O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O`RTA-MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

MATEMATIK ANALIZ

FANIDAN

O’QUV USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi:	100000 - Gumanitar
Ta’lim sohasi:	130000 -Matematika
Bakalaviriat yo’nalishi:	5130100-Matematika

TERMIZ–2018

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва Ўрта махсус таълим Вазирлигининг 20__ йил __ августдаги __-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчилар: ф-м.ф. доктори, проф. Мирсабуров М.
Қурбонназаров А.

Тақризчи: ф-м.ф. номзоди доц. Артиқов М.

Ўқув-услубий мажмуа Термиз давлат университетининг 2018 йил __________даги ____-сонли қарори билан тасдиқлашга тавсия қилинган.

Мундарижа

Annotatsiya

So‘nggi yillarda mamlakatimizda oliy ta’lim sifatini oshirishga qaratilgan bir qancha chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. Chunki, jahon talablari darajasidagi raqobatbardosh kadrlar tayyorlash maqsadida talabalarga dunyo standartlariga javob beradigan bilim va ko‘nikmalar berish bugungi kunning eng dolzarb masalalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua “Matematik analiz” fani bo‘yicha tayyorlangan bo‘lib, u “5130100-Matematika” yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan va Termiz davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi o‘qituvchilari tomonidan tayyorlangan. Ushbu majmua mamlakatimizda “Matematik analiz” fanini o‘qitish bo‘yicha uzoq yillardan beri to‘plangan boy tajriba hamda rivojlangan xorijiy davlatlarning yetakchi Oliy ta’lim muassasalarining tajribalaridan foydalangan holda, shuningdek, ularning o‘quv dasturlaridagi asosiy adabiyotlardan foydalangan holda yaratildi.

Matematik analiz fani matematikaning fundamental bo‘limlaridan biri bo‘lib, u matematikaning poydevori hisoblanadi. Matematik analiz kursi davomida ko‘pgina tushuncha va tasdiqlar, shuningdek, ularning tatbiqlari keltiriladi.

Matematik analiz fanining asosiy vazifasi shu fanning tushuncha, tasdiqlar va boshqa matematik ma’lumotlar majmuasi bilan tanishtirishgina bo‘lmasdan, balki talabalarda mantiqiy fikrlash, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga qo‘llash ko‘nikmalarini shakllantirishdan iborat.

Ushbu o‘quv-uslubiy majmuada dastlab sillabus hamda o‘qitishda foydalaniladigan interfaol ta’lim metodlari berilgan bo‘lib, so‘ngra har bir mavzu bo‘yicha materiallar batartib berilgan. Bunda har bir mavzu bo‘yicha ma’ruza matnlari, nazorat savollari, mashqlar, glossariy, amaliy mashg‘ulot materiallari, test savollari va keyslar banki keltirilgan.

1-мавзу. Ҳосила тушунчаси. (4-соат)

1-маъруза: Функциянинг ҳосиласи

РЕЖА:

1^0.Функция ҳосиласининг таърифи. Мисоллар.

2^0. Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. Функция ҳосиласининг таърифи. Мисоллар. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,b)\subset R$ да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$, $x_0+\Delta x\in(a,b)$ бўлсин.

Маълумки ушбу

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

айирма $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади.

1-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги ҳосиласи** дейилади ва $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, ёки $f'(x_0)$, ёки $(f(x))'_{x_0}$ каби белгиланади. Демак,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Агар $x_0+\Delta x=x$ дейилса, унда $\Delta x=x-x_0$ ва $\Delta x\to 0$ да $x\to x_0$ бўлиб, (1) муносабат қуйидаги

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

кўринишга келади.

1-мисол. $f(x)=x$, $x_0\in R$ бўлсин. Бу функция учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$$

бўлади. Демак, $f'(x)=(x)'=1.$

2-мисол. $f(x)=|x|$, $x\in R$ бўлсин.

Агар $x>0$ бўлса, у ҳолда $f(x)=x$ бўлиб, $f'(x)=1$ бўлади.

Агар $x<0$ бўлса, у ҳолда $f(x)=-x$ бўлиб, $f'(x)=-1$ бўлади.

Агар $x_0 = 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ бўлиб, $x \to 0$ да бу нисбатларнинг лимити мавжуд бўлмайди. Демак, берилган функция $x_0 = 0$ нуқтада ҳосилага эга бўлмайди.

3-мисол. $f(x) = x|x|$, $x \in R$, $x_0 \in R$ бўлсин.

а) $x_0 > 0,\ x > 0$, $x \neq x_0$ учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x-x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x-x_0} = x + x_0$$

бўлиб,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0 = 2|x_0|$$

бўлади.

б) $x_0 < 0,\ x < 0$, $x \neq x_0$ учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x-x_0} = -x - x_0$$

бўлиб,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -2x_0 = 2|x_0|$$

бўлади.

в) $x_0 = 0$, $x \neq x_0$ учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

бўлиб,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

бўлади. Демак, $\forall x \in R$ да $f'(x) = (x|x|)' = 2|x|$.

4-мисол. Айтайлик,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, $x_0 = 0$ бўлсин. Унда

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \sin\frac{1}{x}$$

бўлиб, унинг $x \to 0$ даги лимити мавжуд эмас. Демак, берил-ган функция $x_0 = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

2^0. Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0 - \delta,\ x_0) \subset X$ $(\delta > 0)$ бўлсин.

2-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқта-даги чап ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0-0)$ каби белгиланади:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Айтайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,\ x_0+\delta)\subset X\ (\delta>0)$ бўлсин.

3-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқта-даги ўнг ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0+0)$ каби белгиланади:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Масалан, $f(x)=|x|$ функциянинг $x_0=0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+0)=1$, чап ҳосиласи $f'(-0)=-1$ бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлардан қуйидаги хулоса-лар келиб чиқади:

1. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга ва $f'x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

2. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга ва $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

Glossariy

$f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0-\delta,\ x_0)\subset X$ $(\delta>0)$ бўлсин.

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқта-даги чап ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0-0)$ каби белгиланади:*

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Айтайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,\ x_0+\delta)\subset X\ (\delta>0)$ бўлсин.

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ ***функциянинг*** x_0 ***нуқта-даги ўнг ҳосиласи*** *дейилади ва* $f'(x_0+0)$ *каби белгиланади:*

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Масалан, $f(x)=|x|$ *функциянинг* $x_0=0$ *нуқтадаги ўнг ҳосиласи* $f'(+0)=1,$ *чап ҳосиласи* $f'(-0)=-1$ *бўлади.*

Юқорида келтирилган таърифлардан қуйидаги хулоса-лар келиб чиқади:

1-Амалий машғулот:
Функциянинг ҳосиласига доир мисоллар ечиш

Таъриф ёрдамида $f'(x_0)$ топилсин:

823. $f(x)=x^2,\ \ x_0=0{,}1$

824. $f(x)=2\sin 3x,\ \ x_0=\frac{\pi}{6}$

825. $f(x)=1+\ln 2x,\ \ x_0=1$

826. $f(x)=x+\operatorname{ctg}x,\ \ x_0=\frac{\pi}{4}$

Таъриф ёрдамида $f'(x)$ топилсин:

827. $f(x)=x^3+2x$

828. $f(x)=\frac{1}{x}$

829. $f(x)=\sqrt{x}$

830. $f(x)=x\sqrt[3]{x}$

831. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

832. $f(x)=2^{x+1}$

833. $f(x)=\ln x$

834. $f(x)=\sin 2x$

835. $f(x)=\operatorname{ctg}x+2$

836. $f(x)=\arcsin x$

837. $f(x)=\arccos 3x$

838. $f(x)=7\operatorname{arctg}(x+1)$

Ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

839. $y=\frac{2x}{1-x^2}$

840. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

841. $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

842. $y=\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$

843. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$

844. $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$

845. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

846. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

847. $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

848. $y = x\sqrt{1 + x^2}$

849. $y = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\,\sqrt[3]{3 + x^3}$

850. $y = \sqrt[m+n]{(1 - x)^m (1 + x)^n}$

1-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқтада ҳосилаларининг мавжудлигига текширилсин:

937. $f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$

938. $f(x) = |(x-1)(x-2)|, \quad x_0 = 1, \; x_0 = 2$

939. $f(x) = |x^3|, \quad x_0 = 0$

940. $f(x) = x \cdot |x|, \quad x_0 = 0$

941. $f(x) = |\sin x|, \quad x_0 = \pi$

942. $f(x) = |x^2 - x|, \quad x_0 = 1$

2-маъруза: Ҳосиланинг геометрик ҳамда механик маънолари.

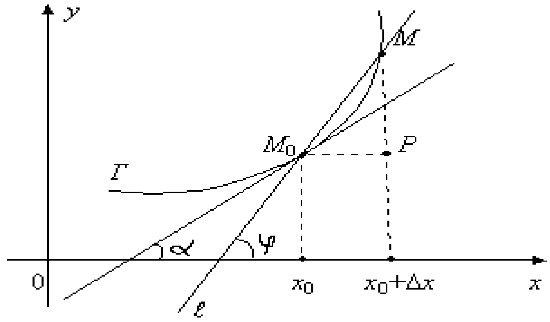
РЕЖА:

1^0. Ҳосиланинг геометрик ҳамда механик маънолари

2^0. Ҳосилага эга бўлган функциянинг узлуксизлиги.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: l кесувчи лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада **ўтказилган уринма**, узлуксизлик.

3^0. Ҳосиланинг геометрик ҳамда механик маънолари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f(x)$ функция-нинг графиги 5-чизмада тасвирланган Γ эгри чизиқни ифодаласин:



5-чизма.

Бу Γ чизиқда $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ нуқталарни олиб, улар орқали ўтувчи l кесувчини қараймиз.

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $M \to M_0$ да l кесувчи лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада **ўтказилган уринма** дейилади.

Равшанки, φ бурчак Δx га боғлиқ: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ функциянинг графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

нинг мавжуд бўлиши лозим. Бунда α –уринманинг OX ўқи-нинг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчак.

M_0MP учбурчакдан:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиб, ундан

$$\varphi(\Delta x) = arctg\,\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиши келиб чиқади. Функция узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg\,\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctgf'(x_0).$$

Демак, $\Delta x \to 0$ да $\varphi(\Delta x)$ нинг лимити мавжуд ва

$$\alpha = arctgf'(x_0).$$

Кейинги тенгликдан

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, функциянинг x_0 нуқтадаги $f'(x_0)$ ҳосиласи урин-манинг бурчак коэффицентини ифодалайди. Бунда уринма-нинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

кўринишда бўлади.

Айтайлик, P нуқта тўђри чизиқ бўйлаб $s = s(t)$ қонун билан ҳаракат қилсин, бунда $t-$вақт, $s-$ўтилган йўл. Агар вақтнинг t_1 ва t_2 $(t_1 < t_2)$ қийматларидаги ўтилган йўл $s(t_1)$, $s(t_2)$ бўлса, унда ушбу нисбат

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ вақт оралиђидаги ўртача тезликни ифодалайди.

Қуйидаги

$$\lim_{t_2\to t_1+0}\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

лимит ҳаракатдаги нуқтанинг t_1 вақтдаги оний тезлигини билдиради.

Демак, ҳаракатдаги P нуқтанинг t вақтдаги оний тезлиги $v(t)$, ўтилган $s(t)$ йўлнинг ҳосиласидан иборат бўлади:

$$v(t) = s'(t).$$

4^0. Ҳосилага эга бўлган функциянинг узлуксизлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a, b) \subset R$ да берилган бўлсин.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

◄ Айтайлик, $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Таърифга биноан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

яъни

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

бўлади.

Энди

$$\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

деб белгилаймиз.

Равшанки,

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \alpha \to 0.$$

Кейинги тенгликлардан топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Одатда, бу тенглик функция орттирмасининг формуласи дейилади. Ундан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради. ►

Эслатма. Функциянинг бирор нуқтада узлуксиз бўлиши-дан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз, аммо у шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

Машқлар

1. Функция ҳосиласи таърифидан фойдаланиб, қуйидаги

$$f(x) = x\sqrt{x}, \qquad f(x) = 3^x \sin x$$

функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

2. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x - \text{рационал сон бўлса,} \\ -x^2, & \text{агар } x - \text{иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x = 0$ нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлиши исботлансин.

Glossariy

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $M \to M_0$ да l кесувчи лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада ***ўтказилган уринма*** *дейилади.*

Равшанки, φ бурчак Δx га боғлиқ: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ функциянинг графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

нинг мавжуд бўлиши лозим. Бунда α –уринманинг OX ўқи-нинг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчак.

M_0MP учбурчакдан:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиб, ундан

$$\varphi(\Delta x) = arctg\,\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиши келиб чиқади. Функция узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

2-амалий машғулот

851. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

852. $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$

853. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}$

854. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

855. $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$

856. $y = \cos 2x - 2\sin x$

857. $y = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x$

858. $y = \sin\left(\cos^2 x\right) \cdot \cos\left(\sin^2 x\right)$

859. $y = \sin^n x \cos nx$

860. $y = \sin\left[\sin\left(\sin x\right)\right]$

861. $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

862. $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$

863. $y = \frac{1}{\cos^n x}$

864. $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

865. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

866. $y = \operatorname{tg}x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

2-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

867. $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$

868. $y = \sec^2\frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$

869. $y = \sin\left[\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right]$

870. $y = \ln x^3 - \frac{9}{x} - \frac{27}{2x^2}$

871. $y = \left(\sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{5}\right)^{-x}$

872. $y = \left(x^2 - 7x + 8\right)e^x$

873. $y = 2^x \ln|x|$

874. $y = e^x \log_2 x$

875. $y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x$

876. $y = \log_x 2$

3-маъруза: Ҳосилани ҳисоблаш қоидалари

РЕЖА:

1^0. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг ҳосиласи.
2^0. Мураккаб функциянинг ҳосиласи.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг ҳосиласи.

1^0. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг ҳосиласи. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $(a,b)\subset R$ да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ва $g'(x_0)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0) \qquad (2)$$

бўлади.

1) $f(x)\pm g(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$(f(x)\pm g(x))'_{x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

бўлади.

◄ $F(x)=f(x)\pm g(x)$ деб топамиз:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Бу тенгликда $x\to x_0$ да лимитга ўтиб, юқоридаги (1) ва (2) муносабатларни эътиборга олсак, унда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}\pm$$

$$\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$F'(x_0)=(f(x)\pm g(x))'_{x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0).►$$

2) $f(x)\cdot g(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$(f(x)\cdot g(x))'_{x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)\pm f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

бўлади.

◄ $\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$ деб

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}$$

нисбатни қуйидагича

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x)$$

ёзиб оламиз. Сўнг $x\to x_0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x)=$$

$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Демак,

$$\Phi'(x_0)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'_{x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\ ►$$

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функция $(g(x_0)\neq 0)$ x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

бўлади.

◄ Модомики, $g(x_0)\neq 0$ экан, унда x_0 нуқтанинг бирор атрофидаги x ларда $g(x)\neq 0$ бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0)}=$$

$$=\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

Бу тенгликда $x\to x_0$ да лимитга ўтиб, ушбу

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

тенгликка келамиз. ►

1-натижа. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, $c\cdot f(x)$ функция $(c=const)$ x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$\left(c\cdot f(x)\right)'_{x_0}=c\cdot f'(x_0)$$

бўлади, яъни ўзгармас сонни ҳосила ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин.

2-натижа. Агар $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x)$ функциялар x_0 нуқта-да ҳосилаларга эга булиб, $c_1,\ c_2,\ldots,c_n$ ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда

$$\left(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)\right)'_{x_0}=c_1f_1'(x_0)+c_2f_2'(x_0)+\ldots+c_nf_n'(x_0)$$

2^0. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда, $g(y)$ функция $\{f(x)\,|\,x\in X\}$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0\in X$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага, $y_0\in\{f(x)\,|\,x\in X\}$ нуқтада $(y_0=f(x_0))$ $g'(y_0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $g(f(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

бўлади.

◄ $g(y)$ функциянинг y_0 нуқтада $g'(y_0)$ ҳосилага эга бўлганлигидан

$$g(y)-g(y_0)=g'(y_0)\cdot(y-y_0)+\alpha\cdot(y-y_0)$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$y=f(x),\ y_0=f(x_0) \text{ ва } y\to y_0 \text{ да } \alpha\to 0.$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини $x-x_0$ га бўлиб топамиз:

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\alpha\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Бундан $x\to x_0$ да лимитга ўтиб,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

тенгликка келамиз. ►

Glossariy

$M_0(x_0, f(x_0))\in \Gamma$, $M(x, f(x))\in \Gamma$, $M\to M_0$ да l кесувчи лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада ***ўтказилган уринма*** *дейилади.*

Равшанки, φ бурчак Δx га боғлиқ: $\varphi=\varphi(\Delta x)$. $f(x)$ функциянинг графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\alpha$$

нинг мавжуд бўлиши лозим. Бунда α –уринманинг OX ўқи-нинг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчак.

M_0MP учбурчакдан:

$$tg\varphi(\Delta x)=\frac{MP}{M_0P}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиб, ундан

$$\varphi(\Delta x)=arctg\,\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиши келиб чиқади. Функция узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

3-амалий машғулот

851. $\mathbf{y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}$ **852.** $\mathbf{y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}}$

$853.\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

$854.\ y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$855.\ y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$

$856.\ y=\cos 2x-2\sin x$

$857.\ y=\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x$

$858.\ y=\sin\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)$

$859.\ y=\sin^n x\cos nx$

$860.\ y=\sin\left[\sin\left(\sin x\right)\right]$

$861.\ y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

$862.\ y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$

$863.\ y=\dfrac{1}{\cos^n x}$

$864.\ y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

3-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

$867.\ y=4\sqrt[3]{ctg^2x}+\sqrt[3]{ctg^8x}$

$868.\ y=\sec^2\dfrac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{a}$

$869.\ y=\sin\left[\cos^2\left(tg^3x\right)\right]$

$870.\ y=\ln x^3-\dfrac{9}{x}-\dfrac{27}{2x^2}$

$865.\ y=tg\dfrac{x}{2}-ctg\dfrac{x}{2}$	$866.\ y=tgx-\dfrac{1}{3}tg^3x+\dfrac{1}{5}tg^5x$

4-маъруза: Тескари функциянинг ҳосиласи.

РЕЖА:

1^0. Тескари функциянинг ҳосиласи.

2^0. Ҳосилалар жадвали.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *орттирма, тескари функция тушунчаси, элементар функцияларнинг ҳосилалари.*

1^0. Тескари функциянинг ҳосиласи. Айтайлик, $y = f(x)$ функция (a,b) да берилган, узлуксиз ва қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлиб, $x_0 \in (a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ $(f'(x_0) \neq 0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $x = f^{-1}(y)$ функция y_0 $(y_0 = f(x_0))$ нуқтада ҳосилага эга ва

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

бўлади.

◄Равшанки,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$

бўлиб, $x \to x_0$ да $\alpha \to 0$ бўлади. Бу тенгликдан

$$y - y_0 = f'(x_0)\left[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right] - \alpha\left[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right] =$$
$$= \left[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right] \cdot \left[f'(x_0) + \alpha\right]$$

ифодага келамиз. Бундан эса

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha}$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги тенгликда $y \to y_0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}. \text{ ►}$$

4^0. Мисоллар. 1-мисол. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ бўлади, $\alpha \in R,\ x > 0$.

◄ Айтайлик, $x > 0$ бўлсин. Унда $f(x) = x^\alpha$ функция учун

$$\frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

бўлиб, $\Delta x \to 0$ да $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ бўлади. ►

2-мисол. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ бўлади, $a > 0,\ x \in R$.

◀ $f(x)=a^x$ функция учун

$$\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

бўлиб, $\Delta x\to 0$ да $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ бўлади. ▶

3-мисол. $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ бўлади, $x\in R$.

◀ $f(x)=\sin x$ функция учун

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=2\cdot\frac{1}{\Delta x}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

бўлиб, $\Delta x\to 0$ да $(\sin x)'=\cos x$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $(\cos x)'=-\sin x$ бўлиши топилади▶

4-мисол. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ бўлади, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$.

◀ $f(x)=\log_a x$ функция учун

$$\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

бўлиб, $\Delta x\to 0$ да

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

бўлади. Хусусан, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ бўлади. ▶

5-мисол. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ бўлади.

◀Тескари функция ҳосиласини ҳисоблаш формуласига асосан $(y=arctgx,\ \ x=tgy)$

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad (x\in(-1,\ 1)),$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad (x\in(-1,\ 1)),$$

$$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

бўлади.▶

6-мисол. Фараз қилайлик,

$$y=[u(x)]^{v(x)}\qquad (u(x)>0)$$

бўлиб, $u'(x)$ ва $v'(x)$ лар мавжуд бўлсин. У ҳолда

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)' = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]$$

бўлади.

◀ Ушбу $y = [u(x)]^{V(x)}$ ни логарифмлаб,

$$\ln y = v(x)\ln u(x),$$

сўнг мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидаси-дан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{1}{y}y' = v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x),$$

$$y' = y\left[v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right] =$$

$$= [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]. \text{ ▶}$$

Бу,

$$\left(u^v\right)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'. \qquad (3)$$

тенгликдан, $y = u^v$ функция ҳосиласини ҳисоблашнинг қуйи-даги қоидаси келиб чиқади: $y = u^v$функциянинг ҳосиласи икки қўшилувчидан иборат бўлиб, биринчи қўшилувчи u^v ни кўрсаткичли функция деб олинган ҳосиласига (бунда асос $u(x)$ ўзгармас деб қаралади) иккинчи қўшилувчи эса u^v ни даражали функция деб олинган ҳосиласига (бунда даража кўрсаткич $v(x)$ ўзгармас деб қаралади) тенг бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = x^{x^x}$$

функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

◀ (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f'(x) = \left(x^x\right)' = x^x \cdot \ln x + x \cdot x^{x-1} = x^x(\ln x + 1),$$

$$g'(x) = \left(x^{x^x}\right)' = \left(x^{f(x)}\right)' = x^{f(x)} \cdot \ln x \cdot f'(x) + f(x)\cdot x^{f(x)-1} =$$

$$= x^{x^x} \cdot \ln x \cdot (x^x(\ln x + 1)) + x^{x^x} \cdot x^{x^x - 1} =$$

$$= x^{x^x + x - 1}(x^x \ln x(\ln x + 1) + 1). \text{ ▶}$$

2⁰. Ҳосилалар жадвали. Қуйида содда функцияларнинг ҳосилаларини ифодаловчи формулаларни келтирамиз:

1. $(C)' = 0, \quad C = const.$
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R, \quad x > 0.$

   $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in N, \quad x \in R.$
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in R$

   $(e^x)' = e^x, \quad x \in R.$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0,\ a\neq 1,\ x>0.$

$(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0,\ a\neq 1,\ x\neq 0.$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x>0.$

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x\neq 0.$

5. $(\sin x)' = \cos x, \quad x\in R.$

6. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x\in R.$

7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi, \quad n\in Z.$

8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq n\pi, \quad n\in Z.$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x\in R.$

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x\in R.$

13. $(shx)' = chx, \quad x\in R.$

14. $(chx)' = shx, \quad x\in R.$

15. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x\in R.$

16. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x\neq 0.$

Glossariy

Айтайлик, $y=f(x)$ функция (a,b) да берилган, узлуксиз ва қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $x=f^{-1}(y)$ функция y_0 $(y_0=f(x_0))$ нуқтада ҳосилага эга ва

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

бўлади.

4-амалий машғулот

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқталарда ўнг ва чап ҳосилаларининг мавжудлигига текширилсин.

948. $f(x)=\left|2^x-2\right|,\quad x=1$

949. $f(x)=\sqrt{\sin x^2},\quad x=0,\quad x=\sqrt{\pi}$

950. $f(x)=\arccos\frac{1}{x},\quad x=1,\quad x=-1$

951. $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & \text{агар}\quad x\neq 0\\ 0, & \text{агар}\quad x=0,\end{cases}\qquad x=0$

952. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{агар}\quad x\leq 0\\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & \text{агар}\quad x>0,\end{cases}\qquad x=0$

953. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар}\quad x\neq 0\\ 0, & \text{агар}\quad x=0,\end{cases}\qquad x=0$

954. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{|x|}, & \text{агар}\quad x\neq 0\\ 1, & \text{агар}\quad x=0,\end{cases}\qquad x=0$

955. $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & \text{агар}\quad x\neq 0\\ 0, & \text{агар}\quad x=0,\end{cases}\qquad x=0$

956. $f(x)=|x-1|\cdot e^x,\quad x=1$

957. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{агар}\quad x\neq 0\\ 0, & \text{агар}\quad x=0,\end{cases}\qquad x=0$

958. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{агар}\quad x\neq 0\\ 0, & \text{агар}\quad x=0,\end{cases}\qquad x=0,\quad x=1$

959. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва иккита нуқтада ҳосилага эга бўлмаган функцияга мисол келтирилсин.

960. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $f(x)$ функция $x_0\in X$ нуқтада ҳосилага эга, $g(x)$ эса бу нуқтада ҳосилага эга бўлмасин. У ҳолда

а) $f(x)\pm g(x)$, б) $f(x)\cdot g(x)$

функцияларнинг $\mathbf{x_0}$ нуқтадаги ҳосиласи ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтирилсин.

961.Агар 960-мисолда $\mathbf{f(x)}$ функция ҳам $\mathbf{x_0}$ нуқтада ҳосилага эга бўлмаса, у ҳолда $\mathbf{f(x) \pm g(x)}$ ва $\mathbf{f(x) \cdot g(x)}$ функцияларнинг $\mathbf{x_0}$ нуқтадаги ҳосиласи ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтирилсин.

962.Бутун сонлар ўқида аниқланган ва фақат $\mathbf{n}$ та нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтирилсин.

963.Ҳосилага эга бўлган жуфт функциянинг ҳосиласи тоқ функция эканини исботлансин.

964.Ҳосилага эга бўлган тоқ функциянинг ҳосиласи жуфт функция эканини исботлансин.

965.Ҳосиласи жуфт функция бўлган, ўзи тоқ бўлмаган функцияга мисол келтирилсин.

966.Агар $\mathbf{f(x)}$ функциянинг ҳосиласи $\mathbf{f'(x)}$ тоқ функция бўлса, у ҳолда $\mathbf{f(x)}$ функция жуфт эканини исботлансчин.

967.Агар ҳосилага эга бўлган $\mathbf{f(x)}$ функция даврий бўлиб, унинг даври $\mathbf{T}$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{f'(x)}$ функция ҳам даврий бўлиб, унинг даври $\mathbf{T}$ га тенг бўлишини исботлансин.

968.Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтанинг бирор атрофида ҳосилга эга бўладими?

969.Бутун сонлар ўқида аниқланган бўлиб, ихтиёрий $\mathbf{x \in R}$ нуқтада ҳосилага эга бўлмаган, лекин квадрати $\forall \mathbf{x \in R}$ нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтирилсин.

970.Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $\left\{\mathbf{n}\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x_0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) - \mathbf{f(x_0)}\right)\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканини исботлансин.

4-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

970. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $\left\{\mathbf{n}\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x_0}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)-\mathbf{f(x_0)}\right)\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканини исботлансин.

5-маъруза: Функциянинг дифференциали

РЕЖА:

1^0. Функция дифференциали тушунчаси.

2^0. Функция дифференциалининг содда қоидалари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *$f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциал-ланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.*

1^0. Функция дифференциали тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b),\ \ x_0+\Delta x \in (a,b)$ бўлсин.

Маълумки, $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ айирма $f(x)$ функция-нинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади.

1-таъриф. Агар $\Delta f(x_0)$ ни ушбу

$$\Delta f(x_0) = A\cdot\Delta x + \alpha\Delta x$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқта-да дифференциалланувчи дейилади, бунда $A = const,\ \ \Delta x \to 0$, да $\alpha \to 0$.

Теорема. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциал-ланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада дифферен-циалланувчи бўлсин. Таърифга биноан,

$$\Delta f(x) = A\cdot\Delta x + \alpha\Delta x$$

бўлади, бунда $A = const$, $\Delta x \to 0$, да $\alpha \to 0$.

Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A+\alpha,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha) = A.$$

Демак, $f'(x)$ мавжуд ва $f'(x) = A.$

Етарлилиги. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ да чекли $f'(x)$ ҳосила-га эга бўлсин. Таърифга кўра

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

дейилса, ундан

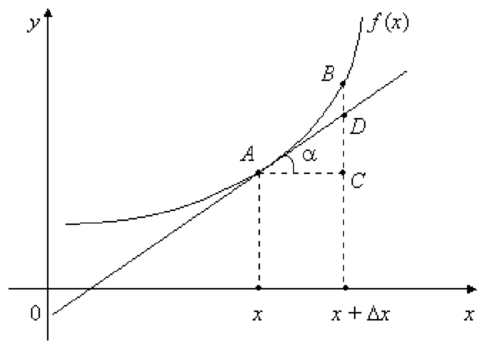
$$\Delta f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\Delta x$$

бўлиши келиб чиқади, бунда $\Delta x \to 0$ да $\alpha \to 0$. Демак, $f(x)$ функция дифференциалланувчи.►

2-таъриф. Функция орттирмасидаги $f'(x_0)\cdot\Delta x$ ифода $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги дифференциали дейилади ва $df(x_0)$ каби белгиланади:

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Айтайлик, $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг графиги 6-чизмада тасвирланган эгри чизиқни ифодаласин:



6-чизма.

Келтирилган чизмадан кўринадики,

$$\frac{DC}{AC} = tg\alpha$$

бўлиб, $DC = tg\alpha\cdot AC = f'(x)\cdot\Delta x$ бўлади.

Демак, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали функция графигига $(x, f(x))$ нуқтада ўтказилган уринма орттирмаси DC ни ифодалар экан.

Фараз қилайлик, $f(x) = x,\ x \in R$ бўлсин. Бу функция дифференциалланувчи бўлиб, $df(x) = (x)'\cdot\Delta x = \Delta x$, яъни $dx = \Delta x$ бўлади. Демак, (a, b) да дифференциалланувчи $f(x)$ функция-нинг дифференциалини

$$df(x) = f'(x)\cdot dx$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Энди содда функцияларнинг дифференциалларини келтирамиз:

1. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx, \quad (x > 0);$
2. $d(a^x) = a^x\cdot\ln a\cdot dx, \quad (a > 0,\ \ a \neq 1);$
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e dx, \quad (x > 0,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1);$
4. $d(\sin x) = \cos x dx;$
5. $d(\cos x) = -\sin x dx;$

6. $d(tgx)=\frac{1}{\cos^2 x}dx, \quad (x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \ \ k=0, \pm1, \ldots);$

7. $d(ctgx)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx, \quad (x\neq k\pi, \ \ k=0, \pm1, \ldots);$

8. $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1<x<1);$

9. $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1<x<1);$

10. $d(arctgx)=\frac{1}{1+x^2}dx;$

11. $d(arcctgx)=-\frac{1}{1+x^2}dx;$

12. $d(shx)=chxdx;$

13. $d(chx)=shxdx;$

14. $d(thx)=\frac{1}{ch^2x}dx;$

15. $d(cthx)=-\frac{1}{sh^2x}dx \quad (x\neq 0)$

2^0. Функция дифференциалининг содда қоидалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари (a, b) да берилган бўлиб, $x\in(a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $x\in(a, b)$ да

1) $d(c\cdot f(x))=cdf(x), \quad c=const;$
2) $d(f(x)+g(x))=df(x)+dg(x);$
3) $d(f(x)g(x))=g(x)df(x)+f(x)dg(x);$
4) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x)\neq 0).$

бўлади.

Бу тасдиқлардан бирини, масалан 3)-сини исботлаймиз.

◀Маълумки,

$$d(f(x)g(x))=(f(x)g(x))'dx.$$

Агар

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда қуйидаги тенгликка келамиз:

$$d(f(x)g(x)=(f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx=$$
$$=g(x)f'(x)dx+f(x)g'(x)dx=g(x)df(x)+f(x)dg(x).►$$

Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда, $g(y)$ функция $Y\supset\{f(x): x\in X\}$ тўпламда берилган бўлиб, $f'(x)$ ва $g'(y)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$d(g(f(x)))=g'(f(x))\cdot df(x)$$

бўлади.

◄ Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоида-сидан фойдаланиб топамиз:

$$d(g(f(x))) = [g(f(x))]' dx = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g'(f(x)) \cdot df(x). ►$$

1-мисол. Таърифдан фойдаланиб, ушбу $f(x) = x - 3x^2$ функциянинг $x_0 = 2$ нуқтадаги дифференциали топилсин.

◄ Бу функциянинг $x_0 = 2$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(2) = f(2+\Delta x) - f(2) = 2 + \Delta x - 3(2+\Delta x)^2 - 2 + 12 =$$

$$= -11 \cdot \Delta x - 3\Delta x^2 = -11 \cdot \Delta x + (-3\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Демак, $d\ f(2) = -11 \cdot dx$. ►

3⁰. Функция дифференциали ва тақрибий формулалар. Функция дифференциали ёрдамида тақрибий формулалар юзага келади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,\ b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага $(f'(x_0) \neq 0)$ эга бўлсин. У ҳолда $\Delta x \to 0$ да

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

бўлади.

Айни пайтда, $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциал-ланувчи бўлиб, унинг дифференциали

$$d\ f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

бўлади.

Равшанки,

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x)$$

бўлиб, $\Delta x \to 0$ да

$$\frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{\Delta x} \to 0$$

бўлади. Натижада

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0),$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (1)$$

тақрибий формула ҳосил бўлади. (1) формула $x_0 \in (a,\ b)$ нуқта-да дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(x_0)$ ни унинг шу нуқтадаги дифференциали $df(x_0)$ билан алмаштириш мумкинлигини кўрсатади. Бу алмаштиришнинг моҳияти функция орттирмаси аргумент орттирмасининг, умуман айтганда мураккаб функцияси бўлган ҳолда, функция дифференциали эса аргумент орттир-масининг чизиқли функцияси бўлишидадир.

(1) формулада $\Delta x = x - x_0$ дейилса, унда

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу $\sin 29^0$ миқдор тақрибий ҳисоблансин.

◄ Агар $f(x) = \sin x,\quad x_0 = 30^0$ дейилса, унда (2) формулага кўра

$$\sin 29^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 \cdot (29^0 - 30^0) \cdot \frac{2\pi}{360^0} = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^0} \approx 0{,}4848$$

бўлади. ►

Маълумки, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функция графигига $(x_0,\ f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма-нинг тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Демак, (2) тақрибий формула геометрик нуқтаи назардан, $f(x)$ функция ифодалаган эгри чизиқни x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида шу функция графигига $(x_0,\ f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма билан алмаштирилиши мумкинлигини билдиради.

(2) формулада $x_0 = 0$ дейилса, у ушбу

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (3)$$

кўринишга келади.

$f(x)$ функция сифатида $(1+x)^\alpha$, $\sqrt{1+x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, tgx функцияларни олиб, уларга (3) формулани қўллаш натижасида қуйидаги тақрибий формулалар ҳосил бўлади:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$tgx \approx x.$$

Машқлар

1. Айтайлик, u ва vлар дифференциалланувчи функция-лар бўлиб, уларнинг дифференциаллари du ва dv бўлсин. Унда ушбу

$$y = \mathrm{arctg}\frac{u}{v} + \ln\sqrt{u^2 + v^2}$$

функциянинг дифференциали топилсин.

2. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $x_0 = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

3. Ушбу

$$\sqrt{1{,}2},\ \sqrt{1{,}02},\ \sqrt{1{,}002}$$

миқдорларнинг тақрибий қиймати топилсин.

Glossariy

Функция дифференциали ёрдамида тақрибий формулалар юзага келади.

Айтайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага $(f'(x_0) \neq 0)$ эга бўлсин. У ҳолда $\Delta x \to 0$ да

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

бўлади.

миқдорларнинг тақрибий қиймати

5-амалий машғулот

1^0. Функция дифференциали тушунчаси. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да берилган бўлиб, $\mathbf{x_0 \in (a,b)}$, $\mathbf{x_0 + \Delta x \in (a,b)}$ бўлсин.

Агар функция орттирмаси $\mathbf{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$ ни ушбу

$$\mathbf{\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x} \qquad \mathbf{(1)}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада **дифференциалланувчи** дейилади, бунда $\mathbf{A}$ микдор $\mathbf{\Delta x}$ га боғлиқ бўлмаган ўзгармас, $\mathbf{\alpha}$ эса $\mathbf{\Delta x \to 0}$ да нолга интилади.

$\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $\mathbf{f'(x_0)}$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.

(1) ифодадаги

$$\mathbf{A \cdot \Delta x}$$

қўшилувчи $\mathbf{f(x)}$ функциянинг $\mathbf{x_0}$ **нуқтадаги дифференциали** дейилади. Уни

$$\mathbf{f'(x_0) \cdot dx} \qquad \mathbf{(A = f'(x_0),\ \ \Delta x = dx)}$$

каби ҳам ёзиш мумкин.

Функция дифференциали $\mathbf{df(x_0)}$ каби ёзилади.

Демак,

$$\mathbf{df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx} \qquad \mathbf{(2)}$$

2^0. Дифференциаллашнинг содда қоидалари. Айтайлик, $\mathbf{u = u(x)}$, $\mathbf{v = v(x)}$ дифференциалланувчи функциялар бўлсин. У ҳолда:

а) $\mathbf{d(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot du + \beta \cdot dv}$, бунда $\mathbf{\alpha}$ ва $\mathbf{\beta}$ ихтиёрий ўзгармаслар;

б) $\mathbf{d(u \cdot v) = udv + vdu}$;

в) $\mathbf{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}} \quad \mathbf{(v \neq 0)}$

бўлади;

г) Агар $\mathbf{y = f(x)}$, $\mathbf{x = \varphi(t)}$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, $\mathbf{y = f(\varphi(t))}$ функция ҳам дифференциалланувчи бўлиб,

$$df(x)=f'(x)dx \qquad (dx=\varphi'(t)dt)$$

бўлади. (Бу дифференциал шаклининг **инвариантлиги** хоссасини ифодалайди).

3^0. **Тақрибий ҳисоблаш формуласи.** $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

бўлиб, Δx етарлича кичик бўлганда ушбу

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

тақрибий формула ҳосил бўлади. Бу формулани қуйидагича

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (3)$$

ҳам ёзиш мумкин.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{3}{x}$$

функциянинг дифференциали топилсин.

◀Бу функциянинг дифференциалини (2) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$df(x)=d\left(\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{3}{x}\right)=\left(\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{3}{x}\right)'\cdot dx=-\left(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{3}{x^2}\cos\frac{3}{x}\right)dx\,.$$ ▶

2 – м и с о л . ***Агар*** $u=u(x),\ \ v=v(x)$ ***дифференциалланувчи функциялар бўлса,***

$$y=\mathrm{arctg}\,\frac{u}{v}$$

нинг дифференциали топилсин.

◀Дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$dy=d\left(\mathrm{arctg}\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{vdu-udv}{v^2}=\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$$ ▶

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\alpha=\sqrt[4]{17}$$

миқдорнинг тақрибий қиймати тописин.

◀(3) формулада

$f(x)=\sqrt[4]{x},\ \ x=17,\ \ x_0=16$ дейилса, унда $\Delta x=x-x_0=1$ бўлиб,

$$\sqrt[4]{17}\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x=2+\frac{1}{32}\cdot 1=\frac{65}{32}\approx 2{,}031$$

бўлади. Демак, $\alpha=2{,}031$.▶

1059. $y=(x-1)^3$ функция орттирмаси билан дифференциалининг айирмаси топилсин.

Функция дифференциали топилсин:

1060. $y=\frac{1}{x}$

1061. $y=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \qquad (a\neq 0)$

1062. $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

1063. $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$

1064. $y=\arcsin\frac{x}{a} \qquad (a\neq 0)$

Дифференциал топилсин:

1065. $d\left(e^{-x}+\ln x\right)$

1066. $d\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

1067. $d\left(2\sqrt{x^3}\,(3\ln x-2)\right)$

1068. $d\left(\arccos e^x\right)$

1069. $d\ln\left(\sqrt{1+2\sin x}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$

1070. $d\left(5\operatorname{sh}^7\left(\frac{x}{35}\right)+7\operatorname{sh}^5\left(\frac{x}{35}\right)\right)$

1071. $d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

1072. $d\left(\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}\right)$

1073. $d\left(x^{x^2}\right)$

Кўрсатилган нуқталардаги дифференциал топилсин:

1074. $d\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}\right), \quad x=-1$

1075. $d\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{x}\right), \quad x_1=\frac{1}{e}, \quad x_2=e$

1076. $d\left(\frac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\right), \quad x=0$

1077. $d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right), \quad x_1=1, \quad x_2=2$

5-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

- кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Ушбу

$$\mathbf{f(x)=\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{3}{x}}$$

функциянинг дифференциали топилсин.

1069. $\mathbf{d\ln\left(\sqrt{1+2\sin x}+\sqrt{2\sin x-1}\right)}$ **1070.** $\mathbf{d\left(5sh^7\left(\frac{x}{35}\right)+7sh^5\left(\frac{x}{35}\right)\right)}$

1071. $\mathbf{d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}$ **1072.** $\mathbf{d\left(\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2arctg\sqrt{\sin x}\right)}$

6-маъруза: Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари.

РЕЖА:

1^0. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари.

2^0. Лейбниц формуласи

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *Одатда, $f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, ... ҳосилалари унинг юқори тартибли ҳосилалари дейилади. Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x)$ функциянинг $x\in(a,b)$ да $n-$тартибли ҳосиласи*

1^0. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $\forall x\in(a,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f'(x)$ функцияни $g(x)$ орқали белгилаймиз:

$$g(x)=f'(x) \qquad (x\in(a,b)).$$

1-таъриф. Агар $x_0\in(a,b)$ нуқтада $g(x)$ функция $g'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, бу ҳосила $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада-ги иккинчи тартибли ҳосиласи дейилади ва $f''(x_0)$ ёки $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$ каби белгиланади.

Худди шунга ўхшаш, $f(x)$ нинг 3-тартибли $f'''(x)$, 4-тартибли $f^{IV}(x)$ ва ҳ.к. тартибли ҳосилалари таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг $n-$тартибли ҳосиласи $f^{(n)}(x)$ нинг ҳосиласи $f(x)$ функциянинг $(n+1)-$тартибли ҳосиласи дейилади:

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Одатда, $f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, ... ҳосилалари унинг юқори тартибли ҳосилалари дейилади. Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x)$ функциянинг $x\in(a,b)$ да $n-$тартибли ҳосиласининг мавжудлиги бу функциянинг шу нуқта атрофида 1–, 2–, ..., $(n-1)-$тартибли ҳосилалари мавжудлигини тақоза этади. Аммо бу ҳосилаларнинг мавжудлигидан $n-$тартибли ҳосила мавжудлиги, умуман айтганда, келиб чиқавермайди.

Масалан,

$$f(x)=\frac{x|x|}{2}$$

функциянинг ҳосиласи $f'(x)=|x|$ бўлиб, бу функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас, яъни берилган функциянинг $x=0$ да биринчи тартибли ҳосиласи мавжуд, иккинчи тартибли ҳосиласи эса мавжуд эмас.

1-мисол. $f(x)=a^x$ бўлсин, $a>0,\ \ x\in R.$ Бу функция учун

$$(a^x)'=a^x\ln a,$$

$$(a^x)''=(a^x\ln a)'=a^x(\ln a)^2,$$

умуман

$$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n \tag{1}$$

бўлади. (1) муносабатнинг ўринли бўлиши математик индукция усули билан исботланади.

2-мисол. $f(x)=\sin x$ бўлсин. Бу функция учун

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

Умуман,

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

бўлади.

Шунга ўхшаш,

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

бўлади.

3-мисол. $f(x)=x^\alpha$ бўлсин, $x>0,\ \ \alpha\in R$. Бу функция учун

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},$$

$$(x^\alpha)''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

умуман,

$$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

бўлади.

Хусусан, $f(x)=\dfrac{1}{x},\ \ (x>0)$ функция учун

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

бўлиб, ундан

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

бўлишини топамиз.

Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,\, b)$ да $f^{(n)}(x)$ ва $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $(c \cdot f(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = const$;

2) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;

3) $$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \qquad (2)$$

$$\left(C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \right), \qquad f^{(0)}(x) = f(x)$$

бўлади.

◄ Бу тасдиқлардан 3)-сининг исботини келтирамиз. Равшанки, $n = 1$ да (2) муносабат ўринли бўлади. Айтайлик, (2) муносабат $n-1$ да ўринли бўлсин:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-1-k)}(x).$$

Кейинги тенгликни ҳамда

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \left((f(x) \cdot g(x))^{(n-1)} \right)' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-1-k)}(x) \right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (f^{(k+1)}(x) g^{(n-1-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)) = C_{n-1}^0 f(x) g^{(n)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^k) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) + C_{n-1}^{k-1} f^{(n)}(x) g(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \;►$$

Одатда, (2) **Лейбниц формуласи** дейилади.

4-мисол. Ушбу

$$y = x^2 \cos 2x$$

функциянинг $n-$тартибли ҳосиласи топилсин.

◄Лейбниц формуласида $f(x) = \cos 2x, \quad g(x) = x^2$ деб оламиз. Унда бу формулага кўра, айни пайтда $g(x) = x^2$ функция учун $k > 2$ бўлганда

$$g^{(k)}(x) = (x^2)^{(k)} = 0, \qquad (k > 2)$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x^2 (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' \cdot (\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)'' (\cos 2x)^{(n-2)}.$$

Равшанки,

$$(\cos 2x)^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)}=2^{n-1}\cos\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=2^{n-1}\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)}=2^{n-2}\cos\left(2x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)=-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Демак,

$$(x^2\cos 2x)^{(n)}=2^n\left(x^2-\frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)+2^n nx\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).\quad ►$$

Glossariy

$f(x)$ функциянинг $n-$тартибли ҳосиласи $f^{(n)}(x)$ нинг ҳосиласи $f(x)$ функциянинг $(n+1)-$тартибли ҳосиласи дейилади:

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Одатда, $f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, ... ҳосилалари унинг юқори тартибли ҳосилалари дейилади. Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x)$ функциянинг $x\in(a,b)$ да $n-$тартибли ҳосиласининг мавжудлиги бу функциянинг шу нуқта атрофида $1-$, $2-$, ..., $(n-1)-$тартибли ҳосилалари мавжудлигини тақоза этади.

6-Амалий машғулот:
Функциянинг ҳосиласига доир мисоллар ечиш

Таъриф ёрдамида $\mathbf{f'(x_0)}$ топилсин:

1^0. Юқори тартибли ҳосила тушунчаси. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да $\mathbf{f'(x)}$ ҳосилага эга бўлсин. Уни $\mathbf{g(x)}$ дейлик:

$$\mathbf{g(x)=f'(x)\qquad (x\in(a,b))}$$

$\mathbf{g(x)}$ функциянинг $\mathbf{x_0\in(a,b)}$ нуқтадаги ҳосиласи $\mathbf{g'(x_0)}$ га $\mathbf{f(x)}$ функциянинг x_0 нуқтадаги **иккинчи тартибли ҳосиласи** дейилади ва

$$\mathbf{f''(x_0)}\qquad \text{ёки}\qquad \mathbf{\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}}$$

каби белгиланади.

Худди шунга ўхшаш $\mathbf{f(x)}$ функциянинг **3-тартибли, 4-тартибли** ва ҳ.к. тартибли ҳосилалари таърифланади. Умуман,

$$\mathbf{f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'\qquad (n=2,3,...)}.$$

2^0. Содда қоидалар. Айтайлик, $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{g(x)}$ функциялари $\mathbf{(a,b)}$ да $\mathbf{f^{(n)}(x)}$ ва $\mathbf{g^{(n)}(x)}$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $\mathbf{(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x),\ \ c=const}$;

2) $\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;

3)

$$\left(C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, f^{(0)}(x) = f(x)\right) \qquad \textbf{(1)}$$

бўлади. (1) формула **Лейбниц формуласи** дейилади.

3^0. Асосий формулалар:

1) $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \qquad \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$,

2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$,

3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$,

4) $\left(x^m\right)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$,

5) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$.

6-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

. ***Ушбу***

$$f(x) = |x|^3$$

функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи топилсин.

◀Айтайлик, $x \neq 0$ бўлсин, Унда

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{агар } x > 0, \\ -x^3, & \text{агар } x < 0 \end{cases}$$

бўлиб,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{агар } x > 0, \\ -3x^2, & \text{агар } x < 0 \end{cases}$$

бўлади.

Айтайлик, $x = 0$ бўлсин. Бу ҳолда таърифга биноан

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = 0$$

бўлади.

Демак, берилган функция x нинг барча қийматларида ҳосилага эга бўлиб,

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x$$

бўлади.

Худди юқоридагидек, $\mathbf{x \neq 0}$ бўлганда

$$\mathbf{f''(x)=\begin{cases} 6x, & агар \quad x>0, \\ -6x, & агар \quad x<0, \end{cases} \qquad x=0}$$

бўлган

$$\mathbf{f''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x^2 sign\Delta x}{\Delta x}=0}$$

бўлиб, барча $\mathbf{x}$ ларда

$$\mathbf{f''(x)=6|x|}$$

бўлади.►

7-маъруза: Юқори тартибли дифференциаллар.

РЕЖА:

1^0. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари.

2^0. Дифференциал ҳисобнинг инвариантлиги

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: $f(x)$ *функциянинг дифференциали*

$$df(x)=f'(x)dx$$

бўлиб, бунда $dx=\Delta x$ *функция аргументнинг ихтиёрий орттирмаси.*

Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $\forall x\in(a,b)$ нуқтада $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Равшанки, $f(x)$ функциянинг дифференциали

$$df(x)=f'(x)dx \tag{3}$$

бўлиб, бунда $dx=\Delta x$ функция аргументнинг ихтиёрий орттирмаси.

2-таъриф. $f(x)$ функциянинг $x\in(a,b)$ нуқтадаги диф-ференциали $df(x)$ нинг дифференциали $f(x)$ функциянинг $x\in(a,b)$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциали дейи-лади ва $d^2f(x)$ каби белгиланади:

$$d^2f(x)=d(df(x)).$$

Худди шунга ўхшаш, $f(x)$ функциянинг учинчи $d^3f(x)$, тўртинчи $d^4f(x)$ ва ҳ.к. тартибдаги дифференциаллари таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг $n-$тартибли дифференциали $d^nf(x)$ нинг дифференциали $f(x)$ функциянинг $(n+1)-$тартибли дифференциали дейилади:

$$d^{n+1}f(x)=d(d^nf(x)).$$

5-мисол. Ушбу

$$f(x)=xe^{-x}$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциали топилсин.

◀ Берилган функциянинг иккинчи тартибли дифферен-циалини таърифига кўра топамиз:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(d(xe^{-x})) = d(xde^{-x} + e^{-x}dx) == d(-xe^{-x}dx + e^{-x}dx) =$$

$$= -d(xe^{-x})dx + (de^{-x})dx = -(xde^{-x} + e^{-x}dx)dx - e^{-x}(dx)^2 = xe^{-x}(dx)^2 -$$

$$= x \cdot e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2. \quad ►$$

Дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)(dx)^2, \qquad (4)$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f'''(x)(dx)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Масалан, юқорида келтирилган мисол учун

$$d^2(xe^{-x}) = (xe^{-x})''(dx)^2 = (e^{-x} - xe^{-x})'(dx)^2 =$$

$$= (e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x})(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2$$

бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) да берилган бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ нуқтада $n-$тартибли дифференциалларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $d^n(c \cdot f(x)) = c \cdot d^n f(x), \quad c = const;$

2) $d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x);$

3) $d^n(f(x) \cdot g(x)) = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) +$
$+ \ldots + C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x) + \ldots + f(x) \cdot d^n g(x)$

бўлади.

Бу муносабатларнинг 1), 2) – ларнинг исботи равшан. 3) – муносабатни исботлашда (2) формуладан фойдаланилади.

3⁰. Дифференциал шаклининг инвариантлиги. Айтайлик, $y = f(x)$ функция (a, b) да дифференциалланувчи бўлиб, x ўзгарувчи ўз навбатида бирор t ўзгарувчининг $[\alpha, \beta]$ да дифференциалланувчи функцияси бўлсин:

$$x = \varphi(t) \quad (t \in [\alpha, \beta], \; x = \varphi(t) \in [a, b]).$$

Натижада

$$y = f(x) = f(\varphi(t))$$

бўлади. Бу функциянинг дифференциали

$$dy = (f(\varphi(t)))'dt = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = f'(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = f'(x)dx$$

бўлиб, у (3) кўринишга эга бўлади. Шундай қилиб, $y = f(x)$ функцияда x ўзгарувчи эркли бўлган ҳолда ҳам, у бирор t ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолда ҳам $y = f(x)$ функция дифференциалининг кўриниши бир хил бўлади. Одатда бу хусусият дифференциал шаклининг **инвариантлиги** дейилади.

$y = f(\varphi(t))$ функциянинг иккинчи тартибли дифферен-циали қуйидагича бўлади:

$$d^2 y = d(df) = d(f'(x)dx) = df'(x) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) =$$

$$= f''(x)\cdot(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Бу муносабатни (4) муносабат билан солиштириб иккин-чи тартибли дифференциалларда дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли эмаслигини топамиз.

Glossariy

бирор t ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолда ҳам $y = f(x)$ функция дифференциалининг кўриниши бир хил бўлади. Одатда бу хусусият дифференциал шаклининг ***инвариантлиги*** *дейилади.*

7-Амалий машғулот:

Қуйидаги функциялар учун $y^{(n)}(x)$ топилсин:

1163. $y = x^3 + x + e^{3x}$

1164. $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

1165. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

1166. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1167. $y = \ln(ax+b)$

1168. $y = \sin^2 x$

1169. $y = \sin ax \sin bx$

1170. $y = \mathrm{ch}ax \cdot \mathrm{ch}bx$

1171. $y = \sin^2 x \sin 2x$

1172. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

1173. $y = \cos^4 x$

1174. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

1175. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x - 12}$

1176. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

1177. $y = \dfrac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$

7-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1. Ушбу

$$f(x) = |x|^3$$

функция $x=0$ нуқтада учинчи тартибдаги ҳосилага эга бўладими?

2. Ушбу

$$f(x)=(x-1)^2\sin x\sin(x-1)$$

функциянинг $n-$тартибли ҳосиласи топилсин $(n>2)$.

3. Агар $y=f(x)$ функция $n-$тартибли ҳосилага эга бўлса,

$$d^n f(ax+b)=a^n f^{(n)}(ax+b)\cdot(dx)^n$$

бўлиши исботлансин.

8-мавзу: Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

8-маъруза: Ферма, Ролл теоремалари

РЕЖА:

1^0.Ферма теоремаси

2^0. Ролл теоремаси

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. Ҳосилага эга бўлган функциялар ҳақидаги теоремалар. Бу теоремлар функцияларни текширишда муҳим рол ўйнайди.

1-теорема (Ферма теоремаси). $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган. $x_0\in X$ нуқтанинг атрофи учун $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset X$ $(\delta>0)$ бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\forall x\in U_\delta(x_0)$ да $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$,

2) $f'(x_0)$ мавжуд ва чекли бўлсин.

У ҳолда $f'(x_0)=0$ бўлади.

◄ Айтайлик, $\forall x\in U_\delta(x_0)$ да $f(x)\le f(x_0)$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда

$$f(x)-f(x_0)\le 0$$

бўлади.

Шартга кўра $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга. Шунинг учун

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

бўлади. Айни пайтда, $x>x_0$ бўлганда

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\le 0,$$

$x<x_0$ бўлганда

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\geq 0$$

бўлишидан $f'(x_0)=0$ экани келиб чиқади. ►

2-теорема (Ролль теоремаси). Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,\, b]$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x)\in C[a,\, b]$,

2) $\forall x\in(a,\, b)$ да $f'(x)$ мавжуд ва чекли,

3) $f(a)=f(b)$ бўлсин.

У ҳолда шундай $x_0\in(a,\, b)$ нуқта топиладики, $f'(x_0)=0$ бўлади.

◄ Шартга кўра $f(x)\in C[a,\, b]$. Унда Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра $f(x)$ функция $[a,\, b]$ да ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларга эришади, яъни шундай $c_1,\; c_2$ нуқталар $(c_1,\, c_2\in[a,\, b])$ топиладики,

$$f(c_1)=\max\{f(x)\mid x\in[a,\, b]\},$$
$$f(c_2)=\min\{f(x)\mid x\in[a,\, b]\}$$

бўлади.

Агар $f(c_1)=f(c_2)$ бўлса, унда $[a,\, b]$ да $f(x)=const$ бўлиб, $\forall x_0\in(a,\, b)$ да $f'(x_0)=0$ бўлади.

Агар $f(c_1)>f(c_2)$ бўлса, унда $f(a)=f(b)$ бўлганлиги сабабли $f(x)$ функция $f(c_1)$ ҳамда $f(c_2)$ қийматларнинг камида биттасига $[a,\, b]$ сегментнинг ички x_0 $(a<x_0<b)$ нуқтасида эришади. Ферма теоремасига биноан $f'(x_0)=0$ бўлади. ►

Машқлар

1. Агар $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, унинг шу $(a,\, b)$ да текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

2. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x\geq x_0$ да чекли ҳосилалар: $f'(x),\; g'(x)$ га эга бўлиб,

$$f(x_0)=g(x_0),\quad x>x_0 \quad \text{да} \quad f'(x)>g'(x)$$

бўлса, у ҳолда $x>x_0$ да $f(x)>g(x)$ бўлиши исботлансин.

3. $\forall x>-1$ учун

$$\frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x$$

тенгсизликларнинг ўринли бўлиши исботлансин.

Glossariy

Шартга кўра $f(x)\in C[a,\, b]$. Унда Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра $f(x)$ функция $[a,\, b]$ да ўзининг энг катта ва энг кичик *қийматларга эришади, яъни шундай c_1, c_2 нуқталар* $(c_1,\ c_2 \in [a,\ b])$ *топилади*

8-Амалий машғулот:

Қуйидаги келтириладиган теоремалар функцияларни ўрганишда муҳим аҳамиятга эга:

1^0. **Ролль теоремаси.** $\mathbf{f(x)}$ ***функция*** $\mathbf{[a,b]}$ ***да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:***

1) $\mathbf{f(x) \in C[a,b]}$,

2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{(a,b)}$ ***да*** $\mathbf{f'(x)}$ ***мавжуд ва чекли,***

3) $\mathbf{f(a) = f(b)}$.

У ҳолда шундай $c \in (a,b)$ ***топиладики,***

$$\mathbf{f'(c) = 0}$$

бўлади.

2^0. **Лагранж теоремаси.** $\mathbf{f(x)}$ ***функция*** $\mathbf{[a,b]}$ ***да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:***

1) $\mathbf{f(x) \in C[a,b]}$,

2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{(a,b)}$ ***да*** $\mathbf{f'(x)}$ ***мавжуд ва чекли.***

У ҳолда шундай $\mathbf{c \in (a,b)}$ ***топиладики,***

$$\mathbf{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}$$

бўлади.

3^0. **Коши теоремаси.** $\mathbf{f(x)}$ ***ва*** $\mathbf{g(x)}$ ***функциялар*** $\mathbf{[a,b]}$ ***да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:***

1) $\mathbf{f(x) \in C[a,b],\ g(x) \in C[a,b]}$,

2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{(a,b)}$ ***да*** $\mathbf{f'(x)}$ ***ва*** $\mathbf{g'(x)}$ ***хосилалар мавжуд ва чекли,***

3) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{(a,b)}$ ***да*** $\mathbf{g'(x) \neq 0}$.

У ҳолда шундай $\mathbf{c \in (a,b)}$ ***топиладики,***

$$\mathbf{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

бўлади.

1 – м и с о л . *Ушбу*

$$\mathbf{f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}}$$

функцияга $\mathbf{[-1,1]}$ ***оралиқда Ролль теоремасини қўллаш мумкинми?***

◄Равшанки, берилган функция $\mathbf{(-\infty,+\infty)}$ оралиқда, жумладан $\mathbf{[-1,1]}$ да узлуксиз. $\mathbf{[-1,1]}$ оралиқнинг четларида

$$\mathbf{f(-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1 - 1 = 0,}$$

$$\mathbf{f(1) = 1 - \sqrt[3]{1^2} = 1 - 1 = 0}$$

бўлиб, $\mathbf{f(-1) = f(1)}$ бўлади. $\mathbf{f(x)}$ функциянинг ҳосиласи $\mathbf{x \neq 0}$ бўлганда

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

бўлиб, $x = 0$ нуқтада мавжуд эмас. Бинобарин, Ролль теоремасининг $(-1,1)$ да чекли ҳосила мавжуд бўлиши шарти бажарилмайди. Шунинг учун берилган функцияга Ролль теоремасини қўллаб бўлмайди.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$fx = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$$

функцияга $[0,2]$ ***ораликда Лагранж теоремасини тадбиқ этиб, ундаги*** c ***нуқта топилсин.***

◄Берилган функциянинг $[0,2]$ ораликда Лагранж теоремасининг шартларини бажариши равшан. Лагранж теоремасига биноан

$$f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$$

бўлади. Берилган функция учун

$$f(2) = 12, \quad f(0) = -2, \quad f'(x) = 12x^2 - 10x + 1,$$

$$f'(c) = 12c^2 - 10c + 1$$

бўлиб,

$$12 - (-2) = f'(c) \cdot 2$$

бўлади. Натижада

$$12c^2 - 10c - 6 = 0$$

квадрат тенгламага келамиз. Бу квадрат тенгламанинг ечимлари

$$c_1 = \frac{5 + \sqrt{97}}{12}, \quad c_2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{12}$$

бўлиб, улардан c_1 ечим $[0,2]$ га тегишли бўлади.►

1181. $f(x) = x(x^2 - 1)$ функция учун $[-1,1]$ ва $[0,1]$ ораликларда Ролль теоремасининг шартлари текширилсин..

1182. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ функция учун $(-1,1)$ ва $(1,2)$ интервалларда шундай нуқталар топилсинки, бу нуқталарда функция графигига ўтказилган уринмалар абсциссалар ўқига параллел бўлсин.

1183. Ҳақиқий коэффицентли кўпҳад фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлса, унинг барча ҳосилалари ҳам фақат ҳақиқий илдизларга эга экани исботлансин.

1184. Ҳақиқий коэффицентли кўпҳаднинг иккита ҳақиқий илдизлари орасида унинг ҳосиласининг илдизи ҳам бор экани исботлансин.

1185. Агар $\mathbf{f}$ функция $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ кесмада $\mathbf{n}$ маротаба дифференциалланувчи ва бу кесманинг $\mathbf{n+1}$ та нуқтасида нолга айланса, у ҳолда $\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\xi)=\mathbf{0}$ бўладиган $\xi\in(\mathbf{a},\mathbf{b})$ нуқтанинг мавжудлиги исботлансин.

8-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

- кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);
- тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Агар $\mathbf{f}$ функция $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ кесмада $\mathbf{n}$ маротаба дифференциалланувчи ва бу кесманинг $\mathbf{n+1}$ та нуқтасида нолга айланса, у ҳолда $\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\xi)=\mathbf{0}$ бўладиган $\xi\in(\mathbf{a},\mathbf{b})$ нуқтанинг мавжудлиги исботлансин.

9-маъруза: Лагранж теоремаси

РЕЖА:

1^0.Лагранж теоремаси

2^0. Лагранж теоремасидан келиб чиқадиган натижалар

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Айни пайтда, унинг ҳосиласи*

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$1^{0.}$ 3-теорема (Лагранж теоремаси). Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,\, b]$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x)\in C[a,\, b]$,
2) $\forall x\in(a,\, b)$ да $f'(x)$ ҳосила мавжуд ва чекли бўлсин.

У ҳолда шундай $c\in(a,\, b)$ нуқта топиладики,

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

бўлади.

◄ Ушбу

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (1)$$

функцияни қараймиз. Бу функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Айни пайтда, унинг ҳосиласи

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

бўлади.

Ролль теоремасига биноан, шундай c $(c \in (a,\, b))$ нуқта топиладики,

$$F'(c) = 0 \tag{2}$$

бўлади.

(1) ва (2) муносабатлардан

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

яъни

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

1-натижа. Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in (a,\, b)$ да $f'(x) = 0$ бўлсин. У ҳолда $\forall x \in (a,\, b)$ да $f(x) = const$ бўлади.

◄ $x,\ x_0 \in (a,\, b)$ ни олиб, чеккалари x ва x_0 бўлган сегментда $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўллаб $f(x) = f(x_0) = const$ бўлишини топамиз. ►

2-натижа. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $(a,\, b)$ да $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x \in (a,\, b)$ да $f'(x) = g'(x)$ бўлсин. У ҳолда $\forall x \in (a,\, b)$ да $f(x) = g(x) + const$ бўлади.

◄ Бу натижанинг исботи $f(x) - g(x)$ функцияга нисбатан 1-натижани қўллаш билан келиб чиқади. ►

1-мисол. $\forall x',\ x'' \in R$ учун $|\sin x' - \sin x''| \le |x' - x''|$ тенгсизлик исботлансин.

◄ Айтайлик, $x' < x''$ бўлсин. $f(x) = \sin x$ га $[x',\, x'']$ да Лагранж теоремасини қўллаймиз. Унда шундай $c \in (x',\ x'')$ нуқта топиладики,

$$|\sin x' - \sin x''| = |\cos c| \cdot (x'' - x')$$

бўлади. Агар $\forall t \in R$ да $|\cos t| \le 1$ эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги муносабатдан

$$|\sin x' - \sin x''| \le |x' - x''| \qquad (\forall x',\ x'' \in R)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2-мисол. Ушбу

$$e^x \ge 1 + x$$

тенгсизлик исботлансин.

◄ Айтайлик, $x > 0$ бўлсин. Унда $f(t) = e^t$ функцияга $[0,\, x]$ да Лагранж теоремасини қўллаб топамиз:

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0). \qquad c \in (0,\, x)$$

Агар $c > 0$ да $e^c > 1$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги муносабатдан $e^x \ge 1 + x$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $x<0$ бўлса, унда $f(t)=e^t$ функцияга $[x,\,0]$ да Лагранж теоремасини қўллаб,

$$e^x-e^0=e^c(0-x)$$

ни ва $-x>0$, $e^c<1$ бўлишини эътиборга олиб, $e^x\geq 1+x$ эканлигини топамиз.

Равшанки, $x=0$ да $e^0=1$. Демак, $\forall x\in R$ да $e^x\geq 1+x$. ►

Glossariy

$f(x)$ функция $(a,\,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x\in(a,\,b)$ да $f'(x)=0$ бўлсин. У ҳолда $\forall x\in(a,\,b)$ да $f(x)=const$ бўлади.

◄ *$x,\ x_0\in(a,\,b)$ ни олиб, чеккалари x ва x_0 бўлган сегментда $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўллаб $f(x)=f(x_0)=const$ бўлишини топамиз.* ►

9-Амалий машғулот:

1186.Ушбу

$$\mathbf{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

кўпҳаднинг ҳосиласининг илдизлари ҳақиқий, туб ва $\mathbf{(0;1)}$, $\mathbf{(1;2)}$, $\mathbf{(2;3)}$, $\mathbf{(3;4)}$ интервалларда ётиши исботлансин.

1187. $\mathbf{y=x^3}$ эгри чизиғида шундай нуқта топилсинки, бу нуқтада унга ўтказилган уринма $\mathbf{A(-1;-1)}$ ва $\mathbf{B(2;8)}$ нуқталарни туташтирувчи ватарга параллел бўлсин.

1188. $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$ функцияси учун $\mathbf{[a,b]}$ кесмада $\mathbf{(a\cdot b<0)}$ чекли орттирмалар формуласи (Лагранж формуласи) ўринлими?

1189.Фараз қилайлик, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ интервалда узлуксиз $\mathbf{f'(x)}$ ҳосилага эга бўлсин. $\mathbf{(a,b)}$ да ётувчи ихтиёрий ξ нуқта учун

$$\mathbf{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)} \qquad \mathbf{(a<x_1<\xi<x_2<b)}$$

муносабат ўринли бўладиган x_1, x_2 нуқталарини кўрсатиш (топиш) мумкинми?

Ушбу мисолни қаранг: $f(x)=x^3 \quad (-1\le x\le 1), \quad \xi=0$.

1190.Лагранж теоремасидан фойдаланиб, тенгсизликлар исботлансин:

а) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

б) $py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$, бу ерда $0<y<1$ ва $p>1$;

в) $|\mathrm{arctg}\,a-\mathrm{arctg}\,b|\le|a-b|$;

г) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, агар $0<b<a$;

д) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, \quad x>0$;

е) $e^x>1+x, \quad x\in R$;

ж) $e^x>ex, \quad x>1$.

9-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Лагранж теоремасидан фойдаланиб, тенгсизликлар исботлансин:

а) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

б) $py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$, бу ерда $0<y<1$ ва $p>1$;

в) $|\mathrm{arctg}\,a-\mathrm{arctg}\,b|\le|a-b|$;

10-маъруза: Коши теоремаси

РЕЖА:

1^0.Коши теоремаси
2^0. Узилишга эга бўлган функциялар

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. 4-теорема (Коши теоремаси). Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни бажарсин.

1) $f(x) \in C[a,\, b],\ g(x) \in C[a,\, b]$,
2) $\forall x \in (a,\, b)$ да $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва чекли;
3) $\forall x \in (a,\, b)$ да $g'(x) \neq 0$ бўлсин.

У ҳолда шундай $c \in (a,\, b)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади.

◄ Аввало $g(b) \neq g(a)$ бўлишини таъкидлаб ўтамиз, чунки $g(b) = g(a)$ бўладиган бўлса, унда Ролль теоремасига кўра шундай $c \in (a,\, b)$ нуқта топилар эдики, $g'(c) = 0$ бўлар эди. Бу 3)-шартга зид.

Қуйидаги

$$\varPhi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] \quad (x \in [a,\, b])$$

функцияни қараймиз. Бу функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига биноан шундай $c \in (a,\, b)$ нуқта топиладики,

$$\varPhi'(c) = 0 \tag{3}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\varPhi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x) \tag{4}$$

(3) ва (4) муносабатлардан

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c) = 0$$

яъни

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлиши келиб чиқади. ►

1-мисол. $\forall x',\ x''\in R$ учун $|\sin x'-\sin x''|\le|x'-x''|$ тенгсизлик исботлансин.

◄ Айтайлик, $x'<x''$ бўлсин. $f(x)=\sin x$ га $[x',\ x'']$ да Лагранж теоремасини қўллаймиз. Унда шундай $c\in(x',\ x'')$ нуқта топиладики,

$$|\sin x'-\sin x''|=|\cos c|\cdot(x''-x')$$

бўлади. Агар $\forall t\in R$ да $|\cos t|\le 1$ эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги муносабатдан

$$|\sin x'-\sin x''|\le|x'-x''|\qquad(\forall x',\ x''\in R)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2-мисол. Ушбу

$$e^x\ge 1+x$$

тенгсизлик исботлансин.

◄ Айтайлик, $x>0$ бўлсин. Унда $f(t)=e^t$ функцияга $[0,\ x]$ да Лагранж теоремасини қўллаб топамиз:

$$e^x-e^0=e^c(x-0).\qquad c\in(0,\ x)$$

Агар $c>0$ да $e^c>1$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги муносабатдан $e^x\ge 1+x$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $x<0$ бўлса, унда $f(t)=e^t$ функцияга $[x,\ 0]$ да Лагранж теоремасини қўллаб,

$$e^x-e^0=e^c(0-x)$$

ни ва $-x>0,\quad e^c<1$ бўлишини эътиборга олиб, $e^x\ge 1+x$ эканлигини топамиз.

Равшанки, $x=0$ да $e^0=1$. Демак, $\forall x\in R$ да $e^x\ge 1+x$. ►

3-мисол. Ушбу

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}\qquad(0<b<a)$$

тенгсизлик исботлансин.

◄ $[b,\ a]$ сегментда $f(x)=\ln(x)$ функцияни қараймиз. Бу функция шу сегментда узлуксиз ва $(b,\ a)$ да $f'(x)=\frac{1}{x}$ ҳосилага эга. Унда Лагранж теоремасига кўра шундай $c\ \ (b<c<a)$ нуқта топиладики,

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{c}\tag{5}$$

бўлади.

Равшанки,

$$b<c<a\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{1}{b}.\tag{6}$$

(5) ва (6) муносабатлардан

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2^0. Функция ҳосиласиниг узилиши ҳақида. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a, b) нинг x_0 нуқтасидан бошқа барча нуқталарида $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин.

Агар $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = b$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада чап ҳосила $f'(x_0-0)$ га эга бўлиб, $f'(x_0-0)=b$ бўлади.

Агар $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = d$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнг ҳосила $f'(x_0+0)$ га эга бўлиб, $f'(x_0+0)=d$ бўлади.

◄ Айтайлик, $\Delta x \neq 0$ ва $x_0+\Delta x \in (a, b)$ бўлсин. Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+\theta\cdot\Delta x), \quad (0<\theta<1).$$

Энди

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x) = b$$

мавжуд бўлсин дейлик. Унда

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x) = \lim_{x-x_0\to -0} f'(x) = \lim_{\Delta x\to -0} f'(x_0+\Delta x) = b$$

бўлиб,

$$\Delta x \to -0 \text{ да } \ f'(x_0+\theta\cdot\Delta x)\to b,$$

яъни

$$\Delta x \to -0 \text{ да } \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to b$$

бўлади. Демак, $f'(x_0-0)=b$. Шунга ўхшаш, $f'(x_0+0)=d$ бўлиши кўрсатилади. ►

Айтайлик, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлсин. Унда, равшанки,

$$f'(x_0-0) = f'(x_0+0) = f'(x_0)$$

бўлади. Айни пайтда,

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x), \quad \lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

лимитларниг мавжуд ва чекли бўлишидан

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: агар $f(x)$ функция (a, b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу $f'(x)$ ҳосила биринчи тур узилишга эга бўлолмайди.

Бошқача айтганда ҳар бир $x_0\in(a, b)$ нуқтада $f'(x)$ функция ёки узлуксиз бўлади, ёки иккинчи тур узилишга эга бўлади. ►

4-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик.

◀ $x\neq 0$ бўлганда

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

бўлади.

$x=0$ бўлганда, ҳосила таърифига кўра

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

бўлади.

Демак, $f'(x)$ функция R да аниқланган ва $x\neq 0$ да узлуксиз бўлади. $f'(x)$ ҳосила $x=0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга бўлади, чунки $x\to 0$ да

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

функция лимитга эга эмас. ▶

Glossariy

Агар $\mathbf{f(x)}$ *функция* $\mathbf{(a,b)}$ *интервалда дифференциалланувчи ва чегараланмаган бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи ҳам чегараланмаганлиги Агар* $\mathbf{f(x)}$ *функция* $\mathbf{x>0}$ *нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f'(x)=0}$ *бўлса, у ҳолда бўлади*

10-Амалий машғулот:

1191.Қуйидаги

$$\mathbf{f(x)=x^2} \quad \text{ва} \quad \mathbf{g(x)=x^3}$$

функциялар учун $\mathbf{[-1;1]}$ кесмада Коши формуласи ўринли эмаслиги тушунтирилсин.

1192.Фараз қилайлик, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{[x_1,x_2]}$ $\mathbf{(x_1\cdot x_2>0)}$ кесмада дифференциалланувчи бўлсин. Қуйидаги исботлансин:

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$ бу ерда $x_1 < \xi < x_2$.

1193.Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

бўлиши исботлансин.

1194.Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$ экани исботлансин.

1195.Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалда дифференциалланувчи ва чегараланмаган бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи ҳам чегараланмаганлиги исботлансин.

1196.Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада дифференциалланувчи бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда $\exists\, \xi \in (a,b)$ мавжуд бўлиб,

$$f(a) - f(\xi) = \frac{1}{2} \xi f'(\xi)$$

муносабат ўринлилигини исботлансин.

1197.Исботлансин:

а) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \quad |x| \geq 1$;

б) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, \quad |x| \leq \dfrac{1}{2}$.

10-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Агар $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *кесмада дифференциалланувчи бўлиб,* $f(a) = f(b)$ *бўлса, у ҳолда* $\exists\, \xi \in (a,b)$ *мавжуд бўлиб,*

$$f(a) - f(\xi) = \frac{1}{2} \xi f'(\xi)$$

муносабат ўринлилигини исботлансин.

11-маъруза: Функциянинг монотонлиги. Функциянинг экстремумлари

РЕЖА:

1^0. Функциянинг монотонлиги.

2^0. Функциянинг экстремумлари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: $f(x)$ *функция* $(a,\ b)$ *да ўсувчи бўлсин. Унда* $\Delta x > 0$ *бўлганда*

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$$

бўлади. Ҳосила таърифидан фойдалниб топамиз:

$$f'(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

1^0. Функциянинг монотонлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ берилган бўлсин.

Маълумки,

$\forall x_1,\ x_2 \in (a,b)$, учун $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$ $\ (f(x_1) < f(x_2))$ бўлса, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да ўсувчи (қатъий ўсувчи), $\forall x_1,\ x_2 \in (a,b)$ учун $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$ $\ (f(x_1) > f(x_2))$ бўлса, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да камаювчи (қатъий камаювчи) дейилади.

1-теорема. Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,\ b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

$f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ да ўсувчи бўлиши учун $\forall x \in (a,\ b)$ да

$$f'(x) \geq 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да ўсувчи бўлсин. Унда $\Delta x > 0$ бўлганда

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$$

бўлади. Ҳосила таърифидан фойдалниб топамиз:

$$f'(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Етарлилиги. Айтайлик, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ мавжуд бўлиб, $f'(x) \geq 0$ бўлсин. $[x_1,\ x_2]$ да $(x_1,\ x_2 \in (a,\ b),\ x_1 < x_2)$ $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўллаб топамиз:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0.$$

Демак, $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2),\quad f(x)$ ўсувчи. ►

Худди шунга ўхшаш, қуйидаги теорема исботланади.

2-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да камаювчи бўлиши учун $\forall x \in (a,b)$ да

$$f'(x) \le 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Шунингдек қуйидаги теоремаларни исботлаш қийин эмас.

3-теорема. $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ да қатъий ўсувчи бўлиши учун

1) $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x) \ge 0$.

2) $\forall x \in (\alpha,\beta)$ да $f'(x) = 0$ тенглик бажариладиган $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ интервалнинг мавжуд бўлмаслик шартларининг бажарилиши зарур ва етарли.

4-теорема. $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ да қатъий камаювчи бўлиши учун

1) $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x) \le 0$,

2) $\forall x \in (\alpha,\beta)$ да $f'(x) = 0$

тенглик бажариладиган $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ интервалнинг мавжуд бўлмаслиги шартларининг бажарилиши зарур ва етарли.

Демак, $(a,\ b)$ да

$f'(x) \ge 0 \ \Rightarrow\ f(x)$ ўсувчи $\ \Rightarrow\ f'(x) \ge 0,$

$f'(x) \le 0 \ \Rightarrow f(x)$ камаювчи $\ \Rightarrow\ f'(x) \le 0,$

$f'(x) > 0 \ \Rightarrow f(x)$ қатъий ўсувчи $\ \Rightarrow\ f'(x) \ge 0,$

$f'(x) < 0 \ \Rightarrow f(x)$ қатъий камаювчи $\ \Rightarrow\ f'(x) \le 0$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

функциянинг ўсувчи, камаювчи бўлиш оралиқлари топилсин.

◄Равшанки,

$$f'(x) = x \cdot 2^{-x}(2 - x\ln 2)$$

бўлади.

Ушбу $f'(x) > 0,\ \ x \cdot 2^{-x}(2 - x\ln 2) > 0$ тенгсизлик $x \in \left(0,\ \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ да ўринли бўлади. Демак, $f(x)$ функция $x \in \left(0,\ \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ да ўсувчи, $(-\infty,\ 0) \cup (\dfrac{2}{\ln 2},\ +\infty)$ да камаювчи бўлади. ►

2^0. Функциянинг экстремумлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ нуқталарда

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \left(f(x) \ge f(x_0)\right)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эришади дейилади, x_0 нуқтага эса $f(x)$ функция-нинг максимум (минимум) нуқтаси дейилади.

2-таъриф. Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\left(U_\delta(x_0) \subset X\right)$ нуқталарда

$$f(x) < f(x_0) \qquad \left(f(x) > f(x_0)\right)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада қатъий максимумга (қатъий минимумга) эришади дейилади,

Функциянинг максимум ҳамда минимуми умумий ном билан унинг экстремумлари, максимум ҳамда минимум нуқталари эса унинг экстремум нуқталари дейилади.

5-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқтада экстремумга эришсин.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

◀Айтайлик, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришиб, шу нуқтада ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \text{ да } f(x) \le f(x_0)$$

бўлади.

$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ интервалда $f(x)$ функцияга Ферма теоремасини қўллаб топамиз:

$$f'(x_0) = 0. \blacktriangleright$$

3-таъриф. Функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқта унинг станционар (критик) нуқтаси дейилади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция бирор нуқтада экстре-мумга эришса, у шу нуқтада ҳосилага эга бўлиши шарт эмас.

Масалан, $f(x) = |x|$ функция $x_0 = 0$ нуқтада минимумга эришади, бироқ у шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

Демак, $f(x)$ функциянинг экстремум нуқталари унинг стационар ҳамда ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталари бўлиши мумкин.

4-таъриф. Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки,

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \text{ да } g(x) > 0 \text{ ёки}$$
$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \text{ да } g(x) < 0$$

бўлса, $g(x)$ функция x_0 нуқтанинг чап томонида ишора сақлайди дейилади.

Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки,

$$\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta) \text{ да } g(x)>0 \text{ ёки}$$
$$\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta) \text{ да } g(x)<0$$
бўлса, $g(x)$ функция x_0 нуқтанинг ўнг томонида ишора сақлайди дейилади.

6-теорема. Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\exists \delta>0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ да $f'(x)$ ҳосила мавжуд;

2) $f'(x_0)=0$;

3) $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтанинг ўнг ва чап томонларида ишора сақласин.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгартирса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгартирмаса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эриш-майди.

◄ Айтайлик,
$$\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0) \text{ да } f'(x)>0,$$
$$\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta) \text{ да } f'(x)<0$$
бўлсин. У ҳолда $\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ ўсувчи, яъни $f(x)< f(x_0)$, $\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ камаювчи, яъни $f(x)< f(x_0)$ бўлиб, $\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ да $f(x)<f(x_0)$ бўлади. Демак, бу ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

Айтайлик,
$$\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0) \text{ да } f'(x)<0,$$
$$\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta) \text{ да } f'(x)>0$$
бўлсин. У ҳолда $\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ камаювчи, яъни $f(x)> f(x_0)$, $\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ ўсувчи, яъни $f(x)> f(x_0)$ бўлиб, $\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ да $f(x)>f(x_0)$ бўлади.

Демак, бу ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

Агар $\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0)$ да $f'(x)>0$, $\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta)$ да $f'(x)>0$ ёки $\forall x \in (x_0-\delta,\, x_0)$ да $f'(x)<0$, $\forall x \in (x_0,\, x_0+\delta)$ да $f'(x)<0$ бўлса, унда $f(x)$ функция $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ да ўсувчи ёки $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ да камаювчи бўлиб $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эриш-майди. ►

7-теорема. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x) \in C(X)$;

2) $\exists \delta>0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да $f'(x)$ ҳосила мавжуд ва чекли;

3) $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтанинг ўнг ва чап томонларида ишора сақлансин.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгартирса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгар-тирмаса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

Бу теорема юқоридаги 6-теорема каби исботланади.

8-теорема. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган ва $m \in N$, $m \geq 2$, $x_0 \in X$ бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\exists\delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ да $f^{(m-1)}(x)$ ҳосила мавжуд;

2) $f^{(m)}(x_0)$ ҳосила мавжуд;

3) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0,\quad f^{(m)}(x_0) \neq 0.$

У ҳолда $m = 2k,\ k \in N$ бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришиб, $f^{(m)}(x_0) < 0$ бўлганда x_0 нуқтада макси-мумга, $f^{(m)}(x_0) > 0$ да минимумга эришади.

Агар $m = 2k+1,\ k \in N$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

◄ $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги Тейлор формуласи

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0$$

ни оламиз. Бу формула теореманинг шартида ушбу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + 0\big((x-x_0)^m\big),\ \ x \to x_0$$

кўринишга келади. Бундан эса $x \neq x_0$ да

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o\big((x-x_0)^m\big)}{(x-x_0)^m}\right], \quad x \to x_0$$

бўлиши келиб чиқади.

«o» нинг таърифига кўра $\frac{1}{m!}|f^{(m)}(x_0)| > 0$ сон учун $\exists\delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ нуқталарда

$$\left|\frac{o\big((x-x_0)^m\big)}{(x-x_0)^m}\right| < \frac{1}{m!}\left|f^{(m)}(x_0)\right|$$

бўлади. Демак, $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ учун

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o\big((x-x_0)^m\big)}{(x-x_0)^m} \quad \text{ва} \quad \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

миқдорлар бир хил ишорали бўлади. Бундан эса $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

нинг ишораси $f(x) - f(x_0)$ айирманинг ишораси билан бир хил бўлиши келиб чиқади.

Агар $m = 2k,\ k \in N$ бўлиб, $f^{(m)}(x_0) > 0$ бўлса, унда $f(x) - f(x_0) > 0$, яъни $f(x) > f(x_0)$ бўлади. $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

Агар $m=2k,\ k\in N$ бўлиб, $f^{(m)}(x_0)<0$ бўлса, унда $f(x)-f(x_0)<0$, яъни $f(x)<f(x_0)$ бўлади. $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

Агар $m=2k+1,\ k\in N$ бўлса, $f(x)-f(x_0)$ айирма ишора сақламайди. Бу ҳолда функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди. ►

Хусусан, агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси бўлиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f''(x_0)\neq 0$ ҳосилага эга бўлса, шу нуқтада $f(x)$ функция $f''(x_0)<0$ бўлганда максимумга, $f''(x_0)>0$ минимумга эга бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x)=2\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^2}+1$$

функция экстремумга текширилсин.

◄ Бу функция $R=(-\infty;+\infty)$ аниқланган бўлиб, у шу тўпламда узлуксиз. Унинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x)=2\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}-5\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \qquad (1)$$

Равшанки, функциянинг ҳосиласи $x_1=1$ нуқтада нолга аланади: $f'(1)=0$; $x_2=0$ нуқтада эса функциянинг ҳосиласи мавжуд эмас.

Ҳосила ифодаси (1) дан кўрнадики, $x=1$ нуқтанинг чап томонидаги нуқталарда $f'(x)<0$ ўнг томонидаги нуқталарда $f'(x)>0$ бўлади. Демак, берилган функция $x=1$ нуқтада минимумга эришади ва $\min f(x)=f(1)=-2$ бўлади.

Яна ҳосила ифодаси (1) дан кўринадики, $x=0$ нуқтанинг чап томонидаги нуқталарда $f'(x)>0$, ўнг томонидаги нуқта-ларда $f'(x)<0$ бўлади.

Демак, $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада максимумга эришади ва $\max f(x)=f(0)=1$ бўлади. ►

Glossariy

Функциянинг камаювчилиги шарти. $\mathbf{f(x)}$ *функция* $\mathbf{(a,b)}$ *да* $\mathbf{f'(x)}$ *ҳосилага эга бўлсин* $\mathbf{f(x)}$ $\mathbf{(a,b)}$ *да* ***камаювчи*** *бўлиши учун* $\mathbf{f'(x)\le 0}$ $\mathbf{(x\in(a,b))}$ *бўлиши зарур ва етарли.*

Агар $\mathbf{f'(x)<0}$ *бўлса* $\mathbf{f(x)}$ *функция* $\mathbf{(a,b)}$ *да* ***қатъий камаювчи*** *бўлади.*

11-Амалий машғулот:

1^0. Функциянинг ўсувчилиги шарти. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да $\mathbf{f'(x)}$ ҳосилага эга бўлсин. $\mathbf{f(x)}$ $\mathbf{(a,b)}$ да **ўсувчи** бўлиши учун $\mathbf{f'(x)\ge 0}$ $\mathbf{(x\in(a,b))}$ бўлиши зарур ва етарли.

Агар $\mathbf{f'(x)>0}$ бўлса, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да **қатъий ўсувчи** бўлади.

2^0. **Функциянинг камаювчилиги шарти.** $f(x)$ функция (a,b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин $f(x)$ (a,b) да **камаювчи** бўлиши учун $f'(x)\le 0$ $(x\in(a,b))$ бўлиши зарур ва етарли.

Агар $f'(x)<0$ бўлса $f(x)$ функция (a,b) да **қатъий камаювчи** бўлади.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$$

функциянинг ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқлари топилсин.

◀Берилган функция жуфт бўлганлиги учун уни $(0,+\infty)$да қараш етарли бўлади. Равшанки,

$$f'(x)=\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}.$$

Энди $f'(x)>0$, яъни $\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}>0$ тенгсизликни ечамиз.

$$\sin\frac{\pi}{x}>0 \quad\Rightarrow 0<\frac{\pi}{x}<\pi \qquad \text{ва} \qquad 2n\pi<\frac{\pi}{x}<\pi+2n\pi \qquad (n\in N).$$

Кейинги тенгсизликлардан

$$x>1 \text{ ва } \quad \frac{1}{2n+1}<x<\frac{1}{2n} \qquad (n\in N)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $(1,+\infty)$ ва $\left(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right),$ $(n\in N)$ интервалларда функция қатъий ўсувчи бўлади.

Равшанки, $f'(x)<0$, яъни $\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}<0$ тенгсизликнинг ечими

$$\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2n-1} \qquad (n\in N)$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функция

$$\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right) \qquad (n\in N)$$

интервалларда қатъий камаювчи бўлади.

$f(x)$ жуфт функция бўлгани учун у $(-\infty,0)$ даги

$$\left(-\frac{1}{2n},-\frac{1}{2n-1}\right) \qquad (n\in N)$$

интервалларда қатъий ўсувчи,

$$(-\infty,-1) \qquad \text{ва} \qquad \left(-\frac{1}{2n+1},-\frac{1}{2n}\right) \qquad (n\in N)$$

Интервалларда эса қатъий камаювчи бўлади.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\frac{x^2}{10}-\ln x$$

функция ўсувчи, камаювчиликка текширилсин.

◄Бу функция $(0,+\infty)$ да аниқланган бўлиб, унинг ҳосиласи

$$f'(x)=\frac{x}{5}-\frac{1}{x}$$

бўлади.

Энди $f'(x)\geq 0$, яъни $\frac{x}{5}-\frac{1}{x}\geq 0$

ёки $f'(x)\leq 0$, яъни $\frac{x}{5}-\frac{1}{x}\leq 0$

бўлишга текширамиз. Равшанки,

$$\frac{x}{5}-\frac{1}{x}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2-5}{5x}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\geq 0$$

Бундан эса, $\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ да $f'(x)\geq 0$, $\left(0,\sqrt{5}\right)$ да $f'(x)\leq 0$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функция $\left(0,\sqrt{5}\right)$ да камаювчи, $\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ да ўсувчи бўлади.►

3 – м и с о л . ***Агар*** $f(x)$ ***ва*** $g(x)$ ***функциялар*** $[a,b]$ ***сегментда:***

1) $f'(x)$, $g'(x)$ ***ҳосилаларга эга,***

2) $f'(x)\geq g'(x)$ ***тенгсизлик ўринли,***

3) $f(a)=g(a)$

бўлса, $\forall x\in(a,b]$ ***да*** $f(x)>g(x)$ ***бўлиши исботлансин.***

◄$f(x)-g(x)=\varphi(x)$ дейлик. Унда $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\geq 0$ бўлади. Демак, $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ да ўсувчи.

Энди $\varphi(a)=f(a)-g(a)=0$ бўлишини эътиборга олиб $(a,b]$ да $\varphi(x)>0$ яъни $f(x)>g(x)$ бўлишини топамиз.

Хусусан, $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=x-\frac{x^2}{2}$ $(0<x<+\infty)$ дейилса, улар учун учала шарт бажарилиб, ушбу

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2} \quad (0<x<+\infty)$$

тенгсизлик келиб чиқади.►

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи, камаювчи бўладиган оралиқлари топилсин.

1247. $f(x)=3x-x^3$

1248. $f(x)=8x^3-x^4$

1249. $f(x)=x^3-3x+5$

1250. $f(x)=x(1+2\sqrt{x})$

1251. $f(x)=e^{kx}$

1252. $f(x)=x\,|x|$

1253. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

1254. $f(x)=|x|^3$

1255. $f(x)=\frac{e^x}{x}$

1256. $f(x)=\cos x-x$

1257. $f(x)=x+\sin x$

1258. $f(x)=x^2-10\ln x$

1259. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

1260. $f(x)=x^2e^{-x^2}$

1262. $f(x)=x+|\sin 2x|$

1263. $f(x)=x^2\ln x$

1264. $f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$

1265. $f(x)=x^2-\ln x^2$

1266. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}$

1267. $f(x)=x^ne^{-x}$ $\quad (n>0, \quad x\geq 0)$

1268. $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$

1269. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

1270. $f(x)=3^{\frac{1}{x-3}}$

1271. $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$

1272. $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln x$

Қуйидаги функциялар ўсувчиликка ва камаювчиликка текширилсин:

1273. $f(x) = \ln|x|$

1274. $f(x) = x + \mathrm{arctg}x$

1275. $f(x) = x^3 + \arcsin x$

1276. $f(x) = \lg^3 x + x^4$

1277. $f(x) = x^5 \lg^7 x \quad (x \geq 1)$

1278. $f(x) = \lg\cos x \quad \left(0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

1279. $f(x) = \arcsin(3x - 1)$

1280. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\mathrm{arctg}x^n$

1281. $f(x) = |\ln x|$

1282. $f(x) = \mathrm{arctg}(x^2 - 2x + 3)$

1283. $f(x) = (x^2 + 4x + 6)\cdot\ln(x^2 + 4x + 6)$

1284. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos^2 x}$

1285. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$

1286. $f(x) = 2\cdot e^{x^2 - 4x}$

1287. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 20)$

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, бу тўпламда $f(x)$ мусбат ва камаювчи, $g(x)$ эса манфий ва ўсувчи бўлса, қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлиши аниқлансин:

1289. $y = f(x)\cdot g(x)$

1290. $y = f(x) - 4g(x)$

1291. $y = f^2(x)$

1292. $y = g^2(x)$

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, шу тўпламда бу функциялар манфий ва камаювчи бўлса, қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлиши аниқлансин:

1293. $y = f(x)\cdot g(x)$

1294. $y = f^3(x)$

1295. $y = 4f(x) + 8g(x)$

1296. $y = g^6(x)$

1297. Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалда ўсувчи бўлиб, $f'(x)$ мавжуд бўлса, $f'(x)$ нинг (a,b) да ўсувчилиги ҳақида нима дейиш мумкин?

1298. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{g(x)}$ функциялар $\mathbf{n}$ марта дифференциалланувчи;

2) $\mathbf{f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)} \qquad \mathbf{(k = 0,1,2,...,n-1)}$,

3) $\mathbf{x > x_0}$ **да** $\mathbf{f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)}$.

У холда $\mathbf{x > x_0}$ **да** $\mathbf{f(x) > g(x)}$ бўлиши исботлансин.

Қуйидаги тенгсизликлар исботлансин:

1299. $\mathbf{x + \frac{1}{x} \geq 2} \qquad \mathbf{(x > 0)}$

1300. $\mathbf{2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}} \qquad \mathbf{(x > 1)}$

1301. $\mathbf{(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x} \qquad \mathbf{(x \geq -1,\ \ \alpha > 1)}$

1302. $\mathbf{e^x \geq 1 + x}$

1303. $\mathbf{e^x \geq ex}$

1304. $\mathbf{e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}} \qquad \mathbf{(x \geq 0)}$

1305. $\mathbf{\ln(1+x) \leq x} \qquad \mathbf{(x \geq 0)}$

1306. $\mathbf{\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}} \qquad \mathbf{(x > 0)}$

1307. $\mathbf{e^x > 1 + \ln(1+x)} \qquad \mathbf{(x > 0)}$

1308. $\mathbf{1 - 2\ln x \leq \frac{1}{x^2}} \qquad \mathbf{(x > 0)}$

1309. $\mathbf{\sin x \geq \frac{2}{\pi} x} \qquad \mathbf{\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)}$

1310. $\mathbf{\sin x > x - \frac{x^3}{6}} \qquad \mathbf{(x > 0)}$

1311. $\mathbf{\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}} \qquad \mathbf{(x > 0)}$

1312. $\mathbf{\mathrm{tg}\,x > x + \frac{x^3}{3}} \qquad \mathbf{\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)}$

1313. $\mathbf{\mathrm{arctg} \leq x} \qquad \mathbf{(x \geq 0)}$

1314. $\sin x+\operatorname{tg}x>2x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

1315. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\geq\cos x$ $\left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)$

1316. $(a+b)^\alpha\leq a^\alpha+b^\alpha$ $(0\leq\alpha\leq 1)$

1317. $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}\leq\sqrt[n]{x-y}$ $(x\geq y\geq 0.)$

1318. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leq\frac{x^n+y^n}{2}$ $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ n\in N)$

1319. $\frac{x-y}{x}<\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}$ $(x>y>0)$

11-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1320. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ $(x>0)$

1321. $x^\alpha-1>\alpha(x-1)$ $(x>1,\ \alpha\geq 2)$

12-маъруза: Функциянинг қавариқлиги, эгилиш нуқталари ва асимптоталари

РЕЖА:

1^0. Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлиги.

2^0. Функциянинг эгилиш нуқталари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *$f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, унда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг (a, b) да ботиқ (қатъий ботиқ) бўлиши учун $f'(x)$нинг (a, b) да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.*

1^0. Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x_1, x_2 \in (a, b)$ учун $x_1 < x_2$ бўлсин.

$f(x)$ функция графигининг $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ нуқта-ларидан ўтувчи тўғри чизиқни $y = l(x)$ десак, у қуйидагича

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

бўлади.

1-таъриф. Агар ҳар қандай оралиқ $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ да жойлашган $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \le l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

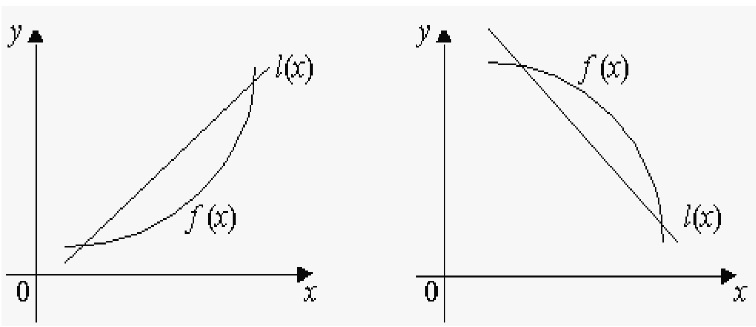
бўлса, $f(x)$ функция (a, b) да ботиқ (қатъий ботиқ) функция дейилади.

2-таъриф. Агар ҳар қандай оралиқ $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ да жойлашган $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \ge l(x) \qquad \left(f(x) > l(x)\right)$$

бўлса, $f(x)$ функция (a, b) да қавариқ (қатъий қавариқ) функция дейилади.

Ботиқ ҳамда қавариқ функцияларнинг графиклари 7-чизмада тасвирланган:



7-чизма.

Айтайлик, $\alpha_1 \geq 0,\ \ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_1 = 1$ бўлиб, $\forall x_1,\, x_2 \in (a,\ b)$ бўлсин. Функциянинг ботиқлиги ҳамда қавариқлигини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

3-таъриф. Агар

$$f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

бўлса, $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да ботиқ (қатъий ботиқ) дейилади.

4-таъриф. Агар

$$f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

бўлса, $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да қавариқ (қатъий қавариқ) дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2$$

функция R да қатъий ботиқ функция бўлади.

◄ 3-таърифдан фойдаланиб топамиз:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = (\alpha_1 x_1)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 + (\alpha_2 x_2)^2 <$$
$$< \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_1\alpha_2(x_1 + x_2)^2 + \alpha_2^2 x_2^2 = \alpha_1 x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 x_2^2(\alpha_1 + \alpha_2) =$$
$$= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$ ►

1-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да берилган бўлиб, унда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг $(a,\, b)$ да ботиқ (қатъий ботиқ) бўлиши учун $f'(x)$нинг $(a,\, b)$ да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $f(x)$функция $(a,\, b)$ да ботиқ бўлсин. У ҳолда $\forall x_1,\, x_2 \in (a,\, b),\ \ x_1 < x_2,\ \forall x \in (x_1,\, x_2)$ учун

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

бўлиб, ундан

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

бўлиши келиб чиқади. ($(x_2 - x_1) = (x_2 - x) + (x - x_1)$ дейилди). Кейинги тенгсизликда $x \to x_1$ сўнг $x \to x_2$ да лимитга ўтиб,

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

бўлишини топамиз. Ундан $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $f'(x)$ функция (a,b) да ўсувчи.

$f(x)$ функция (a, b) да қатъий ботиқ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

бўлади. Лагранж теоремасига мувофиқ

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(c_1), \quad x_1<c_1<x;$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(c_2), \quad x<c_2<x_2$$

бўлиб, ундан $f'(x_1)<f'(x_2)$ бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $f'(x)$ функция (a, b) да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлсин: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1<x_2$ да

$$f'(x_1)\le f'(x_2) \quad (f'(x_1)<f'(x_2)).$$

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(c_1), \quad x_1<c_1<x;$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(c_2), \quad x<c_2<x_2.$$

Равшанки, $x_1<c_1<x<c_2<x_2 \Rightarrow c_1<c_2$. Демак, $f'(c_1)\le f'(c_2)$ $(f'(c_1)<f'(c_2))$ бўлиб, юқоридаги муносабатлардан

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) да ботиқ (қатъий ботиқ) эканини билдиради. ►

Худди шунга ўхшаш, қуйидаги теорема ҳам исботланади.

2-теорема. $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, унда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

$f(x)$ функциянинг (a, b) да қаварик (қатъий қаварик) бўлиши учун $f'(x)$ нинг (a, b) да камаювчи (қатъий камаювчи) бўлиши зарур ва етарли.

Айтайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, у шу интервалда $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бундан ташқари (a, b) интервалнинг ҳар қандай (α, β) $((\alpha, \beta)\subset(a, b))$ қисмида $f''(x)$ айнан нолга тенг бўлмасин.

3-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда ботиқ (қаварик) бўлиши учун (a, b) да

$$f''(x)\ge 0 \quad (f''(x)\le 0)$$

бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи юқоридаги ҳамда функциянинг монотонлиги ҳақидаги теоремалардан келиб чиқади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x)=\ln x \qquad (x>0)$$

функция қаварик бўлади.

◀Бу функция учун

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

бўлади. 2-теоремага кўра берилган $f(x) = \ln x$ функция $(0, +\infty)$ да қатъий қаварик бўлади. ▶

2^0. Функциянинг эгилиш нуқталари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$, $\delta > 0$ бўлсин.

5-таъриф. Агар $f(x)$ функция $(x_0 - \delta,\ x_0)$ да ботиқ (қаварик), $(x_0,\ x_0 + \delta)$ да қаварик (ботиқ) бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **эгилиш нуқтаси** дейилади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ да $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ да $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$,

$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta,)$ да $f''(x) \leq 0$ $(f''(x) \geq 0)$,

бўлса, $f'(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади ва демак, $f''(x_0) = 0$ бўлади. Демак, $f(x)$ функция эгилиш нуқтаси-да $f''(x) = 0$ бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3$$

функция $x_0 = 0$ нуқтада эгилади.

◀Бу функция учун

$$f''(x) = 6x$$

бўлиб,

$$\forall x \in (-\delta, 0) \text{ да } f''(x) < 0$$

$$\forall x \in (0,\ \delta,) \text{ да } f''(x) > 0 \qquad (\delta > 0)$$

бўлади. ▶

3^0. Функция графигининг асимптоталари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

6-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи хам чексиз бўлса, $x = x_0$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг вертикал асимп-тотаси дейилади.

Масалан, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ функция графиги учун $x = 0$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $(x_0, +\infty)$ да аниқланган бўлсин.

7-таъриф. Агар шундай k ва b сонлари топилсаки,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \qquad (x \to +\infty \text{ да } \alpha(x) \to 0)$$

бўлса, $y = kx + b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси дейилади.

4-теорема. $f(x)$ функция графиги $y=kx+b$ оғма асимптотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$$

бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $y=kx+b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси бўлсин. Унда

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

бўлиб, $x\to+\infty$ да $\alpha(x)\to 0$ бўлади. Бу тенгликни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha x}{x}=k;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$$

муносабатлар ўринли бўлсин. Бу муносабатлардан

$$(f(x)-kx)-b=\alpha(x)\to 0 \;\Rightarrow\; f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

4-мисол. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ функциянинг оғма асимптотаси топилсин.

◄ Бу функция учун

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2$$

бўлади. Демак, $y=x+2$ тўғри чизиқ берилган функция графигининг оғма асимптотаси бўлади.►

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$$

функциянинг ботиқ ҳамда қавариқ бўладиган оралиқлари топилсин.

2. Ушбу

$$f(x)=\frac{2x^2+x-2}{x-1}$$

функция графигининг оғма асимптотаси топилсин.

3. Ушбу

а) $f(x)=x^2\sqrt[x]{e}$,

б) $f(x)=x+2\operatorname{arcctg} x$,

в) $f(x)=\left|e^x-1\right|$ функцияларни ҳосилалар ёрдамида тўлиқ текширилсин, графиклари чизилсин.

Glossariy

$y=kx+b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси бўлсин. Унда

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

бўлиб, $x\to+\infty$ да $\alpha(x)\to 0$ *бўлади. Бу тенгликни эътиборга олиб топамиз:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha x}{x}=k;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

12-Амалий машғулот:

Функциянинг қавариқлиги, ботиқлиги, эгилиш нуқталари ва асимптоталари

1^0. Функция қавариқлиги ва ботиқлиги тушунчаси. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да берилган бўлиб, $\mathbf{x_1<x_2}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\mathbf{x_1,x_2\in(a,b)}$ лар берилган бўлсин. Маълумки, $\mathbf{(x_1,f(x_1))}$, $\mathbf{(x_2,f(x_2))}$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги

$$\mathbf{l(x)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\cdot f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot f(x_2)}$$

кўринишга эга.

Агар ихтиёрий $\mathbf{x_1,x_2\in(a,b)}$ да $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{(x_1,x_2)}$ учун

$$\mathbf{f(x)\geq l(x)\quad (f(x)>l(x))}$$

бўлса, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да **қавариқ (қатъий қавариқ)** дейилади.

Агар ихтиёрий $\mathbf{x_1,x_2\in(a,b)}$ да $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{(x_1,x_2)}$ учун

$$\mathbf{f(x)\leq l(x)\quad (f(x)<l(x))}$$

бўлса, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да **ботиқ (қатъий ботиқ)** дейилади.

2^0. Функция қавариқлиги ва ботиқлигининг етарли шартлари. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да иккинчи тартибли $\mathbf{f''(x)}$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $\mathbf{(a,b)}$ да

$$\mathbf{f''(x)>0\quad (f''(x)<0)}$$

бўлса, у ҳолда $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да **ботиқ (қавариқ)** бўлади.

3^0. Функция графигининг эгилиш нуқтаси. Эгилиш нуқта бўлишининг етарли шарти. $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $\delta > 0$ ва $x_0 \in (a,b)$ учун

$$(x_0 - \delta,\ \ x_0 + \delta) \subset (a,b)$$

бўлсин. Агар $f(x)$ функция

$(x_0 - \delta,\ \ x_0)$ да ботиқ (қаварик)

$(x_0,\ \ x_0 + \delta)$ да қаварик (ботиқ)

бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг (функция графигининг) **эгилиш нуқтаси** дейилади.

Агар

1) $f(x)$ функция $(x_0 - \delta,\ \ x_0 + \delta)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга,

2) $f''(x) = 0$,

3) $(x_0 - \delta,\ \ x_0)$ да $f''(x) > 0$, $(x_0,\ \ x_0 + \delta)$ да $f''(x) < 0$ ёки $(x_0 - \delta,\ \ x_0)$ да $f''(x) < 0$, $(x_0,\ \ x_0 + \delta)$ да $f''(x) > 0$

бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **эгилиш нуқтаси** бўлади.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлмайдиган нуқтаси ҳам унинг эгилиш нуқтаси бўлиши мумкин.

4^0. Функция графигининг асимптоталари. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси $(a \in R \cup \{-\infty, +\infty\})$ бўлсин.

Агар

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0 \text{ ёки } \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$$

бўлса, $y = kx + b$ тўғри чизиқ, $f(x)$ функциянинг **оғма асимптотаси** дейилади. Бунда

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx]$$

бўлади.

Агар ушбу $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ **ёки** $-\infty$,

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \text{ **ёки** } -\infty$$

муносабатлардан хеч бўлмаганда биттаси ўринли бўлса, $x = a$ $(a \in R)$ тўғри чизиқ $f(x)$ функциянинг **вертикал асимптотаси** дейилади.

8 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$$

функциянинг қавариқлиги, ботиқлигини аниқлаб эгилиш нуқтаси топилсин.

◀Берилган функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$,

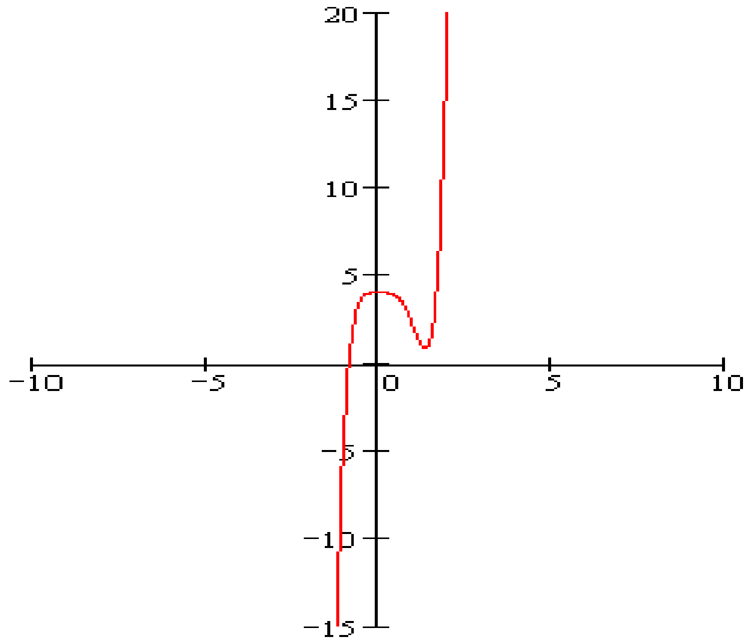
$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$

Равшанки, $x_1=0$ да $f''(0)=0$, $x_2=1$ да $f''(1)=0$ бўлади. Бу нуқталар атрофида $f''(x)$ нинг ишорасини аниқлаймиз;

$(-\delta,0)$ да $f''(x)<0$, $(0,\delta)$ да $f''(x)<0$, $(\delta>0)$

$(1-\delta,1)$ да $f''(x)<0$, $(1,\ \ 1+\delta)$ да $f''(x)>0$.

Демак, $(-\infty,1)$ да $f''(x)<0$ бўлиб, шу оралиқда функция қаварик бўлади; $(1,+\infty)$ да $f''(x)>0$ бўлиб, шу оралиқда функция ботиқ бўлади. $x=1$ нуқта эгилиш нуқтаси бўлади. (6-чизма).►



6-чизма.

9 – м и с о л . ***Ушбу*** $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ ***функция графигининг эгилиш нуқтаси топилсин.***

◄Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'(x)=\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}, \qquad f''(x)=\frac{10}{9}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9\cdot\sqrt[3]{x}}$$

Равшанки $x=0$ нуқтада функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд эмас. Бу нуқта атрофида $f''(x)$ нинг ишорасини аниқлаймиз:

$x<0$ бўлганда $f''(x)<0,$ $x>0$ бўлганда $f''(x)>0$ бўлгани сабабли берилган функция $(-\infty,0)$ да қаварик, $(0,+\infty)$ да ботиқ бўлиб $x=0$ эгилиш нуқтаси бўлади.►

10 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$$

функция графигининг асмптоталари топилсин.

◄Равшанки, $x\to 3$ да $f(x)\to\infty$. Демак $x=3$ тўғри чизиқ функция графигининг вертикал асимптотаси бўлади. Энди қуйидаги

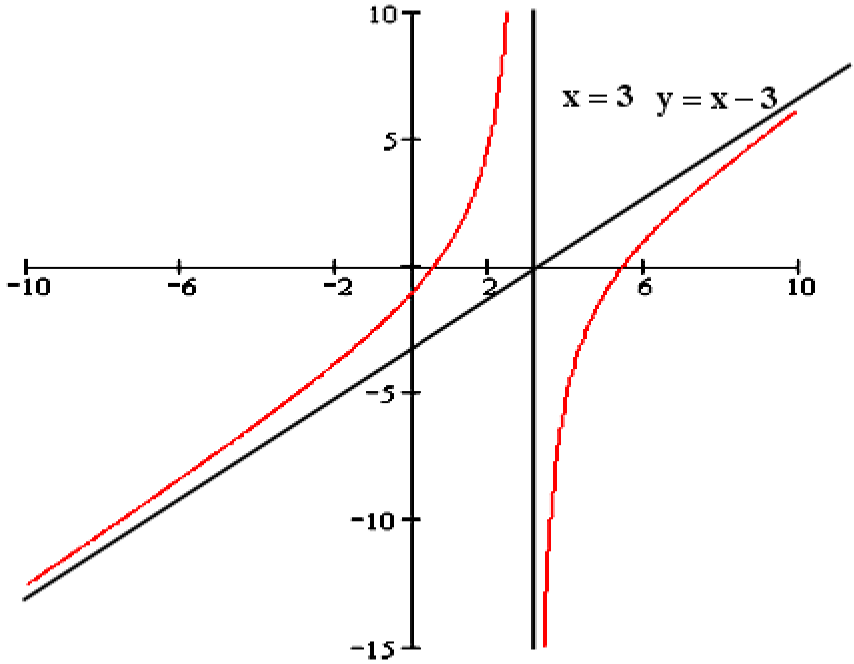
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$$

лимитларни ҳисоблаймиз.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{x(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-3x}{x-3}=-3$$

Демак, $y=x-3$ тўғри чизиқ берилган функция графигининг оғма асимптотаси бўлади. (7-чизма).►



7-чизма.

Қуйидаги функцияларнинг қаварик ва ботиқ бўлиш оралиқлари топилсин.

1389. $y=x^3-4x$

1390. $y=\frac{1}{x^2}$

1391. $y=3x^4-8x^3-6x^2+12$

1392. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}\quad (a>0)$

1393. $y=\frac{1}{(x+1)^3}$

1394. $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$

1395. $y=\arcsin\frac{1}{x}$

1396. $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x}$

1397. $y=\sqrt{1+x^2}$

1398. $y=e^{-x^2}$

1399. $y=x+\sin x$

1400. $y=\ln\left(1+x^3\right)$

1401. $y=\dfrac{|x-1|}{x\cdot\sqrt{x}}$

1402. $y=4\cdot\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$

1403. $y=1-\left|x^2-2\right|$

1404. $y=\left(1+x^2\right)e^x$

1405. Ушбу $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}\cdot x^2+1$ функция a нинг қандай қийматида $(-\infty,+\infty)$ да ботиқ бўлади.

1406. Ушбу $y=x^n$ функция $n>1$ бўлганда $(0,+\infty)$ оралиқда қаварик, $0<n<1$ бўлганда $(0,+\infty)$ да ботиқ бўлиши кўрсатилсин.

1407. Агар $[a,b]$ сегментда $f''(x)\geq 0$ бўлса, ихтиёрий $x_1,x_2\in[a,b]$ лар учун

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

бўлиши исботлансин.

$f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $\forall\, x_1,x_2\in(a,b)$ ва $\alpha_1\geq 0,\alpha_2\geq 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ учун

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция (a,b) да **ботиқ,**

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\geq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция (a,b) да **қаварик** дейилади.

1408. Ушбу

$$e^{\frac{x+y}{2}}\leq\frac{e^x+e^y}{2}\qquad\left(x,y\in(-\infty,+\infty)\right)$$

тенгсизлик исботлансин.

Қуйидаги функция графигининг эгилиш нуқталари топилсин.

1409. $y=3x^5-5x^4+4$

1410. $y=\cos x$

1411. $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$

1412. $y=e^{\frac{1}{x}}$

1413. y=1-ln(x2-4)

1414. y=arctg$\frac{1}{x}$

1415. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1416. $y = \frac{|x-1|}{x^2}$

1417. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1418. $y = 2x^2 + \ln x$

1419. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

1420. $y = \sqrt{1-x^3}$

Қуйидаги функцияларни қавариқликка, ботиқликка текширилсин, эгилиш нуқталари топилсин.

1421. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

1422. $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

1423. $y = (x+1)^4 + e^x$

1424. $y = \operatorname{arctg} x - x$

1425. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$

1426. $y = 2 - |x^5 - 1|$

1427. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

1428. $y = e^{\sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

Қуйидаги функцияларнинг эгилиш нуқталари топилсин.

1429. $y = x^5 - 10x^2 + 3$

1430. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$

1431. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1432. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1433. a ва b қандай қийматларида $y = ax^3 + bx^2$ функциянинг эгилиш нуқтаси $x = 1$ бўлади?

1434. Ушбу $y = x^3 + x^4 \sin\frac{\pi}{x}$ функциянинг эгилиш нуқтаси $x = 0$ бўлиши исботлансин.

1435. Ушбу $y = x\sin x$ функциянинг эгилиш нуқтаси қуйидаги

$$y^2(4 + x^2) = 4x^2$$

тенгликни қаноатлантириши кўрсатилсин.

1436. h нинг қандай қийматларида $x = \pm\sigma$ нуқта

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-h^2\cdot x^2}\quad (h>0)$$

функциянинг эгилиш нуқтаси бўлади?

Қуйидаги функцияларнинг эгилиш нуқталари топилсин.

1437. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

1438. $y=\left|e^x-1\right|$

Қуйидаги функция графикларининг асимптоталари топилсин.

1439. $y=\frac{2x^2+x-2}{x-1}$

1440. $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$

1441. $y=\frac{x^5}{x^4-1}$

1442. $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

1443. $y=2x-\frac{\cos x}{x}$

1445. $y=4x+\operatorname{arctg}\frac{x}{4}$

1446. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

1447. $y=\frac{x^2}{|x|+1}$

1448. $y=x\cdot\operatorname{arctg}x$

1449. $y=\sqrt{x^2-1}-x$

1450. $y=1+x\cdot e^{\frac{x}{2}}$

1451. $y=\left|e^x-1\right|$

1452. $y=x+\frac{\ln x}{x}$

1453. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

1454. $y=x\sin\frac{1}{x}$

1455. $y=x^2\ln x$

12-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1456. $y = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$ **1457.** $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

1458. $y = \ln sh x$ **1459.** $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$

13-14-маъруза: Функцияларни тўлиқ текшириш.

РЕЖА:

1. **Функцияларни шартлар ёрдамида тўлиқ текшириш.**
2. **Графикларни чизиш**

Функцияни тўлиқ текшириш деганда функция ҳақидаги барча маълумотлардан, жумладан функция ҳосиласи тўғрисидаги маълумотлардан фойдаланиб функция хусусиятини ўрганиш ва шу асосда **унинг графигини чизиш** тушунилади.

$y = f(x)$ функция тўлиқ текширилиши ва унинг графиги чизилиши керак бўлсин. Текширишни қуйидаги схема бўйича олиб бориш мумкин:

1) Функциянинг аниқланиш тўпламини (соҳасини) топиш;
2) Функцияни жуфт, тоқлигини ҳамда даврийлигини аниқлаш;
3) Функциянинг узлуксизлигини аниқлаш, узилиш нуқталарини топиш.
4) Функцияни ўсувчи ва камаювчилигини аниқлаш, ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқларини топиш;
5) Функциянинг экстремум қийматларини топиш;
6) Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлигини аниқлаш, қавариқ хамда ботиқ бўладиган оралиқларни, шунингдек эгилиш нуқталарини топиш;
7) Функция графиги асимптоталарини топиш;
8) Функция аргументи x нинг баъзи қийматларида функция қийматларини, жумладан координаталар ўқларини кесиш нуқталарини топиш.
9) Келтирилган маълумотларидан фойдаланиб функция графигини чизиш.

11 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$$

функция тўлиқ текширилсин ва графиги чизилсин.

◄ $f(x)$ функция $X = R \setminus \{0\}$ тўпламда аниқланган. Бу функция учун

$$f(-x) \neq f(x) \qquad f(-x) \neq -f(x)$$

бўлгани учун у жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. Функция $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ да узлуксиз бўлиб, $x = 0$ нуқтада 2–тур узилишга эга. Равшанки,

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 1}{x^2}, \qquad f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}$$

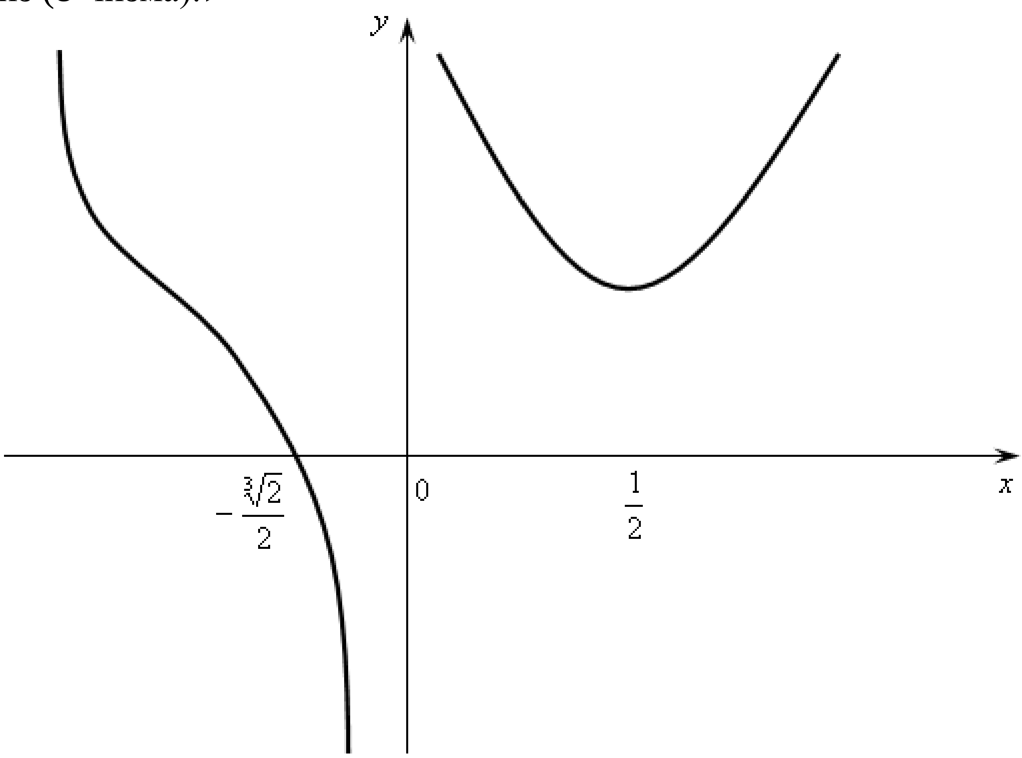
бўлиб, $\mathbf{x=\frac{1}{2}}$ функциянинг стационар нуқтаси бўлади. (чунки $\mathbf{\frac{8x^3-1}{x^2}=0}\Rightarrow$ $\mathbf{x=\frac{1}{2}}$).

Агар $\mathbf{x<\frac{1}{2}}$ бўлса, $\mathbf{f'(x)<0;}$ $\mathbf{x>\frac{1}{2}}$ бўлса, $\mathbf{f'(x)>0}$ бўлади. Демак, функция $\mathbf{\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)}$ да камаювчи, $\mathbf{\left(\frac{1}{2},+\infty\right)}$ да ўсувчи бўлиб, $\mathbf{f''\left(\frac{1}{2}\right)>0}$ бўлгани сабабли функция $\mathbf{x=\frac{1}{2}}$ нуқтада минимумга эришади ва $\mathbf{\min f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=3}$ бўлади. Энди $\mathbf{f''(x)=8+\frac{2}{x^3}=0}$ тенгламани ечиб, топамиз; $\mathbf{x=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$. Агар $\mathbf{-\infty<x<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$ ва $\mathbf{0<x<+\infty}$ бўлса, $\mathbf{f''(x)>0;}$ $\mathbf{-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}<x<0}$ бўлса $\mathbf{f''(x)<0}$ бўлади.

Демак, функция $\mathbf{\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)}$ ва $\mathbf{(0.+\infty)}$ да ботиқ, $\mathbf{\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},0\right)}$ да қаварик бўлиб, $\mathbf{x=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$ нуқта эгилиш нуқтаси бўлади. $\mathbf{x=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$ да $\mathbf{OX}$ ўқини кесади.

$\mathbf{x=0}$ тўғри чизиқ берилган функциянинг вертикал асимптотаси бўлади

Келтирилган маълумотлардан фойдаланиб функция графигини чизамиз (8-чизма).▶



8-чизма.

12 – м и с о л . *Ушбу*

$$\mathbf{f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

функция тўлиқ текширилсин ва графиги чизилсин.

◄Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty,+\infty)$ бўлади. Равшанки, $\mathbf{f(x)}$ функция учун

$$\mathbf{f(-x)=-f(x)}$$

бўлади. Демак, $\mathbf{f(x)}$ тоқ функция бўлиб, унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.

Берилган функция $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз. Унинг ҳосилалари

$$\mathbf{f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}},\quad \mathbf{f''(x)=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}}$$

бўлади. Ихтиёрий $\mathbf{x\in(-\infty,+\infty)}$ да $\mathbf{f'(x)\neq 0}$ бўлиб, $\mathbf{x=\pm 1}$ нуқталарда ҳосила мавжуд эмас.

$\mathbf{x\in(-1-\delta,-1)}$ да $\mathbf{f'(x)<0}$, $\mathbf{x\in(-1,-1+\delta)}$ да $\mathbf{f'(x)>0}$ ва

$\mathbf{x\in(1-\delta,1)}$ да $\mathbf{f'(x)>0}$, $\mathbf{x\in(1,\ \ 1+\delta)}$ да $\mathbf{f'(x)<0}$

бўлгани учун $\mathbf{x=-1}$ да функция минимумга эга бўлиб, $\mathbf{\min f(x)=f(-1)=-\sqrt[3]{4}}$, $\mathbf{x=1}$ да функция максимумга эга бўлиб, $\mathbf{\max f(x)=f(1)=\sqrt[3]{4}}$ бўлади.

Равшанки, $\mathbf{f''(x)=0}$ ва $\mathbf{x=\pm 1}$ нуқта $\mathbf{f''(x)}$ мавжуд эмас. $\mathbf{x\in(-\infty,0)\setminus\{-1\}}$ да $\mathbf{f''(x)<0}$, $\mathbf{x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}}$ да $\mathbf{f''(x)>0}$ бўлади.

Демак $(-\infty,0)$ да функция қаварик, $(0,+\infty)$ да ботиқ бўлиб, $\mathbf{x=0}$ эгилиш нуқта.

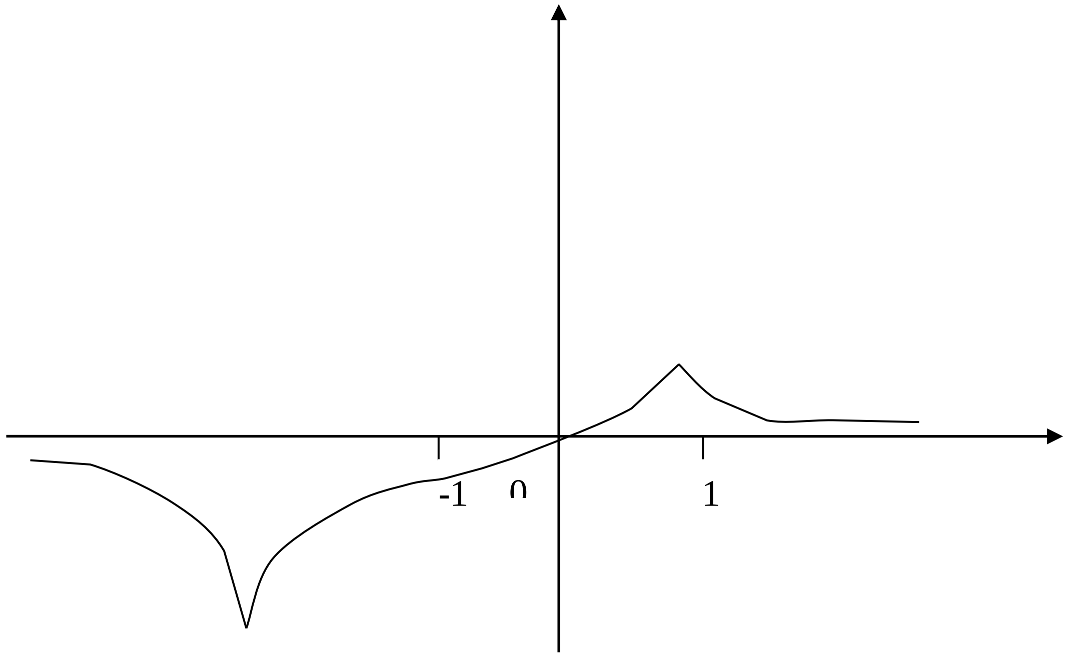
Берилган функция графиги вертикал асимптотага эга эмас ва

$$\mathbf{k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}=0}$$

$$\mathbf{b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)=0}$$

бўлгани учун $\mathbf{y=0}$ оғма (бу ҳолда горизонтал) асимптота бўлади. Функция $\mathbf{OY}$ ўқини $\mathbf{x=0}$ нуқтада кесиб ўтади: $\mathbf{f(0)=0}$.

Бу маълумотлардан фойдаланиб функция графигини чизамиз. (9-чизма).►



9-чизма.

Қуйидаги функциялар тўлиқ текширилсин, графиклари чизилсин.

1460. $y = x|x|$ **1461.** $y = \frac{1}{5} \cdot (4x^3 - x^4)$

1462. $y = (x-1)^2 \cdot (x+2)$ **1463.** $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$

1464.y= $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ **1465.** $y = 16x(x-1)^3$

15-маъруза: Лопитал қоидалари

РЕЖА:

1^0. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ **кўринишидаги ҳоллар.**

2^0. $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0$ **кўринишидаги ҳоллар.**

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *Маълум шартларда функция лимитини ҳисоблаш қоидалари ўрганилган эди. Кўп ҳолларда бундай шартлар бажарилмаганда, яъни*

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 0,\ g(x)\to 0:\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to +\infty,\ g(x)\to +\infty:\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to +\infty,\ g(x)\to +\infty:\ f(x)-g(x) \text{ нинг лимити } (\infty-\infty),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 0,\ g(x)\to 0:\ (f(x))^{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(0^0\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 1,\ g(x)\to +\infty:\ (f(x))^{g(x)} \text{нинг лимити } \left(1^{\infty}\right)$$

$x\to x_0$ *да* $f(x)\to\infty, g(x)\to 0$*:* $f(x)\ g(x)$ *ни лимити* ∞^0*ни топишда функциянинг ҳосилаларига асосланган қоидага кўра ҳисоблаш қулай бўлади. Бундай усул билан функция лимитини топиш* ***Лопиталь қоидалари*** *дейилади.*

1^0. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ **кўринишидаги ҳоллар.**

1-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a,b) да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0;$

2) $\forall x\in(a,b)$ да $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x\in(a,b)$ да $g'(x)\neq 0;$

4) Ушбу $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell,\ (\ell\in R)$ мавжуд. У ҳолда $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ бўлади.

◄ $f(b)=0,\ g(b)=0$ деб оламиз. Унда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(b-\delta,\ b]$ да $(\delta>0)$ узлуксиз бўлиб қолади. Теореманинг 4-шартига кўра:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(b-\delta,\ b):\ \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right|<\varepsilon$$

бўлади.

Энди $(b-\delta,\ b]$ да Коши теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|=\left|\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}-\ell\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\ell\right|<\varepsilon$$

$$(c\in(x,\,b)\subset[b-\delta,\ b]).$$

Демак,

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell\ .$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди. ►

1-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to e}\frac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e}$$

муносабат исботлансин.

◄ $f(x)=(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}$, $\quad g(x)=x-e$ функциялари учун $(1,\ e)$ да 1-теореманинг барча шартлари бажарилади:

1) $\lim\limits_{x\to e}f(x)=\lim\limits_{x\to e}\left[\ \left((\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}\ \right)\right]=0,$

$\lim\limits_{x\to e}g(x)=\lim\limits_{x\to e}(x-e)=0;$

2) $f'(x)=\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x}-\frac{\beta}{e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1}$, $\quad g'(x)=1;$

3) $g'(x)=1\neq0;$

4) $\lim\limits_{x\to e}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x}-\frac{\beta}{e}\cdot\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1}}{1}=\frac{\alpha-\beta}{e}.$

Демак,

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to e}\frac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e}.\ ►$$

2-теорема. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,\,+\infty)$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0;$

2) $\forall x\in(a,\ +\infty)$ да $f'(x),\ g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x\in(a,\ +\infty)$ да $g'(x)\neq0;$

4) Ушбу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

мавжуд $(\ell\in R)$. У ҳолда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

бўлади.

◀ $a>0$ деб, $t=\frac{1}{x}$ деймиз. Унда $t\in(0,\ \frac{1}{a})$ бўлиб, $x\to+\infty$ да $t\to+0$. Энди $F(t)$ ва $G(t)$ функцияларни қуйидагича

$$F(t)=f(\tfrac{1}{t}),\qquad G(t)=g(\tfrac{1}{t})$$

аниқлаймиз. Унда

$$t\to+0 \text{ да } F(t)\to 0,\quad G(t)\to 0;$$

$$F'(t)=f'(\tfrac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2}),\quad G'(t)=g'(\tfrac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2});$$

$$\frac{F'(t)}{G'(t)}=\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}\to\ell,\quad (t\to+0)$$

бўлиб, 1-теоремага кўра, $t\to+0$ да

$$\frac{F(t)}{G(t)}\to\ell$$

бўлади. Кейинги муносабатдан эса

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

бўлиши келиб чиқади ►

2-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$$

лимитни ҳисобланг.

◀Агар $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}-1,\ g(x)=2\operatorname{arctg}x^2-\pi$ дейилса, улар учун 2-теореманинг барча шартлари бажарилади, жумладан

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}},\qquad g'(x)=\frac{4x}{1+x^4}$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{4x}{1+x^4}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^4}{2x^4}=-\frac{1}{2}$$

бўлади. 2-теоремага кўра

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}=-\frac{1}{2}$$

бўлади. ►

Қуйидаги теоремалар ҳам юқорида келтирилган теоремаларга ўхшаш исботланади.

3-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = \infty;$

2) $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x), \ g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x \in (a, b)$ да $g'(x) \neq 0;$

4) Ушбу $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \ (\ell \in R)$ мавжуд. У ҳолда

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

бўлади.

4-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a, +\infty)$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty;$

2) $\forall x \in (a, +\infty)$ да $f'(x), \ g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x \in (a, +\infty)$ да $g'(x) \neq 0;$

4) Ушбу $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \ (\ell \in R)$ мавжуд. У ҳолда $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ бўлади.

2^0. $0 \cdot \infty, \ \infty - \infty, \ 1^\infty, \ 0^0$ **кўринишидаги ҳоллар.** Бу кўриниш-даги аниқмасликлар $\dfrac{0}{0}, \ \dfrac{\infty}{\infty}$ ҳолларга келтирилиб, сўнг юқоридаги теоремалар қўлланилади.

1) $x \to x_0$ да $f(x) \to 0, \ g(x) \to \infty$ бўлганда $f(x) \cdot g(x)$ функциянинг лимитини топиш учун уни

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

деб, сўнг 1- ёки 2-теоремалар қўлланилади.

2) $x \to x_0$ да $f(x) \to +\infty, \ g(x) \to +\infty$ бўлганда $f(x) - g(x)$ функциянинг лимитини топиш учун уни

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{g(x)}}$$

деб, сўнг 1-теорема қўлланилади.

3) $x \to x_0$ да $f(x) \to 0, \ g(x) \to 0$ ҳамда $x \to x_0$ да $f(x) \to 1, \ g(x) \to +\infty$ бўлганда $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ функциянинг лимитини топиш учун аввало

$$y = (f(x))^{g(x)}$$

функция логарифмланади, сўнг юқоридаги теоремалар қўлланилади.

3-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

лимит ҳисоблансин.

◀Аввало $y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ деб оламиз. Равшанки, $x\to 0$ да

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\to 1, \qquad g(x)=\frac{1}{x^2}\to +\infty.$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{\left(x^3\right)'}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

Демак, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$ ▶

Машқлар

1. Ихтиёрий $\alpha\in R$да ушбу

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x)^{\alpha}-1}{\ln x}=\frac{2\alpha}{\pi}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)$$

лимит ҳисоблансин.

Glossariy

$x \to x_0$ да $f(x) \to 0,\ g(x) \to \infty$ бўлганда $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг лимитини топиш учун уни

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

деб, сўнг 1- ёки 2-теоремалар қўлланилади.

2) $x \to x_0$ да $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty$ бўлганда $f(x) - g(x)$ функциянинг лимитини топиш учун уни

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

деб, сўнг 1-теорема қўлланилади.

15-Амалий машғулот:

Аниқмасликларни очиш. Лопиталь қоидалари

1^0. $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасликлар учун Лопиталь қоидаси. $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{g(x)}$ функциялар $\mathbf{a}$ нуқтанинг бирор ўйилган атрофида аниқланган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин.

1) $\mathbf{f'(x)}$ ва $\mathbf{g'(x)}$ ҳосилалар мавжуд ва $\mathbf{g'(x) \neq 0}$.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

3) Ушбу $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ лимит мавжуд (чекли ёки чексиз). У ҳолда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

бўлади.

2^0. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликлар учун Лопиталь қоидаси. $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{g(x)}$ функциялар $\mathbf{a}$ нуқтанинг бирор ўйилган атрофида аниқланган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарилсин:

1) $\mathbf{f'(x)}$ ва $\mathbf{g'(x)}$ ҳосилалар мавжуд ва $\mathbf{g'(x) \neq 0}$.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

3) Ушбу $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ лимит мавжуд (чекли ёки чексиз). У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

бўлади.

3^0. Бошқа кўринишдаги аниқмасликлар. Қуйидаги $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 кўринишидаги аниқмасликлар алгебраик алмаштиришлар хамда логарифмлаш ёрдамида $\dfrac{0}{0}$ ёки $\dfrac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликларга келтирилади.

4^0. Эслатма. $a=\infty$, яъни $x\to\infty$ да хам юқорида келтирилган қоидалар ўринли бўлади.

13 – м и с о л . *Ушбу*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$$

лимит ҳисоблансин.

◀Бу холда $\dfrac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасликка эга бўламиз. Лопиталь қоидалардан фойдаланиб топамиз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{arctg}x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$ ▶

14 – м и с о л . *Ушбу*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$$

лимит ҳисоблансин.

◀Бу ҳолда $\dfrac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликка эга бўлган Лопиталь қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0.$$ ▶

15 – м и с о л . *Ушбу*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

лимит ҳисоблансин.

◀Бу холда $\infty-\infty$ кўринишидаги аниқмаслик юзага келади. Агар $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$ дейилса, $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмаслик ҳосил бўлиб лимитни Лопиталь қоидасига кўра топамиз:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\ln x}{\ln x-\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{(-\ln x)'}{\left(\ln x-\frac{1}{x}+1\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}.$$ ▶

16 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$$

лимит ҳисоблансин.

◀ $x\to\frac{\pi}{4}$ да $(tgx)^{tg2x}$ ифода 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Аввало

$$y=(tgx)^{tg2x}$$

ни логарифмлаб топамиз:

$$\ln y=\ln(tgx)^{tg2x}=\frac{\ln tgx}{(tg2x)^{-1}}.$$

Бу $x\to\frac{\pi}{4}$ да $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Унда Лопиталь қоидасидан фойдаланиб

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{(tg2x)^{-1}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\ln tgx)'}{\left[(tg2x)^{-1}\right]'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\cdot(tg2x)^2}{\cos^2 2x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=-1$$

бўлишини топамиз. Демак, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(tgx)^{tg2x}=-1$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\frac{1}{e}$ бўлади.▶

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин:

1500. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-1}{2x^3-x-1}$ **1501.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

1502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$

1503. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$

1504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

1505. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$

1506. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$

1507. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

1508. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$

1509. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

1510. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

1511. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{10x}}{x^{100}}$

1512. $\lim\limits_{x\to \infty}x^n\sin\dfrac{a}{x}\quad (n>0)$

1513. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

15-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1514. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

1515. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1516. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$

1517. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

Аниқмас интеграллар ва уни топишнинг содда қоидалари

16-маъруза: Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчалари

РЕЖА:

1^0. Бошланғич функция тушунчаси.

2^0. Функциянинг аниқмас интеграли. Интегралнинг хоссалари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0.Бошланғич функция тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)$ва $F(x)$ функциялари $(a,b)\subset R$ интервалда (бу интеграл чекли ёки чексиз бўлиши мумкин) берилган бўлиб, $F(x)$ функция шу $(a,b)\subset R$ да дифференциалланувчи бўлсин.

1-таъриф. Агар (a,b) интервалда $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ бўлса, (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

Масалан, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциянинг $(0,+\infty)$ да бошланғич функцияси $F(x)=\ln x$ бўлади, чунки $(0,+\infty)$ да $F'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=f(x)$.

Айтайлик, $f(x)$ ва $F(x)$ функциялари $[a,b]$ сегментда берилган бўлиб, $F(x)$ функция шу $[a,b]$ да дифференциал-ланувчи бўлсин.

2-таъриф. Агар (a,b) интервалда $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ бўлиб, a ва b нуқталарда эса

$F'(a+0)=f(a),\ \ F'(b-0)=f(b)$

тенгликлар ўринли бўлса, $[a,b]$ сегментда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

1-теорема. Агар (a,b) интервалда $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функция-ларнинг ҳар бири $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар (a,b) да бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади:

$\Phi(x)-F(x)=C.\ (C=const)$

◄ Шартга кўра (a,b) да $\Phi'(x)=f(x),\ F'(x)=f(x)$.

Демак, (a,b) да $\Phi'(x)=F'(x)$. У ҳолда 21- маърузада келтирилган 2-натижага кўра

$\Phi(x)=F(x)+C.\ (C=const)$

бўлади. ►

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Агар (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$функциянинг (a,b) даги ихтиёрий бошланғич функцияси $\Phi(x)$ учун

$$\Phi(x)=F(x)+C.\ \ (C=const)$$

бўлади.

1-Эслатма. (a,b) да берилган ҳар қандай функция ҳам бошланғич функцияга эга бўлавермайди.

1-мисол. $(-1,1)$ интервалда ушбу

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ агар } -1<x<0 \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ 1, \text{ агар } 0<x<1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Бу функциянинг $(-1,1)$ интервалда бошланғич функцияга эга бўлмалиги исботлансин.

◀Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган функция $(-1,1)$ да бошланғич функция $F(x)$ га эга бўлсин: $F'(x)=f(x)$ $(x\in(-1,1))$.

Равшанки,

$$F'(0)=f(0)=0 \tag{1}$$

бўлади.

Бу $F(x)$ функцияга $[0,x]$ сегментда $(0<x<1)$ Лагранж теорема-сини қўллаб топамиз:

$$F(x)-F(0)=F'(c)\cdot x=f(c)\cdot x=x \quad (c\in(0,x)).$$

Кейинги тенгликдан

$$\frac{F(x)-F(0)}{x}=1, \quad \lim_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$$

бўлиб, $F'(+0)=1$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса (1) муносабатга зиддир.

Демак, қаралаётган $f(x)$ функция $(-1,1)$ да бошланғия функцияга эга бўлмайди. ►

2-Теорема. Агар $f(x)\in C(a,b)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция (a,b) да бошланғич функцияга эга бўлади.

Бу теореманинг исботи 34- маърузада келтирилади.

2⁰. Функциянинг аниқмас интеграли. Интегралнинг хоссалари.

Айтайлик, (a,b) да $f(x)$ функция берилган бўлиб, $F(x)$ функция унинг бирор бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x)=f(x) \quad (x\in(a,b)).$$

У ҳолда берилган $f(x)$ функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси

$$F(x)+C \qquad (C=const)$$

кўринишда ифодаланади.

3-таъриф. Ушбу

$$F(x)+C \qquad (x\in(a,b))$$

ифода $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли дейилади ва

$$\int f(x)dx$$

каби белгиланади. Бунда $\int$ - интеграл белгиси, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ интеграл остидаги ифода дейилади.

Демак,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (C=const)$$

Шундай қилиб, (a,b) интервалда $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли (a,b) да ҳосиласи шу $f(x)$ га тенг бўлган функция-нинг умумий кўринишини ифодалар экан.

2-мисол. Ушбу

$$\int x^3 dx$$

интеграл топилсин.

◀ Аниқмас интеграл таърифига кўра, шундай $F(x)$ функция топилиши керакки, $F'(x) = x^3$ бўлсин. Агар

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

дейилса, равшанки, $F'(x) = x^3$ бўлади. Демак,

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C = const). \ ▶$$

3-мисол. Ушбу

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

аниқмас интеграл топилсин.

◀ Равшанки,

$$F(x) = \sqrt{1+x^2}$$

функция учун

$$F'(x) = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

бўлади. Демак,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C. \ ▶$$

Энди аниқмас интегралнинг хоссаларини келтирамиз. Бундан буён аниқмас интеграл ҳақида гап борганда уни қаралаётган оралиқда мавжуд деб, яъни интеграл остидаги функция қаралаётган оралиқда бошланғич функцияга эга деб қараймиз ва оралиқни кўрсатиб ўтирмаймиз.

1) Ушбу

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

муносабат ўринли.

◀ Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x).$$

У ҳолда,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C = const)$$

бўлади. Бу тенгликка дифференциал амалини қўллаб топамиз.

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \ ▶$$

Бу хосса аввал дифференциал белгиси d, сўнгра интеграл белгиси $\int$ келиб, улар ёнма-ён турганда ўзаро бир-бирини йўқотишини ифодалайди.

2) Ушбу

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad (C = const)$$
муносабат ўринли.

◄ Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:
$F'(x) = f(x)$.

У ҳолда,
$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C = const)$$
бўлади. Айни пайтда,
$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)$$
бўлиб, бу тенгликлардан
$$\int dF(x) = F(x) + C$$
бўлиши келиб чиқади. ►

Бу хосса аввал интеграл белгиси $\int$, сўнгра дифферен-циал белгиси d келиб, улар ёнма-ён турганда ўзаро бир- бирини йўқотишини англатади ва $F(x)$ га ўзгармас C ни қўшиб қўйиш кераклигини кўрсатади.

3) Ушбу
$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (2)$$
тенглик ўринли бўлади.

◄ Айтайлик, $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг бошланғич функциялари бўлсин
$F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = g(x)$.

У ҳолда
$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = \Phi(x) + C_2$$
бўлиб,
$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + \Phi(x) + C_1 + C_2 \qquad (3)$$
бўлади.

Айни пайтда,
$$[F(x) + \Phi(x)]' = f(x) + g(x)$$
бўлганлиги сабабли
$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + \Phi(x) + C_3 \qquad (4)$$
бўлади. (3) ва (4) муносабатлардан, улардаги C_1, C_2 ва C_3 ларнинг ихтиёрий ўзгармас эканлигини эътиборга олиб топамиз:
$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. ►$$
Бу хосса аниқмас интегралнинг аддитивлик хоссаси дейилади.

4) Ушбу
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (5)$$
тенглик ўринли бўлади, бунда k ўзгармас сон ва $k \neq 0$.

Бу хосса юқоридаги 3)- хосса каби исботланади.

2-Эслатма. (2) ва (5) тенгликларни ўнг ва чап томонларидаги ифодалар орасидаги айирма ўзгармас сонга баробарлиги маъносидаги (ўзгармас сон аниқлигиги) тенглик-лар деб қаралади.

4-мисол. Ушбу

$$J = \int (\frac{5}{1+x^2} - 3\sin x)dx$$

интеграл топилсин .

◄Аниқ интегралнинг 3)- ва 4)- хоссаларидан фойдалан-сак, унда

$$\int (\frac{5}{1+x^2} - 3\sin x)dx = 5\int \frac{1}{1+x^2}dx - 3\int \sin xdx$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$(-\cos x)' = \sin x, \quad (\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$5\int \frac{1}{1+x^2}dx - 3\int \sin xdx = 5\mathrm{arctg}x + 3\cos x + C.$$

Демак,

$J = 5\mathrm{arctg}x + 3\cos x + C$.►

Glossariy

тенгликларни ўнг ва чап томонларидаги ифодалар орасидаги айирма ўзгармас сонга баробарлиги маъносидаги (ўзгармас сон аниқлигиги) тенглик-лар деб қаралади.

16-Амалий машғулот:

Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчалари.

Содда аниқмас интеграллар

1^0. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчаси. Айтайлик, $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{F(x)}$ функциялар $\mathbf{(a,b)}$ да узлуксиз бўлиб, $\mathbf{F(x)}$ эса $\mathbf{F'(x)}$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $\mathbf{(a,b)}$ да $\mathbf{F'(x) = f(x)}$ бўлса, $\mathbf{F(x)}$ функция $\mathbf{f(x)}$ нинг **бошланғич функцияси** дейилади. $\mathbf{f(x)}$ функция бошланғич функцияларининг умумий кўриниши

$$\mathbf{F(x) + C \qquad (C = const)}$$

$\mathbf{f(x)}$ нинг **аниқмас интеграли** дейилади:

$$\mathbf{\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C = const)}$$

2^0. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари. Аниқмас интеграл қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\mathbf{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}$
2. $\mathbf{\int df(x) = f(x) + C \qquad (C = const)}$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (k = const)$

4. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3^0. Содда интеграллар жадвали. Қуйидаги содда интеграллар жадвалини келтирамиз:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,x + C \\ -\mathrm{arcctg}\,x + C \end{cases}$$

3.
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

4.
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

5.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

6.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1);$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$

12. $\int \mathrm{sh}\,x\, dx = \mathrm{ch}\,x + C$

13. $\int \mathbf{chx\,dx = shx + C}$

14. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{sh^2x}} = \mathbf{-cthx + C}$

15. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ch^2x}} = \mathbf{thx + C}$

4^0. Содда аниқмас интегралларни ҳисоблаш. Содда аниқмас интеграллар асосан бевосита хоссалардан ҳамда жадвалдан фойдаланиб ҳисобланади.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интеграл остидаги функцияни қуйидагича $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ ёзиб оламиз. Сўнг интегрални хоссалар ва жадвалдан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$$

$$+ C = 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} + 1\right) + C. \blacktriangleright$$

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I = \int \frac{\sqrt{4+x^2} - 3\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Аниқмас интегралларнинг хоссалари ва жалвалдан фойдаланиб топамиз:

$$I = \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx - 3\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + 3\ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C. \blacktriangleright$$

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интеграл остидаги ифодани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$I = \int \frac{d(tgx)}{3+4tg^2x}.$$

Натижада,

$$I=\int\frac{dtgx}{3+4tg^2x}=\frac{1}{4}\int\frac{dtgx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+tg^2x}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2tgx}{\sqrt{3}}+C$$ бўлади.►

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1561. $\int\sqrt{x}dx$

1562. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

1563. $\int\frac{dx}{x^2}$

1564. $\int\sqrt[m]{x^n}dx$

1565. $\int 10^x dx$

1566. $\int a^x e^x dx$

1567. $\int(3-x^2)^3 dx$

1568. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$

1569. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

1570. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$

1571. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$

1572. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$

1573. $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$

1574. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$

1575. $\int\frac{3\cdot2^x-2\cdot3^x}{2^x}dx$

1576. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$

1577. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$

1578. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+13}}$

1579. $\int 2^{2x}\cdot e^x dx$

1580. $\int\frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx$

16-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1581. $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$

1582. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

17-маъруза: Асосий аниқмас интеграллар жадвали.

РЕЖА:

1^0. Асосий аниқмас интеграллар жадвали.

2^0. Дифференциаллаш ва интеграллаш амаллари ҳақида.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. Асосий аниқмас интеграллар жадвали.

Элементар функцияларнинг ҳосилалари жадвали ҳамда аниқмас интеграл таърифидан фойдаланиб, содда функция-ларнинг аниқмас интеграллари топилади. Уларни жамлаб, жадвал кўринишига келтирамиз:

1) $\int 0\cdot dx = C, \qquad C = const.$

2) $\int 1\cdot dx = x + C.$

3) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad (\alpha \neq -1).$

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad (x \neq 0).$

5) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$

$\int e^{x} dx = e^{x} + C.$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C, \qquad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z).$

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C, \qquad (x \neq \pi n,\ n \in Z).$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases} \qquad (-1 < x < 1).$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C, \\ -\mathrm{arcctg} x + C. \end{cases}$

12) $\int shx dx = chx + C.$

13) $\int chx dx = shx + C.$

14) $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -chx + C, \qquad (x \neq 0).$

15) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

2⁰. Дифференциаллаш ва интеграллаш амаллари ҳақида. Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,b) \subset R$ да берилган бўлсин.

Одатда, $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топиш уни диф-ференциаллаш ($f(x)$ функцияга дифференциаллаш амалини қўллаш) дейилади. $f(x)$ функциянинг (a,b) даги бошланғич функциясини топиш, яъни $f(x)$ нинг аниқмас интегралини топиш уни интеграллаш ($f(x)$функцияга интеграл амалини қўллаш) дейилади.

Дифференциаллаш ва интеграллаш тушунчалари матема-тика ва унинг татбиқларида муҳим роль ўйнайди.

Математик анализнинг дифференциаллаш тушунча-сидан бир қанча масалаларни, жумладан ҳаракат қонунига кўра нуқта ҳаракатининг оний тезлигини топишда, эгри чизиқ маълум бўлган ҳолда унга уринма ўтказиш масала-ларини ҳал этишда фойдаланилади.

Кўп ҳолларда ҳаракатдаги нуқтанинг ҳар бир вақт моментдаги тезлиги маълум бўлганда ҳаракат қонунини топиш, эгри чизиқнинг уринмасига кўра ўзини аниқлаш масалалари юзага келади. Бу ҳолда функциянинг ҳосиласига кўра ўзини топиш лозим бўлади. Бу юқорида эслаб ўтилган масалаларга тескари бўлиб, улар функцияларни интеграллаш амали ёрдамида ечилади.

Демак, функцияларни дифференциаллаш ва интеграл-лаш амаллари ўзаро тескари амаллар бўлади.

Маълумки, элементар функцияларнинг (бунда, рационал функциялар; даражали, кўрсаткичли ва логарифмик функ-циялар; тригонометрик ва тескари тригонометрик функция-лар, уларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси, нисбати ҳам чекли марта суперпозициялардан тузилган функциялар туши-нилади) ҳосилалари яна элементар функциялар бўлади.

Аммо ҳамма элементар функцияларнинг интеграллари элементар функциялар бўлавермайди.

Масалан, ушбу

$$f(x) = \sin x^2, \quad f(x) = \cos x^2, \quad f(x) = e^{x^2} \quad (x \in R), \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x > 0).$$

функцияларнинг аниқмас интеграллари мавжуд бўлса ҳам улар элементар функциялар бўлмайди.

Интеграллаш усуллари. Содда касрларни интеграллаш

1⁰. Ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш усули.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли

$$\int f(x)dx \tag{1}$$

берилган бўлиб,уни ҳисоблаш талаб этилсин.

Кўпинча, ўзгарувчи x ни маълум қоидага кўра бошқа ўзгарувчига алмаштириш натижасида берилган интеграл содда интегралга келади ва уни ҳисоблаш осон бўлади.

Айтайлик, (1) интегралдаги ўзгарувчи x янги ўзгарувчи t билан ушбу

$$t=\varphi(x)$$

муносабатда бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи бўлсин;

2) $g(t)$ функция бошланғич функция $G(t)$ га эга, яъни

$$G'(t)=g(t), \qquad \int g(t)dt=G(t)+C; \tag{2}$$

3) $f(x)$ функция қуйидагича

$$f(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'((x) \tag{3}$$

ифодалансин.

У ҳолда

$$\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=G(\varphi(x))+C$$

бўлади.

◄Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоида-сидан фойдаланиб, (2) ва (3) муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$$[G(\varphi(x))+C]'=G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=f(x).$$

Бундан

$$\int f(x)dx=G(\varphi(x))+C$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Шу йўл билан (1) интегрални ҳисоблаш ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш усули дейилади.

Бу усулда, ўзгарувчини жуда кўп муносабат билан алмаштириш имконияти бўлган ҳолда улар орасидан қаралаётган интегрални содда, ҳисоблаш учун қулай ҳолга келтирадиганини танлаб олиш муҳимдир.

1-мисол. Ушбу

$$\int \sin 5xdx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегрални ўзгарувчисини алмаштириб ҳисоблаймиз:

$$\int \sin 5xdx=\left|\begin{matrix}5x=t\\5dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\int \sin tdt=-\frac{1}{5}\cos t+C=-\frac{1}{5}\cos 5x+C. \ ►$$

2-мисол. Ушбу

$$J=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Аввало берилган интегрални қуйидагича

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1}$$

ёзиб оламиз. Бу интегрални ўзгарувчини алмаштириш усули-дан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$J=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1}=\left|\begin{matrix}e^x=t\\e^xdx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{1+t^2}=arctgt+C=arctge^x+C \ ►$$

3-мисол. Ушбу

$$J=\int\frac{dx}{\cos x}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Равшанки,

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}.$$

Унда

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x}=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{1-t^2}$$

бўлиб,

$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+t)}+\frac{1}{(1-t)}\right]$$

бўлганлиги сабабли

$$J=\frac{1}{2}(\int\frac{dt}{(1+t)}+\int\frac{dt}{(1-t)})=\frac{1}{2}(\int\frac{d(1+t)}{(1+t)}-\int\frac{d(1-t)}{(1-t)})=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

бўлади.

Агар

$$\frac{1+t}{1-t}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})\right|+C$$

эканини топамиз. ▶

4-мисол. Ушбу

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\qquad (a\neq 0,\ a\in R)$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интегралда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x+\sqrt{x^2+a}=t.$$

Унда

$$dt=d(x+\sqrt{x^2+a})=(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}})dx=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

бўлиб, ундан

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$$

бўлиши келиб чиқади.

Натижада

$$J=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C \qquad (4)$$

бўлишини топамиз.►

2^0. Бўлаклаб интеграллаш усули. Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар узлуксиз $u'(x)$, $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Равшанки,

$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

бўлади. Демак,

$$F(x)=u(x)\cdot v(x)$$

функция

$$f(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Бундан

$$\int[u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]dx=u(x)\cdot v(x)+C$$

бўлиши келиб чиқади.

Аниқмас интегралнинг 3)- ва 4)- хоссалардан фойда-ланиб

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx \qquad (5)$$

бўлишини топамиз.

(5) формулани қуйидагича

$$\int u(x)\cdot dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x) \qquad (5‰)$$

ҳам ёзиш мумкин.

Бу (5‰) формула бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади. Унинг ёрдамида

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

интегрални ҳисоблаш

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

интегрални ҳисоблашга келтирилади.

5-мисол.

$$\int x\cos x dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int x\cos xdx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ \cos xdx=dv & v=\sin x\end{vmatrix}=x\sin x-\int\sin xdx=$$

$$=x\sin x+\cos x+C.\ ►$$

6-мисол. Ушбу

$$J=\int\sqrt{x^2+a}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Қаралаётган интегралда

$$u=\sqrt{x^2+a}\ ,\qquad dv=dx$$

дейилса, унда

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx\,, \qquad v = x$$

бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$J = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\,.$$

Демак,

$$J = x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\,,$$

$$J = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\right].$$

Маълумки, (1^{0} даги 4-мисол)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C\,.$$

Натижада

$$J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

бўлиши келиб чиқади. ►

7-мисол. Ушбу

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad (n \in N,\ a \in R,\ a \neq 0)$$

интеграл топилсин.

◄ Бу интегралда

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,,\ dv = dx$$

деб олсак, унда

$$du = -\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,,\quad v = x$$

бўлади. (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right].$$

Натижада

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot J_n - 2na^2\cdot J_{n+1}$$

бўлади. Бу тенгликдан

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}\cdot J_n \qquad (6)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Одатда, (6) муносабат реккурент формула дейилади.
Равшанки, $n=1$ бўлганда

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a}+C$$

бўлади.

$n\geq 2$ бўлганда мос J_n интеграллар (6) реккурент формула ёрдамида топилади.

Масалан,

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\cdot J_1=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$$

бўлади. ►

3^0. Содда касрларни интеграллаш. Ушбу

$$\frac{A}{(x-a)^m}\ \ (x\neq a)\ ,\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

кўринишдаги функциялар содда касрлар дейилади, бунда $m\in N;\ \ A,B,C,a,p,q$ – ҳақиқий сонлар бўлиб, x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас, яъни $q-\dfrac{p^2}{4}>0$.

$m=1$ бўлганда содда касрларнинг интеграллари

$$\int\frac{A}{x-a}dx\ ,\quad \int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

лар қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C\ ;$$

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} x+\dfrac{p}{2}=t, & x=t-\dfrac{p}{2} \\ dx=dt, & q-\dfrac{p^2}{4}=a^2 \end{array}\right|=$$

$$=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a}+C^*=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C^*.$$

Айтайлик, $m\in N,\ m>1$ бўлсин. Бу ҳолда содда асрларнинг интеграллари

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx\,,\qquad \int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx$$

лар қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=-\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+C,$$

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\left|\begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t, & x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt, & q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+(C-\frac{p}{2}B)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$=-\frac{B}{2}\frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}}+(C-\frac{p}{2}B)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Кейинги муносабатдаги

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

интеграл (6) рекуррент формула ёрдамида топилади.

Машқлар

1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

интеграл ҳисоблансин.

2. Ушбу

$$\int e^{ax}\cos bx dx$$

интеграл ҳисоблансин.

3. Қуйидаги $\int\frac{dx}{x}$ интегрални бўлаклаб интеграллаш натижасида:

$$\int\frac{dx}{x}=\left[\begin{matrix} du=dx, & v=\frac{1}{x} \\ u=x, & dv=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right]=x\cdot\frac{1}{x}-\int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=1+\int\frac{dx}{x}$$

бўлиши келиб чиқади. Ҳатолик топилсин.

Glossariy

Элементар функцияларнинг (бунда, рационал функциялар; даражали, кўрсаткичли ва логарифмик функ-циялар; тригонометрик ва тескари тригонометрик функция-лар, уларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси, нисбати ҳам чекли марта суперпозициялардан тузилган функциялар туши-нилади) ҳосилалари яна элементар функциялар бўлади.
Аммо ҳамма элементар функцияларнинг интеграллари элементар функциялар бўлавермайди.

17-Амалий машғулот:

6 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} \qquad (n = 1,2,3...)$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Равшанки,

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Берилган интегрални бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = \left[\begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}, & du = -\dfrac{2nxdx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right] = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} +$$

$$+ 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} dx = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} dx - 2na^2 \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 \cdot I_{n+1}$$

Кейинги тенгликдан топамиз:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n . \blacktriangleright$$

Ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1608. $\int \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 1} dx$ **1609.** $\int \frac{x - 1}{x^2 - x - 1} dx$

1610. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1611. $\int \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}dx$

1612. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

1613. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1614. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$

1615. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$

1616. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

1617. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

1618. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

1619. $\int \frac{\ln^{100}x}{x}dx$

1620. $\int xe^{-x^2}dx$

1621. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

1622. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$

1623. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}}dx$

1624. $\int \sqrt{1-x^2}dx$

1625. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$

1626. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

1627. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$

1628. $\int \frac{dx}{\sin x}$

1629. $\int \frac{dx}{\cos x}$

1630. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

1631. $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

1632. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$

1633. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}dx$

17-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Айтайлик, $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ да берилган тоқ функция бўлиб, $F(x)$ функция эса унинг бошланғич функцияси бўлсин. $F(x)$ жуфт функция бўлиши исботлансин.

3. Ушбу,

$$\Im = \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$$

интеграл ҳисоблансин.

18-маъруза: Рационал ҳамда тригонометрик функцияларни интеграллаш

РЕЖА:

1^0. Алгебранинг баъзи маълумотлари ва тасдиқлари.

2^0. Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. Алгебранинг баъзи маълумотлари ва тасдиқлари.

Биз қуйида алгебра курсида ўрганиладиган баъзи тушунча-ларни ҳамда тасдиқларни (исботсиз) келтирамиз. Улардан рационал функцияларни интеграллашда фойдаланилади.

Айтайлик,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (1)$$

кўпҳад берилган бўлсин, бунда $a_k \in R,\ \ k = 0,1,2,\ldots,n,\ \ n \in N$ эса кўпҳаднинг даражаси.

Агар $\alpha \in R$ учун $P_n(\alpha) = 0$ бўлса, α сон $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи дейилади. Бу ҳолда $P_n(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га бўлиниб, у қуйидагича

$$P_n(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

кўринишда ифодаланади, бунда $Q(x)-(n-1)-$даражали кўпҳад.

Агар $P_n(x)$ кўпҳад $(x-\alpha)^k \quad (k \in N)$ га бўлинса, α сон $P_n(x)$ нинг $k-$каррали илдизи бўлади. Бу ҳолда $P_n(x)$ ушбу

$$P_n(x) = (x-\alpha)^k R(x)$$

кўринишда ифодаланади,бунда $R(x)-(n-k)$ даражали кўпҳад.

Агар $z = \alpha + i\beta$ комплекс сон $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ ҳам $P_n(x)$ нинг илдизи бўлади. Шунингдек, $z = \alpha + i\beta$ сон $P_n(x)$ нинг k каррали илдизи бўлса, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ сон ҳам шу $P_n(x)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлади. У ҳолда $P_n(x)$ кўпҳаднинг ифодасида қуйидаги

$$(x-z)(x-\bar{z})=\left[x-\overline{(\alpha+i\beta)}\right]\left[x-(\alpha-i\beta)\right]=$$
$$=x^2+px+q \quad (p=-2\alpha, \quad q=\alpha^2+\beta^2)$$

квадрат учҳад кўпайтувчи бўлиб қатнашади.

Фараз қилайлик,

$$Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \tag{2}$$

кўпҳад берилган бўлиб, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ ҳақиқий сонлар $Q_n(x)$ нинг мос равишда $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ каррали илдизлари, $z_1,z_2,\ldots,z_s$ комплекс сонлар эса $Q_n(x)$ нинг мос равишда $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s$ каррали илдизлари бўлсин.

1-теорема. Ҳар қандай $n-$даражали

$$Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

кўпҳад $(a_m\in R\,,\ m=0,1,2,\ldots,n,\quad a_n\neq 0)$ ушбу

$$\begin{aligned}Q_n(x)&=(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x-\alpha_k)x^{\lambda_k}\cdot(x^2+p_1x+\\&+q_1)^{\gamma_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\gamma_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\gamma_s}\end{aligned} \tag{3}$$

кўринишда ифодаланади, бунда

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k+2(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_s)=n,$$

бўлиб, $x^2+p_ix+q_i \quad (i=1,2,\ldots,s)$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас.

Маълумки,

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n, \qquad (n\in N)$$
$$Q_s(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_sx^s, \qquad (s\in N)$$

кўпҳадлар $(a_i\in R,\ b_j\in R;\ i=0,1,2,\ldots,n;\ j=0,1,2,\ldots,s)$ нисбати

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_sx^s}$$

каср рационал функция дейилиб, $n<s$ бўлганда у тўғри каср дейилар эди.

2-теорема. Агар $\dfrac{P_n(x)}{Q_s(x)}$ тўғри каср махражидаги $Q_s(x)$ кўпҳад ушбу

$$Q_s(x)=(x-\alpha)^m\,Q(x) \qquad (m\in N)$$

кўринишда бўлиб, $Q(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га бўлинмаса, у ҳолда

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}=\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{P(x)}{Q(x)}$$

бўлади, бунда $A_i\in R, i=1,2,\ldots,m;\ P(x)$- кўпҳад.

3-теорема. Агар $\dfrac{P_n(x)}{Q_s(x)}$ тўғри каср махражидаги $Q_s(x)$ кўпҳад ушбу

$$Q_s(x)=(x^2+px+q)^m\,Q(x) \qquad (m\in N)$$

кўринишда бўлиб, (x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас),

$Q(x)$ кўпҳад x^2+px+q га бўлинмаса, у ҳолда

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}=\frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}+\frac{B_{m-1}x+C_{m-1}}{(x_2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{P(x)}{Q(x)}$$

бўлади, бунда $B_i \in R, \quad C_i \in R, \ i = 1,2,...,m; \quad P(x)$ -кўпҳад.

Юқорида келтирилган 2- 3- теоремалар ихтиёрий тўғри каср ҳар бири ҳади ушбу

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \qquad (a \in R, \ \ A \in R, \quad m \in N);$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \ \ (B \in R, \ C \in R, \ \ p \in R, q \in R,$$

$$p^2 - 4q < 0, \ m \in N)$$

кўринишдаги касрлардан, яъни содда касрлардан иборат бўлган йиғинди орқали ифодаланишини кўрсатади. Бундай ҳолда тўғри каср содда касрларга ёйилади дейилади.

Айтайлик,

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} \qquad (n \in N, \ \ s \in N), \ n < s)$$

тўғри каср берилган бўлсин. Амалиётда бу каср содда каср-ларга қуйидагича ёйилади:

1) Касрнинг махражи $Q_s(x)$ кўпҳад (3) кўринишда ёзила-ди,

2) 2- 3- теоремалардан фойдаланиб,

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$$

ни содда касрларга ёйилади,

3) Бу ёйилманинг ўнг томонидаги содда касрлар йиғин-диси умумий махражга келтирилади,

4) Натижада ҳосил бўлган

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{R_n(x)}{Q_s(x)},$$

яъни,

$$P_n(x) = R_n(x)$$

тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даража-лари олдидаги коэффицентларни тенглаштириб, номаълум коэффицентларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$$

тўғри каср содда касрларга ёйилсин.

◄ Бу касрнинг махражи

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2$$

бўлгани учун 2–теоремага кўра

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

бўлади. Уни

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{A(x+2)^2+x(x+2)B+Cx}{x(x+2)^2}$$

кўринишда ёзиб, ушбу

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx=$$
$$=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A$$

тенгликка келамиз. Икки кўпҳаднинг тенглигидан фойдала-ниб, ушбу

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 4A+2B+C=0 \\ 4A=8 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз ва уни ечиб

$$A=2,\quad B=1,\quad C=-10$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{-10}{(x+2)^2}.\blacktriangleright$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}$$

тўғри каср содда касрларга ёйилсин.

◀Равшанки,

$$x^4+x=x(x+1)(x^2-x+1).$$

Унда

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

бўлади.

Кейинги тенгликдан

$$x^3+4x^2-2x+1=A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x)=$$
$$=(A+B+C)x^3+(C+D-B)x^2+(B+D)x+A$$

бўлиши келиб чиқади. У тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенг-лаштириб, A,B,C,D ларни топиш учун қуйидаги

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ C+D-B=4, \\ B+D=-2 \\ A=1 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Уни ечиб топамиз:

$$A=1,\quad B=-2,\quad C=2,\quad D=0.$$

Демак,

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}. \blacktriangleright$$

Glossariy

Касрнинг махражи $Q_s(x)$ кўпҳад (3) кўринишда ёзила-ди,

2) 2- 3- теоремалардан фойдаланиб,

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$$

ни содда касрларга ёйилади,

3) Бу ёйилманинг ўнг томонидаги содда касрлар йиғин-диси умумий махражга келтирилади,

4) Натижада ҳосил бўлган

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}=\frac{R_n(x)}{Q_s(x)},$$

яъни,

$$P_n(x)=R_n(x)$$

тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даража-лари олдидаги коэффицентларни тенглаштириб, номаълум коэффицентларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади.

18-Амалий машғулот:

Қуйидаги I_n $(n\in N)$ интеграллар учун реккурент формулалар топилсин.

1669. $I_n=\int x^n e^{ax}\,dx,\quad a\neq 0$

1670. $I_n=\int \ln^n x\,dx$

1671. $I_n=\int x^\alpha \ln^n x\,dx,\quad \alpha\neq -1$

1672. $I_n=\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}},\quad n>2$

1673. $I_n=\int \sin^n x\,dx,\quad n>2$

1674. $I_n=\int \cos^n x\,dx,\quad n>2$

1675. $I_n=\int \frac{dx}{\sin^n x},\quad n>2$

Қуйидаги тенгликлар ҳисоблансин.

1676. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C, \qquad (a\neq 0)$

1677. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C, \qquad (a\neq 0)$

18-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1678. $\int \frac{\mathbf{x}\,\mathbf{dx}}{\mathbf{a}^2 \pm \mathbf{x}^2} = \pm \frac{1}{2}\ln\left|\mathbf{a}^2 \pm \mathbf{x}^2\right| + \mathbf{C}$.

1679. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{x}^2}} = \arcsin\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \mathbf{C}$, $\quad (\mathbf{a} > 0)$

19-маъруза: Рационал функцияларни интеграллаш.

РЕЖА:

1⁰. Рационал функцияларни интеграллаш.

2⁰. Икки ўзгарувчининг рационал функцияси ҳақида.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

2⁰. Рационал функцияларни интеграллаш. Фараз қилай-лик, $f(x)$ рационал функция бўлиб, унинг интегралини ҳисоб-лаш талаб этилсин.

Айтайлик, $f(x)$ бутун рационал функция

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

бўлсин. Унда

$$\int f(x)\,dx = \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)\,dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\frac{x^n}{n} + C$$

бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ каср рационал функция

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$(n \in N, \quad m \in N)$$

бўлсин. Агар $n \geq m$ бўлса, унда $P_n(x)$ кўпҳадни $Q_m(x)$ кўпҳадга бўлиш билан $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ нинг бутун қисмини ажратиб, бутун рационал функция ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишида ифодалаб олинади:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{\bar{P}_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Равшанки,

$$\int f(x)dx=\int R(x)dx+\int\frac{\bar{P}_n(x)}{Q_m(x)}dx.$$

Демак,

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\qquad (n>m)$$

рационал функцияни интеграллаш тўғри касрни интеграл-лашга келади. Тўғри касрларни интеграллаш учун аввало уни 1^0. да келтирилган усул билан содда касрларга ёйилади. Содда касрларни интеграллаш эса 29-маърузада батафсил баён этилган.

3-мисол. Ушбу

$$\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Интеграл остидаги рационал функцияни содда каср-ларга ёямиз:

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}.$$

Демак,

$$\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+2}-10\int\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C. \blacktriangleright$$

4-мисол. Ушбу

$$\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Интеграл остидаги функция-рационал функция бўлиб, у нотўғри касрдир. Бу касрнинг сурати $x^6+2x^4+2x^2-1$ кўп-ҳадни махражи $x(x^2+1)^2$ кўпҳадга бўлиб, унинг бутун қисми-ни ажратамиз:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^6+2x^4+2x^2-1 & x^5+2x^3+x \\ \cline{2-2} x^6+2x^4+x^2 & x \\ \cline{1-1} x^2-1 & \end{array}$$

Демак,

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}=x+\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Энди

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

тўғри касрни содда касрларга ёямиз:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)\,x(x^2+1)+(Dx+E)\,x=$$

$$=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Кейинги тенгликдан

$$A=-1,\ B=1,\quad C=0,\quad D=2,\quad E=0$$

бўлишини топамиз.

Демак,

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Натижада,

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}=x-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

бўлиб,

$$\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\int xdx-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x}{x^2+1}dx+$$

$$+\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+C$$

бўлади. ►

3⁰.Икки ўзгарувчининг рационал функцияси ҳақида. Икки u ва v ўзгарувчилар берилган бўлиб, бу ўзгарувчилар ёрдамида ушбу

$$u^n\,v^m\qquad (n=0,1,2\,,\ldots;\quad m=0,1,2,\ldots)$$

кўпайтмани тузамиз. Қуйидаги

$$P(u,v)=a_{00}+a_{10}u+a_{01}v+a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2+\ldots$$

$$+a_{n0}u^n+a_{(n-1)1}u^{n-1}v+\ldots++a_{1(n-1)}uv^{n-1}+a_{0n}v^n$$

функция u ва v ўзгарувчиларнинг кўпҳади дейилади, бунда $a_{00},a_{10},a_{01},\ldots,a_{0n}$ –ҳақиқий сонлар.

Айтайлик, $P(u,v)$ ҳамда $Q(u,v)$ лар u ва v ўзгарувчи-ларнинг кўпҳадлари бўлсин. Ушбу

$$\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}\qquad (Q(u,v)\neq 0)$$

нисбат u ва v ўзгарувчиларнинг рационал функцияси дейи-лади ва $R(u,v)$ каби белгиланади:

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}\ . \qquad (Q(u,v)\neq 0).$$

Фараз қилайлик, u ва v ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида x ўзгарувчининг

$$u=\varphi(x),$$
$$v=\psi(x)$$

функциялари бўлсин. У ҳолда $R(u,v)$ функция $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг рационал функцияси бўлади.

Масалан,

$$f(x)=\frac{x-2\sqrt[3]{x^2-1}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2-1}}$$

функция

$$u=\sqrt{x}\ , \quad v=\sqrt[3]{x^2-1}$$

ларнинг рационал функцияси бўлади, чунки

$$R(u,v)=\frac{u^2-2v+1}{u+v}.$$

Хусусан, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ларнинг ҳар бири x ўзгарувчининг рационал функциялари бўлса, у ҳолда

$$R(u,v)=R(\varphi(x),\psi(x))$$

функция шу x ўзгарувчини рационал функцияси бўлади.

Энди $R(u,v)$ рационал функциянинг содда хоссаларини келтирамиз:

1) Агар

$$R(-u,v)=R(u,v)$$

бўлса, у ҳолда бу рационал функция ушбу

$$R(u,v)=R_1(u^2,v)$$

кўринишга келади, бунда R_1 ҳам рационал функция.

2) Агар

$$R(-u,v)=-R(u,v)$$

бўлса, у ҳолда бу рационал функция ушбу

$$R(u,v)=R_2(u^2,v)u$$

кўринишга келади, бунда R_2 рационал функция.

3) Агар

$$R(-u,-v)=R(u,v)$$

бўлса, у ҳолда бу рационал функция ушбу

$$R(u,v)=R_2(\frac{u}{v},v^2)$$

кўринишга келади, бунда R_2 рационал функция.

Glossariy

$$f(x)=\frac{x-2\sqrt[3]{x^2-1}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2-1}}$$

функция

$$u=\sqrt{x}\ ,\quad v=\sqrt[3]{x^2-1}$$

ларнинг рационал функцияси бўлади, чунки

$$R(u,v)=\frac{u^2-2v+1}{u+v}.$$

Хусусан, $\varphi(x)$ *ва* $\psi(x)$ *ларнинг ҳар бири* x *ўзгарувчининг рационал функциялари бўлса, у ҳолда*

$$R(u,v)=R(\varphi(x),\psi(x))$$

функция шу x *ўзгарувчини рационал функцияси бўлади.*

19-Амалий машғулот:

Ушбу $x=a\sin t,\ x=a\,tgt,\ x=a\sin^2 t$ ва бошқа тригонометрик алмаштиришлардан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1636. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

1637. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$

1638. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

1639. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

1640. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

1641. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$

1642. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

Кўрсатма. $x-a=(b-a)\sin^2 t$ алмаштиришдан фойдаланилсин.

1643. $\displaystyle\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$

Ушбу $x=a\,sht,\ x=a\,cht$ ва бошқа гиперболик алмаштиришлардан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1644. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$

1645. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

1646. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$

1647. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$

Кўрсатма. $x+a=(b-a)\sin^2 t$ алмаштиришдан фойдаланилсин.

1648. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx$

19-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1649. $\int x\sin x\,dx$

1650. $\int xe^{-x}\,dx$

20-маъруза: Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

РЕЖА:

1⁰. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ **кўринишидаги интегралларни ҳисоб-лаш.**

2⁰. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.**

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1⁰. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ **кўринишидаги интегралларни ҳисоб-лаш.** Фараз қилайлик, $R(u,v)$ икки ўзгарувчининг рационал функцияси бўлиб, a,b,c,d лар ҳақиқий сонлар, $n \in N$ бўлсин.

Ушбу

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx \quad , \quad ad-bc \neq 0,$$

кўринишидаги интегралларни қараймиз. Бу интеграл ўзгарув-чини алмаштириш ёрдамида рационал функциянинг интег-ралига келади:

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, x = \frac{b-t^n d}{ct^n - a} \\ dx = \frac{(ad-bc)n}{(a-ct^n)^2} t^{n-1} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n - b}{a-ct^n}, t\right) \cdot \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt .$$

1-мисол. Ушбу

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегралда

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad , \quad dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x} dx = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2+1}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = t - \operatorname{arctg} t + C\,.$$

Демак,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x}dx = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \;\blacktriangleright$$

2^0. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш. Бу интегралда a, b, c-ҳақиқий сонлар бўлиб, ax^2+bx+c квадрат учҳад тенг илдизларга эга эмас.

Қаралаётган

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \tag{1}$$

интеграл қуйидаги учта алмаштириш ёрдамида рационал функция интегралига келади.

а) $a > 0$ бўлсин.

(1) интегралда ушбу

$$t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (\text{ёки } \; t = -\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c}\,)$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}\,xt + ax^2\,,$$

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b} \quad , \quad dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt\,,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$$

бўлади.

Натижада

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\,, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right) \cdot \frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Бу интегралда

$$t = x + \sqrt{x^2+x+1}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t} \quad , \quad dx = 2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2 t}dt$$

бўлади.

Агар

$$\frac{2(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2} \right) dt =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| +$$

$$+ \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C$$

бўлиши келиб чиқади. ►

б) $c > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) интегралда ушбу

$$t = \frac{1}{x}(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c})$$

ёки

$$t = \frac{1}{x}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{c}\right)$$

алмаштиришини бажарамиз. Унда

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a-t^2} \quad , \quad dx = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}\,a}{(a+t)^2}dt \ ,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}\ t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a-t^2}$$

бўлиб, (1) интеграл рационал функциянинг интегралига келади:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a-t^2} \ , \ \frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a-t^2} \right) \left(\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}\,a}{(a+t)^2} \right) dt$$

в) ax^2+bx+c квадрат учҳад турли x_1 ва x_2 ҳақиқий илдизга эга бўлсин:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\,.$$

Бу ҳолда (1) интегралда ушбу

$$t = \frac{1}{x-x_1}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a} \quad , \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t$$

$$dx=\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

бўлиб,

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a} \quad , \quad \frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t\right)\cdot\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Равшанки,

$$x^2+3x+2=(x+1)\cdot(x+2)\,.$$

Шуни эътиборга олиб берилган интегралда

$$t=\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+3x+2}$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1} \quad , \quad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

бўлиб,

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}dt$$

бўлади.

Энди

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}=\frac{\frac{3}{4}}{t-1}-\frac{\frac{16}{27}}{t-2}-\frac{\frac{17}{108}}{t+1}+\frac{\frac{5}{18}}{(t+1)^2}+\frac{\frac{1}{3}}{(t+1)^3}$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$I=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}dt=\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{16}{27}\int\frac{dt}{t-2}-$$

$$-\frac{17}{108}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{5}{18}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^3}=\frac{3}{4}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{16}{27}\ln|t-2|-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}+C\,.$$ ►

3^0. Биномиал дифференциални интеграллаш. Ушбу

$$x^m(a+bx^n)^P\,dx$$

ифода биномиал дифференциал дейилади, бунда $a \in R$, $b \in R$, m, n, p-рационал сонлар.

Биномиал дифференциалнинг интеграли

$$\int x^m (a + bx^n)^P \, dx \qquad (2)$$

ни қараймиз. Бу интеграл қуйидаги ҳолларда рационал функциянинг интегралига келади:

1) p-бутун сон. Бу ҳолда m ва n рационал сонлар махражларининг энг кичик умумий карралисини δ орқали белгилаб, (2) интегралда

$$x = t^\delta$$

алмаштириш бажарилса, (2) интеграл рационал функция-нинг интегралига келади.

4-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Бу интегрални қуйидагича

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{-2} dx$$

ёзиб, бунда $p = -2$ бўлишини аниқлаймиз.

Интегралда

$$x = t^6$$

алмаштириш бажариб

$$I = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt$$

бўлишини топамиз.

Равшанки,

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^2} = t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}.$$

Демак,

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t - 4\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C$$

бўлиб,

$$I = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C$$

бўлади. ►

2) $\boldsymbol{\frac{m+1}{n}}$ **- бутун сон.** Бу ҳолда (2) интегралда

$$x = t^{\frac{1}{n}}$$

алмаштиришни бажариб

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p \cdot t^q\,dt$$

бўлишини топамиз, бунда

$$q=\frac{m+1}{n}-1.$$

Сўнг p нинг махражини s деб

$$z=(a+bt)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада (2) интеграл рационал функциянинг интегралига келади.

5-мисол. Ушбу

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Бу интегралда

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$m=1,\quad n=\frac{2}{3},\quad p=-\frac{1}{2}$$

бўлиб,

$$\frac{m+1}{n}=3$$

бўлади.

Шуни эътиборга олиб, берилган интегралда,

$$t=(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$1+x^{\frac{2}{3}}=t^2\ ,\ \ x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\ ,\quad dx=\frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2tdt$$

бўлиб,

$$\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}dx = 3\int (t^2-1)^2 t^2 dt = 3\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+t^3+C,\quad t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$$

бўлади. ►

3) $p+q$ - бутун сон. Маълумки, (2) интеграл $x=t^{\frac{1}{n}}$ алмаш-тириш билан ушбу

$$\frac{1}{n}\int (a+bt)^p \cdot t^{\frac{m+1}{n}-1}dt = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p \cdot t^q dt = \frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p \cdot t^{p+q}dt$$

кўринишга келади.

Агар кейинги интегралда

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштириш бажарилса (s сони p нинг махражи), у рационал функциянинг интегралига келади.

6-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2+3x^2}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Равшанки,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2+3x^2}} = \int x^{-2}(2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Демак**,**

$$m = -2,\ n = 2\ ,\ p = -\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{m+1}{n} + p = -1$$

бўлиб, $p+q$-бутун сон бўлади.

Берилган интегралда

$$t = \left(\frac{2+3x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{x^2}+3}$$

алмаштириш бажариб,

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-3}}\quad ,\quad dx = -\frac{\sqrt{2}tdt}{\sqrt{(t^2-3)^3}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{2+3x^2}} = \int x^{-2}(2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \int (-\frac{dt}{2}) = -\frac{t}{2} + C = -\frac{\sqrt{\frac{2}{x^2}+3}}{2} + C$$

бўлишини топамиз. ►

Машқлар

1. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$$

интеграл ҳисоблансин.

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$$

интеграл ҳисоблансин.

***p + q* - бутун сон.** Маълумки, (2) интеграл $x = t^{\frac{1}{n}}$ алмаш-тириш билан ушбу

$$\frac{1}{n}\int (a+bt)^p \cdot t^{\frac{m+1}{n}-1} dt = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p \cdot t^q dt = \frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p \cdot t^{p+q} dt$$

кўринишга келади.

20-Амалий машғулот:

7 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{I} = \int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Интеграл остидаги касрнинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратамиз:

$$\frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}$$

сўнг бу тенгликнинг ўнг томонидаги тўғри касрни содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{x^4 + 3x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3} \qquad (*)$$

Бундан

$$\mathbf{I} = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$A + C = 0,\quad B + D = 0,\quad 3A = 0,\quad 3B = 1.$$

Кейинги тенгликдан эса

$$A = 0,\quad B = \frac{1}{3},\quad C = 0,\quad D = -\frac{1}{3}$$

бўлишини топамиз. (*) тенгликка кўра

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}$$

бўлади. Энди берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}\right) dx = \int \left[2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}\right] dx =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangleright$$

8 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I=\int\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интеграл остидаги касрни содда касрларга ёямиз:

$$\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}+\frac{Dx+F}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Умумий махражга келтириб топамиз:

$$3x+1=A\left(1+x^2\right)^2+\left(Bx+C\right)x\left(1+x^2\right)+\left(Dx+F\right)x=$$
$$=\left(A+B\right)x^4+Cx^3+\left(2A+B+D\right)x^2+\left(C+F\right)x+A.$$

A,B,C,D,F ларни топиш учун қуйидаги

$$\begin{cases}A+B=0\\ C=0\\ 2A+B+D=0\\ C+F=0\\ A=1\end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечсак,

$$A=1,\ \ B=-1,\ \ C=0,\ \ D=-1,\ \ F=3$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, интеграл остидаги функция

$$\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{-x+3}{\left(1+x^2\right)^2}$$

бўлади. Унинг интегралини ҳисоблаймиз:

$$I=\int\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}+3\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=$$
$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+3\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални **2-§** да келтирилган реккурент формулага кўра топамиз:

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$$

Демак,

$$I=\int\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{3x+1}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}x+C.\blacktriangleright$$

Номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1700. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

1701. $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$

1702. $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx$

1703. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

1704. $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$

1705. $\int \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$

1706. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

1707. $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$

1708. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

1709. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)}$

1710. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$

1711. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

1712. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

1713. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

1714. $\int \frac{(3x^2-2)xdx}{(x+2)^2(3x^2-2x+4)}$

1715. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x^3+1)}$

20-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1716. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}dx$

1717. $\int \frac{dx}{x^4-x^3-x+1}$

21-маъруза: Аниқ интеграл тушунчаси

РЕЖА:

1^0. Сегментни бўлаклаш.
2^0. Дарбу ҳамда интеграл йиғиндилар.
ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. Сегментни бўлаклаш. Бирор $[a,b]\subset R$ сегмент берил-ган бўлсин. Бу сегментнинг қуйидаги

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ x_n \qquad (1)$$

нуқталари тўпламини олайлик.

Равшанки, (1) тўплам $[a,b]$ сегментни

$$B_1 = [x_0, x_1],\ B_2 = [x_1, x_2], \ldots, B_n = [x_{n-1}, x_n]$$

бўлакларга ажратади.

1-таъриф. Ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ x_n$$

нуқталар тўплами $[a,b]$ сегментни бўлаклаш дейилади ва

$$P = \{x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ x_n\}$$

каби белгиланади.

Бунда ҳар бир x_k $(k = 0,1,2,\ldots,n)$ нуқта $[a,b]$ сегментнинг бўлувчи нуқтаси, $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ сегмент эса P бўлаклашнинг оралиғи дейилади.

Қуйидаги

$$\lambda_p = \max\{\Delta x_k\} \quad , \qquad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

миқдор P бўлаклашнинг диаметри дейилади.

Масалан, $[a,b] = [0,1]$ бўлганда қуйидаги

$$0,\ \frac{2}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{6}{10},\ \frac{8}{10},\ \frac{10}{10} = 1\ ;$$

$$0,\ \frac{1}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{10},\ \frac{10}{10} = 1$$

нуқталар системаси $[0,1]$ сегментнинг

$$P_1 = \left\{0,\ \frac{2}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{6}{10},\ \frac{8}{10}, 1\right\},$$

$$P_2 = \left\{0,\ \frac{1}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{10}, 1\right\}$$

бўлаклашларини ҳосил қилади. Уларнинг диаметрлари мос равишда

$$\lambda_{p_1} = \frac{1}{5} \quad , \qquad \lambda_{p_2} = \frac{2}{5}$$

бўлади.

Юқоридаги келтирилган таъриф ва мисоллардан кўрина-дики, $[a,b]$ сегментнинг турли усулар билан исталган сондаги бўлаклашларини тузиш мумкин. Бу бўлаклашлардан иборат тўпламни $\wp$ билан белгилаймиз:

$$\wp = \{P\}.$$

2⁰. Дарбу ҳамда интеграл йиғиндилар. $f(x)$ функция $[a,b]$ да аниқланган ва чегараланган бўлсин. Унда

$$\exists m \in R\ , \quad \exists M \in R\ , \quad \forall x \in [a,b] \quad : \quad m \le f(x) \le M$$

бўлади.

Айтайлик,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

$[a,b]$ сегментнинг бирор бўлаклаши бўлсин. У ҳолда бу бўлак-лашнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ оралиғида

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k\ x_{k+1}]\ , \\ M_k &= \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k\ x_{k+1}] \end{aligned} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

мавжуд бўлиб

$$\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \le m_k \le M_k \le \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \qquad (2)$$

бўлади.

2-таъриф. Ушбу

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментнинг P бўлаклашига нисбатан Дарбунинг қуйи йиғиндиси дейилади.

Равшанки, бу йиғинди $f(x)$ функцияга ҳамда $[a,b]$ нинг P бўлаклашига боғлиқ бўлади:

$$s = s(f;P)\ .$$

3-таъриф. Ушбу

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментнинг P бўлаклашига нисбатан Дарбунинг юқори йиғиндиси дейилади.

Бу йиғинди $f(x)$ функцияга ҳамда $[a,b]$ нинг P бўлак-лашига боғлиқ бўлади:

$$S = S(f;P)\ .$$

Энди ҳар бир $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ нинг қийматида $[x_k, x_{k+1}]$ сегментда ихтиёрий ξ_k нуқтани тайинлаймиз: $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$. Натижада $[a,b]$ нинг P бўлаклашига нисбатан

$$\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\}$$

нуқталар тўплами ҳосил бўлади. Бу нуқталардаги $f(x)$ функциянинг

$$f(\xi_k) \qquad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

қийматлари ёрдамида ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

йиғиндини тузамиз.

4-таъриф. Қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментнинг P бўлаклашига нисбатан интеграл йиғиндиси дейилади.

Интеграл йиғинди, $f(x)$ функцияга, P бўлаклашга ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ бўлади:

$$\sigma = \sigma(f; P; \xi_k).$$

Равшанки, $\xi_k \in [x_k\ ,\ x_{k+1}]$ учун

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k$$

бўлиб, айни пайтда

$$s(f;P) \le \sigma(f;P;\xi_k) \le S(f;P) \tag{3}$$

тенгсизликлар бажарилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = |x|$$

функциянинг $[-1,\ \ 1]$ сегментда қуйидаги

$$P = \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари ҳамда

$$\xi_k = x_k \qquad (k = 0,1,2,\dots,7)$$

деб, интеграл йиғинди топилсин.

◀ Берилган $f(x) = |x|$ функция учун $[-1,\ \ 1]$ сегментнинг

$$P = \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

бўлаклашида

$$m_0 = \frac{3}{4}, \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{4}, \quad m_3 = 0\ ,$$

$$m_4 = 0\ , \quad m_5 = \frac{1}{4}, \quad m_6 = \frac{1}{2}, \quad m_7 = \frac{3}{4}$$

$$M_0=1,\ M_1=\frac{3}{4},\ M_2=\frac{1}{2},\ M_3=\frac{1}{4},$$

$$M_4=\frac{1}{4},\ M_5=\frac{1}{2},\ M_6=\frac{3}{4},\ M_7=1$$

ҳамда

$$\xi_0=-1,\ \xi_1=-\frac{3}{4},\ \xi_2=-\frac{1}{2},\xi_3=-\frac{1}{4},$$

$$\xi_4=0,\ \xi_5=\frac{1}{4},\ \xi_6=\frac{1}{2},\ \xi_7=\frac{3}{4},$$

$$f(\xi_0)=1,\ f(\xi_1)=\frac{3}{4},\ f(\xi_2)=\frac{1}{2},\ f(\xi_3)=\frac{1}{4},$$

$$f(\xi_4)=0,\ f(\xi_5)=\frac{1}{4},\ f(\xi_6)=\frac{1}{2},\ f(\xi_7)=\frac{3}{4}$$

бўлади.

Энди $\Delta x_k=\frac{1}{4}$ $\quad (k=0,1,2,\ldots,7)$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$s(f;P)=(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4})\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$S(f;P)=(1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1)\cdot\frac{1}{4}=5,$$

$$\sigma(f;P;\xi_k)=(1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4})\cdot\frac{1}{4}=1. \blacktriangleright$$

Glossariy

Қуйидаги

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментнинг P бўлаклашига нисбатан интеграл йиғиндиси дейилади.

Интеграл йиғинди, $f(x)$ функцияга, P бўлаклашга ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ бўлади:

$$\sigma=\sigma(f;P;\xi_k).$$

Равшанки, $\xi_k\in[x_k\ ,\ x_{k+1}]$ учун

$$m_k\le f(\xi_k)\le M_k$$

бўлиб, айни пайтда

$$s(f;P)\le\sigma(f;P;\xi_k)\le S(f;P) \qquad (3)$$

тенгсизликлар бажарилади.

21-Амалий машғулот:

Функциянинг аниқ интеграллари асосан Ньютон-Лейбниц формуласи, ўзгарувчиларини алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усуллари (формулалари) ёрдамида ҳисобланади.

1^0. Ньютон-Лейбниц формуласи. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $F(x)$ функция эса унинг бошланғич функцияси бўлсин $(F'(x)=f(x), \quad x\in[a,b])$. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b \qquad (2)$$

бўлади.

Аниқ интегрални ҳисоблаш имконини берадиган (2) формула **Ньютон-Лейбниц формуласи** дейилади.

2^0. Ўзгарувчини алмаштириш формуласи. Фараз қилайлик:

1) $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз;

2) $\varphi(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга;

3) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

4) $f(\varphi(t))$ мураккаб функция $[a,b]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

бўлади.

(3) формула **ўзгарувчини алмаштириш формуласи** дейилади.

3^0. Бўлаклаб интеграллаш формуласи. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ сегментда узлуксиз ва узлуксиз $f'(x), g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \qquad (4)$$

бўлади.

(4) формула **бўлаклаб интеграллаш формуласи** дейилади.

Эслатма: Айрим ҳолларда йиғиндининг лимити аниқ интегралга келтириб ҳисобланади.

1 – м и с о л . ***Ушбу интеграл***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{|x|}{x}dx$$

ҳисоблансин.

◄Айтайлик, $0\le a\le b$ бўлсин. Бу ҳолда $x>0$ бўлиб, $f(x)=\frac{|x|}{x}=1$ бўлади. Демак,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx = \int_a^b dx = x\Big|_a^b = b-a$$

Айтайлик, $\mathbf{a<b<0}$ бўлсин. Бу ҳолда $\mathbf{x<0}$ бўлиб, $\mathbf{f(x)=\frac{|x|}{x}=-1}$ бўлади. Демак,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx=\int_a^b(-1)dx=-x\Big|_a^b=a-b$$

Айтайлик, $\mathbf{a<0<b}$ бўлсин. Бу ҳолда

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-1\ ,\text{агар}\quad a<x<0\\ \ \ 1\ ,\text{агар}\quad 0<x<b\end{cases}$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx=\int_a^0(-1)dx+\int_0^b 1dx=-x\Big|_a^0+x\Big|_0^b=a+b$$

Юқоридаги учта ҳолни бирлаштириб,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx=|b|-|a|$$

бўлишини топамиз.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int_0^{10\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$$

ҳисоблансин.

◄Маълумки,

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2\sin^2 x}=\sqrt{2}\cdot|\sin x|$$

Унда

$$\int_0^{10\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{10\pi}|\sin x|dx$$

бўлади. Аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^{10\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin dx-\int_{3\pi}^{4\pi}\sin xdx+\cdots+\int_{8\pi}^{9\pi}\sin xdx-\int_{9\pi}^{10\pi}\sin xdx=$$

$$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{10\text{та}}=20.$$

Демак,

$$\int_0^{10\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=20\cdot\sqrt{2}\,.►$$

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегрални ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\left[x=a\sin t,\ dx=a\cos t dt,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right]=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{16}\pi \blacktriangleright$$

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\Im=\int_1^e (x\ln x)^2 dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\Im=\int_1^e (x\ln x)^2 dx=\left[u=\ln^2 x,\ du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx,\ dv=x^2dx,\ v=\frac{x^3}{3}\right]=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx$$

Кейинги интеграл ҳам бўлаклаб интеграллаш усули ёрдамида ҳисобланади:

$$\int_1^e x^2\ln x dx=\left[u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx,\ dv=x^2dx,\ v=\frac{x^3}{3}\right]=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Bigg|_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$$

Демак,

$$\Im=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}\right)=\frac{e^3}{3}-\frac{4}{27}e^3-\frac{2}{27}=\frac{1}{27}\left(5e^3-2\right).\blacktriangleright$$

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$S_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\qquad(\alpha>0)$$

йиғиндининг лимити аниқ интеграл ёрдамида топилсин.

◄Аввало берилган йиғиндини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$S_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{n}$$

Энди $f(x)=x^\alpha$ $(\alpha>0)$ функцияни $[0,1]$ сегментда қараймиз. Равшанки, бу функция $[0,1]$ сегментда интегралланувчи бўлади. $[0,1]$ сегментни n та тенг бўлакка бўлиб, ушбу

$$P=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots\frac{k-1}{n},\frac{k}{n},\ldots\frac{n}{n}=1\right\}$$

бўлаклашни ҳосил қиламиз. Ҳар бир

$$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\ (k=1,2,3,\ldots,n)$$

бўлаклашда $\xi_k=\frac{k}{n}$ деб, P бўлаклашга нисбатан $f(x)=x^\alpha$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

Демак, юқоридаги S_n йиғинди σ интеграл йиғиндидан иборат экан:

$$S_n=\sigma$$

$f(x)=x^\alpha$ функция $[0,1]$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли

$$\lim_{n\to\infty}\sigma=\int_0^1 x^\alpha dx$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1 x^\alpha dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.\ ▶$$

Интеграллар ҳисоблансин.

1914. $\int_{-1}^{2} x^3 dx$

1915. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

1916. $\int_{1}^{2} (x^2-2x+3)dx$

1917. $\int_{-1}^{1} (x^3-2x^2+x-1)dx$

1918. $\int_{0}^{1} \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

1919. $\int_{0}^{\pi} \sin x dx$

1920. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

1921. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

21-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

22-маъруза: Аниқ интеграл таърифи.

РЕЖА:

1⁰. Аниқ интеграл таърифи.

2⁰. Интеграл йиғиндининг лимити.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

3⁰. Аниқ интеграл таърифи. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ да берилган ва чегараланган бўлсин. Унда $[a,b]$ оралиқнинг ҳар қандай P бўлаклаши ҳамда ҳар қандай ξ_k $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,2,\ldots, n-1)$ ларда юқоридаги (2) ва (3) муносабатлар ўринли бўлиб,

$$
\begin{aligned}
&(b-a)\cdot \inf_{[a,b]}\{f(x)\} \le s(f;P) \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \\
&\le S(f;P) \le (b-a)\cdot \sup_{[a,b]}\{f(x)\}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

бўлади.

Энди $[a,b]$ сегментнинг бўлаклашлар тўплами $=\{P\}$ нинг ҳар бир $P\in$ бўлаклашга нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари $s(f,P)$ ва $S(f;P)$ ни тузиб , ушбу

$$\{s(f;P)\}\ ,\ \{S(f;P)\}$$

тўпламларни қараймиз. Бу тўпламлар (4) муносабатга кўра чегараланган бўлади.

5-таъриф. $\{s(f;P)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги қуйи интеграли дейилади ва

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P\{s(f;P)\}.$$

6-таъриф. $\{S(f;P)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги юқори интеграли дейилади ва

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P\{S(f;P)\}.$$

7-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг қуйи ҳамда юқори интеграллари бир-бирига тенг

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлса, $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқ бўйича интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) дейилади.

Бунда қуйи ҳамда юқори интегралларнинг умумий қиймати $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқ бўйича аниқ интеграли (Риман интеграли) дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

a сон интегралнинг қуйи чегараси, b сон эса интегралнинг юқори чегараси, $[a,b]$ сегмент интеграллаш оралиғи дейилади.

Эслатма. Юқорида келтирилган $f(x)$ функциянинг интеграли таърифига биноан интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

ўзгармас сонни ифодалайди. Бинобарин, интеграл остида ўзгарувчининг қандай ёзилишига боғлиқ бўлмайди:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt .$$

2-мисол. $f(x) = C$, $C \in R$, $x \in [a,b]$ бўлсин.

Бу функциянинг интегралланувчанлиги аниқлансин.

◄ $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

бўлаклашини олиб, унга нисбатан Дарбу йиғиндиларини топамиз:

$$s(C;P) = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x = C \cdot (b-a) ,$$

$$S(C;P) = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x_k = C \cdot (b-a) .$$

Бундан

$$\sup_P \{s(C;P)\} = C \cdot (b-a) ,$$

$$\inf_P \{S(C;P)\} = C \cdot (b-a)$$

бўлиб,

$$\underline{\int_a^b} C\cdot dx=\overline{\int_a^b} C\cdot dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $f(x)=C$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи ва

$$\int_a^b C\cdot dx=C\cdot(b-a).$$

Хусусан , $f(x)=1$ бўлганда

$$\int_a^b dx=b-a$$

бўлади. ►

3-мисол. $f(x)=D(x)$, $x\in[0,1]$ бўлсин. Бу Дирихле функ-циясини [0,1] да интегралланувчиликка текширилсин.

◄ [0,1] сегментнинг ихтиёрий P бўлаклашига нисбатан Дирихле функциясининг Дарбу йиғиндилари

$$s(D;P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k=0 \quad ,$$

$$S(D;P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k=b-a$$

бўлиб,

$$\operatorname{Sup}_P\{s(D;P)\}=0 \quad , \quad \inf_P\{S(D;P)\}=b-a$$

бўлади . Демак,

$$\underline{\int_0^1} D(x)dx=0, \qquad \overline{\int_0^1} D(x)dx=b-a \quad ,$$

$$\underline{\int_0^1} D(x)dx\neq\overline{\int_0^1} D(x)dx.$$

Дирихле функцияси интегралланувчи эмас. ►

4^0. Интеграл йиғиндининг лимити. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда берилган бўлиб, у шу сегментда чегараланган бўлсин.

$[a,b]$ сегментни бирор

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$$

бўлаклашини оламиз.

Маълумки, $f(x)$ функциянинг бу бўлаклашга нисбатан интеграл йиғиндиси

$$\sigma(f;P;\xi_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

бўлади.

8-таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $[a,b]$ сегментни диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклаши учун тузилган $\sigma(f;P;\xi_k)$ йиғинди ихтиё-рий ξ_k нуқталарда

$$\left|\sigma(f;P;\xi_k)-J\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k-J\right|<\varepsilon$$

тенгсизликни бажарса, J сон $\sigma(f;P;\xi_k)$ йиғиндининг $\lambda_P\to 0$ даги лимити дейилади ва

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma(f;P;\xi_k)=J$$

каби белгиланади.

Бу таърифни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0\ ,\ \forall P\in\rho\ ,\ \lambda_P<\delta\ ,\forall\xi_k$$

учун

$$\left|\sigma(f;P;\xi_k)-J\right|<\varepsilon$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma(f;P;\xi_k)=J$$

дейилади.

9-таъриф. Агар $\lambda_P\to 0$ да $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси $\sigma(f;P;\xi_k)$ чекли J лимитга эга бўлса, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда интегралланувчи (Риман маъносида интеграл-ланувчи) дейилади, J сонига эса $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегмент бўйича аниқ интеграли дейилади. Уни

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\quad .$$

4-мисол. $f(x)=x$, $x\in[a,b]$ бўлсин. Бу функциянинг аниқ интеграли топилсин.

◄ $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$$

бўлаклашини олиб унга нисбатан $f(x)=x$ функциянинг интег-рал йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma(f;P;\xi_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cdot\Delta x_k\ ,$$

бунда

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k\quad ,\quad x_k\le\xi_k\le x_{k+1}\qquad (k=0,1,,2,\ldots,n-1).$$

Энди

$$x_k\le\xi_k\le x_{k+1}$$

тенгсизликларни $\Delta x_k>0$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган

$$x_k \cdot \Delta x_k \le \xi_k \cdot \Delta x_k \le x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

тенгсизликларни k нинг $0,1,2,\ldots,n-1$ қийматлари бўйича ҳад-лаб қўшиб

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k \quad ,$$

яъни

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k \qquad (3)$$

бўлишини топамиз.

Бу тенгсизликлардаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \quad , \qquad \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

йиғиндиларни Δx_k лар орқали ифодалаймиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k{}^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x_n{}^2 - x_0{}^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2 \quad ,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \Delta x_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2 =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2 .$$

Натижада (3) тенгсизликлар ушбу

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2 \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2$$

кўринишга келади. Бу муносабатдан

$$\left| \sigma(f;P;\xi_k) - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2 .$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k{}^2 \le \lambda_P \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{b-a}{2}\lambda_P \ .$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{b-a}$ дейилса, у ҳолда $\lambda_p < \delta$ бўлган ихтиёрий P бўлаклаш ва ихтиёрий ξ_k ларда

$$\left| \sigma(x;P;\xi_k) - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma(x;P;\xi_k) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

бўлишини билдиради. Демак,

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2} . ►$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли икки хил таърифланади. Бу таърифлар эквивалент таърифлар бўлади. (Қаралсин, [1] 9-боб)

Одатда, $[a,b]$ сегмент бўйича интегралланувчи функция-лар тўплами $R([a,b])$ каби белгиланади:

$$f(x) \in R([a,b]) \Leftrightarrow f(x) \text{ функция } [a,b] \text{ да интегралланувчи.}$$

Машқлар

1. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ да чегараланганлиги унинг $[a,b]$ да интегралланувчи бўлишининг зарурий шарти экани исбот-лансин.

2. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ да берилган ва чегараланган бўлиб, P эса $[a,b]$ нинг ихтиёрий бўлаклаши бўлсин. Агар $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \le g(x)$ бўлса,

$$s(f,p) \le s(g,p)$$
$$S(f,p) \le S(g,p)$$

бўлиши исботлансин.

Glossariy

◄ $[a,b]$ *сегментнинг ихтиёрий*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

бўлаклашини олиб унга нисбатан $f(x) = x$ *функциянинг интег-рал йиғиндисини тузамиз:*

$$\sigma(f;P;\xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k \quad ,$$

бунда

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad , \quad x_k \le \xi_k \le x_{k+1} \quad (k = 0,1,,2,\ldots,n-1).$$

Энди

$$x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$$

тенгсизликларни $\Delta x_k > 0$ *га кўпайтириб, ҳосил бўлган*

$$x_k \cdot \Delta x_k \le \xi_k \cdot \Delta x_k \le x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

тенгсизликларни k *нинг* $0,1,2,\ldots,n-1$ *қийматлари бўйича ҳад-лаб қўшиб*

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k \quad ,$$

яъни

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k \qquad (3)$$

бўлишини топамиз.

22-Амалий машғулот:

Қутб координаталар системасида берилган текис шаклнинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин:

2237. $\mathbf{r = a\sin\varphi}$

2238. $\mathbf{r = a(1+\cos\varphi),\ \ (0 \le \varphi \le 2\pi)}$

2239. $\mathbf{r = a\cos^2\varphi}$

2240. $\mathbf{0 \le r \le 2a\sin\varphi}$

2241. $\mathbf{0 \le r \le a\cos^3\varphi}$

2242. $\mathbf{0 \le r \le a\sin^2\varphi}$

2243. $\mathbf{0 \le r \le 2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},\ \ \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}\right)}$

22-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

2244.Ушбу

$$\varphi = \pi r^3,\quad \varphi = \pi$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

23-маъруза: Функциянинг интегралланувчилик мезони (критерийси)

РЕЖА:

1^0. Дарбу йиғиндиларининг хоссалари.
2^0. Интегралланувчилик мезони (критерийси).

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. Дарбу йиғиндиларининг хоссалари. $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда берилган ва чегараланган бўлиб,

$$P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

$[a,b]$ нинг бирор бўлаклаши бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари

$$s(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k \quad ,$$

$$S(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k$$

мавжуд бўлади, бунда

$$m_k=\inf\{f(x)\}\ , \qquad x\in[x_k, x_{k+1}] \quad ,$$
$$M_k=\sup\{f(x)\}\ , \qquad x\in[x_k, x_{k+1}] \quad ,$$
$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k \quad , \qquad k=0,1,2,\dots,n-1.$$

1) $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий P бўлаклашига нисбатан тузилган $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари учун

$$(b-a)\cdot\inf_{[a,b]}\{f(x)\}\le s(f;P)\le S(f;P)\le (b-a)\cdot\sup_{[a,b]}\{f(x)\}$$

бўлади.

◄ Бу муносабат 32-маърузадаги (3) тенгсизликлардан келиб чиқади. ►

Айтайлик,

$$P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

$[a,b]$ сегментнинг бирор бўлаклаши бўлсин. Бу бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари x_k $(k=0,1,2,\dots,n)$ қаторига янги бўлувчи нуқталарни қўшиб, $[a,b]$ сегментнинг бошқа P' бўлаклашини ҳосил қиламиз. Уни $P\subset P'$ каби белгилаймиз.

2) $[a,b]$ сегментининг ихтиёрий P ва P' бўлаклашлари $(P\subset P')$ учун

$$s(f;P)\le s(f;P')\ ,$$
$$S(f;P)\ge S(f;P')$$

муносабатлар ўринли бўлади.

◄ $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

бўлаклашини олайлик. Соддалик учун P' бўлаклаш P нинг барча бўлувчи нуқталари ҳамда қўшимча битта x' нуқтадан юзага келган бўлсин. Бу x' нуқта x_k ҳамда x_{k+1} нуқталар орасида жойлашсин:

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

Демак,

$$P' = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x', x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n\}.$$

Бу бўлаклашларга нисбатан Дарбунинг қуйи йиғиндиларини ёзамиз:

$$s(f;P) = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + \ldots + m_k\Delta x_k + \ldots + m_{n-1}\Delta x_{n-1}$$

$$s(f;P') = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + \ldots$$

$$\ldots + \left[m_k^1 \cdot (x^1 - x_k) + m_k^{11} \cdot (x_{k+1} - x^1)\right] + \ldots + m_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1},$$

бунда,

$$m_k^1 = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x'],$$

$$m_k^{11} = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x', x_{k+1}].$$

Энди $m_k^1 \geq m_k$, $m_k^{11} \geq m_k$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$s(f;P') - s(f;P) = m_k^1(x' - x_k) + m_k^{11}(x_{k+1} - x') -$$

$$- m_k\Delta x_k \geq m_k(x' - x_k) + m_k(x_{k+1} - x') - m_k\Delta x_k = 0.$$

Кейинги муносабатдан

$$s(f;P) \leq s(f;P')$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш,

$$S(f;P) \geq S(f;P')$$

бўлиши исботланади. ►

3) $[a,b]$ нинг ихтиёрий P_1 ва P_2 ($P_1 \in$ $P_2 \in$) бўлаклаш-ларга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$s(f;P_1) \leq S(f;P_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

◄ P_1 ва P_2 бўлаклашларнинг барча бўлувчи нуқталари ёрдамида $[a,b]$ нинг P' бўлаклашини ҳосил қиламиз. Равшанки,

$$P_1 \subset P', \; P_2 \subset P'$$

бўлади.

Юқорида келтирилган 1) ва 2) хоссалардан фойдаланиб топамиз:

$$s(f;P_1) \leq s(f;P') \leq S(f;P') \leq S(f;P_2). \; ►$$

Натижа. $[a,b]$ сегментда чегараланган ихтиёрий $f(x)$ функция учун

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлади.

◄ Шартга кўра $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган. Демак,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P\{s(f;P)\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P \{S(f;P)\}$$

интеграллар мавжуд.

Юқоридаги 3) хосса ҳамда аниқ чегара таърифларидан

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2⁰. Интегралланувчилик мезони (критерийси). Энди $[a,b]$ сегментда берилган ва чегараланган $f(x)$ функциянинг аниқ интегралининг мавжудлиги масаласини қараймиз.

1-теорема. $f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўли-ши учун $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $[a,b]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топилиб, унга нисбатан

$$S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Бу теорема қуйидагича ҳам ифодаланиши мумкин:

$$f(x)\in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ ,\ \exists P\in\{P\} : S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon\,.$$

◄ **Зарурлиги.** Айтайлик, $f(x)\in R([a,b])$ бўлсин. Таърифга биноан

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Ихтиёрий мусбат ε сонни олайлик. Унда қуйи ва юқори интегралларнинг таърифларига кўра

$$\exists P_1\in\{P\} : \qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f;P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ;$$

$$\exists P_2\in\{P\} \ : \ S(f;P_2) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади.

Энди $[a,b]$ сегментнинг P_1 ва P_2 бўлаклашларнинг барча бўлувчи нуқталаридан $[a,b]$ нинг P бўлаклашини ҳосил қиламиз.

Равшанки, $P_1\subset P$, $P_2\subset P$ бўлади. Дарбу йиғиндиларининг 1) ва 2) хоссаларидан фойдаланиб P бўлаклаш учун

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;P_1) \le s(f;P) \le S(f;P) \le S(f;P_2) <$$

$$< \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлишини топамиз.

Кейинги муносабатлардан

$$S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик,

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists P\in\{P\}:\ \ S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

бўлсин. Унда юқорида келтирилган натижага кўра

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлиб,

$$s(f;P)\le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f;P)$$

бўлади. Бу тенгсизликлардан

$$0\le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f;P)-s(f;P)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\forall\varepsilon>0\ :\ 0\le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx<\varepsilon$$

Кейинги тенгсизликдан топамиз:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Демак, $f(x)\in R([a,b])$ ►

(Аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремани қуйида-гича ҳам айтса бўлади:

$f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилиб, $[a,b]$ сегментни диаметри $\lambda_p<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан

$$S(f;p)-s(f;p)<\varepsilon$$

тенгсизликни бажарилиши зарур ва етарли)

Аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ ора-лиқдаги тебранишини ω_k орқали белгилаймиз.

У ҳолда

$$S(f;P)-s(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k$$

бўлиб, 1-теорема қуйидагича ифодаланади:

$f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $[a,b]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топилиб, унга нисбатан

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Демак,

$$f(x)\in R([a,b])\Leftrightarrow \forall\varepsilon\in 0\ ,\ \exists P\in\{P\}:\ \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$$

Машқлар

1. $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий бўлаклаши учун

$$s(\alpha\, f(x)+\beta;P)=\alpha\ s(f;P)+\beta(b-a)\ ,$$
$$S(\alpha\, f(x)+\beta;P)=\alpha\ S(f;P)+\beta(b-a)$$

бўлиши исботлансин, бунда $\alpha,\beta\in R$

2. Агар $f(x)\in C[a,b]$ бўлса, у ҳолда $[a,b]$ нинг ихтиёрий бўлаклаши учун Дарбунинг қуйи ва юқори йиғиндилари $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндилари бўлиши исботлансин.

Glossariy

$f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилиб, $[a,b]$ сегментни диаметри $\lambda_p<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан

$$S(f;p)-s(f;p)<\varepsilon$$

тенгсизликни бажарилиши зарур ва етарли)

Аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ ора-лиқдаги тебранишини ω_k орқали белгилаймиз.

23-Амалий машғулот:

14 – м и с о л. $\mathbf{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

эллипс юқори қисмининг* OX *ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

◀Эллипснинг юқори қисми

$$\mathbf{y=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$$

бўлади. Бу эгри чизиқнинг **OX** ўқига нисбатан статик моментини

$$\mathbf{M_x=\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2}dx}$$

формулага кўра топамиз.

Равшанки,

$$\mathbf{y(x)\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}=\sqrt{y^2(x)+(y(x)\cdot y'(x))^2}}$$

бўлади. Агар

$$y^2(x)=b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2, \qquad y(x)\cdot y'(x)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot x$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$y(x)\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$M_x=\frac{b}{a}\cdot\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2}=b\left(b+\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}}\cdot\arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)$$

бўлади.►

15 – м и с о л . ***Ушбу***

$$ay=2ax-x^2(a>0), \quad y=0$$

чизиқлар билан чегараланган шакл – параболик сегментнинг **OX** ***ва*** **OY** ***ўқларига нисбатан инерция моментлари топилсин.***

◄Равшанки,

$$y(x)=\frac{1}{a}\cdot\left(2ax-x^2\right) \qquad (a>0).$$

1^0 да келтирилган формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_x=\frac{1}{3}\int_0^{2a}y^3(x)dx=\frac{1}{3a^3}\int_0^{2a}\left(2ax-x^2\right)^3dx=\frac{32a^4}{105}.$$

$$I_y=\int_0^{2a}x^2\cdot y(x)dx=\int_0^{2a}x^2\left(2x-\frac{x^2}{a}\right)dx=\frac{8}{5}\cdot a^4.►$$

16 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \qquad (x\ge 0, \quad y\ge 0)$$

шакл – эллипснинг биринчи чоракдаги қисмининг оғирлик маркази топилсин.

◄Бу эгри чизиқли трапециянинг оғирлик марказининг координатаси (x_c, y_c)

$$x_c=\frac{1}{S}\int_a^b x\cdot y(x)dx, \qquad y_c=\frac{1}{2S}\int_a^b y^2(x)dx$$

фомулаларга кўра топилади, бунда S – шаклнинг юзи.

Маълумки, эллипснинг юзи πab га тенг. Демак, $S=\frac{1}{4}\pi ab$. Энди

$$\int_0^a x\cdot y(x)dx \qquad \text{ва} \qquad \int_0^a y^2(x)dx$$

интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\int_0^a x\cdot y(x)dx=\frac{b}{a}\int_0^a x\cdot\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2b}{3},$$
$$\int_0^a y^2(x)dx=\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{2ab^2}{3}.$$
Демак,
$$x_c=\frac{\frac{a^2b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}}=\frac{4a}{3\pi},\qquad y_c=\frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{\pi ab}{4}}=\frac{4b}{3\pi}.$$

23-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Ушбу
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\qquad (x\ge 0,\quad y\ge 0)$$
шакл – эллипснинг биринчи чоракдаги қисмининг оғирлик маркази топилсин.

24-маъруза: Интегралланувчи функциялар синфи
РЕЖА:

1^0. Узлуксиз функцияларнинг интегралланувчилиги.

2^0. Монотон фукцияларнинг интегралланувчилиги

3^0. Аниқ интегралларнинг хоссалари

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР *Кантор теоремасига кўра* $[a,b]$ *оралиқда текис узлуксиз бўлади. Кантор теоремасининг натижасига кўра,* $\forall\varepsilon>0$ *олинганда ҳам шундай* $\delta>0$ *сон топиладики,* $[a,b]$ *оралиқни узунликлари* δ *дан кичик бўлган бўлакларга ажралганда ҳар бир бўлакдаги фукциянинг тебраниши*

1^0. Узлуксиз функцияларнинг интегралланувчилиги. Айтайлик, $f(x)$ фукция $[a,b]$ оралиқда аниқланган бўлсин.

1-теорема. Агар $f(x)$ фукция $[a,b]$ да узлуксиз бўлса, у шу $[a,b]$ да интегралланувчи, яъни

$$C[a,b]\subset R([a,b])$$

бўлади.

◄ Модомики, $f(x)\in C[a,b]$ экан, у Кантор теоремасига кўра $[a,b]$ оралиқда текис узлуксиз бўлади. Кантор теоремасининг натижасига кўра, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топиладики, $[a,b]$ оралиқни узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажралганда ҳар бир бўлакдаги фукциянинг тебраниши

$$\omega_\kappa<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Унда $[a,b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашда

$$S(f;P)-s(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\varepsilon$$

бўлади. Демак, $f(x)\in R([a,b])$. ►

2^0. Монотон фукцияларнинг интегралланувчилиги.

2-теорема. Агар $f(x)$ фукция $[a,b]$ сегметда чегаралан-ган ва монотон бўлса, у шу сегментда интегралланувчи бўлади.

◄ Айтайлик, $f(x)$ фукция $[a,b]$ сегментда ўсувчи бўлиб, $f(a)<f(b)$ бўлсин.

$\forall\varepsilon>0$ сонни олиб, унга кўра $\delta>0$ ни

$$\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

деймиз.

У холда $[a,b]$ сегментнинг диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ихтиёрий P бўлаклаш учун

$$S(f;P)-s(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k-m_k\right)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]\cdot\Delta x_k\le$$

$$\leq \lambda_P \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]=\lambda_P\cdot\left[f(b)-f(a)\right]<\frac{\varepsilon}{f(b-f(a)}\cdot\left[f(b)-f(a)\right]=\varepsilon$$

бўлади. Демак, $f(x)\in R([a,b])$. ►

3⁰. Узиладиган фукцияларнинг интегралланувчилиги.

3-теорема. Агар $f(x)$ фукция $[a,b]$ сегментда чегаралан-ган ва шу сегментнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлса, фукция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлади.

◄ $f(x)$ фукция $[a,b]$ да чегараланган бўлсин. Демак,

$$\exists C\in R,\quad \forall x\in[a,b]:\ \left|f(x)\right|\leq C \qquad (C>0)$$

бўлади.

Соддалик учун, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментнинг фақат битта x^* $(x^*\in[a,b])$ нуқтасида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлсин. $\forall\varepsilon>0$ сонни олиб, унга кўра $\delta>0$ сонни

$$\delta=\frac{\varepsilon}{16C}$$

деймиз.

x^* нуқтанинг δ атрофи $(x^*-\delta, x^*+\delta)$ ни олиб, ушбу

$$[a,b]\setminus(x^*-\delta, x^*+\delta)$$

тўпламни қараймиз. Бу тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлиб, Кантор теоремасига биноан у текис узлуксиз бўлади. У ҳолда шундай $\gamma>0$ сон топиладики,

$$\forall x', x''\in\left[a, x^*-\delta\right],\qquad \left(\forall x', x''\in\left[x^*+\delta, b\right]\right)$$

лар учун $\left|x'-x''\right|<\gamma$ бўлишидан

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $[a,b]$ сегментни диаметри $\lambda_P<\min(\delta,\gamma)$ бўлган ихтиёрий P бўлаклашини олиб, унга нисбатан

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k \tag{1}$$

йиғиндини тузамиз.

Бу йиғиндининг ҳар бир ҳадида $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ ораликқларнинг узунликлари Δx_k лар қатнашади.

(1) йиғиндининг ушбу

$$[x_k, x_{k+1}]\bigcap(x^*-\delta, x^*+\delta)=\emptyset$$

муносабат бажариладиган $[x_k, x_{k+1}]$ га мос ҳадларидан тузилган йиғиндини

$$\sum_k{}'\ \omega_k\cdot\Delta x_k$$

билан, қолган барча ҳадлардан (бундай ҳадлар учун

$$[x_k, x_{k+1}]\bigcap(x^*-\delta, x^*+\delta)\neq\emptyset$$

ёки

$$[x_k, x_{k+1}] \bigcap \{x^* - \delta\} \neq \emptyset$$

ёки

$$[x_k, x_{k+1}] \bigcap \{x^* + \delta\} \neq \emptyset$$

бўлади) ташкил топган йиғиндини

$$\sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

билан белгилаймиз.

Натижада

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k = \sum_k{}' \omega_k \cdot \Delta x_k + \sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, тенгликнинг ўнг томондаги қўшилувчилар учун

$$\sum_k{}' \omega_k \cdot \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_k{}' \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k \leq 2C \cdot \sum_k{}'' \Delta x_k \leq 2 \cdot C \cdot 4\delta = 8C \cdot \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Демак,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Бу эса $f(x)$ фукциянинг $[a,b]$ да интегралланувчи экани-ни билдиради. ►

Машқлар

1. Айтайлик,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар } \ 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{агар } \ x = 0 \end{cases}$$

бўлсин. $f(x) \in R([0,1])$ бўлиши исботлансин.

2. $y = f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиб, унинг қийматлари $[c,d]$ га тегишли бўлсин. Агар $\Phi(y)$ функция $[c,d]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда мураккаб функция $\varphi(f(x))$ нинг $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиши исботлансин.

1⁰. Интегралнинг чизиқлилик ҳамда аддитивлик хоссалари.

1-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b])$ ва $C \in R$ бўлса, у ҳолда $(C \cdot f(x)) \in R([a,b])$ бўлиб,

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

◄ $f(x) \in R([a,b])$ ва $C \in R$ бўлсин. Аниқ интеграл таърифига кўра

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k) = \int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sigma(C \cdot f(x;P;\xi_k)) = C\sigma\left(f;P;\xi_k\right),$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(C \cdot f(x;P;\xi_k)) = C \cdot \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k).$$

Демак,

$$(C \cdot f(x)) \in R([a,b])$$

ва

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx . \blacktriangleright$$

2-хосса. Агар

$$f(x) \in R([a,b]),\ g(x) \in R([a,b])$$

бўлса, у ҳолда

$$(f(x) + g(x)) \in R([a,b])$$

бўлиб,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

бўлади (аддитивлик ҳоссаси)

◄ Аниқ интеграл таърифига кўра

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k) = \int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sigma(f + g, P, \xi_k) = \sigma(f, P, \xi_k) + \sigma(g, P, \xi_k) .$$

Лимитга эга бўлган фукциялар ҳақида теоремадан фойдаланиб, $\left(f(x) + g(x)\right) \in R([a,b])$ ва

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

бўлишини топамиз. ►

3-хосса.Агар

$$f(x) \in R([a,c]),\ f(x) \in R([c,b])$$

бўлса, у ҳолда

$$f(x) \in R([a,b])$$

бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

бўлади.

◀ Айтайлик, $a < c < b$ бўлиб, $f(x) \in R([a,c])$ ва $f(x) \in R([c,b])$ бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $[a,c]$ оралиқнинг $\lambda_{P_1} < \delta_1$ бўлган P_1 бўлаклаши топиладики

$$S(f;P_1) - s(f;P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1)$$

шунингдек $[c,b]$ оралиқнинг $\lambda_{P_2} < \delta_2$ бўлган P_2 бўлаклаши топиладики,

$$S(f;P_2) - s(f;P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади.

Энди $[a,b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_{P_3} < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ бўлган ихтиёрий P_3 бўлаклашини оламиз. Бу P_3 бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари қаторига c нуқтани қўшиб $[a,b]$ нинг янги P бўлаклашини ҳосил қиламиз. Унга нисбатан $f(x)$ фукция-нинг Дарбу йиғиндилари

$$S(f;P), \qquad s(f;P)$$

бўлсин.

P бўлаклашнинг $[a,c]$ ва $[c,b]$ даги бўлувчи нуқталари мос равишда уларнинг P_1' ҳамда P_2' бўлаклашларини юзага келтиради. Равшанки, бу P_1' ва P_2' бўлаклашларга нисбатан қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$S(f;P_1') - s(f;P_1') < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(f;P_2') - s(f;P_2') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Айни пайтда,

$$S(f;P) = S(f;P_1') + S(f;P_2'),$$

$$s(f;P) = s(f;P_1') + s(f;P_2')$$

бўлади. Бу муносабатлардан

$$S(f;P) - s(f;P) = \left(S(f;P_1') - s(f;P_1')\right) +$$

$$+ \left(S(f;P_2') - s(f;P_2')\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x) \in R([a,b])$.

$f(x)$ фукциянинг $[a,b], [a,c], [c,b]$ оралиқлар бўйича P бўлаклашга нисбатан интеграл йиғиндилари

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \qquad \sum_{[a,c]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \qquad \sum_{[c,b]} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

бўлиб,

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{[a,c]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k + \sum_{[c,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

бўлади. Интеграл таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

Шунга ўхшаш $c<a<b,\ a<b<c$ бўлган ҳолларда ҳам хоссанинг ўринли бўлиши исботланади.►

4-хосса. Агар $f(x)\in R([a,b]),\quad g(x)\in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)\in R([a,b])$ бўлади.

◄ Модомики, $f(x)$ ва $g(x)$ фукциялар $[a,b]$ да интеграл-ланувчи экан, унда

$$S(f;P)-s(f;P)<\frac{\varepsilon}{2M'}\quad (M'=\sup\ f(x), x\in[a,b])$$

$$S(g;P)-s(g;P)<\frac{\varepsilon}{2M}\quad (M=\sup\ g(x),\ x\in[a,b])$$

бўлади.

Айтайлик, $\forall x\in[a,b]$ да $f(x)\geq 0,\ q(x)\geq 0$ бўлсин. У ҳолда $\forall x\in[x_k;x_{k+1}]$ учун

$$0\leq m_k\leq f(x)\leq M'_k,\ m_k=\inf\ f(x),\ M'_k=\sup f(x);$$

$$0\leq m'_k\leq g(x)\leq M_k,\ m'_k=\inf\ g(x),\ M_k=\sup g(x)$$

бўлиб, улардан

$$0\leq m_k\cdot m'_k\leq f(x)\cdot g(x)\leq M_k\cdot M'_k,$$

бўлиши келиб чиқади. Айни пайтда,

$$m_k^0=\inf\{f(x)\cdot g(x)\},\ M_k^0=\sup\{f(x)\cdot g(x)\}$$

лар учун

$$m_k\cdot m'_k\leq m_k^0\leq M_k^0\leq M_k\cdot M'_k$$

бўлиб,

$$M_k^0-m_k^0\leq M_k\cdot M'_k-m_k\cdot m'_k=$$
$$=M'_k(M_k-m_k)+m_k(M'_k-m'_k)$$

бўлади.

Энди $M\geq M_k$, $M'\geq M'_k$ эканини этиборга олиб, топамиз;

$$S(f\cdot g;P)-s(f\cdot g;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k^0-m_k^0\right)\leq$$
$$\leq M'\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k-m_k\right)\cdot\Delta x_k+M\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(M'_k-m'_k\right)=$$
$$=M'\left(S(f;P)-s(f;P)\right)+M'\left(S(g;P)-s(g;P)\right)<$$
$$<M'\frac{\varepsilon}{2M'}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}<\varepsilon.$$

Демак, бу ҳолда $f(x)\cdot g(x)\in R([a,b])$.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ фукциялар $[a,b]$ да ихтиёрий интегралланувчи фукциялар бўлсин.

Равшанки, $\forall x \in [a,b]$ да

$$f(x) - \inf f(x) = f(x) - m \geq 0,$$
$$g(x) - \inf g(x) = g(x) - m' \geq 0$$

бўлади.

Энди $f(x) \cdot g(x)$ фукцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x) \cdot g(x) = \left(f(x) - m\right)\left(g(x) - m'\right) + mg(x) + m'f(x) - mm'.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи $[a,b]$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли $f(x) \cdot g(x)$ ҳам $[a,b]$ да интегралланувчи бўлади. ►

Натижа. Агар $f(x) \in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда $[f(x)]^n \in R([a,b])$ бўлади, бунда $n \in N$.

2⁰. Интегралнинг тенгсизликлар билан боғланган хоссалари.

1-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b])$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

бўлади.

◄ Интегралнинг таърифига кўра

$$\lambda_P \to 0 \text{ да } \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \to \int_a^b f(x)dx$$

бўлади. У ҳолда, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлишидан

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \geq 0$$

бўлиб, ундан

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

бўлиши келиб чиқади. ►

1-натижа. Агар $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \leq g(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

◄ Равшанки,

$$f(x) \in R([a,b]),\, g(x) \in R([a,b]) \Rightarrow (g(x) - f(x)) \in R([a,b])$$

бўлиб,

$$g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq$$
$$\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

бўлади. ►

2-натижа. Агар $f(x)\in R([a,b])$, $g(x)\in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad (2)$$

бўлади.

◄ Ихтиёрий $\alpha\in R$ учун

$$\int_a^b \left(f(x)-\alpha\cdot g(x)\right)^2 dx \ge 0$$

бўлиб,

$$\alpha^2\int_a^b g^2(x)dx - 2\alpha\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \ge 0$$

бўлади. Квадрат учҳаднинг дискриминанти мусбат бўлмаган-лиги сабабли

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx \le 0,$$

яъни,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

бўлади. ►

(2) тенгсизлик Коши-Буняковский тенгсизлиги дейи-лади.

2-хосса. Агар $f(x)\in R([a,b])$ бўлса, $|f(x)|\in R([a,b])$ бўлиб,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

бўлади.

◄ $f(x)\in R([a,b])$ бўлсин. Интегралланувчилик мезонига кўра, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам $[a,b]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топиладики, унга нисбатан

$$S(f;P)-s(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k < \varepsilon$$

бўлади, бунда ω_k – $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ даги тебраниши.

Равшанки, $\forall x', x''\in[a,b]$ учун

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \le |f(x')-f(x'')|$$

бўлиб, ундан

$$\sup\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \le \sup|f(x')-f(x'')|$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\omega_k' \le \omega_k$$

бўлади, бунда ω_k' – $|f(x)|$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ даги тебраниши. Шуларни эътиборга олиб,

$$S(|f|;P)-s(|f|;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^{'}\cdot\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, $|f(x)|\in R([a,b])$.

$f(x)$ ва $|f(x)|$ функцияларнинг интеграл йиғиндилари учун

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\cdot\Delta x_k\,,$$

бўлиб, $\lambda_p\to 0$ да лимитга ўтиш натижасида

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$$

бўлиши келиб чиқади.►

3⁰. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ да берилган ва чегараланган бўлсин. У ҳолда $m=\inf\{f(x)\},\ M=\sup\{f(x)\}\ \ (x\in[a,b])$ мавжуд ва $\forall x\in[a,b]$ учун

$$m\le f(x)\le M$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

1-теорема. Агар $f(x)\in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu(m\le\mu\le M)$ сон мавжудки,

$$\int_a^b f(x)dx=\mu\cdot(b-a)$$

бўлади.

◄ Равшанки,

$$m\le f(x)\le M\Rightarrow\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\,.$$

Кейинги тенгсизликлардан

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$$

бўлиши келиб чиқади.

Агар

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

дейилса, ундан

$$\int_a^b f(x)dx=\mu\cdot(b-a)$$

бўлишини топамиз. ►

3-натижа. Агар $f(x)\in C[a,b]$ бўлса, у ҳолда шундай $\theta\in[a,b]$ топиладики,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\theta)\cdot(b-a)$$

бўлади.

◄ Бу тасдиқ юқоридаги теорема ва узлуксиз функция-нинг хоссасидан келиб чиқади.►

2-теорема. Агар $f(x)\in R([a,b]),\ g(x)\in R([a,b])$ бўлиб, $[a,b]$ да $g(x)$ функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu(m\le\mu\le M)$ сон мавжудки,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx \qquad (3)$$

бўлади.

◄ Айтайлик, $\forall x\in[a,b]$ да $g(x)\ge 0$ бўлсин. Унда равшанки,

$$m\le f(x)\le M \Rightarrow mg(x)\le f(x)\cdot g(x)\le Mg(x)$$

бўлади.

Бу муносабатдан ҳамда аниқ интеграл хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

а) $\int_a^b g(x)dx = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

бўлиб, ихтиёрий $\mu(m\le\mu\le M)$ да (3) ўринли бўлади.

б) $\int_a^b g(x)dx > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$$

бўлиб,

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

дейилса, ундан

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади. ►

4-натижа. Агар $f(x)\in C[a,b]$ бўлиб, $g(x)\in R([a,b])$ ва $g(x)$ функция $[a,b]$ да ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай $\theta\in[a,b]$ топиладики,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta)\int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

Glossariy

Агар $f(x)\in R([a,b]),\ g(x)\in R([a,b])$ бўлиб, $[a,b]$ да $g(x)$ функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu(m\le\mu\le M)$ сон мавжудки,

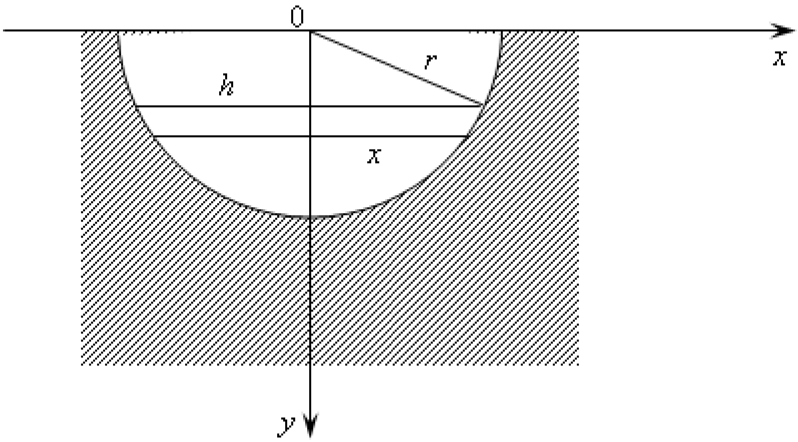
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

24-Амалий машғулот:

Машқлар

18 – м и с о л . ***Радиуси*** $\mathbf{r}$ ***бўлган ярим доира диаметри сув сатхида бўладиган қилиб сувга ботирилган. Ярим доирага таъсир этувчи босим кучи топилсин. (17-чизма).***



17-чизма.

◄Ярим доирани сув сатҳига параллел қилиб олинган бўлакчасининг юзи тахминан

$$\mathbf{\Delta S \approx 2x\cdot\Delta h = 2\sqrt{r^2-h^2}\cdot\Delta h}$$

бўлади. Бу бўлакчага таъсир этувчи босим кучи

$$\mathbf{\Delta F \approx 2\gamma\cdot h\cdot\sqrt{r^2-h^2}\cdot\Delta h}$$

бўлади, бунда γ - сувнинг солиштирма оғирлиги бўлиб, у 1 га тенг. Демак, ярим доирага таъсир этувчи босим кучи

$$\mathbf{F = 2\int_0^r h \cdot \sqrt{r^2 - h^2}dh = -\frac{2}{3}\left(r^2 - h^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^r = \frac{2}{3} \cdot r^3}$$

бўлади.►

2245.Тенгламаси $\mathbf{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$ бўлган тўғри чизиқни координаталар ўқлари орасидаги қисмининг **OX** ва **OY** ўқларига нисбатан статик моментлари топилсин.

2246. $\mathbf{y=\cos x}$ эгри чизиқ ёйининг $\mathbf{x=-\frac{\pi}{2}}$, $\mathbf{x=\frac{\pi}{2}}$ нуқталар орасидаги қисмининг **OX** ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2247.Ушбу $\mathbf{x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0}$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг **OX** ва **OY** ўқларига нисбатан статик моментлари топилсин.

2248.Ушбу $\mathbf{x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi}$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг (циклоиданинг бир аркининг) OX ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2249.Томони $\mathbf{a}$ га тенг бўлган квадратнинг унинг диоганалига нисбатан инерция моменти топилсин.

2250.Асоси $\mathbf{b}$, баландлиги $\mathbf{h}$ бўлган бир жинсли учбурчакнинг асосига нисбатан инерция моменти топилсин.

24-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1. $f(x)\in C((-\infty,+\infty))$ бўлиб, у T $(T\neq 0)$ даврли функция бўлсин. У ҳолда $\forall\ a\in R$ учун

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

бўлиши исботлансин.

Хосмас интеграллар (6 соат)

25-маъруза: Чегаралари чексиз хосмас интеграллар.

РЕЖА:

1^0. Чегаралари чексиз хосмас интеграл тушунчаси.

2^0. Яқинлашувчи хосмас интегралнинг содда хоссалари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

Функциянинг аниқ интеграли (Риман интеграли) тушун-часини киритишда интеграллаш оралиғининг чекли булиши талаб этилган эди.

Энди чексиз оралиқда ($[a,+\infty)$; $(-\infty,a]$; $(-\infty,+\infty)$ оралиқлар-да) берилган функциянинг шу оралиқ бўйича интеграл тушунчасини келтирамиз ва ўрганамиз.

1^0.Чегаралари чексиз хосмас интеграл тушунчаси. $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда $(a\in R)$ берилган бўлиб, ихтиёрий $[a,t]$ да $(a\le t<+\infty)$ интегралланувчи бўлсин: $f(x)\in R([a,t])$.

Ушбу

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

белгилашни киритамиз.

1-таъриф. Агар $t\to+\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимити $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ чексиз оралиқ бўйича хосмас интеграли дейилади ва

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}F(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

(1) интегрални чегараси чексиз хосмас интеграл ҳам деб юритилади.

Қулайлик учун, бундан кейин “чегараси чексиз хосмас интеграл” дейиш ўрнига “интеграл” деймиз.

2-таъриф. Агар $t\to+\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, (1) интеграл яқинлашувчи дейилади.

Агар $t\to+\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (1) интеграл узоқлашувчи дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

интегрални қарайлик. Бу ҳолда

$$F(t)=\int_0^t e^{-x}dx=-e^{-t}+1$$

бўлиб,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)=1$$

бўлади.

Демак, берилган интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

2-мисол. Ушбу

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \qquad (a>0,\quad \alpha>0)$$

интеграл учун

$$F(t)=\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\ln t-\ln a, & \text{агар } \alpha=1 \text{ бўлса}\\ \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{агар } \alpha\neq1 \text{ бўлса}\end{cases},$$

бўлиб, $t\to+\infty$ да

$$F(t)\to\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \qquad (\alpha>1),$$

$$F(t)\to+\infty \qquad (\alpha\le1)$$

бўлади.

Демак,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

интеграл $\alpha>1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\le1$ бўлганда узоқла-шувчи бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty}\cos x dx$$

интеграл узоқлашувчи бўлади, чунки $t\to+\infty$ да

$$F(t)=\int_0^t\cos x dx=\sin t$$

функциянинг лимити мавжуд эмас.

Юқоридагидек,

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интеграллар ва уларнинг яқинлашувчилиги, узоқла-шувчилиги таърифланади:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx\quad,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} f(x)dx \ .$$

2⁰. Яқинлашувчи хосмас интегралнинг содда хоссалари. Хосмас интегралнинг турли хоссаларини $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ оралиқ бўйича олинган

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

интеграли учун баён этамиз. Бу хоссаларни

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \ , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

интеграллар учун келтиришни ўқувчига ҳавола этамиз.

1-хосса. Агар $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_{b}^{+\infty} f(x)dx \quad (a < b)$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча . Бунда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

тенглик бажарилади.

◄ Равшанки,

$$\int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{t} f(x)dx \ . \quad (a < b < t)$$

Айтайлик, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Демак,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

мавжуд ва чекли бўлади:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx ,$$

(2) тенгликдан фойдаланиб, $t \to +\infty$ да

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{b}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx$$

бўлишини топамиз. Демак, $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_{b}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx$$

бўлади.

Айтайлик, $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин,

Демак,

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{b}^{t} f(x)dx = \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

чекли бўлади.

(2) тенгликдан, $t\to+\infty$ да

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{a}^{t} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи ва

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

бўлади. ►

2-хосса. Агар $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_{a}^{+\infty} C\cdot f(x)dx$ ҳам $(C=const)$ яқинлашувчи бўлиб,

$$\int\limits_{a}^{+\infty} C\cdot f(x)dx = C\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

бўлади.

3-хосса. Агар $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\forall x\in[a,+\infty)$ да $f(x)\geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

бўлади.

4-хосса. Агар $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқинла-шувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_{a}^{+\infty} (f(x)\pm g(x))dx$ интеграл ҳам яқинла-шувчи бўлиб,

$$\int\limits_{a}^{+\infty} (f(x)\pm g(x))dx = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

5-хосса. Агар $\forall x\in[a,+\infty)$ да $f(x)\leq g(x)$ бўлиб, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

2)- 5)- хоссаларнинг исботи хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ да берилган бўлиб, $f(x)$ функция чегараланган ($m \le f(x) \le M$, $x \in [a,+\infty)$), $g(x)$ функция эса ўз ишорасини ўзгартирмасин ($\forall x \in [a,+\infty)$ да ҳар доим $g(x) \ge 0$ ёки $g(x) \le 0$).

6-хосса. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқин-лашувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu (m \le \mu \le M)$ топиладики,

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (3)$$

бўлади.

◄ Айтайлик, $\forall x \in [a,+\infty)$ да $g(x) \ge 0$ бўлсин. Унда

$$m \cdot g(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

бўлиб,

$$m\int_a^{t} g(x)dx \le \int_a^{t} f(x)g(x)dx \le M\int_a^{t} g(x)dx$$

бўлади. Бу тенгсизликлардан, $t \to +\infty$ да лимитга ўтсак унда

$$m\int_a^{+\infty} g(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \le M\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = 0$$

бўлганда (3) тенглик бажарилади.

Айтайлик,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx > 0$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$m \le \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx} \le M$$

бўлади. Агар

$$\mu = \frac{\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx}$$

деб олинса, унда $m \le \mu \le M$ бўлиб,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx = \mu \cdot \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

$\forall x \in [a,+\infty)$ да $g(x) \le 0$ бўлганда (3) тенгликнинг бажари-лиши юқоридагидек исботланади. ►

Одатда, бу хосса ўрта қиймат ҳақидаги теорема дейилади.

3^0. Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

Маълумки,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги ушбу

$$F(t) = \int\limits_a^{t} f(x)dx \qquad (t > a)$$

функциянинг $t \to +\infty$ да чекли лимитга эга бўлишидан иборат.

13-маърузада функциянинг чекли лимитига эга бўлиши ҳақидаги Коши теоремаси, яъни $F(t)$ функциянинг $t \to +\infty$ да чекли лимитга эга бўлиши учун

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists t_0 > a, \quad \forall t' > t_0, \qquad \forall t'' > t_0 \ :$$

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли экани келтирилган эди.

Бу тушунча ва тасдиқдан

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{4}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини ифодалайдиган қуйидаги теоремага келамиз.

Теорема (Коши теоремаси). (4) интегралнинг яқинла-шувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $t_0 \in R$ $(t_0 > a)$ топилиб, ихтиёрий $t' > t_0$, $t'' > t_0$ бўлганда

$$\left| \int\limits_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

функциянинг чекли лимитига эга бўлиши ҳақидаги Коши теоремаси, яъни $F(t)$ *функциянинг* $t \to +\infty$ *да чекли лимитга эга бўлиши учун*

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists t_0 > a, \quad \forall t' > t_0 , \qquad \forall t'' > t_0 \ :$$

$$\left| F(t'') - F(t') \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли

25-Амалий машғулот:

Машқлар

Агар (1) лимит мавжуд ва чекли бўлса, (2) хосмас интеграл **яқинлашувчи**, чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (2) хосмас интеграл **узоқлашувчи** дейилади.

Худди шунга ўхшаш $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграллар ва уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги таърифланади.

25-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

□ кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

□ тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

1. Ушбу

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1 + x^2\right)^3} dx = -\frac{1}{8}$$

тенглик исботлансин.

26-маъруза: Манфий бўлмаган функциянинг хосмас интеграллари.

РЕЖА:

1^0. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги.
2^0. Таққослаш теоремалари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *Айтайлик,* $f(x)$ *функция* $[a,+\infty)$ *оралиқда берилган бўлиб,* $\forall x \in [a,+\infty)$ *да* $f(x) \ge 0$ *бўлсин. Бу функцияни* $[a,t]$ *да* $(a < t < +\infty)$ *интегралланувчи дейлик:* $f(x) \in R([a,t])$*. Бу ҳолда*

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

функция $(a,+\infty)$ *оралиқда ўсувчи бўлади.*

1^0. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a,+\infty)$ да $f(x) \ge 0$ бўлсин. Бу функцияни $[a,t]$ да $(a < t < +\infty)$ интегралланувчи дейлик: $f(x) \in R([a,t])$. Бу ҳолда

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

функция $(a,+\infty)$ оралиқда ўсувчи бўлади.

◄ Ҳақиқатдан ҳам, $a < t_1 < t_2 < +\infty$ да

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

бўлиб,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \ge 0$$

бўлганлиги сабабли

$$F(t_2) \ge F(t_1)$$

бўлади. Демак, $\forall\ t_1, t_2 \in (a,+\infty)$ учун

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \le F(t_2). \blacktriangleright$$

1-теорема. Манфий бўлмаган $f(x)$ функция хосмас интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x) \ge 0,\ x > a) \tag{1}$$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун $F(t)$ функциянинг юқоридан чегараланган, яъни

$$\exists C \in R\,,\ \forall t > a:\ F(t) \le C$$

бўлиши зарур ва етарли.

◄**Зарурлиги.** Айтайлик, (1) интеграл яқинлашувчи бўлсин. Таърифга биноан

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)$$

мавжуд ва чекли бўлади. Унда, $\exists\, C \in R$, $\forall t > a$ да $F(t) \le C$ бўлади.

Етарлилиги. Айтайлик, $F(t)$ функция $(a,+\infty)$ да юқорида-ги чегараланган бўлсин. Айни пайтда, $F(t)$ ўсувчи функция. Демак, $t \to +\infty$ да $F(t)$ функция чекли лимитга эга. Бу эса (1) интегрални яқинлашувчи бўлишини билдиради.►

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Агар $F(t)$ функция $(t \in (a,+\infty))$ юқоридан чегара-ланмаган бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интеграл узоқлашувчи бўлади.

2^0. Таққослаш теоремалари. Иккита функция маълум муносабатда бўлганда бирининг хосмас интегралининг яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлишидан иккинчисининг ҳам яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлишини ифодаловчи теорема-ларни келтирамиз. Одатда, улар таққослаш теоремалари дейилади.

2-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a,+\infty)$ да

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad (2)$$

бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

◄ Айтайлик, (2) муносабат ўринли бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлсин. Унда 1-теоремага кўра

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx \le C$$

бўлади. Айни пайтда,

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \le G(t)$$

бўлганлиги сабабли яъни 1-теоремага биноан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинла-шувчи бўлади.

Айтайлик, (2) муносабат ўринли бўлиб, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ узоқла-шувчи бўлсин. Унда юқорида келтирилган натижа ва

$$F(t) \le G(t)$$

тенгсизликдан $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчилиги келиб чиқади. ►

3-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ да $f(x) \ge 0$ $g(x) \ge 0$ бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad (0 \le k \le +\infty)$$

бўлсин.

Агар $k < +\infty$ бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $k > 0$ бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

◄ Айтайлик,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k < +\infty$$

бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлсин. Лимит таърифига биноан

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists t_0 > a,\ \forall t > t_0$$

да

$$f(x) < (k+\varepsilon)g(x) \qquad (3)$$

бўлади. Яқинлашувчи интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_a^{+\infty} (k+\varepsilon)g(x)dx$$

яқинлашувчи бўлади.

(3) муносабат ва 2-теоремадан фойдаланиб, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Айтайлик,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$$

бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ узоқлашувчи бўлсин. Бу ҳолда k_1 сон $(k > k_1 > 0)$ учун шундай $t_0' > a$ топиладики, $\forall x > t_0'$ да

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k_1 \ ,$$

яъни

$$g(x) < \frac{1}{k_1} f(x) \qquad (4)$$

бўлади.

(4) муносабат ва 2-теоремадан фойдаланиб $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишини топамиз.▶

Натижа. Агар

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

бўлиб, $0 < k < +\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Кўп ҳолларда бирор хосмас интегралнинг яқинлашувчи-лигини ёки узоқлашувчилигини аниқлашда аввалдан яқинла-шувчилиги ёки узоқлашувчилиги маълум бўлган интеграл билан таққослаб (юқорида келтирилган теоремалардан фойдаланиб) қаралаётган интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши топилади.

Масалан,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интегрални

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (a > 0 \ , \alpha > 0)$$

интеграл билан таққослаб, қуйидаги натижага келамиз:

Натижа. Айтайлик, бирор C $(0 < C < +\infty)$ ва $\alpha > 0$ сонлар учун $x \to +\infty$ да

$$f(x) \sim \frac{C}{x^\alpha},$$

яъни

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \cdot f(x) = C$$

бўлсин. Унда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \le 1$ бўлганда узоқла-шувчи бўлади.

Glossariy

Кўп ҳолларда бирор хосмас интегралнинг яқинлашувчи-лигини ёки узоқлашувчилигини аниқлашда аввалдан яқинла-шувчилиги ёки узоқлашувчилиги маълум бўлган интеграл билан таққослаб (юқорида келтирилган теоремалардан фойдаланиб) қаралаётган интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши топилади.

26-Амалий машғулот:

1^0. Чегараси чексиз хосмас интеграл тушунчаси. $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ да берилган, ихтиёрий $[a,t]$ да $(a \le t < +\infty)$ интегралланувчи бўлсин. Агар ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ **оралиқ бўйича хосмас интеграли** дейилади ва $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ каби белгиланади:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (2)$$

Агар (1) лимит мавжуд ва чекли бўлса, (2) хосмас интеграл **яқинлашувчи**, чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (2) хосмас интеграл **узоқлашувчи** дейилади.

Худди шунга ўхшаш $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграллар ва уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги таърифланади.

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчи эканлиги кўрсатилсин ва қийматлари топилсин.

2264. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^2}$

2265. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

2266. $\int_1^{+\infty} e^{-3x}dx$

2267. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

2268. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

2269. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$

2270. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

2271. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

26-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

2272. $\int_{-\infty}^{0} xe^{x} dx$ **2273.** $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

27-маъруза: Хосмас интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги.

РЕЖА:

1^0. Абсолют яқинлашувчилиги.

2^0. Масалалар ечиш

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *2-теоремага кўра берилган хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади.*

3^0. 1-мисол. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Агар

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+x^2} \ , \ \ g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

дейилса, унда $\forall x \in [0,+\infty)$

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

бўлади.

Равшанки,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

интеграл яқинлашувчи. 2-теоремага кўра берилган хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади.►

2-мисол. Ушбу

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ $\forall x \ge 1$ да

$$f(x)=e^{-x^2}, \quad g(x)=e^{-x}$$

функциялари учун

$$0\le f(x)\le g(x)$$

бўлади. Қуйидаги

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$$

интегралнинг яқинлашувчилиги равшан. Демак,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.▶

3-мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ $\forall x>1$ да

$$\ln x<x$$

бўлиб, $f(x)=e^{-x}\ln x, \quad g(x)=xe^{-x}$ функциялар учун

$$0\le f(x)\le g(x)$$

бўлади. Энди

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx=\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, 2-теорема-дан фойдаланиб, берилган

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз.▶

4-мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Интеграл остидаги

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

функция учун

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

бўлади.

Равшанки,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$$

интеграл яқинлашувчи. Демак, берилган интеграл яқинла-шувчи бўлади.▶

4⁰. Хосмас интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. Бунда, $\forall x\in[a,+\infty)$ учун $f(x)\geq 0$ бўлиши шарт эмас

Таъриф. Агар

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интеграл абсолют яқинлашувчи дейилади.

Агар $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ шартли яқинлашувчи интеграл дейилади.

4-теорема. Агар интеграл абсолют яқинлашувчи бўлса, у яқинлашувчи бўлади.

◀ Айтайлик,

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин. Берилган $f(x)$ ва $|f(x)|$ функ-циялар ёрдамида ушбу

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+|f(x)|)\quad ,$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}(-f(x)+|f(x)|)$$

функцияларни тузамиз.

Бу функциялар учун, $\forall x\in[a,+\infty)$ да

1) $\varphi(x)\geq 0$, $\psi(x)\geq 0$
2) $\varphi(x)\leq|f(x)|$, $\psi(x)\leq|f(x)|$
3) $\varphi(x)-\psi(x)=f(x)$

бўлади. Юқорида келтирилган 2-теоремадан фойдаланиб, қуйидаги

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx,\quad \int_a^{+\infty}\psi(x)dx$$

интеграл яқинлашувчилигини топамиз.

Унда

$$\int_a^{+\infty}(\varphi(x)-\psi(x))dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

яқинлашувчи бўлади.▶

Glossariy

*Агар (1) лимит мавжуд ва чекли бўлса, (2) хосмас интеграл **яқинлашувчи**, чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (2) хосмас интеграл **узоқлашувчи** дейилади.*

Худди шунга ўхшаш $\int_{-\infty}^{a}f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ *хосмас интеграллар ва уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги таърифланади.*

27-Амалий машғулот:

Қуйидаги хосмас интегралларнинг узоқлашувчи эканлиги исботлансин

2274. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

2275. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x}$

2276. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$

2277. $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$

2278. $\int_{-\infty}^{0}\frac{x+1}{x^2+1}dx$

2279. $\int_3^{+\infty}\frac{2x+5}{x^2+3x-10}$

27-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

k нинг қандай қийматларида

$$\int_1^{+\infty}x^k\frac{x+\sin x}{x-\sin x}dx \qquad (k<1)$$

интеграл яқинлашувчи бўлади?

Аниқ интегралнинг геометрик катталикларни ҳисоблашлашларга татбиқи

28-маъруза:

РЕЖА:

1^0. Текис шаклнинг юзи тушунчаси.

2^0.Эгри чизикли трапециянинг юзини ҳисоблаш.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, ўнг ва чап ҳосилалари

1^0. Текис шаклнинг юзи тушунчаси. Маълумки, (x, y) жуфтлик, $(x \in R, y \in R)$, текисликда нуқтани ифодалайди.

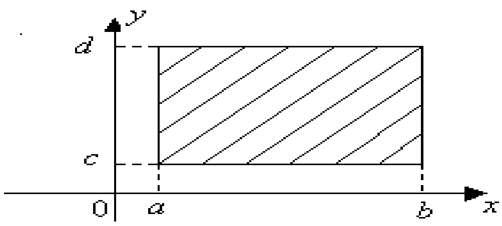
Координаталари ушбу

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d \qquad (a \in R, b \in R, c \in R, d \in R)$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи текислик нуқталаридан ҳосил бўлган D_0 тўплам :

$$D_0 = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

тўғри тўртбурчак дейилади (8-чизма)



8-чизма

Бу тўғри тўртбурчакнинг томонлари (чегаралари) мос равишда координаталар ўқига параллел бўлади.

D_0 тўғри тўртбурчакнинг юзи деб (унинг чегарасининг, яъни

$$x = a \quad , \quad x = b \qquad\qquad (c \le y \le d),$$

$$y = c \quad , \quad y = d \qquad\qquad (a \le x \le b)$$

тўғри чизиқ кесмаларининг D_0 га тегишли бўлиши ёки тегишли бўлмаслигидан қатъий назар) ушбу

$$\mu(D_0) = (b - a) \cdot (d - c)$$

миқдорга айтилади.

Айтайлик, текислик нуқталаридан иборат бирор Q тўплам берилган бўлсин.

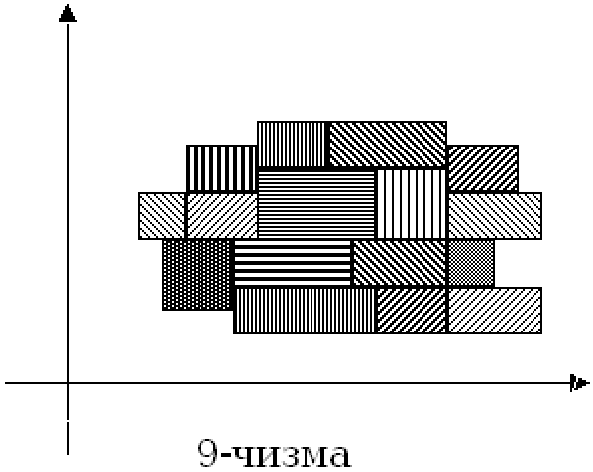
Агар шундай D_0 тўғри тўртбурчак топилсаки,

$$Q \subset D_0$$

бўлса, Q чегараланган тўплам дейилади.

Ҳар қандай чегараланган текислик нуқталаридан иборат тўплам текис шакл дейилади.

Агар текис шакл чекли сондаги кесишмайдиган тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмаси сифатида ифодаланса, уни тўғри кўпбурчак деймиз.(9-чизма)



9-чизма

Бундай тўғри кўпбурчакнинг юзи деб, уни ташкил этган тўғри тўртбурчаклар юзалари йиғиндисига айтилади.

Тўғри кўпбурчак юзи қуйидаги хоссаларга эга:

1) Тўғри кўпбурчак юзи ҳар доим манфий бўлмайди: $\mu(D) \geq 0$;

2) Кесишмайдиган икки D_1 ва D_2 тўғри кўпбурчаклар-дан ташкил топган тўғри кўпбурчак юзи D_1 ва D_2 ларнинг юзалари йиғиндисига тенг:

$$\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2) \quad ;$$

3) Агар D_1 ва D_2 тўғри кўпбурчаклар учун

$$D_1 \subset D_2$$

бўлса, у ҳолда

$$\mu(D_1) \leq \mu(D_2)$$

бўлади.

Текисликда бирор чегараланган Q шакл берилган бўлсин. Бу шаклнинг ичига A тўғри кўпбурчак $(A \subset Q)$, сўнгра Q шаклни ўз ичига олган B тўғри кўпбурчак $(Q \subset B)$ лар чизамиз. Уларнинг юзлари мос равишда $\mu(A)$ ва $\mu(B)$ бўлсин.

Равшанки, бундай тўғри кўпбурчаклар кўп бўлиб, уларнинг юзаларидан иборат $\{\mu(A)\}$ ва $\{\mu(B)\}$ тўпламлар ҳосил бўлади.

Айни пайтда, бу сонли тўпламлар чегараланган бўлади. Бинобарин, уларнинг аниқ чегаралари

$$\sup\{\mu(A)\}, \quad \inf\{\mu(B)\}$$

лар мавжуд.

1-таъриф. Агар

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

бўлса, Q шакл юзага эга дейилади. Уларнинг умумий қиймати Q шаклнинг юзи дейилади ва $\mu(Q)$ каби белгиланади:

$$\mu(Q) = \sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

1-теорема. Текис шакл Q юзага эга бўлиш учун $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай A $(A \subset Q)$ ва B $(Q \subset B)$ тўғри кўпбурчаклар топилиб, улар учун

$$\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги.** Айтайлик, Q шакл юзага эга бўлсин. Унда таърифга биноан

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\} = \mu(Q)$$

бўлади.

Модомики,

$$\sup\{\mu(A)\} = \mu(Q),$$
$$\inf\{\mu(B)\} = \mu(Q)$$

экан, унда $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай тўғри кўпбурчак $A(A \subset Q)$ ҳамда шундай тўғри кўпбурчак $B(Q \subset B)$ топиладики,

$$\mu(Q) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu(B) - \mu(Q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Бу тенгсизликлардан

$$\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик, A $(A \subset Q)$ ва B $(Q \subset B)$ тўғри кўпбурчаклар учун $\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$ тенгсизлиги бажарилсин.

Равшанки,

$$\mu(A) \le \sup\{\mu(A)\},$$
$$\mu(B) \ge \inf\{\mu(B)\}.$$

Бу муносабатлардан

$$\inf\{\mu(B)\} - \sup\{\mu(A)\} \le \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

бўлишини топамиз.

ε-ихтиёрий мусбат сон бўлганлигидан

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

бўлиши келиб чикади. Демак, Q шакл юзага эга. ►

Шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

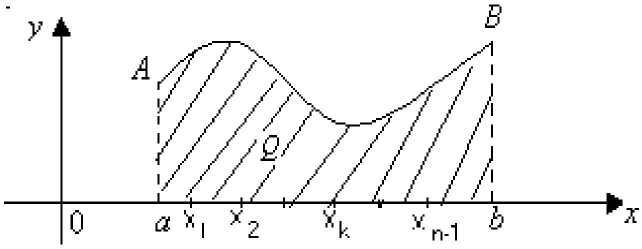
2-теорема. Текис шакл Q юзага эга бўлиши учун $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай юзага эга текис шакллар P ва S лар $(P \subset Q\ ,\ Q \subset S)$ топилиб, улар учун

$$\mu(S) - \mu(P) < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

2^0.Эгри чизикли трапециянинг юзини ҳисоблаш. Фараз қилайлик, $f(x) \in C[a,b]$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \ge 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан абцисса ўқи билан чегараланган Q шаклни қарайлик. (10-чизма)



10-чизма

Одатда, бу шакл эгри чизиқли трапеция дейилади. $[a,b]$ сегментни ихтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\} \quad (a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$$

бўлаклашни оламиз. Бу бўлаклашнинг ҳар бир $[x_k,x_{k+1}]$ оралиғида

$$\inf\{f(x)\}=m_k, \quad \sup\{f(x)\}=M_k \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

мавжуд бўлади.

Энди асоси $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, баландлиги m_k бўлган $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмасидан таш-кил топган тўғри кўпбурчакни A дейлик.

Шунингдек, асоси $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, баландлиги M_k бўлган $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмасидан ташкил топган тўғри кўпбурчакни B дейлик. Равшанки,

$$A\subset Q \;,\; Q\subset B$$

бўлиб, уларнинг юзалари

$$\mu(A)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k,\quad \mu(B)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k$$

бўлади.

Glossariy

Бу муносабатлардан

$$\inf\{\mu(B)\}-\sup\{\mu(A)\}\le\mu(B)-\mu(A)<\varepsilon$$

бўлишини топамиз.

ε *-ихтиёрий мусбат сон бўлганлигидан*

$$\sup\{\mu(A)\}=\inf\{\mu(B)\}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, Q *шакл юзага эга.*

28-Амалий машғулот:

2209. Асосининг радиуси **r**, баландлиги **h** бўлган доиравий конуснинг ҳажми топилсин.

2210.Асосининг юзи $\mathbf{S_0}$, баландлиги **h** бўлган пирамиданинг ҳажми топилсин.

2211. Ушбу $x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$ цилиндр билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин:

2212. $x^2 + y^2 + z^2 = R, \quad x^2 = y^2 + z^2 \quad (x \geq 0)$

2213. $\dfrac{y^2}{2p} + \dfrac{z^2}{2q} = x, \quad x = a$

2214. $x^2 + y^2 = R^2, \quad y^2 + z^2 = R^2$

2215. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = 0, \quad z = h$

2216. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \dfrac{c}{a} \cdot x, \quad z = 0$

2217. $x + y + z^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

2218. $z = 4 - y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = a$

2219. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x$

28-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

- кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

- тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

2218. $z = 4 - y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = a$

2219. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x$

29-маъруза: Эгри чизиқли секторнинг юзини ҳисоблаш.

РЕЖА:

1^0. Эгри чизиқли секторнинг юзини ҳисоблаш.

2^0. Кардиоиданинг юзини ҳисоблаш.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: O нуқтадан ҳар бир қутб бурчаги θ_k га мос OA_k радиус-вектор ўтказамиз. Натижада OAB-эгри чизиқ-ли сектор

$$OA_k A_{k+1}\ \left(k = 0,1,2,\dots,n-1 \quad ; \ A_0 = A\ ,\ A_n = B\right)$$

эгри чизиқли секторчаларга ажралади.

Равшанки, $\rho = \rho(\theta) \in C[\alpha,\beta]$

бўлганлиги учун $[\theta_k\ ,\theta_{k+1}]$ да $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$

$$m_k = \inf\{\rho(\theta)\}\ \ ,\ \ M_k = \sup\{\rho(\theta)\}$$

лар мавжуд.

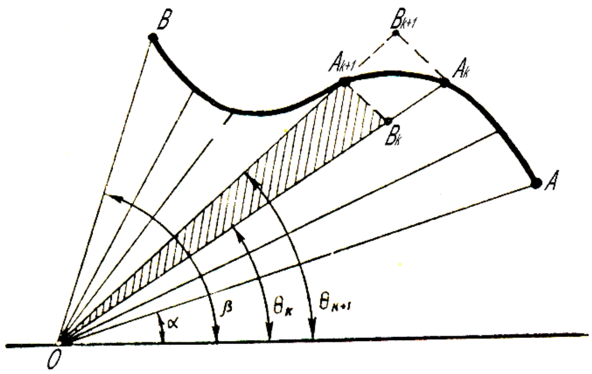
1^0. Эгри чизиқли секторнинг юзини ҳисоблаш. Айтайлик, $A\breve{B}$ эгри чизиқ қутб координаталар системасида ушбу

$$\rho = \rho(\theta)\ \ ,\ \ \alpha \le \theta \le \beta \quad (\alpha \in R, \beta \in R)$$

тенглама билан берилган бўлсин. Бунда

$$\rho(\theta) \in C[\alpha,\beta]\ ,\quad \forall\theta \in [\alpha,\beta] \quad \text{да} \qquad \rho(\theta) \ge 0\ .$$

Текисликда $A\breve{B}$ эгри чизиқ ҳамда OA ва OB радиус-векторлар билан чегараланган Q шаклни қараймиз. (14 -чизма).



29.1- чизма

$[\alpha,\beta]$ сегментни ихтиёрий

$$P = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\} \qquad (\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta)$$

бўлаклашини оламиз. O нуқтадан ҳар бир қутб бурчаги θ_k га мос OA_k радиус-вектор ўтказамиз. Натижада OAB-эгри чизиқ-ли сектор

$$OA_k A_{k+1}\ \left(k = 0,1,2,\dots,n-1 \quad ; \ A_0 = A\ ,\ A_n = B\right)$$

эгри чизиқли секторчаларга ажралади.

Равшанки, $\rho = \rho(\theta) \in C[\alpha,\beta]$

бўлганлиги учун $[\theta_k\ ,\theta_{k+1}]$ да $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$

$$m_k = \inf\{\rho(\theta)\}\ \ ,\ \ M_k = \sup\{\rho(\theta)\}$$

лар мавжуд.

Энди ҳар бир $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ сегмент учун радиус-векторлари мос равишда m_k ҳамда M_k бўлган доиравий секторларни ҳосил қиламиз. Бундай доиравий секторлар юзага эга бўлиб, уларнинг юзи мос равишда

$$\frac{1}{2}m_k^2 \cdot \Delta\theta_k \quad , \ \frac{1}{2}M_k^{2} \cdot \Delta\theta_k \qquad (\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k)$$

бўлади.

Радиус-векторлари m_k $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ бўлган барча доиравий секторлар бирлашмасидан ҳосил бўлган шаклни Q_1 десак, унда $Q_1 \subset Q$ бўлиб, унинг юзи

$$\mu(Q_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta\theta_k \tag{3}$$

бўлади.

Шунингдек, радиус-векторлари M_k $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ бўл-ган барча доиравий секторлар бирлашмасидан ҳосил бўлган шаклни Q_2 десак, унда $Q \subset Q_2$ бўлиб, унинг юзи

$$\mu(Q_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \cdot \Delta\theta_k \tag{4}$$

бўлади.

(3) ва (4) йиғиндилар $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари бўлади. Айни пайтда, $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз бўлгани учун у интегралланувчидир. Демак, $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам $[\alpha, \beta]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топиладики,

$$S(\frac{1}{2}\rho^2(\theta); P) - s(\frac{1}{2}\rho^2(\theta); P) < \varepsilon$$

бўлади. Бинобарин, ушбу

$$\mu(Q_2) - \mu(Q_1) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса, 2-теоремага мувофиқ, қаралаётган эгри чизиқли секторнинг юзага эга бўлишини билдиради. Унда таърифга кўра

$$\sup\{\mu(Q_1)\} = \inf\{\mu(Q_2)\}$$

бўлади.

Айни пайтда,

$$\sup\{\mu(Q_1)\} = \int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta,$$

$$\inf\{\mu(Q_2)\} = \int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$$

бўлгани сабабли Q эгри чизиқли секторнинг юзи

$$\mu(Q)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta$$

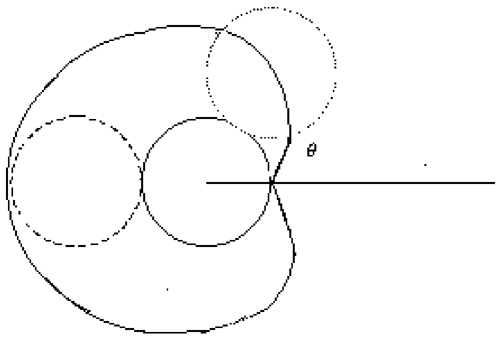
га тенг бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\rho=\rho(\theta)=a(1-\cos\theta)\quad (a\in R,\ 0\le\theta\le 2\pi)$$

функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

◄ Бу функция графиги кардиоидани ифодалайди. Маълумки, кардиоида радиуси r га тенг бўлган айлананинг шу радиусли иккинчи қўзғалмас айлана бўйлаб харакати (сирпанмасдан думалаши) натижасида биринчи айлана ихтиёрий нуқтасининг чизган чизиғидир. (15-чизма).



15-чизма

Кардиоида қутб ўқига нисбатан симметрик бўлганлиги сабабли юқори ярим текисликдаги шаклнинг юзини топиб, сўнгра уни 2 га кўпайтирсак, изланаётган юза келиб чиқади.

θ ўзгарувчи $[0,\pi]$ да ўзгарганда ρ радиус-вектор кардиоиданинг юқори ярим текисликдаги қисмини чизади. Шунинг учун

$$\mu(Q)=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\theta)d\theta=\int_0^{\pi}a^2(1-\cos\theta)^2d\theta=$$

$$=a^2\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]d\theta=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta)\right|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2$$

бўлади. ►

Машқлар

1. Айтайлик, текисликда $\breve{AB}$ эгри чизиқ $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ ($\alpha\le t\le\beta$) тенгламалар билан параметрик ҳолда берилган бўлсин, бунда $x=\varphi(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга, $\varphi'(x)\ge 0$ ва $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,\ y=\psi(t)$ функция $[a,b]$ да узлук-сиз ва $\psi(t)\ge 0$. У ҳолда юқоридан $\breve{AB}$ эгри чизиқ, ён томон-ларидаги $x=a,\ x=b$ вертикал чизиқлар, пастдан $[a,b]$ кесма билан чегараланган шаклнинг юзи

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$$

бўлишини исботлансин.

2. Ушбу

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

Glossariy

Кардиоида қутб ўқига нисбатан симметрик бўлганлиги сабабли юқори ярим текисликдаги шаклнинг юзини топиб, сўнгра уни 2 га кўпайтирсак, изланаётган юза келиб чиқади.

29-Амалий машғулот:

1^0. Кўндаланг кесим бўйича жисмларнинг ҳажмини ҳисоблаш. Бирор хажмга эга бўлган $(\mathbf{V})$ жисм берилган бўлиб, $\mathbf{x}$ нуқтада $\mathbf{OX}$ ўқига перпендикуляр бўлган текислик жисмни кесиб, юзи

$$\mathbf{S=S(x)\ \ (a\le x\le b)}$$

га тенг бўлган шаклни ҳосил қилсин. У ҳолда жисмнинг ҳажми

$$\mathbf{V=\int_a^b S(x)dx} \qquad (1)$$

бўлади.

2^0. Айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{[a,b]}$ да узлуксиз бўлиб, $\mathbf{\forall x\in[a,b]}$ учун $\mathbf{f(x)\ge 0}$ бўлсин. Бу функция графиги, $\mathbf{x=a,\ \ x=b}$ вертикал чизиқлар ҳамда $\mathbf{OX}$ ўқидаги $\mathbf{[a,b]}$ кесма билан чегараланган шаклни $\mathbf{OX}$ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$\mathbf{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx} \qquad (2)$$

бўлади.

Агар $\mathbf{f(x)}$ функция графиги

$$\begin{cases}\mathbf{x=x(t)}\\ \mathbf{y=y(t)}\end{cases} \qquad (\alpha\le \mathbf{t}\le\beta)$$

параметрик кўринишда берилган бўлиб, $\mathbf{x(t)}$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз $\mathbf{x'(t)\ge 0}$ ҳосилага эга, $\mathbf{x(\alpha)=a}$, $\mathbf{x(\beta)=b}$ ва $\mathbf{y'(t)}$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз, $\forall\mathbf{t}\in[\alpha,\beta]$ да $\mathbf{y(t)\ge 0}$ бўлса, у ҳолда берилган шаклнинг $\mathbf{OX}$ ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг хажми

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\cdot x'(t)dt \qquad (3)$$

бўлади.

Фараз қилайлик, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялари $[a,b]$ да узлуксиз бўлиб, $\forall x\in[a,b]$ да $f_2(x)\geq f_2(x)\geq 0$ бўлсин. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функция графиклари, $x=a,\ x=b$ чизиқлар билан чегараланган шаклни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг хажми

$$V=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx \qquad (4)$$

бўлади.

Тегишли шартларда юқоридаги шаклларни OY ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми мос равишда

$$V=\pi\int_c^d x^2(y)dy \qquad (5)$$

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\cdot y'(t)dt \qquad (6)$$

$$V=\pi\int_c^d\left[x_2^2(y)-x_1^2(y)\right]dy \qquad (7)$$

бўлади.

12 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипсоиднинг ҳажми топилсин.

◄OX ўқига перпендикуляр ва шу ўқдаги $A(x)\ (-a\leq x\leq a)$ нуқтадан ўтувчи текислик эллипсоидни эллипс бўйича кесади. Унинг тенгламасини топамиз:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \qquad \text{(ҳозирча } x=const\text{)}.$$

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}=1$$

Бу эллипснинг юзи

$$S(x)=\frac{\pi bc}{a^2}\cdot\left(a^2-x^2\right)$$

бўлади.

Изланаётган ҳажм (1) формулага кўра

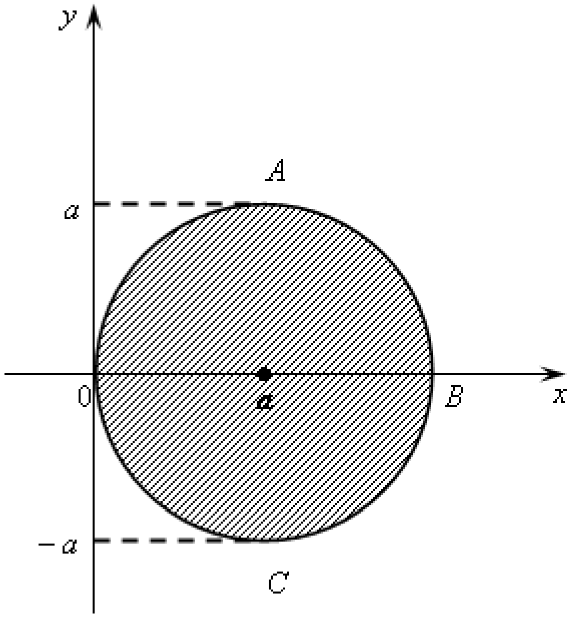
$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc$$

бўлади.►

13 – м и с о л . *Ушбу*

$$(x-a)^2+y^2\le a^2$$

доирани OY ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.



29.1-чизма.

◄15-чизмадан кўринадики, ушбу

$$x_1(y)=a-\sqrt{a^2-y^2},\qquad -a\le y\le a$$
$$x_2(y)=a+\sqrt{a^2-y^2},$$

функцияларнинг графиклари мос равишда **AOC** ва **ABC** ёйлардан иборат бўлади.

Изланаётган жисмнинг ҳажмини (7) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left[x_2^2(y)-x_1^2(y)\right]dy=\pi\int_{-a}^{a}\left[\left(a+\sqrt{a^2-y^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2\right]dy=$$

$$=4\pi a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\left[y=a\sin t,\quad dy=a\cos t\,dt,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right]=$$

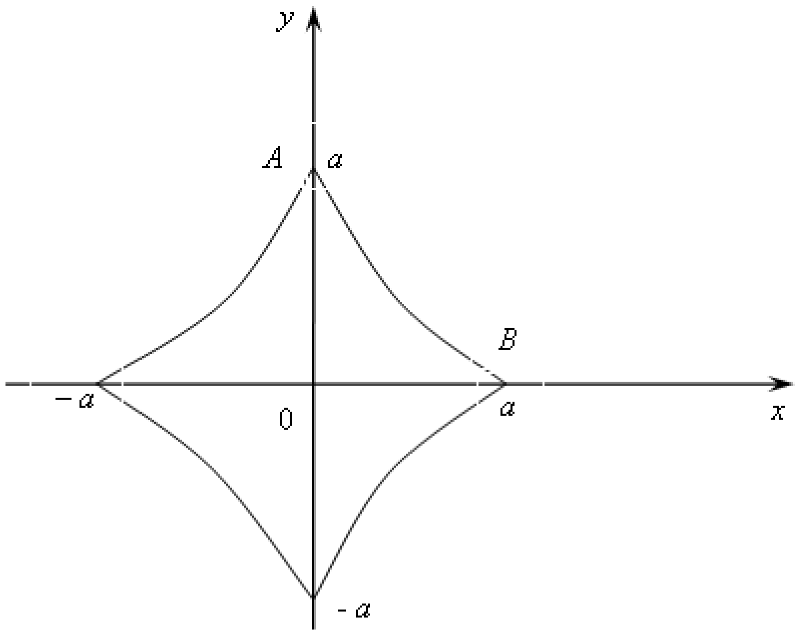
$$=4\pi a^3\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=2\pi^2a^3.$$ ►

14 – м и с о л . *Ушбу*

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi)$$

тенгламалар системаси ёрдамида аниқланган эгри чизиқ (астроида) чегаралаб турган шаклни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

◄Маълумки, астроида **OX** ва **OY** ўқларига нисбатан симметрик жойлашган (16-чизма).



16-чизма.

Изланаётган жисмнинг ҳажми, **OAB** эгри чизиқли учбурчак билан чегараланган шаклни **OX** ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган $(\mathbf{V_0})$ жисмнинг ҳажмидан 2 марта кўп бўлади. $(\mathbf{V_0})$ жисмнинг ҳажми (3) формулага кўра топилади:

$$\mathbf{V_0 = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y^2(t)\cdot x'(t)dt = -\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\sin^6 t\cdot a\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)dt =}$$ x

$$\mathbf{= -3\pi a^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cdot\cos^2 t d(\cos t) =}$$

-a

$$\mathbf{= -3\pi a^3\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{3}{5}\cos^5 t + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi a^3}{105}}.$$

Демак, жисмнинг ҳажми $\mathbf{V = \frac{32\pi a^3}{105}}$ бўлади.►

29-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

 кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);

 тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

Ушбу

$$\begin{cases} \mathbf{x = a\cos^3 t,} \\ \mathbf{y = a\sin^3 t,} \end{cases} \qquad (\mathbf{0 \le t \le 2\pi})$$

тенгламалар системаси ёрдамида аниқланган эгри чизиқ (астроида) чегаралаб турган шаклни* OX *ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

30-маъруза: Аниқ интегралнинг механика ва физикага татбиқлари

РЕЖА:

1⁰. Инерция моменти.

2⁰. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: *$y = f(x)$ эгри чизиқ ёйи $\breve{AB}$ бўйича зичлиги $\rho = 1$ га тенг масса тарқатилган бўлиб, бунда $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.*

Равшанки, бу ҳолда масса ёй узунлигига тенг бўлади:

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

$[a,b]$ *сегментнинг ихтиёрий*

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлаклашини оламиз.

1⁰. Инерция моменти. Механикада моддий нуқта ҳара-кати муҳим тушунчалардан бири ҳисобланади.

Одатда, ўлчами етарли даражада кичик ва массага эга бўлган жисм моддий нуқта деб қаралади.

Айтайлик, текисликда m массага эга бўлган A моддий нуқта берилган бўлиб, бу нуқтадан бирор l ўққача (ёки O нуқтагача) бўлган масофа r га тенг бўлсин.

Ушбу

$$J = mr^2$$

миқдор A моддий нуқтанинг l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция моменти дейилади.

Масалан, $A = A(x, y)$ моддий нуқтанинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$J_x = my^2 \ , \ J_y = mx^2 \ , \ J_0 = m\sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади.

Текисликда, ҳар бири мос равишда

$$m_0, m_1, m_2, ..., m_{n-1}$$

массага эга бўлган моддий нуқталар системаси

$$\{A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}\}$$

нинг бирор l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция моменти ушбу

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k^{\ 2}$$

йиғинди билан таърифланади, бунда $r_k - A_k$ нуқтадан l ўққача (O нуқтагача) бўлган масофа $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ эгри чизиқ ёйи $\breve{AB}$ бўйича зичлиги $\rho = 1$ га тенг масса тарқатилган бўлиб, бунда $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Равшанки, бу ҳолда масса ёй узунлигига тенг бўлади:

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx.$$

$[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлаклашини оламиз. Бу бўлаклаш $\breve{AB}$ ёйни

$$A_k = A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

нуқталар билан n та $A_k\breve{A}_{k+1}$ $(A_0 = A,\ A_{n-1} = B)$ бўлакка ажратади. Бунда $A_k\breve{A}_{k+1}$ бўлакнинг массаси

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx \qquad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

бўлади. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$m_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

бунда,

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Маълумки,

$$(\xi_k, f(\xi_k)) \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

моддий нуқтанинг координата ўқларига ҳамда кордината бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$J'_{x_k}=m_k\cdot f^2(\xi_k)=f^2(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$J'_{y_k}=m_k\cdot\xi_k^2=\xi_k^2\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$J'_0=m_k(\xi_k^2+f^2(\xi_k))=(\xi_k^2+f^2(\xi_k))\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k$$

бўлади. Унда ушбу

$$\{(\xi_0, f(\xi_0)),\ (\xi_1, f(\xi_1),\ldots,(\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))\}$$

моддий нуқталар системасининг инерция моментлари мос равишда

$$J_x^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$J_y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$J_0^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k^2+f^2(\xi_k))\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

тенгликлар билан ифодаланади.

Агар P бўлаклашнинг диаметри λ_p нолга интила борса, унда ҳар бир $A_k\breve{A}_{k+1}$ ёйнинг узунлиги ҳам нолга интила бориб, юқоридаги

$$J_x^{(n)},\ J_y^{(n)},\quad J_0^{(n)},$$

йиғиндиларнинг лимитини массага эга бўлган $A\breve{B}$ эгри чизиқнинг мос равишда координата боши ҳамда координата ўқларига нисбатан инерция моментларини ифодалайди деб қараш мумкин.

Айни пайтда,

$$\lim_{\lambda_p\to 0} J_x^{(n)}=\int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$\lim_{\lambda_p\to 0} J_y^{(n)}=\int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$\lim_{\lambda_p\to 0} J_0^{(n)}=\int_a^b (x^2+f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

бўлади.

Демак, массага эга бўлган $A\breve{B}$ эгри чизиқнинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари аниқ интеграллар ёрдамида топилади:

$$J_x=\int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$J_y=\int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$J_0=\int_a^b (x^2+f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

2^0. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши. Бирор жисмни Ox ўқи бўйлаб, шу ўқ йўналишида бўлган $F = F(x)$ куч таъсири остида a нуқтадан b нуқтага $(a < b)$ ўтказиш учун бажарил-ган ишни топиш лозим бўлсин.

Равшанки, жисмга таъсир этувчи куч ўзгармас, яъни

$$F(x) = C - const$$

бўлса, унда жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказиш учун бажарилган иш

$$A = C \cdot (b - a)$$

га тенг бўлади.

Айтайлик, жисмга таъсир этувчи куч x га $(x \in [a,b])$ боғлиқ бўлиб, у $[a,b]$ да узлуксиз бўлсин:

$$F = F(x) \in C[a,b].$$

$[a,b]$ сегментнинг ихтёрий

$$P = \{x_0\ ,\ x_1, \ldots,\ x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

бўлаклашини олиб, бу бўлаклашнинг ҳар бир

$$[x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

бўлакчасида ихтёрий ξ_k $\quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}];\ (k = 0,1,2\ldots,n-1)$ нуқта оламиз.

Агар ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да жисмга таъсир этувчи кучни ўзгармас ва у $F(\xi_k)$ га тенг дейилса, у ҳолда $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда бажарилган иш (куч таъсирида жисмни x_k нуқтадан x_{k+1} нуқтага ўтказиш учун бажарилган иш) тахминан

$$F(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

формула билан, $[a,b]$ оралиқда бажарилган иш эса , тахминан

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k \tag{1}$$

формула билан ифодаланади.

P бўлаклашнинг диаметри λ_p нолга интила борганда юқоридаги йиғиндининг қиймати изланаётган иш миқдорини тобора аниқроқ ифодалайди. Бу ҳол $\lambda_p \to 0$ да (1) йиғинди-нинг чекли лимитини бажарилган иш дейилиши мумкинли-гини кўрсатади.

Демак,

$$A = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Модомики, $F(x) \in C[a,b]$ экан,

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$$

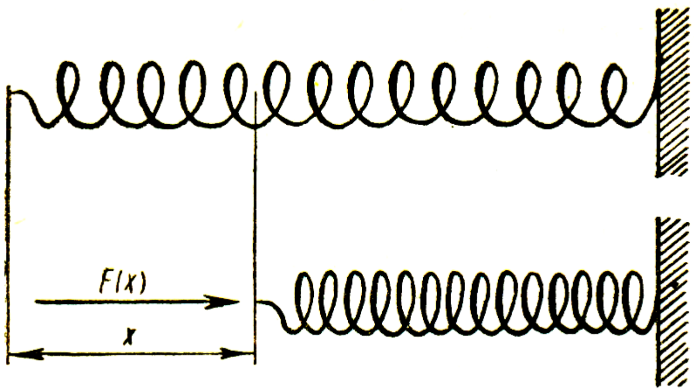
бўлади.

Шундай қилиб, ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a,b]$ даги бажарган иши

$$A = \int_a^b F(x)dx \tag{2}$$

формула билан ифодаланади.

Мисол. Винтсимон пружинанинг бир учи мустаҳкамлан-ган, иккинчи учига эса $F = F(x)$ куч таъсир этиб, пружина қисилган (30.1-чизма)



30.1-чизма

Агар пружинанинг қисилиши унга таъсир этаётган $F(x)$ кучга пропорционал бўлса, пружинани a бирликка қисиш учун $F(x)$ кучнинг бажарган иши топилсин.

◄ Агар $F(x)$ куч таъсирида пружинанинг қисилиш миқдорини x орқали белгиласак, у ҳолда

$$F(x) = kx$$

бўлади, бунда k -пропорционаллик коэффициенти (қисилиш коэффициенти). (2) формулага кўра бажарилган иш

$$A = \int_0^a kx dx = \frac{ka^2}{2}$$

бўлади. ►

Машқлар

1. Учбурчак асосига нисбатан инерция моментини топилсин.

Асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган парабо-лоид шаклидаги қозондан, ундаги сувни чиқаришга сарфлан-ган иш ҳисоблансин.

Glossariy

P бўлаклашнинг диаметри λ_p нолга интила борганда юқоридаги йиғиндининг қиймати изланаётган иш миқдорини тобора аниқроқ ифодалайди. Бу ҳол $\lambda_p \to 0$ да (1) йиғинди-нинг чекли лимитини бажарилган иш дейилиши мумкинли-гини кўрсатади.

30-Амалий машғулот:
Механика ва физиканинг айрим масалаларини интеграл ёрдамида ечиш

1^0. Статик моментлар ва инерция моментларини ҳисоблаш формулалари. Ихтиёрий силлиқ $y = f(x)$ эгри чизиғи бўйича чизиқли зичлиги $\mu = 1$ бўлган масса тарқатилган бўлсин. У ҳолда бу массали эгри чизиқ ёйининг $(a \le x \le b)$ координаталар ўқларига нисбатан **статик моментлари**

$$M_x = \int_a^b y \cdot (x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx,$$

$$M_y = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

бўлади.

Массали эгри чизиқ ёйининг $(a \le x \le b)$ координаталар ўқларига нисбатан **инерция моментлари**

$$I_x = \int_a^b y^2(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

бўлади.

Ушбу $y = f(x) > 0, \ \ x = a, \ \ x = b, \ \ y = 0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция (бунда $f(x)$ $[a, b]$ да узлуксиз) бўйича зичлиги 1 га тенг бўлган масса тарқатилган бўлсин. Унинг **статик ва инерция моменлари**

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx, \qquad M_y = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx$$

бўлади.

2^0. Оғирлик марказининг координаталари. Юқорида келтирилган массали эгри чизиқли трапециянинг **оғирлик марказининг координаталари**

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xydx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 \cdot dx$$

бўлади, бунда S –эгри чизиқли трапециянинг юзи.

3^0. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши. Ўзгарувчи $f(x)$ кучнинг OX ўқи йўналиши бўйича $[a, b]$ оралиқда бажарган **иши**

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Аниқ интегралдан фойдаланиб жисмларнинг кинетик энергиялари, босим кучи ва шунга ўхшаш масалалар ҳал этилади.

Келтирилган масалаларда масса эгри чизиқ текисликдаги шакл бўйича текис тақсимланган ва зичлик бирга тенг деб қаралади.

14 – м и с о л . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

эллипс юқори қисмининг $\mathbf{OX}$ ***ўқига нисбатан статик моменти топилсин.***

◀Эллипснинг юқори қисми

$$y=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$

бўлади. Бу эгри чизиқнинг $\mathbf{OX}$ ўқига нисбатан статик моментини

$$M_x=\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2}dx$$

формулага кўра топамиз.

Равшанки,

$$y(x)\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}=\sqrt{y^2(x)+\left(y(x)\cdot y'(x)\right)^2}$$

бўлади. Агар

$$y^2(x)=b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2,\qquad y(x)\cdot y'(x)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot x$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$y(x)\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$M_x=\frac{b}{a}\cdot\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2}=b\left(b+\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}}\cdot\arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)$$

бўлади.▶

15 – м и с о л . ***Ушбу***

$$ay=2ax-x^2\,(a>0),\quad y=0$$

чизиқлар билан чегараланган шакл – параболик сегментнинг $\mathbf{OX}$ ***ва*** $\mathbf{OY}$ ***ўқларига нисбатан инерция моментлари топилсин.***

◀Равшанки,

$$y(x)=\frac{1}{a}\cdot\left(2ax-x^2\right)\qquad(a>0).$$

1^0 да келтирилган формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{2a} y^3(x)dx = \frac{1}{3a^3}\int_0^{2a}\left(2ax - x^2\right)^3 dx = \frac{32a^4}{105}.$$

$$I_y = \int_0^{2a} x^2 \cdot y(x)dx = \int_0^{2a} x^2\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{8}{5}\cdot a^4. \blacktriangleright$$

16 – м и с о л . *Ушбу*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \qquad (x \ge 0, \quad y \ge 0)$$

шакл – эллипснинг биринчи чоракдаги қисмининг оғирлик маркази топилсин.

◀Бу эгри чизиқли трапециянинг оғирлик марказининг координатаси (x_c, y_c)

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x \cdot y(x)dx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2(x)dx$$

фомулаларга кўра топилади, бунда S – шаклнинг юзи.

Маълумки, эллипснинг юзи πab га тенг. Демак, $S = \frac{1}{4}\pi ab$. Энди

$$\int_0^a x \cdot y(x)dx \qquad \text{ва} \qquad \int_0^a y^2(x)dx$$

интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\int_0^a x \cdot y(x)dx = \frac{b}{a}\int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2 b}{3},$$

$$\int_0^a y^2(x)dx = \frac{b^2}{a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{2ab^2}{3}.$$

Демак,

$$x_c = \frac{\frac{a^2 b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi}, \qquad y_c = \frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4b}{3\pi}.$$

17 – м и с о л . ***Оғирлиги $P = 1{,}5$ т бўлган ракетанинг ер сатхидан $H = 2000$км баландликка олиб чиқиш учун бажприладиган иш топилсин.***

◀Агар жисмнинг оғирлиги P, ер шарининг радиуси R бўлиб, x эса ер марказидан кўтарилаётган ракетагача бўлган масофа бўлса, тортилиш кучи

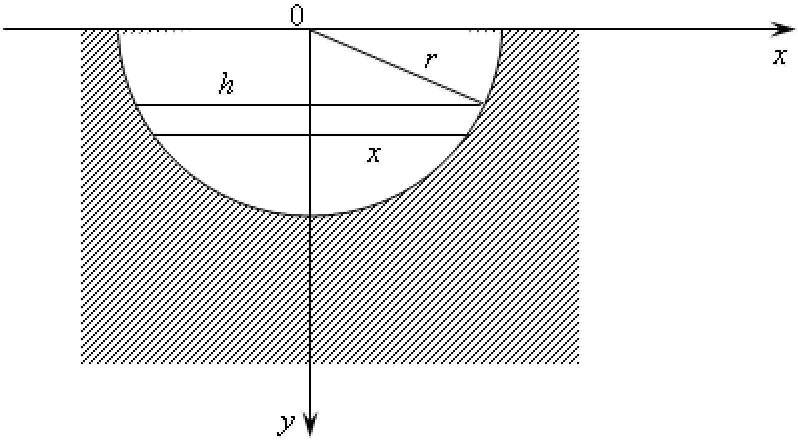
$$F(x) = \frac{P \cdot R^2}{x^2}$$

бўлади. Юқорида келтирилган формуладан фойдаланиб изланаётган ишни топамиз:

$$A=\int_0^{R+H}F(x)dx=P\cdot R^2\cdot\int_R^{R+H}\frac{dx}{x^2}=P\cdot R^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+H}=\frac{R\cdot P\cdot H}{R+H}.$$

Шартга кўра $P=1{,}5\,т$, $H=2000\,км$, $R=6400\,км$ бўлиб, бажарган иш $A\approx 2285714000\,кгм\approx 22422854340\,дж$ бўлади.►

18 – м и с о л . ***Радиуси*** $\mathbf{r}$ ***бўлган ярим доира диаметри сув сатхида бўладиган қилиб сувга ботирилган. Ярим доирага таъсир этувчи босим кучи топилсин. (30.2-чизма).***



30.2-чизма.

◄Ярим доирани сув сатҳига параллел қилиб олинган бўлакчасининг юзи тахминан

$$\Delta S\approx 2x\cdot\Delta h=2\sqrt{r^2-h^2}\cdot\Delta h$$

бўлади. Бу бўлакчага таъсир этувчи босим кучи

$$\Delta F\approx 2\gamma\cdot h\cdot\sqrt{r^2-h^2}\cdot\Delta h$$

бўлади, бунда γ - сувнинг солиштирма оғирлиги бўлиб, у 1 га тенг. Демак, ярим доирага таъсир этувчи босим кучи

$$F=2\int_0^r h\cdot\sqrt{r^2-h^2}dh=-\frac{2}{3}\left(r^2-h^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^r=\frac{2}{3}\cdot r^3$$

бўлади.►

2245. Тенгламаси $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ бўлган тўғри чизиқни координаталар ўқлари орасидаги қисмининг OX ва OY ўқларига нисбатан статик моментлари топилсин.

2246. $y=\cos x$ эгри чизиқ ёйининг $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ нуқталар орасидаги қисмининг OX ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2247.Ушбу $\mathbf{x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0}$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг $\mathbf{OX}$ ва $\mathbf{OY}$ ўқларига нисбатан статик моментлари топилсин.

2248.Ушбу $\mathbf{x=a(t-sint),\ \ y=a(1-cost),\ \ 0\le t\le 2\pi}$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг (циклоиданинг бир аркининг) ОХ ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2249.Томони $\mathbf{a}$ га тенг бўлган квадратнинг унинг диоганалига нисбатан инерция моменти топилсин.

2250.Асоси $\mathbf{b}$, баландлиги $\mathbf{h}$ бўлган бир жинсли учбурчакнинг асосига нисбатан инерция моменти топилсин.

2251.Ярим ўқлари $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ бўлган эллипс шаклдаги бир жинсли пластинканинг унинг асосий ўқларига нисбатан инерция моментлари топилсин.

2252.Ушбу

$$\mathbf{y^2=2px\ \ \left(0\le x\le \frac{p}{2}\right)}$$

парабола ёйининг $\mathbf{x=\frac{p}{2}}$ тўғри чизиққа нисбатан статик моменти топилсин.

2253.Радиуси $\mathbf{a}$ га тенг бўлган ярим айлана ёйининг шу ёй учини бирлаштирувчи диаметрга нисбатан статик ва инерция моментлари топилсин.

2254.Ушбу

$$\mathbf{y=\frac{2}{1+x^2},\ \ \ y=x^2}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг $\mathbf{OX}$ ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2255.Ушбу

$$\mathbf{x^2+4y^2-16=0,\ \ y=0}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2256.Ушбу

$$\mathbf{y=sinx\ \ (0\le x\le \pi)\ \ y=0}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2257.Ушбу

$$ax = y^2, \quad ay = x^2 \quad (x > 0)$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2258.Ушбу

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}, \quad x = 0, \quad y = 0$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2259.Ушбу

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

чизиқ (циклоида) ҳамда абцисса ўқи билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2260.Диаметри 20м бўлган ярим сферик идишдаги сувни насос билан тортиб олиш учун керак бўладиган иш миқдори топилсин.

2261.Агар 5кг куч пружинани 25см га чўзса, пружинани 60см га чўзиш учун қандай иш бажариш керак? **(3,6кгм)**.

2262.Вертикал ҳолатда жойлашган баландлиги $\mathbf{H = 6}$**м**, радиуси $\mathbf{R = 2}$**м** бўлган цлиндриксимон идишдаги ёғни тортиб олиш учун зарур бўлган иш топилсин. ($\boldsymbol{\delta = 0{,}9}$ ёғнинг солиштирма оғирлиги).

2263.Диаметри 4м., маркази эса сув сатҳидан 3м чуқурликда бўлган шарга сув босими топилсин.

30-кейс

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

- кейсдаги муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидуал ва кичик гуруҳларда);
- тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг (индивидуал).

2262.Вертикал ҳолатда жойлашган баландлиги $\mathbf{H = 6}$**м**, радиуси $\mathbf{R = 2}$**м** бўлган цлиндриксимон идишдаги ёғни тортиб олиш учун зарур бўлган иш топилсин. ($\boldsymbol{\delta = 0{,}9}$ ёғнинг солиштирма оғирлиги).

Mustaqil ishlar

I SEMESTR. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

1-mavzu. Matematik tahlil predmeti. Ratsional sonlar to`plami va uning xossalari. Ratsional sonlar to`plamining kesimlari. Irratsional son tushunchasi. (2 soat)

1. Ratsional sonlar to`plamida arifmetik amallarning qanday xossalari mavjud?
2. Arxїmed aksiomasi va uning ma'nosi nimadan iborat?
3. Ratsional sonlar to`plamida chegaralangan va chegaralanmagan to`plamlar qanday ta'riflanadi? Ularga misollar keltiring.
4. Ratsional sonlarni geometrik tasvirlash deganda nimani tushinasiz va u qanday amalga oshiriladi?
5. Ratsional va irratsional kesimlarni ta'riflang, misollarda tushintiring.
6. n, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$ (bu erda n gurux jurnalidagi talaba familiyasining tartib nomeri) ni aniqlaydigan kesimlarning tavsiflang.

Adabiyot: [1]. 21-32b.;

2-mavzu. Haqiqiy sonlar to`plamining xossalari (zichlik, tartiblanganlik, uzluksizlik). Haqiqiy sonlarni sonlar o`qida tasvirlash. (2 soat)

1. Quyidagi tasdiqni isbotlang: Agar $x<y$ va $y<z$ bo`lsa, u holda $x<z$ bo`ladi.
2. Haqiqiy sonlar to`plamida qo`shish amali qanday aniqlanadi?
3. Haqiqiy sonning absolyut qiymati qanday aniqlanadi va uning qanday xossalari mavjud?
4. $|x|$, $|x-y|$ ning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
5. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang: 1) $||x|-|y||\leq|x-y|$; 2) $|x-y|\leq|x|+|y|$;
   3) $|x_1+x_2+...x_n|\leq|x_1|+|x_2|+...+|x_n|$ (Matematik induksiya metodi yordamida)
6. Irratsional sonni taqribiy hisoblash qanday amalga oshiriladi?
7. Haqiqiy sonni cheksiz o`nli kasr ko`rinishda ifodalanishini tushintiring.
8. Cheksiz davriy o`nli kasrning ratsional son ekanligi qanday isbotlanadi?
9. Cheksiz davriy bo`lmagan o`nli kasrning irratsional son ekanligi qanday isbotlanadi?
10. To`g`ri chiziqning uzluksizlik xossasi nimadan iborat?
11. Haqiqiy sonlar to`plami bilan to`g`ri chiziq nuqtalari to`plami orasida o`zaro bir qiymatli moslik qanday o`rnatiladi?

Adabiyot: [1]. 32-35; 52-61; [2], 4-10b.;

3-mavzu. Chegaralangan sonli to`plamlar. Quyidan va yuqoridan chegaralangan to`plamlar, ularning chegaralari. Chegaralarning mavjudligi haqidagi teorema. (2 soat)

1. Faqat quyidan chegaralangan, faqat yuqoridan chegaralangan va chegaralangan to`plamlarga misollar keltiring. Misollarni asoslang.

2. Quyidan chegaralanmagan, yuqoridan chegaralanmagan, chegaralanmagan to`plamlar qanday ta’riflanadi?

3. Aniq yuqori, aniq quyi chegaralari o`ziga tegishli, o`ziga tegishli bo`lmagan to`plamlarga misollar keltiring.

4. Quyidagi tasdiqni isbotlang: Har qanday quyidan chegaralangan to`plam uchun uning quyi chegaralari orasida eng kattasi mavjud.

5. Aniq yuqori va aniq quyi chegaralarning qanday xossalari bor?

6. Quyidagi tasdiqni isbotlang: Agar E to`plam quyidan chegaralangan bo`lib, $E_1 \subset E$ bo`lsa, u holda $E_1$ to`plam ham quyidan chegaralangan va $\inf E_1 \geq \inf E$ bo`ladi.

2) Agar E to`plam quyidan chegaralangan va $b=\inf E$ bo`lsa, u holda $\forall \varepsilon>0$ uchun shunday $x' \in E$ mavjudki, $x'<b+\varepsilon$ bo`ladi.

Adabiyot: [1]. 38-41; [2], 10-15b.;

4-mavzu. Funksiyaning ta’rifi va berilish usullari. Funksiyalar ustida arifmetik amallar. Funksiyalarning kompozitsiyasi. (2 soat)

1. 1-vazifa.

2. Qanday funksiyalar aynan teng deyiladi? Aynan teng funksiyalarga misollar keltiring.

3. Agar D_1 to`plam $f(x)$ funksiyaning $D_2$ to`plam $g(x)$ funksiyaning aniqlanish sohalari bo`lsa, u holda $f+g/f$, $f \cdot g+g^2$, $f/g + g/f$, $1/(fg)$; $f/(f-g)$ funksiyalarning aniqlanish sohalarini tavsiflang.

4. 2-vazifa

Adabiyot: [1]. 109-112; [2], 17-19b.

5-mavzu. Monoton funksiyalar. Teskari funksiya. (2 soat)

1. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar D to`plamda berilgan hamda o`suvchi bo`lsa, u holda $f(x) + g(x)$ o`suvchi ekanligini isbotlang.

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar D to`plamda nomanfiy o`suvchi (kamayuvchi) funksiyalar bo`lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ o`suvchi (kamayuvchi) ekanligini isbotlang.

3. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar D to`plamda manfiy o`suvchi (kamayuvchi) funksiyalar bo`lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ kamayuvchi (o`suvchi) ekanligini isbotlang.

4. Agar $f(x)$ funksiya D to`plamda o`suvchi va $f(x)>0$ bo`lsa, u holda $1/f(x)$ kamayuvchi ekanligini isbotlang.

5. Agar $f(x)$ funksiya D to`plamda o`suvchi va c o`zgarmas son bo`lsa, u holda $c \cdot f(x)$ funksiyaning monotonligi haqida nima deyish mumkin? Javobingizni asoslang.

6. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar D to`plamda berilgan hamda o`suvchi bo`lsa, u holda $f(x) - g(x)$ funksiyaning monotonligi haqida nima deyish mumkin? Javobingizni asoslang.

7. Teskari funksiya mavjud bo`lishining etarli sharti nimadan iborat?

8. Monoton bo`lmagan, lekin teskari funksiyasi mavjud bo`lgan funksiyaga misol keltiring.

9. Funksiya va unga teskari funksiya grafiklari $y=x$ to`g`ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo`lishini isbotlang.
10. 3-vazifa.

Adabiyot: [1]. 119-121; [2], 23-35b.;

6-mavzu. Juft, toq, chegaralangan funksiyalar. Davriy funksiyalar. (2 soat)

1. Agar $f(x)$ va $g(x)$ X to`plamda aniqlangan juft funksiyalar bo`lsa, u holda $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, $g(x)\neq 0$ funksiyalar ham juft funksiya ekanligini ko`rsating.
2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ X to`plamda aniqlangan toq funksiyalar bo`lsa, u holda $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ funksiyalar toq, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, $g(x)\neq 0$ funksiyalar juft funksiya ekanligini ko`rsating.
3. Quyidagi tasdiqni isbotlang: Koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo`lgan $X$ to`plamda aniqlangan har qanday funksiyani toq va juft funksiyalarning yig`indisi ko`rinishda ifodalash mumkin.
4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ X to`plamda aniqlangan chegaralangan funksiyalar bo`lsa, u holda $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $|f(x)|$ funksiyalar ham chegaralangan funksiya ekanligini ko`rsating.
5. Quyidan chegaralanmagan, yuqoridan chegaralanmagan, chegaralanmagan funksiyalarni ta'riflang.
6. 4-vazifa.
7. Davriy funksiyaning aniqlanish sohasi haqida nima deyish mumkin?
8. Ikkita davriy funksiyalarning yig`indisi haqida nima deyish mumkin?
9. Davriy funksiya qat'iy monoton bo`lishi mumkinmi? Javobingizni asoslang.
10. Trigonometrik funksiyalardan farqli bo`lgan davriy funksiyalarga misol keltiring.

Adabiyot: [1]. 112-119; [2], 23-35b.;

7-mavzu. Sonli ketma-ketlik. Ketma-ketlikning limiti. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari. Oraliq o`zgaruvchining limiti. (3 soat)

1. 5-vazifa;
2. Ketma-ketlik limitiga berilgan ta'rifda $|a_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik o`rniga $|a_n-a|\leq\varepsilon$ tengsizlikni ishlatish mumkinmi, javobingizni asoslang.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ ni geometrik ma'nosi nimadan iborat?
4. «Ketma-ketlikning chekli limiti mavjud emas» degan jumlaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
5. Qo`yidagi jumlani isbotlang: Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo`lsa, u holda undan chekli sondagi hadlarini tashlab yuborishdan hosil bo`lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo`ladi.
6. Qo`yidagi jumla to`g`rimi «agar ketma-ketlikning faqat chekli sondagi hadlarigina manfiy bo`lsa, u holda uning limiti musbat bo`ladi» ?
7. Agar $\forall n\in N$ uchun $0\leq x_n\leq y_n$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ bo`lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ ekanligini isbotlang.

8. Tenglik va tengsizliklarda limitga o`tish haqidagi teoremalar ([1], 79-80 b. $1^0$, $2^0$, $3^0$ xossalar) «$\forall n \in N$» o`rniga «biror nomerdan boshlab (ya'ni $\exists n_0$, $\forall n > n_0$)» ishlatsak ham o`rinli ekanligini ko`rsating.

Adabiyot: [1], 64-74 b.; [2], 39-42b.;

8-mavzu. Cheksiz kichik ketma-ketliklar va ularning xossalari. Cheksiz katta ketma-ketliklar. Yig`indi, ko`paytma va bo`linmaning limiti. (2 soat)

1. $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ va $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ larni ta'riflang.
2. Cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo`lishini ko`rsating, chegaralanmagan, lekin cheksiz katta bo`lmagan ketma-ketlikka misol ko`rsating.
3. Aniqmaslik deganda nimani tushunasiz?
4. Aniqmaslik turlarga misollar keltiring.
5. 6-9 vazifalar.

Adabiyot: [1], 70-71, 74-78, 81-85 b. [2], 43-47b.;

9-mavzu. Monoton ketma-ketlik, e soni. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi. (2 soat)

1. Chegaralangan, yuqoridan chegaralangan, quyidan chegaralangan, chegaralanmagan ketma-ketliklarga ta'rif bering. Misollar keltiring.
2. Quyidan chegaralangan kamayuvchi ketma-ketlik limiti mavjudligi haqidagi teoremani isbotlang.
3. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi haqidagi teoremada segmentni interval, yariminterval bilan almashtirib bo`lmasligini misollarda ko`rsating.
4. Agar ketma-ketlik biror hadidan boshlab o`suvchi va yuqoridan chegaralangan bo`lsa, u holda bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo`ladimi?
5. 10-vazifa.

Adabiyot: [1], 86-95 b.; [2], 51-54b.;

10-mavzu. Qism ketma-ketlik. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. Koshi kriteriyasi. (1 soat)

1. Qism ketma-ketlikka berilgan ta'rifdagi shartlarni sanang. Qism ketma-ketlikka misollar keltiring.
2. Biror qism ketma-ketligi yaqinlashuvchi, lekin o`zi yaqinlashuvchi bo`lmagan ketma-ketlikka misol keltiring.
3. Barcha qism ketma-ketliklari yaqinlashuvchi bo`lgan ketma-ketlikka misol keltiring.
4. Agar ketma-ketlikning biror qism ketma-ketligi uzoqlashuvchi bo`lsa, u holda bu ketma-ketlik chegaralanmagan bo`ladi. Jumla to`g`rimi?
5. Bolsano-Veyershtrass teoremasi isbotida chegaralangan ketma-ketlikni o`z ichida saqlaydigan segmentning mavjudligi qanday asoslanadi?
6. «Ketma-ketlik fundamental emas» degan iborani qanday tushuntirish mumkin?
7. 11-vazifa.

Adabiyot: [1], 98-103 b.; [2], 56-58b.;

11-mavzu. Funksiyaning nuqtadagi limiti. Limitga ega bo`lgan funksiyalarning sodda xossalari. Limitning yagonaligi. Cheksiz kichik funksiyalar va ularning xossalari. (2 soat)

1. To`plamning limit nuqtasi xossalarini sanang.

2. Chekli nuqta, ∞, +∞, -∞ «nuqta» atroflarini tengsizliklar yordamida bering, ularni sonlar o`qida tasvirlang.

3. (a,b) intervalning har bir nuqtasi va uchlari shu to`plamning limit nuqtasi bo`lishini ko`rsating.

3. Funksiyaning nuqtadagi limitiga berilgan Geyne va Koshi ta'riflarining ekvivalentligini isbotlang.

4. Funksiyaning +∞ «nuqta»dagi limitiga Geyne va Koshi ta'riflarini bering. Ularning ekvivalentligini qanday isbotlash mumkin?

5. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ larni ta'riflang. Ularning geometrik ma'nolari haqida nima deyish mumkin?

6. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ larni ta'riflang. Ularning geometrik ma'nolari haqida nima deyish mumkin?

7. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ larni ta'riflang.

8. Aniqmasliklarning har bir turiga misollar keltiring.

9. II.1-vazifa.

Adabiyot: [1], 127-133, 136-138, 145 b.; [2], 59-65b.;

12-mavzu. Ikki funksiya yig`indisi, ko`paytmasi va bo`linmasining limiti. Monoton funksiya limitining mavjudligi. Funksiyaning chekli limitga ega bo`lish sharti. (3 soat)

1. II. 2-, 3- vazifalar.

2. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremada $\forall x\in X$ uchun $x\le a$ $(x\ge a)$ shart talab qilinadi. Bu shartni qanday tushuntirasiz?

3. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan, kamayuvchi va quyidan chegaralanmagan bo`lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ bo`lishini isbotlang.

4. Funksiyaning chekli limitga ega bo`lishining zaruriy va etarli (Koshi alomati) shartini isbotlang.

5. Koshi shartining geometrik ma'nosi nimadan iborat?

Adabiyot: [1], 127-133 b.; [2], 65-68, 72-73b.;

13-mavzu. Bir tomonli limitlar. Funksiyalar kompozitsiyasining limiti. Ba'zi bir ajoyib limitlar. (2 soat)

1. Nuqtaning bir tomonli atrofini tengsizliklar yordamida yozing.

2. II. 4-6-vazifalar.

3. Funksiyaning a nuqtadagi chap (o`ng) limitiga Geyne ta'rifini bering.

4. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$ larni ta'riflang. Ularning geometrik ma'nolari haqida nima deyish mumkin?

Adabiyot: [1], 132-133, 134-136, 139-140, 162-163 b.; [2], 66-71b.;

14-mavzu. Uzluksiz funksiyalar. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi. Bir tomonli uzluksizlik. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilish nuqtalari. (2 soat)

1. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo`lsa, u holda funksiya $x_0$ nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo`lishini isbotlang.

2. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x_0)>p$ ($f(x_0)<q$) bo`lsa, u holda $x_0$ nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarda $f(x)>p$ ($f(x)<q$) bo`lishini isbotlang.

3. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x_0)=0$ bo`lsa, u holda x_0 nuqtaning etarlicha kichik atrofida funksiya qiymatlari haqida nima deyish mumkin? Misollarda tushintiring. (Grafiklardan foydalanish mumkin)

4. III.3-vazifa

Adabiyot: [1], 151-159 b.; [2], 78-80, 82-83, 88-89b.;

15-mavzu. Ikkita uzluksiz funksiya yig`indisi, ko`paytmasi va bo`linmasining uzluksizligi. Funksiyalar kompozitsiyasining uzluksizligi. (2 soat)

1. III. 1-,2-vazifalar.

2. Ikkita funksiya yig`indisi, ayirmasi, ko`paytmasi x_0 nuqtada uzluksiz bo`lsa, funksiyalarning o`zi haqida nima deyish mumkin? Misollar keltiring.

3. Ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya bo`linmasining x_0 nuqtadagi uzluksizligi haqidagi tasdiqda $g(x_0)\neq 0$ shart berilgan. Ushbu shartni $g(x)\neq 0$ shart bilan almashtirish mumkinmi? Javobingizni asoslang.

4. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz, $g(x_0)=0$ bo`lsa, $f(x)/g(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti haqida nima deyish mumkin? Javobingizni asoslang (misollar orqali tushintiring)

5. Funksiyalar kompozitsiyasining uzluksizligi qanday isbotlanadi?

Adabiyot: [1], 150-152 b.; [2], 86-87b.;

16-mavzu. Kesmada uzluksiz bo`lgan funksiyalarning chegaralanganligi, eng kichik va eng katta qiymatlari. Uzluksiz funksiyalarning oraliq qiymatlari. (2 soat)

1. Qanday funksiya kesmada uzluksiz deyiladi?

2. Kesmada uzluksiz bo`lmagan, lekin chegaralangan funksiyaga misol keltiring.

3. Agar $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)<c$ bo`lsa, u holda $\varphi(x)=1/(c-f(x))$ funksiyaning $[a,b]$ da uzluksiz ekanligini asoslang.

4. Kesmada chegaralangan uzluksiz funksiya o`zining aniq quyi chegarasiga erishishini isbotlang.

5. III. 4-vazifa.

6. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan, uzluksiz va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$ bo`lsa, u holda $(a,b)$ intervaldagi kamida bir nuqtada funksiya nol qiymat qabul qilishini isbotlang. Shunday xossaga ega bo`lgan funksiyaga misol keltiring.

7. Tengsizliklarni yechishning intervallar usulini asoslang.

Adabiyot: [1], 164-169 b.; [2], 84-88b.;

17-mavzu. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi. Tekis uzluksizlik. Kantor teoremasi. (1 soat)

1. III. 5-vazifa.
2. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremani kamayuvchi funksiya uchun isbotlang.
3. Kantor teoremasi isbotida funksiya qaralayotgan to`plamning kesma ekanligidan qaerda foydalaniladi?
4. Funksiya intervalda (yarimintervalda) tekis uzluksiz bo`lishi mumkinmi?
5. Agar *f(x)* funksiya [*a*,*b*] kesmada tekis uzluksiz bo`lsa, u holda bu funksiya (*a*,*b*) intervalda tekis uzluksiz bo`ladimi? Javobingizni asoslang.
6. Funksiyaning to`plamdagi tebranishi qanday aniqlanadi?

Adabiyot: [1], 169-173 b.; [2], 89-92b.;

18-mavzu. Asosiy elementar funksiyalar. Haqiqiy ko`rsatkichli daraja. Ko`rsatkichli, logarifmik va darajali funksiya. (2 soat)

1. Ko`rsatkichli funksiyaning chegaralanmaganligini isbotlang.
2. Ko`rsatkichli funksiyaning davriy emasligini qanday ko`rsatish mumkin?
3. Logarifmik funksiyaning chegaralanmaganligini isbotlang.
4. Logarifmik funksiyaning davriy emasligini qanday ko`rsatish mumkin?
5. Logarifmik funksiyaning uzluksizligi qanday isbotlanadi?
6. Darajali funksiyaning uzluksizligi qanday isbotlanadi?
7. Giperbolik funksiyalarning uzluksizligini asoslang.

Adabiyot: [1], 121-125 b.; [2], 92-95, 98b.;

19-mavzu. Trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar. (2 soat)

1. *cosx*, *tgx*, *ctgx* funksiyalarning o`z aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligini isbotlang.
2. *tgx*, *ctgx* funksiyalarning chegaralanmaganligini ko`rsating.
3. Chegaralanmagan funksiyaga teskari funksiyaning chegaralangan, chegaralanmaganligi haqida nima deyish mumkin?
4. Toq (juft) funksiyaga teskari funksiyaning toq-juftligi haqida nima deyish mumkin?
5. Teskari trigonometrik funksiyalarning uzluksizligi qanday isbotlanadi?

Adabiyot: [1], 114-117 b.; [2], 99-101b.;

TARQATMA MATERIALLAR

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ
7-вариант

1) Ҳақиқий сонлар тўпламини тартибланг.
2) Исботланг.
   $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$arc\sin(2x-1)+\frac{1}{1-x^2}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ
8-вариант

1) Иккита $\alpha < \beta$ ҳақиқий сонлар ўртасида $\alpha < r < \beta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи r ҳақиқий соннинг мавжудлиги.
2) Исботланг.
   $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$, a>1
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\ln(3x-2)+\frac{1}{x}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ
9-вариант

1) Ҳақиқий сонлар тўпламининг узлуксизлиги (тўлиқлиги, туташлиги). Дедекинд теоремаси.
2) Исботланг.
   $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$, 0 < a < 1
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\sqrt{1-x}+\frac{1}{\lg x}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

10-вариант

1) Ҳақиқий сонлар тўпламининг чегаралари. Тўпламнинг аниқ қуйи ва юқори чегаралари.
2) Исботланг.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, 0<a<1
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\ln(2x+1)}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

11-вариант

1) теоремаси.
2) Исботланг.
   $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ = ? мавжуд эмас?
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\log_2(x-2)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

12-вариант

1) Чегараланмаган ва чексиз катта миқдор тушунчаларини таьрифланг.
2) Исботланг.
   $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$ = ? мавжуд эмас?
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\log_3\sqrt{1-x}+\frac{1}{x^4-4}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

13-вариант

1) Ҳақиқий сонлар тўпламида
   $|a+b| \le |a|+|b|$
   $|a-b| \ge ||a|-|b||$
   тенгсизликларни исботланг.
2) Исботланг.
   $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?

$y=\arcsin\frac{2x}{3}+\sqrt{\frac{1}{x}}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

14-вариант

1) Функция тушунчаси таьрифи

$y = x^{\mu}$ – даражали функция.

2) Исботланг.

$\lim\limits_{x\to+0} a^{\frac{1}{x}} =$ a>1

$\lim\limits_{x\to-0} a^{\frac{1}{x}} =$ a>1

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?

$y=\arccos(2x-4)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

15-вариант

1) Функция тушунчаси таьрифи

$y = a^{x}$ – кўрсаткичли функция.

2) Исботланг.

$\lim\limits_{x\to+0} arc\,\mathrm{tg}\frac{1}{x} =$

$\lim\limits_{x\to-0} arc\,\mathrm{tg}\frac{1}{x} =$

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?

$y=\mathrm{arctg}(1-x)+\sqrt{1+x}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

16-вариант

1) Функция тушунчаси таьрифи

$y = \log_a x$ – логарифмик функция.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$ тенгликни исботланг.

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?

$y=\arccos(4x-2)+\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

17-вариант

1) Функция тушунчаси таърифи
   y $=\sin x$ – тригонометрик функция.
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$ = 0, a>1 тенгликни исботланг.

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\arcsin\sqrt{1-x}+\frac{1}{x}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ
19-вариант

1) Функция тушунчаси таърифи
y $=\cos x$ – тригонометрик функция.
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ = 0 тенгликни исботланг.
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
y=$\arcsin(2x-2)+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ
20-вариант

1) Функция тушунчаси таърифи
   y $=\mathrm{tg}\, x$ – тригонометрик функция.
2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot q^n$= 0, |q| < 1 тенгликни исботланг.

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\mathrm{arctg}\, 2x+\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ
21-вариант

1) Функция тушунчаси таърифи
   y $=\mathrm{ctg}\, x$ – тригонометрик функция.
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$= 1 тенгликни исботланг.
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\log_2(x-4)+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ ТЕРМИЗ ФИЛИАЛИ
БОШЛАНҒИЧ ВА АНИҚ ФАНЛАР КАФЕДРАСИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАРҚАТМА МАТЕРИАЛ ТОПШИРИҚЛАРИ

1) Функция тушунчаси таърифи
   y =arcsin x, y =arctg x − функциялар.
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0$,   a>1   тенгликни исботланг.
3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг?
   y=$\log_2(2x-4)+\frac{1}{x^2-1}$

VI. Asosiy va qo'shimcha o'quv adabiyotlar hamda axborot manbalar
Asosiy adabiyotlar

1. Adams, Robert A. (Robert Alexander), Calculus: a complete course. Textbooks. Christopher Essex. - 7th ed. Copyright @ 2010, 2006, 2003 Pearson Education Canada, a division of Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.-1077 p.
2. Larson R., Edwards Bruce H. Calculus. Ninth Edition. Cengage Learning. 2010. 1334 p.
3. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.-435p.
4. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. II. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2010.-534 p.
5. Toshmetov O'., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: "Extremum-Press", 2015. -408 b.
6. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma'ruzalar. I T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 374 b.
7. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma'ruzalar. II T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 352 b.
8. Ayupov SH.A., Berdiqulov M.A., Turgunbayev R.M. Funksiyalar nazariyasi. T.: «O'AJBNT» Markazi, 2004y.- 148b.
9. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbayev R.M. Funksional analiz. T.: TDPU. 2008 y.-136b.

19

10. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbayev R.M. Matematik analiz (funksional analizga kirish). T.: TDPU. 2014 y.-126b.

11. Ayupov Sh.A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar. Nukus. "Bilim"- 2009 y. - 302 b.

12. Turgunbayev R. Matematik analiz. 2-qism. T.:TDPU, 2008 y.-136b.

13. Jo'rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 2-q. T.: «O'zbekiston». 1999.- 303b.

14. Turgunbayev R., Ismailov Sh. Abdullayev O. Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to'plami. T.:TDPU. 2007 y.-84 b.

15. Sa'dullayev A. va boshq. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. III qism. T.,«O'zbekiston». 2000 y.-400b.

Qo'shimcha adabiyotlar

16. Мирзиёев Ш. М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ / Ш.М. Мирзиёев. – Тошкент : Ўзбекистон, 2016. - 56 б.

17. Мирзиёев Ш М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Мамлакатимизни 2016 йилда ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришнинг асосий якунлари ва 2017 йилга мўлжалланган иқтисодий дастурнинг энг муҳим устувор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг кенгайтирилган мажлисидаги маъруза, 2017 йил 14 январ / Ш.М. Мирзиёев. – Тошкент : Ўзбекистон, 2017. – 104 б.

18. Мирзиёев Ш. М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза. 2016 йил 7 декабр /Ш.М.Мирзиёев. – Тошкент: "Ўзбекистон", 2017. – 48 б.

19. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. Мазкур китобдан Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2016 йил 1 ноябрдан 24 ноябрга қадар Қорақалпоғистон Республикаси, вилоятлар ва Тошкент шаҳри сайловчилари вакиллари билан ўтказилган сайловолди учрашувларида сўзлаган нутқлари ўрин олган. /Ш.М.Мирзиёев. – Тошкент: "Ўзбекистон", 2017. – 488 б.

20. ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ПРЕЗИДЕНТИНИНГ ФАРМОНИ. Ўзбекистон республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида. *(Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари тўплами, 2017 й., 6-сон, 70-модда)*Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O'zbekiston». 1 t: 1994 y.-416 b.

21. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O'zbekiston». 2 t . 1995 y.-436 b.

22. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshibayev M. "Matematik analizdan misol va masalalar" T.: "Yangi asr avlodi" 2006 y.
23. Toshmetov O', Turgunbayev R. Matematik analizdan misol va masalalar to'plami. 1-q. TDPU. 2006 y.-140 b.
24. Toshmetov O', Turgunbayev R. Matematik analizdan misol va masalalar to'plami, 2-q. TDPU. 2010 y.-48 b.
25. Turgunbayev R.M., Koshnazarov R.A., Raximov I.K. Matematik analiz. Mustaqil ta'lim uchun metodik ko'rsatmalar. I semestr. T.: TDPU. 2013 y. – 56 b.
26. Turgunbayev R.M., Koshnazarov R.A., Raximov I.K. Matematik analiz. Mustaqil ta'lim uchun metodik ko'rsatmalar. III semestr. T.: TDPU. 2013 y.
27. G'aybnazarov G., G'aybnazarov O.G. Funktsional analiz kursidan masalalar echish. T.: "Fan va texnologiya", 2006.-114b.
28. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: «Высшая школа». 1999 г. – 695 стр.
29. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. 1 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г. – 416 стр.
30. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. 2 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г.-426 стр.
31. Демидович Б.П.., «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Учеб. Пособие для вузов. М.: ООО «Издательство Астрель» ООО «Издательство АСТ», 2003 г – 558 [2] ст.
32. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.:Интеграл-Пресс, 1998,-208с.
33. Turgunbayev R.M. Matematikaliq analiz. I tom. T.: "Abu matbuot-konsalt", 2014.-344b. (qozoq tilida)
34. Turgunbayev R.M. Matematikaliq analiz. II tom. T.: "Abu matbuot-konsalt", 2015.-397 b. (qozoq tilida)
35. Turgunbayev R.M. Matematikaliq analiz. III tom. T.: "Abu matbuot-konsalt", 2017.-327 b. (qozoq tilida)

Internet saytlarii

36. www.tdpu.uz
37. www.pedagog.uz
38. www.edu.uz
39. www.nadlib.uz (A.Navoiy nomidagi O'z.MK)
40. http://ziyonet.uz — Ziyonet axborot-ta'lim resurslari portal
41. http://www.mathprofi.ru
42. http://eqworld.ipmnet.ru/