

Таянч иборалар: квадратик учхад, энг содда рационал каср, рекуррент формула.

Маъруза режаси:

1. Квадратик учхад.
2. Энг содда рационал касрларни интеграллаш.
3. Рационал каср.
4. Реккурент формула.

Адабиётлар:

[**1**]. VI боб, §8-9 [**2**]. IX боб, §3,5

а) Квадратик учхад катнашган баъзи функцияларни интеграллаш.
Ушбу интегралларни караймиз:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}, \qquad \bar{I}_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Аввал махраждан квадрат учхадни йигинди ёки айирма куринишига келтирамиз:

$$ax^2+вx+c=a\left[x^2+\frac{в}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{в}{2a}x+\left(\frac{в}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{в}{2a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left[(x+\frac{в}{2a})^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{в^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[(x+\frac{в}{2a})^2\pm\kappa^2\right]$$

бу ерда

$$\frac{c}{a}-\frac{в^2}{4a^2}=\pm\kappa^2$$

белги киритилди.
Шундай килиб,

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+вx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{в}{2a})^2\pm\kappa^2}=\left[\begin{array}{l}x+\frac{в}{2a}=t,\\ dx=dt\end{array}\right]=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm\kappa^2}$$

Бу эса жадвалдаги интегралдир.
Шу каби,

$$\overline{I_1}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{в}{2a})^2+к^2}}=\begin{bmatrix}x+\frac{в}{2a}=t\\ dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm к^2}}$$

М и с о л : Ушбу интегрални хисобланг :

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$$

Ечими:

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}=$$

$$=\begin{bmatrix}x+2=t\\ dx=dt\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{6}}+C$$

б) Умумийрок куринишдаги интегралларни караймиз:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+вx+c}dx,\ \overline{I_2}=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx$$

Интеграл остидаги функцияни бундай алмаштирамиз:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+вx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+в)+(B-\frac{Aв}{2a})}{ax^2+вx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+в)dx}{ax^2+вx+c}+(B-\frac{A}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+вx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+в)dx}{ax^2+вx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot J_1$$

$$I_2=\begin{bmatrix}ax^2+вx+c=t\\ (2ax+в)dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}+(B-\frac{A}{2a})\cdot J_1$$

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln|t|+(B-\frac{A}{2a})I_1=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+вx+c\right|+(B-\frac{A}{2a})I_1+C$$

Бу ердаги I_1 интегралнинг хисобланиши юкорида курсатилган.

Шу каби $\overline{I}_2$ интеграл хам хисобланади.

$$\overline{I}_2=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx=\int\frac{A\cdot\frac{(2ax+в)}{2a}+(B-\frac{Aв}{2a})}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+в}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx+(B-\frac{A}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+в}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx+$$

$$+(B-\frac{Aв}{2a})\,\overline{I}_1=\begin{bmatrix}ax^2+bx+c=t\\ (2ax+b)dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\overline{I}_1=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{t}+(B-\frac{Aв}{2a})\overline{I}_1=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+вx+c}+(B-\frac{Aв}{2a})\overline{I_1}+C$$

$\overline{I_1}$ интегрални ечилиши юкорида курсатилган.

М и с о л : Куйидаги интегрални хисобланг :

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$$

Ечими:
$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$
$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-\int\frac{7\cdot dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$
$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\,ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$$

в) Энг содда рационал касрларни интеграллаш.

Куйидаги рационал касрларни энг содда рационал касрлар деб айтилади:

I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)}к$, III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{(Ax+B)}{(x^2+px+q)}n$

I ва II турдаги оддий касрларни интеграллаш жадвал интегралларига осон келтирилади:

I. $$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\,ln|x-a|+C$$

II. $$\int\frac{Adx}{(x-a)^к}=A\int(x-a)^{-к}d(x-a)=$$
$$=A\frac{(x-a)^{-к+1}}{-к+1}+C=\frac{A}{(1-к)(x-a)^{к-1}}+C$$

III турдаги оддий касрнинг интегралини караймиз: $\frac{p^2}{4}-q<0$ булсин, унда

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx=$$
$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$
$$=\begin{bmatrix}x^2+px+q=t\\(2x+p)dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2}\int\frac{dt}{t}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{A}{2}ln\left|x^2+px+q\right|-(B-\frac{Ap}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

Энди IV турдаги оддий касрнинг интегралини хисоблаймиз.

IV. $$\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+$$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^n}=\frac{A}{2}I+(B-\frac{Ap}{2})\cdot\bar{I}$$

Бу ерда

$$I=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}\quad,\qquad\bar{I}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^n}$$

булади.

1) $$I=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}=\begin{bmatrix}x^2+px+q=t\\(2x+p)dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^n}=$$

$$\frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+C$$

2) $$\bar{I}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^n}=\begin{bmatrix}x+\frac{p}{2}=t\\dx=dt\\q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\qquad(1)$$

Охирги интегралга булаклаб интеграллаш формуласини куллаймиз:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} = \begin{bmatrix} u = t, dv = \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^n} \\ du = dt, v = \dfrac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

Агар $\qquad I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$

белги киритсак, у холда (1)даги формула куйидаги куринишни олади:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$$

ёки

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right) \qquad (2)$$

Бу формула буйича I_{n-1} интегрални I_{n-2} оркали ифодалаймиз, сунгра I_{n-2} ни I_{n-3} оркали ифодалаймиз ва хоказо. Бу жараён куйидаги интегрални хосил килгунимизча давом этади:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C$$

(2) формула келтириш ёки рекуррент формула дейилади.

М и с о л : $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}$ интегрални хисобланг.

Ечими: $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} =$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+3)^2} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2I_2. \qquad (3)$$

I_2 интегрални хисоблаймиз:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)^2} = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2}$$

Охирги интегрални караймиз:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2}=-\frac{1}{2}\int td(\frac{1}{t^2+2})=$$

$$=\begin{bmatrix} u=t, dv=d(\frac{1}{t^2+2}) \\ du=dt, v=\frac{1}{t^2+2} \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{2}+C=\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

Демак

$$I_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]+C$$

булади.

I_2 интеграл кийматини (3) тенгликка куйсак, берилган интегралнинг кий-мати келиб чикади :

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1.Квадрат учхад катнашган $I_1,\overline{I_1},I_2,\overline{I_2}$ интегралларни ёзинг.

2. $\overline{I_1}$ ва $\overline{I_2}$ интегралларнинг хисоблаш тартибини курсатинг.

3.Энг содда рационал каср деб кандай касрларга айтилади?

4.Энг содда рационил касрларни интеграллаш тартибини курсатинг.

35 - МАЪРУЗА

РАЦИОНАЛ КАСРЛАРНИ ЭНГ СОДДА РАЦИОНАЛ КАСРЛАРГА АЖРАТИШ. РАЦИОНАЛ КАСРЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ.

Таянч иборалар: Рационал каср, даражали купхад, тугри рационал каср, нотугри рационал каср.

Маъруза режаси:

1. Рационал касрларни энг содда рационал касрларга ажратиш.
2. Рационал касрларни интеграллаш.

Адабиётлар:

[**1**]. VI боб, §7-9 [**2**]. IX боб, §5

а) Рационал касрларни энг содда рационал касрларга ажратиш.

Маълумки ,

$$P_n(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} +\dots a_{n-1}x + a_0x^n + a_n$$

функция даражали купхад дейилади, бунда a_0, a_1, $a_2,\dots,$ купхаднинг коэффициентлари, n эса даража курсатгичи.

ТАЪРИФ: Икки купхад нисбати рационал каср дейилади.

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{в_0x^m+в_1x^{m-1}+\dots+в_{m-1}x+в_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n}$$

Агар m<n булса, у холда рационал каср тугри,агар m≥n булса, у холда рационал каср нотугри каср деб айтилади.

R(x) рационал каср нотугри булган холларда касрнинг $Q_m(x)$ суратини $P_n(x)$ махражига булиш йули билан унинг бутун кисмини ажратиш керак:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=Q(x)+\frac{r(x)}{P_n(x)}$$

Бу ерда $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ тугри каср, чунки $r(x)$ колдикнинг даражаси $P_n(x)$ нинг даражасидан кичик.

М и с о л : Ушбу

$$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}$$

нотугри рационал касрнинг бутун кисмини ажратинг.

Ечими:

$$\begin{array}{l|l} \_\,2x^4-3x^3+1 & \underline{x^2+x-2} \\ \underline{2x^4+2x^3-4x^2} & 2x^2-5x+9 \\ \_\,-5x^3+4x^2+1 & \\ \underline{5x^3-5x^2+10x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 9x^2 - 10x + 1 \\ \underline{9x^2 + 9x - 18} \\ -19x + 19 \end{array}$$

Демак,

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^2 + x - 2} = 2x^2 - 5x + 9 + \frac{-19x + 19}{x^2 + x - 2}$$

Ушбу $\qquad R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$

тугри рационал касрни караб чикамиз Бу касрнинг $P_n(x)$ махражи

$$(x-\alpha)^\kappa, (x^2 + px + q)^s$$

куринишдаги чизикли ва квадратик купайтувчиларга ёйилади. Бу ерда $(x-\alpha)^\kappa$ куринишдаги купайтувчи κ каррали хакикий илдизга мос келади, $(x^2 + px + q)^s$ куринишдаги купайтувчи s каррали комплекс кушма илдизларга мос келади:

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_lx + q_l)^{s_l}. \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА: Хар кандай $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ рационал касрни, бунда

$P_n(x)$ (1) формула буйича купайтувчиларга ажратилган, $\dfrac{A}{x-\alpha}, \dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$,

(k≥2 ва бутун), $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}, \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$, (s≥2 ва бутун) турдаги оддий

касрларнинг йигиндиси куринишида ифодалаш мумкин. Бунда:

1) (1) ёйилманинг (x-α) куринишдаги купайтувчисига битта $\dfrac{A}{x-\alpha}$ каср мос келади;

2) (1) ёйилманинг $(x-\alpha)^\kappa$ куринишдаги купайтувчисига

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)},$$

касрлар йигиндиси мос келади;

3) (1) ёйилманинг x^2+px+q куринишдаги купайтувчисига битта $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ каср мос келади;

4) (1) ёйилманинг $(x^2-+px+q)^s$ куринишдаги купайтувчисига

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^s} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \ldots + \frac{A_sx+B_s}{(x^2+px+q)}$$

касрлар йигиндиси мос келади;

Бу теоремани исботсиз кабул киламиз.

Юкорида курсатилган рационал касрнинг оддий касрлар йигиндиси ёйилмасидаги $A, B, A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ...$ коэффициентларни аниклаш учун турли усуллар мавжуд. Улардан биттаси номаълум коэффициентлар усулидир. Уни мисолда курамиз.

М и с о л : Ушбу

$$R(x) = \frac{x+2}{x^3-3}$$

рационал касрни оддий касрлар йигиндисига ажратинг.

Ечими: Махражни купайтувчиларга ажратамиз:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

Келтирилган теоремага асосан берилган касрни оддий касрларга ажратиш бундай куринишда булиши мумкин:

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

A,B,D номаълум коэффициентларни топишга киришамиз. Бунинг учун охирги тенгликнинг унг кисмини умумий махражга келтирамиз ва хосил килинган тенгликнинг иккала кисмида махражни ташлаб юборамиз. Бу амаллар натижасида куйидаги айният келиб чикади :

$$x+2 \equiv A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-1) \ ,$$

$$x+2 \equiv (A+B+D)x^2 + (B-D)x - A$$

Купхадларнинг тенглигидан куйидаги A.B.D ларга нисбатан тенгламалар системасини хосил киламиз ва илдизларини топамиз:

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=1 \\ -A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=\dfrac{3}{2} \\ D=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Демак, $$\frac{x+2}{x^3-x} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

М и с о л : Ушбу

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2}$$

рационал касрни оддий касрлар йигиндисига ажратинг.

Ечими: Берилган рационал касрнинг махражини купайтувчиларга ажратамиз :

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2} = \frac{x+1}{(x+2)(x^2-x+1)}$$

Юкорида келтирилган теоремага асосан

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Юкоридаги мисолдагидай, бу тенгликни хам унг кисмини умумий махражга келтирамиз ва хосил килинган тенгликнинг иккала кисмидаги махражларни ташлаб юборамиз. Натижада куйидаги айният хосил булади:

$$x+1\equiv(A+B)x^2+(-A+2B+C)x+A+2C$$

Купхадларнинг тенглигидан фойдаланиб А.В.С ларга нисбатан тенгламалар системасини тузиб унинг илдизларини топамиз:

$$\begin{cases}A+B=0\\ -A+2B+C=1\\ A+2C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{7}\\ B=\dfrac{1}{7}\\ C=\dfrac{4}{7}\end{cases}$$

Шундай килиб, рационал каср куйидаги содда рационал касрларга йигиндисига ажралди :

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2}=-\frac{1}{7(x+2)}+\frac{x+4}{7(x^2-x+1)}$$

б) Рационал касрларни интеграллаш.

Рационал касрни интеграллаш учун куйидагиларни бажариш керак:

1) Унинг тугри ёки нотугри каср эканлигини текшириб ва акс холда яъни, нотугри каср булганда, олдин унинг бутун кисмини ажратиб, шундан кейин купхад бутун кисми ва рационал каср кисмлари йигиндиси куринишида ёзилади;
2) Тугри рационал каср оддий рационал касрлар йигиндисига ажратилади;
3) Ёйилманинг коэффициентлари топилади;
4) Рационал касрнинг интеграли хисобланади.

М и с о л : Интегрални хисобланг :

$$\int\frac{(x^2+3)dx}{x(x-1)(x+2)}$$

Ечими: Юкоридаги курсатмаларни бирин-кетин бажариб, куйидагиларни хосил киламиз:

$$\frac{x^2+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+2}\ ,$$

$$x^2+3\equiv(A+B+D)x^2+(A+2B-D)x-2A\ ,$$

$$\begin{cases} A + B + D = 1 \\ A + 2B - D = 0 \\ -2A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{2} \\ B = \dfrac{4}{3} \\ D = \dfrac{7}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{(x^2 + 3)dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{6}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{6}\ln|x+2| + c.$$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. Рационал каср деб нимага айтилади?
2. Тугри ва нотугри рационал касрларга таъриф беринг.
3. Рационал касрни энг содда рационал касрлар йигиндиси куринишида келтириш тартиби нимадан иборат?
4. Рационал касрларни интеграллаш тартибини курсатинг.

36 - МАЪРУЗА

ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР КАТНАШГАН БАЪЗИ ИФОДА-ЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ.

Таянч иборалар: Универсал алмаштирма, рационал функция.

Маъруза режаси:

1. Универсал алмаштирма.
2. Тригонометрик функциянинг рационал ифодаларини интеграллаш.
3. Баъзи бир тригонометрик ифодаларни интеграллаш.

Адабиётлар:

[**1**]. VI боб, §10 [**2**]. IX боб, §7

а) Универсал алмаштириш.

Ушбу $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интеграл берилган булиб, унда R(·) бирор рационал функцияни ифодаласин. Бу интеграл $tg\frac{x}{2} = t$ алмаштирма ёрдами билан хамма вакт рационал функциянинг интегралига келтирилиши мумкинлигини курсатамиз. Бунинг учун sin$x$ ва cos$x$ функцияларни $tg\frac{x}{2}$ = t оркали ифодалаймиз:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Сунгра, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Шундай килиб, *sinx, cosx, x, dx* киритилган *t* оркали рационал ифодаланади ва универсал алмаштириш деб аталади.

Демак ,

$$\int R(\sin,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

М и с о л : Интегрални хисобланг :

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Ечими: Юкорида ёзилган формулаларга асосан :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

б) Аникмас интеграл

$$\int R(\sin x)\cos x dx$$

куринишда булсин. У холда

$$t = \sin x \ , \ \cos x dx = dt$$

алмаштириш бажариб куйидагини рационал интегрални хосил киламиз:

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(t)dt$$

М и с о л : Интегрални хисобланг :

.

$$\int \sin^5 x \cos dx$$

Ечими: $\int \sin^5 x \cos dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 t}{6} + C$

в) Агар интеграл

$$\int R(\cos x)\sin x dx$$

куринишда берилган булса, у холда

$$\cos x = t \ , \ \sin x dx = -dt$$

алмаштириш максадга мувофикдир :

$$\int R(\cos x)\cdot\sin x dx = -\int R(t)dt$$

М и с о л : Интегрални хисобланг :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$$

Ечими:

$$\int \frac{\sin xdx}{\cos^4 x} = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ \sin dx = -dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t^4} = -\int t^{-4} dt = \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} + C$$

г) Агар интеграл остидаги функция факат tg$x$ га боглик булса, у холда tg$x$=t , x=arctg$x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ алмаштириш ёрдамида бу интеграл рационал функциянинг интегралига келтирилади:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t) \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

М и с о л : Интегрални хисобланг :

$$\int tgxdx$$

Ечими: $\int tgxdx$ = $\begin{bmatrix} tgx = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left|1+t^2\right| + C =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+tg^2 x\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + C \ .$$

д) Агар интеграл остидаги функция R(sin$x$,cos$x$) куринишда булса, аммо sin$x$,cos$x$ функциялар факат жуфт даражаларда кирса, у холда tg=t алмаштириш тадбик этилади, чунки

$$cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \ , \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

М и с о л : Интегрални хисобланг :

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$$

Ечими: $$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \ , \ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(2-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C$$

е) Энди $\int \sin^m x \cos^n x dx$ куринишдаги интеграл берилган булсин.

Бунда уч холни караймиз:

1) m ва n дан камида биттаси ток сон. Аниклик учун n ток булсин. n=2p+1 деб олиб интегрални алмаштирамиз :

$$\int sin^m x\, cos^{2p+1} xdx = \int sin^m x\, cos^{2p} x \cdot cos\, xdx =$$

$$= \int sin^m x\left(1-sin^2 x\right)^p cos\, xdx = \begin{bmatrix} sin\, x = t \\ cos\, xdx = dt \end{bmatrix} = \int t^m \left(1-t^2\right)^p dt.$$

Бу эса рационал функциянинг интеграли.

2) m ва n манфий булмаган жуфт сон. m=2p, n=2q деб фараз киламиз:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, 2x, \qquad cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\, 2x \qquad (1)$$

Буларни интегралга куямиз:

$$\int sin^{2p} x\, cos^{2q} xdx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\, 2x\right)^q dx.$$

Даражаларни кутариб, кавсларни очиб, cos2x нинг жуфт ва ток даражаларини уз ичига олган хадларни хосил киламиз, биринчи пунктда курсатилган усулдан ёки (1) формуладан фойдаланамиз.

М и с о л : Интегрални хисобланг :

$$\int sin^4 xdx$$

Ечими:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \sin 2x + \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 4x\right)dx\right] == \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + c$$

<u>Уз-узини назорат этиш саволлари:</u>

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ куринишдаги интегрални универсал алмаштириш усули оркали кандай интеграллаш мумкин ?
2. $\int R(\sin x)\cos x dx$ куринишдаги интеграллар кандай интегралланади ?
3. $\int R(tgx)dx$ куринишдаги интеграллар кандай интегралланади ?
4. $\int R(\sin^m x, \cos^n x)dx$ куринишдаги интеграллар кандай интегралланади ?

АДАБИЁТЛАР.

1. **СОАТОВ Ё.У.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, Укитувчи, 1992 й.
2. **ПИСКУНОВ Н.С.** «Дифференциал ва интеграл хисоб», 1-том, Тошкент, Укитувчи, 1972 й.
3. **МАДРАХИМОВ Х.С., ГАНИЕВ А.Г., МУМИНОВ Н.С.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1988 й.
4. **САРИМСОКОВ Т.А.** «Хакикий узгарувчининг функциялари назарияси» Тошкент, Укитувчи, 1968 й.
5. **Т. ЁКУБОВ** «Математик логика элементлари», Тошкент, Укитувчи, 1983й.
6. **РАЖАБОВ Ф., НУРМЕТОВ А.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.
7. **ШНЕЙДЕР В.Е., СЛУЦКИЙ А.И., ШУМОВ А.С.** «Олий математика киска курси», I том, Тошкент, Укитувчи, 1983 й.
8. **НАЗАРОВ Р.Н., ТОШПУЛАТОВ Б.Т., ДУСУМБЕТОВ А.Д.** «Алгебра ва сонлар назарияси», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1993 й.
9. **НАЗАРОВ Х., ОСТОНОВ К.** «Математика тарихи», Тошкент, Укитувчи, 1996 й.
10. **ИБРОХИМОВ Р**., «Математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.
11. **АЗЛАРОВ Т., МАНСУРОВ Х.** «Математик анализ», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1994 й.
12. **ТУЛАГАНОВ Т., НОРМАТОВ А.** «Математикадан практикум», Тошкент, Укитувчи, 1983 й.
13. **ТОЖИЕВ Ш.** «Олий математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 2003 й.
14. **КРЕМЕР Н.Ш.,ПУТКО Б.А.,ТРИШИН И.М.,ФРИДМАН М.**

   «Высшая математика для экономистов», Москва, Юнити,2000г.
15. **РАХИМОВ Д.Г. «**Олий математика**»,** I жилд, Тошкент, «ТКТИ», 2003й.