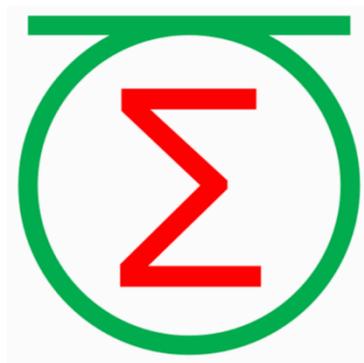


O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA-MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI



MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

MATEMATIK ANALIZ
FANIDAN
O'QUV USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi:	100000 - Gumanitar
Ta'lim sohasi:	130000 - Matematika
Bakalaviriya yo'nalishi:	5130100-amaliy matematika

TERMIZ-2018

Mazkur o`quv-uslubiy majmua Oliy va O`rta maxsus ta'lim Vazirligining 2018 yil __ ____dagi __-sonli buyrug`i bilan tasdiqlangan o`quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchilar: O. Begaliyev – Matematik analiz kafedrası katta o`qituvchisi, f-m.f.nomzodi
A. Qurbonnazarov – Matematik analiz kafedrası o`qituvchisi

Taqrizchi: f-m.f. doktori, prof. M. Mirsaburov

O`quv-uslubiy majmua Termiz davlat universiteti kengashining 2018 yil 28-avgustdagi 1-sonli qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan.

Mundarija

So‘z boshi	4
1-ma’ruza. To‘plam. To‘plamlar ustida amallar.	5
2-ma’ruza. Akslantirish va uning turlari.....	18
3-ma’ruza. Xaqiqiy sonlar	28
4-ma’ruza. Xaqiqiy sonlar to‘plamining chegaralari.	41
5-ma’ruza. Xaqiqiy sonlar ustida amallar	44
6-ma’ruza. Sonlar ketma-ketligining limiti.....	50
7-ma’ruza. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari	53
8-ma’ruza. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti	67
9-ma’ruza. Qisman va fundamental ketma-ketliklar. Ketma –ketlikning quyi	
10-ma’ruza. Funksiya tushunchasi.....	82
11-ma’ruza. Funksiya limiti.....	92
12-ma’ruza. Limitga ega bo‘lgan funkqiyalarni xossalari	97
13-ma’ruza. Funksiyalarni taqqoslash	106
14-ma’ruza. Funksiyaning uzluksizligi	116
15-ma’ruza. Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari.....	125
16-ma’ruza. Uzluksiz funksiyalarning global xossalari.....	134
17-ma’ruza. Tekis uzluksizlik.....	144
18-ma’ruza. Funksiyaning hosilasi	153
19-ma’ruza. Hosila hisoblash qoidalari	157
20-ma’ruza. Funksiyaning differensial	165
21-ma’ruza. Funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallar	171
22-ma’ruza. Differensial hisobning asosiy teoremlar	174
23-ma’ruza. Teylor formulasi	178
24-ma’ruza. Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari	181
25-ma’ruza. Funksiyaning qavariqligi va egilish nuqtalari, asimptotalari	184
26-ma’ruza. Lopital qoidalari.....	187
1-Amaliy mashg’ulot. To‘plam. To‘plamlar ustida amallar.	189
2- Amaliy mashg’ulot. Akslantirish va uning turlari.....	190
3- Amaliy mashg’ulot. Xaqiqiy sonlar	192
4- Amaliy mashg’ulot. Xaqiqiy sonlar to‘plamining chegaralari.	194
5- Amaliy mashg’ulot. Xaqiqiy sonlar ustida amallar	196
6- Amaliy mashg’ulot. Sonlar ketma-ketligining limiti.....	198
7- Amaliy mashg’ulot. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari	200
8- Amaliy mashg’ulot. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti	201

9- Amaliy mashg'ulot. Qisman va fundamental ketma-ketliklar. Ketma – ketlikning quyi va yuqori limitlari.....	203
10- Amaliy mashg'ulot. Funksiya tushunchasi.....	205
11- Amaliy mashg'ulot. Funksiya limiti.....	206
12- Amaliy mashg'ulot. Limitga ega bo'lgan funktsiyalarni xossalari	208
13- Amaliy mashg'ulot. Funktsiyalarni taqqoslash	210
14- Amaliy mashg'ulot. Funktsiyaning uzluksizligi	212
15- Amaliy mashg'ulot. Uzluksiz funktsiyalarning lokal xossalari.....	214
16- Amaliy mashg'ulot. Uzluksiz funktsiyalarning global xossalari.....	216
17- Amaliy mashg'ulot. Tekis uzluksizlik.....	218
18- Amaliy mashg'ulot. Funktsiyaning hosilasi	220
19- Amaliy mashg'ulot. Hosila hisoblash qoidalari	221
20- Amaliy mashg'ulot. Funktsiyaning differensial	223
21- Amaliy mashg'ulot. Funktsiyaning yuqori tartibli hosila va differentsiallar	225
21- Amaliy mashg'ulot. Differensial hisobning asosiy teoremlar	226
22- Amaliy mashg'ulot. Teylor formulasi	228
23- Amaliy mashg'ulot. Funktsiyaning monotonligi. Funktsiyaning ekstremumlari	230
24- Amaliy mashg'ulot. Funktsiyaning qavariqligi va egilish nuqtalari, asimptotalari	184
25-ma'ruza. Lopital qoidalari.....	233
Mustaqil ish	235
Glossariy.....	237
Tarqatma materiallar	239
Test topshiriqlari	241
Matematik analiz fan dasturi	244
Ishchi o'quv dasturi	251

Annotatsiya

So‘nggi yillarda mamlakatimizda oliy ta‘lim sifatini oshirishga qaratilgan bir qancha chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. Chunki, jahon talablari darajasidagi raqobatbardosh kadrlar tayyorlash maqsadida talabalarga dunyo standartlariga javob beradigan bilim va ko‘nikmalar berish bugungi kunning eng dolzarb masalalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua “Matematik analiz” fani bo‘yicha tayyorlangan bo‘lib, u “5130100-Matematika” yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan va Termiz davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasida o‘qituvchilari tomonidan tayyorlangan. Ushbu majmua mamlakatimizda “Matematik analiz” fanini o‘qitish bo‘yicha uzoq yillardan beri to‘plangan boy tajriba hamda rivojlangan xorijiy davlatlarning yetakchi Oliy ta‘lim muassasalarining tajribalaridan foydalangan holda, shuningdek, ularning o‘quv dasturlaridagi asosiy adabiyotlardan foydalangan holda yaratildi.

Matematik analiz fani matematikaning fundamental bo‘limlaridan biri bo‘lib, u matematikaning poydevori hisoblanadi. Matematik analiz kursi davomida ko‘pgina tushuncha va tasdiqlar, shuningdek, ularning tatbiqlari keltiriladi.

Matematik analiz fanining asosiy vazifasi shu fanning tushuncha, tasdiqlar va boshqa matematik ma‘lumotlar majmuasi bilan tanishtirishgina bo‘lmasdan, balki talabalarda mantiqiy fikrlash, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga qo‘llash ko‘nikmalarini shakllantirishdan iborat.

Ushbu o‘quv-uslubiy majmuada dastlab sillabus hamda o‘qitishda foydalaniladigan interfaol ta‘lim metodlari berilgan bo‘lib, so‘ngra har bir ma‘ruza bo‘yicha materiallar batartib berilgan. Bunda har bir ma‘ruza bo‘yicha matnlari, nazorat savollari, mashqlar, glossariy, amaliy mashg‘ulot materiallari, test savollari va keyslar banki keltirilgan.

1-мавзу: R^m фазо ва унинг муҳим тўпламлари

1-маъруза

РЕЖА:

1⁰. R^m фазо тушунчаси.

2⁰. R^m фазода нуқтанинг атрофи.

3⁰. R^m фазода очик ва ёпик тўпламлар.

4⁰. R^m фазода тўғри чизиқ ва кесма.

Таянч иборалар: фазо тушунчаси, фазода нуқтанинг атрофи, очик ва ёпик тўпламлар, фазода тўғри чизиқ ва кесма

1⁰. R^m фазо тушунчаси. Ҳақиқий сонлар тўплами R ёрдамида ушбу

$$\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{m \text{ та}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\} \quad (1)$$

тўпламни (R нинг декарт кўпайтмаларидан тузилган тўпламни) ҳосил қилайлик. Равшанки, (1) тўпламнинг ҳар бир элементи m та x_1, x_2, \dots, x_m ҳақиқий сонлардан ташкил топган тартибланган m лик

$$(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

дан иборат бўлади. Уни (1) тўпламнинг нуқтаси дейилиб, битта ҳарф билан белгиланади:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Бунда x_1, x_2, \dots, x_m сонлар x нуқтанинг мос равишда биринчи, иккинчи, ... , m -координаталари дейилади.

Агар $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ нуқталар учун $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ бўлса, $x = y$ дейилади.

Фараз қилайлик,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

лар (1) тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтаси бўлсин. Ушбу

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2}$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги масофа дейилади ва $\rho(x, y)$ каби белгиланади:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2} . \quad (2)$$

Энди масофанинг хоссаларини келтирамиз:

1) Ҳар доим $\rho(x, y) \geq 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ бўлади.

◀ (2) муносабатга кўра, ҳар доим $\rho(x, y) \geq 0$ бўлади. Агар $\rho(x, y) = 0$ бўлса, унда

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2 = 0$$

бўлиб, натижада $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$, яъни $x = y$ бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ бўлса, унда (2) муносабатдан фойдаланиб $\rho(x, y) = 0$ бўлишини топамиз. ▶

2) $\rho(x, y)$ масофа x ва y уларга нисбатан симметрик бўлади: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

◀ Бу хоссанинг исботи (2) муносабатдан келиб чиқади:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2} = \rho(y, x). \blacktriangleright$$

3) (1) тўпламнинг ихтиёрий

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$$

нуқталари учун

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

◀ Маълумки, ихтиёрий a_1, a_2, \dots, a_m ва b_1, b_2, \dots, b_m ҳақиқий сонлар учун

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2} \quad (3)$$

бўлади (қаралсин, [1], 12-боб, 1-§; одатда бу тенгсизликни Коши-Буняковский тенгсизлиги дейилади). (3) тенгсизликда

$$a_k = y_k - x_k, \quad b_k = z_k - y_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

деб топамиз:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m (z_k - y_k)^2}.$$

Бу эса

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

бўлиниши билдирилади. ▶

Шундай қилиб, (1) тўпламда (тўплам элементлари орасида) масофа тушунчасининг киритилишини ҳамда масофа учта хоссага эга бўлишини кўрдик.

Одатда, (1) тўплам R^m фазо дейилади. Демак,

$$R^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}.$$

Энди R^m фазодаги баъзи бир тўпламларни келтирамиз.

Айтайлик, бирор $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нукта ва $r > 0$ сон берилган бўлсин.

Ушбу

$$B_r(a) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < r\}$$

қисқача,

$$B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}$$

тўплам маркази a нукта, радиуси r бўлган шар (m ўлчовли шар) дейилади.

Куйидаги

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) \leq r\}$$

тўплам R^m фазода ёпиқ шар,

$$B_r^0(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) = r\}$$

тўплам эса, R^m фазода сфера (m ўлчовли сфера) дейилади.

Равшанки,

$$\bar{B}_r(a) = B_r(a) \cup B_r^0(a)$$

бўлади.

Ушбу

$$P(a_1, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_m < x_m < b_m\}$$

тўплам R^m фазода параллелепипед дейилади, бунда $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m$ ҳақиқий сонлар.

2⁰. R^m фазода нуктанинг атрофи. Бирор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ нукта ҳамда $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин.

1-таъриф. Маркази x^0 нуктада радиуси ε бўлган R^m фазодаги шар, $x^0 \in R^m$ нуктанинг сферик атрофи дейилади ва $U_\varepsilon(x^0)$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}.$$

2-таъриф. Ушбу

$$P(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m :$$

$$: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

параллелепипед x^0 нуктанинг параллелепипедал атрофи дейлади ва $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ каби белгиланади, бунда $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_m > 0$.

R^m фазодаги нуктанинг бу атрофлари орасидаги муносабатни қуйидаги лемма ифодалайди.

Лемма. $x^0 \in R^m$ нуктанинг ҳар қандай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи олинганда ҳам ҳар доим x^0 нуктанинг шундай $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедал атрофи топиладики,

$$\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

Шунингдек, x^0 нуктанинг ҳар қандай $U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедал атрофи олинганда ҳам ҳар доим x^0 нуктанинг шундай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи топиладики,

$$\bar{U}_\varepsilon(x^0) \subset U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$$

бўлади.

◀ $x^0 \in R^m$ нуктанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

берилган бўлсин. Демак, $\varepsilon > 0$ сон берилган. Унга кўра $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$

тенгсизликни қаноатлантирувчи δ сонни олиб, x^0 нуктанинг ушбу

$$\bar{U}_\delta(x^0) = \bar{U}_{\delta, \delta, \dots, \delta}(x^0) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m :$$

$$: x_1^0 - \delta < x_1 < x_1^0 + \delta, x_2^0 - \delta < x_2 < x_2^0 + \delta, \dots, x_m^0 - \delta < x_m < x_m^0 + \delta\}$$

параллелепипедал атрофини тузамиз. Натижади x^0 нуктанинг

$$U_\varepsilon(x^0) \text{ ва } \bar{U}_\delta(x^0)$$

атрофларига эга бўламиз.

Айтайлик, $\forall x \in \bar{U}_\delta(x^0)$ бўлсин. Унда

$$|x_k - x_k^0| < \delta \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлиб,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^m \delta^2} = \delta \cdot \sqrt{m}$$

бўлади. Юқоридаги $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизликни эътиборга олиб топамиз:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon.$$

Демак, $\rho(x, x^0) < \varepsilon$ бўлиб, $x \in U_\varepsilon(x^0)$ бўлади. Бундан

$$\bar{U}_\delta(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлиши келиб чиқади.

$x^0 \in R^m$ нуқтанинг параллелепипедиал атрофи

$$\bar{U}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m}(x^0) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m :$$

$$: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

берилган бўлсин. Берилган $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ мусбат сонлар ёрдамида

$$\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

сонини топиб, x^0 нуқтанинг ушбу

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

сферик атрофни тузамиз. Натижада x^0 нуқтанинг

$$U_\varepsilon(x^0) \text{ ва } \bar{U}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m}(x^0)$$

атрофларига эга бўламиз.

Айтайлик, $\forall x \in U_\varepsilon(x^0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon \leq \delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлиб,

$$|x_k - x_k^0| < \delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлади. Бундан эса $x \in \bar{U}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m}(x^0)$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \bar{U}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m}(x^0). \blacktriangleright$$

Бу лемма R^m фазо нуқтасининг бир атрофидан иккинчи атрофига ўтиши имконини беради.

3⁰. R^m фазода очик ва ёпиқ тўпламлар. Айтайлик, R^m фазода бирор G тўплам ($G \subset R^m$) берилган бўлиб, $x^0 \in G$ бўлсин.

Агар x^0 нуқта G тўпламга тегишли бўлган $U_\varepsilon(x^0)$ атрофга эга бўлса, ($U_\varepsilon(x^0) \subset G$) x^0 нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси дейилади.

3-таъриф G тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, у очик тўплам дейилади.

1-мисол. R^m фазодаги ушбу

$$B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}$$

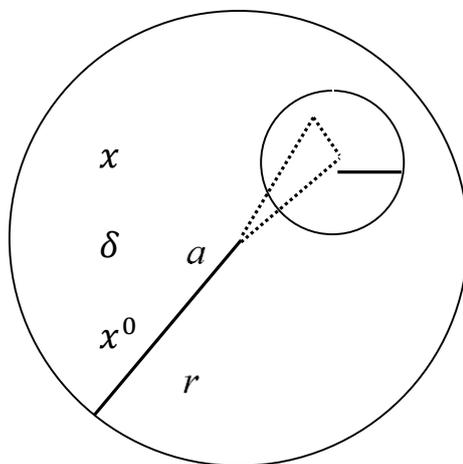
шарнинг очик тўплам эканлиги кўрсатилсин.

◀ $\forall x^0 \in B_r(a)$ нуқтани оламиз. Унда

$$r - \rho(x^0, a)$$

миқдор мусбат бўлади. Уни δ дейлик: $\delta = r - \rho(x^0, a)$. (22-чизма)

Энди x^0 нуқтанинг ушбу $U_\delta(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \delta\}$ атрофини қараймиз.



1.1-чизма

Бунда $U_\delta(x^0) \subset B_r(a)$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow \rho(x, x^0) < \delta$ бўлиб, масофанинг 3)-хоссасига кўра

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, x^0) + \rho(x^0, a) < \delta + \rho(x^0, a) = r$$

бўлади. Демак,

$$\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow x \in B_r(x^0)$$

Бундан $U_\delta(x^0) \subset B_r(x^0)$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $B_r(a)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлади. Бинобарин, $B_r(a)$ очик тўплам. ►

Айтайлик, $F \subset R^m$ тўплам ҳамда $x^0 \in R^m$ нуқта берилган бўлсин. Агар x^0 нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(x^0)$ атрофида ($\forall \varepsilon > 0$) F тўпламнинг x^0 дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, x^0 нуқта F тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.

Масалан, ушбу

$$B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}$$

тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг лимит нуқтаси бўлади. Айти пайтда,

$$B_r^0 = \{x \in R^m : \rho(x, a) = r\}$$

тўпламнинг барча нуқталари ҳам шу $B_r(a)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади. Бироқ, бу лимит нуқталар $B_r(a)$ тўпламга тегишли бўлмайди.

4-таъриф. Агар $F \subset R^m$ тўпламнинг барча лимит нукта-лари шу тўпламга тегишли бўлса, F ёпиқ тўплам дейилади.

Масалан,

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) \leq r\}$$

тўплам (R^m фазодаги ёпиқ шар) ёпиқ тўплам бўлади

Бирор $M \subset R^m$ тўплам ҳамда $x^0 \in R^m$ нуктани қарайлик.

Агар x^0 нуктанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(x^0)$ атрофида ҳам M тўпламнинг, ҳам $R^m \setminus M$ тўпламнинг нукталари бўлса, x^0 нукта M тўпламнинг чегаравий нуктаси дейилади. M тўпламнинг барча чегаравий нукталари унинг чегарасини ташкил этади. M тўпламнинг чегараси $\partial(M)$ каби белгиланади.

Масалан,

$$B_r^0(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) = r\}$$

тўплам

$$B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}$$

тўпламнинг чегараси бўлади:

$$\partial(B_r(a)) = B_r^0(a).$$

Агар $F \subset R^m$ тўпламнинг чегараси $\partial(F)$ шу тўпламга тегишли бўлса, F ёпиқ тўплам бўлади.

Масалан,

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) \leq r\}$$

ёпиқ тўплам бўлади, чунки

$$\partial(\bar{B}_r(a)) = B_r^0(a) \subset \bar{B}_r(a).$$

4⁰. R^m фазода тўғри чизиқ ва кесма. Фараз қилайлик, R^m фазода

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

нукталар берилган бўлсин. Бу нукталар координаталари ёрдамида қуйидагиларни

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 t + b_1(1-t), \\ x_2 &= a_2 t + b_2(1-t), \\ &\dots\dots\dots \\ x_m &= a_m t + b_m(1-t), \end{aligned} \tag{4}$$

тузиб, (бунда $t \in R$) t ўзгарувчига боғлиқ бўлган R^m фазонинг

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

нукталарини ҳосил қиламиз. Бундай нукталар тўплами

$$\left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \begin{aligned} x_1 &= a_1 t + b_1(1-t), \\ x_2 &= a_2 t + b_2(1-t), \dots, x_m = a_m t + b_m(1-t), \quad t \in R \end{aligned} \right\}$$

R^m фазода $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизик дейилади.

Энди юқоридаги a ва b нуқталарнинг координаталари ёрдамида тузилган (4) муносабатда $0 \leq t \leq 1$ бўлсин. R^m фазонинг бундай нуқталари тўплами

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = a_1 t + b_1(1-t), x_2 = a_2 t + b_2(1-t), \dots, x_m = a_m t + b_m(1-t), 0 \leq t \leq 1\}$$

R^m фазода a ва b нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси дейилади.

R^m фазода чекли сондаги нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталарни бирин-кетин тўғри чизик кесмалари билан бирлаштиришдан ташкил топган чизик синик чизик дейилади.

Агар $M \subset R^m$ тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини бирлаштитрувчи шундай синик чизик топилсаки, у шу M тўпламга тегишли бўлса, M боғламли тўплам дейилади.

5-таъриф. Агар $M \subset R^m$ тўплам очик ҳамда боғламли тўплам бўлса, у соҳа дейилади.

Масалан, $B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}$ соҳа бўлади.

5⁰. Хусусий ҳоллар. $m = 1$ бўлганда $R^m = R$ бўлиб, у барча ҳақиқий сонлардан иборат тўплам бўлади. Бу тўпламнинг ҳар бир элементи тўғри чизик нуқтасини, тўпламнинг ўзи эса тўғри чизикни ифодалайди.

Икки $x \in R$, $y \in R$ нуқталар орасида масофа

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

$x_0 \in R$ нуқтанинг атрофи

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in R : \rho(x, x_0) < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

бўлади.

$m = 2$ бўлганда $R^m = R^2$ бўлиб, у барча текислик нуқта-ларидан иборат тўплам бўлади. Бу тўпламнинг икки $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ нуқталари орасидаги масофа

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$

$x^0 = (x_0, y_0)$ нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{(x, y) \in R^2 : \rho((x, y), (x_0, y_0)) < \varepsilon\} = \{(x, y) \in R^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}$$

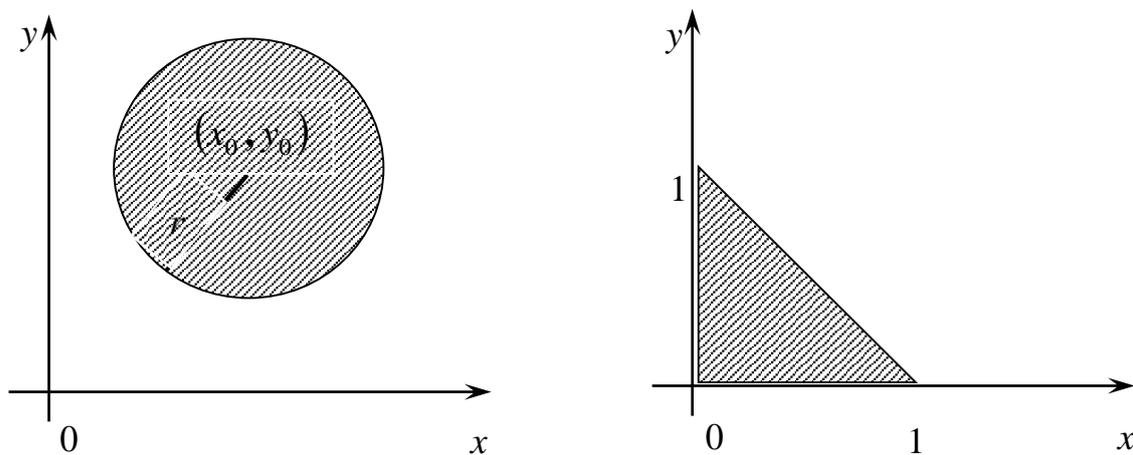
бўлади.

$$R^2 \text{ фазода ушбу } \{(x, y) \in R^2 : \rho((x, y), (x_0, y_0)) < r\}$$

тўплам очик, куйидаги

$$\{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

тўплам эса ёпиқ тўплам бўлади. Улар 1.2-чизмада тавсирланган.



1.2-чизма
Машқлар

1. Агар $G_1 \subset R^m$, $G_2 \subset R^m$ очик тўпламлар бўлса,

$$G_1 \cup R^m, G_2 \cap R^m$$

тўпламларнинг очик тўплам бўлиши кўрсатилсин.

2. Агар $F_1 \subset R^m$, $F_2 \subset R^m$ ёпиқ тўпламлар бўлса,

$$F_1 \cup R^m, F_2 \cap R^m$$

тўпламларнинг ёпиқ тўплам бўлиши кўрсатилсин.

ГЛОССАРИЙ

R^m фазода нуктанинг атрофи. Бирор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ нукта ҳамда $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин.

Маркази x^0 нуктада радиуси ε бўлган R^m фазодаги шар, $x^0 \in R^m$ нуктанинг сферик атрофи дейилади ва $U_\varepsilon(x^0)$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}.$$

Агар x^0 нукта G тўпламга тегишли бўлган $U_\varepsilon(x^0)$ атрофга эга бўлса, $(U_\varepsilon(x^0) \subset G)$ x^0 нукта G тўпламнинг ички нуктаси дейилади.

КЕЙС БАНКИ

R^2 fazoda quyidagi ketma-ketliklarning limiti $a(a \in R^2)$ ekanligi ta'rif yordamida isbotlansin.

$$1.1 \quad x^{(n)} = \left(\frac{13-n^2}{1+2n^2}, \frac{2n-1}{2-3n} \right); \quad a \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3} \right).$$

Кейси бажариш босқичлари ва топшириқлар:

- Кейс муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивидиал ва кичик гуруҳларда)
- Тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг

1-амалий машғулот

R^m фазодаги кетма-кетликларнинг лимитини ҳисоблаш

1⁰. R^m фазода кетма-кетлик ва uning limiti

Ushbu

$$R^m = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{m\text{-та}} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_k \in R, k = \overline{1, m} \}$$

to'plamga **m o'lchovli Yevklid fazosi** deyiladi.

Ixtiyoriy $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ va $y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$ nuqtalarni olaylik. Quyidagi

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2} \quad (1)$$

miqdor x va y nuqtalar orasidagi **masofa** deb ataladi.

U quyidagi xossalarga ega:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$ va $(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$; (uchburchak tengsizligi).

Natural sonlar to'plami N va R^m fazo berilgan bo'lib, f har bir $n \in N$ ga R^m fazoning biror $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in R^m$ nuqtasini mos qo'yuvchi akslantirish bo'lsin:

$$f : N \rightarrow R^m \text{ yoki } n \rightarrow x^{(n)}$$

$f : N \rightarrow R^m$ akslantirish obrazlaridan tuzilgan

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)} \dots \quad (2)$$

to'plam **ketma-ketlik** deb ataladi va u $\{x^{(n)}\}$ kabi belgilanadi.

Demak, (2)-ketma-ketlikning xadlari R^m fazo nuqtalaridan iborat. $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlikning mos koordinatalaridan tuzilgan $\{x_1^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ lar sonli ketma-ketlik bo'lib, $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlikni shu m ta ketma-ketlikning birgalikda qaralishi deb hisoblash mumkin.

Aytaylik R^m fazoda $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlik va $a = (a_1, \dots, a_m) \in R^m$ nuqta berilgan bo'lsin.

1-Ta'rif. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow \rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$, unda a nuqta $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$ kabi belgilanadi.

Limitga quyidagicha ham ta'rif berish mumkin.

2-Ta'rif. Agar a nuqtaning $\forall \bigcup_{\delta}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta\}$ atrofi olinganda ham $\exists n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in \bigcup_{\delta}(a)$, unda a nuqta $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi.

Teorema. R^m fazoda $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ ketma-ketlikning $a = (a_1, \dots, a_m) \in R^m$ nuqtaga yaqinlashishi uchun $n \rightarrow \infty$ da bir yo'la $x_1^{(n)} \rightarrow a_1, \dots, x_m^{(n)} \rightarrow a_m$ bo'lishi zarur va yetarli.

R^m fazodagi ketma-ketlik uchun ham sonli ketma-ketlik uchun o'rinli bo'lgan xossalr o'rinli. Biz ularga to'xtalmaymiz.

R^2 fazoda quyidagi ketma-ketliklarning limiti $a(a \in R^2)$ ekanligi ta'rif yordamida isbotlansin.

$$1.1 \quad x^{(n)} = \left(\frac{13 - n^2}{1 + 2n^2}, \frac{2n - 1}{2 - 3n} \right); a \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3} \right).$$

$$1.2 \quad x^{(n)} = \left(\frac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1}, \frac{2n^3}{n^3 - 2} \right); a \left(\frac{3}{4}; 2 \right).$$

$$1.3 \quad x^{(n)} = \left(\frac{1 - 2n^2}{n^2 + 3}, \frac{3n^2}{2 - n^2} \right); a(-2; -3).$$

$$1.4 \quad x^{(n)} = \left(\frac{4 + 2n}{1 - 3n}, \frac{5n + 15}{6 - n} \right); a \left(-\frac{2}{3}; -5 \right).$$

$$1.5 \quad x^{(n)} = \left(\frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2}, \frac{4 - n^3}{3 + 2n^3} \right); a \left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{2} \right).$$

$$1.6 \quad x^{(n)} = \left(\frac{1 - 2n^2}{2 + 4n^2}, -\frac{5n}{n + 1} \right); a \left(-\frac{1}{2}; -5 \right).$$

$$1.7 \quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}; \frac{2}{n} \cos n\pi \right); a(0,0).$$

$$1.8 \quad x^{(n)} = \left(\frac{3n-2}{2n-1}; \frac{4n-1}{2n+1} \right); a\left(\frac{3}{2}; 2\right)$$

$$1.9 \quad x^{(n)} = \left(\frac{2n}{3n+1}; \frac{1+n}{1-2n} \right); a\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$1.10 \quad x^{(n)} = \left(\frac{\cos n}{n}; \frac{n-1}{n^2+1} \right); a(0,0).$$

$$1.11 \quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{n^2}; \frac{5}{n} \right); a(0,0).$$

$$1.12 \quad x^{(n)} = \left(\frac{2}{n}; \frac{n}{n+1} \right); a(0,1).$$

2-мавзу: R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

2-маъруза

РЕЖА:

- 1⁰. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити тушунча-лари.
- 2⁰. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги.
- 3⁰. Ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар принципи.
- 4⁰. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано-Вейерштрасс теоремаси.

Таянч иборалар: фазода кетма-кетлик ва унинг лимити тушунчалари, Ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар принципи, $\{B_n\}$ R^m фазода ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма-кетлиги

1⁰. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити тушунча-лари. Айтайлик, бирор қоидага кўра ҳар бир натурал сон n га R^m фазонинг битта

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

нуктаси мос қўйилган бўлсин. Бу мослик натижасида R^m фазо нуқталаридан ташкил топган ушбу

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}), \dots, (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}), \dots$$

қисқача

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

тўплам ҳосил бўлади. Уни $R^{(m)}$ фазода кетма-кетлик дейилиб, $\{x^{(n)}\}$ каби белгиланади. Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари R^m фазо нуқталаридан иборат бўлиб, бу нуқталар-нинг координаталари m та

$$\{x_1^{(n)}\}, \quad \{x_2^{(n)}\}, \quad \dots \quad \{x_m^{(n)}\}, \quad (n=1,2,\dots)$$

сонлар кетма-кетликларини юзага келтиради.

Фараз қилайлик, R^m фазода $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (1)$$

кетма-кетлик ҳамда

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$$

нуқта берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

яъни

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 : \quad \rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

бўлса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \quad \text{ёки} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{да} \quad x^{(n)} \rightarrow a$$

каби белгиланади.

$\forall n > n_0$ да

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши, (1) кетма-кетликнинг n_0 дан катта номерли ҳадлари a нуқтанинг $U_\varepsilon(a)$ атрофига тегишли бўлишини билдиради. Бу ҳол (1) кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича таърифлаш имконини беради.

2-таъриф. Агар $a \in R^m$ нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ атрофи олингандан ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

1-мисол. R^m фазода ушбу

$$\{x^{(n)}\} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$$

кетма-кетликнинг лимити $a = (0, 0, \dots, 0)$ бўлиши кўрсатилсин.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ сонини олиб, унга кўра $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon} \right] + 1$ ни топамиз.

Унда $\forall n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right), (0, 0, \dots, 0)\right) = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \quad \blacktriangleright$$

2⁰. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги. Фараз қилай-лик, R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик ва $a \in R^m$ нукта берилган бўлсин.

1-теорема. Агар R^m фазода

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

лимитга эга бўлса;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a,$$

у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$

.....

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

бўлади.

◀ Айтайлик

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан $\forall n > n_0 \in N$ учун

$$x^{(n)} \in U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \varepsilon\} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

бўлади. Равшанки,

$$U_\varepsilon(a) \subset \tilde{U}_\varepsilon(a)$$

бунда,

$$\tilde{U}_\varepsilon(a) = x = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m :$$

$$a_1 - \varepsilon < x_1 < a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon < x_2 < a_2 + \varepsilon, \dots, a_m - \varepsilon < x_m < a_m + \varepsilon\}.$$

Кейинги муносабатлардан, $\forall n > n_0$ учун

$$a_1 - \varepsilon < x_1^{(n)} < a_1 + \varepsilon ,$$

$$a_2 - \varepsilon < x_2^{(n)} < a_2 + \varepsilon ,$$

.....

$$a_m - \varepsilon < x_m^{(n)} < a_m + \varepsilon$$

ЯЪНИ

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon ,$$

$$|x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon ,$$

.....

$$|x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2 ,$$

.....

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2-теорема. Агар R^m фазодаги

$$\{x^n\} = \{ (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \} \quad (n=1,2,\dots)$$

кетма-кетлик ва $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2 ,$$

.....

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m$$

бўлса, у ҳолда $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитига эга бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a ,$$

бўлади.

◀ Теореманинг шарти ҳамда лимит таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0^{(1)} \in N, \forall n > n_0^{(1)} : |x_1^{(n)} - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \text{ бўлади.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0^{(2)} \in N, \forall n > n_0^{(2)} : |x_2^{(n)} - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \text{ бўлади.}$$

.....

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0^{(m)} \in N, \forall n > n_0^{(m)} : |x_m^{(n)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ бўлади.

Агар

$$n_0 = \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}\}$$

дейилса, унда $\forall n > n_0$ да бир йўла

$$|x_k^{(n)} - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

тенгсизликлар бажарилади. У ҳолда

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k^{(n)} - a_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

яъни,

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a. \blacktriangleright$$

Бу теоремалардан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади.

R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик
 $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ лимитга,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

эга бўлиши учун бир йўла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$

.....

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

бўлиши зарур ва етарли.

Бу муҳим тасдиқ бўлиб, у R^m фазодаги кетма-кетликлар лимитларини ўрганишни сонлар кетма-кетликлар лимитлари-ни ўрганишга олиб келади. Сонлар кетма-кетликларнинг лимити эса 6-8-маърузаларда батафсил баён этилган.

Агар (1) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Юқоридаги келтирилган тасдиқдан фойдаланиб исботланадиган муҳим теоремани келтирамиз. Аввало R^m фазода кетма-кетликнинг фундаменталлигини таърифлаймиз.

3-таъриф. R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, $\forall n > n_0, \forall P > n_0$ лар учун

$$\rho(x^{(n)}, x^{(P)}) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x^{(n)}\}$ фундаментал кетма-кетлик дейилади.

3-теорема (Коши теоремаси). $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема 9-маърузада келтирилган 3-теорема каби исботланади.

3⁰. Ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар принципи. R^m фазода марказлари

$$a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

нуқталарда, радиуслари $r_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлган ушбу

$$B_1 = \bar{B}_{r_1}(a^{(1)}) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(1)}) \leq r_1\}$$

$$B_2 = \bar{B}_{r_2}(a^{(2)}) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(2)}) \leq r_2\}$$

.....

$$B_n = \bar{B}_{r_n}(a^{(n)}) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(n)}) \leq r_n\}$$

.....

ёпиқ шарлар кетма-кетлигини қарайлик. Агар бу ёпиқ шарлар кетма-кетлигининг ҳадлари учун қуйидаги

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

муносабат ўринли бўлса, $\{B_n\}$ ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма-кетлиги дейилади.

Айтайлик, $\{B_n\}$ R^m фазода ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма-кетлиги бўлсин.

4-теорема. Агар $n \rightarrow \infty$ да шар радиуслари r_n нолга интилса, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

бўлса, у ҳолда барча ёпиқ шарларга тегишли бўлган a нуқта ($a \in R^m$) мавжуд ва у ягона бўлади.

◀ Шар марказларидан тузилган

$$\{a^{(n)}\} \quad (a^{(n)} \in R^m, \quad n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетликни қарайлик. Унинг фундаментал кетма-кетлик бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Унда

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad n > n_0 : r_n < \varepsilon$$

бўлади. Айти пайтда, ёпиқ шарлар ичма-ич жойлашган-лигидан ихтиёрий

$$P > n > n_0$$

учун

$$\bar{B}_{r_p}(a^{(P)} \supset \bar{B}_{r_n}(a^{(n)}))$$

бўлиб,

$$\rho(a^{(n)}, a^{(P)}) \leq r_p < \varepsilon$$

бўлади.

Демак, $\{a^{(n)}\}$ фундаменталкетма-кетлик. Унда Коши теорема-сига кўра у яқинлашувчи бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a. \quad (a \in R^m)$$

Бу a нукта $\bar{B}_{r_n}(a^{(n)})$ тўпламнинг лимит нуктаси ва $\bar{B}_{r_n}(a^{(n)})$ ёпик бўлганлиги учун $a \in \bar{B}_{r_n}(a^{(n)})$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлади. Демак, a барча шарларга тегишли бўлган нукта. Фараз қилайлик, a нуктадан фарқли барча шарларга тегишли бўлган b нукта ($b \in R^m$) мавжуд бўлсин: $b \in \bar{B}_{r_n}(a^{(n)})$ $b \neq a$.

Масофанинг 3-хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, a^{(n)}) + \rho(a^{(n)}, b) \leq 2r_n.$$

Агар $n \rightarrow \infty$ да $r_n \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олсак, кейинги муносабатдан $\rho(a, b) = 0$, яъни $a = b$ бўлиши келиб чиқади. ►

Одатда, бу теорема ичма-ич жойлашган ёпик шарлар принципи дейилади.

4⁰. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано-Вейерштрасс теоремаси. R^m фазода $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу кетма-кетлик

$$x^{(n_1)}, x^{(n_2)}, \dots, x^{(n_k)}, \dots,$$

бунда,

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots; n_k \in N, \quad k = 1, 2, \dots,$$

берилган $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги дейилади. У $\{x^{(n_k)}\}$ каби белгиланади.

Равшанки, битта кетма-кетликнинг турлича қисмий кетма-кетликлари бўлади.

Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

бўлса, бу кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги $\{x^{(n_k)}\}$ ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(n_k)} = a$$

бўлади.

Бу тасдиқнинг исботи кетма-кетлик лимити таърифидан бевосита келиб чиқади.

Айтайлик, R^m фазода бирор M тўплам берилган бўлсин: $M \subset R^m$. Агар R^m фазода маркази $(0, 0, \dots, 0) \in R^m$, радиуси $r > 0$ бўлган шар

$$U^0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \rho((x_1, x_2, \dots, x_m), (0, 0, \dots, 0)) < r\}$$

топилсаки:

$$M \subset U^0$$

бўлса, M чегараланган тўплам дейилади.

Энди Больцано-Вейерштрасс теоремасини исботсиз келтирамиз.

5-теорема (Больцано-Вейерштрасс теоремаси). R^m фазода ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

5⁰. Хусусий ҳоллар. $m=1$ бўлганда $R^m = R$ бўлиб, ундаги кетма-кетлик сонлар кетма-кетлиги бўлади. Маълумки, сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити 6-8-маърузаларда батафсил ўрганилган.

$m=2$ бўлганда $R^m = R^2$ бўлиб, ундаги кетма-кетлик текислик нуқталаридан иборат

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots \quad (x_n \in R, y_n \in R, n=1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик бўлади. Бу кетма-кетликнинг лимити $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликларининг лимитлари орқали ўрганилади.

Масалан, ушбу

$$\{(-1^n), (-1)^n\}:$$

$$(-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots, ((-1)^n, (-1)^n), \dots$$

кетма-кетлик лимитга эга бўлмайди, чунки

$$x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

кетма-кетликлар лимитга эга эмас.

Машқлар

1. Агар $x^0 \in R^m$ нуқта $M \subset R^m$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, M тўплам элементларидан ташкил топган ва x^0 нуқтага яқинлашадиган

$$\{x^{(n)}\} \quad (x^{(n)} \in M, x^{(n)} \neq x^0, n=1, 2, \dots)$$

кетма-кетликларнинг мавжудлиги кўрсатилсин.

2. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \quad (x^{(n)} \in R^m, a \in R^m, n=1, 2, \dots)$$

бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги кўрсатилсин.

ГЛОССАРИЙ

Қисмий кетма-кетликлар. Больцано-Вейерштрасс

Ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар принципи.

фундаментал кетма-кетлик - R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, $\forall n > n_0, \forall P > n_0$ лар учун

$$\rho(x^{(n)}, x^{(P)}) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x^{(n)}\}$ **фундаментал кетма-кетлик** дейилади.

КЕЙС БАНКИ

R^2 fazoda quyidagi ketma-ketliklarning limiti $a(a \in R^2)$ ekanligi ta`rif yordamida isbotlansin.

$$1.1 \quad x^{(n)} = \left(\frac{13-n^2}{1+2n^2}, \frac{2n-1}{2-3n} \right); \quad a \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3} \right).$$

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар:

- Кейс муаммони ҳал қилиш мумкин бўлган асосий формула, тушунча ва тасдиқларни келтиринг (индивудиял ва кичик гуруҳларда)
- Тўпланган маълумотлардан фойдаланиб, қўйилган масалани ечинг

2-амалий машғулот

R^2 fazoda quyidagi ketma-ketliklarning limiti topilsin.

$$1.13. x^{(n)} = \left(\frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}; \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1} \right).$$

$$1.14. x^{(n)} = \left(\frac{(2n+1)!(2n+2)!}{(2n+3)!}; \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2} \right).$$

$$1.15. x^{(n)} = \left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}; \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4} \right).$$

$$1.16. x^{(n)} = \left(\frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}; \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1} \right).$$

$$1.17. x^{(n)} = \left(\frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}; \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n \right).$$

$$1.18. x^{(n)} = \left(\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}; \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4} \right).$$

$$1.19. x^{(n)} = \left(\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}; \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3} \right)$$

$$1.20. x^{(n)} = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n}, n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n) \right).$$

$$1.21. x^{(n)} = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}; \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2} \right).$$

3-мавзу: Кўп ўзгарувчили функция ва унинг лимити

3-маъруза

РЕЖА:

1⁰. Кўп ўзгарувчили функция тушунчаси.

2⁰. Кўп ўзгарувчили функция лимити (каррали лимити) таърифлари.

3⁰. Функция лимитининг мавжудлиги.

4⁰. Такрорий лимитлар.

Таянч иборалар: Кўп ўзгарувчили функция лимити (каррали лимити), такрорий лимитлар, Кўп ўзгарувчили функция тушунчаси

1⁰. Кўп ўзгарувчили функция тушунчаси. Фараз қилайлик, R^m фазода E тўплам берилган бўлсин: $E \subset R^m$.

1-таъриф. Агар E тўпламдаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктага бирор f қоидага кўра битта ҳақиқий u сон мос кўйилган бўлса, E тўпламда кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) функция берилган (аниқланган) дейилади. Уни

$$f : x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow u \text{ ёки } u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$(x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, u \in R)$$

каби белгиланади. Бунда E функциянинг берилиш (аниқланиш) тўплами, x_1, x_2, \dots, x_m лар (эркли ўзгарувчилар) функция аргументлари, u эса x_1, x_2, \dots, x_m ларнинг функцияси дейилади.

Масалан, f - ҳар бир

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M,$$

$$M = \{x \in R^m : \rho(x, 0) \leq 1\}$$

нуктага ушбу

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

қоида билан битта ҳақиқий u сонини мос кўйсин. Бу ҳолда $M \subset R^m$ тўпламда аниқланган

$$u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

функция хосил бўлади.

Айтайлик, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция (кўп ҳолларда бу функцияни $u = f(x)$ каби ёзамиз) $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E$ нуктага мос келувчи u_0 сон $u = f(x)$ функциянинг x^0 нуктадаги хусусий қиймати дейилади: $u_0 = f(x^0)$.

Берилган функциянинг барча хусусий қийматларидан иборат ушбу

$$\{u = f(x) : x \in E\} \quad (1)$$

сонлар тўплам $u = f(x)$ функция қийматлари тўплами дейилади. Агар (1) тўплам чегараланган бўлса, $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функ-ция E тўпламда чегараланган дейилади.

R^{m+1} фазодаги ушбу

$$\{(x, f(x)) : x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, f(x) \in R\}$$

тўплам кўп ўзгарувчили $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг графиги дейилади.

Фараз қилайлик, юқорида қаралаётган $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияда

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

.....

$$x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

бўлсин, бунда $\varphi_i(t)$ функция ($i = 1, 2, \dots, m$) $T \subset R^k$ тўпламда аниқланган бўлиб, $t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E$ бўлсин.

Натижада

$$f(x(t)) = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

функция ҳосил бўлади. Уни мураккаб функция дейилади.

2⁰. Кўп ўзгарувчили функция лимити (каррали лимити) таърифлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция ($x \in R^m$) $E \subset R^m$ тўпламда берилган, $x^0 \in R^m$ нуқта E нинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда R^m фазода шундай $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

кетма-кетлик топиладики:

$$1) \quad \forall n \in N \text{ да } x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0,$$

$$2) \quad n \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n)} \rightarrow x^0$$

бўлади (бундай кетма-кетликлар исталганча бўлади).

2-таъриф (Гейне). Агар

$$1) \quad \forall n \in N \text{ да } x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0;$$

$$2) \quad n \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n)} \rightarrow x^0$$

шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик учун

$$n \rightarrow \infty \text{ да } f(x^{(n)}) \rightarrow A$$

бўлса, A $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги лимити (каррали лимити) дейилади. Уни $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$ ёки

$$\begin{aligned} \lim f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= A \\ x_1 &\rightarrow x_1^0 \\ x_2 &\rightarrow x_2^0 \\ &\dots\dots\dots \\ x_m &\rightarrow x_m^0 \end{aligned}$$

каби белгиланади.

Эслатма. Агар

$$\begin{aligned} \{x^{(n)}\} & \quad (x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0, \quad n=1,2,\dots), \\ \{y^{(n)}\} & \quad (y^{(n)} \in E, \quad y^{(n)} \neq x^0, \quad n=1,2,\dots) \end{aligned}$$

кетма-кетликлар учун $n \rightarrow \infty$ да

$$x^{(n)} \rightarrow x^0, \quad y^{(n)} \rightarrow x^0$$

бўлиб,

$$f(x^{(n)}) \rightarrow A, \quad f(y^{(n)}) \rightarrow B, \quad A \neq B$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуктада лимитга эга бўлмайди.

3-таъриф (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $0 < \rho(x, x^0) < \varepsilon$ тенгсизликни қаноатланти-рувчи $\forall x \in E$ ($E \subset R^m$) да

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A сон $f(x)$ функциянинг x^0 нуктадаги лимити (каррала лимити) дейилади.

Бу таърифни қисқача қилиб қуйидагича ҳам айтса бўлади.

Агар

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}): |f(x) - A| < \varepsilon$$

бўлса, A сони $f(x)$ функциянинг x^0 нуктадаги лимити дейилади.

3⁰. Функция лимитининг мавжудлиги. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпланда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ нукта E тўпланинги лимит нуктаси бўлсин.

1-теорема (Коши). $f(x)$ функция x^0 нуктада лимитга эга бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб,

$$\forall x' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}), \quad \forall x'' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\})$$

нукталарда

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги.** Айтайлик, $f(x)$ функция x^0 нуктада A лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A.$$

Лимит таърифига кўра,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}):$$

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади, Жумладан

$$x' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}), \quad x'' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}):$$

нукталар учун

$$|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади.

Кейинги тенгсизликлардан

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики,

$$\forall x' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}), \quad \forall x'' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\})$$

нукталар учун

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

x^0 нуктага интилувчи иккита $\{x^{(n)}\}, \{y^{(n)}\}$ кетма-кетлик-ларни оламиз: $n \rightarrow \infty$ да

$$x^{(n)} \rightarrow x^0 \quad (x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0, n = 1, 2, \dots),$$

$$y^{(n)} \rightarrow x^0 \quad (y^{(n)} \in E, \quad y^{(n)} \neq x^0, n = 1, 2, \dots).$$

Бу кетма-кетликлар ҳадларидан фойдаланиб, ушбу

$$x^{(1)}, y^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, \dots, x^{(n)}, y^{(n)}, \dots$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Уни $\{z^{(n)}\}$ кетма-кетлик дейлик. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳам лимити x^0 бўлади: $n \rightarrow \infty$ да

$$z^{(n)} \rightarrow x^0 \quad (z^{(n)} \in E, \quad z^{(n)} \neq x^0, n = 1, 2, \dots),$$

Лимит таърифига биноан юқоридаги $\delta > 0$ сонга кўра шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0, \forall m > n_0$ да

$$z^{(n)} \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}),$$

$$z^{(m)} \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\})$$

бўлади.

Теореманинг шартидан

$$|f(z^{(n)}) - f(z^{(m)})| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, $\{f(z^{(n)})\}$ сонлар кетма-кетлиги фундаментал кетма-кетлик бўлади. Бинобарин, у яқинлашувчи :

$$n \rightarrow \infty \quad \text{да} \quad f(z^{(n)}) \rightarrow A.$$

Унда $n \rightarrow \infty$ да

$$f(x^{(n)}) \rightarrow A, \quad f(y^{(n)}) \rightarrow A$$

бўлиб, функция лимитининг Гейне таърифига кўра

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$$

бўлади. ►

4⁰. Такрорий лимитлар. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпланда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ шу E тўпланиннг лимит нуқтаси бўлсин.

m та x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган $f(x_1, \dots, x_m)$ функцияда x_2, x_3, \dots, x_m ўзгарувчилар тайинланса, равшанки, у битта x_1 ўзгарувчининг функциясига айланади. Айтайлик, бу функция $x_1 \rightarrow x_1^0$ да лимитга эга бўлсин :

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m).$$

Энди $\varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m)$ функцияда x_3, x_4, \dots, x_m ўзгарувчилари тайинланиб, сўнг $x_2 \rightarrow x_2^0$ лимитга ўтилса

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_m)$$

бўлиб, берилган функциянинг

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

лимити ҳосил бўлади.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$$

ўзгарувчилари мос равишда $x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_k}^0$ ларга интилгандаги лимити

$$\lim_{x_{i_k} \rightarrow x_{i_k}^0} \dots \lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳам қараш мумкин.

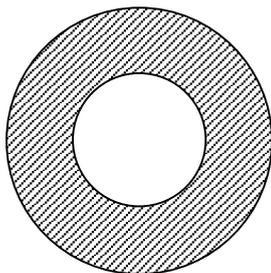
Одатда, бу лимитлар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг такрорий лимитлари дейилади. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аргументлари x_1, x_2, \dots, x_m лар мос равишда $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ сонларга турли тартибда интилганда функциянинг турли такрорий лимитлари ҳосил бўлади.

Кўп ўзгарувчили функциянинг лимити (қаррали лимити) ҳамда унинг такрорий лимитлари турлича муносабатда бўлади. Улар ҳақида, хусусий ҳолда кейинги банда баён этамиз.

5⁰. Хусусий ҳоллар. $m = 1$ бўлганда битта ўзгарувчига боғлиқ бўлган R фазодаги бирор тўпламда аниқланган $u = f(x)$ функцияга эга бўламиз. Бу функция ва унинг лимити 11- ва 12-маърузаларда ўрганилган ва тўлиқ маълумотлар келтирилган.

$m = 2$ бўлганда R^2 фазодаги (текисликдаги) бирор тўпламда аниқланган икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган $u = f(x, y)$ функцияга эга бўламиз.

Масалан,



$$u = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Бу функциянинг аниқланиш тўплами текисликнинг ушбу

$$x^2 + y^2 - 1 > 0,$$

$$4 - x^2 - y^2 > 0$$

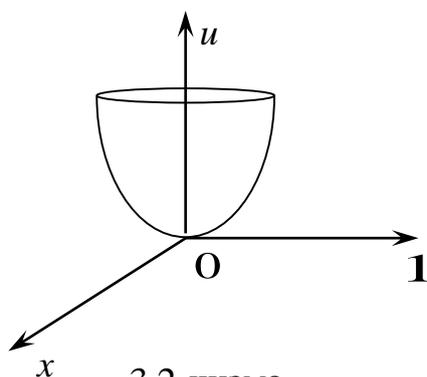
системани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами 24-чизмада тасвирланган ҳалқани ифодалайди:

Икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган $u = f(x, y)$ функциянинг графиги умуман R^3 фазода (биз яшаб турган фазода) сиртни ифодалайди.

Масалан, ушбу

$$u = x^2 + y^2$$

функциянинг графиги R^3 фазода 25-чизмада тасвирланган айланма параболоид бўлади:



3.2-чизма

Айтайлик, $f(x, y)$ функция $E \subset R^2$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқта E нинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу икки ўзгарувчили функция лимити таърифлари қуйидагича бўлади:

Агар x

- 1) $\forall_n \in N$ да $(x_n, y_n) \in E$, $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$
- 2) $n \rightarrow \infty$ да $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$

шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\{(x_n, y_n)\}$ нуқталар кетма-кетлиги учун
 $n \rightarrow \infty$ да $f(x_n, y_n) \rightarrow A$

бўлса, A функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити (каррали лимити) дейилади ва

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ ёки } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = A$$

каби белгиланади.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилсаки,
 $0 < \rho((x,y), (x_0, y_0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x,y) \in E$ да

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A сон $f(x,y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити (каррали лимити) дейилади.

Берилган функциянинг иккита такрорий лимитлари

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

бўлиши мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{агар } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ бўлса} \\ 0 & \text{, агар } x^2 + y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(x,y) \rightarrow (0,0)$ даги лимити 0 бўлиши кўрсатилсин.

◀ Коши таърифидан фойдаланиб топамиз:

$\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta = 2\varepsilon$ дейилса,

$$0 < \rho((x,y), (0,0)) < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x,y) \in R^2$ да

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{1}{2} \rho((x,y), (0,0)) < \frac{1}{2} \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0. \blacktriangleright$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада лимити мавжуд эмаслиги кўрсатилсин.

◀ Равшанки, бу функция

$$R^2 \setminus \{(0,0)\}$$

тўпланда аниқланган ва $(0,0)$ нукта шу тўпламнинг лимит нуктаси.

$$(0,0) \text{ нуктага интилувчи } \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}, \left\{ \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right) \right\}$$

кетма-кетликларни олайлик:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0,0) \quad , \quad \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right) \rightarrow (0,0).$$

$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$ ҳамда $\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right)$ нукталарда $(n=1,2,3,\dots)$ берилган функциянинг қийматлари

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \quad , \quad f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4n^2 + 1} \quad (n=1,2,\dots)$$

бўлиб,

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1 \quad , \quad f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

бўлади. Функция лимитининг Гейне таърифидан фойдаланиб, берилган функциянинг $(x, y) \rightarrow (0,0)$ да лимитга эга эмаслигини топамиз. ▶

3-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{агар } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0 & , \text{агар } x^2 + y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ да такрорий лимитлари топилсин.

◀ Берилган функциянинг такрорий лимитларини топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Демак, берилган функциянинг $(0,0)$ нуктадаги такрорий лимитлари бири-бирига тенг бўлиб, улар 0 га тенг. ▶

4-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x - y}{\sqrt{x + 3y}}, & \text{агар } x + 3y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0 & , \text{агар } x^2 + 3y = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктадаги такрорий лимитлари топилсин.

◀ Берилган функциянинг такрорий лимитлари қуйидагича бўлади:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - y}{x + 3y} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - y}{x + 3y} = -\frac{1}{3};$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x - y}{x + 3y} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x - y}{x + 3y} = 2.$$

Айни пайтда, берилган функция $(x, y) \rightarrow (0,0)$ да лимитга (каррали лимитга) эга бўлмайди, чунки

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0), \quad \left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n}\right) \rightarrow (0,0)$$

кетма-кетликлар учун

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n}\right) = \frac{6}{17} \rightarrow \frac{6}{17}$$

бўлиб, улар бир-бирига тенг эмас. ►

5-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги такрорий лимитлари топилсин.

◀ Бу функция учун

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

бўлиб,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$$

эса мавжуд бўлмайди.

Айни пайтда, $(x, y) \rightarrow (0,0)$ да берилган функциянинг лимити (каррали лимити) мавжуд бўлади, чунки

$$|f(x, y) - 0| = \left| x + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \quad (x \neq 0)$$

бўлиб,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

бўлади. ►

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция R^2 фазодаги

$$E = \{(x, y) \in R^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

тўпламда берилган бўлсин.

2-теорема. Агар

1) $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити (каррали лимити) мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

2) ҳар бир тайинланган x да

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (2)$$

мавжуд бўлса, y ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$$

бўлади.

◀ Айтайлик,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу

$$\{(x, y) \in R^2 : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\} \subset E$$

тўпламнинг барча (x, y) нуқталари учун

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Кейинги тенгсизликдан, $y \rightarrow y_0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$|\varphi(x) - A| \leq \varepsilon.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A. \quad (3)$$

(2) ва (3) муносабатлардан

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

3-теорема. Агар

1) $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити (каррали лимити) мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

2) ҳар бир тайинланган y да

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \phi(y)$$

мавжуд бўлса, y ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$$

бўлади.

Натижа. Агар $f(x, y)$ функция учун бир вақтда юқори-даги 2,3-теоремаларнинг шартлари бажарилса, y ҳолда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

бўлади.

Машқлар

1. Функция лимитининг Гейне ва Коши таърифларининг эквивалентлиги кўрсатилсин.

2. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари келтирилсин.

3. Ушбу

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$$

лимит таърифлансин.

4. Ушбу

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2, y^2) e^{-(x+y)}$$

лимит ҳисоблансин.

3-амалий машғулот

3-масала. Каррали лимитлар ҳисоблансин.

$$3.1 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$3.2 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}.$$

$$3.3 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$3.4 \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}.$$

$$3.5 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

$$3.6 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

$$3.7 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$3.8 \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}.$$

$$3.9 \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$3.11 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^4 + y^4}}}{x^4 + y^4}$$

$$3.13 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$$3.15 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$3.17 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x + y) e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$3.19 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{|x|}$$

$$3.21 \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}}$$

$$3.10 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$3.12 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$$3.14 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^4 y^2}}{x^2 + y^2}$$

$$3.16 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$3.18 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{|x|^3 + |y|^3}$$

$$3.20 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

4-масала. $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ va $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ такрорий лимитлар

ҳисоблансин.

$$4.1 f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}; x_0 = \infty, y_0 = \infty.$$

$$4.2 f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}; x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.3 f(x, y) = \log_x(x + y); x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$4.4 f(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{2x + 3y}; x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.5 f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}; x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.6 f(x, y) = \frac{\sin|x| - \sin|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}; x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.7 f(x, y) = \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 2y}{6x + 3y}; x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.8 f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} x_0 = y_0 = \infty.$$

$$4.9 f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}; x_0 = +\infty, y_0 = +0.$$

$$4.10 f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}; x_0 = 0, y_0 = \infty.$$

$$4.11 f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). x_0 = y_0 = 0 \end{cases}$$

$$4.12 f(x, y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x + y}\right)^{x+y}, x + y \neq 0 \\ 1, x + y = 0. x_0 = y_0 = \infty \end{cases}$$

$$4.13 f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, x \neq -y \\ 0, x = -y. x_0 = y_0 = 0 \end{cases}$$

$$4.14 f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.15 f(x, y) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}, x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.16 f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{|x| - |y|}, |x| \neq |y| \\ 0, |x| = |y|, x_0 = y_0 = 0 \end{cases}$$

$$4.17 \quad f(x, y) = \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$4.18 \quad f(x, y) = \frac{5 - \sqrt{25 - xy}}{xy}; x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.19 \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2}; x_0 = y_0 = 0.$$

$$4.20 \quad f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{y}; x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$4.21 \quad f(x, y) = \sin \frac{\pi(x + y)}{2x + 3y}; x_0 = y_0 = \infty.$$

4-мавзу: Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги.

4-маъруза

РЕЖА:

1⁰. Кўп ўзгарувчили функция узлуксизлиги тушунчаси.

2⁰. Узлуксиз функцияларнинг содда хоссалари.

3⁰. Тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хосса-лари.

Таянч иборалар: функция узлуксизлиги тушунчаси, Тўпламда узлуксиз бўлган функциялар,

1⁰. Кўп ўзгарувчили функция узлуксизлиги тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция R^m фазодаги E тўпламда берилган бўлиб, $x^0 \in E$ нукта E тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин.

1-таъриф. Агар

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x^0) \quad (1)$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуктада узлуксиз дейилади.

2-таъриф (Гейне). Агар

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ да $x^{(n)} \in E$;

2) $n \rightarrow \infty$ да $x^{(n)} \rightarrow x^0$

шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик учун

$$n \rightarrow \infty \text{ да } f(x^{(n)}) \rightarrow f(x^0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуктада узлуксиз дейилади.

3-таъриф (Коши). Агар

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E \cap U_\delta(x^0), |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуктада узлуксиз дейилади.

Умуман, $u = f(x)$ функциянинг $x^0 \in E$ нуктадаги узлуксизлиги қуйидагини англатади:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E \cap U_\delta(x^0), f(x) \in U_\varepsilon(f(x^0)).$$

Одатда, ушбу

$$\Delta u = f(x) - f(x^0) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0))$$

айирма, $u = f(x)$ функциянинг x^0 нуктадаги орттирмаси (тўлик орттирмаси) дейилади.

Агар

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \dots, \Delta x_m = x_m - x_m^0$$

дейилса, унда

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлади. Юқоридаги (1) муносабатдан фойдаланиб қуйидаги тасдиқни айта оламиз:

$f(x)$ функциянинг x^0 нуктада узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta u = 0, \text{ яъни } \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta u = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Юқоридаги таърифлар эквивалент таърифлар бўлади.

Агар (1) муносабат бажарилмаса $f(x)$ функция x^0 нукта-да узилишга эга дейилади.

4-таъриф. Агар $f(x)$ функция E тўпланинг ҳар бир нуктасида узлуксиз бўлса, функция шу E тўпланда узлуксиз дейилади.

Кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг нуқтадаги тўлиқ орттормаси тушунчаси билан бир қаторда унинг хусусий орттормалари тушунчалари ҳам киритилади.

Ушбу

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$

$$\Delta_{x_2} u = f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$

.....

$$\Delta_{x_m} u = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$

айирмалар мос равишда $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчилар бўйича хусусий орттормалари дейилади.

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \Delta_{x_1} u = 0, \\ \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \Delta_{x_2} u = 0, \\ \dots \\ \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \Delta_{x_m} u = 0 \end{cases}$$

бўлади. Бирок, $\Delta x_k \rightarrow 0$ да $\Delta_{x_k} u \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) бўлишидан

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta u = 0$$

бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди (бунга мисол кейинги пунктда келтирилади).

4-амалий машғулот

Қуйидаги функцияларни берилган нуқталарда ҳар бир ўзгарувчи бўйича хусусий ва иккала ўзгарувчи бўйича биргаликда узлуксизликка текширинг.

$$5.13 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A(1;2).$$

$$5.14 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A(10^{-4}; 10^{-5}).$$

$$5.15 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 0, & x + y = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A(-1; -1).$$

$$5.16 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A(0;1).$$

$$5.17 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, x + y = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right).$$

$$5.18 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, x - y \neq 0, \\ 0, x - y = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right).$$

$$5.19 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0, (x, y) = (0,0). \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A(1;0).$$

$$5.20 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A(1;0).$$

$$5.21 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad 0(0,0) \text{ va } A(1;1).$$

5-мавзу. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

5-маъруза:

РЕЖА:

1. Узлуксиз функцияларнинг содда хоссалари.

2. Тўпланда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари

Таянч иборалар: Узлуксиз бўлган функциялар, тўпланда узлуксизлик, $c = const.$ -ўзгармас

1⁰. Узлуксиз функцияларнинг содда хоссалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $E \subset R^m$ тўпланда берилган бўлиб, $x^0 \in E$ нуктада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$c \cdot f(x), \quad f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x^0) \neq 0)$$

функциялар ҳам x^0 нуктада узлуксиз бўлади, бунда $c = const.$

Бу тасдиқнинг исботи 15-маърузадаги мос тасдиқнинг исботи кабидир.

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)| < \delta, \text{ яъни } |x_i - x_i^0| < \delta$$

бўлади. (3) ва (4) муносабатлардан $\forall t \in M \cap U_\delta(t^0)$ учун

$$|f(x(t)) - f(x(t_0))| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, мураккаб $f(x(t))$ функция t^0 нуқтада узлуксиз. ►

2⁰. Тўпلامда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари. Энди тўпلامда узлуксиз бўлган функцияларнинг хосса-ларини келтирамиз.

2-теорема. Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпلامда узлуксиз бўлса, функция E да чегараланган бўлади.

◀ Айтайлик, функция шу E тўпلامда чегараланмаган бўлсин. Унда

$$\forall n \in N, \exists x^{(n)} \in E : |f(x^{(n)})| \geq n \quad (n=1,2,\dots)$$

бўлади. Равшпнки, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик чегараланган. Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра яқинлашувчи

$$\{x^{(n_k)}\} \quad (x^{(n_k)} \in E, k=1,2,\dots)$$

қисмий кетма-кетлик мавжуд:

$$k \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n_k)} \rightarrow x^0 \text{ ва } x^0 \in E.$$

Айни пайтда, $f(x)$ функциянинг E да узлуксизлигидан

$$k \rightarrow \infty \text{ да } f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0) .$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$k \rightarrow \infty \text{ да } |f(x^{(n_k)})| \geq n_k \rightarrow +\infty$$

дейилишига зид. Зиддият $f(x)$ функциянинг E да чегаралан-маган дейилишидан келиб чиқди. Демак, $f(x)$ функция E да чегараланган. ►

3-теорема. Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпلامда узлуксиз бўлса, функция шу тўпلامда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни

$$\exists x^{(*)} \in E, \quad \sup_{x \in E} \{f(x)\} = f(x^{(*)}),$$

$$\exists x^{(**)} \in E, \quad \inf_{x \in E} \{f(x)\} = f(x^{(**)})$$

бўлади.

◀ Юқоридаги теоремага кўра $f(x)$ функция E тўпلامда чегараланган бўлади. Унда бу функция аниқ чегараларга эга:

$$\sup_{x \in E} \{f(x)\} = a, \quad \inf_{x \in E} \{f(x)\} = b .$$

Аниқ юқори чегара таърифига кўра

$$\forall n \in N, \exists x^{(n)} \in E : a - \frac{1}{n} < f(x^{(n)}) \leq a \quad (n=1,2,\dots)$$

бўлади. Равшанки, $\{x^{(n)}\}$ чегараланган кетма-кетлик бўлиб, ундан $\{x^{(n_k)}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинки,

$$k \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n_k)} \rightarrow x^{(*)} \text{ ва } x^{(*)} \in E \quad (5)$$

бўлади. Берилган функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиб топмиз:

$$k \rightarrow \infty \text{ да } f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^{(*)}).$$

Айни пайтда,

$$\forall n \in N \text{ да } a - \frac{1}{n_k} < f(x^{(n_k)}) \leq a$$

бўлиб, ундан $k \rightarrow \infty$ да

$$f(x^{(n_k)}) \rightarrow a \quad (6)$$

бўлиши келиб чиқади.

(5) ва (6) муносабатларадан

$$f(x^{(*)}) = a = \sup\{f(x)\} \quad (x^* \in E)$$

бўлишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш

$$f(x^{(**)}) = b = \inf\{f(x)\} \quad (x^{(**)} \in E)$$

бўлиши исботланади. ►

4-теорема. Фараз қилайлик. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция боғламли

$E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

Агар

1) $f(x)$ функция E да узлуксиз,

2) $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in E$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in E$

нуқталарда турли ишорали қийматларга эга

$$(f(a) > 0, f(b) < 0 \text{ ёки } f(a) < 0, f(b) > 0)$$

бўлса, у ҳолда шундай $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in E$ нуқта топиладики

$$f(c) = 0$$

бўлади.

◀ Айтайлик, $f(x)$ функция боғламли $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлиб,

$$f(a) < 0, f(b) > 0$$

бўлсин.

E боғламли тўплам. Бинобарин, a ва b нуқталарни бирлаштирувчи ва шу тўпламга тегишли синиқ чизиқ топилади. Агар бу синиқ чизиқ учларини ифодаловчи нуқталарнинг бирида $f(x)$ функция нолга айланса теорема исботланади.

Агар синик чизик учларида $f(x)$ функция нолга айланмаса, у ҳолда синик чизикнинг шундай кесмаси топиладики, унинг бир учи $a' = (a_1', a_2', \dots, a_m')$ да $f(a') < 0$, иккинчи учи $b' = (b_1', b_2', \dots, b_m')$ да $f(b') > 0$ бўлади.

Энди $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ни шу кесма

$$k = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \begin{aligned} x_1 &= a_1' + t(b_1' - a_1'), \\ x_2 &= a_2' + t(b_2' - a_2'), \dots, x_m = a_m' + t(b_m' - a_m') \end{aligned} \right\}$$

($0 \leq t \leq 1$) да қараймиз. Унда

$$f(a_1' + t(b_1' - a_1'), a_2' + t(b_2' - a_2'), \dots, a_m' + t(b_m' - a_m')) = F(t)$$

бўлиб, битта t ўзгарувчига боғлиқ функция ҳосил бўлади. Бу функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз ва

$$F(0) = f(a') < 0, \quad F(1) = f(b') > 0$$

бўлади. Унда 16-маърузада келтирилган теоремага кўра, шундай $t_0 \in (0, 1)$ нукта топиладики,

$$F(t_0) = 0$$

яъни

$$f(a_1' + t_0(b_1' - a_1'), a_2' + t_0(b_2' - a_2'), \dots, a_m' + t_0(b_m' - a_m')) = 0$$

бўлади. Агар

$$c_1 = a_1' + t_0(b_1' - a_1'), c_2 = a_2' + t_0(b_2' - a_2'), \dots, c_m = a_m' + t_0(b_m' - a_m')$$

дейилса, унда $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in E$ нуктада

$$f(c) = 0$$

бўлади. ►

5-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция боғламли $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Агар

1) $f(x)$ функция E да узлуксиз,

2) $a \in E, b \in E$ нукталарда $f(a) = A, f(b) = B$

қийматларга эга ва $A \neq B$ бўлса, у ҳолда A билан B орасида ҳар қандай C сон олинса ҳам, шундай $c \in E$ нукта топиладики,

$$f(c) = C$$

бўлади.

◀ Бу теорема юқоридаги 4-теорема каби исботланади. ►

5-амалий машғулот

$f(x, y)$ funksiyani M to'plamda chegaralanganlikka tekshiring.

6.1 $f(x, y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 25\}$.

6.2 $f(x, y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 > 25\}$.

6.3 $f(x, y) = \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$, $M = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

6.4 $f(x, y) = \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{xy}$, $M = \{(x, y) \in R^2, xy \neq 0\}$.

6.5 $f(x, y) = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{xy}$, $M = \{(x, y) \in R^2, xy \neq 0\}$.

6.6 $f(x, y) = \frac{\ln x - \ln y}{x - y}$, $M = \{(x, y) \in R^2, x \neq y\}$.

Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan to'plamda chegaralanganligini isbotlang, uning aniq chegaralarini toping va funksiya shu qiymatlarga erishish-erishmasligini aniqlang.

6.6 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $M = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

$$6.7 \quad f(x, y) = \frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

$$6.8 \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, x^4 + y^4 \neq 0\}.$$

$$6.9 \quad f(x, y) = xy e^{-xy}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$6.10 \quad f(x, y, z) = \frac{4(x^2 + y^2) + 2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad M = \{(x, y, z) \in R^3, x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\}.$$

6-МАВЗУ: Кўп ўзгарувчи функциянинг узлуксизлиги. Кантор теоремаси.

РЕЖА:

1⁰ Функциянинг текис узлуксизлиги.

2⁰ Кантор теоремаси.

Таянч иборалар: Функциянинг текис узлуксизлиги, тўпламидаги тебраниш,

1⁰ Функциянинг текис узлуксизлиги.

Айтайлик, $f(x)$ функция $E \subset R^m$ тўпланда берилган бўлсин.

5.1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки,

$$\rho(x', x'') < \delta$$

тенгсизликни каноатлантирувчи ихтиёрий $x' \in E, x'' \in E$ учун

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция E тўпланда текис узлуксиз дейилади.

Агар $f(x)$ функция E тўпланда текис узлуксиз бўлса, у шу тўпланда узлуксиз бўлади.

◀ Ҳақиқатдан ҳам, юқоридаги таърифда x'' нуқта сифатида $x^0 \in E$ олинса, функциянинг x^0 нуқтада узлуксиз-лиги, бинобарин E тўпланда узлуксизлиги келиб чиқади. ▶

$f(x)$ функциянинг $E \subset R^m$ тўпламда текис узлуксиз эмаслиги куйидагича:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x' \in E, \exists x'' \in E, \rho(x', x'') < \delta: |f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon_0$$

бўлади.

6-теорема. (Кантор теоремаси.). Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.

◀Фараз қилайлик, $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлиб, у шу тўпламда текис узлуксиз бўлмасин. Унда бирор $\varepsilon_0 > 0$ сон ва $\forall n \in N$ учун E тўпламда

$$\rho(x^{(n)}, y^{(n)}) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай

$$x^{(n)} \in E, \quad y^{(n)} \in E$$

нуқталар топиладики,

$$|f(x^{(n)}) - f(y^{(n)})| \geq \varepsilon_0$$

бўлади. Равшанки,

$$\{x^{(n)}\} \quad (x^{(n)} \in E, n = 1, 2, 3, \dots)$$

кетма-кетлик чегараланган. Ундан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин:

$$k \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n_k)} \rightarrow x^0 \text{ ва } x^0 \in E.$$

Масофа хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(y^{(n_k)}, x^0) \leq \rho(y^{(n_k)}, x^{(n_k)}) + \rho(x^{(n_k)}, x^0) < \frac{1}{n_k} + \rho(x^{(n_k)}, x^0).$$

Кейинги муносабатдан, $k \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиш билан

$$y^{(n_k)} \rightarrow x^0$$

бўлишини топамиз. $f(x)$ функция E тўпламда, жумладан $x^0 \in E$ нуқтада узлуксиз. Унда $k \rightarrow \infty$ да

$$f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0), \quad f(y^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$$

бўлиб, ундан

$$f(x^{(n_k)}) - f(y^{(n_k)}) \rightarrow 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$|f(x^{(n_k)}) - f(y^{(n_k)})| \geq \varepsilon_0$$

деб қилинган фаразга зиддир. Демак, $f(x)$ функция E тўпламда текис узлуксиз. ►

Айтайлик, R^m фазода бирор E тўплам берилган бўлсин: $E \subset R^m$. Ушбу

$$\alpha = \sup_{x' \in E, x'' \in E} \rho(x', x'')$$

миқдор E тўпламнинг диаметри дейилади.

6-таъриф. $f(x)$ функция $E \subset R^m$ тўпланда аниқланган бўлсин. Унда

$$\omega(f, E) = \sup_{x' \in E, x'' \in E} \{ |f(x') - f(x'')| \}$$

сон $f(x)$ функциянинг E тўпламидаги тебраниши дейилади.

Натижа. $f(x)$ функция чегараланган ёпик $E \subset R^m$ тўпланда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, E тўпламнинг диаметри δ дан кичик бўлган E_k тўпламларга шундай ажратиш мумкинки,

$$\bigcup_k E_k = E, E_k \cap E_i = \emptyset \quad (k \neq i),$$

хар бир E_k да

$$\omega(f; E_k) \leq \varepsilon$$

бўлади.

◀Натижанинг шартидан $f(x)$ функциянинг E тўпланда текис узлуксизлиги келиб чиқади. Унда таърифга биноан $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $\rho(x', x'') < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрый $x' \in E, x'' \in E$ нуқталарда

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

бўлади.

6-амалий машғулот

$f(x, y)$ функциянинг M тўпланда текис узлуксиз бўлиши таъриф ёрдамида исботлансин ($\delta = \delta(\varepsilon) - ?$).

6.11 $f(x, y) = 2x + 3y + 5, M = R^2.$

6.12 $f(x, y) = x^2 + y^2, M = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 < 4\}.$

6.13 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, M = R^2.$

6.14 $f(x, y) = x - 2y + 3, M = R^2.$

Қуйидаги функцияларни кўрсатилган тўпланда текис узлуксизликка текширинг.

$$6.6 \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

$$6.7 \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, 0 < x^2 \leq 1\}.$$

$$6.8 \quad f(x, y) = x \cdot \sin \frac{1}{y}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

$$6.9 \quad f(x, y) = xy \sin \frac{1}{y}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

$$6.10 \quad f(x, y) = y \cdot \cos \frac{1}{x}, \quad M = \{(x, y) \in R^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

6.21 $f(x, y) = x^3 - y^3$ funksiyaning $M = \{(x, y) \in R^2, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ to'plamda tekis uzluksiz ekanligi ta'rif yordamida isbotlansin.

7-мавзу. Кўп ўзгарувчи функциянинг дифференциалланувчилиги.

Йўналиш бўйича ҳосила

7-маъруза:

РЕЖА:

1. Функциянинг хусусий ҳосилалари тушунчаси
2. Кўп ўзгарувчи функциянинг дифференциал-ланувчилиги.
3. Йўналиш бўйича ҳосила

Таянч иборалар: хусусий ҳосила, функциянинг дифференциалланувчилиги

1⁰. Функциянинг хусусий ҳосилалари тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб,

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E, \quad (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E \quad (\Delta x_1 > 0)$$

бўлсин. Бу функциянинг x^0 нуқтадаги x_1 ўзгарувчи бўйича хусусий ортирмаси

$$\Delta_{x_1} f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

Δx_1 га боғлиқ бўлади.

1-таъриф. Ушбу

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция-нинг $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи дейилади. Уни

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \text{ ёки } f'_{x_1}(x^0)$$

каби белгиланади:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} &= f'_{x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1} = \\ &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1}. \end{aligned}$$

Берилган функциянинг бу хусусий ҳосиласини қуйидагича

$$f'_{x_1}(x^0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

таърифласа ҳам бўлади.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бошқа x_2, x_3, \dots, x_m ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилалари таърифланади:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_2} f(x^0)}{\Delta x_2} = \\ &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_2}, \dots \\ \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} &= \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_m} f(x^0)}{\Delta x_m} = \\ &= \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_m}. \quad (\Delta x_k \underset{<}{>} 0, k = 2, 3, \dots, m) \end{aligned}$$

Юқорида келтирилган таърифлардан кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласи каби эканлиги кўринади. Демак, кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилаларини топишда маълум жадвал ва қоидалардан фойдаланиш мумкин. Жумладан, агар

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad , \quad g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

функциялар $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x \in E$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда:

$$1) \forall c \in R: \quad \frac{\partial (c f(x))}{\partial x_k} = c \frac{\partial f(x)}{\partial x_k};$$

$$2) \frac{\partial(f(x)+g(x))}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_k};$$

$$3) \frac{\partial(f(x) \cdot g(x))}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} g(x) + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_k};$$

$$4) \frac{\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\partial x_k} = g^{-2}(x) \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} g(x) - f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} \right)$$

$$(g(x) \neq 0), \quad k=1,2,\dots,m$$

бўлади.

2⁰. Кўп ўзгарувчи функциянинг дифференциал-ланувчилиги.

Зарурий шарт. Айтайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб,

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E, \quad (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in E$$

бўлсин. Маълумки, берилган функциянинг x^0 нуктадаги тўла орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлиб, у $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлади.

2-таъриф. Агар $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмаларга боғлиқ бўлмаган шундай A_1, A_2, \dots, A_m сонлари топилиб, функциянинг x^0 нуктадаги тўлиқ орттирмаси ушбу

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (1)$$

кўринишда ифодаланса, $f(x)$ функция x^0 нуктада дифференциалланувчи дейилади, бунда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ лар $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да чексиз кичик микдорлар.

Агар $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ҳамда $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нукта-лар орасидаги масофа

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$$

учун, $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho)$$

бўлишини эътиборга олсак, (1) муносабат ушбу

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (2)$$

кўринишга келади.

Одатда, (1) ва (2) муносабатлар $f(x)$ функциянинг x^0 нуктада дифференциалланувчи шarti дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

функциянинг $\forall (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиши кўрсатилсин.

◀ Берилган функциянинг $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги тўлиқ орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) &= (x_1^0 + \Delta x_1)^2 + (x_2^0 + \Delta x_2)^2 + \dots + (x_m^0 + \Delta x_m)^2 - \\ &- (x_1^{0^2} + x_2^{0^2} + \dots + x_m^{0^2}) = 2x_1^0 \Delta x_1 + 2x_2^0 \Delta x_2 + \dots + \\ &+ 2x_m^0 \Delta x_m + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2. \end{aligned}$$

Агар

$$\begin{aligned} A_1 &= 2x_1^0, A_2 = 2x_2^0, \dots, A_m = 2x_m^0, \\ \alpha_1 &= \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2, \dots, \alpha_m = \Delta x_m \end{aligned}$$

дейилса, унда

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

бўлади. Демак, берилган функция $\forall x^0 \in R^m$ нуқтада дифференциалланувчи. ▶

Агар $f(x)$ функция $E \subset R^m$ тўпламининг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, функция E тўпланда дифференциалланувчи дейилади.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция $x^0 \in E \subset R^m$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

◀ Шартга кўра $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи. Демак, функциянинг шу нуқтадаги тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

бўлади. Бу тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \dots \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f(x^0) = 0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз. ▶

2-теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга ва

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1, f'_{x_2}(x^0) = A_2, \dots, f'_{x_m}(x^0) = A_m$$

бўлади.

◀ Шартга кўра $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи. Бинобарин, (1) шарт бажарилади. Унда

$$\Delta x_1 \neq 0, \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_m = 0$$

деб олинса, куйидаги

$$\Delta_{x_1} f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (A_1 + \alpha_1) = A_1.$$

Демак,

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функциянинг x^0 нуктада $f'_{x_2}(x^0), f'_{x_3}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ хусусий ҳосилаларининг мавжудлиги ҳамда

$$f'_{x_2}(x^0) = A_2, f'_{x_3}(x^0) = A_3, \dots, f'_{x_m}(x^0) = A_m$$

бўлиши кўрсатилади. ►

Бу теоремадан x^0 нуктада дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг орттирмаси учун

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \Delta x_m + o(\rho)$$

бўлиши келиб чиқади.

Эслатма. $f(x)$ функциянинг бирор x^0 нуктада барча хусусий ҳосилалари

$$f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), f'_{x_3}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$$

нинг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуктада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. (бунга мисол кейинги пунктда келтирилади).

Юқорида келтирилган теорема ва эслатмадан $f(x)$ функциянинг x^0 нуктада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиш функциянинг шу нуктада дифференциалланувчи бўлишининг зарурий шарти эканлиги келиб чиқади.

3⁰. Функция дифференциалланувчилигининг етарли шарти. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $E \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлиб, $U_\delta(x^0) \subset E$ бўлсин ($\delta > 0$).

3-теорема. Агар $f(x)$ функция $U_\delta(x^0)$ да барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар x^0 нуктада узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуктада дифференциалланувчи бўлади.

◀ Ушбу

$$(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in U_\delta(x^0).$$

нуктани олиб, берилган функциянинг $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктадаги тўлик орттирмасини қараймиз:

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0).$$

Бу орттирмани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) = & \left[f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \right] + \\ & + \left[f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \right] + \\ & + \dots + \left[f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) = \\ = f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \cdot \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \cdot \Delta x_1, \\ f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) = \\ = f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \cdot \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \cdot \Delta x_2; \\ \dots \dots \dots \\ f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \\ = f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) \cdot \Delta x_m. \\ (0 < \theta_k < 1, k=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (4)$$

Шартга кўра $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилалар $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада узлуксиз. Унда

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) = f'_{x_1}(x^0) + \alpha_1, \\ f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) = f'_{x_2}(x^0) + \alpha_2, \\ \dots \dots \dots \\ f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) = f'_{x_m}(x^0) + \alpha_m, \end{aligned} \quad (5)$$

бўлади. Бунда

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0 \quad \text{да} \quad \alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0.$$

Юқоридаги (3), (4) ва (5) муносабатлардан

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \Delta x_m + \\ + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x)$ функция x^0 нуктада дифференциалланувчи. ►

Бу теорема $f(x)$ функциянинг x^0 нуктада дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини ифодалайди.

Ўрта қиймат ҳақида теорема. Йўналиш бўйича ҳосила

1⁰. Ўрта қиймат ҳақида теорема. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Бу E тўпламда шундай

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

нуқталарни қараймизки, бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси E тўпламга тегишли бўлсин.

Равшанки, бу кесма ушбу

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, x_m = a_m + t(b_m - a_m), \quad (0 \leq t \leq 1)\}$$

нуқталар тўплами билан ифодаланади: $K \subset E$.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция K кесманинг a ва b нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда K кесмада шундай $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ нуқта топиладики,

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m) \quad (1)$$

бўлади.

◀ $f(x)$ функция $K \subset E$ кесмада қуйидаги

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

кўринишда бўлади. Бу t ўзгарувчининг функциясини $F(t)$ билан белгилайлик:

$$F(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)).$$

Равшанки, $F(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $(0, 1)$ да

$$F'(t) = f'_{x_1} \cdot (b_1 - a_1) + f'_{x_2} \cdot (b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m} \cdot (b_m - a_m)$$

ҳосилага эга бўлади. Бунда $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларнинг

$$(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m))$$

нуқтадаги қийматлари олинган.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$F(1) - F(0) = F'(t_0). \quad (0 < t_0 < 1) \quad (2)$$

Агар

$$F(0) = f(a), \quad F(1) = f(b) \quad (3)$$

ҳамда

$$F'(t_0) = f'_{x_1}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - a_m)) \cdot \\ \cdot (b_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - a_m)) \cdot \\ \cdot (b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a_1 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - a_m)) \cdot (b_m - a_m) \quad (4)$$

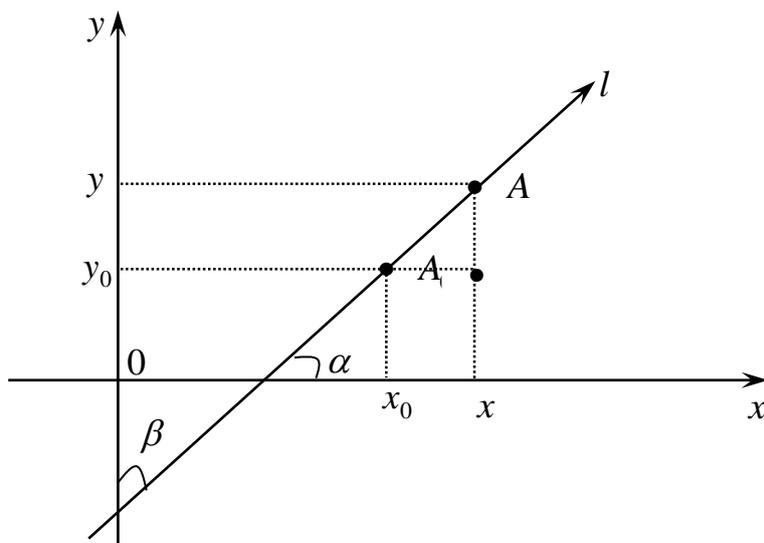
бўлишини эътиборга олсак, сўнг ушбу

бўлиб, бу масофа $\overline{A_0A}$ векторнинг йўналиши l нинг йўналиши билан бир хил бўлса, мусбат ишора билан акс ҳолда манфий ишора билан олинади.

Агар l нинг мусбат йўналиши билан OX ва OY координата ўқларининг мусбат йўналишилари орасидаги бурчакни мос равишда α ва β дейилса, (26-чизма) унда

$$\frac{x - x_0}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{y - y_0}{\rho} = \cos \beta$$

бўлиши топилади.



26-чизма

1-таъриф. Агар

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x, y)$ функциянинг $A_0 = (x_0, y_0)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосила дейилади. Уни

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} \text{ ёки } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho}.$$

1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктада барча йўналишлар бўйича ҳосилаларининг мавжудлиги кўрсатилган.

◀ Айтайлик, $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ бўлсин. Бу ҳолда

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

бўлиб,

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 \operatorname{tg} \alpha} = x \sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\rho((x, y), (0,0)) = \sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = |x| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

бўлади. Унда берилган функциянинг $(0,0)$ нуктадаги $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ бўлган ихтиёрий йўналиш бўйича ҳосиласи, таърифга биноан

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha} \cdot x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot |x|}$$

бўлади.

Агар $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлса, унда $x > 0$, $|x| = x$ бўлиб,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l} = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

бўлади.

Агар $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бўлса, унда $x < 0$, $|x| = -x$ бўлиб,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l} = -\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

бўлади.

Айтайлик, $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ бўлсин. Бу ҳолда $x = 0$, $f(0, y) = 0$ бўлиб, бу йўналишлар бўйича ҳосила

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l} = 0$$

бўлади. ▶

1-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $A_0 = (x_0, y_0)$ нуктада дифференциаланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуктада ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосиллага эга ва

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta \quad (5)$$

бўлади.

◀ Айтайлик, $f(x, y)$ функция $A_0 = (x_0, y_0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$f(A) - f(A_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

ортгирма учун

$$f(A) - f(A_0) = \frac{\partial f(A_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f(A_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) + o(\rho)$$

бўлади, бунда

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини ρ га бўламиз:

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho} = \frac{\partial f(A_0)}{\partial x} \cdot \frac{x - x_0}{\rho} + \frac{\partial f(A_0)}{\partial y} \cdot \frac{y - y_0}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho}.$$

Маълумки,

$$\frac{x - x_0}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{y - y_0}{\rho} = \cos \beta.$$

Шуни эътиборга олиб, $\rho \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho} = \frac{\partial f(A_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(A_0)}{\partial y} \cos \beta.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta. \blacktriangleright$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

функциянинг $(1, 1)$ нуктада $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j}$ вектор йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин.

◀ Равшанки, бу ҳолда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = 2, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 2, \end{aligned}$$

бўлади. (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial l} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}. \blacktriangleright$$

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция очик $E \subset R^2$ тўпламда дифференциалланувчи бўлсин. Бинобарин, функция E тўпламининг ҳар бир $(x, y) \in E$ нуктасида

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Координаталари шу хусусий ҳосилалардан иборат бўлган векторни тузамиз:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \vec{j} \quad (6)$$

бунда, \vec{i} ва \vec{j} координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар. (6) вектор $f(x, y)$ функциянинг градиенти дейилади ва $grad f$ каби белгиланади:

$$grad f = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \vec{j}.$$

Демак, $grad f$ E тўпламнинг ҳар бир (x, y) нуқтасига битта векторни мос кўювчи қоида, бошқача айтганда икки ўзгарувчилик вектор функция бўлади.

$$f(x, y) \text{ функциянинг } \vec{e} = (\cos\alpha \cos\beta) \text{ вектор йўналиши бўйича } \frac{\partial f(x, y)}{\partial l}$$

ҳосиласини унинг градиенти орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $grad f$ ва \vec{e} векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$$\vec{e} grad f = \cos\alpha \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (7)$$

бўлиб, у (5) формулага кўра $\frac{\partial f(x, y)}{\partial l}$ га тенг бўлади:

$$\vec{e} grad f = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Айни пайтда, \vec{e} ва $grad f$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси шу вектор узунликлари кўпайтмасини улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтирилганига тенг бўлади:

$$\vec{e} grad f = |grad f| \cdot \left| \vec{e} \right| \cdot \cos\left(\vec{e}, grad f\right) \quad (8)$$

Равшанки, $\left| \vec{e} \right| = 1$.

(7) ва (8) муносабатлардан

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial l} = |grad f(x, y)| \cdot \cos\left(\vec{e}, grad f(x, y)\right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги тенгликдан кўринадики, \vec{e} ҳамда $grad f(x, y)$ векторлар параллел бўлганда $\frac{\partial f(x, y)}{\partial l}$ нинг қиймати энг катта ва у

$$|\operatorname{grad} f(x, y)| = \sqrt{f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$$

га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функциянинг градиенти $\operatorname{grad} f$ функциянинг (x, y) нуктадаги энг тез ўсадиган томонга йўналган бўлиб, унинг узунлиги шу йўналиш бўйича ўсиш тезлигига тенг экан.

3-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

функциянинг $(1, 1)$ нуктада энг тез ўсадиган йўналиши аниқлансин ва шу йўналиш бўйича ўсиш тезлиги топилсин.

◀ Равшанки,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial(x^2 + 2y^2)}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} &= 2; \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial(x^2 + 2y^2)}{\partial y} = 4y, & \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} &= 4; \end{aligned}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(1, 1) &= 2\vec{i} + 4\vec{j}, \\ |\operatorname{grad} f(1, 1)| &= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

бўлади. ▶

Машқлар

1. Айтайлик, $f(x)$ функция боғламли $E \subset R^m$ тўпланда дифференциалланувчи бўлсин. Агар E тўпламнинг ҳар бир $x \in E \subset R^m$ нуктасида $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлса, функция E тўпланда ўзгармас бўлиши исботлансин.

2. Агар $f(x, y)$ функция $(0, 0)$ нуктада барча йўналишлар бўйича ҳосиллага эга бўлса, $f(x, y)$ функция $(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи бўладими?

7-амалий машғулот

1-Ta`rif. Агар A нукта ℓ то`g`ri chiziq bo`ylab A_0 нуктага intilganda ushbu

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)}$$

limit mavjud bo`lsa, uning qiymatiga $f(x, y) = f(A)$ funksiyaning $A_0 = (x_0, y_0)$ nuqtadagi ℓ yo`nalish bo`yicha hosilasi deyiladi va $\frac{\partial f(A_0)}{\partial \ell}$ yoki $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \ell}$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial \ell} := \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} \quad (7)$$

5-Teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya $A_0 = (x_0, y_0)$ nuqtada differentsiallanuvchi bo`lsa, u holda shu funksiya A_0 nuqtada $\forall \ell$ yo`nalish bo`yicha hosilaga ega va

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial \ell} := \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta \quad (8)$$

tenglik o`rinli.

Izoh: Funksiya biror nuqtada differentsiallanuvchi bo`lmasa ham u shu nuqtada biror yo`nalish bo`yicha hosilaga ega bo`lishi mumkin

3-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

функциянинг (1,1) нуқтада энг тез ўсадиган йўналиши аниқлансин ва шу йўналиш бўйича ўсиш тезлиги топилсин.

◀ Равшанки,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial (x^2 + 2y^2)}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} &= 2; \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial (x^2 + 2y^2)}{\partial y} = 4y, & \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} &= 4; \end{aligned}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \text{grad } f(1, 1) &= 2\vec{i} + 4\vec{j}, \\ |\text{grad } f(1, 1)| &= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

бўлади. ▶

8-мавзу: Кўп ўзгарувчи функциянинг дифференциалланувчилиги.

8-маъруза

РЕЖА:

1. Мураккаб функциянинг дифференциалланувчилиги,
2. Хусусий ҳоллар

Таянч иборалар: Мураккаб функциянинг дифференциалланувчилиги, ортирмалар.

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \quad (i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,k)$$

хусусий ҳосилаларнинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва

$$\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \dots + \Delta t_k^2}.$$

Шартга кўра $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (7)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial f}{\partial x_i}, (i=1,2,\dots,m)$ хусусий ҳосилаларнинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0 \quad \text{да} \quad \alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0.$$

(6), (7) муносабатлардан топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + 0(\rho) \right] + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2} \left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} \Delta t_k + 0(\rho) \right] + \\ &+ \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + 0(\rho) \right] + \\ &+ \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \right. \\ &+ \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right) \Delta t_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right) \Delta t_2 + \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right) \Delta t_k + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \cdot 0(\rho) + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m. \end{aligned}$$

Бу тенгликдан

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \cdot 0(\rho) = 0(\rho),$$

$\Delta t_1 \rightarrow 0, \Delta t_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta t_k \rightarrow 0$, яъни $\rho \rightarrow 0$ да

$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$, ва $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$

бўлгани сабабли

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = 0(\rho)$$

бўлиши ҳамда қуйидаги

$$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_j} \quad (8)$$

($j = 1, 2, \dots, k$) белгилашлар натижасида

$$\Delta f = A_1 \Delta t_1 + A_2 \Delta t_2 + \dots + A_m \Delta t_m + O(\rho) \quad (9)$$

бўлади. Демак, мураккаб функция t^0 нуктада дифференциалланувчи. ►

Айтайлик, $f(x(t))$ мураккаб функция юқоридаги теорема-нинг шартларини қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\Delta f(t) = \frac{\partial f}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} \Delta t_k + O(\rho)$$

бўлади. Бу ҳамда (8), (9) муносабатлардан фойдаланиб мураккаб функциянинг хусусий ҳосилалари қуйидагича

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

.....

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

бўлишини топамиз.

5⁰. Хусусий ҳоллар. $m=1$ бўлганда бир ўзгарувчи $u = f(x)$ ($x \in R, u \in R$) функция ҳосиласи тушунчасига келамиз. Булар ҳақидаги маълумотлар 19-21-маърузаларда баён этилган.

$m=2$ бўлсин. Бу ҳолда икки ўзгарувчи $u = f(x, y)$ ($(x, y) \in E \subset R^2, u \in R$) функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ҳамда қуйидаги

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= A \Delta x + B \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \end{aligned}$$

дифференциалланувчилик шартига эга бўламиз.

2-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

функциянинг хусусий ҳосилалар топилсин.

◀ Берилган функциянинг хусусий ҳосилалари қуйида-гича бўлади:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{-2}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} \blacktriangleright$$

3-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин.

◀ Айтайлик, $(x, y) \neq (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2y(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

бўлади.

Айтайлик, $(x, y) = (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда таърифдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x \cdot 0}{\Delta x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta y \cdot 0}{\Delta y^3} = 0. \blacktriangleright$$

4-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин.

◀ Айтайлик, $(x, y) \neq (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

бўлади.

Айтайлик, $(x, y) = (0, 0)$ бўлсин. Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

бўлиб, бу лимитлар мавжуд бўлмаганлиги сабабли берилган функция $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлмайди. ►

5-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилалари топилсин.

◀ Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

бўлади. Бироқ берилган функция $(0,0)$ нуқтада узлуксиз бўлмайди, чунки

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) \rightarrow (0,0) \text{ да } f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq f(0,0). \blacktriangleright$$

6-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{агар } (x, y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларнинг мавжуд-лиги аммо шу нуқтада дифференциалланувчи эмаслиги кўрсатилсин.

◀ Равшанки,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

Демак, берилган функциянинг $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд ва улар 0 га тенг.

Бу функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди. Шунини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, қаралаётган функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин:

$$\Delta f(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y =$$

$$= \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y. \quad (\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ да } \alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0).$$

Айни пайтда,

$$\Delta f(0,0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y.$$

Бу тенгликдан, $\Delta x = \Delta y > 0$ бўлганда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\Delta x = \Delta y > 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$ бўлишиги зид. Демак, берилган функция $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмас. ►

7-мисол. Агар $f(x, y)$ функция R^2 дифференциалланувчи бўлиб, $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ бўлса, $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ лар топилсин.

◀ Равшанки,

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини топиш қондасига кўра

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}. \quad \blacktriangleright$$

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^x, \quad f(x, y) = \ln \sin \frac{x+1}{\sqrt{y}}$$

функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин.

2. Агар

$$f(x, y) = x \sin y + y \sin x, \quad x = \frac{u}{v}, y = u \cdot v$$

бўлса, $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ лар топилсин.

3. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $U_\delta(x^0) \subset R^m$ да аниқланган бўлиб,

1) $f(x)$ функция x^0 нуктада дифференциалланувчи ва $f(x^0) = 0$,

2) $g(x)$ функция x^0 нуктада узлуксиз бўлса, $f(x) \cdot g(x)$ функциянинг x^0 нуктада дифференциалланувчи бўлиши кўрсатилсин.

4. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмаслиги исботлансин.

8-амалий машғулот

Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциалланувчиликга текшириш ва унинг дифференциалини ҳисоблаш.

8.1-мисол. Агар $f(x, y)$ функция R^2 дифференциалланувчи бўлиб, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ бўлса, $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ лар топилсин.

◀Равшанки,

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини топиш қондасига кўра

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

7-masala. Quyidagi funksiya $O(0,0)$ nuqtada xususiyl hosilalarga egami va bu nuqtada differensiallanuvchimi?

7.1 $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.2 $u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}, & |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & |x| + |y| = 0 \end{cases}$

7.3 $u(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

7.4 $u(x, y) = \sqrt{xy} \cdot \sin x$.

7.5 $u(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$.

7.6 $u(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y} \cdot \operatorname{tg} x$.

7.7 $u(x, y) = \sqrt[3]{x} \sin y$.

7.8 $u(x, y) = \sqrt[4]{x^3 + y^3}$.

7.9 $u(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$.

7.10 $u(x, y) = \sqrt{2x^2 - 3y^2}$.

$$7.11 \quad u(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} .$$

$$7.12 \quad u(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}, & x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \end{cases}$$

$$7.13 \quad u(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2} .$$

$$7.14 \quad u(x, y) = \sqrt{x^3 + y^4} .$$

$$7.15 \quad u(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} .$$

$$7.16 \quad u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{|x| + |y|}, & |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & |x| + |y| = 0 \end{cases}$$

9-мавзу: Мураккаб функциянинг ҳосиласи.

РЕЖА:

1. Мураккаб функциянинг ҳосиласи.

2. Мисоллар бажариш

Таянч иборалар: дифференциалланувчи, орттирмалар

Айтайлик, ушбу

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k) ,$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k) ,$$

.....

$$x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

функцияларнинг ҳар бир $M \subset R^k$ тўпламда,

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

функция эса

$$E = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m ; x_1 = \varphi_1(t) , x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t) \right\}$$

тўпламда берилган бўлиб, улар ёрдамида

$$f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

мураккаб функция ҳосил қилинган бўлсин.

4-теорема. Агар $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функцияларнинг ҳар бири ($i=1, 2, \dots, m$), $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада

$$(x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, \dots, t_k^0), \dots, x_m^0 = \varphi_m(t_1^0, \dots, t_k^0))$$

дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб

$$f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$$

функция $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

◀ $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in M$ нуқтанинг координаталарига мос равишда $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_k$ орттирмалар берайликки

$$(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, \dots, t_k^0 + \Delta t_k) \in M$$

бўлсин. Унда ҳар бир $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функция ($i=1, 2, \dots, m$) ҳам Δx_i ($i=1, 2, \dots, m$) орттирмаларга ва ниҳоят $f(x)$ функция Δf орттирмага эга бўлади.

Шартга кўра $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho), \\ \Delta x_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho), \end{aligned} \quad (6)$$

.....

$$\Delta x_m = \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho)$$

бўлади, бунда

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \quad (i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, k)$$

хусусий ҳосилаларнинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва

$$\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \dots + \Delta t_k^2}.$$

Шартга кўра $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (7)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, ($i=1, 2, \dots, m$) хусусий ҳосилаларнинг

$(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва

$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

(6), (7) муносабатлардан топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2} \left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &+ \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &+ \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \right. \\ &+ \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right) \Delta t_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right) \Delta t_2 + \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right) \Delta t_k + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \cdot o(\rho) + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m . \end{aligned}$$

Бу тенгликдан

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \cdot o(\rho) = o(\rho),$$

$\Delta t_1 \rightarrow 0, \Delta t_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta t_k \rightarrow 0$, яъни $\rho \rightarrow 0$ да

$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$, ва $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$

бўлгани сабабли

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho)$$

бўлиши ҳамда қуйидаги

$$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_j} \quad (8)$$

($j = 1, 2, \dots, k$) белгилашлар натижасида

$$\Delta f = A_1 \Delta t_1 + A_2 \Delta t_2 + \dots + A_m \Delta t_m + o(\rho) \quad (9)$$

бўлади. Демак, мураккаб функция t^0 нуктада дифференциалланувчи. ►

Айтайлик, $f(x(t))$ мураккаб функция юқоридаги теорема-нинг шартларини қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\Delta f(t) = \frac{\partial f}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho)$$

бўлади. Бу ҳамда (8), (9) муносабатлардан фойдаланиб мураккаб функциянинг хусусий ҳосилалари қуйидагича

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

.....

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

бўлишини топамиз.

5⁰. Хусусий ҳоллар. $m=1$ бўлганда бир ўзгарувчи $u = f(x)$ ($x \in R, u \in R$) функция ҳосиласи тушунчасига келамиз. Булар ҳақидаги маълумотлар 19-21-маърузаларда баён этилган.

$m=2$ бўлсин. Бу ҳолда икки ўзгарувчи $u = f(x, y)$ ($(x, y) \in E \subset R^2, u \in R$) функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ҳамда қуйидаги

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

дифференциалланувчилик шартига эга бўламиз.

2-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

функциянинг хусусий ҳосилалар топилсин.

◀ Берилган функциянинг хусусий ҳосилалари қуйида-гича бўлади:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{-2}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} \blacktriangleright$$

3-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин.

◀ Айтайлик, $(x, y) \neq (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2y(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

бўлади.

Айтайлик, $(x, y) = (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда таърифдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x \cdot 0}{\Delta x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta y \cdot 0}{\Delta y^3} = 0. \blacktriangleright$$

4-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин.

◀ Айтайлик, $(x, y) \neq (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

бўлади.

Айтайлик, $(x, y) = (0, 0)$ бўлсин. Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

бўлиб, бу лимитлар мавжуд бўлмаганлиги сабабли берилган функция $(0, 0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлмайди. ▶

5-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилалари топилсин.

◀ Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

бўлади. Бироқ берилган функция $(0,0)$ нуктада узлуксиз бўлмайди, чунки

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) \rightarrow (0,0) \text{ да } f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq f(0,0). \blacktriangleright$$

6-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{агар } (x, y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктада хусусий ҳосилаларнинг мавжуд-лиги аммо шу нуктада дифференциалланувчи эмаслиги кўрсатилсин.

◀ Равшанки,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

Демак, берилган функциянинг $(0,0)$ нуктада хусусий ҳосилалари мавжуд ва улар 0 га тенг.

Бу функция $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлмайди. Шуни исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, қаралаётган функция $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин:

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = \\ &= \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y. \quad (\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ да } \alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Айни пайтда,

$$\Delta f(0,0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y.$$

Бу тенгликдан, $\Delta x = \Delta y > 0$ бўлганда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\Delta x = \Delta y > 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$ бўлишиги зид. Демак, берилган функция $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмас. ►

7-мисол. Агар $f(x, y)$ функция R^2 дифференциалланувчи бўлиб, $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ бўлса, $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ лар топилсин.

◀ Равшанки, $f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини топиш қондасига кўра

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}. \blacktriangleright$$

Машқлар

5. Ушбу

$$f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^x, \quad f(x, y) = \ln \sin \frac{x+1}{\sqrt{y}}$$

функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин.

6. Агар

$$f(x, y) = x \sin y + y \sin x, \quad x = \frac{u}{v}, y = u \cdot v \text{ бўлса, } \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \text{ лар}$$

топилсин.

7. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $U_\delta(x^0) \subset R^m$ да аниқланган бўлиб,

3) $f(x)$ функция x^0 нуктада дифференциалланувчи ва $f(x^0) = 0$,

4) $g(x)$ функция x^0 нуктада узлуксиз бўлса, $f(x) \cdot g(x)$

функциянинг x^0 нуктада дифференциалланувчи бўлиши кўрсатилсин.

8. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмаслиги исботлансин.

9-амалий машғулот

Мураккаб функция ҳосиласи.

Quyidagi murakkab funksiyalarning xususiy hosilalarini toping (f va g -differensiallanuvchi).

$$9.1 \quad u = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{z^2 + x^2}\right).$$

$$9.2 \quad u = f(x - y^2, y - x^2, xy).$$

$$9.3 \quad u = [f(x - y)]^{g(x, y)}.$$

$$9.4 \quad u = f(x - y, xy).$$

$$9.5 \quad u = f(xy) \cdot g(yz).$$

$$9.6 \quad f(x + y, x^2 + y^2).$$

$$9.7 \quad u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

Agar f -ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya bo`lsa, $u(x, y)$ funksiya mos tenglamani qanoatlantirishini tekshiring.

$$9.8 \quad u = f(x^2 + y^2); \quad y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$9.9 \quad u = x^n \cdot f\left(\frac{y}{x}\right); \quad x \frac{\partial u}{\partial y} - 2y \frac{\partial u}{\partial x} = nu.$$

$$9.10 \quad u = yf(x^2 - y^2); \quad y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xu.$$

$$9.11 \quad u = \frac{y^2}{3x} + f(xy); \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0.$$

$$9.12 \quad u = x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right); \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu.$$

$$9.13 \quad u = \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right); \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}.$$

10-мавзу: Кўп ўзгарувчи функциянинг дифференциали

10-маъруза:

РЕЖА:

1. Функция дифференциали тушунчаси

2. Мураккаб функциянинг дифференциали. Дифференциал шаклнинг инвариантлиги.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР: Функция дифференциали, мураккаб функциянинг дифференциали, инвариантлик

1⁰. Функция дифференциали тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ да берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Унда таърифга кўра функциянинг x^0 нуктадаги тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho) \quad (1)$$

бўлади. Бу муносабатда

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$$

бўлиб, $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\rho \rightarrow 0$.

1-таъриф. $f(x)$ функциянинг $\Delta f(x^0)$ орттирмасидаги

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m$$

ифода $f(x)$ функциянинг x^0 нуктадаги дифференциали (тўлиқ дифференциали) дейилади ва

$$df(x^0) \text{ ёки } df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

каби белгиланади:

$$df(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m.$$

Демак, $f(x)$ функциянинг x^0 нуктадаги дифференциали $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва уларнинг чизикли функцияси бўлади.

Агар

$$\Delta x_1 = dx_1, \Delta x_2 = dx_2, \dots, \Delta x_m = dx_m$$

дейилса, $f(x)$ функциянинг x^0 нуктадаги дифференциали ушбу

$$df(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} dx_m \quad (2)$$

кўринишга келади. Демак,

$$\Delta f(x^0) = df(x^0) + o(\rho).$$

Кейинги тенгликдан $\rho \rightarrow 0$ да

$$\Delta f(x^0) \approx df(x^0)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тақрибий формуланинг моҳияти шундаки, функциянинг орртимаси $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларнинг, умуман айтганда мураккаб функцияси бўлган ҳолда функциянинг дифференциали $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларнинг чизиқли функцияи бўлишидадир.

2⁰. Мураккаб функциянинг дифференциали. Дифференциал шаклнинг инвариантлиги. Айтайлик,

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

.....

$$x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

функцияларнинг ҳар бири $M \subset R^k$ тўпламда берилган бўлиб,

$$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)\}$$

тўпламда эса $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аниқланган бўлсин. Булар ёрдамида

$$f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

мураккаб функция ҳосил қилинган бўлсин.

Маълумки, $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$ функциялар ($i = 1, 2, \dots, m$) $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0)$

нуктада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция мос

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада $(x_1^0 = \varphi_1(t^0), x_2^0 = \varphi_2(t^0), \dots, x_m^0 = \varphi_m(t^0))$

дифференциалланувчи бўлса, мураккаб функция $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлади.

Модомики, $f(x(t))$ функция t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларга боғлиқ экан, унда

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_m} dt_m \quad (3)$$

бўлади.

Мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаш формулаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}.$$

Бу хусусий ҳосилаларни (3) ифодадаги $\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}$ ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада

$$\begin{aligned} df &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right] dt_1 + \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right] dt_2 + \\ &+ \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right] dt_k = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k \right] + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2} \left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dt_k \right] + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right] \end{aligned}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k = dx_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dt_k = dx_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k = dx_m.$$

Демак, мураккаб функциянинг дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (4)$$

бўлади.

Биз юкорида $f(x)$ ҳамда $f(x(t))$ мураккаб функциянинг дифференциаллари учун (2) ва (4) ифодаларни топдик. Бу ифодаларни солиштириб уларнинг формаси (шакли, кўриниши) бир хил, яъни (2) ва (4) формулаларда функциянинг дифференциали хусусий ҳосилаларни мос дифференциалларга кўпайтмалардан тузилган йиғиндига тенг эканлигини пайқаймиз. Бу хосса дифференциал шаклнинг **инвариантлиги** дейилади.

Эслатма. $f(x)$ функция дифференциалининг (2) ифодаси-даги dx_1, dx_2, \dots, dx_m лар мос равишда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ лар бўлса, $f(x(t))$ функция дифференциалидаги dx_1, dx_2, \dots, dx_m лар t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарув-чиларнинг функциялари бўлади. Демак, (2) ва (4) формула-ларнинг кўринишларигина бир хил бўлади.

3⁰. Содда қоидалар. Айтайлик,

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad v = v(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

функциялари $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_m^\circ) \in E$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда:

$$1) \quad d(u+v) = du + dv,$$

$$2) \quad d(u \cdot v) = vdu + u dv,$$

$$3) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

бўлади.

Бу муносабатлардан бирини, масалан, 3) нинг исботини келтирамиз.

◀Айтайлик,

$$F = \frac{u}{v}$$

бўлсин. Бу ҳолда F функция u ва v ларга ва u ва v лар ўз навбатида x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, мураккаб функцияга эга бўламиз. Дифференциал шаклнинг инвариант-ли хоссасига кўра

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

Демак,

$$dF = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - u dv}{v^2},$$

яъни

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

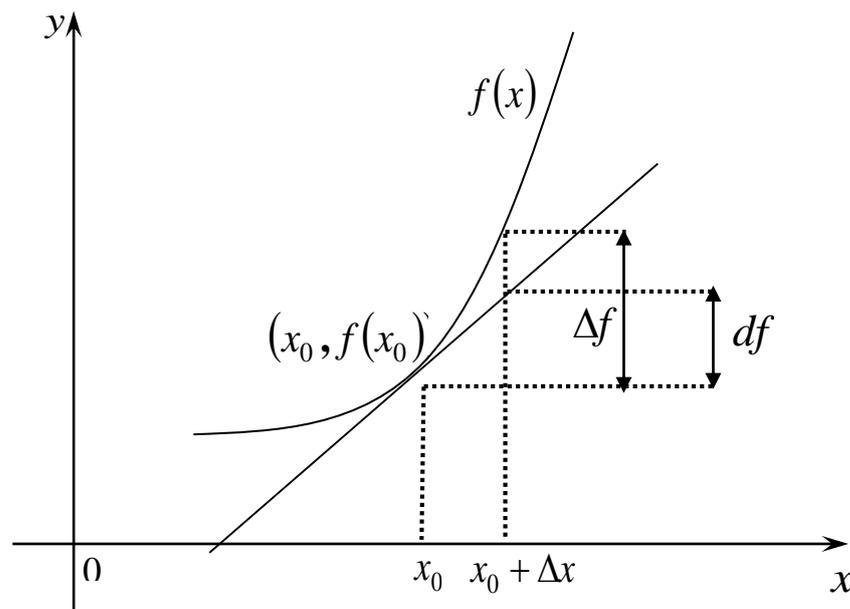
бўлади. ▶

4⁰. Хусусий ҳоллар. Функция дифференциалининг геометрик маъноси. Айтайлик, $m=1$ бўлсин. Бу ҳолда $u = f(x)$ ($x \in R, u \in R$) функция ва унинг дифференциали

$$du = df = f'(x)dx$$

га эга бўламиз.

Маълумки, $u = f(x)$ функциянинг дифференциали шу функция тасвирланган эгри чизикқа $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг ординатасининг орттирмасини ифодалайди (27-чизма)



9.1-чизма

$m=2$ бўлсин. Бу ҳолда икки ўзгарувчи $u = f(x, y)$ ($(x, y) \in R^2, u \in R$) функцияга эга бўлиб, унинг (x_0, y_0) нуқтадаги дифференциал

$$du = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy \quad (5)$$

бўлади, бунда $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Δx ва Δy лар етарлича кичик бўлганда

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_1} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

тақрибий формула ҳосил бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$u = x^y$$

функциянинг дифференциали топилсин.

◀Равшанки,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Унда (5) формулага кўра

$$du = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$$

бўлади. ►

2-мисол. Томонлари $x = 6\text{ м}$ ва $y = 8\text{ м}$ бўлган тўғри тўртбурчак берилган. Агар бу тўғри тўртбурчакнинг x томонини 5 см. га оширилса, y томонини 10 см. га камайтирилса, тўртбурчакнинг диагонали қанчага ўзгаради?

◀ Агар берилган тўғри тўртбурчакнинг диагоналини u десак, унда

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади. Энди

$$\Delta u(x_0, y_0) \approx \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta y$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$\Delta u(x_0, y_0) \approx \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta y = \frac{x_0 \cdot \Delta x + y_0 \cdot \Delta y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Бу муносабатда

$$x_0 = 6\text{ м}, \quad \Delta x = 0,05\text{ м}, \quad y_0 = 8\text{ м}, \quad \Delta y = -0,10\text{ м}$$

дейилса, унда

$$\Delta u \approx \frac{6 \cdot 0,06 + 8 \cdot (-0,10)}{\sqrt{36 + 64}} \text{ м} = -0,05\text{ м}$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, тўғри тўртбурчакнинг диагонали тахминан 5 см. га камаяр экан. ►

Энди $f(x, y)$ функция дифференциалининг геометрик маъносини келтирамиз.

Айтайлик,

$$z = f(x, y)$$

функция очик $E \subset R^2$ тўпламда дифференциалнувчи бўлсин. Бу функция графиги R^3 фазода бирор $\Gamma(f)$ сирти ифодаласин.

$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in E, z = f(x, y)\}$ сиртда $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma(f)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) нуктани ва шу нуктадан ўтувчи, қаралаётган сиртга тегишли бўлган силлик

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$$

эгри чизикни оламиз. Модомики, эгри чизик сиртда ётар экан, унда

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

$$((x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0), t_0 \in (\alpha, \beta))$$

бўлади. Равшанки,

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

мураккаб функция бўлиб, унинг t_0 нуқтадаги дифференциали, дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссасига биноан, ушбу

$$df(x_0, y_0) = dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy \quad (6)$$

кўринишга эга.

Координаталари dx, dy, dz бўлган вектор Γ эгри чизикка (x_0, y_0, z_0) нуқтада ўтказилган уринма вектор бўлади.

Энди координаталари

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1$$

бўлган \vec{n} векторни қарайлик. Юқоридаги (6) муносабат \vec{n} вектор уринма векторга (x_0, y_0, z_0) нуқтада ортогонал бўлишини билдиради. Шунинг учун \vec{n} вектор эгри чизикка (x_0, y_0, z_0) нуқтада ортогонал дейилади.

Маълумки, Γ эгри чизик (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи ва $\Gamma(f)$ сиртда ётувчи ихтиёрий эгри чизик эди. Бинобарин, \vec{n} вектор шу (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи ва $\Gamma(f)$ сиртда ётувчи ихтиёрий эгри чизикка ортогонал бўлади.

Шунинг учун \vec{n} вектор $\Gamma(f)$ сиртнинг нуқтасидаги нормал вектори дейилади.

Сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтасида ўтувчи ва сиртнинг нормал векторига ортогонал бўлган текислик, $\Gamma(f)$ сиртга (x_0, y_0, z_0) нуқтада ўтказилган уринма текислик дейилади. Унинг тенгламаси

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (X - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (Y - y_0)$$

бўлади, бунда (X, Y, Z) уринма текисликдаги ўзгарувчи нуқта. Бу тенгликдан фойдаланиб,

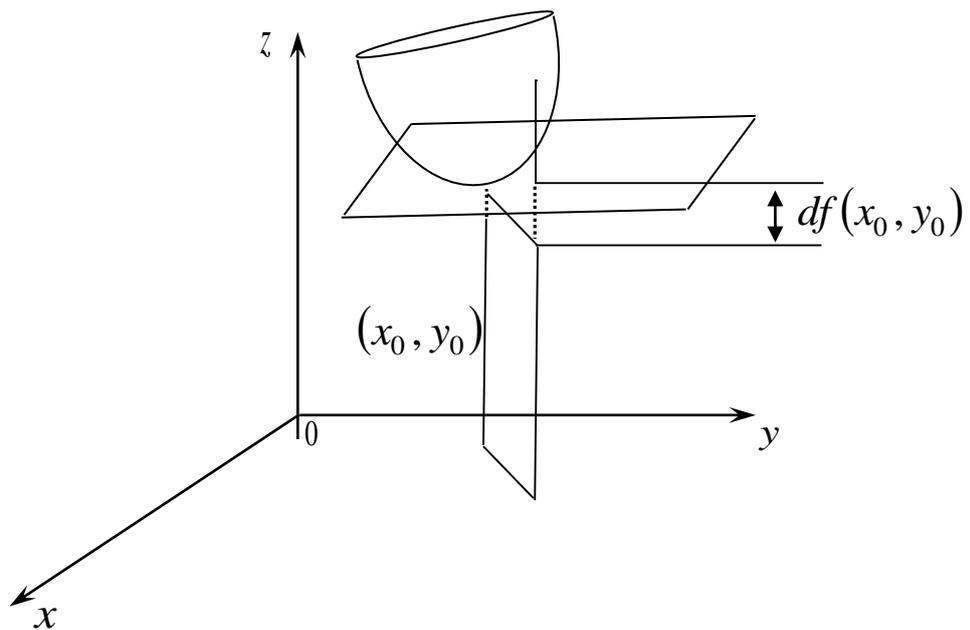
$$Z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0)$$

бўлишини оламиз. Келтирилган тенглик ва (6) муносабатдан

$$df(x_0, y_0) = Z - z_0$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $z = f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги дифференциали $df(x_0, y_0)$ бу функция графигига $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нуқтасида уринма текислик аппликатасининг орттирмасини ифодалар экан (28-чизма)



9.2-чизма

Машқлар

1. Ушбу

$$f\left(x^2 + y^2, \arctg \frac{y}{x}\right) \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

функциянинг дифференциали топилсин.

2. Ушбу

$$\alpha = (1,02)^{3,01}$$

миқдорнинг тақрибий қиймати топилсин.

10 - амалий машғулот

Функция differensialini ko`rsatilgan nuqtalarda toping.

9.14 $u = \frac{yz}{x}$, $M(x, y, z)$ **va** $M_0(1,2,3)$.

9.15 $u = \cos(xy + xz)$, $M(x, y, z)$ **va** $M_0\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

9.16 $u = x^y$, $M(x, y)$ **va** $M_0(2,3)$.

9.17 $u = x \ln(xy)$, $M(x, y)$ **va** $M_0(-1,-1)$.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ **va** $\frac{\partial u}{\partial y}$ **xususiy hosilalarni hisoblash va f va g fuksiyalarning hosilalarini (f va g -differensiallanuvchi funksiyalar) yo`qotish yo`li bilan shunday tenglama tuzingki, $u(x, y)$ funksiya uni qanoatlantirsin.**

9.18 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

9.19 $u = f(x - y, y - z)$.

9.20 $u = xf\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

9.21 $u = x + f(xy)$.

10-masala. Ko`rsatilgan tartibdagi xususiy hosilalar va differensiallar hisoblansin.

10.1 $u = \frac{x + y}{x - y}; \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$.

10.2 $u = x^m y^n; \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$.

10.3 $u = e^{2x} \sin y + e^x \cos \frac{y}{2}; \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$.

10.4 $u = e^{xyz}; \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

10.5 $u = \sin x \cdot \cos 2y; \frac{\partial^{10}u}{\partial x^4 \partial y^6}$.

10.6 $u = x^4 \cos y + y^4 \sin x; \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}$.

10.7 $u = (x^2 + y)^{10} \operatorname{tg} x; \frac{\partial^{10}u}{\partial x \partial y^9}$.

10.8 $u = \sin xy; \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ **va** $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$.

10.9 $u = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{xy}; d^2 u$.

10.10 $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z; d^2 u$.

10.11 $u = x^{yz}; d^2 u$.

10.12 $u = f(x + y, x^2 + y^2); d^2 u$.

10.13 $u = f(xy) \cdot g(xz); d^2 u$.

10.14 $u = f(\sin x + \cos y); d^2 u$.

10.15 $u = f(x + y, z^2); d^2 u$.

10.16 $u = f(xy, x^2 + y^2); d^2 u$.

11-мавзу: Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари.

РЕЖА:

1. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар

2. Юқори тартибли дифференциалар

Таянч иборалар: иккинчи тартибли хусусий ҳосила, n – тартибли хусусий ҳосилалар

1⁰. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $E \subset R^m$ тўпламининг ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E$ нуқтасида

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f'_{x_i} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу хусусий ҳосилалар x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг функцияси бўлиб, улар ҳам хусусий ҳосилаларга эга бўлиши мумкин:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) = (f'_{x_i}(x))'_{x_k} \quad (i, k=1, 2, \dots, m).$$

Бу хусусий ҳосилалар берилган $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i} \quad \text{ёки} \quad f''_{x_i x_k}(x) \quad (i, k=1, 2, \dots, m)$$

каби белгиланади:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i} = f''_{x_i x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right).$$

Агар $i \neq k$ бўлса,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i}$$

иккинчи тартибли хусусий ҳосила аралаш ҳосила дейилади.

Агар $i = k$ бўлса, иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i} = f''_{x_i x_k}(x)$$

қуйидагича

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = f''_{x_i^2}(x)$$

ёзилади.

$f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. тартибдаги хусусий ҳосилалари худди юқоридагига ўхшаш таърифланади. Умуман, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$ ўзгарувчилари бўйича n -тартибли хусусий ҳосиласи берилган функциянинг $(n-1)$ -тартибли хусусий ҳосиласи

$$\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x_{i_{n-1}} \partial x_{i_{n-2}} \dots \partial x_{i_1}} \quad (i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1} = n-1)$$

нинг x_{i_n} ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи сифатида таърифланади:

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right).$$

Бу ҳолда ҳам i_1, i_2, \dots, i_n лар бир-бирига тенг бўлмаганда

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$$

аралаш ҳосила дейилади.

Агар $i_1 = i_2 = \dots = i_n = k$ бўлса, n – тартибли хусусий ҳосила-лар қуйидагича

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_k^n}$$

ёзилади. Ушбу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i \neq k)$$

аралаш ҳосилалар функциянинг турли ўзгарувчилари бўйича дифференциаллаш тартиби билан фарқ қилади:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

да $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг аввал x_i ўзгарувчиси бўйича, сўнг x_k ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи ҳисобланган бўлса,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

да эса аввал x_k ўзгарувчиси бўйича, сўнг x_i ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи ҳисобланган. Улар бир-бирига тенг ҳам бўлиши мумкин, тенг бўлмасдан қолиши ҳам мумкин (мисоллар кейинги пунктда келтирилади).

Аралаш ҳосилаларнинг тенглигини қуйидаги теорема ифодалайди.

1-теорема. Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E \subset R^m$ нуктада n марта дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда x^0 нуктада $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг ихтиёрий n -тартибли аралаш ҳосилаларнинг қиймати x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчилар бўйича қандай тартибда дифференциалланишига боғлиқ бўлмайди.

◀ Бу теореманинг исботи, кейинги пунктда икки ўзгарувчилик функция учун келтириладиган теорема исботи каби бўлади. ▶

2⁰. Юқори тартибли дифференциаллар. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $E \subset R^m$ тўпلامда берилган, $x \in E$ нуктада икки марта дифференциалланувчи бўлсин.

$$d^2 f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} d x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} d x_m \right)^2 f. \quad (1)$$

$f(x)$ функциянинг x нуқтадаги учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. тартибдаги дифференциаллари ҳам юқоридагидек таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги $(n-1)$ -тартибли дифференциали $d^{n-1} f(x)$ нинг дифференциали $f(x)$ нинг n -тартибли дифференциали дейилади ва $d^n f(x)$ каби белгиланади:

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)).$$

Агар, $f(x)$ функция x нуқтада n марта дифференциаланувчи бўлса, у холда

$$d^n f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} d x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} d x_m \right)^n f \quad (2)$$

бўлади.

11-амалий машғулот

Lagranj usulidan foydalanib $u = u(x, y)$ (yoki $u = u(x, y, z)$) funksiyaning berilgan shartni qanoatlantiruvchi ekstremumlari topilsin.

13.12 $u = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$

13.13 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (a > b > c > 0).$

13.14 $u = x - 2y + z, \quad x + y^2 - z^2 = 1.$

13.15 $u = xy^2z^3, \quad x + 2y + 3z = 6 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

13.16 $u = x^3 + y^3 - z^3 + 5, \quad x + y - z = 0.$

13.17 $u = x^2 + y^2 + 2z^2, \quad x - y + z = 1.$

13.18 $u = xy, \quad x^2 + y^2 = 1.$

13.19 $u = x + y, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$

13.20 $u = x^2 + y^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

13.21 $u = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

12-мавзу: Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи.

12-маъруза:

РЕЖА:

- 1. Ўрта қиймат ҳақида теорема.**
- 2. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи.**

Таянч иборалар: сегментда узлуксиз, хусусий ҳосилаларнинг $(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m))$ нуктадаги қийматлари, Лагранжнинг чекли орттирмалар

12.1⁰. Ўрта қиймат ҳақида теорема. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Бу E тўпламда шундай

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

нукталарни қараймизки, бу нукталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси E тўпламга тегишли бўлсин.

Равшанки, бу кесма ушбу

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, x_m = a_m + t(b_m - a_m) \}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

нуқталар тўплами билан ифодаланади: $K \subset E$.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция K кесманинг a ва b нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда K кесмада шундай $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ нуқта топиладики,

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m) \quad (1)$$

бўлади.

◀ $f(x)$ функция $K \subset E$ кесмада қуйидаги

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

кўринишда бўлади. Бу t ўзгарувчининг функциясини $F(t)$ билан белгилайлик:

$$F(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m)).$$

Равшанки, $F(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $(0, 1)$ да

$$F'(t) = f'_{x_1} \cdot (b_1 - a_1) + f'_{x_2} \cdot (b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m} \cdot (b_m - a_m)$$

ҳосилга эга бўлади. Бунда $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларнинг

$$(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_m + t(b_m - a_m))$$

нуқтадаги қийматлари олинган.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$F(1) - F(0) = F'(t_0). \quad (0 < t_0 < 1) \quad (2)$$

Агар

$$F(0) = f(a), \quad F(1) = f(b) \quad (3)$$

ҳамда

$$F'(t_0) = f'_{x_1}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - a_m)) \cdot \\ \cdot (b_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - a_m)) \cdot \\ \cdot (b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a_1 + t_0(b_2 - a_2), \dots, a_m + t_0(b_m - a_m)) \cdot (b_m - a_m) \quad (4)$$

бўлишини эътиборга олсак, сўнг ушбу

$$a_1 + t_0(b_1 - a_1) = c_1,$$

$$a_2 + t_0(b_2 - a_2) = c_2,$$

.....

$$a_m + t_0(b_m - a_m) = c_m$$

белгилашларини бажарсак, унда

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in K$$

бўлиб, (2), (3) ва (4) муносабатлардан

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c) \cdot (b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c) \cdot (b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(c) \cdot (b_m - a_m)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Одатда, (1) формула Лагранжининг чекли орттирмалар формуласи дейилади.

4⁰. Кўп ўзгарувчи функциянинг Тейлор формуласи. Айтайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $U_\delta(x^0) \subset E$ бўлсин, бунда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ва $\delta > 0$. Равшанки,

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U_\delta(x^0), \quad x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси

$$A = \{x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m - x_m^0); 0 \leq t \leq 1\}$$

шу $U_\delta(x^0)$ га тегишли бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $U_\delta(x^0)$ тўпламда $(n+1)$ марта дифференциалланувчи бўлсин. Бу функцияни A тўпламда қарасак, $[0, 1]$ сегментда аниқланган ушбу

$$F(t) = f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m - x_m^0))$$

функцияга эга бўламиз. $F(t)$ функция $[0, 1]$ да ҳосилга эга бўлиб,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot (x_m - x_m^0) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot (x_m - x_m^0) \right) f \end{aligned}$$

бўлади, бунда $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари

$$(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m - x_m^0)) \quad (4)$$

нуқтада ҳисобланган.

Умуман, ҳосил қилинган $F(t)$ функция k -тартибли ($k = 1, 2, \dots, n+1$) ҳосилаларга эга ва у

$$F^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot (x_m - x_m^0) \right)^k f$$

га тенг, бундаги барча хусусий ҳосилалар (4) нуқтада ҳисобланган. Бу муносабатнинг тўғрилиги математик индукция усули ёрдамида исботланади.

Шундай қилиб, $F(t)$ функция $F'(t), F''(t), \dots, F^{(n+1)}(t)$ ҳосилаларга эга бўлади. Тейлор формуласига кўра (қаралсин, 24-майруза) t_0 нуқтада ($0 \leq t_0 \leq 1$)

$$\begin{aligned}
F(t) = & F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} F''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \\
& + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0) \cdot (t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(c) \cdot (t - t_0)^{n+1}
\end{aligned} \tag{5}$$

бўлади, бунда $c = t_0 + \theta(t - t_0)$, $0 < \theta < 1$. Бу тенгликда $t_0 = 0$, $t = 1$ дейилса, унда

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta)$$

бўлиши келиб чиқади.

Айни пайтда,

$$\begin{aligned}
F(0) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), \\
F(1) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m),
\end{aligned} \tag{6}$$

$$F^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot (x_m - x_m^0) \right)^k f$$

(бунда f функциянинг барча хусусий ҳосилалари $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада ҳисобланган) бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда (5) ва (6) тенгликлардан ушбу

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \\
&+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot (x_m - x_m^0) \right)^k f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot (x_m - x_m^0) \right)^{n+1} \times \\
&\times f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + \theta(x_m - x_m^0))
\end{aligned}$$

($0 < \theta < 1$) тенгликка келамиз. Бу кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи дейилади.

5⁰. Хусусий ҳоллар. Аралаш ҳосиланинг тенглиги ҳақида теорема. $m = 1$ бўлсин. бу ҳолда $u = f(x)$ ($x \in R, u \in R$) функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциал-ларига келамиз. Улар 23-маърузада батафсил баён этилган.

$m = 2$ бўлганда $u = f(x, y)$ ($(x, y) \in R^2, u \in R$) икки ўзгарувчили функция бўлиб. Унинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари (улар 4 та бўлади) қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right).$$

1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

◀ Равшаки,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

бўлади.

Энди таърифдан фойдаланиб берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \blacktriangleright$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{агар } x^2 + y^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2 + y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтадаги аралаш ҳосилалари топилсин.

Айтайлик, $(x, y) \neq (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

бўлади.

Айтайлик, $(x, y) = (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда функциянинг ҳосилаларини таърифга кўра ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0, \Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(\Delta x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1 \blacktriangleright$$

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $f(x, y)$ функциянинг

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

аралаш ҳосилалари бир-бирига тенг ҳам бўлиши мумкин, тенг бўлмасдан қолиши ҳам мумкин экан.

2-теорема. Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуктанинг $U_\delta((x_0, y_0))$ атрофида

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \quad ((x, y) \in U_\delta((x_0, y_0)))$$

аралаш ҳосилаларга эга бўлиб, бу ҳосилалар (x_0, y_0) нуктада узлуксиз бўлсин. У ҳолда $f(x, y)$ функциянинг аралаш ҳосилалари (x_0, y_0) нуктада тенг бўлади:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}.$$

◀ Айтайлик, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), (x_0 + \Delta x, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)$ нукта-лар (x_0, y_0) нуктанинг атрофига тегишли бўлсин:

$$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U_\delta((x_0, y_0)), \quad (x_0 + \Delta x, y_0) \in U_\delta((x_0, y_0)),$$

$$(x_0, y_0 + \Delta y) \in U_\delta((x_0, y_0)).$$

Ушбу

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0),$$

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$$

функцияларни қарайлик

Равшанки,

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонига Лагранж теоремасини икки марта қўллаб топамиз:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) &= \varphi'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x = \\ &= \left[\frac{\partial f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0 + \theta_1 \cdot \Delta x, y_0)}{\partial x} \right] \Delta x = \\ &= \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)}{\partial y \partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y. \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

Шартга кўра аралаш ҳосила (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз. Демак, $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ да

$$\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + o(1)$$

бўлиб,

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + o(1) \quad (7)$$

бўлади.

Энди $\Phi(\Delta x, \Delta y)$ функция билан бирга қуйидаги

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$$

функцияни қараймиз. Равшанки,

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)$$

бўлади. Юқоридагидек, бу тенгликнинг ўнг томонига Лагранж теоремасини икки марта қўллаб, сўнг аралаш ҳосиланинг (x_0, y_0) нуқтада узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) &= \left[\frac{\partial f(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1' \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, y_0 + \theta_1' \Delta y)}{\partial y} \right] \Delta y = \\ &= \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta_2' \Delta x, y_0 + \theta_1' \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + o(1) \\ &\quad (0 < \theta_1', \theta_2' < 1, \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0). \text{ Демак,} \end{aligned}$$

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + o(1). \quad (8)$$

(7) ва (8) муносабатлардан

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$$

бўлиши келиб чиқади. ►

12-амалий машғулот

6-Теорема. (Taylor formulasi). Agar x va $x+h$ nuqtalarning o`zi va ularni tutashtiruvchi kesma M to`plamga tegishli bo`lib, $f(x) \in C^{(n)}(M)$ bo`lsa, u holda ushbu Peano ko`rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi o`rinli bo`ladi:

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m) - f(x_1, \dots, x_m) &= \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(x) + o(h^n). \end{aligned}$$

. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{агар } x^2 + y^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2 + y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги аралаш ҳосилалари топилсин.

Айтайлик, $(x, y) \neq (0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

бўлади.

Айтайлик, $(x, y) = (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда функциянинг ҳосилаларини таърифга кўра ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0 ,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0, \Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3} = -1 ,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(\Delta x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1 \blacktriangleright$$

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $f(x, y)$ функциянинг

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

аралаш ҳосилалари бир-бирига тенг ҳам бўлиши мумкин, тенг бўлмасдан қолиши ҳам мумкин экан.

Машқлар

1. Ушбу

$$u = f(x, y) , \quad x = t^2 + s^2 , \quad y = t \cdot s$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциали топилсин.

2. Ушбу

$$u = y \cdot \varphi(x^2 - y)$$

функция куйидаги

$$\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$$

тенгликни қаноатлантириши исботлансин.

13-мавзу: Кўп ўзгарувчи функцияларни экстремумга текшириш. Экстремумнинг зарурий ва етарли шартлари.

13-маъруза:

РЕЖА:

- 1. Функция экстремуми тушунчаси. Зарурий шарт.**
- 2. Функция экстремумга эришишининг етарли шarti.**

Таянч иборалар: локал минимум, локал қатъий минимум, локал экстремум нуқта.

1⁰. Функция экстремуми тушунчаси. Зарурий шарт. _Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E$ бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки,

$$U_\delta(x^0) \subset E \text{ бўлиб, } \forall x \in U_\delta(x^0) \text{ да } f(x) \leq f(x^0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал максимумга, $f(x) \geq f(x^0)$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга эришади дейилади.

2-таъриф. Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $U_\delta(x^0) \subset E$ бўлиб, $\forall x \in U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}$ да $f(x) < f(x^0)$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада қатъий локал максимумга, $f(x) > f(x^0)$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал қатъий минимумга эришади дейилади.

Функциянинг локал максимуми, локал минимуми умумий ном билан локал экстремуми дейилади. Бунда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг локал экстремум нуқтаси, $f(x^0)$ га эса функциянинг локал экстремум қиймати дейилади.

Функциянинг максимум (минимум) қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x^0) = \max_{x \in U_\delta(x^0)} f(x) \quad \left(f(x^0) = \min_{x \in U_\delta(x^0)} f(x) \right).$$

Маълумки,

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0)$$

айирма $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги тўлиқ орттирмаси дейилар эди.

$f(x)$ функция x^0 нуқтада локал максимумга эришса, унда $\forall x \in U_\delta(x^0)$ да

$$\Delta f(x^0) \leq 0$$

бўлади ва аксинча.

Шунингдек, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга эришса, унда

$\forall x \in U_\delta(x^0)$ да

$$\Delta f(x^0) \geq 0$$

бўлади ва аксинча.

1-теорема. Агар $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада локал экстремумга эришса ва шу нуқтада барча

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

бўлади.

◀Айтайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада локал минимумга эришсин. У ҳолда

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U_\delta(x^0) \text{ да } f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

тенгсизлик бажарилади. Жумладан

$$f(x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлади. Агар

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0)$$

дейилса, $\forall x_1 \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta)$ да

$$\varphi(x_1) \geq \varphi(x_1^0)$$

бўлиб, бир ўзгарувчили $\varphi(x_1)$ функция x_1^0 нуқтада локал минимумга эришади. Унда 25-маърузада келтирилган теоремага кўра

$$\varphi'(x_1^0) = 0, \text{ яъни } \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = 0$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} = 0$$

бўлиши исботланади. ►

1-эслатма. Агар $f(x)$ функция бирор x^0 нуктада локал экстремумга эришса ва шу нуктада дифференциал-ланувчи бўлса, у ҳолда

$$df(x^0) = 0$$

бўлади.

2-эслатма. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бирор x^0 нуктада барча хусусий ҳосилаларга эга ва

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

бўлишидан берилган функциянинг шу нуктада локал экстремумга эришиши ҳар доим келиб чиқавермайди. (мисоллар кейинги пунктда келтирилади).

Демак, 1-теорема функциянинг локал экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалайди.

$f(x)$ функция хусусий ҳосилаларини нолга айлантиради-ган нукталар унинг стационар нукталари дейилади.

2⁰. Функция экстремумга эришишининг етарли шарти. Айтайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $x^0 \in R^m$ нуктанинг бирор $U_\delta(x^0)$ атрофида берилган, шу атрофда барча иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

бўлсин. Бу функциянинг Тейлор формуласи (62-маърузада келтирилган Тейлор формуласида $n = 2$ бўлган ҳол),

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

шартни ҳисобга олган ҳолда, қуйидагича

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k \quad (1)$$

бўлади, бунда иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$(x_1^0 + \theta \cdot \Delta x_1, x_2^0 + \theta \cdot \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \theta \cdot \Delta x_m)$$

($0 < \theta < 1$) нуктада ҳисобланган ва

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \dots, \Delta x_m = x_m - x_m^0.$$

Берилган $f(x)$ функция иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг стационар нукта x^0 даги қийматларини

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

билан белгилаймиз. Барча иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

ларнинг $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада узлуксизлигидан

$$a_{ik} = a_{ki}$$

хамда

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \cdot \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \theta \cdot \Delta x_m)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_k} + \alpha_{ik} = a_{ik} + \alpha_{ik}$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$\Delta x_i \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \text{ да } \alpha_{ik} \rightarrow 0.$$

Натижада (1) тенглик ушбу

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k} \alpha_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \right]$$

кўринишга келади.

Агар

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2},$$

$$\Delta x_i = \rho \cdot \zeta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

дейилса, сўнг $\Delta x_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) да, яъни $\rho \rightarrow 0$ да

$$\sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} \Delta x_k \Delta x_i = \rho^2 \sum_{i,k} \alpha_{ik} \zeta_i \zeta_k = \rho^2 \cdot \alpha(\rho)$$

(бунда, $\rho \rightarrow 0$ да $\alpha(\rho) \rightarrow 0$) бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\Delta f(x^0) = \frac{\rho^2}{2} \left[\sum_{i,k=1}^m a_{i,k} \zeta_i \zeta_k + \alpha(\rho) \right] \quad (2)$$

бўлишини топамиз.

Маълумки, $\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0)$ айирма $U_\delta(x^0)$ да ишора сақласа, яъни $\forall x \in U_\delta(x^0)$ да

$$\Delta f(x^0) \geq 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга,

$$\Delta f(x^0) \leq 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал максимумга эришади.

Юқоридаги (2) тенгликдан кўринадики, $\Delta f(x^0)$ нинг ишораси коэффициентлари

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлган

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \zeta_i \zeta_k \quad (3)$$

квадратик формага боғлиқ бўлади.

2-теорема. Агар (3) квадратик форма мусбат аниқланган бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуктада локал минимумга, манфий аниқланган бўлса, локал максимумга эришади.

Агар (3) квадратик форма ноаниқ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуктада локал экстремумга эришмайди.

◀ Бу теорема, кейинги пунктда, хусусий ҳолда яъни икки ўзгарувчили функциялар учун исботланади. ▶ (қаралсин, [1], 13-боб)

3⁰. Хусусий ҳоллар. $m = 1$ бўлсин. бу ҳолда $u = f(x)$ ($x \in R, u \in R$) функциянинг локал экстремумлари, экстремумнинг зарурий ва етарли шартлари каби тушунча ва тасдиқларга келамиз. Улар 25-маърузада баён этилган.

$m = 2$ бўлсин. Бу ҳолда $u = f(x, y)$ ($(x, y) \in R^2, u \in R$) икки ўзгарув-чили функциянинг локал экстремум тушунчалари юзага келиб, бу ҳол учун уларнинг таърифлари қуйидагича бўлади.

Айтайлик, $u = f(x, y)$ функция $E \subset R^2$ тўпلامда берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in E$ бўлсин.

Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $U_\delta((x_0, y_0)) \subset E$ бўлиб, $\forall (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$ учун

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \leq f(x_0, y_0))$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада локал минимумга (локал максимумга) эришади дейилади. (x_0, y_0) нукта $f(x, y)$ функциянинг локал минимум (максимум) нуктаси, $f(x_0, y_0)$ миқдор эса функциянинг минимум (максимум) қиймати дейилади.

Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $U_\delta((x_0, y_0)) \subset E$ бўлиб, $\forall (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0)) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ учун

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) < f(x_0, y_0))$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада қатъий локал минимумга (қатъий локал максимумга) эришади дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктада қатъий максимумга эришиши кўрсатилсин.

◀ $\delta > 0$ ($0 < \delta < 1$) сонни олиб, $(0,0)$ нуктанинг $U_\delta((0,0))$ атрофини ҳосил қиламиз. Унда $\forall (x, y) \in U_\delta((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$ учун

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} < f(0,0) = 1$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0,0)$ нуктада максимумга эришади. ▶

Агар $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in E \subset \mathbb{R}^2$ нуктада локал экстремумга эришса ва шу нуктада

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

бўлади.

Бироқ, $f(x, y)$ функциянинг бирор (x^*, y^*) нуктада $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий

ҳосилалари мавжуд бўлиб, улар шу нуктада нолга тенг бўлса, қаралаётган функция (x^*, y^*) нуктада экстремумга эришмасдан қолиши мумкин. Масалан,

$$f(x, y) = xy$$

функция

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар $(0,0)$ нуктада нолга тенг:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

бўлса ҳам, бу функция $(0,0)$ нуктада экстремумга эришмайди (функция графиги-гиперболик параболоидни тасаввур қилинг).

Айтайлик, $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ нуктанинг бирор $U_\delta((x_0, y_0))$ атрофида ($\delta > 0$) берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x, y)$ функция $U_\delta((x_0, y_0))$ да узулксиз ва узлуксиз

$f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ хусусий ҳосилаларга эга,

2) (x_0, y_0) стационар нукта:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Бу $f(x, y)$ функция учун 2^0 да юритилган мулоҳазаларни қўллаб

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{1}{2} (a_{11} \Delta x^2 + 2a_{12} \Delta x \Delta y + a_{22} \Delta y^2 + \alpha_{11} \Delta x^2 + 2\alpha_{12} \Delta x \Delta y + \alpha_{22} \Delta y^2) \quad (*) \end{aligned}$$

бўлишини топамиз, бунда

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0), a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0)$$

бўлиб,

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ да } \alpha_{11} \rightarrow 0, \alpha_{12} \rightarrow 0, \alpha_{22} \rightarrow 0$$

бўлади.

3-теорема. Агар

$$a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2 \quad (4)$$

квадратик форма мусбат аниқланган, яъни

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада локал минимумга эришади, агар (4) квадратик форма манфий аниқланган, яъни

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада локал максимумга эришади.

◀ Маълумки, $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуктада экстремумга эришиши $U_\delta((x_0, y_0))$ да ушбу

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

айирманинг ишора сақлаши билан боғлиқ:

$$\forall (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0)) \text{ да } \Delta f(x_0, y_0) > 0 \text{ бўлса,}$$

(x_0, y_0) нуктада локал минимум, $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ бўлса. (x_0, y_0) нуктада локал максимум содир бўлади.

$\Delta f(x_0, y_0)$ айирманинг ишорасини аниқлаш қулай бўлиши мақсадида (4) да

$$\Delta x = \rho \cdot \cos \varphi, \Delta y = \rho \cdot \sin \varphi$$

алмаштиришни бажарамиз, бунда

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Натижада (*) муносабат ушбу

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\rho^2}{2} \left[(a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) + (\alpha_{11} \cos^2 \varphi + 2\alpha_{12} \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_{22} \sin^2 \varphi) \right] \quad (5)$$

кўринишга келади.

Айтайлик,

$$a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

бўлсин.

Равшанки,

$$a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = \\ = \frac{1}{a_{11}} \left[(a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \cdot \sin^2 \varphi \right].$$

Айни пайтда, бу функция, φ нинг функцияси сифатида $[0, 2\pi]$ да узлуксиз бўлиб, ўзининг энг кичик қиймати (уни m билан белгилайлик) m га эга бўлади:

$$\left| a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi \right| \geq m > 0.$$

Иккинчи томондан, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ яъни $\rho \rightarrow 0$ да $\alpha_{11} \rightarrow 0$, $\alpha_{12} \rightarrow 0$, $\alpha_{22} \rightarrow 0$ бўлганлиги сабабли, ρ нинг етардли кичик қийматларида

$$\left| \alpha_{11} \cos^2 \varphi + 2\alpha_{12} \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_{22} \sin^2 \varphi \right| \leq |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m$$

бўлаолади.

Демак, $a_{11} > 0$, $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ бўлганда (5) тенгликнинг ўнг томонидаги ифода мусбат бўлади. Бинобарин,

$$\Delta f(x_0, y_0) > 0$$

бўлиб, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада локал минимумга эришади.

Айтайлик,

$$a_{11} < 0, \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

бўлсин. Бу ҳолда (5) тенгликнинг ўнг томонидаги ифода манфий бўлади. Бинобарин,

$$\Delta f(x_0, y_0) < 0$$

бўлиб, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада локал максимумга эришади. ►

3-эслатма. Агар

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада экстремумга эришмайди.

4-эслатма. Агар

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмаслиги ҳам мумкин (қаралсин, [1], 13-боб).

Машқлар

1. 3-теоремада келтирилган $f(x, y)$ функция учун (x_0, y_0) стационар нуктада

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришмаслиги исботлансин.

2. Ушбу

$$f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^3$$

функция экстремумга текширилсин.

13-амалий машғулот

Кўп ўзгарувчили функцияларни экстремумга текшириш.

13.1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$$

функция экстремумга текширилсин.

◀ Аввало берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз:

$$f'_x(x, y) = 2x + y - 2, \quad 2x + y - 2 = 0, \quad x_0 = \frac{1}{3}$$

$$f'_y(x, y) = x + 2y - 3, \quad x + 2y - 3 = 0, \quad y_0 = \frac{4}{3}.$$

Демак, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ стационар нуқта.

Равшанки,

$$f''_{x^2}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 1, \quad f''_{y^2}(x, y) = 2.$$

Демак,

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 2$$

$a_{11} = 2 > 0$ ва $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$ бўлганлиги учун берилган функция $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

нуқтада локал минимумга эришади ва

$$\min f(x, y) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

бўлади. ▶

13.2-мисол. Ушбу

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^4 + y^4, \\ f_2(x, y) &= -(x^4 + y^4), \\ f_3(x, y) &= x^3 + y^3, \end{aligned}$$

функциялар экстремумга текширилсин.

◀ Берилган функциялар учун $(0, 0)$ стационар нуқта бўлади. Бу функциялар учун

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлади. Равшанки, $(0,0)$ нуқтада $f_1(x,y)$ функция минимумга, $f_2(x,y)$ функция эса максимумга эришади. $f_3(x,y)$ функция $(0,0)$ нуқтада экстремумга эга бўлмайди. ►

Ко`п о`zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari

$f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ funksiya ochiq $M \subset R^2$ to`plamda berilgan bo`lib, $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in M$ bo`lsin.

5-Ta`rif. Agar x^0 nuqtaning $\exists \bigcup_{\delta}(x^0) \subset M$ atrofi topilsaki, $\forall x \in \bigcup_{\delta}(x^0)$ uchun $f(x) \leq f(x^0)$ ($f(x) \geq f(x^0)$)

bo`lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada **min (max)** ga ega deyiladi. $f(x^0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning lokal **(max) min** qiymati deyiladi va

$$f(x^0) = \max_{x \in \bigcup_{\delta}(x^0)} \{f(x)\} \quad (f(x^0) = \min_{x \in \bigcup_{\delta}(x^0)} \{f(x)\})$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning max va min qiymatlari uning **ekstremumlari** deb ataladi.

x^0 nuqtaning $\bigcup_{\delta}(x^0)$ atrofida

$$\Delta = f(x) - f(x^0) \quad (12)$$

ayirmani ko`raylik.

Agar bu ayirma $\bigcup_{\delta}(x^0)$ da o`z ishorasini saqlasa ya`ni har doim $\Delta \geq 0$ ($\Delta \leq 0$) bo`lsa, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada **min (max)** ga erishadi. Agar Δ ayirma x^0 nuqtaning \forall atrofida ham o`z ishorasini saqlamasa, unda $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada ekstremumga ega bo`la olmaydi.

1-Teorema. (zaruriy shart) $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada $f'_{x_1}(x_0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ xususiy hosilalar \exists bo`lsa, unda

$$f'_{x_1}(x_0) = \dots = f'_{x_m}(x^0) = 0 \quad (13)$$

bo`ladi.

1-Izoh. Teoremaning aksi har doim ham o`rinli bo`lavermaydi. Masala, $f(x,y) = x \cdot y$ funksiya uchun $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, lekin funksiya $(0,0)$ nuqtada ekstremumga erishmaydi, chunki u $(0,0)$ nuqtaning \forall atrofida har hil ishorali qiymatlarni qabul qiladi.

14-мавзу: Ошкормас функциялар. Ошкормас функцияларнинг мавжудлиги, узлуксизлиги ва дифференциалланувчилиги.

14-маъруза:

РЕЖА:

1. Ошкормас функция тушунчаси.
2. Ошкормас функциянинг мавжудлиги.

Таянч иборалар: ошкормас кўринишда берилган функция, ошкормас функциянинг аниқланиш тўплами

1. Ошкормас функция тушунчаси. Маълумки, $x \subset R, Y \subset R$ тўплamlар ва бирор f қоида берилган ҳолда ҳар бир $x \in X$ сонга f қоидага кўра битта $y \in Y$ сон мос кўйилса, X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган дейилар эди.

x ва y ўзгарувчиларни боғловчи қоида турлича жумладан аналитик ифодалар ёрдамида, жадвал ёрдамида, эгри чизиқ ёрдамида бўлиши мумкин.

Энди x ва y ўзгарувчилар тенглама ёрдамида боғланган ҳолда функция юзага келишини кўрсатамиз.

Айтайлик, x ва y ўзгарувчиларнинг $F(x, y)$ функцияси

$$E = \{(x, y) \in R^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

тенгламани қарайлик. Ҳар бир тайинланган $x = x_0$ да (1) тенглама y га исбатан тенгламага айланади. Бу тенглама ягона y_0 ечимга эга бўлсин. Демак,

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Бундай хусусиятга эга бўлган x_0 нуқталар бир қанча бўлиши мумкин. Улардан ташкил топган тўпламни X дейлик. Равшанки, бунда $X \subset (a, b)$ бўлади.

Энди X тўпламдан олинган ҳар бир x га ($x \in X$) (1) тенгламанинг ягона ечими y ни мос кўяйлик. Натижада X да аниқланган функция ҳосил бўлади. Уни $\varphi(x)$ дейлик. Демак,

$$\varphi : x \rightarrow y \text{ ва } F(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Бу $\varphi(x)$ ошкормас (ошкормас кўринишда берилган) функция дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0 \quad (2)$$

тенглама ёрдамида ошкормас функция аниқланиши кўрсатилсин.

◀Равшанки, (2) тенглама ҳар бир $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ да ягона

$$y = \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ечимга эга ва

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Демак, (2) тенглама $\varphi(x)$ ошкормас функцияни аниқлайди. ▶

2-мисол. Ушбу

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$$

тенглама ёрдамида ошкормас функция аниқланиши кўрсатилсин.

◀Берилган тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x = y - \frac{1}{2} \sin y = \alpha(y), \quad (y \in (-\infty, +\infty)).$$

Бу $\alpha(y)$ функция R да узулуксиз ва $\alpha'(y) = 1 - \frac{1}{2} \cos y > 0$ бўлади. Унда

$\alpha(y)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да тесқари $y = \alpha^{-1}(x)$ функцияга эга ва

$$F(x, \alpha^{-1}(x)) = 0$$

бўлади. Демак, бу тенглама ушбу

$$\varphi: x \rightarrow \alpha^{-1}(x)$$

ошкормас функцияни аниқлайди. ▶

3-мисол. Ушбу

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0 \quad (y > 0)$$

тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайдими?

◀Аниқламайди, чунки ҳар бир $x \in (-\infty, +\infty)$ да $y^2 - \ln y > 0$ бўлганлиги сабабли, ечимга эга эмас. ▶

Ошкормас функцияларни ўрганишда қуйидаги масала-лар муҳимдир:

1) $F(x, y)$ функция бирор $E \subset R^2$ тўпламда берилган ҳолда $y = \varphi(x)$ ошкормас функция мавжуд бўладими ва бу функциянинг аниқланиш тўплами қандай бўлади?

2) (1) тенглама билан аниқланган ошкормас функция $y = \varphi(x)$ қандай хоссаларга эга ва бу хоссалар $F(x, y)$ функция хоссалари билан қандай боғланган?

2⁰. Ошкормас функциянинг мавжудлиги.

1-теорема. Фараз қилайлик, $F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтанинг бирор атрофи

$$U_{hk}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h \quad y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

да ($h > 0, k > 0$) берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $F(x, y)$ функция $U_{hk}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) Ҳар бир тайин $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ да y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи;

$$3) F(x_0, y_0) = 0.$$

У ҳолда (x_0, y_0) нуктанинг шундай атрофи

$$U_{\delta\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

топиладики, $(0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k)$,

а) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона y ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) ечимга эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида ошқормас $y = \varphi(x)$ функция аниқланади,

б) $\varphi(x_0) = y_0$ бўлади

в) $y = \varphi(x)$ функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз бўлади.

◀ $U_{hk}((x_0, y_0))$ атрофга тегишли бўлган

$$(x_0, y_0 - \varepsilon) \quad (x_0, y_0 + \varepsilon) \quad (0 < \varepsilon < k)$$

нукталарни олиб, $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ сегментда

$$\psi(y) = F(x_0, y)$$

функцияни қараймиз. Теореманинг 2)-шартига кўра $\psi(y)$ ўсувчи, 3)-шартига кўра $\psi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ бўлади. Бунда эса

$$\psi(y_0 - \varepsilon) = F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0,$$

$$\psi(y_0 + \varepsilon) = F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Теореманинг 1)-шартига кўра $F(x, y)$ функция $U_{hk}((x_0, y_0))$ да узлуксиз. Унда узлуксиз функциянинг хоссасига кўра, x_0 нуктанинг шундай $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ атрофи $(0 < \delta < h)$ топиладики, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0,$$

$$F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \tag{3}$$

бўлади.

Энди (x_0, y_0) нуктанинг

$$U_{\delta\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофида

$$F(x, y) = 0$$

тенглама y ни x нинг ошқормас функцияси сифатида аниқлашини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нуктани олиб, $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ да ушбу

$$g(y) = F(x^*, y)$$

функцияни қараймиз. Равшанки, бу функция $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ сегментда узлуксиз ва айни пайтда (3) муносабатга биноан

$$g(y_0 - \varepsilon) = F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0,$$

$$g(y_0 + \varepsilon) = F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0$$

бўлади. Унда Больцано-Кошининг теоремасига кўра шундай $y^* \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ нукта топиладики,

$$g(y^*) = F(x^*, y^*) = 0$$

бўлади.

Айни пайтда, $g(y)$ функция $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлганлиги сабабли y шу оралиққа биттадан ортик нуктада нолга айланмайди.

Шундай қилиб, ихтиёрий $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун ягона $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ топиладики,

$$F(x, y) = 0$$

бўлади. Бу эса $U_{\infty}((x_0, y_0))$ да $F(x, y) = 0$ тенглама y ни x нинг ошқормас функцияси сифатида аниқлашни билдиради:

$$y = \varphi(x) : F(x, \varphi(x)) = 0.$$

Айтайлик, $x = x_0$ бўлсин. Унда теореманинг 3) шартига кўра

$$F(x_0, y_0) = 0$$

бўлади. Бинобарин, аниқланган ошқормас функциянинг x_0 нуктадаги қиймати $\varphi(x_0) = y_0$ бўлади.

Модомики, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун $\varphi(x)$ га кўра унга мос келадиган $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ бўлар экан, унда

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |y - y_0| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, ошқормас функция x_0 нуктада узлуксиз.

Ошқормас функциянинг $\forall x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нуктада узлуксиз бўлишини кўрсатиш бу функциянинг x_0 нуктада узлуксиз бўлишини кўрсатиш кабидир. Демак, мавжудлиги кўрсатилган ошқормас функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз бўлади. ►

3⁰. Ошқормас функциянинг хосилалари. Ошқормас функциянинг хосиласини аниқлайдиган теоремани келтирамиз.

2-теорема. Фараз қилайлик, $F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктанинг бирор атрофи $U_{hk}((x_0, y_0))$ да $(h > 0, k > 0)$ берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{hk}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

- 2) $U_{hk}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;
 3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай $U_{\delta\varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофи ($0 < \delta < h$, $0 < \varepsilon < k$) топиладики, $F(x, y) = 0$ тенглама у ни x нинг ошқормас $y = \varphi(x)$ функцияси сифатида аниқлайди ва бу $y = \varphi(x)$ функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз дифференциал-ланувчи бўлиб,

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}$$

бўлади.

◀ Теореманинг шартига кўра $F'_y(x, y)$ функция $U_{hk}((x_0, y_0))$ да узлуксиз ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Айтайлик, $F'_y(x_0, y_0) > 0$ бўлсин. Узлуксиз функция хоссасига кўра (x_0, y_0) нуқтанинг шундай $U_{\delta\varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофи ($0 < \delta < h$, $0 < \varepsilon < k$) топиладики, $\forall (x, y) \in U_{\delta\varepsilon}((x_0, y_0))$ да $F'_y(x, y) > 0$ бўлади. Бундан эса ҳар бир тайин $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да $F(x, y)$ функция у ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи бўлиши келиб чиқади. У ҳолда 1-теоремага кўра $F(x, y) = 0$ тенглама $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да у ни x нинг ошқормас $y = \varphi(x)$ функцияси сифатида аниқлайди ва $y = \varphi(x)$ ошқормас функция $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз бўлиб, $\varphi(x_0) = y_0$ бўлади.

Айтайлик, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ бўлсин. Равшанки,
 $F(x, y) = 0$, $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$

бўлиб,

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0 \quad (4)$$

бўлади.

Теореманинг шартдан $F(x, y)$ функциянинг (x, y) нуқтада дифференциаланувчи бўлиши келиб чиқади. Бинобарин,

$$\Delta F(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \quad (5)$$

бўлиб, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ бўлади.

(4) ва (5) муносабатлардан топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta}$$

Кейинги тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\varphi'(x) = y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

ҳосил бўлади.

$U_{\delta}((x_0, y_0))$ да $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар узлуксиз ва $F'_y(x, y) \neq 0$ бўлишидан ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$\phi'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

нинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз бўлиши келиб чиқади. ►

4-мисол. Ушбу

$$F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7 = 0$$

тенглама $(2, 0)$ нуктанинг атрофида y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлаши ва бу ошкормас функция-нинг ҳосиласи топилсин.

◀ Равшанки,

$$F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7$$

функция R^2 да аниқланган ва узлуксиз. Бинобарин, y $(2, 0)$ нуктанинг атрофида узлуксиз, $F(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари куйидагича бўлади:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^y + y \sin x - x^3 + 7) = y \cos x - 3x^2,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^y + y \sin x - x^3 + 7) = e^y + \sin x.$$

Демак, $F(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари R^2 да, жумладан $(2, 0)$ нуктанинг атрофида узлуксиз.

Сўнг

$$\frac{\partial F(2, 0)}{\partial y} = (e^y + \sin x)_{x=2, y=0} = 1 + \sin 2 \neq 0.$$

Ва ниҳоят,

$$F(2, 0) = (e^y + y \sin x - x^3 + 7)_{x=2, y=0} = 0$$

бўлади. Унда 2- теоремага кўра

$$F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7 = 0$$

тенглама $(2, 0)$ нуктанинг атрофида y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди ва бу ошкормас $\varphi(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{y \cos x - 3x^2}{e^y + \sin x}$$

бўлади. ►

1-эслатма. Ошкормас функциянинг ҳосиласини куйида-гича ҳам ҳисобласа бўлади:

$$F(x, y) = 0$$

ни (у ўзгарувчи x нинг функцияси эканини ҳисобга олиб) дифференциаллаб топамиз:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0.$$

Кейинги тенгликдан эса

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

Айтайлик, $F(x, y)$ функция $U_{\infty}((x_0, y_0))$ да узлуксиз иккинчи тартибли

$$F''_{x^2}(x, y), \quad F''_{xy}(x, y), \quad F''_{y^2}(x, y)$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

Маълумки,

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Буни дифференциаллаб топамиз:

$$y'' = -\frac{(F'_x(x, y))'_x \cdot F'_y(x, y) - (F'_y(x, y))'_x \cdot F'_x(x, y)}{(F'_y(x, y))^2}.$$

Агар

$$\begin{aligned} (F'_x(x, y))'_x &= F''_{x^2}(x, y) + F''_{xy}(x, y) \cdot y', \\ (F'_y(x, y))'_x &= F''_{yx}(x, y) + F''_{y^2}(x, y) \cdot y' \end{aligned} \quad (6)$$

эканини ҳисобга олсак. Унда

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(F''_{yx}(x, y) + F''_{y^2}(x, y) \cdot y') F'_x(x, y) - (F''_{x^2}(x, y) + F''_{xy}(x, y) \cdot y') \cdot F'_y(x, y)}{(F'_y(x, y))^2} = \\ &= \frac{F''_{yx}(x, y) \cdot F'_x(x, y) - F''_{x^2}(x, y) \cdot F'_y(x, y) + [F''_{y^2}(x, y) \cdot F'_x(x, y) - F''_{xy}(x, y) \cdot F'_y(x, y)] y'}{(F'_y(x, y))^2} \end{aligned}$$

бўлади. Бу ифодадаги y' нинг ўрнига

$$-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

ни қўйиб, ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи учун куйидаги муносабатга (формулага) келамиз:

$$y'' = \frac{2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - F_y'^2 \cdot F''_{x^2} - F_x'^2 \cdot F''_{y^2}}{F_y'^2}.$$

2-эслатма. Ошкормас функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини қўйидагича ҳам ҳисобласа бўлади.

Юқорида

$$F(x, y) = 0$$

ни дифференциаллаб,

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0$$

бўлишини топган эдик. Буни яна бир марта дифференциаллаб топамиз:

$$\left[F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' \right]'_x = \left(F'_x(x, y) \right)'_x + y' \cdot \left(F'_y(x, y) \right)'_x + F'_y(x, y) \cdot y'' = 0$$

Агар (6) мунсабатлардан фойдалансак, кейинги тенглик ушбу

$$F''_{x^2}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y) \cdot y' + F''_{y^2}(x, y) \cdot y'^2 + F'_y(x, y) \cdot y'' = 0$$

тенгликка келади. Ундан эса

$$y'' = - \frac{F''_{x^2}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y) \cdot y' + F''_{y^2}(x, y) \cdot y'^2}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

5-мисол. Ушбу

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0$$

тенглама билан аниқланадиган ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи топилсин.

◀ Дифференциаллаб топамиз:

$$\left(F(x, y) \right)'_x = \left(xe^y + ye^x - 2 \right)'_x = 0 \quad ,$$

$$e^y + ye^x + (xe^y + e^x) \cdot y' = 0 \quad (7)$$

$$y' = - \frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y} \quad (8)$$

Энди (7) ни яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$e^y \cdot y' + y'e^x + ye^x + e^y \cdot y' + xe^y y' \cdot y' + xe^y \cdot y'' + y''e^x + y'e^x = 0.$$

Кейинги тенгликдан

$$y'' = - \frac{2e^y y' + 2e^x y' + xe^y \cdot y'^2 + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдан y' нинг ўрнига (8) да фойдаланган қийматини қўйиб, ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи топилади. ▶

Машқлар

1. Ушбу

$$y^5 + y - x = 0$$

тенглама билан аниқланган $y = \varphi(x)$ ошкормас функциянинг графиги ясалсин.

2. Ушбу

$$x^y = y^x \quad (x \neq y)$$

тенглама билан аниқланадиган $y = \varphi(x)$ ошкормас функциянинг y' ва y'' ҳосилалари топилсин.

14-амалий машғулот

Ошкормас функцияларнинг ҳосилаларини топиш.

Ошкормас кўринишда берилган $y = y(x)$ функциянинг экстремумлари топилсин.

12.13 $y^2 - 2y - \sin x = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$.

12.14 $(y - x)^3 + x + 6 = 0$.

12.15 $(y - x^2)^2 = x^5, x^2 + y^2 \neq 0$.

12.16 $x^2 + y^2 + xy = 27$.

Ошкормас кўринишда берилган $z = z(x, y)$ функциянинг экстремумлари топилсин.

12.17 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

12.18 $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

12.19 $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

12.20 $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

12.21 $5z^2 + 4zy + y^2 - 2y + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.

15-мавзу: Сонли қаторлар тушунчаси, унинг яқинлашиши ва узоқлашиши.

15-маъруза:

РЕЖА:

1⁰. Сонли қатор тушунчаси.

2⁰. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари.

3⁰. Қаторнинг яқинлашувчилиги. Коши теоремаси.

Таянч иборалар: Сонли қатор тушунчаси, қисмий йиғинди, геометрик қатор,

яқинлашувчи қатор

1⁰. Сонли қатор тушунчаси.Фараз қилайлик,

$$\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Улар ёрдамида ушбу

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

ифодани ҳосил қиламиз. (1) ифода сонли қатор, қисқача қатор дейилади ва у $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Бунда $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ сонлар қаторнинг ҳадлари, a_n эса қаторнинг умумий ҳади (ёки n -ҳади) дейилади.

Қуйидаги

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

йиғинди (1) қаторнинг n -қисмий йиғиндиси дейилади.

Демак, (1) қатор берилганда ҳар доим бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат ушбу $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

Масалан,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

қаторнинг n -қисмий йиғиндиси

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

бўлиб, улардан тузилган $\{S_n\}$ кетма-кетлик

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

бўлади.

1-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{S_n\}$ кетма-кетлик S га ($S \in R$) яқинлашса, (1) қатор яқинлашувчи дейилади, S унинг йиғин-диси дейилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Агар $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлмаса (лимит мавжуд бўлмаса ёки чексиз бўлса), (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

қатор учун $S_n = 1 - \frac{1}{1+n}$ бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

бўлади. Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғин-диси 1 га тенг:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

2-мисол. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

қатор узоклашувчи бўлади, чунки

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

3-мисол. Ушбу

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

қатор учун

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{агар } n - \text{жуфт сон} \\ 1, & \text{агар } n - \text{ток сон} \end{cases}$$

бўлиб у $n \rightarrow \infty$ да лимитга эга эмас.

Демак, берилган қатор узоклашувчи.

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \in R, q \in R)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Одатда, бу геометрик қатор деб юритилади.

Берилган қатор учун

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

бўлиб, $|q| < 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда геометрик қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{a}{1-q}$ га тенг .

Агар $q > 1$ бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty ,$$

$q = 1$ бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$$

бўлиб, бу ҳолларда берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

$q \leq -1$ бўлганда эса $\{S_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас. Демак, бу ҳолда ҳам қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, геометрик қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|q| \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. ►

2⁰. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари. Айтайлик, бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Ушбу

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \quad (2)$$

қатор (бунда m – тайинланган натурал сон) (1) қаторнинг қолдиғи дейилади.

1-хосса. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, (2) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча; (2) қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан (1) қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

◀ (1) қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n ,$$

(2) қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$M_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$$

лар учун

$$S_{m+n} = S_m + M_k^{(m)} , \quad (3)$$

бўлади.

Айтайлик, (1) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $k \rightarrow \infty$ да S_{m+n} чекли лимитга эга бўлиб, (3) муносабатга кўра $k \rightarrow \infty$ да $M_k^{(m)}$ ҳам чекли лимитга эга бўлади. Демак, (2) қатор яқинлашувчи.

Айтайлик, (2) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $k \rightarrow \infty$ да $M_k^{(m)}$ чекли лимитга эга бўлади. Яна (3) муносабатга кўра $k \rightarrow \infty$ да S_{m+n} ҳам чекли лимитга эга бўлади. Демак, (1) қатор яқинлашувчи. ►

2-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c \cdot S$ га тенг бўлади, бунда $c \neq 0$ бўлган ўзгармас сон.

3-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда S_1 ва S_2 га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S_1 + S_2$ га тенг бўлади.

2) ва 3)- хоссаларнинг исботи сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги таърифидан бевосита келиб чиқади.

4-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, $n \rightarrow \infty$ да a_n нолга интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

◀ Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлсин. Таърифга биноан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S.$$

Равшанки,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \blacktriangleright$$

Эслатма. Қаторнинг умумий ҳади a_n нинг $n \rightarrow \infty$ да нолга интилишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

қаторнинг умумий ҳади $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ бўлиб, у $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Аммо бу қатор узоклашувчи, чунки

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да $+\infty$ га интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Юқорида келтирилган 4)- хосса қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.

5-хосса. Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг ҳадларини гуруҳлаб қуйидаги

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots \quad (4)$$

қаторни ҳосил қиламиз, бунда

$$n_1 < n_2 < \dots$$

бўлиб, $\{n_k\}$ кетма-кетлик натурал сонлар кетма-кетлиги $\{n\}$ нинг қисмий кетма-кетлиги.

Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда (4) қатор ҳам яқинлашувчи ва йиғиндиси S бўлади.

◀ (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси S га тенг бўлсин. У ҳолда

$$n \rightarrow \infty \text{ да } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow S$$

бўлади.

Айтайлик, (4) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик $\{S_{n_k}\}$ бўлсин ($k = 1, 2, 3, \dots$). Равшанки, бу кетма-кетлик $\{S_{n_k}\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги бўлади. Маълум теоремага кўра

$$k \rightarrow \infty \text{ да } S_{n_k} \rightarrow S$$

бўлади. Демак, (4) қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси S га тенг. ▶

3⁰. Қаторнинг яқинлашувчилиги. Коши теоремаси.

Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор берилган бўлсин. Маълумки, бу қаторнинг яқинлашув-чилиги ушбу

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

кетма-кетликнинг $n \rightarrow \infty$ да чекли лимитга эга бўлишидан иборат.

9-маърузада сонлар кетма-кетлигининг чекли лимитга эга бўлиши ҳақида Коши теоремаси, яъни $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг $n \rightarrow \infty$ да чекли лимитга эга бўлиши учун

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m \in \mathbb{N} \text{ да } |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли экани келтирилган эди.

Бу тушунча ва тасдиқдан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчилигини ифодалайдиган қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема (Коши теоремаси). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топилиб, $\forall n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \dots$ бўлганда

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon \quad (5)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Эслатма. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун (5) шарт бажарилмаса, яъни

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k, \exists m \in \mathbb{N} \\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \geq \varepsilon_0 \quad (6)$$

бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Бу қатор учун Коши теоремасидаги (5) шартнинг бажарилишини текширамиз :

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}} \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга қўра $n_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1$ деб олинса, у ҳолда $\forall n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \dots$ лар учун

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}} \right| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, берилган қатор яқинлашувчи. ▶

6-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (7)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ва ихтиёрий $k \in \mathbb{N}$ учун $n = k$, $m = k$ бўлганда

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} \right| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

бўлади.

(6) шартга кўра (7) қатор узоқлашувчи бўлади. ►

Одатда, (7) қатор гармоник қатор дейилади. Демак, гармоник қатор узоқлашувчи қатор.

Машқлар

1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} \quad (x \neq \pm 1)$$

қаторнинг яқинлашувчилиги исботлансин, йиғиндиси топилсин.

2. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши исботлансин.

15-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

қатор учун $S_n = 1 - \frac{1}{1+n}$ бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

бўлади. Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғин-диси 1 га тенг:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

2-мисол. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

қатор узоқлашувчи бўлади, чунки

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty .$$

3-мисол. Ушбу

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

қатор учун

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{агар } n - \text{ жуфт сон} \\ 1, & \text{агар } n - \text{ тоқ сон} \end{cases}$$

бўлиб у $n \rightarrow \infty$ да лимитга эга эмас.

Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \in R, q \in R)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Одатда, бу геометрик қатор деб юритилади.

Берилган қатор учун

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

бўлиб, $|q| < 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда геометрик қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси

$\frac{a}{1 - q}$ га тенг .

Агар $q > 1$ бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty ,$$

$q = 1$ бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$$

бўлиб, бу ҳолларда берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

$q \leq -1$ бўлганда эса $\{S_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас. Демак, бу ҳолда ҳам қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, геометрик қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|q| \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. ►

16 - мавзу: Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари.

16-маъруза

1. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари (1-2-3 хоссалари)

2. 4-5 хоссалар

Таянч иборалар: қаторнинг қисмий йиғиндиси, қаторнинг қолдиғи

1⁰. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари. Айтайлик, бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Ушбу

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \quad (2)$$

қатор (бунда m – тайинланган натурал сон) (1) қаторнинг қолдиғи дейилади.

1-хосса. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, (2) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча; (2) қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан (1) қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

◀ (1) қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad ,$$

(2) қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$M_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$$

лар учун

$$S_{m+n} = S_m + M_k^{(m)} \quad , \quad (3)$$

бўлади.

Айтайлик, (1) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $k \rightarrow \infty$ да S_{m+n} чекли лимитга эга бўлиб, (3) муносабатга кўра $k \rightarrow \infty$ да $M_k^{(m)}$ ҳам чекли лимитга эга бўлади. Демак, (2) қатор яқинлашувчи.

Айтайлик, (2) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $k \rightarrow \infty$ да $M_k^{(m)}$ чекли лимитга эга бўлади. Яна (3) муносабатга кўра $k \rightarrow \infty$ да S_{m+n} ҳам чекли лимитга эга бўлади. Демак, (1) қатор яқинлашувчи. ►

2-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c \cdot S$ га тенг бўлади, бунда $c \neq 0$ бўлган ўзгармас сон.

3-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда S_1 ва S_2 га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S_1 + S_2$ га тенг бўлади.

2) ва 3)- хоссаларнинг исботи сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги таърифидан бевосита келиб чиқади.

4-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, $n \rightarrow \infty$ да a_n нолга интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

◀ Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлсин. Таърифга биноан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S.$$

Равшанки,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \blacktriangleright$$

Эслатма. Қаторнинг умумий ҳади a_n нинг $n \rightarrow \infty$ да нолга интилишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

қаторнинг умумий ҳади $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ бўлиб, у $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Аммо

бу қатор узоқлашувчи, чунки

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да $+\infty$ га интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Юқорида келтирилган 4)- хосса қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.

5-хосса. Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг ҳадларини гуруҳлаб қуйидаги

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots \quad (4)$$

қаторни ҳосил қиламиз, бунда

$$n_1 < n_2 < \dots$$

бўлиб, $\{n_k\}$ кетма-кетлик натурал сонлар кетма-кетлиги $\{n\}$ нинг қисмий кетма-кетлиги.

Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда (4) қатор ҳам яқинлашувчи ва йиғиндиси S бўлади.

◀ (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси S га тенг бўлсин. У ҳолда

$$n \rightarrow \infty \quad \text{да} \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow S$$

бўлади.

Айтайлик, (4) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик $\{S_{n_k}\}$ бўлсин ($k = 1, 2, 3, \dots$). Равшанки, бу кетма-кетлик $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги бўлади. Маълум теоремага кўра

$$k \rightarrow \infty \quad \text{да} \quad S_{n_k} \rightarrow S$$

бўлади. Демак, (4) қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси S га тенг. ▶

1⁰. Қаторнинг яқинлашувчилиги. Коши теоремаси.

Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор берилган бўлсин. Маълумки, бу қаторнинг яқинлашув-чилиги ушбу

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

кетма-кетликнинг $n \rightarrow \infty$ да чекли лимитга эга бўлишидан иборат.

9-маърузада сонлар кетма-кетлигининг чекли лимитга эга бўлиши ҳақида Коши теоремаси, яъни $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг $n \rightarrow \infty$ да чекли лимитга эга бўлиши учун

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m \in \mathbb{N} \text{ да } |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли экани келтирилган эди.

Бу тушунча ва тасдиқдан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчилигини ифодалайдиган қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема (Коши теоремаси). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиши учун

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топилиб, $\forall n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \dots$ бўлганда

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon \quad (5)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Эслатма. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун (5) шарт бажарилмаса, яъни

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k, \exists m \in \mathbb{N} \\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \geq \varepsilon_0 \quad (6)$$

бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Бу қатор учун Коши теоремасидаги (5) шартнинг бажарилишини текширамыз :

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}} \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1$ деб олинса, у ҳолда $\forall n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \dots$ лар учун

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}} \right| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, берилган қатор яқинлашувчи. ►

6-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (7)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ва ихтиёрий $k \in \mathbb{N}$ учун $n = k$, $m = k$ бўлганда

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} \right| &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

бўлади.

(6) шартга кўра (7) қатор узоқлашувчи бўлади. ►

Одатда, (7) қатор гармоник қатор дейилади. Демак, гармоник қатор узоқлашувчи қатор.

Машқлар

3. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}} \quad (x \neq \pm 1)$$

қаторнинг яқинлашувчилиги исботлансин, йиғиндиси топилсин.

4. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши исботлансин.

16-амалий машғулот

Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари

1⁰. Сонли қатор тушунчаси. Қаторнинг яқинлашувчилиги ва узоқлашувчилиги. Ушбу

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

ифода қатор (сонли қатор) дейилади, бунда a_1, a_2, \dots ҳақиқий сонлар қатор ҳадлари, a_n эса қаторнинг умумий ҳади (n - ҳади) дейилади.

Қуйидаги

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

йиғинди (1) қаторнинг қисмий йиғиндиси (n -қисмий йиғиндиси) дейилади.

1 – т а ь р и ф . Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

мавжуд бўлиб, у чекли сон S га ($S \in \mathbf{R}$) тенг бўлса, (1) қатор я қ и н л а ш у в ч и , S сон эса унинг й и ғ и н д и с и дейилади.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

2⁰. Яқинлашувчи қаторнинг асосий хоссалари. Айтайлик,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда S_1 ва S_2 бўлсин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$$

У ҳолда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ яқинлашувчи ва $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \cdot S_1$ бўлади, бунда $c = \text{const}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ яқинлашувчи ва $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$ бўлади.

3) Куйидаги

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

муносабат ўринли бўлади. Бу шарт қатор яқинлашишининг зарурий шартини ифодалайди.

1 – м и с о л . Ушбу

$$\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчилиги аниқлансин, йиғиндиси топилсин.

◀ Бу қаторнинг умумий ҳадини куйидагича

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$$

ёзиб, унинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \dots - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} = 2 - \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

Равшанки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{2n+1} \right) = 2$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси 2 га тенг. ▶

2 – м и с о л . Ушбу

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Равшанки, бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

бўлади. Уни куйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} + \left[\frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \right] = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Натижада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) = \frac{2}{3}$$

бўлиб, ундан берилган қаторнинг яқинлашувчи, йиғиндиси $S = \frac{2}{3}$ бўлиши келиб чиқади. ►

3 – мисол. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Бу қаторнинг умумий ҳади

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

бўлади. $n \rightarrow \infty$ да a_n нинг лимитини топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n} \ln \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln \ln n}{n}}} = 1$$

Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди. Бинобарин, қатор узоклашувчи бўлади. ►

4 – мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Одатда бу қаторни **геометрик қатор** дейилади. Қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Равшанки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \begin{cases} \frac{a}{1 - q}, & \text{агар } |q| < 1 \text{ бўлса,} \\ +\infty, & \text{агар } q > 1 \text{ бўлса,} \\ \text{мавжуд эмас,} & \text{агар } q \leq -1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

ва $q = 1$ да $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ бўлади.

Демак, геометрик қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|q| \geq 1$ бўлганда узоклашувчи бўлади. ►

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилиги кўрсатилсин ва уларнинг йиғиндилари топилсин:

$$\begin{array}{ll}
2492. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots & 2493. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
2494. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & 2495. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
2496. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} & 2497. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)} \\
2498. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)} & 2499. \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \\
2500. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3-1}{n^3+1} & 2501. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \\
2502. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cdot \sin \frac{3\alpha}{2^{n+1}} & 2503. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} \\
2504. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cdot \cos \frac{3}{2^n} & 2505. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} \\
2506. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} &
\end{array}$$

Қуйидаги қаторлар учун қатор яқинлашувчилигининг зарурий шarti бажарилмаслиги кўрсатилсин:

$$\begin{array}{ll}
2507. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,02} & 2508. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \\
2509. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^2} & 2510. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)} \\
2511. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \ln \frac{n^2+1}{n^2} & 2512. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2} \\
2513. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}} & 2514. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}
\end{array}$$

$$2515. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 9) \arcsin \frac{1}{n^2 + 5}$$

Солиштириш (таққослаш) аломатларидан фойдаланиб қуйидаги

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторлар яқинлашишга текширилсин:

$$2516. a_n = \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$$

$$2517. a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$$

$$2518. a_n = \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}$$

$$2519. a_n = \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2 \ln n}$$

$$2520. a_n = \frac{\arcsin \frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$$

$$2521. a_n = \frac{\operatorname{arctg}(n^2 + 2n)}{3^n + n^2}$$

$$2522. a_n = \frac{n^2}{e^n}$$

$$2523. a_n = (3n + n^3) e^{-\sqrt{n}} \cdot \ln n$$

17-мавзу: Мусбат ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашиш аломатлари

17-майруза:

РЕЖА:

1⁰. Мусбат ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги.

2⁰. Мусбат ҳадли қаторларда таққослаш теоремалари.

Таянч иборалар: Мусбат ҳадли қаторлар, қисмий йиғиндилар, монотон кетма-кетликнинг лимити

1⁰. Мусбат ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги.

Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Агар бу қаторда $a_n \geq 0 \quad (\forall n \in N)$ бўлса, (1) мусбат ҳадли қатор дейилади.

Мусбат ҳадли қаторларда, уларнинг қисмий йиғинди-ларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

1-теорема. Мусбат ҳадли

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун

$$\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + \dots + a_n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги.** (1) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $n \rightarrow \infty$ да $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади. Яқинлашувчи кетма-кетликнинг хоссасига кўра $\{S_n\}$ чегараланган, жумладан юқоридан чегараланган бўлади.

Етарлилиги. $\{S_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлсин. Унда монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага кўра $\{S_n\}$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да чекли лимитга эга бўлади. Демак, (1) қатор яқинлашувчи. ▶

Эслатма. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

мусбат ҳадли қаторда, унинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

2⁰. Мусбат ҳадли қаторларда таққослаш теоремалари.

Иккита

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

мусбат ҳадли қаторлар берилган бўлсин.

2-теорема. Фараз қилайлик $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар учун $\forall n \in N$ да

$$a_n \leq b_n \quad (2)$$

тенгсизлик бажарилсин.

У ҳолда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

◀ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторларнинг қисмий йиғиндилари мос равишда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$S'_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

бўлсин. У ҳолда (2) муносабатга кўра

$$S_n \leq S'_n \quad (3)$$

бўлади.

Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда 1-теоремага биноан $\{S'_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади. Айни пайтда, (3) муносабатни эътиборга олиб, $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг ҳам юқоридан чегараланган бўлишини топамиз. Яна 1-теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. Унда (3) муносабат ва эслатмадан фойдаланиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишини топамиз.



17-амалий машғулот

Мусбат хадли қаторларнинг яқинлашиш аломатлари (таққослаш аломатлари. Интеграл аломати)

Фараз қилайлик, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (5)$$

мусбат қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг яқинлашувчи бўлиши аломатларини келтирамиз:

1⁰. Коши аломати. *Агар (5) қаторда $n \in \mathbb{N}$ нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб, кейинги барча $n \geq n_0$ учун*

$$\sqrt[n]{a} \leq q < 1$$

бўлса, (5) қатор яқинлашувчи,

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

бўлиб, $q < 1$ бўлса, (5) қатор яқинлашувчи, $q > 1$ бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

2⁰. Даламбер аломати. *Агар (5) қаторда $n \in \mathbb{N}$ нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб, кейинги барча $n \geq n_0$ учун*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$$

бўлса, (5) қатор яқинлашувчи,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

бўлиб, $d < 1$ бўлса, (5) қатор яқинлашувчи, $d > 1$ бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

3⁰. Раабе аломати. *Агар (5) қаторда $n \in \mathbb{N}$ нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб, кейинги барча $n \geq n_0$ учун*

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq r > 1$$

бўлса, (5) қатор яқинлашувчи,

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1$$

бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатни кўйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \rho \quad (\rho \in \mathbf{R})$$

бўлиб, $\rho > 1$ бўлса, (5) қатор яқинлашувчи, $\rho < 1$ бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

4⁰. Кошининг интеграл аломати. Агар $f(x)$ функция $[1, +\infty)$ да узлуксиз, камаювчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

бўлиб, ушбу

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt$$

лимит мавжуд ва чекли бўлганда (5) қатор яқинлашувчи, бу лимит чексиз ёки мавжуд бўлмаганда (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

5⁰. Гаусс аломати. Агар (5) қатор учун

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad (|\theta_n| < c, \varepsilon > 0)$$

бўлса, у ҳолда

- 1) $\lambda > 1$ бўлганда (5) қатор яқинлашувчи,
- 2) $\lambda < 1$ бўлганда (5) қатор узоқлашувчи,
- 3) $\lambda = 1, \mu > 1$ бўлганда (5) қатор яқинлашувчи,
- 4) $\lambda = 1, \mu \leq 1$ бўлганда (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

8 – мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Берилган қаторнинг умумий ҳади

$$a_n = \frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}$$

бўлади. Бу қаторга Коши аломатини қўллаб топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(1+n)^{n^2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot 2}{(1+n)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{1+n} \right)^n = \frac{2}{e}.$$

Равшанки, $\frac{2}{e} < 1$. Демак, берилган қатор Коши аломатига кўра яқинлашувчи бўлади. ►

9 – м и с о л . Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Берилган қатор учун

$$a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$$

бўлиб,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 3^n}{n^5} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \frac{3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

бўлади. Энди бу нисбатнинг лимитини топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$$

Демак, берилган қатор Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи бўлади. ►

10 – м и с о л . Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (\alpha > 0)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Айтайлик,

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

бўлсин. Бу функция $[1, +\infty)$ да узлуксиз, $f(x) > 0$, камаювчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

бўлади. Равшанки,

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) \quad (\alpha \neq 1)$$

$x \rightarrow +\infty$ да бу функциянинг лимити

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{агар } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{агар } \alpha < 1 \end{cases}$$

бўлиб, $\alpha = 1$ бўлганда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \infty$$

бўлади. Унда Кошининг интеграл аломатига кўра

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (*)$$

қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \leq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. ►

Одатда, () қатор умумлашган гармоник қатор, $\alpha = 1$ бўлган ҳолда (*) қатор гармоник қатор деб юритилади.*

18-мавзу: Ихтиёрый ҳадли қаторлар ва улар яқинлашишининг Лейбниц, Дирихле ва Абел аломатлари.

18-маъруза

РЕЖА:

1. Лейбниц аломати.
2. Дирихле-Абель аломати.

Таянч иборалар: ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор, Дирихле-Абель аломати

1⁰. Лейбниц аломати. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots \quad (1)$$

қаторни қараймиз, бунда $c_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Одатда, бундай қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор дейилади.

Равшанки, (1) қатор ихтиёрий ҳадли қаторнинг битта ҳолидир.

Масалан, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор бўлади.

1-теорема (Лейбниц аломати). Агар ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган (1) қаторда:

$$1) c_{n+1} < c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи бўлади.

◀ (1) қаторнинг дастлабки $2m$ та ($m \in N$) ҳадидан иборат қисмий йиғиндиси

$$S_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1} - c_{2m}$$

ни олайлик. Унда $S_{2(m+1)}$ учун

$$S_{2(m+1)} = S_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2})$$

бўлиб, $c_{2m+2} < c_{2m+1}$ бўлганлиги сабабли (бунда $c_{2m+1} - c_{2m+2} > 0$ бўлади)

$$S_{2(m+1)} > S_{2m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлади. Демак, $\{S_{2m}\}$ кетма-кетлик ўсувчи.

Энди S_{2m} йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифодада қатнашган қавс ичидаги айирмалар-нинг, шунингдек c_{2m} нинг мусбат бўлишини эътиборга олиб,

$$S_{2m} < c_1$$

бўлишини топамиз. Демак, $\{S_{2m}\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган.

Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага кўра

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S \quad (S - \text{чекли сон}) \quad (2)$$

мавжуд.

Энди (1) қаторнинг дастлабки $2m-1$ та ($m \in N$) сондаги ҳадидан иборат ушбу

$$S_{2m-1} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1}$$

қисмий йиғиндисини олайлик. Равшанки,

$$S_{2m-1} = S_{2m} + c_{2m}.$$

Теореманинг $n \rightarrow \infty$ да $c_n \rightarrow 0$ бўлиши шарти ҳамда (2) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + c_{2m}) = S.$$

Шундай қилиб, берилган (1) қаторнинг қисмий йиғинди-ларидан иборат кетма-кетлик чекли лимитга эга экани кўрсатилди. Демак, (1) қатор яқинлашувчи. ►

Масалан,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \quad (3)$$

қатор ҳадлари келтирилган теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Теоремага кўра (3) қатор яқинлашувчи бўлади ((3) қаторнинг яқинлашуви ва йиғиндиси $\ln 2$ га тенг бўлиши кўрсатилган эди).

1. 20.2-теорема (Дирихле-Абель аломати).

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \dots + \frac{\cos kx}{k} + \dots \text{ қатор яқинлашувчиликка}$$

текшириш.

Таянч иборалар: чексиз кичик миқдор, қаторнинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги.

2-теорема (Дирихле-Абель аломати). Айтайлик,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + \dots \quad (6)$$

қатор берилган бўлсин. Агар:

1) $\{b_k\}$ кетма-кетлик камаювчи ва у чексиз кичик миқдор,

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қаторнинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги

чегараланган бўлса, (6) қатор яқинлашувчи бўлади.

◀ Агар $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қаторнинг қисмий йиғиндисини

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

десак, унда теореманинг шартига кўра, шундай $M > 0$ сон топиладики, барча $n \in \mathbb{N}$ учун

$$|S_n| \leq M \quad (7)$$

бўлади.

Шартга кўра $\{b_k\}$ кетма-кетлик камаювчи ва у чексиз кичик миқдор.

Унда $\forall \varepsilon > 0$ га кўра шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ да

$$0 \leq b_n < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (8)$$

бўлади.

Энди

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k$$

йиғиндига Абель айниятини қўлаймиз:

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_{n+m} b_{n+m} - S_{n-1} b_n.$$

Натижада

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k \right| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} |S_k (b_k - b_{k+1})| + |S_{n+m} b_{n+m}| + |S_{n-1} b_n| = \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} |S_k| \cdot (b_k - b_{k+1}) + |S_{n+m}| b_{n+m} + |S_{n-1}| \cdot b_n \end{aligned}$$

бўлади.

(7) тенгсизликдан фойдаланиб топамиз:

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k \right| \leq M \left[\sum_{k=n}^{n+m-1} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+m} \right] + M \cdot b_n.$$

Агар

$$\sum_{k=n}^{n+m-1} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+m} = (b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2}) + \dots + (b_{n+m-1} - b_{n+m}) + b_{n+m} = b_n$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k \right| \leq 2M \cdot b_n$$

бўлиб, (8) муносабатга кўра

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан Коши теоремасига кўра $\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k$ қаторнинг

яқинлашувчилиги келиб чиқади. ►

Мисол. Ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \dots + \frac{\cos kx}{k} + \dots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин, бунда x – тайинланган ҳақиқий сон.

◄ Агар $x = 2\pi$ бўлса, берилган қатор

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \cdot k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

гармоник қатор бўлиб, у узоклашувчи бўлади.

Айтайлик, $x \neq 2\pi$ бўлсин. Берилган қаторда

$$a_k = \cos kx, \quad b_k = \frac{1}{k}$$

белгилашларни бажарамиз.

Равшанки, $\{b_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$ кетма-кетлик камаювчи ва чексиз кичик миқдор бўлади ($k \rightarrow \infty$ да $\frac{1}{k} \rightarrow 0$).

Энди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ қаторнинг қисмий йиғиндиси S_n ни топамиз:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin \left(k - \frac{1}{2}\right)x \right] = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Кейинги муносабатдан, 2π га қаррали бўлмаган x лар учун

$$|S_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\{S_n\}$ кетма-кетлик чегараланган. Унда берилган қатор 2-теоремага кўра яқинлашувчи бўлади. ►

Машқлар

1. Ушбу

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 0 \end{aligned}$$

муносабатда $2n$ хатолик топилсин.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n} \ln(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\pi}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

Коши ва Даламбер аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторлар яқинлашишга текширилсин:

$$2528. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

$$2529. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-5)}$$

$$2530. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$2531. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n, \quad a > 0$$

$$2532. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$$

$$2533. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$$

$$2534. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2 + 2n + 1)^{(n+3)/2}}$$

$$2535. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$2536. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$2537. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}, \quad a > 0$$

$$2538. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{n^n}, \quad a \neq e, \quad a > 0$$

$$2539. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$2540. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$$

$$2541. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}$$

$$2542. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \dots (3n)}{(n+1)!} \arcsin \frac{1}{2^n}$$

$$2543. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$$

Мусбат хадли қаторларнинг яқинлашиш аломатлари (Раабе, Гаусс аломатлари).

Раабе ва Гаусс аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторлар яқинлашишга текширилсин:

$$2544. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^p \frac{1}{n^q}$$

$$2545. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$$

$$2546. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$2547. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \dots \ln(n+1)}{\ln(2+a) \cdot \ln(3+a) \dots \ln(n+1+a)}, \quad a > 0$$

$$2548. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a + \sqrt{2})(a + \sqrt{3}) \dots (a + \sqrt{n+1})}, \quad a > 0$$

$$2549. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$$

$$2550. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{q(q+1) \dots (q+n-1)} \right]^{\alpha} \quad (p > 0, \quad q > 0)$$

Қуйидаги $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$ қаторлар яқинлашишга текширилсин:

$$2551. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

$$2552. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$$

$$2553. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$$

$$2554. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

$$2555. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$$

$$2556. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$2557. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\sqrt[3]{n}}$$

$$2558. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$$

$$2559. \sum_{n=1}^{\infty} n^{n^{\alpha}} - 1$$

$$2560. a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

$$2561. a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$2562. a_n = e^{\sqrt{n}/(n^2+1)} - 1$$

$$2563. a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

$$2564. a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$2565. a_n = \frac{(2n+2)!}{\pi^n (n!)^2}$$

$$2566. a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$$

$$2567. a_n = \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$$

$$2568. a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

$$2569. a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx$$

$$2570. a_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt{1+x^4} dx}$$

$$2571. a_n = \int_n^{n+2} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$2572. a_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x \sin^5 x}{1+x^2} dx$$

$$2573. a_n = \frac{1!+2!+\dots+n!}{(2n)!}$$

МУСТАҚИЛ БАЖАРИЛАДИГАН ТОПШИРИҚЛАР

Ихтиёрий ҳадли қаторлар ва улар яқинлашишининг Лейбниц, Дирихле ва Абел аломатларига доир мисоллар.

Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (6)$$

қатор берилган бўлиб, унинг ҳар бир ҳади ихтиёрий ҳақиқий сон бўлсин. Одатда бундай қатор **ихтиёрий ҳадли қатор** дейилади.

1⁰. Ихтиёрий ҳадли қаторнинг яқинлашиши.

1 – теорема (Коши теоремаси). Ихтиёрий ҳадли (6) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, m = 1, 2, 3, \dots:$$

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

2 – теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (7)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (6) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

2⁰. Қаторнинг абсолют ва шартли яқинлашувчилиги.

1 – таъриф. Агар (7) қатор яқинлашувчи бўлса, (6) қатор **абсолют**

яқинлашувчи дейилади.

2 – таъриф . Агар (6) қатор яқинлашувчи бўлиб, (7) қатор узоқлашувчи бўлса, (6) қатор шартли яқинлашувчи дейилади.

3⁰ . Ихтиёрий ҳадли қаторларнинг яқинлашиш аломатлари.

1) Лейбниц аломати. Ушбу

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + (-1)^{n-1} C_n + \dots \quad (8)$$

қаторни қарайлик, бунда $C_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Одатда бу (8) қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор дейилади.

3 – теорема (Лейбниц) : Агар (8) қаторда:

а) $C_{n+1} < C_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

б) $n \rightarrow \infty$ да $C_n \rightarrow 0$

бўлса, у ҳолда (8) қатор яқинлашувчи бўлади.

2) Абель аломати. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots \quad (9)$$

қаторни қарайлик.

4 – теорема (Абель) . Агар (9) қаторда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи,

б) $\{b_n\}$ - чегараланган, монотон кетма-кетлик бўлса,

у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

3) Дирихле аломати. Бу аломат қуйидаги теорема орқали ифодаланади.

5 – теорема (Дирихле) . Агар (9) қаторда:

а) $\{a_n\}$ кетма-кетлик монотон,

б) $n \rightarrow \infty$ да $a_n \rightarrow 0$,

в) $\exists C > 0, \quad \forall n \geq 1: \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq C$

бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

қатор яқинлашувчи бўлади.

11 – мисол . Коши теоремасидан фойдаланиб, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n(n+1)}$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши кўрсатилсин.

◀Равшанки, бу қатор учун

$$|S_{n+m} - S_n| = \left| \sum_{k=m+1}^{n+m} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n+1}$$

бўлади. Демак,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \frac{1}{n+1}$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Бундан эса берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади. ►

12 – м и с о л . Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

қаторнинг ихтиёрий $x \in \mathbf{R}$ да яқинлашувчи бўлиши кўрсатилсин.

◄ Агар $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ бўлса, унда қаторнинг яқинлашувчи бўлиши равшан.

Айтайлик, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ бўлсин. Берилган қаторда

$$\frac{1}{n} = a_n, \quad \sin nx = b_n \quad (n \geq 1)$$

дейилса, унда берилган қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

кўринишдаги қаторга келади. Бу қатор учун Дирихле теоремасининг шартларининг бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$a_n = \frac{1}{n}$$

бўлганлигидан, унинг монотонлиги ҳамда $n \rightarrow \infty$ да $a_n \rightarrow 0$ бўлишини топамиз.

Энди учинчи шартнинг бажарилишини кўрсатамиз:

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \left| \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx \right| = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \left| \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

Демак, Дирихле аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади. ►

ГЛОССАРИЙ (Ўзбекча русча инглизча)

Mathematical analysis is the branch of **mathematics** dealing with limits and related theories, such as differentiation, integration, measure, infinite series, and analytic functions. These theories are usually studied in the context of real and complex numbers and functions.

Математический анализ - это отрасль математики, посвященная ограничениям и смежным теориям, таким как дифференцирование, интеграция, мера, бесконечные ряды и аналитические функции. Эти теории обычно изучаются в контексте реальных и комплексных чисел и функций.

1. **Анализ** - анализ; аналитический - analysis
2. **миқдор анализи** - количественный анализ
3. **сифат анализи** - качественный анализ -
4. **анализ методи** - аналитический метод – metod analysis
5. **анализ қилмоқ** - производить анализ, анализировать –
6. **математик** - математик - mathematiks
7. **математический анализ** – **mathemics analysis**
8. **математикага оид, математик; математика...**;
9. **математическая задача** - математик масала;
10. **математический факультет** - математика факультети;
11. **аниқ, равшан, ўтқир**;
12. **математический ум** - ўтқир ақл.
13. **выполнить задачу** вазифани бажармоқ; мақсадга эришмоқ;
14. **трудная задача** - қийин иш, оғир масала;
15. **поставить задачу** - вазифа (мақсад) қилиб қўймоқ;
16. **решить задачу** - масалани ечмоқ (ҳал қилмоқ).
17. **Масала** - вопрос, проблема; задача;
18. **асосий масала** - основной вопрос; основная задача;
19. **муҳим масала** - важный вопрос;
20. **масала ҳал!** - вопрос решен!;
21. **масалани ҳал қилмоқ** - решать, разрешать вопрос;
22. **масалани кўндаланг қўймоқ** - ставить вопрос ребром;
23. **Mat** задача задачник - - масалалар тўплами

- 24.масалани ҳал қилмоқ – или ечмоқ -** решать задачу;
обсуждение; дебаты; спор
по поводу какой-л. Проблемы
- 25.задачник по арифметике-**арифметикадан масалалар тўплами.
- 26.Аниқ нисбат -** The main mortgage, pledge dsystvitelny — Основной
зalog, дсйствительный залог
- 27.Аннотация -** commentation - комментирование; аннотация
- 28.Аралаш -** Adjacent - Расположенный рядом, смежный
- 29.Аргумент -** Argument – Аргумент