O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

TEXNIKA FAKULTETI

“FAKULTETLARARO UMUMTEXNIKA FANLARI” KAFEDRASI

NAZARIY MEXANIKA

FANIDAN

MA’RUZALAR MATNI

5310600 – Yerusti transport tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi

5310500 – Avtomobilsozlik va traktorsozlik

Tuzuvchi: A.SH. Beganov

URGANCH-2019

“**Nazariy mexanika**” fanidan ma’ruzalar matni-Urganch, 2019.- 159 bet.

Mazkur ma’ruza matni “Yerusti transport tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi” va “Avtomobilsozlik va traktorsozlik” yo’nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun tavfsiya etiladi. Shu bilan birga ushbu ma’ruza matnidan o’qituvchilar, ilmiy hodimlar, aspirant va tadqiqotchilar, malaka oshirish fakultetlarida o’z malakalarini oshirayotgan professor- o’qituvchilar hamda texnika sohasiga qiziquvchilar foydalanishi mumkin.

Tuzuvchi: **A.SH. Begjanov**

Taqrizchi: **dots. I.S. Ro’ziyev**

Kafedra mudiri: **prof. I.Yu Davletov**

1-MAVZU: Nazariy mexanikaga kirish. Statikaning asosiy tushunchalari.

Reja

1. *Fanning maqsadi, vazifalari va ahamiyati.*
2. *Fazo, vaqt va kuch tushunchalarini mexanikadagi o'rni.*
3. *Statika, kinematika va dinamika bo'limalarida ko'riladigan asosiy masalalar.*
4. *Statikaning asosiy tushunchalari.*

Tushuncha va tayanch iboralar

Fazo, vaqt, nazariy mexanika, harakat, materiya, statika, kinematika, dinamika

Mavzuni bayoni

«Nazariy mexanika» fanining asosiy maqsadi - talabalarning mexanik sistemalar harakati qonuniyatlarini aniqlash usullarini, sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarni oddiy ko'rinishiga keltirish usullarini o'rganishidir.

Fanning vazifalari bo'lajak mutaxassisning Nazariy mexanikani o'rganishi, uni kelgusi ilmiy texnikaviy taraqqiyot jarayonida uchraydigan turli masalalar va yangiliklarni mustaqil ravishda hal qilishi uchun asosiy omillardan biri bo'lishi kerak. Shu bilan birga nazariy mexanikani o'rganish, bo'lajak muhandisning dunyoqarashini, uning umumiy madaniyatini, qobiliyatini o'stirishga yordam beradi.

Nazariy mexanikani o'rganish jarayonida talaba mexanikaning asosiy tushunchalari va qonunlarini hamda shu qonunlardan kelib chiqadigan moddiy nuqta, qattiq jism mexanikasi tizimining muvozanati va harakatini aniqlash usullarini bilishi, olgan bilimini nazariy mexanikaning muhandislik va maxsus fanlarni o'tishda zarur bo'lgan qonun-qoidalarini tatbiq eta olishi zarur.

Fan o'zlashtirish bo'yicha talabalarning bilimiga, uquviga va ko'nikmasiga, Davlat ta'lim standartlariga muvofiq quyidagi talablar qo'yiladi: mexanikaning asosiy qonunlari, teorema va prinsiplarini; nazariyani aniq masalalar yechishga tadbiq etish; bog'lanishlarning reaksiya kuchlarini aniqlashni; mexanik sistemalarning muvozanat shartlarini; nuqta va jismning tezligi, tezlanishi va harakat trayektoriyalarini aniqlashni; harakatning dinamik tenglamlarini to'zishni; ta'sir etuvchi kuchlar sistemasini oddiy ko'rinishiga keltirishni; amaliy masalani yechishning eng rasional yo'lini tanlashni bilishlari lozim.

Uzoq o'tmishda insonlar qo'l mehnatini soddalashtiruvchi yoki yengillashtiruvchi qurilmalarni «Mexanik san'at» deb qaraganlar. Bularga turli mexanizm va mashinalar, umuman olganda «ziyraklik yoki tadbirkorlik» bilan yaratilgan barcha qurilmalarni kiritish mumkin… Rim imperiyasi davridayoq bu tushuncha lotin tilida «machina» deb atalib, ya'ni oz kuch sarf qilinib, imkon qadar ko'p ish bajaruvchi qurilmalar tushunilgan.

Nil, Dajla va Furot daryolari soxillarida yashagan xalqlar qadimdanoq richag (pishang), pona, blok kabi mexanik qurilmalardan foydalanishni bilganlar. Ma'lumki, birinchi Misr piramidasi eramizdan 3000 yil avval qurilgan. Ulardan eng balandi Fira'vn Xufe (Xeops) piramidasini qurish uchun har bittasi o'rtacha 2,5 tn. keladigan 23.300.000 tosh palaxsalari ishlatilgan. Ba'zilarida esa xattoki 10 tn. va undan og'irroq palaxsalar ishlatilgan. Bunday og'ir

palaxsalarni ko'tarishda «qiya tekisliklar» va richaglardan foydalanilgan. Misol uchun, o'sha Xafra piramidasini qurishda uzunligi 494,6 *m*, balandligi 45,8 *m* bo'lgan gorizontal tekislik bilan 5,3 gradus hosil qiluvchi qiya tekislikdan hamda joydan joyga ko'chirish va ko'tarish uchun richaglardan foydalanganlar. Keyinchalik esa suv havzalaridagi kemalar harakati va janglardagi otish qurollarining takomillashuvi natijasida ularning nazariy asoslari yuzaga keldi.

Nazariy mexanika fani - boshqa fanlar kabi insonlarning ishlab chiqarishga munosabatidan, ya'ni qo'l mehnatini soddalashtirish, kam kuch sarflab, ko'p ish bajarishni amalga oshirilishi natijasida yuzga keldi va 25 asr davomida rivojlanib kelmoqda.

Eramizdan avvalgi asrlarda ulkan inshootlarning ko'rinishi, dengizlar-dagi kemalarning harakati natijasida richaglar va bloklarning takomil-lashuvi, qil tekisliklardan foydalanish, ularga ta'sir etuvchi kuchlarni hisoblash va jismlarning tezliklari to'g'risidagi ilk tasavurlar shakllana boshlandi.

Eramizdan avvalgi 384-322 yillarda yashagan Aristotel o'zining "Mexanika muammolari" nomli ilmiy asarida ilk bora richagni amaliyotda qo'llash orqali unga ta'sir etuvchi kuch bilan masofa orasidagi munosabatni aniqlab berdi. Lekin Aristotel erkin tushuvchi jismning tezligi uning og'irligiga to'g'ri proporsional va to'g'ri chiziqli tekis harakat o'zgarmas kuch ta'sirida sodir bo'ladi deb noto'g'ri xulosa chiqardi. Bu noto'g'ri xulosa 2000 yil davomida xukmronlik qilib, dinamikaning to'la rivojlanishiga to'sqinlik qildi.

Eramizdan avvalgi asrning yana bir buyuk olimlaridan Arximed (*eramizdan avvalgi 287-212 yillar*) kuchlar sistemasining muvozanati va jismning og'irlik markazi to'g'risida buyuk kashfiyotlar qilib, gidrostatika va injenerlik yo'nalishining rivojlanishiga o'zining ulkan hissasini qo'shdi.

IX-XIV asrlarda yashab, ijod qilgan vatandoshlarimiz Beruniy, Al-Xorazmiy, Ibn-Sino, Al Haziniy, Mirzo Ulug'bek, Umar Hayyom va boshqa zabardast olimlarimiz nafaqat mexanika fani rivojiga, balki falsafa, matematika va boshqa tabiiy fanlar rivojiga o'zlarining ulkan hissalarini qo'shdilar.

XV-XVII asrlarda, ya'ni uyg'onish davrida mexanika fani gurkirab rivojlandi va fan sifatida bir qolipga solindi. Bu davrning buyuk olimlaridan biri mashxur italyan olimi, fizik, rassom, mexanik va injener Leonardo do Vinchi (1451-1519) mexanika sohasida erkin tushuvchi jismning harakati va qiya tekislik bo'ylab harakatlanuvchi jismning harakatini o'rganib, birinchi bor kuch momenti tushunchasini va ishqalanish kuchining kattaligi jism bilan tekislik tashkil qilgan yuzaga bog'liq bo'lmasligini aniqladi.

Bu davrning buyuk olimlaridan biri polyak astronomi Nikolay Kopernik (1473-1543) shu davrgacha xukmron bo'lgan faza jismlari uchun Ptolomeyning geosentrik sistemasini geliosentrik sistema bilan almashtirib, ya'ni planetalar Er shari atrofida emas, balki Quyosh atrofida va o'z o'qi atrofida harakatlanadi degan xulosa bilan osmon jismlari mexanikasining rivojlanishiga asos soldi. So'ngra N.Kopernikning ishlarni davom ettirgan buyuk italiyalik olim Iogani Kepler (1571-1630) o'zining ustozi Tixo Brage ishlarini davom ettirib, ko'plab kuzatish va tajribalar o'tkazib, osmon jismlari harakati to'g'risidagi uchta qonunni yaratdi.

SHu davrning yana bir buyuk italiyalik olimi Galileo Galiley (1564-1642) klasik mexanikaning nisbiylik nazariyasi, inersiya prinsipi, jismning erkin tushish qonuni, og'ir jismning qiya tekislik bo'ylab harakat qonuniyati va gorizontal biror burchak ostida otilgan jismning harakatining nazariy asoslarini yaratdi. Bundan tashqari G.Galiley sterjenlarning mutahkamligi va jismning suyuqlikdagi haraktiga qarshilik kuchi ta'sirining nazariy asoslarini yaratdi.

G.Galileyning mexanika sohasidagi ishlarining davomchisi Xristian Gyuygens (1629-1695) markazga intilma va markazdan qochuvchi inersiya kuchlarini hamda fizik mayatnikning harakatini va zarba nazariyasi asoslarini yaratdi.

1687 yilda ingliz olimi Isaak Nyutonning (1642-1727) "Tabiiy falsafaning matematik boshlanishi" nomli asari nazariy mexanikaning fan sifatida shakllanishiga asos bo'ldi. I.Nyutonning fundamental fanlarning rivojlanishiga qo'shgan hissasi shu darajada buyukki, bu xizmatlarni so'z bilan ifodalashning imkoni yo'qdir.

Buyuk nemis olimi, rus akademigi L.Eyler (1707-1783) nuqtaning tezlanishi bilan unga ta'sir etuvchi kuchlar orasidagi munosabatlarni to'la tahlil qilib, nuqtaning harakatini tabiiy o'qlarga nisbatan differensial tenglamalarini aniqladi. So'ngra Eyler qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jismning harakatini kinematikasi va dinamikasini taxlil qilib, hozirgi kunda L.Eyler nomi bilan atalgan "Eylerning kinematik tenglamalari" va "Eylerning dinamik tenglamalari"ni kashf etib, qattiq jismning o'z inersiyasi bilan harakatlangandagi echimlarini aniqladi. Bundan tashqari L.Eyler suyuqlik mexanikasi - gidrodinamika asoschisi bo'lib, u ideal suyuqlikning harakat differensial tenglamalarini, kemalar harakati va elastik sterjenning ustivor harakatining ustvorlik shartlarini aniqladi. L.Eylerning 700 dan ortiq ilmiy maqolalari va analitik mexanika bo'yicha yozgan kitobi bilan u o'ziga buyuk olim byustini yaratdi.

Fransuz olimi J.Dalamberning (1717-1783) 1743 yilda nashr qilingan "Dinamika bo'yicha traktat" asarida bog'lanishdagi mexanik sistemalar harakati haqidagi masalalarni uning nomi bilan ataluvchi prinsip asosida echish metodikasi ko'rsatilgan.

Fransuz olimi J.L.Lagranjning (1736-1813) "Analitik mexanika" asari (1788) nazariy mexanika taraqqiyotida alohida o'rin egallaydi. Bu asarda mexanika masalalariga mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llash bayon etilgan.

M.V.Lomonosov (1711-1765) fizika-matematika fanlari, jumladan, mexanika fani sohasida olib borgan ajoyib tekshirishlari bilan mashhurdir. Lomonosov materiya bo'lmasa, harakat ham bo'lmasligini ta'kidlab, materiya va harakatning saqlanish qonunini kashf etgan.

Mexanika fanining rivojlanishiga katta hissa qo'shgan rus olimlaridan M.V.Ostrogradskiy (1801-1862) analitik mexanika sohasidagi ilmiy ishlari bilan shuhrat qozongan; P.L. CHebishev (1821-1891) mashina va mexanizmlar nazariyasiga asos solgan; S.I. Kovalevskaya (1850-1891) qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jism tenglamalarini integrallash sohasidagi ilmiy ishlari bilan nom chiqargan; N.E. Jukovsuiy (1847-1921) aerodinamikaning rivojlani-shida muhim ahamiyatga ega bo'lagan qator asarlarning muallifi, "rus aviasiyasining otasidir" (V.I.Lenin); K.E.Siolkovskiy (1857-1935) raketa nazariyasi va suyuq yonilg'ida ishlaydigan raketa dvigateli nazariyasiga asos solgan; I.V.Meshcherskiy (1859-1935) asarlari o'zgaruvchan massali jismlarning harakati, reaktiv texnika va osmon mexanikasining qator problemalarini hal qilishda ilmiy asos bo'ldi; S.A. CHapligin (1869-1942) aerogidrodinamika hamda bog'lanishdagi mexanik sistemalarning harakatini tekshirish sohasidagi ilmiy ishlari bilan mashhurdir; A.N.Krilov (1863-1945) kemalarning ustuvor harkati va tashqi ballistikaga oid muhim ilmiy ishlari bilan tanilgan; S.P. Korolyov (1906-1966) rahbarligida ballistik va geofizik raketalar, Erning sun'iy yo'ldoshlari; "Vostok", "Vosxod" kosmik kemalari yaratilgan; M.V. Keldishning (1911-1978) aerogidrodinamika, tebranishlar nazariyasi va kosmanavtika sohalaridagi tadqiqotlari alohida ahamiyatga ega; A.A.Ilyushin (1911 yilda tug'ilgan) elastiklik va plastiklik nazariyasi, aerogidrodinamika, polimerlar mexanikasi va uzoq muddatli mustahkamlik nazariyasiga oid ilmiy ishlari bilan mashhurdir; A.YU. Ishlinskiy (1913 yilda tug'ilgan) deformasiya-lanuvchi muhit mexanikasi va giroskopik asboblar to'g'risida bir necha nazariya yaratdi.

Mexanika fanining rivojlanishiga ulkan hissa qo'shgan o'zbek olimlaridan M.T. O'rozboev (1906-1971) ip mexanikasi va inshootlarning seysmik mustah-kamligi nazariyasiga oid qator ilmiy ishlarning muallifidir; X.A.Rahmatullin (1909-1988) inshootlar zaminini hisoblashda va ularni loyihalashda, kema zirhi mustahkamligini aniqlashda qo'llaniladigan "Rahmatullin to'lqinlari" nomini olgan to'lqinlar nazariyasini kashf qildi; V.Q.Qobulovning (1921 yilda tug'ilgan) tutash muhitlar mexanikasi masalalarini algoritmlash, avtomatik boshqarish sistemalarini yaratish sohasidagi ilmiy ishlari muhim amaliy ahamiyatga ega.

Nazariy mexanika fizika-matematika fanlari singari umumilmiy fundamental fanlarning biri sifatida o'rganiladi.

Ushbu fanni o'rganish uchun talabalar elementar va oliy matematika, fizika, hisoblash texnikasi, chizmachilik fanlaridan yetarli bilimlarni olgan bo'lishlari lozim.

Mexanik harakat fazo va vaqtda sodir bo’ladi. Nazariy mexanikada haqiqiy fazo va vaqt modeli sifatida ularning oddiy modellari – absolyut fazo va absolyut vaqt qabul qilinadi. Absolyut fazo va vaqt bir-biriga bog’liq emas deb hisoblanadi. Nisbiylik nazariyasidagi fazo va vaqt modelida ular bir-biriga bog’liq bo’ladi.

Absolyut fazo uch o’lchamli, bir jinsli va izotropqo’zg’almas yevklid fazosi deb tushuniladi. Kuzatishlar shuni ko’rsatadiki real fizik fazoning o’lchamlari katta bo’lmagan sohalari uchun yevklid geometriyasi to’g’ri.

Nazariy mexanikada absolyut vaqt to’xtovsiz o’zgaradigan kattalik deb hisoblanadi, u o’tmishdan kelajakka qarab oqadi. Vaqt bir jinsli, fazoning barcha nuqtalarida bir xil va materiya harakatiga bog’liq bo’lmaydi.

Jismlarning bir-biriga nisbatan fazodagi o'rnini o'zgarishi va muvozanat holatida qolishi yoki qolmasligi bu jismlarga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq bo'ladi.

Demak, nazariy mexanika fanining asosiy tushunchalari — fazo, vaqt va kuch kattaliklaridan iborat. Shu sababli bu tushunchalarga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

Fazo - *bir vaqtda mavjud bo'lgan ob'ektlarning joylashish tartibini ifodalaydi.*

Vaqt - *sodir bo'layotgan hodisalarning (harakatning) ketma-ket o'zgarish tartibini ifodalaydi.*

Kuch - *bir jismning ikkinchi jismga ta'sirini miqdoriy o'lchovini xarakterlovchi kattalikni bildiradi.*

Bu tushunchalarning ta'rifi sodda ko'rinsada, aslida ancha murakkab hisoblanib, ularning hossalari turli fanlarda turlicha qabul qilinadi. Shu sababli, bu tushunchalarni nazariy mexanika fanida qanday qabul qilinishini aniqlash uchun Nyutonning *«abstraksiya usuli»*dan foydalanamiz. Chunki nazariy-mexanika tabiiy fanlardan hisoblanib, u ko'plab o'tkazilgan kuzatish va tajriba natijalari asosida turli harakat jarayonlarining borishini matematik analiz yordamida taxlil qilib beruvchi Nyuton qonunlariga asoslangan.

I.Nyuton jismning harakatini o'rganishda ko'p sonli bog'lanishlar va erksizliklar mavjudligi tufayli, asosiy sababiy bog'lanishlar va qonuniyatlarni kuzatish hamda aniqlanishi qiyin bo'lgan murakkab jarayonlarning analizida bosh qonuniyatlar va bog'lanishlarni, avvalo ularni ikkinchi darajaliklarini, ya'ni jismning harakatiga unchalik katta ta'sir qilmaydigan omillarni hisobga olmaslikni taklif etdi. U sodir bo'layotgan hodisani analiz qilayotganida eng muhimi va asosiysini ajratib oldi, ikkinchi darajali ahamiyatsizligidan esa voz kechdi. Bu bilan I.Nyuton ilmiy abstraksiya – abstraksiya usulidan foydalanib, tekshiralayotgan hodisaning shartli sxemasini yaratdi.

Abstraksiyalar – bular shunday tushunchalarki, ular jismlarning biror muayyan hossalarini yoki jarayonning biror muayyan ko'rinishini aks ettiradi. Masalan, fazo, vaqt, kuch, inertsiya kuchi, sanoq sistemasi, moddiy nuqta, absolyut qattiq jism, qovushqoq bo'lmagan suyuqlik va hakozolar abstraktlashgan tushunchalar hisoblanadi. Lekin xaqiqiy harakat jarayonini faqat qismangina aks ettiruvchi yoki hodisaning faqat muayyan tomoninigina aks ettiruvchi u yoki bu

abstraksiyaga asoslangan sxemani qo'llayotganda, sxematik tasavvurlardagi abstraksiyalarning cheklangan ekanligini hamma vaqt esda tutish lozim.

Agar nazariy analiz bilan tajriba natijalari orasida qandaydir tafovut sezilsa, u holda sxemani tanlashda qilingan soddalashtirishlarning qonuniyligi va yo'l qo'yilishi mumkinligini har doim diqqat bilan tekshirib ko'rish lozim. Bundan tashqari sodir bo'layotgan harakatni ifodalovchi parametrlarni tanlashda katta va kichikni (funksiyani qatorga yoyilganda) baholashga juda ehtiyotlik bilan yondashish lozim. Lekin sodir bo'layotgan hodisalar uchun ham fazo haqidagi bunday tasavvurlar hamma vaqt ham to'g'ri bo'lavermaydi. Shu sababli, kvant mexanikasida ko'riladigan harakat jarayonini taxlil qilishda fazoning moddiy jismlarning xususiyatlariga bog'liq bo'lgan hossa-larining tegishli o'zgarishlarini hisobga olish zarur.

Jismlarning fazoviy hossalarini aniqlashda asosiy kattalik birligi sifatida qabul qilingan *kesma uzunligidir.* Nazariy mexanikada uzunlik birligi sifatida etalon-sterjenning ikkita tangasi orasidagi masofa – metr (*m*)da olinadi, yuz va hajm mos ravishda kvadrat metr (*kv.m*) va kub metrlar (*kub.m.*)da o'lchanadi.

Jismlarning harakati bir-biriga nisbatan sodir bo'ladi, boshqacha aytganda harakat vaqtida jimlarning bir-biriga nisbatan joylashishida yoki bitta jismning turli qismlarining (deformatsiyalashishida) o'zaro joylashishida yuz beradi.

Har bir harakatda kamida ikkita jism ishtirok etadi, shu sababli harakatni tavsiflash uchun jismlardan birini sanoq jism sifatida qabul qilish mumkin. Sanoq jism sifatida ixtiyoriy jismni olish mumkin. Agar shu jismga koordinatalar sistemasi va soatni o'rnatsak, ular birgalikda *sanoq sistemasini* beradi. Fazoning barcha nuqtalarining holati qattiq, o'zaro tik sanoq jismi bilan doimiy bog'langan va koordinatalar sistemasining boshi deyiluvchi muyayan nuqtadan o'tadigan uchta to'g'ri o'qlarga nisbatan bir qiymatli aniqlangandir.

Tajribalarning ko'rsatishicha nazariy mexanika fanida qaraladigan harakatlarda fazoning hossalari vaqtning o'zgarishiga va sodir bo'layotgan harakatning o'zgarishiga bog'liq bo'lmaydi. Boshqacha aytganda, bir sanoq sistemasidan boshqasiga o'tishda sanoq sistemasi bilan bog'langan jismlarning fizikaviy hossalarini emas, balki faqat sanoq sistemasining geometrik hossalarinigina e'tiborga olish kerak. Ma'lumki, bunday hossalarga bo'ysunuvchi *absolyut fazo – uch o'lchovli Evklid fazosini* bildiradi. Demak, nazariy mexanikada *fazo uchun uch o'lchovli Evklid fazosi* qabul qilinadi.

Yuqorida ta'kidlab o'tganimizdek, mexanik harakat – fazoda jism holatining *vaqt* o'tishi bilan o'zgarishidir. Vaqt esa, jarayonning davomiylik o'lchovidir. Shuning uchun o'tgan vaqt kattalikni biror jarayon davomiyligi bilan o'lchash quyosh sutkasining, ya'ni Yerning o'z o'qi atrofida bir marta to'la aylanish vaqtining 1/86400 qismi – *sekund* (*s*) qabul qilinadi.

Nazariy mexanikada vaqt fazoning har qanday qismida ham bir me'yorda o'tadi va u fazo kabi uzluksiz hamda bir jinsli deb qaraladi.

Tekshirishlar shuni ko'rsatadiki, jismlarning yorug'lik tezligi ($3 \cdot 10^{10}$ *m/s*)ga nisbatan juda kichik tezlik bilan harakatlanishida *vaqt* jismlarning hossalariga va ularning harakatiga bog'liq emas, ya'ni vaqtni *absolyut vaqt* deb qarash mumkin. Bunday sharoitlarda turli jarayon va hodisalar uchun hodisaning ko'rinishidan va hodisada ishtirok etayotgan jismlarning

harakatlaridan qat'iy nazar, vaqt birday o'tadi deyish mumkin. Maxsus tadqiqotlarning ko'rsatishicha, bir-biriga nisbatan harakat-lanayotgan turli sanoq sistemalariga nisbatan bitta jarayonning davomiyligi shu sis-temalarning nisbiy harakatiga bog'liqdir. Demak, jismlar ixtiyoriy tezliklar bilan harakatlanganida turli sanoq sistemalari uchun yagona vaqt yo'q. Biroq bu farq yorug'lik tezligiga nisbatan yetarlicha kichik bo'lgan odatdagi tezliklardagi harakatlarda deyarli ahamiyat kasb yetmaydi. Boshqacha aytganda, I. Nyuton qonun-lari doimo barcha koordinatalar sistemasi uchun ham o'rinli bo'lavermaydi. Shu sababli nazariy mexanikada – hech bo'lmaganda bitta *inertsial sanoq sistemasi* (qo'zg'almas sanoq sistemasi) mavjud bo'ladiki, bu sanoq sistemasi uchun Nyuton qonunlari o'rinli bo'ladi deb qabul qilinadi. Ko'plab o'tkazilgan tajribalar, o'lchashlar va kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, bunday inertsial sanoq sistemasi uchun markazi Quyoshda bo'lgan va o'qlari uzoq „qo'zg'almas“ yulduzlar tomon yo'nalgan *geliosentrik* yoki *asosiy inertsial sanoq sistemasi*ni qabul qilish mumkin.

Harakat materianing mavjudlik formalaridan biri bo’lib, uning eng muhim xarakterli xususiyatini ifodalaydi.

Materiya harakati deganda jismlarning oddiy ko’chishidan tortib, issiqlik, kimyoviy, elektromagnit, biologik va boshqa o’zgarishlarda sodir bo’ladigan murakkab jarayonlar tushuniladi.

Harakatning oddiy turlardan biri mexanik harakatdir. Vaqt o’tishi bilan moddiy jismlarning bir birlariga nisbatan ko’chishiga *mexanik harakat* deyiladi.

Nazariy mexanika moddiy jismlarning bir-biriga ta’siri va mexanik harakatning umumiy qonunlari haqidagi fandir.

Mexanikada moddiy jismlar o’zaro ta’sirining miqdoriy o’lchoviga *kuch* deyiladi.

Nazariy mexanika kursi statika, kinematika va dinamikadan iborat uch qismga bo’linadi. *Statikada* jismlarning muvozanati, ularga qo’yilgan kuchlarni sodda holga keltirish kabi masalalar bilan shug’ullanadi.

Kinematikada jismlarning harakati geometrik nuqtai nazardan, ya’ni harakatni vujudga keltiruvchi sababga bog’lamay o’rganiladi.

Dinamikada moddiy jismlarning harakati o’nga ta’sir etuvchi kuchlarga bog’liq ravishda tekshiriladi.

Shuni alohida ta'kidlash kerak-ki, hozirgi zamon texnikasining harakatini o'rganish va ularni loyihalashtirishda dinamikaning analitik mexanika, tebranishlar nazariyasi, turg'unlik nazariyasi, boshqarish jarayoni va osmon mexanikasi kabi bo'limlarini bilmay turib, sodir bo'layotgan harakat jarayonini to'la tushunish mumkin emas, chunki ko'p hollarda sodir bo'layotgan harakat nafaqat Yerdagi hodisalar jarayoniga, balki osmon jismlari harakatiga ham bog'liq bo'ladi.

Qadimgi yunon olimi Arximed statikaning asoschilaridan biri hisoblanadi. U parallel kuchlar ta’siridagi richagning muvozanati, jismlarning og’irlik markazini aniqlash nazariyasini yaratish bilan birga gidrostatikaga ham asos solgan. Geometrik statikaning rivojlanishiga fransuz olimlari P.Varinon (1654-1722) va L. Puanso (1777-1859) katta hissa qo’shdilar.

Analitik statikaning asoschisi J.Lagranj hisoblanadi. Statikaning aksiomatik metodlarini rivojlantirishda rus olimlari N.Ye.Jukovskiy va S.A.Chapliginlarning roli kattadir.

Statikaning asosiy tushunchalaridan biri qattiq jismdir. Kuchlar ta'sirida bo'lgan jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarmasa, bunday jismga *absolyut qattiq jism* deyiladi. Boshqacha aytganda, absolyut qattiq jismning geometrik shakli o'zgarmaydi (deformasiyalanmaydi). Kelgusida qattiq jism (yoki jism) deganda absolyut qattiq jism tushuniladi.

Nazariy mexanikada o'lchamlari e'tiborga olinmaydigan darajada kichik bo'lgan jismga *moddiy nuqta* deyiladi. Berilgan jismni tasvirlovchi moddiy nuqta geometrik nuqtadan farqli ravishda berilgan jismning massasiga teng massaga hamda boshqa jismlarga o'zaro ta'sir etish xususiyatiga ega bo'ladi.

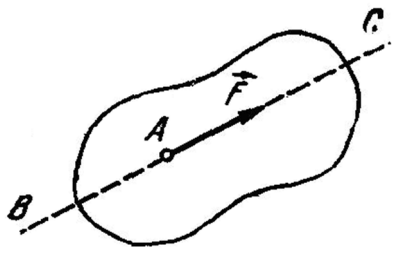
Har qanday jismni moddiy nuqtalar to'plamidan tashkil topgan deb qarash mumkin. Mazkur nuqtalar orasidagi bog'lanish jismning xususiyatlariga bog'liq bo'ladi.

Kuchning jismga ta'siri kuch qo'yilgan nuqta, uning yo'nalishi va miqdori bilan aniqlanadi. Kuchning yo'nalishi deganda tinch holatda turgan erkin jismning mazkur kuch ta'siridan olgan harakat yo'nalishi tushuniladi. Kuchning miqdorini (modulini) aniqlash uchun uni kuch birligi sifatida qabul qilingan biror kattalik bilan solishtiriladi.

Kuch- vektor kattalik bo'lib, uni chizmada o'zunligi ma'lum masshtabda kuch miqdorini, strelkaning yo'nalishi kuch yo'nalishini foydalovchi vektor kesma tarzida tasvirlanadi. Jismning A nuqtasiga F kuch qo'yilgan bo'lsin .

Kuch vektori yo'naltirilgan VS to'g'ri chiziqqa *kuchning ta'sir chizig'i* deyiladi.

Agar jismga bir nechta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsa, bunday kuchlar to'plamiga *kuchlar sistemasi* deyiladi va $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n)$ deb belgilanadi.



1.1-shakl

Ta'sir etayotgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n)$ kuchlar sistemasini boshqa biror $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_m)$ kuchlar sistemasi bilan almashtirishda jism holati o'zgarmasa, bunday kuchlar sistemasiga *ekvivalent kuchlar sistemasi* deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_m)$$

Agar $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_m)$ kuchlar sistemasi bitta *R* kuchga ekvivalent, ya'ni

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n) \sim R$$

bo'lsa, bunday kuchga berilgan kuchlar sistemasining *teng ta'sir etuvchisi* deyiladi.

Kuchlar sistemasi ta'siridagi jism tinch holatda qolsa yoki inersion harakatda bo'lsa (masalan, jismning barcha nuqtalari o'zgarmas va bir xil tezlik bilan harakatlansa), jismning bunday holati *muvozanat holat* deyiladi. Kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanat holatida bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi *muvozanatlashgan kuchlar sistemasi* yoki *nolga ekvivalent sistema* deyiladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n) \sim 0$$

Statika bo'limida jismning muvozanati deganda uning tinch holati tushuniladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Mexanika predmeti haqida gapirib bering
2. Mexanik harakat deb qanday harakatga aytiladi?
3. Nazariy mexanika fani nimani o'rganadi?
4. Statikaning asosiy tushunchalari va aksiomalari ta'rifini bering
5. Bog'lanishdagi jismni qanday holatda erkin jism deb qarash mumkin?

2-MAVZU: Statikaning aksiomalari. Bog'lanishlar va bog'lanish reaksiya kuchlari.

Reja

1. Statika aksiomalari.
2. Bog'lanishlar.
3. Bog'lanish reaksiyalari.

Tushuncha va tayanch iboralar

Absolyut qattiq jism, moddiy nuqta, kuchning yo'nalishi va miqdori, kuchning ta'sir chizig'i, kuchlar sistemasi, ekvivalent kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi kuch, muvozanat holat, muvozanatlashgan kuchlar sistemasi, statika aksiomalari, bog'lanish, bog'lanishdagi jism, bog'lanish reaksiya kuchi, bog'lanishdan bo'shatish prinsipi.

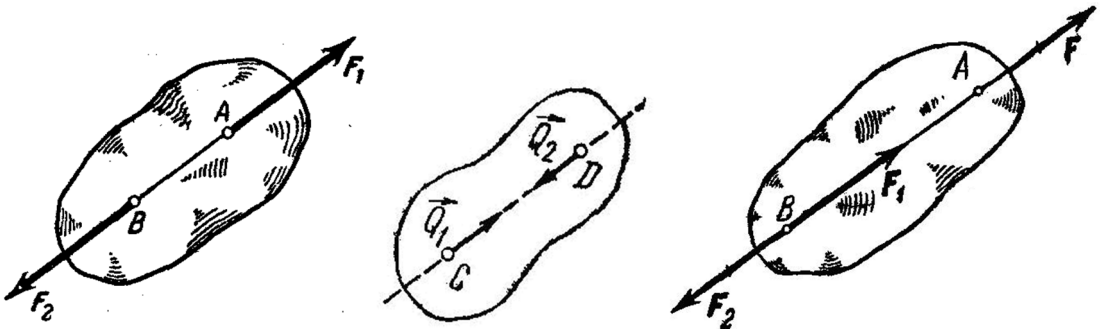
Mavzuni bayoni

Endi ko'plab o'tkazilgan tajriba va kuzatishlar natijalari asosida qabul qilingan statika aksiomalariga to'xtalib o'tamiz.

Ma'lumki, I.Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan biror kuch ta'siridagi jism tezlanish oladi, boshqacha aytganda muvozanat holatidan chiqadi. Demak, jism bitta kuch ta'sirida muvozanatda bo'lishi mumkin emas. Shu sababli statikaning birinchi aksiomasi oddiy jismlarning muvozanat shartini aniqlaydi.

1-aksioma. *Absolyut qattiq jismga qo'yilgan ikkita kuch muvozanatlashishi uchun bu kuchlar miqdor jihatdan teng, yo'nalishi esa kuchlar qo'yilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

2-aksioma. *Berilgan kuchlar sistemasining absolyut qattiq jismga ta'sirini o'zgartirmay, bu kuchlar sistemasi qatoriga muvozanatlashgan kuchlar sistemasini qo'shish yoki undan ayirish mumkin.*



2.1-shakl

Bu aksiomaga ko'ra, agar $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n)$ kuchlar sistemasiga $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \infty 0$ sistemani qo'shsak, u holda

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n) \infty (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$$

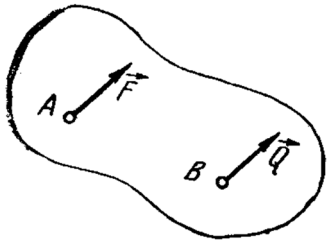
munosabat o'rinli bo'ladi.

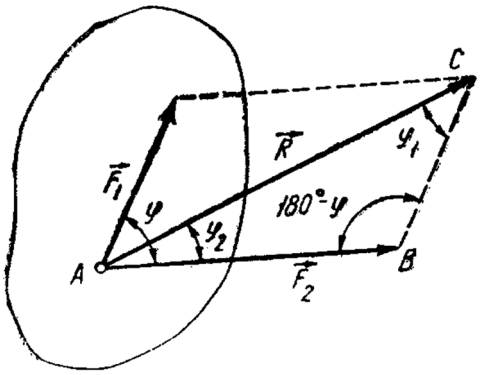
Natija. *Kuchni uning ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga kuchirish bilan kuchning jismga ta'siri o'zgarmaydi.*

3-aksioma. (parallelogramm aksiomasi). *Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan, bir to'g'ri chiziqda yotmagan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi miqdor va yo'nalish jihatdan shu kuchlarga qurilgan parallelogrammning kuchlar qo'yilgan nuqtadan o'tuvchi diagonali bilan ifodalanadi.*

4-aksioma (Nyutonning uchinchi qonuni). *Ikkita jism bir-biriga miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sir etadi.*

5-aksioma (qotish prinsipi). *Agar deformasiyalanadigan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi.*





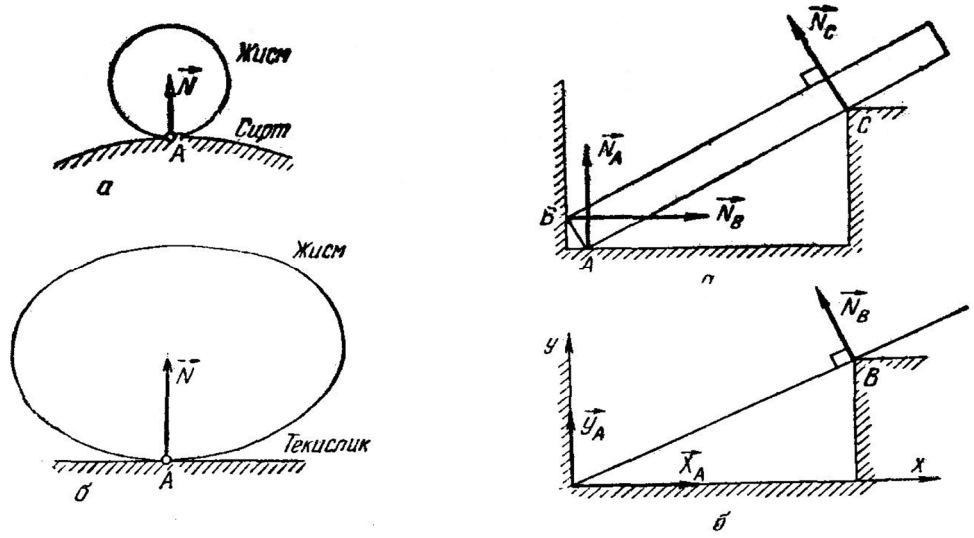
2.2-shakl

Berilgan jismning ko’chishi boshqa jismlar bilan cheklangan bo’lsa, u *bog’lanishdagi jism* deyiladi. Berilgan jismning ko’chishini cheklovchi jismga *bog’lanish* deyiladi.

Bog’lanishning jismga ko’rsatadigan ta’siriga *bog’lanish reaksiya kuchi* deyiladi.

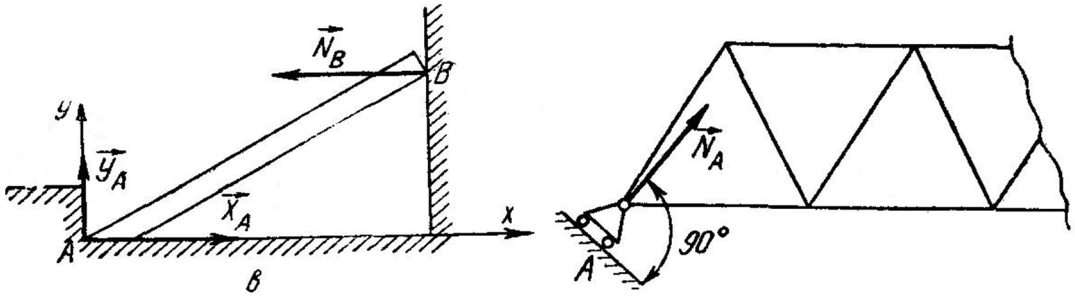
Harakati bog’lanishlar bilan cheklanmagan jism *erkin jism* deyiladi.

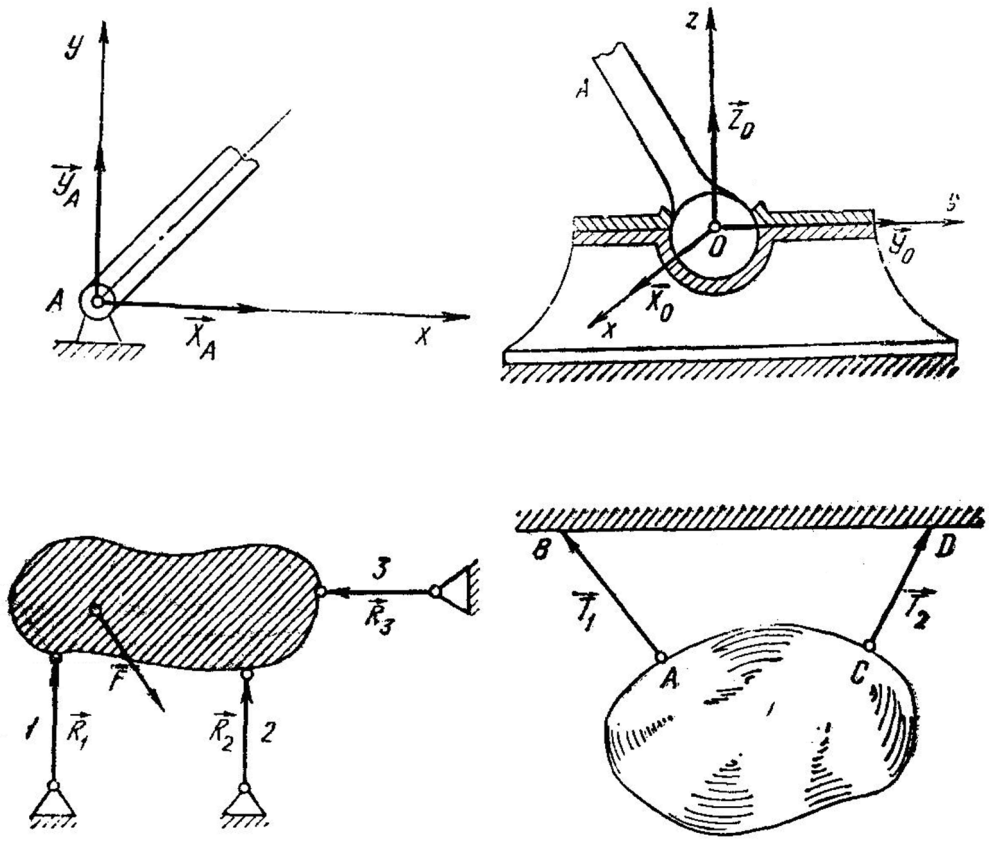
Bog’lanishlar aksiomasi (bog’lanishdan bo’shatish prinsipi). Bog’lanishlarning berilgan jismga ta’sirini reaksiya kuchi bilan almashtirib, har qanday bog’lanishdagi jismni erkin jism deb qarash mumkin.



2.3-shakl

1. Silliq sirt vositasida bog’lanishlar
2. Sharnirli bog’lanishlar
3. Ip, zanjir va qayishlar vositasida bog’lanishlar





2.4-shakl

Agar jism biriktirilgan ikkinchi jismga nisbatan biror o'q yoki nuqta atrofida aylanishi mumkin bo'lsa, bunday bog'lanish *sharnirli bog'lanish* deyiladi.

Sharnir o'qi harakatlanishi mumkin bo'lsa, u qo'zg'aluvchi sharnirli bog'lanish deyiladi. Qo'zg'aluvchi sharnirli bog'lanish reaksiya kuchi sharnirning tayanch tekisligiga o'tkazilgan perpendikulyar bo'ylab yo'naladi.

Sharnir o'qi biriktirilgan jism qo'zg'almas bo'lgan holda bog'lanish *qo'zg'almas sharnirli bog'lanish* deyiladi. Qo'zg'almas sharnirli bog'lanish silindrik yoki sferik sharnir bo'lishi mumkin.

Silindrik sharnirli bog'lanishning reaksiya kuchi sharnir o'qiga perpendikulyar tekislikda joylashadi, lekin uning yo'nalishini avvaldan ko'rsatib bo'lmaydi. Bu holda reaksiya kuchining o'zaro hamda sharnir o'qiga perpendikulyar bo'lgan ikkita o'q bo'yicha tashkil etuvchilari olinadi.

Sferik sharnirli bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishini ham avvaldan ko'rsatib bo'lmaydi, bu holda reaksiya kuchining o'zaro perpendikulyar bo'lgan uchta o'qdagi tashkil etuvchilari olinadi.

Jism vaznsiz sterjen vositasida sharnirli bog'langan bo'lsin. Jismni bog'lovchi sterjenning og'irligi jism og'irligiga nisbatan juda kichik bo'lib, sterjen uchlaridan boshqa nuqtalarga hech qanday kuch ta'sir etmasa, u *vaznsiz sterjen* deyiladi. Vaznsiz sterjenning reaksiya kuchi bog'lanish bo'yicha yo'naladi. Bunda sterjen cho'ziladigan bo'lsa, reaksiya kuchi jismdan sterjen bo'ylab tashqariga; qisiladigan bo'lsa, sterjen bo'ylab jismga qarab *sirpanuvchi qotirmalar* yo'naladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Statikaning asosiy aksiomalarini aytib bering?

2.Statikaning asosiy aksiomalarini natijalarini aytib bering?

3.Statikaning nechta asosiy aksiomasi bor?

4.Bog`lanish deb nimaga aytiladi?

5.Silliq gorizontal tekislikdan iborat bog`lanishning reaktsiyasi qanday yo`naladi?

6.Bog`lanishlar aksiomasi nimadan iborat?

3- MAVZU: Kesishuvchi kuchlar tizimi.

Reja

1. Kesishuvchi kuchlarni geometrik qo'shish.
2. Uch kuchning muvozanati haqidagi teorema.
3. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi.
4. Kuchning teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash.
5.Kesishuvchi kuchlar tizimining muvozanati.

Tushuncha va tayanch iboralar:

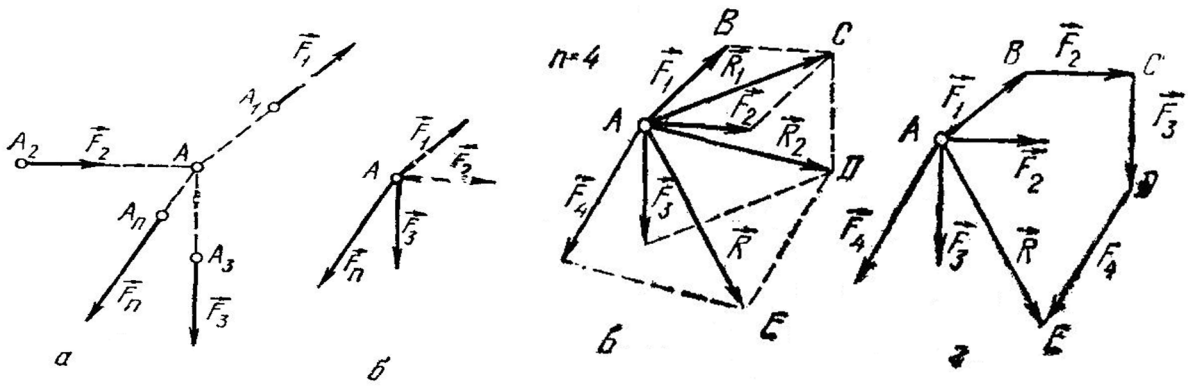
Kesishuvchi kuchlar sistemasi, kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi, kuchni analitik usulda aniqlash,geometric qo'shish, analitik qo'shish.

Mavzuni bayoni

Ta'sir chiziqlari bir nuqtada uchrashadigan kuchlar sistemasiga *kesishuvchi kuchlar sistemasi* deyiladi.

Ko'plab texnika masalalarida, ayniqsa fermalarning sterjenlarida hosil bo'ladigan zo'riqishlar va osilgan yuklarning muvozanat shartlarini aniqlashda kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun olingan muvozanat tenglamalaridan foydalanish ancha qulay bo'ladi. Bundan tashqari kelgusida ko'riladigan fazoda ixtiyoriy yo'nalgan kuchlar sistemasi muvozanatini o'rganishda kesishuvchi kuchlar sistemasi asosiy boshlang'ich tushunchalar bo'lib xizmat qiladi.

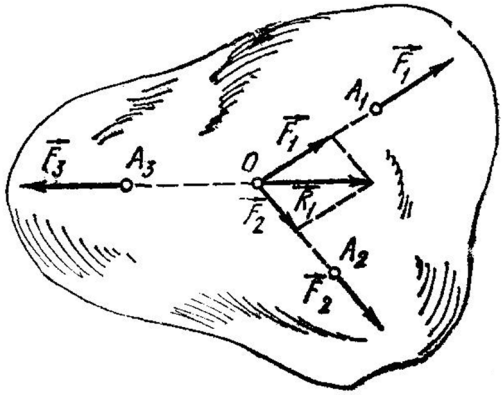
Bir nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ kuchlar berilgan. Bu kuchlarni qo'shish uchun parallelogramm qoidasidan ketma-ket foydalanish mumkin.



$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

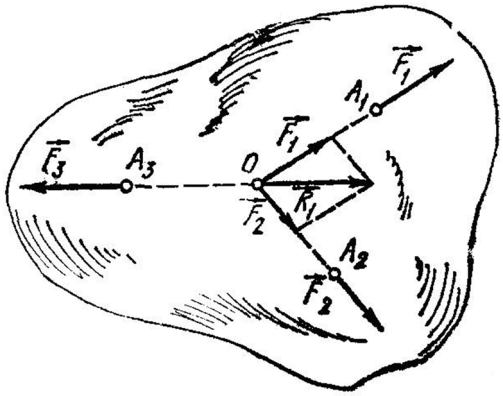


3.1-Shakl

R - teng ta'sir etuvchi kuch. *ABCDE* – kuch ko'pburchagi.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \qquad (3.1)$$

Shunday qilib, *kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi tashkil etuvchi kuchlarning geometrik yig'indisiga teng va shu kuchlar ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi*.



3.2-shakl

R - teng ta'sir etuvchi kuch. *ABCDE* – kuch ko'pburchagi.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \qquad (3.2)$$

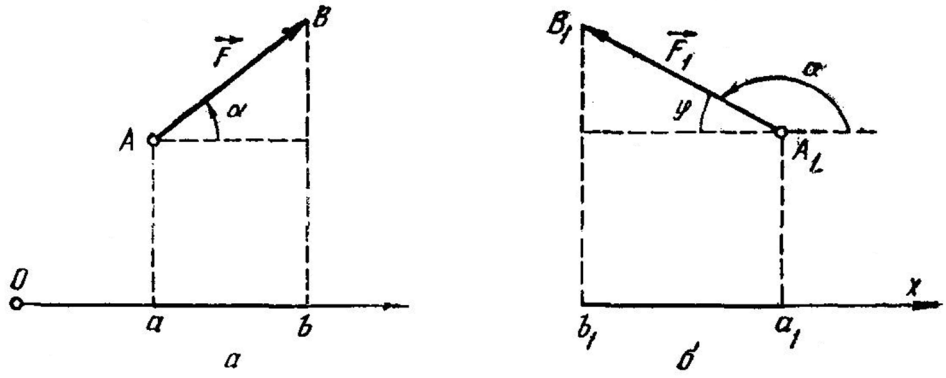
Shunday qilib, *kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi tashkil etuvchi kuchlarning geometrik yig'indisiga teng va shu kuchlar ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi*.

Teorema. *Bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi*.

Kuchning biror o’qdagi proyeksiyasi skalyar miqdor bo’lib, kuch moduli bilan kuchning shu o’q musbat yo’nalishi bilan tashkil qilgan burchagi kosinusiga ko’paytmasiga teng.

$$F_x=X=F\cos\alpha$$

$$X_1=F_1\cos\alpha=-F_1\cos\alpha$$

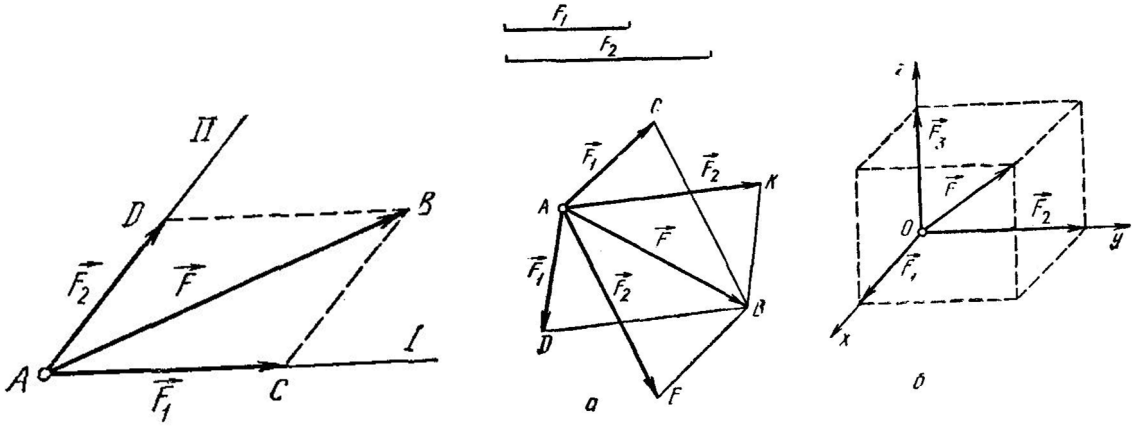


3.3-shakl

1. $\vec{F}$ kuchni shu kuch bilan bir tekislikda yotuvchi berilgan ikkita yo’nalish bo’yicha tashkil etuvchilarga ajratish.

2. $\vec{F}$ kuchni shu kuch bilan bir tekislikda yotuvchi va son qiymatlari berilgan ikkita tashkil etuvchiga ajratish.

3. $\vec{F}$ kuchni bir-biriga perpendikulyar uchta koordinata o’qlari bo’yicha yo’nalgan $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ tashkil etuvchilarga ajratish.



3.4-shakl

Kuchni uning koordinata o’qlaridagi proyeksiyalari va qo’yilgan nuqtasining koordinatalari orqali topish usuliga *analitik usulda aniqlash* deyiladi.

(3.1) ni koordinata o’qlariga proyeksiyalab, topamiz

$$R_x = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu,\ R_y = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu,\ R_z = \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu.$$

Teng ta’sir etuvchining moduli.

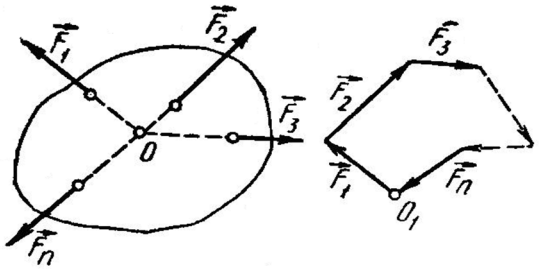
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu\right)^2}.$$

Yo’nalishi

$$\cos\left(\vec{R}\hat{}x\right) = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\left(\vec{R}\hat{}y\right) = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos\left(\vec{R}\hat{}z\right) = \frac{R_z}{R}.$$

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo’lishi uchun mazkur kuchlarning geometrik yig’indisi nolga teng bo’lishi zarur va yetarlidir.

$$\sum_{\nu=1}^{m} \vec{F}_\nu = 0$$



3.5-shakl

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun bu kuchlarga qurilgan kuch ko’pburchagi yopik bo’lishi zarur va yetarlidir.

Teng ta’sir etuvchi kuch $\vec{R} = 0$ bo’lsa,

$$R_x=0,\ R_y=0,\ R_z=0$$

yoki

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu = 0.$$

Bu tengliklar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartining analitik ifodasidir.

($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) kuchlarning teng ta'sir etuvchisini kuch ko'pburchagi yordamida aniqlash uchun geometriya va trigonometriya formulalaridan foydalanamiz. teng ta'sir etuvchini bunday usulda aniqlash *geometrik usul* deyiladi.

agar kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, u holda har birini uzunligi o'lchanib, shaklda ko'rsatilganidek kuch ko'pburchagi ko'riladi va teng ta'sir etuvchining uzunligi ham o'lchanadi. teng ta'sir etuvchining uzunligi uning kattaligini beradi va bunday usul – *grafik usul* deb ataladi.

kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini koordinata o'qlaridagi proeksiyasi, barcha kuchlarning mos koordinata o'qlaridagi proeksiyalari-ning algebraik yig'indisiga teng.

Muvozanat shartlari vektor yoki analitik ko'rinishda bo'lishidan qatiy nazar, asosiy maqsad kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishini tekshirishdan iborat. bundan tashqari kuchlarning muvozanat shartlaridan foydalanib, jismga qo'yilgan bog'lanish reaksiya kuchlarining qiymatlari va yo'nalishlari aniqlanib, olingan ma'lumotlar asosida berilgan qurilma baholanadi. agarda (2.10) tenglamalarda noma'lum reaksiya kuchlarining soni uchtadan ortiq bo'lsa, u holda hosil qilingan tenglamalar sistemasini yechib bo'lmaydi. bunday masalalarni *statik noaniq* yoki *statik aniqlanmaydigan masalalar* deyiladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi va ularni geometrik qo’shish usullari.
2. Kuchni tashkil etuvchilarga ajratishning qanday usullarini bilasiz?
3. Kuchning o’qdagi va tekislikdagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
4. Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo’lishi uchun qanday shart bajarilishi lozim?

4 – MAVZU: Kuchning nuqtaga va o'qqa nisbatan momenti Juft kuchlar nazariyasi.

Reja

1.Kuchning nuqtaga nisbatan momenti.
2.Kuchning o‘qqa nisbatan momenti.
3.Kuchning o’qqa nisbatan va shu o’qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog’lanish
4. Juft kuch haqida tushuncha.
5. Juft kuchning momenti.
6. Juftlar haqidagi teoremalar. Juft kuchlarning xossalari
7.Juftni parallel tekislikka ko’chirish haqidagi teorema
8.Juftning moment vektori. Fazodagi juftlarni qo’shish.

Tayanch so’z va iboralar

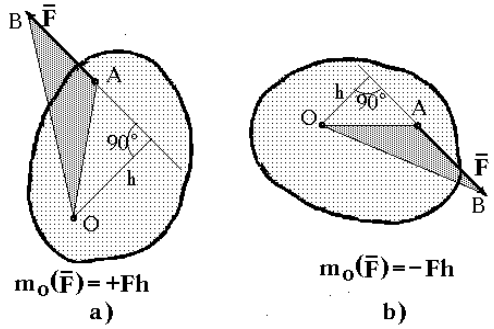
Moment, bosh vektor, bosh moment, teng tasir etuvchi vektor. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari. O’qqa nisbatan moment. Parallel kuchlar sistemasi, juft kuch, kuch momenti, juft kuch momenti, ekvivalent juftlar, fazodagi juftlar, juft yelkasi.

Mavzuni bayoni

Faraz qilaylik, qattiq jismning birorta tekisligida, masalan xOy tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasi tasir etsin. Bunday kuchlar sistemasini sodda xolga keltirish uchun ularni qo’shish zarur bo’ladi, lekin bunday kuchlarni tasir chiziqlari bir nuqtada kesishmaganliklari uchun, ularni parallelogramm usulida qo’shib bo’lmaydi, va aksariyat

hollardaularning *teng tasir etuvchisi* mavjud bo'lmaydi, shuning uchun ularning bosh vektori va bosh momentini aniqlashni o'rganamiz.

U holda bu jismga tasir etuvchi kuchlar o'zlarining yo'nalishi va son qiymatlariga bog'liqravishda aylantiruvchi effekt beradilar, ushbu effektni mexanika tilida *kuchning momenti* deb ataladi (4.1- shakl).



4.1- shakl.

Kuchning biror nuqtaga nisbatan momenti deb, shu kuchning modulini(son qiymatini), uning shu nuqtagacha bo'lgan yelkasiga ko'paytmasiga aytiladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan yelkasi deb, shu berilgan nuqtadan kuchning tasir chizigiga tushirilgan perpendikulyarning uzunligiga aytiladi.

Demak, biror nuqtaga nisbatan kuchning momentini aniqlash uchun, shu kuchning modulini (son qiymatini), uning shu nuqtaga nisbatan yelkasiga ko'paytmasiga aytilar ekan. Ikkinchidan tanlangan nuqta atrofida jism soat strelkasining qaysi tarafiga qarab aylanishiga ko'ra uni musbat yoki manfiy ishora bilan belgilanadi.

Nazariy mexanika fanida, jismga tasir etayotgan kuchlar, jismni berilgan nuqta atrofida soat strelkasi tomonga aylantirsalar, uning momenti manfiy ishora bilan belgilanadi, agar soat strelkasi yo'nalishiga teskari tomonga aylantirishsa musbat ishora bilan belgilanishi qabul qilingan.

Masalan shaklda ko'rsatilgan kuchning O nuqtaga nisbatan momenti, qo'yidagicha yoziladi, ya`ni

$$m_O(\vec{F}_1) = +F_1 \cdot h_1 \qquad \text{ёки} \qquad m_O(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2 \qquad (4.1)$$

Ushbu yozuvdan ko'rinib turibdiki, lotincha m - harfi kuchning momentini belgilaydi, indeksdagi O harfi, kuchning qaysi nuqtaga nisbatan momenti xisoblanayotganligini ko'rsatadi.

Qavs ichida qaysi kuchning momenti aniqlanayotganligi ko'rsatilgan, barobardan keyin shu kuchning tasirida jism, o'sha nuqta atrofida qaysi tomonga aylanishiga bog'liqravishda, tegishli musbat yoki manfiy ishora qo'yilgan. Undan keyin tegishli kuchning son qiymatini uning shu nuqtaga nisbatan yelkasiga ko'paytmasi bilan ifodalanadi.

Shunga ko'ra kuchning nuqtaga nisbatan momentining o'lchov birligi (N•m)larda o'lchanadi, ya`ni kuch birligi (Ngyuton)ning uzunlik birligi (metr)ga ko'paytmasi bilan o'lchanadi.

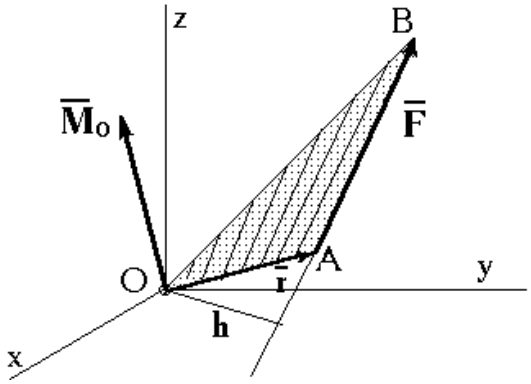
Kuchning nuqtaga nisbatan momentining qo'yidagi xususiyatlari bilan tanishib o'tish lozim deb hisoblayman:

1) Kuchni o'z tasir chizigi bo'ylab boshqa nuqtaga ko'chirsak, uning o'sha nuqtaga nisbatan momenti o'zgarmaydi.
2) Agar kuchning son qiymati nolga teng bo'lsa, yoki uning tasir chizig'i berilgan markazni kesib o'tsa, uning shu markazga nisbatan olingan momenti nolga teng bo'ladi.
3) Kuchning nuqtaga nisbatan momentining son qiymati, shu kuchning vektori bilan berilgan nuqtaga qurilgan uchburchakning ikkilangan yuzasiga teng (shakl 4.1 b).

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor qiymat bo'lib, u kuch qo'yilgan nuqtaning radius vektori bilan kuch vektorining vektor ko'paytmasiga teng, ya`ni

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4.2}$$

F - kuchining Dekart koordinata o'qlari markaziga nisbatan olingan momentlari, qo'yidagi formuladan aniqlanadi (4.2 -shakl),



4.2 -shakl.

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (y \cdot F_z - z \cdot F_y)\vec{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z)\vec{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x)\vec{k}$$

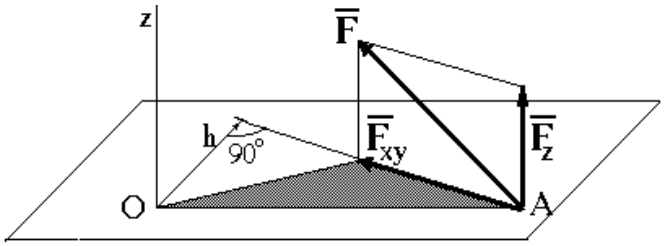
Ushbu formulalardan foydalanib, Ox, Ou va Oz o'qlarga nisbatan olingan momentlarni yozamiz,

$$\begin{aligned} m_{Ox}(\vec{F}) &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \\ m_{Oy}(\vec{F}) &= (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \\ m_{Oz}(\vec{F}) &= (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Yuqoridagilarni aniqlagandan so'ng m - vektor momentning modulini aniqlash uchun, Pifagor teoremasidan foydalanamiz.

$$M_o = \sqrt{m_{Ox}^2 + m_{Oy}^2 + m_{Oя}^2} \tag{4.4}$$

$\vec{F}$ kuchni ixtiyoriy yo'nalgan Oz -o'qqa nisbatan momentini aniqlash zarur bo'lsin(shaklga qarang). Buning uchun shu o'qqa perpendikulyar bo'lgan birorta tekislik olamiz, va kuchni shu tekislikka proektsiyalaymiz, masalan bu xOu tekisligi bo'lsin, u holda $\vec{F}$ kuchining shu tekislikdagi proektsiyasi $\vec{F}_{xy}$ vektorini xosil qilamiz. Endi shu $\vec{F}_{xy}$ kuch vektorini O nuqtaga nisbatan olingan momenti, $\vec{F}$ kuchining Oz - o'qiga nisbatan olingan momenti deb hisoblanadi ya`ni,



4.3- shakl.

$$\vec{m}_z(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}_{xy})$$

va buning moduli qo'yidagicha aniqlanadi,

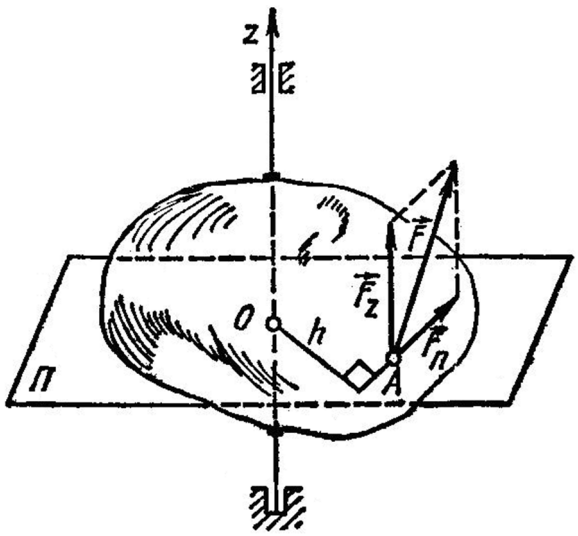
$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h \qquad (4.5)$$

Kuchning o'qqa nisbatan momentining qo'yidagi xususiyatlari bilan tanishib o'tish lozim deb xisoblayman:

1) Agar kuch vektori biror o'qqa parallel bo'lsa, uning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi, chunki $\vec{F}_{1xy} = 0$.
2) Agar kuch vektorining tasir chizig'i biror o'qni kesib o'tsa, kuchning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi, chunki hq0 bo'ladi.
3) Agar kuch vektori bilan, o'q bir tekislikda yotsalar, kuchning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi, chunki 1) va 2) xususiyatlardan biri paydo bo'ladi.

Kuchning o'qqa nisbatan olingan momenti ham vektor qiymatdir, uni ham yuqoridagi kabi yozib chiqish mumkin, buni aniqlashni studentlarga havola qilamiz.

Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti deb, uning shu o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasining o'q bilan mazkur tekislik kesishgan nuqtasiga nisbatan momentiga aytiladi.



4.4-shakl

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_n) = \pm\vec{F}_n \cdot h.$$

Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish haqida lemma.

Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti uning shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan moment-vektorining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng.

$$\left[\vec{M}_o(\vec{F}_n)\right]_z = M_z(\vec{F})$$
$$M_x(\vec{F}) = \left[\vec{M}_o(\vec{F}_n)\right]_x$$
$$M_y(\vec{F}) = \left[\vec{M}_o(\vec{F}_n)\right]_y$$
$$M_z(\vec{F}) = \left[\vec{M}_o(\vec{F}_n)\right]_x$$

Modullari o'zaro teng, yo'nalishlari qarama-qarshi va parallel bo'lgan vektorlardan tashkil topgan ikkita kuchlardan iborat sistemaga - juft kuch[1] *deb, ataladi .*

Juft kuchlarni tashkil etuvchi $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ vektorlardan iborat kuchlar sistemasi hech qachon muvozanat holatda bo'lmaydi (chunki bu kuchlar bir to'g'ri chiziqda yotmaydilar). o'z navbatida bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi ham bo'lmaydi, chunki ixtiyoriy kuchlar sistemasining bosh vektori, ya'ni vektor yig'indisi $\overline{R}$ bo'ladi, juft kuchlar uchun u $\overline{R} = \overline{F} + \overline{F}' = 0$ ga teng bo'ladi. Shu sababli juft kuchlar, jismlarning o'zaro maxsus ta'sirlariga oid bo'lganligi uchun, alohida o'rganiladi.

Juft kuchlarning ta'sir chiziqlari joylashgan tekislik, juft kuchlarning tekisligi deb ataladi. Juft kuchlarning ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa, *juftning yelkasi* deb ataladi. Juft

[1] Juftlar nazariyasini, buyuk frantsuz olimi- mexanik va geometrik L.Puanso (1777-1859y.) yaratgan

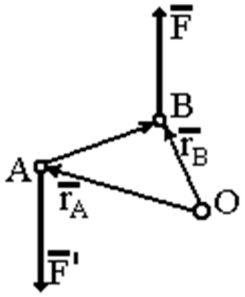
kuchlarning jismga ta’siri, uning aylanma harakatini belgilaydi va uni belgilovchi qiymat *juftning momenti* deb ataladi. Juftning momenti: 1) $F \cdot d$ -ko‘paytmadan iborat bo‘lgan juftning moduli; 2) juftning ta’sir kuchi joylashgan tekislik; 3) juftning shu tekislik bo‘yicha aylanishining yo‘nalishi bilan belgilanadi. Shunday qilib, kuchning markazga nisbatan momenti kabi, juftning momenti ham vektor qiymatdan iborat ekan.

Ta’rif: *Juft kuchning momenti deb, moduli juftni tashkil qiluvchi kuchlarning birini modulini juftning yelkasiga ko‘paytmasiga teng bo‘lgan, yo‘nalishi esa juft kuchlar yotgan tekislikka perpendikulyarl bo‘lib, jismni soat stryelkasi yo‘nalishiga teskari bo‘lgan yo‘nalishda aylantirishga harakat qiluvchi* $\overline{\mathrm{m}}$ *yoki* $\overline{\mathrm{M}}$ *- harfi bilan belgilanadigan vektorga aytiladi.*

$\overline{F}$ - kuchning A nuqtaga nisbatan yelkasi d - ga teng bo‘lib, $\overline{F}$ -kuch va A nuqta yotgan tekislik bilan juft kuchlar joylashgan tekislik bir bo‘lganligi uchun,

$$\overline{\mathrm{m}} = \overline{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{F}}) = \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{F}} \tag{4.6}$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Lekin, kuchning vektor momenti faqat markazga qo‘yilsa, juft kuchning vektor momenti ixtiyoriy nuqtaga qo‘yilishi mumkin (ya’ni *erkin vektor* deb ataladi). Juft



4.5- shakl

kuchning momenti ham, kuchning momenti kabi nyuton·metr (N·m) bilan o‘lchanadi.

Juft kuchning momentiga boshqacha ham ta’rif byerish mumkin. Juftning momenti juftni tashkil etuvchi kuchlarning ixtiyoriy O markazga nisbatan olingan momentlarning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\overline{\mathrm{m}} = \overline{\mathrm{m}}_{\mathrm{O}}(\overline{\mathrm{F}}) + \overline{\mathrm{m}}_{\mathrm{O}}(\overline{\mathrm{F}}'), \tag{4.7}$$

Ushbu ta’rifni isbotlash uchun, ixtiyoriy O markaz tanlab olamiz (4.5- shakl), va bu nuqtadan kuchlar qo‘yilgan nuqtalarga $\bar{r}_A = \overline{OA}$ va $\bar{r}_B = \overline{OB}$ bo‘lgan radius vektorlar o‘tkazamiz. U holda $\overline{F}' = -\overline{F}$ ekanligini e’tiborga olib,

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \bar{r}_B \times \overline{F}, \qquad \overline{m}_O(\overline{F}') = \bar{r}_A \times \overline{F} = -\bar{r}_A \times \overline{F}',$$

hosil qilamiz, ularning geometrik yig‘indisi,

$$\overline{m}_O(\overline{F}) + \overline{m}_O(\overline{F}') = (\overline{r}_B - \overline{r}_A) \times \overline{F} = \overline{AB} \times \overline{F},$$

hosil qilamiz. $\overline{AB} \times \overline{F} = \overline{m}$, ekanligini hisobga olsak (4.7) formula isbotlanganligini ko‘ramiz. Bundan yuqorida ko‘rsatilgan natija kelib chiqadi, ya’ni

$$\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{m}_A(\overline{F}) \qquad \text{yoki} \qquad \overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F}') \tag{4.8}$$

demak, juftning momenti birorta kuchning ikkinchi kuch qo‘yilgan markazga nisbatan momentiga teng ekan. Juft kuchlar momentining moduli,

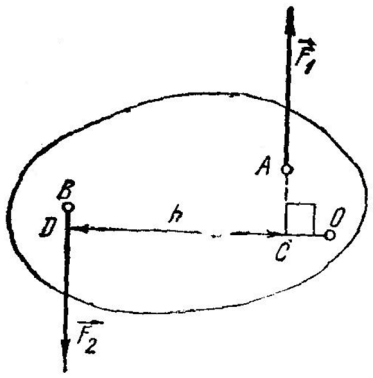
$$m=F\cdot d \tag{4.9}$$

formula orqali hisoblanadi.

Agarda, juft kuchlarning qattiq jismga ta’siri (aylantirish samarasi) har bir kuchning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig‘indisiga teng ekanligini e’tiborga olsak (4.7) formulaga asosan *momentlari teng bo‘lgan ikkita juft kuchlar ekvivalent bo‘lar ekan*. Ya’ni ular jismga bir xil ta’sir ko‘rsatar ekanlar. Boshqacha qilib aytganimizda, vektor momentlari $\overline{m}$ - o‘zaro teng bo‘lgan ikkita juft kuchlar, ularni tashkil etuvchi kuchlarning modullari qanday bo‘lishligidan qat’iy nazar va ular bitta tekislikdami yoki parallel tekislikdami joylashganliklaridan qat’iy nazar *ekvivalent juftlar* ekanlar. Juft kuchlar uchun markaz O nuqtaning ahamiyati bo‘lmaganligi uchun, uning vektor momentini ixtiyoriy nuqtaga joylash mumkin, ya’ni erkin vektor hisoblanadi.

Juftning momenti deb, mos ishora bilan olingan juft tashkil etuvchilaridan birining miqdorini juft yelkasiga ko’paytmasiga teng kattalikka aytiladi.

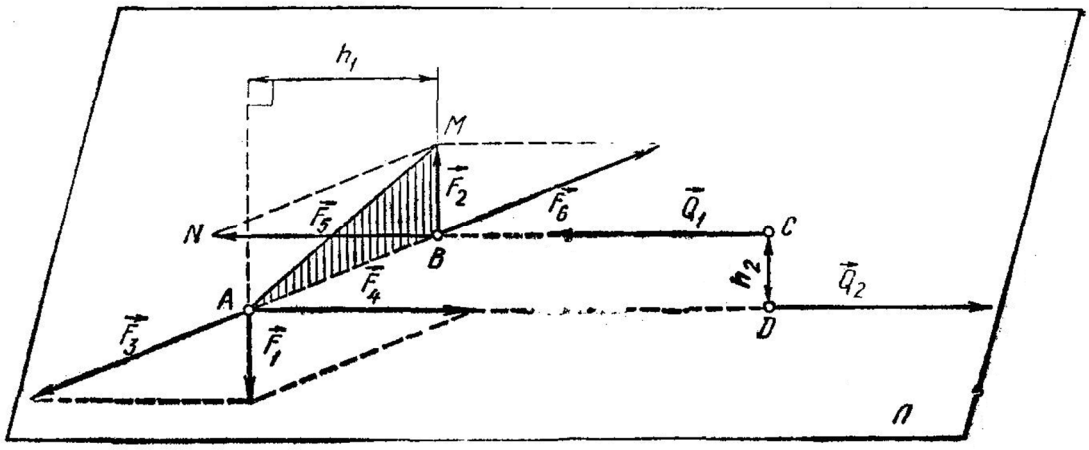
$$M = \pm F_1 h = \pm F_2 h.$$



4.6-shakl

Teorema. *Juft tashkil etuvchi kuchlarning juft tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig’indisi juft momentiga teng.*

$$M = M_A(\vec{F}_2) = M_B(\vec{F}_1).$$



4.7-shakl

Ekvivalent juftlar haqidagi teorema.

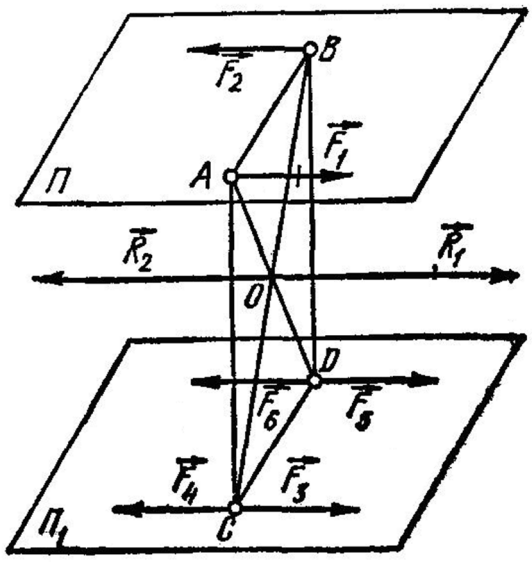
Bir tekislikda yotuvchi momentlari teng va aylanish yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki juft o'zaro ekvivalent bo'ladi.

Natijalar: *1. Juftni o'z tekisligida ixtiyoriy ravishda ko'chirsak, juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi.*

2. Juftning momenti va aylanish yo'nalishini o'zgartirmay uning tashkil etuvchilari va yelkasi o'zgartirilsa, juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Juftni parallel tekislikka ko'chirish haqidagi teorema.

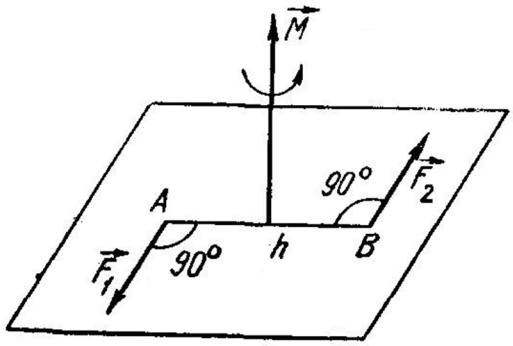
Parallel tekisliklarda yotuvchi, momentlarining absolyut qiymati teng va bir xil aylanish yo'nalishiga ega bo'lgan ikkita juft kuch o'zaro ekvivalentdir. *P* tekislikda yotuvchi va yelkasi $|AV|$ ga teng (F_1, F_2) juft kuch berilgan. *P* tekislikka parallel *P,* tekislikda $|AV|$ ga parallel va teng *CD* kesmani olamiz: *S* va *D* nuqtalarga miqdorlari (F_1, F_2) juftning tashkil etuvchilariga teng $(F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_1)$ kuchlarni qo'yamiz.



4.8-shakl

$$R_1 = F_1 + F_2 = 2F_1$$
$$R_1 = F_1 + F_2 = 2F_1$$
$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6\right) \infty \left(\vec{F}_3, \vec{F}_6\right)$$

Juftning moment vektori. Fazodagi juftlarni qo'shish. Juft kuchning jismga ta'siri (xuddi fazodagi kuchning nuqtaga nisbatan momenti kabi) quyidagi uchta faktor: juft momentining moduli, juftning ta'sir tekisligi va aylanish yo'nalishi bilan harakterlanadi.
Qayd etilgan uchta faktorni aniqlash uchun juft momenti u yotgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan va modul jihatdan juft momentining absolyut qiymati $\left|\vec{M}\right| = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h$ ga teng ***M*** vektori bilan ifodalanadi.



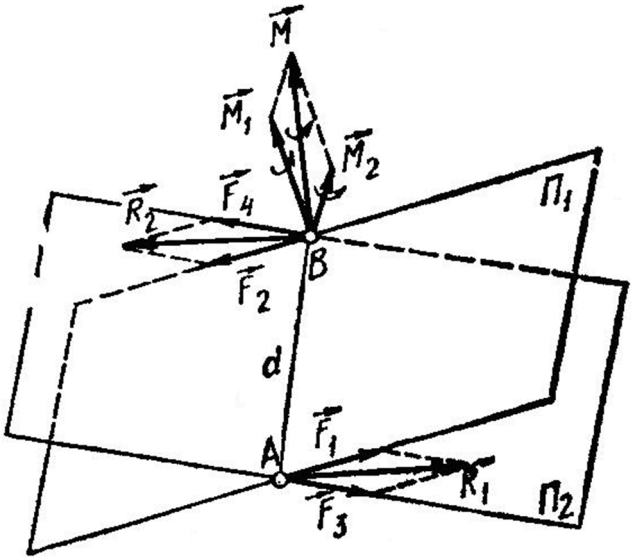
4.9-shakl

$$\vec{M} = \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1)$$

Juft momenti vektori erkin vektor bo'ladi.

Fazodagi juftlarni qo'shish haqida **teorema.** *Kesishuvchi tekisliklarda yotuvchi ikkita juft kuch momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng va bitta juftga ekvivalentdir:*

$$M_1 = F_1 \cdot d, \qquad M_2 = F_3 \cdot d$$
$$\vec{M} = M_1 + M_2$$



4.10-shakl

M_1 va M_2 moment-vektorlariga qurilgan parallelogramm *momentlar parallelogrammi* deyiladi.

Juftlar sistemasi uchun

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n$$

$$ёки \qquad \vec{M} = \sum M_v$$

Fazodagi juftlar momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday juftlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

$$\sum \vec{M}_v = 0$$

Fazodagi juftlar momentlarining har bir koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday juftlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

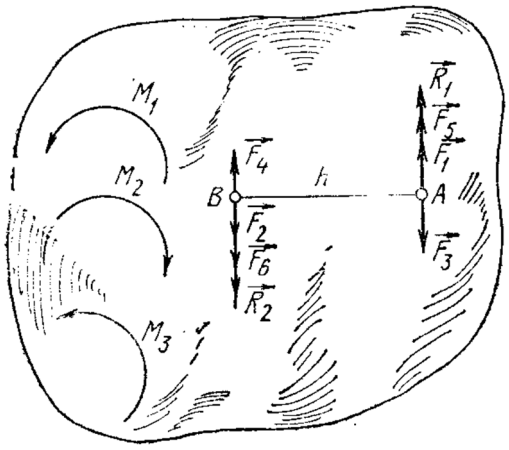
Juftlarning muvozanat sharti.Teorema. *Bir tekislikda yotuvchi juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng.*

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \Sigma M_v,$$

bunda M – teng ta'sir etuvchi juft momenti.

Tekislikdagi juftlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\Sigma M_v = 0.$$



4.11-shakl

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?

2.Kuchning o’qqa nisbatan moment deb nimaga aytiladi?

3.Nuqtaga nisbatan momentning qanday xossalarini bilasiz?

4.O’qqa nisbatan momentning qanday xossalarini bilasiz?

5.Juft kuch deb qanday kuchlar sistemasiga aytiladi?

6.Juftning momenti nimaga teng?

7.Juftning elkasi qanday aniqlanadi?

5-MAVZU: Kuchlarni bir markazga keltirish. Tekislikdagi kuchlar tizimining muvozanati.

Reja

1. Kuchlarni bir markazga keltirish.

2. Tekislikdagi kuchlar tizimining muvozanati.

3. Fazoviy kuchlar tizimini muvozanati.

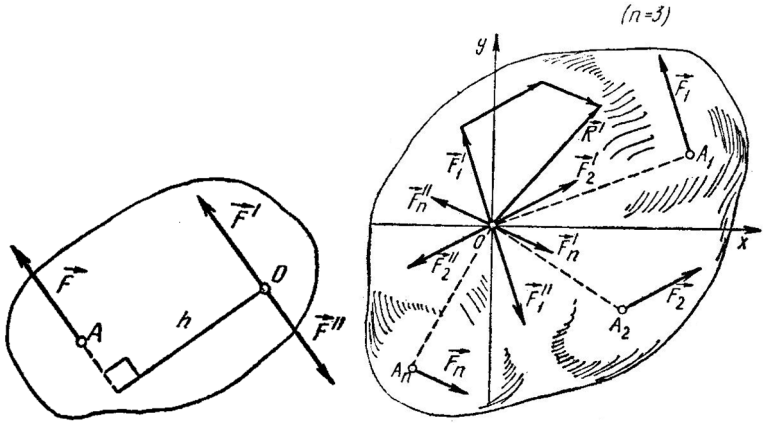
4. Statik aniq va static noaniq masalalar.

Tushuncha va tayanch iboralar

Parallel ko'chirish, kuchlar tizimi, bir markazga keltirish, fazoviy kuchlar, bosh vector, bosh moment, analitik ifodalar. Invariant, Varinion teoremasi, muvozanat sharti, geometric usul, analitik usul, fazoviy kuch,keltirish markazi, bosh momet, bosh vector.

Mavzuni bayoni

Agar jismga ta'sir etuvchi kuchlar bir tekislikda yotsa, unga *tekislikdagi kuchlar tizimi* deyiladi.



5.1-shakl

Lemma: *Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuch, jismda olingan ixtiyoriy keltirish markaziga qo'yilgan xuddi shunday kuchga va momenti berilgan kuchning keltirish markaziga nisbatan momentiga teng juftga ekvivalent bo'ladi.*

Ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatlik shartlari ikkita $\overline{R}=0$ va $\overline{M}_O=0$ vektor tenglama orqali aniqlanadi. Quyida shu ikkala vektor tenglamadan tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi uchun kelib chiqadigan analitik shartlarni ko'rib chiqamiz. Ular, asosan, uch turda bo'ladi.

1. Muvozanatlik shartining asosiy shakli. Bosh vektor $\overline{R}=0$ bo'lgani uchun, albatta, $R_x=0$ va $R_y=0$, hamda $M_o=0$ bo'ladi. Bu yerdagi M_o - algebraik moment, O - tekislikda olingan ixtiyoriy nuqta. Lekin formuladan ma'lumki tekislikda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat holati faqat quyidagi algebraik shartlar bajarilgandagina sodir bo'ladi,

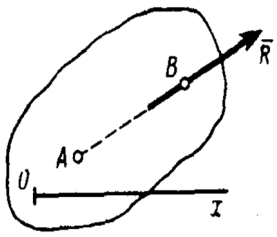
$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_O(\overline{F}_k) = 0 \tag{5.1}$$

(5.1) formula muvozanatlik shartlarning quyidagi analitik ifodalarini belgilaydi: *tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari shundan iboratki, barcha kuchlarning ikkala (x va y) o'qlarga proyektsiyalarining yig'indilari va ixtiyoriy olingan nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indilari no'lga teng bo'lishi shart.* O'z navbatida qattiq jismga qo'yilgan ixtiyoriy tekis kuchlar sistemasining muvozanat shartlari ham shu (5.1) formula orqali ifodalanadi.

2. Muvozanatlik shartining ikkinchi xil ko'rinishi: *tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va yetarlishartlari shundan iboratki, barcha kuchlarning ixtiyoriy A va B markazga nisbatan olingan momentlarining yig'indilari va AB chiziqqa perpendikulyarl bo'lmagan o'qqa bo'lgan proyektsiyalarining yig'indilari nolga teng bo'lishi shart, ya'ni*

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0 \quad \sum m_B(\overline{F}_k) = 0 \quad \sum F_{kx} = 0; \tag{5.2}$$

Agarda shu uchala analitik shartlardan birortasi qanoatlanmasa, masalan, $\overline{R} \neq 0$ yoki $M_A \neq 0$ (yoki $M_B \neq 0$) sistemasi muvozanatda bo'lmaydi. Ushbu shartni yetarli ekanligini isbot qilaylik. (5.2) muvozanat tenglamalar sistemasining faqat ikkitasi, $M_A = 0$ va $M_B = 0$ qanoatlansin. U holda bunday sistema ko'rsatib o'tilgandek muvozanatda bo'lmasligi mumkin. Chunki shu A va B nuqtalarda o'tuvchi bo'lgan teng ta'sir etuvchi kuch mavjud bo'lishi mumkin (5.2- shakl) va uni shu nuqtalarga nisbatan olingan momenti nolga teng bo'ladi, lekin muvozanat holati ta'minlanmaydi. Shu sababli (5.2) ning uchinchi tenglamasi ham $R_x = \sum F_{kx} = 0;$ qanoatlanishi shart bo'ladi. *Ox* o'qi AB chiziqqa perpendikulyarl bo'lmaganligi uchun, uchinchi tenglama faqat $\overline{R} = 0$ bo'lgandagina qanoatlanadi xolos.



5.2- shakl

3[2]. Muvozanatlik shartining uchinchi xil ko'rinishi: (*uchta momentlar haqidagi teorema*) *tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va yetarlishartlari shundan iboratki, barcha kuchlarning bir to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta A, B va C markazlarga nisbatan olingan momentlarining yig'indilari nolga teng bo'lishi shart, ya'ni*

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0 \quad \sum m_B(\overline{F}_k) = 0 \quad \sum m_C(\overline{F}_k) = 0 \tag{5.3}$$

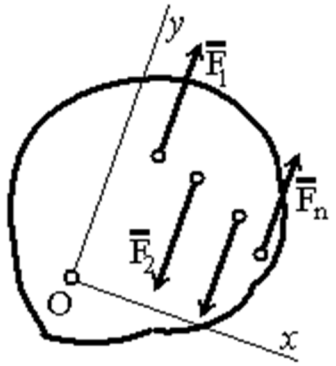
Bularning qanoatlanishi zaruriy shart ekanligi o'rinlidir. Ushbu shartlarning yetarliekanligini isbotlash uchun shu (5.3) tenglamalar qanoatlangan holda sistema muvozanatda emas deb faraz qilaylik. U holda sistema teng ta'sir etuvchi vektorga ega bo'lishi shart, ammo

[2] $M_A=0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi A nuqtadan o'tuvchi teng ta'sir etuvchiga ega bo'lishi mumkin. $M_V=0$ bo'lsa, V nuqtadan o'tuvchi.

bitta teng ta’sir etuvchi vektor bitta to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan o‘tishi aslo mumkin emas, demak ushbu (5.3) shartlar yetarli ekan.

Bularning qanoatlanishi zaruriy shart ekanligi o‘rinlidir. Ushbu shartlarning yetarliekanligini isbotlash uchun shu (5.3) tenglamalar qanoatlangan holda sistema muvozanatda emas deb faraz qilaylik. U holda sistema teng ta’sir etuvchi vektorga ega bo‘lishi shart, ammo bitta teng ta’sir etuvchi vektor bitta to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan o‘tishi aslo mumkin emas, demak ushbu (5.3) shartlar yetarli ekan.

Yuqoridagilardan ko‘rinib turibdiki ,muvozanatlik shartlari tenglamalari sistemasining uchala ko‘rinishi ham uchta tenglamalar sistemalaridan iborat ekan. Lekin (5.1) tenglamalar sistemasi asosiy hisoblanadi, chunki uni qo‘llashda keyingi ikkita ko‘rinishidagi (5.2) va (5.3) tenglamalar uchun qo‘yilayotgan qo‘shimcha shartlarning hojati yo‘q.



5.3- shakl

Agar jismga tekislikda joylashgan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$,..., $\overline{F}_n$ kuchlar sistemasidan tashqari, shu tekislikda joylashgan va momentlari m_1, m_2.,..,.m_n lardan iborat bo‘lgan juftlar ta’sir etayotgan bo‘lsa, muvozanat tenglamalarini tuzishda juft kuchlarning proyektsiyalarini hisoblashning hojati yo‘q, chunki ularning ixtiyoriy o‘qdagi proyektsiyalarining algebraik yig‘indisi nolga teng bo‘ladi.

Momentlar uchun tuzilgan tenglamalarda esa qaysi nuqtaga nisbatan moment aniqlanishidan qat’iy nazar juftlarning momentlari algebraik ravishda yig‘indiga qo‘shib yuboriladi, chunki juftlarning momentlari istalgan nuqta uchun bir xil bo‘ladi. Shunday qilib, agar jismga ixtiyoriy tekis kuchlardan tashqari, juftlar ham ta’sir etsa muvozanatlik shartlarining (5.1) dagi ifodasi, quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0;$$

$$\sum m_O(\overline{F}_k) + \sum m_i = 0 \qquad (5.4)$$

bu yerda k = 1,2,3,..,n; berilgan kuchlar soni, i = 1,2,3,..,s; berilgan juftlar soni.

(5.2) va (5.3) tenglamalar sistemasi ham shunday o‘zgarishi mumkin.

Teorema. *Fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun*

$$\vec{R}'=0,\ \ \vec{M}_0=0$$

tengliklarning bajarilishi, ya'ni kuchlar sistemasining bosh vektori va ixtiyoriy keltirish markaziga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu shartlar *fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatining vektorli ifodasidir.* Uning geometrik ma'nosi quyidagicha: *fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar ko'pburchagi va berilgan kuchlarning istalgan keltirish markaziga nisbatan moment vektorlariga qurilgan ko'pburchak yopiq bo'lishi kerak.*

Yuqoridagi tenglamalardan quyidagilarni olamiz:

$$\sum \vec{X}_\nu=0,\ \ \sum \vec{Y}_\nu=0,\ \ \sum \vec{Z}_\nu=0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_\nu)=0,\ \ \sum M_y(\vec{F}_\nu)=0,\ \ \sum M_z(\vec{F}_\nu)=0$$

Agar jismga ta'sir etuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlari fazoda joylashgan bo'lsa unga *fazodagi kuchlar tizimi* deyiladi.

Aytaylik, qattiq jismga ixtiyoriy $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$ kuchlar sistemasi qo'yilgan bo'lsin. U holda quyidagi tariflar o'rinli.

1. Jismga qo'yilgan $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$ kuchlar sistemasining geometrik yig'indisiga, berilgan kuchlarning *bosh vektori* deyiladi, ya'ni

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k$$

2. Jismga qo'yilgan kuchlardan biror markazga nisbatan olingan momentlarning geometrik yig'indisiga, berilgan kuchlarning bosh momenti deyiladi, ya'ni:

$$\vec{M}_0=\vec{m}_0(\vec{F}_1)+\vec{m}_0(\vec{F}_2)+\ldots+m_0(\vec{F}_n)=\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_0(\vec{F}_k)$$

Kuchlarning bosh vektori va bosh momentlarini analitik aniqlash.Bosh vektor va bosh momentning miqdor va yo'nalishini analitik usulda aniqlash uchun koordinata boshini keltirish markazi *O* nuqtada olamiz. F_ν kuch qo'yilgan nuqtaning koordinatalarini x_ν,y_ν,z_ν hamda F_ν kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini X_ν,Y_ν,Z_ν bilan belgilaymiz.

$$\vec{R}_x'=\sum\vec{X}_\nu,\ \ \vec{R}_y'=\sum\vec{Y}_\nu,\ \ \vec{R}_z'=\sum\vec{Z}_\nu$$

Bosh vektorini moduli

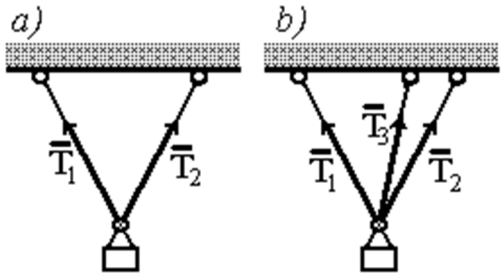
$$R' = \sqrt{\left(\sum \vec{X}_v\right)^2 + \left(\sum \vec{Y}_v\right)^2 + \left(\sum \vec{Z}_v\right)^2}$$

Bosh momentning moduli

Berilgan kuchlar sistemasini o'nga ekvivalent bo'lgan sistema bilan almashtirishda o'zgarmay qoladigan vektor yoki skalyar kattalik kuchlar sistemasining invarianti deyiladi.

Statika masalalarini yechishda bog'lanishlar reaktsiyalari oldindan noma'lum deb hisoblanadi; ularning soni bog'lanishlarning soni va ularning turlariga bog'liq bo'ladi. Shu bog'lanishlar reaktsiyalari qatnashgan va ularni aniqlash uchun tuzilgan tenglamalar sistemasi, amalda muvozanatlik sharti tenglamalari deb ataladi. Lekin statikaning bunday masalalari yechimga ega bo'lishlari uchun, tuzilgan tenglamalarning soni, shu tenglamalarda ishtirok etgan noma'lumlarning soniga teng bo'lishi shart.

Muvozanat sharti asosida tuzilgan tenglamalar soni bog'lanishlarning noma'lum reaktsiyalari soniga to'g'ri kelsa, bunday masalalar *statik aniq* masalalar deb ataladi, shu shartlarni qanoatlantiradigan konstruktsiyalar, qurilmalar sistemasi statik aniq konstruktsiyalar, inshootlar va qurilmalar deb ataladi.



5.4 shakl

Muvozanat shartlari asosida tuzilgan tenglamalar soni bog'lanishlarning noma'lum reaktsiyalari sonidan kam bo'lsa, bunday masalalar *statik noaniq* masalalar deb ataladi, shu shartlarni qanoatlantirmaydigan konstruktsiyalar, qurilmalar sistemasi statik noaniq konstruktsiyalar, inshootlar va qurilmalar deb ataladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Kuchlarni qanday qilib bir markazga olib kelamiz?

2.Qanday kuchlarga fazoviy kuchlar deyiladi?

3.Bosh vektor deb nimaga aytiladi?

4.Bosh moment deb nimaga aytiladi?

6- MAVZU: Ishqalanish kuchi. Og'irlik markazi.

Reja

1.Ishqalanish kuchlari.
2.Ishqalanish koeffitsienti.
3.Ishqalanish burchagi va ishqalanish konusi.
4.Parallel kuchlar tizimini teng ta'sir etuvchiga keltirish.
5.Parallel kuchlar markazni aniqlash.
6.Jismning og'irlik markazini aniqlash.
7.Oddiy shaklli ba'zi bir jinsli jismlarning og'irlik markazini aniqlash.

Tushuncha va tayanch iboralar

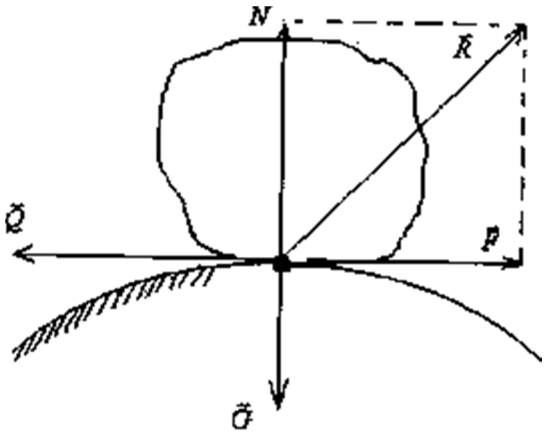
Ishqalanish kuchi, ishqalanish koeffitsienti, ishqalanish burchagi, ishqalanish konusi, dumalanish ishqalanish, sirpanish ishqalanish, harakat differntsial tenglamasi.

Parallel kuchlar markazi, jismning og'irlik markazi, jismlarning og'irlik markazini aniqlash usullari – simmetriya usuli, bo'laklarga ajratish usuli, manfiy yuza usuli, tajriba usuli.

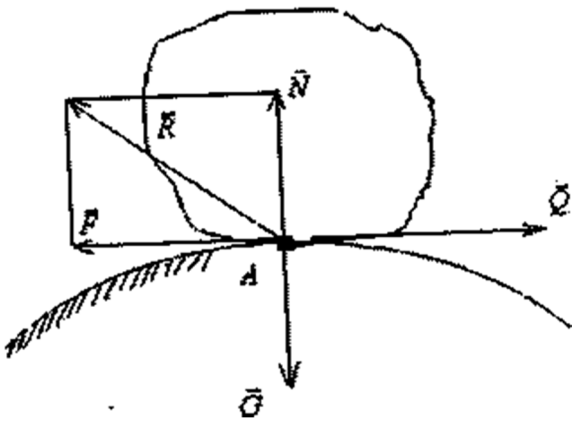
Mavzuni bayoni

Sirpanishdagi ishqalanish. Mashhur fransuz olimi P. Penleve XIX asrning oxirlarida ko'plab tajribalar va kuzatishlar olib borib, ishqalanish bilan bog'liq bo'lgan sistemaning harakat differensial tenglamalarini yechish jarayonida ishqalanish qonuniyatlarining naqadar murakkabligini, ayniqsa Kulon qonunining doimo bajarilavermasligini ko'rsatdi. Penlevening bu qarashlariga o'sha vaqtning eng ko'zga ko'ringan olimlari L. Lekornyu, De Sparr, F. Kleyn, R. Mizes, G. Gamel, L. Prandtl va F. Pfeyfer tomonidan qiziqarli ilmiy bahslar sabab bo'ldi va natijada ishqalanishning ko'p xossalari aniqlandi.

Bog'lanish tushunchasiga ta'rif berilganda agar jismga qo'yilgan bog'lanish reaksiya kuchi faqatgina tekislikka yoki egri chiziqqa o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'lsa, bunday bog'lanish «ishqalanishsiz bog'lanish» deb nomlangan edi. Agar bog'lanish ishqalanishli bog'lanishdan iborat bo'lsa, bu bog'lanish reaksiya kuchi tekislikka yoki egri chiziqqa o'tkazilgan normaldan tashqari urinma bo'yicha ham yo'nalgan bo'ladi. Bunday holda reaksiya kuchining normal bo'yicha tashkil etuvchisi bog'lanishning jismga ko'rsatadigan bosimi, urinma bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchisi esa ishqalanish kuchi hisobiga hosil bo'ladi (6.1-shakl), ya'ni



6.1-shakl

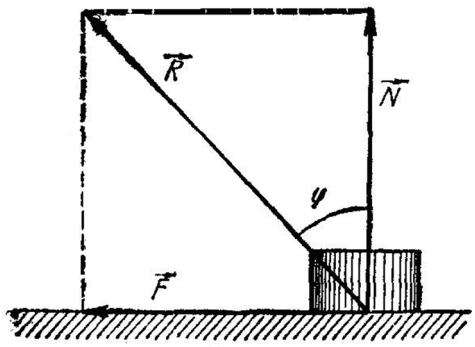


6.2-shakl

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{uu},$$

bunda $\vec{F}_{uu}$ - ishqalanish kuchi vektori bo'lib, u jismning harakatiga nisbatan qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

Bir jism ikkinchi jism sirti bo'yicha harakatlanish jarayonida bu jism sirtlarining bir-biriga tegib turgan urinma tekisliklarida hosil bo'ladigan ishqalanish sirpanishdagi ishqalanish deyiladi.



6.3-shakl

Bir-biriga tegib turgan ikki jism orasidagi ishqalanish avvalo o'sha sirtlarning g'adir-budurligi va ular bir-biriga nisbatan qanchalik zich (tishlashganligiga) joylashganligiga bog'liq bo'ladi.

Lekin ishqalanish tabiatda eng ko'p uchraydigan harakat ko'rinishlaridan biri ekanligi va mexanikaning barcha masalalarida qanchalik ko'p uchrashiga qaramay, shu kunga qadar ishqalanish qonuni to'la aniqlanmagan, chunki ishqalanish kuchining paydo bo'lishi ko'p faktorlarga, jumladan qattiq jism sirtlarining xossalariga bog'liq bo'ladi.

Og'irligi $\vec{G}$ bo'lgan jism qo'zg'almas sirt ustiga qo'yilgan bo'lsin. Qo'zg'almas sirtning normal reaksiyasini $\overrightarrow{N}$ desak (6.2-shakl) $\vec{G}$ va $\overrightarrow{N}$ o'zaro muvozanatlashib, jism tinch holatda turadi. Jismning sirt bilan urinish nuqtasiga, sirtga o'tkazilgan urinma tekislikda yotuvchi biror $\vec{Q}$ kuchni olaylik. Agar jism va sirt ideal silliq bo'lsa, bu qo'yilgan $\vec{Q}$ kuch har qanday kichik bo'lmasin, jism harakatga kelishi kerak. Tajriba shuni ko'rsatadiki, kuchning ma'lum biror Q_{max} miqdorigacha jism sirt ustida sirpanmay turadi. $\vec{Q}$ kuchni oshira borish natijasida jism sirt ustida sirg'ana boshlaydi. Bu esa $\overrightarrow{N}$ normal reaksiya kuchidan tashqari bog'lanish sirtiga o'tkazilgan urinma tekislikda yotuvchi biror $\vec{F}$ reaksiya kuchi ham ta'sir etishini bildiradi, ya'ni reaksiya kuchi $\overrightarrow{N}$ va $\vec{F}$ tashkil etuvchilardan iborat bo'ladi. Reaksiya kuchining $\vec{F}$ tashkil etuvchisi *sirpanishdagi ishqalanish kuchi* deyiladi.

Sirpanish boshlanguncha $\vec{F}$ va $\vec{Q}$ kuchlar o'zaro muvozanatlashadi: $F=Q$ va $\vec{F}=-\vec{Q}$; bundan ko'ramizki, $\vec{Q}$ kuchning ortishi bilan $\vec{F}$ ishqalanish kuchi ham orta boradi, ya'ni $\vec{F}$ kuch ham noldan $\vec{Q}_{max}$ ga mos keluvchi biror $\vec{F}_{max}$ gacha o'zgaradi:

$$0 \le F \le F_{max}$$

Shu nuqtai nazardan ishqalanish kuchi noaniq hisoblanadi. Shuning uchun jismning nisbiy muvozanati holatida ishqalanish kuchining o'lchovi sifatida uning maksimal qiymati olinadi va u *sirpanishdagi statik ishqalanish kuchi* deyiladi. Bir-biriga nisbatan harakatdagi jismlar orasida sodir bo'ladigan ishqalanish kuchlari *dinamik ishqalanish kuchlari* deyiladi.

Ishqalanish ko'pgina mexanik jarayonlarda sodir bo'lishiga qaramasdan, uning aniq qonunlari o'rganilmagan. Bu yerda biz Kulon tomonidan juda ko'p tajribalar asosida o'rnatilgan va amaliy talablarni qondiruvchi quyidagi ishqalanish qonunlarini keltiramiz:

1. Ishqalanish kuchi jismlarning bir-biriga tegib turuvchi nuqtalaridan jismlar sirtlariga o'tkazilgan urinma tekislik bo'ylab ta'sir qilib, uning maksimal qiymati normal reaksiyaga proporsional bo'ladi:

$$F_{max} = f \cdot N$$

bunda f - sirpanishdagi statik ishqalanish koeffisiyenti deyiladi. U har xil jismlar uchun turlicha bo'lib, tajribadan aniqlanadi; f o'lchov birligiga ega emas.

2. Ishqalanish kuchining qiymati ishqalanuvchi sirtlarning o'lchamiga bog'liq emas.

3. Ishqalanish koeffisiyenti ishqalanuvchi jismlar sirtlarining ishlanishiga, ularning fizik hossalari va holatlariga (namlik, temperatura va h. k.) bog'liq.

4. Dinamik ishqalanish kuchlari statik ishqalanish kuchidan kichik bo'ladi.

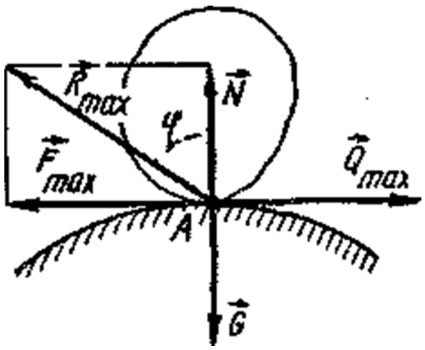
Shunday qilib, biror sirtga tegib turgan jism sirpanish oldida (muvozanat chegarasida) bo'lsa, sirtning to'la reaksiya kuchi o'zining maksimal qiymatiga erishadi:

$$\vec{R}_{max} = \vec{N} + \vec{F}_{max}$$

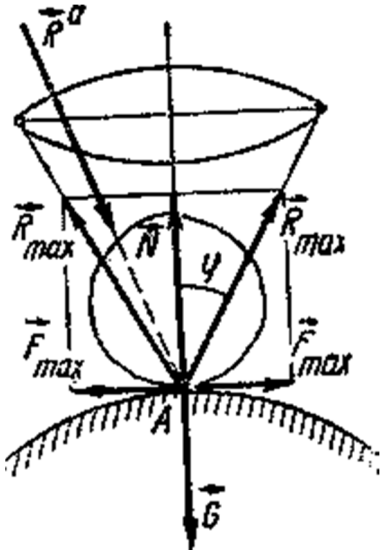
Maksimal reaksiya kuchi $\vec{R}_{max}$ bilan normal reaksiya kuchi $\vec{N}$ tashkil qilgan φ burchak ishqalanish burchagi deyiladi. 6.4-shakldan

$$tg\varphi = \frac{F_{max}}{N}$$

ni olamiz. Bu tenglikdan $tg\varphi = f$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni ishqalanish burchagining tangensi ishqalanish koeffisiyentiga teng.



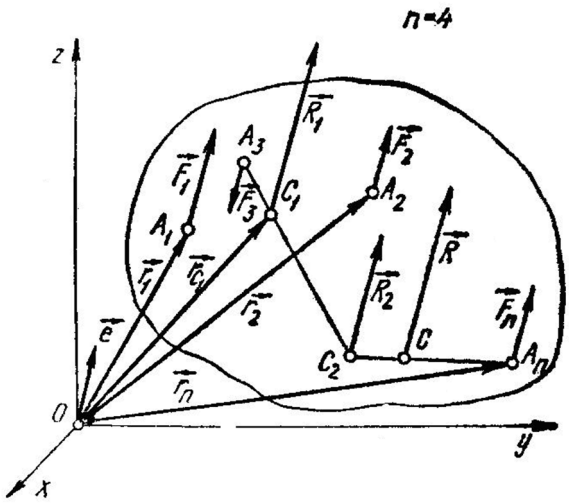
6.4-shakl



6.5-shakl

Jismni sirpantiruvchi kuchlar bog'lanish sirtiga o'tkazilgan urinma tekislik bo'yicha turlicha yo'nalishda qo'yilishi mumkin; shunga mos ravishda maksimal ishqalanish kuchlari ham urinma tekislikda turlicha yo'nalishi mumkin. Normal reaksiya kuchiga nisbatan har bir maksimal ishqalanish kuchiga mos keluvchi to'la reaksiya kuchini o'tkazsak (6.5-shakl), uning geometrik o'rni konus sirtni ifodalaydi; bu konus *ishqalanish konusi* deyiladi. Agar barcha yo'nalishlar bo'yicha ishqalanish koeffisiyenti bir xil bo'lsa, ishqalanish konusi doiraviy konusdan iborat bo'ladi.

Jismga $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ parallel kuchlar sistemasi ta'sir etsin. Kuchlarning qo'yilgan nuqtalarini mos ravishda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ va $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan bu nuqtalarning radius-vektorlarini $r_1, r_2, \ldots, r_n$ bilan belgilaymiz. Mazkur kuchlarning teng ta'sir etuvchisini va uning qo'yilgan nuqtasini aniqlaymiz.



6.6-shakl

Avvalo F_1 va F_2 kuchlarni qo'shamiz va ularning teng ta'sir etuvchisini R_1 bilan belgilaymiz.

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{6.1}$$

F_1 va F_2 orasida qo'yidagi munosabat o'rinli:

$$\frac{F_1}{C_1A_2} = \frac{F_2}{A_1C_1} \qquad ёки \qquad \frac{A_1C_1}{F_2} = \frac{C_1A_2}{F_1} \tag{6.2}$$

Agar R_1 qo'yilgan S_1 nuqtaning radius-vektorini r_{C_1} bilan belgilasak, u holda quyidagini olamiz:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{r_{c_1}} - \overrightarrow{r_1}, \qquad \overrightarrow{C_1A_2} = \overrightarrow{r_1} - r_{c_1} \tag{6.3}$$

(6.3) ni (6.2) ga qo'yib, r_{C_1} ni aniqlaymiz:

$$\overrightarrow{r_{C_1}} = \frac{F_1 \cdot \overrightarrow{r_1} + F_2 \cdot \overrightarrow{r_2}}{F_1 + F_2} \tag{6.4}$$

(6.1) tenglikni nazarda tutib, R_1 va F_3 kuchlarni qo'shamiz.

$$R_2 = R_1 - F_3 = F_1 + F_2 + F_3 = \sum_{\nu=1}^{3} F_\nu,$$

$$\frac{R_1 \cdot \overrightarrow{r_{C_1}} + F_3 \cdot \overrightarrow{r_3}}{R_1 + F_3} = \frac{F_1 \cdot \overrightarrow{r_1} + F_2 \cdot \overrightarrow{r_2} + F_3 \cdot \overrightarrow{r_3}}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum_{\nu=1}^{3} F_\nu r_\nu}{\sum_{\nu=1}^{3} F_\nu}$$

Xuddi shuningdek, p ta parallel kuchlarni qo'shish natijasida S nuqtaga qo'yilgan bitta teng ta'sir etuvchi R kuchni olamiz:

$$R=\sum_{\nu=1}^{\ddot{\imath}}F_\nu,\qquad \overrightarrow{r_{\tilde{N}}}=\frac{\sum_{\nu=1}^{\ddot{\imath}}F_\nu r_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\ddot{\imath}}F_\nu} \tag{6.5}$$

(6.5) formula yordamida aniqlanadigan S nuqta *parallel kuchlar markazi* deyiladi.

Parallel kuchlar markazining koordinatalarini x_C, y_C, z_C; $\boldsymbol{F}_\nu$ kuch qo'yilgan nuqtaning koordinatalarini x_ν, y_ν, z_ν bilan belgilasak, (6.5) dan parallel kuchlar markazining koordinatalari aniqlanadigan quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$x_C=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu},\qquad y_C=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu y_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu},\qquad z_C=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu z_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu} \tag{6.6}$$

(6.5) dagi $\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu\vec{r}_C$ kattalik berilgan *kuchlar sistemasining S markazga nisbatan statik momenti* deyiladi.

(6.6) dagi $\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu x_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu y_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu z_\nu$, kattaliklar berilgan *kuchlar sistemasining* mos ravishda *yOz, xOz* va *xOy tekisliklarga nisbatan statik momentlari* deyiladi.

Jismning og'irlik markazini aniqlash. Istalgan qattiq jismni juda kichik zarrachalardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bunday zarrachalarning har biriga vertikal pastga yo'nalgan R_1, R_2, … yerga tortilish kuchlari (og'irlik kuchi) ta'sir etadi. Jism barcha zarralari og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $R=\sum R_\nu$ *jismning og'irlik kuchi* deyiladi hamda bu parallel kuchlarning markazi mazkur *jismning og'irlik markazi* deyiladi.

Jism og'irlik markazining radius-vektori (6.5), koordinatalari (6.6) formulalari asosida aniqlanadi:

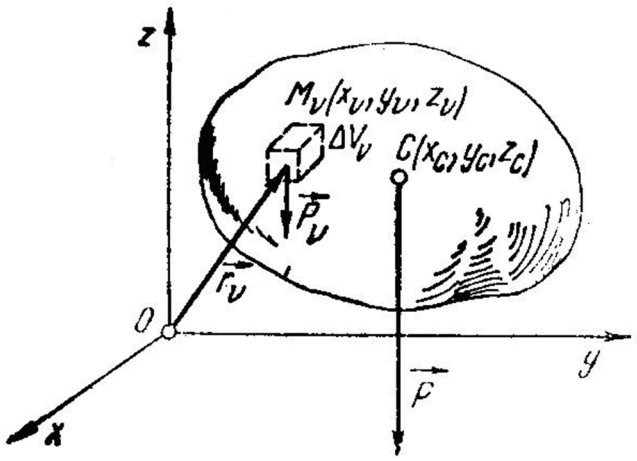
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{r_C}=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu r_\nu}{P},\\ &x_C=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu x_\nu}{P},\qquad y_C=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu y_\nu}{P},\qquad z_C=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu z_\nu}{P}.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Bunda $\boldsymbol{r_\nu}$ $(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\nu$ - zarrachaning radius-vektori; $\boldsymbol{r_s}$ (x_s, y_s, z_s) - jism og'irlik markazining radius-vektori.

Jismning og'irlik markazi geometrik nuqtadan iborat bo'lib, ba'zida bu nuqta jismga taalluqli bo'lmasligi ham mumkin.

Agar jism bir jinsli bo'lsa, og'irlik markazi uning qanday materialdan tashkil topganiga bog'lik bo'lmay, faqat geometrik shakliga bog'lik bo'ladi.

Og'irligi R ga teng jism V hajmga ega bo'lsin.



6.7-shakl

Agar birlik hajmga to'g'ri kelgan og'irlikni γ bilan belgilasak, bir jinsli jism uchun $\gamma = const$ bo'ladi hamda jism γ bo'lakchasining og'irligi

$$R_v = \gamma \cdot \Delta V_v \tag{6.8}$$

(6.8) ni (6.7) ga qo'yib, hajmga ega bo'lgan jism og'irlik markazining radius-vektori va koordinatalarini aniqlaymiz:

$$\vec{r_C} = \frac{\sum_{v=1}^{n} \gamma \Delta V_v \cdot \vec{r}_v}{\sum_{v=1}^{n} \gamma \Delta V_v} = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta V_v}{V}. \tag{6.9}$$

$$x_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta V_v x_v}{V}, \qquad y_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta V_v y_v}{V}, \qquad z_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta V_v z_v}{V}, \tag{6.10}$$

bunda $V = \sum \Delta V_v$ butun jism hajmini ifodalaydi.

Xuddi shuningdek, ixtiyoriy sirtga ega bo'lgan plastinkaning og'irlik markazini aniqlash uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi.

$$\vec{r_C} = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta S_v \vec{r}_v}{S}. \tag{6.11}$$

$$x_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta S_v x_v}{S}, \qquad y_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta S_v y_v}{S}, \qquad z_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta S_v z_v}{S}. \tag{6.12}$$

Bunda S – plastinka sirtining yuzasi, x, y, z esa dS elementar yuzaning koordinatalari.

Chiziqning og'irlik markazi quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r_C} = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta l_v \cdot \vec{r}_v}{L}. \tag{6.13}$$

$$x_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta l_v x_v}{L}, \qquad y_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta l_v y_v}{L}, \qquad z_C = \frac{\sum_{v=1}^{n} \Delta l_v z_v}{L}, \tag{6.14}$$

bunda *l* – chiziqning o'zunligi; *x, y, z* esa *dl* bo'lakcha koordinatalari.

Oddiy shaklli ba'zi bir jinsli jismlarning og'irlik markazini aniqlash. Jismning og'irlik markazini topishning quyidagi usullari mavjud:

1. Simmetriya usuli; 2. Bo'laklarga ajratish usuli;
3. Manfiy yuza usuli; 4.Tajriba usuli.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Sirpanishdagi ishqalanish deb nimaga aytiladi?
2.Dumalanishdagi ishqalanish deb nimaga aytiladi?
3.Ishqalanish koeffitsienti deb nimaga aytiladi?
4.Ishqalanish burchagi deb nimaga aytiladi?
5.Ishqalanish konusi deb nimaga aytiladi?
6.Parallel kuchlar markazi qanday aniqlanadi?

7-MAVZU: Kinematikaga kirish. Kinematikaning asosiy tushunchalari.

Reja

1.Nuqta harakat qonunining berilish usullari.

2.Harakat qonuni vector usulida berilganda tezlik va tezlanish.

3. Harakat qonuni koordinata usulida berilganda tezlik va tezlanish.

Tushuncha va tayanch iboralar

Sanoq sistemasi, nuqtaning trayektoriyasi, to'g'ri chiziqli harakat, egri chiziqli harakat, nuqtaning harakat qonuni, nuqtaning tezligi, nuqtaning tezlanishi.

Mavzuni bayoni

Nazariy mexanikaning kinematika bo'limida nuqta va absolyut qattiq jismning mexanik harakati faqat geometrik nuqtai nazardan, ya'ni ularning massalari va ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liksiz ravishda o'rganiladi.

Jismning mexanik harakati boshqa biror jism bilan biriktirilgan va *sanoq sistemasi* deb ataladigan koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiriladi.

Nazariy mexanikada uzunlik birligi sifatida SI sistemasida (m), burchak koordinatalari birligi uchun radian (rad) qabul qilingan.

Tanlab olingan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakatini o'rganish uning shu sistemaga nisbatan biror vaqt oralig'idagi trayektoriyasini va har ondagi tezlik va tezlanishini aniqlash masalasidan iborat.

Nuqta harakatlanganda uning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan chizgan o'zoo'qsiz chizig'i *nuqtaning trayektoriyasi* deyiladi. Agar nuqta trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, uning harakati *to'g'ri chiziqli harakat*, trayektoriyasi egri chiziq bo'lsa, *egri chiziqli harakat* deyiladi.

Nuqtaning harakati va ko'chishi tushunchalarini bir-biridan farq qilish kerak. Nuqtaning ko'chishi uning boshlang'ich va oxirgi holatlari hamda vaqt oralig'i bilan aniqlanadi, bunda nuqtaning avvalgi holatdan kyoyingi holatga qanday usul bilan o'tishii e'tiborga olinmaydi.

Nuqta kinematikasida quyidagi ikki asosiy masala ko'riladi:

1) Berilgan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakatini matematik usulda aniqlash;
2) Nuqtaning berilgan harakat qonuniga ko'ra mazkur harakatning barcha kinematik xarakteristikalari (trayektoriya, tezlik va tezlanish va hokazolar) ni aniqlash.

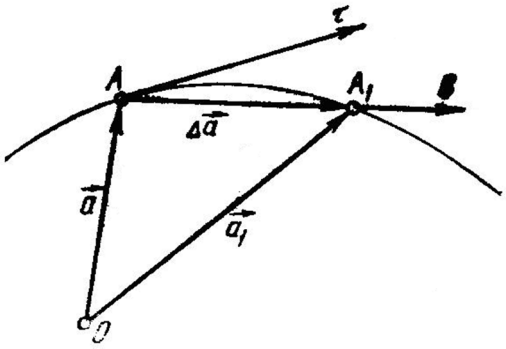
Skalyar argument t ning funksiyasidan iborat bo'lgan hamda miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgaruvchi $\boldsymbol{a}$ vektor berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = \vec{a}(t)$$

bunda $\boldsymbol{a}$ vektorni t argumentning uzluksiz va bir qiymatli funksiyasi deb qaraymiz.

O'zgaruvchi $\boldsymbol{a}$ vektor argumentining bir-biriga yaqin t va $t+\Delta t$ ga mos keluvchi qiymatlarini $\vec{a} = \vec{a}(t)$ va $\vec{a}_1 = \vec{a}(t+\Delta t)$ bilan belgilaylik $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{a_1}$ vektorlarning uchlarini tutashtirib, quyidagi munosabatni yozamiz:

$\vec{a}_1 = \vec{a} + \Delta\vec{a}$ *ёки* $\Delta\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}$



7.1-shakl

Bunda $\Delta\boldsymbol{a}$ vektor $\boldsymbol{a}$ vektorning argument Δt ga o'zgargandagi orttirmasini ifodalaydi. $\Delta\boldsymbol{a}/\Delta t$ nisbatning Δt nolga intilgandagi limiti $\boldsymbol{a}$ vektorning t skalyar argument bo'yicha hosilasi deyiladi.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$$

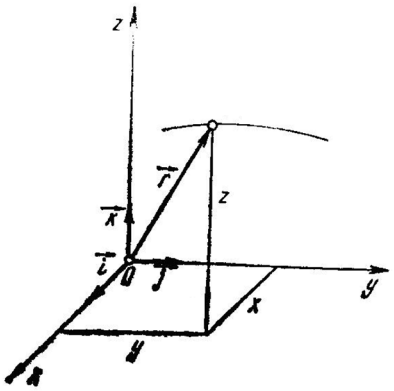
$\Delta\boldsymbol{a}/\Delta t$ vektorning yo'nalishini aniqlaymiz. Δt musbat skalyar kattalik bo'lgani uchun $\Delta\boldsymbol{a}/\Delta t$ vektori $\Delta\boldsymbol{a}$ bo'yicha, ya'ni godografning AV keluvchisi bo'ylab yo'naladi. Δt nolga intilgan limit holatida kesuvchi A nuqtada godografga o'tkazilgan $A\tau$ urinma bo'ylab yo'naladi.

Nuqta harakatining berilish usullari. Nuqtaning biror sanoq sistemasiga nisbatan istalgan vaqtdagi holatini aniqlash usuli ma'lum bo'lsa, uning harakati aniqlangan yoki berilgan deyiladi, nuqtaning harakatini aniqlovchi ifoda uning *harakat tenglamasi* yoki *harakat qonuni* deyiladi.

Nuqtaning harakati asosan quyidagi uch usulda aniqlanadi:

1. Vektor usuli; 2. Koordinatalar usuli; 3. Tabiiy usul.

Vektor usuli**.** M nuqta qo'zg'almas *0xuz* koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatda bo'lsin.



7.2-shakl

0 va *M* nuqtalarni tutashtirib, *M* nuqtaning ***r*=*OM*** radius-vektorini hosil qilamiz. *M* nuqta harakatlanganda vaqt o'tishi bilan uning radius-vektori ***r*** miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgara boradi. Agar nuqtaning radius-vektori vaqt funksiyasi sifatida aniqlangan yoki berilgan bo'lsa, ya'ni

$$\vec{r} - \vec{r}(t)$$

ma'lum bo'lsa, nuqtaning fazodagi holati istalgan paytda aniq bo'ladi.

Bu tenglama nuqta harakatining vektor ko'rinishidagi kinematik tenglamasi deyiladi. Nuqta harakatining shu tarzda aniqlanishi (berilishi) uning *vetor usulda ifodalanishi* deyiladi.

Koordinatalar usuli. Nuqtaning holatini to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan aniqlaymiz. Harakatdagi *M* nuqtaning koordinatalarini *x, u, z* bilan belgilaymiz. Nuqta harakatlanganda vaqt o'tishi bilan uning koordinatalari o'zgara boradi, ya'ni *x, u, z* koordinatalar vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

Agar yuqorida keltirilgan tenglamalar berilgan bo'lsa, nuqtaning istalgan paytdagi holatini aniqlash mumkin (7.1) funksional munosabatlar vositasida nuqtaning harakatini aniqlash uni *koordinatalar usulida ifodalash* deyiladi (7.1) ifodalar nuqta harakatining Dekart koordinatalaridagi kinematik tenglamalarini ifodalaydi.

Tabiiy usul. Egri chiziqda sanoq boshi uchun olingan qo'zg'almas *0* nuqtaga nisbatan olingan *M* nuqtaning yoy koordinatasi *S* vaqtning o'tishi bilan turlicha o'zgarishi mumkin. Nuqtaning trayektoriyadagi holatini bir qiymatli aniqlash uchun yoy koordinatasining musbat va manfiy yo'nalishlarini (chizmada "+" va "-" ishora bilan) olamiz.

Agar trayektoriya tenglamasi hamda nunkta yoy koordinatasining vaqt o'tishi bilan o'zgarishini ifodalaydigan

$$s=s(t) \qquad (7.2)$$

munosabat ma'lum bo'lsa, nuqtaning harakatini to'liq aniqlash mumkin. Bunda vaqtning bir qiymatli, uzluksiz va differensillanuvchi funksiyasidan iborat.

(7.2) tenglama nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakat qonunini ifodalaydi.

Nuqtaning harakatini $f_1(x,y,z)=0$, $f_2(x,y,z)=0$ va $s=s(t)$ tenglamalar vositasida aniqlash uning *tabiiy usulda aniqlanishi* deyiladi.

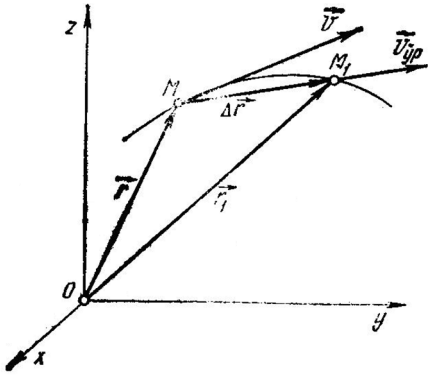
Shunday qilib, nuqtaning harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun:

1. tanlangan koodinatalar sistemasiga nisbatan trayektoriya tenglamasi
2. trayektoriyada sanoq boshi uchun olingan qo'zg'almas *0* nuqta hamda yoy koordinatasining musbat va manfiy yo'nalishi

3. nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakat qonunini ifodalovchi (7.2) tenglama berilgan bo'lishi kerak.

Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning tezligi.

Nuqtaning harakati vektor usulda $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Nuqtaning biror t paytdagi trayektoriyada egallagan holatini M, radius-vektorini $\boldsymbol{r}$, $t+\Delta t$ paytdagi holatini M_1 radius-vektorini $\boldsymbol{r_1}$ bilan belgilaylik.



7.3-shakl

Nuqtaning M va M_1 holatlarini tutashtiruvchi $\boldsymbol{MM_1=\Delta r}$ vektor nuqtaning $\Delta t=t_1-t$ vaqt oralig'idagi *ko'chish vektori* deyiladi.

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r} \Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}$$

Ko'chish vektori $\boldsymbol{\Delta r}$ ning shu ko'chish sodir bo'ladigan Δt vaqtga nisbati nuqtaning mazkur vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik vektori deyiladi va v_{ur} bilan belgilanadi:

$$\vec{v}_{yp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Bundan Δt musbat skalyar miqdor bo'lgani uchun o'rtacha tezlik vektori $\boldsymbol{\Delta r=MM_1}$ vektor bo'yicha, ya'ni M nuqtaning harakat yo'nalishida MM_1, kesishuvchi bo'ylab yo'naladi.

Nuqta o'rtacha tezlik vektorining Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan ondagi tezlik vektori deyiladi va $\boldsymbol{v}$ bilan belgilanadi.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \Rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad ёки \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ya'ni nuqtaning tezlik vektori uning radius vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Harakati koordinatlar usulida berilgan nuqtaning tezligi.

Nuqta harakati Dekart koordinatlarida (7.1) tenglamalar orqali berilgan bo'lsin. Nuqta tezligi vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini v_x, v_y,v_z bilan belgilasak ushbu formulalarga ega ega bo'lamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Shunday qilib, nuqta tezligining biror qo'zg'almas Dekart koordinata o'qidagi proyeksiyasi harakatlanuvchi nuqtaning shu o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga teng.

Nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

formuladan, yo'nalishi esa

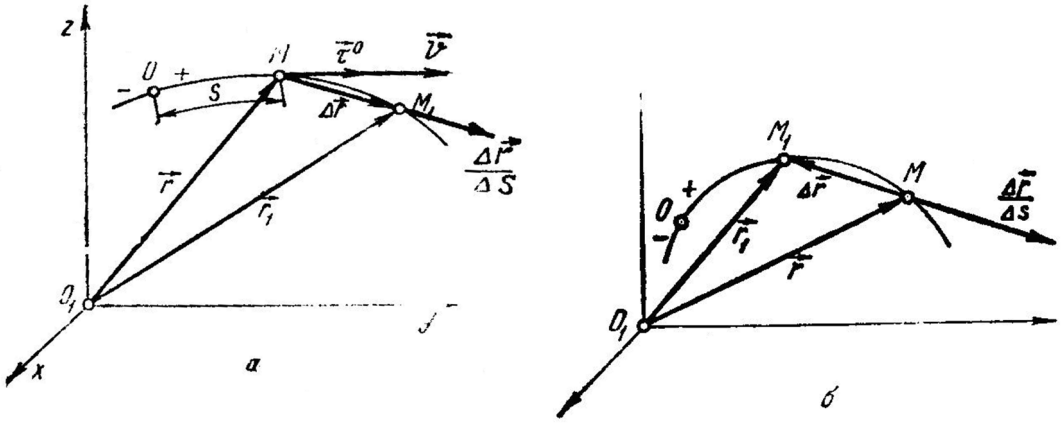
$$\cos(\vec{v},\hat{}x)=\frac{v_x}{v},\quad \cos(\vec{v},\hat{}y)=\frac{v_y}{v},\quad \cos(\vec{v},\hat{}z)=\frac{v_z}{v}$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

Harakati tabiiy usulda ifoadalangan nuqtaning tezligi

Nuqta tezligining moduli yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan hosilaning absolyut qiymatga teng.

$$v=\frac{ds}{dt}$$



7.4-shakl

Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning tezlanishini aniqlash.

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt},\quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$ ni e'tiborga olsak

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Demak, *nuqtaning tezlanish vektori uning tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga yoki radius-vektoridan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng.*

SI birliklar sistemasida tezlanish $m\backslash s^2$ da o'lchanadi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Nuqta kinematikasida qaysi asosiy masalalar ko'riladi?
2. Vektorning skalyar aniqlash usullari ayting?
3. Nuqtaning harakatini aniqlash usullari ayting?
4. Nuqtaning tezlik tezlanishini qanday aniqlaymiz?

8- MAVZU: Nuqta harakat qonunining tabiiy usulda berilishi

Reja

1.Harakat qonuni tabiiy usulda berilganda tezlikni aniqlash.

2. Harakat qonuni tabiiy usulda berilganda tezlanishni aniqlash.

3.Nuqta tezligi va tezlanishini qutb koordinatalarida aniqlash.

Tushuncha va tayanch iboralar

Nuqta harakatining berilish usuli, tabiiy usul, nuqtaning tezligi, nuqtaning tezlanishi, proyeksiya, binarmal, egrilik radiusi, o'zgaruvchan harakat

Mavzuni bayoni

Nuqtaning harakati tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalar orqali ifodalandi:

$$\vec{w}_x = \frac{d\vec{v}_x}{dt}, \quad \vec{w}_y = \frac{d\vec{v}_y}{dt}, \quad \vec{w}_z = \frac{d\vec{v}_z}{dt} \tag{8.1}$$

(8.1) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \tag{8.2}$$

Demak, nuqta tezlanishining biror o'qdagi proyeksiyasi nuqta tezligining mazkur o'qdagi proyeksiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga yoki shu o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi xosilaga teng.

Tezlanish moduli

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \tag{8.3}$$

yo'nalishi

$$\cos\left(\vec{w},\hat{}x\right) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos\left(\vec{w},\hat{}y\right) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos\left(\vec{w},\hat{}z\right) = \frac{w_z}{w} \tag{8.4}$$

formularadan aniqlanadi.

Agar nuqta *0xu* tekisligida harakatlansa, $w_z = \ddot{z} = 0$ bo'lib, (8.3) va (8.4) tenglamalar

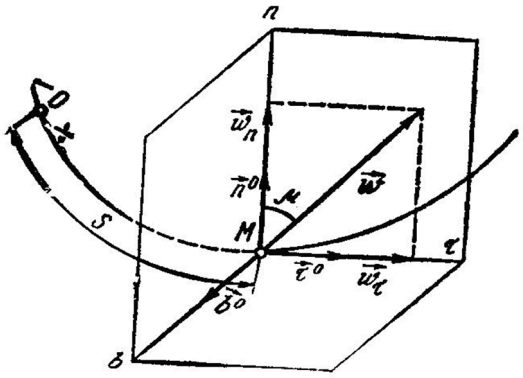
$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2},$$

$$\cos\left(\vec{w},\hat{}x\right) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos\left(\vec{w},\hat{}y\right) = \frac{w_y}{w}$$

ko'rinishida yoziladi.

Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishi.

M nuqtaning tezlanish vektori binormal bo'yicha tashkil etuvchisi nolga teng: $W_b = 0$.



8.1-shakl

U holda nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o'qlaridagi ifodasi quyidagi ko'rinishiga ega bo'ladi:

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n$$

ya'ni egri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng: shu sababli tezlanish vektori $\vec{W}_\tau$ va $\vec{W}_n$ larga kurilgan to'g'ri turtburchakning berilgan nuqtadan o'tuvchi diagonali bilan ifodalanadi.

Tezlanishning tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0 \tag{8.5}$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

(8.5) da $v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad v^2 = v_\tau^2 = \dot{s}^2$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$w_\tau = \ddot{s}, \quad w_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad w_b = 0$$

bu yerda ρ - chiziqning egrilik radiusi.

Tezlanish moduli

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$$

To'g'ri chiziqli tekis harakat.

Nuqtaning harakati davomida hamisha $\vec{w}_\tau = 0, \quad \vec{w}_n = 0,$ ya'ni $\vec{w} = 0$ bo'lsin. Bu holda (8.5) ga asosan $\frac{dv_\tau}{dt} = 0, \quad \frac{v^2}{\rho} = 0$ bo'lib, ulardan $v=/v_\tau/=const$ va $\rho=\infty$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, ko'rilayotgan holda nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

To'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakat.

Nuqta harakati davomida $\vec{w}_\tau \neq 0, \quad \vec{w}_n = 0$ bo'lsin.

Bunda $w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s} \neq 0$ *ва* $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ bo'lib, ulardan $v = |v_\tau| = \left|\frac{ds_\tau}{dt}\right| = |\ddot{s}|$ va $\rho=\infty$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, nuqtaning tezligi yo'nalish jihatdan o'zgarmay, faqat miqdor jihatdan o'zgaradi va to'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakatda bo'lib, tezlanishning moduli

$$w = |w_\tau| = \left|\frac{dv_\tau}{dt}\right| = |\ddot{s}|$$

formuladan aniqlanadi. Binobarin, urinma tezlanish tezlikning miqdor jihatdan o'zgarishini ifodalaydi.

Egri chiziqli tekis harakat

Biror vaqt oralig'i uchun $\vec{w}_\tau = 0,\ \vec{w}_n \neq 0$ bo'lsin.

Bu holda $w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s} = \neq 0 \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$

Bundan $v=/v_\tau/=/s/=const$, $\rho\neq\infty$ kelib chiqadi.

$\rho\neq\infty$ shart harakat trayektoriyasi, egri chiziqdan iborat bo'lishini, $v=const$ shart esa nuqta tekis harakat qilishini ifodalaydi. Demak, bu holda nuqta egri chiziqli tekis harakat kiladi. Agar tezlikning urinmadagi proyeksiyasini v_o bilan belgilasak,

$$v_\tau = v_0 = \frac{ds}{dt} \quad yoki \quad ds = v_o dt \quad \text{hosil bo'ladi.}$$

$t=0$ da $s=s_o$ bo'lsin. Shu shart hamda $v_t=const$ ekanligini nazarda tutib, oxirgi tenglikni integrallasak,

$$s=s_o+v_o t \tag{8.6}$$

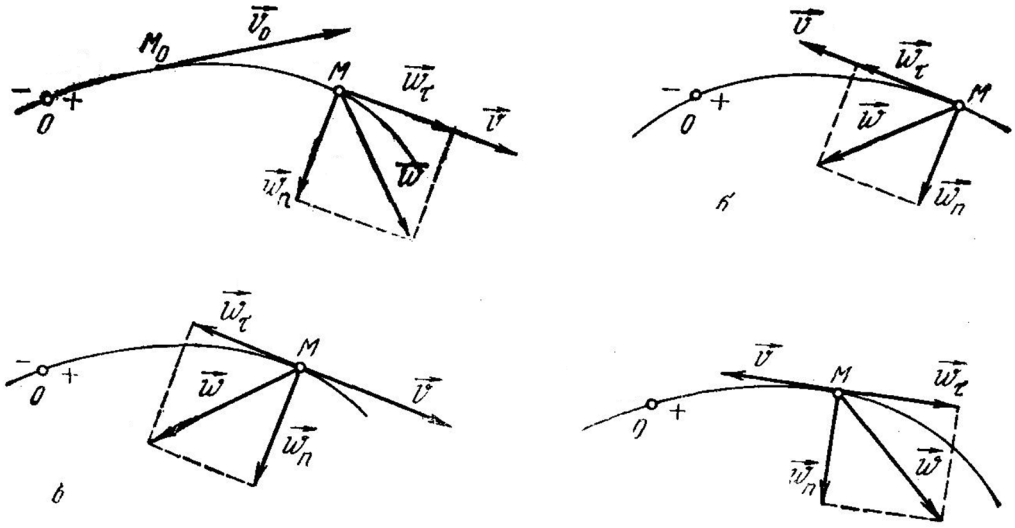
kelib chiqadi. (8.6) tenglama nuqtaning egri chiziqli tekis harakat tenglamasi deyiladi.

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Shunday qilib, normal tezlanish egri chiziqli harakatda vujudga keladi va tezlikning yo'nalishi o'zgarishini ifodalaydi.

Egri chiziqli o'zgaruvchan harakat.

Biror vaqt oralig'i uchun $\vec{w}_\tau \neq 0,\ \vec{w}_n \neq 0$ bo'lsin. Bunda nuqtaning tezligi miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgaradi, ya'ni nuqta egri chiziqli o'zgaruvchan harakatda bo'ladi.



8.2-shakl

Agar $w_t=const$ bo'lsa, nuqta tekis o'zgaruvchan harakatda deyiladi.

$\boldsymbol{v}$ va $\boldsymbol{w_t}$ dyektorlarining yo'nalishi ustma-ust tushsa, nuqta egri chiziqli tezlanuvchan harakatda, ular qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, nuqta egri chiziqli sekinlanuvchan harakatda bo'ladi.

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = const \quad yoki \quad dv_\tau = w_\tau dt.$$

$$v_\tau = v_o + w_\tau t, \qquad v_\tau = \frac{ds}{dt}$$

ekanligini hisobga olib topamiz

$$s = s_o + v_o t + w_\tau \frac{t^2}{2} \tag{8.7}$$

(8.7) tenglama *egri chiziqli tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini* ifodalaydi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Tabiiy usulda tezlik qanday aniqlanadi?
2. Tabiiy usulda tezlanish qanday aniqlanadi?
3.Qanday harakatga o'zgaruvchan harakat deyiladi?
4.Tabiiy usulda tezlik va tezlanishni yo'nalishi qanday aniqlanadi?

9-MAVZU: Qattiq jismning ilgarilanma harakati. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakati

Reja.

1. Qattiq jismning ilgarilanma harakati.
2. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakati.
3.Jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi.
4.Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezlik va tezlanishi.

Tushuncha va tayanch iboralar

Ilgarilanma harakat, o'q atrofidagi harakat, burchak tezlik, burchak tezlanish, chiziqli tezlik, chiziqli tezlanish, aylanish o'qi, nuqtaning harakat qonuni, nuqtaning tezligi, nuqtaning tezlanishi.

Mavzuni bayoni

Jismda olingan har qanday kesma harakat davomida doimo o'zining boshlang'ich holatiga parallel ravishda harakatlansa, jismning bunday harakati *ilgarilama harakat* deyiladi.

Masalan, paravoz g'ildiraklarini tutashtiruvchi AV sparnik yoki velosipednig AV pedali ilgarilama harakatda bo'ladi.

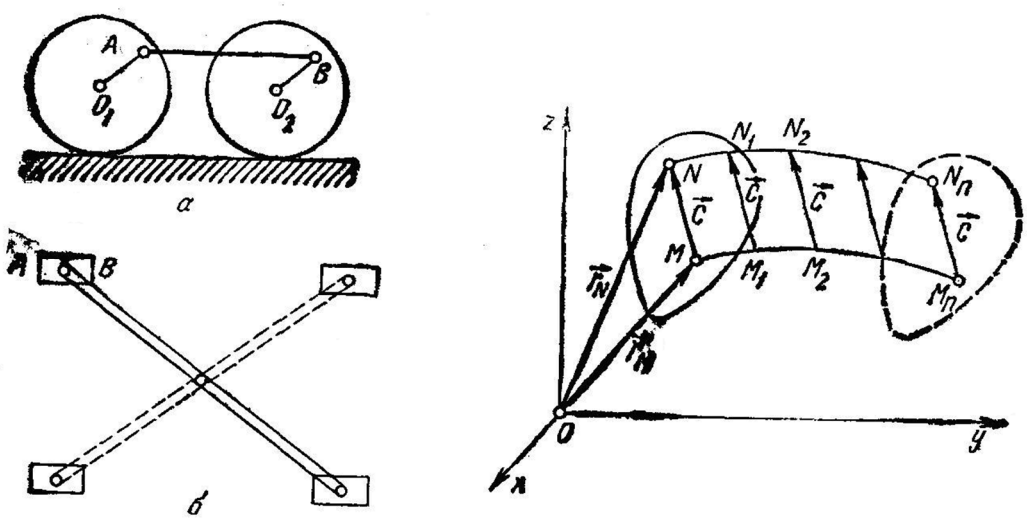
Teorema. Ilgarilama harakatdagi jismning hamma nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi va har onda bir xil tezlik va bir xil tezlanishga ega bo'ladi.

Shunday qilib, jismning ilgarilama harakati uning ixtiyoriy nuqtasi harakati bilan aniqlanadi. *0xuz* koordinatalar sistemasiga nisbatan ilgarilama harakatdagi qattiq jismning harakat tenglamasini chiqarish uchun jismning ixtiyoriy M nuqtasini olib, uning koordinatalarini

X_M, Y_M, Z_M bilan belgilaymiz. Jism harakatlanganda bu koordinatalar vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi

$$X_M = f_1(t), \quad Y_M = f_2(t), \quad Z_M = f_3(t) \tag{9.1}$$

(9.1) tenglama M nuqtaning harakat tenglamasi bo'lib, jismning ilgarilama harakat tenglamasini ham ifodalaydi.

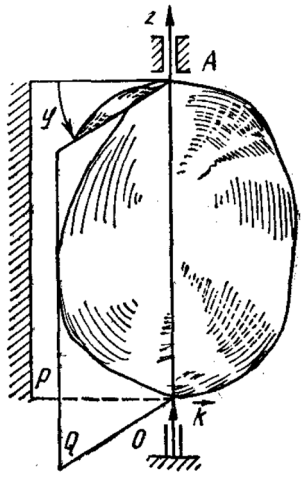


9.1-shakl

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat tenglamasi.

Ikki nuqtasi doimo qo'zg'almasdan qoladigan jismning harakati qo'*zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat* deyiladi. Qo'zg'almas nuqtalardan o'tuvchi o'q *aylanish o'qi* deyiladi.

Turbinalar diski, generatorlarning rotori, stanoklarning maxovigi kabi mashina va mexanizmlarning harakati qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismga misol bo'la oladi. Jismning aylanish o'qida yotuvchi barcha nuqtalari qo'zg'almas bo'ladi. Aylanish o'qida yotmaydigan nuqtalarining trayektoriyalari aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklarda yotuvchi aylanalardan iborat bo'ladi.



9.2-shakl

Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining kinematik tenglamasini aniqlash uchun aylanish o'qiga biriktirilgan qo'zg'almas R tekislikni hamda jismga biriktirilgan

va u bilan birga aylanuvchi Q tekislikni o'tkazamiz. Bu tekisliklar orasidagi φ burchak jismning *aylanish burchagi* deyiladi.

Oz aylanish o'qi birlik vektori $\vec{k}$ ning uchidan qaraganda φ burchakning o'zgarishi soat strelkasi harakati yo'nalishiga teskari bo'lsa, aylanish burchagini musbat, aks holda manfiy olinadi. Agar jismning aylanish soni N ma'lum bo'lsa, aylanish burchagi $\varphi=2\pi N$ formula yordamida aniqlanadi.

Aylanish burchagi φ ning miqdor va yo'nalishi ma'lum bo'lsa, Q tekislikning P tekislikka nisbatan holatini aniqlash mumkin.

Jism Oz o'q atrofida aylanganda uning aylanish burchagi φ vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi:

$$\varphi=\varphi(t). \tag{9.2}$$

Bu tenglama jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatining kinematik tenglamasi deyiladi.

Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining t vaqtdagi aylanish burchagini φ, $t_1=t+\Delta t$ vaqtdagi aylanish burchagini $\varphi_1=\varphi+\Delta\varphi$ bilan belgilaylik. $\Delta t= t_1- t$ vaqt oralig'ida jism $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi$ burchakka buriladi.

$\Delta\varphi$ ning Δt ga nisbati jismning Δt vaqtdagi o'rtacha burchak tezligi deyiladi.

Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining berilgan ondagi burchak tezligini topish uchun o'rtacha burchak tezligining Δt nolga intilgandagi limitini olamiz:

$$\omega_я=\lim_{tt\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\text{yoki} \qquad \omega_z=\dot{\varphi}. \tag{9.3}$$

Shunday qilib, jismning burchak tezligi aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng.

φ burchakning o'zgarish qonuniga mos ravishda ω_z burchak tezligi musbat yoki manfiy qiymatga ega bo'lishi mumkin. Burchak tezlikning modulini ω bilan belgilaymiz: $\omega=|\dot{\varphi}|$.

Aylanish burchagi radianda, vaqt esa sekund (s) da o'lchanganidan, burchak tezlikning o'lchov birligi *rad/s* yoki s^{-1} bo'ladi.

Jism harakati davomida uning burchak tezligi $\omega_z=\omega_0$ o'zgarmay qolsa, jism tekis aylanma harakatda deyiladi.

Bu holda $\dfrac{d\varphi}{dt}=\omega_0=const$ ёки $d\varphi=\omega_0 dt$ bo'ladi.

Vaqt 0 dan t gacha o'zgarganda aylanish burchagi φ_0 dan φ gacha o'zgarishini e'tiborga olib, oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t \tag{9.4}$$

bo'ladi. (9.4) ifoda jism *tekis aylanma harakatining tenglamasi* deyiladi.

Jism tekis aylanma harakatda bo'lsa, texnikada ko'pincha uning bir minutdagi aylanishlar sonidan foydalaniladi. Jism bir marta to'la aylanganda aylanish burchagi $\varphi=2\pi$ bo'ladi. Jism bir minutda n marta aylansa, tekis aylanma harakat burchak tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}, \quad c^{-1} \tag{9.5}$$

Vaqt birligi ichida jism burchak tezligining o'zgarishi bilan xarakterlanadigan kattalikka jismning *burchak tezlanishi* deyiladi.

Jismning aylanma harakatdagi burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga yoki aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng bo'ladi va odatda ε bilan belgilanadi.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{9.6}$$

Burchak tezlanish rad/s^2 yoki $1/s^2$ bilan o'lchanadi.

(9.6) da $\frac{d\omega}{dt}$ hosilaning ishorasi, jism aylanma harakati burchak tezligining orta borish yoki kamayishini xarakterlaydi. Agar $\frac{d\omega}{dt} > 0$ bo'lsa, ω orta boradi va bunday harakat *tezlanuvchan aylanma harakat*; $\frac{d\omega}{dt} < 0$ bo'lsa, ω kamaya boradi va bunday harakat *sekilanuvchan aylanma harakat* deyiladi.

Agar harakat davomida $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$ bo'lsa, jismning bunday harakati *tekis o'zgaruvchan aylanma harakat* deyiladi.

(9.6) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$d\omega = \varepsilon_0 dt.$$

Bu tenglikni integrallab, $\omega = \varepsilon_0 t + s_1$ ni hosil qilamiz.

$t=0$ da $\omega = \omega_0$ bo'lsa, $s_1 = \omega_0$ bo'ladi. U holda tekis o'zgaruvchan aylanma harakat burchak tezligi

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \tag{9.7}$$

formuladan aniqlanadi.

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ni hisobga olsak $d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt$

Bu tenglikni integrallasak

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + c_2 \quad \text{bo'ladi.}$$

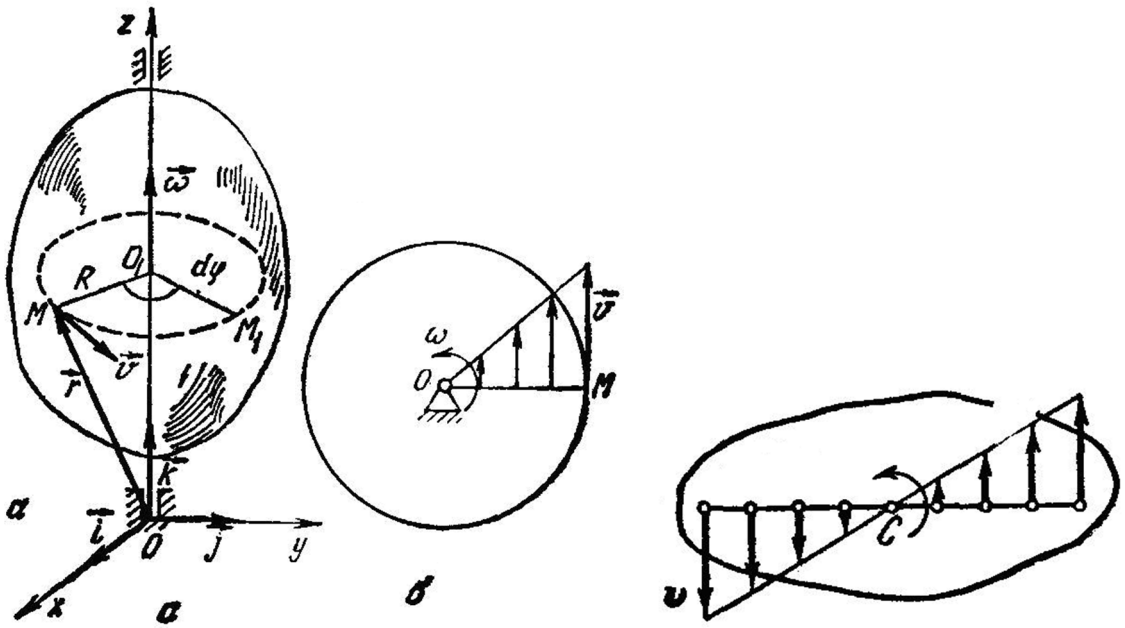
$t=0$ da $\varphi = \varphi_0$ bo'lsa, oxirgi tenglikdan $c_2 = \varphi_0$ bo'lishini ko'ramiz.

U holda

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{9.8}$$

Bu tenglama jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi *tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi*ni ifodalaydi.

Jismning aylanish o'qidan R masofada joylashgan M nuqtasini olamiz. Jism aylanish o'qi atrofida aylanganda M nuqta radiusi R ga teng, markazi aylanish o'qining S nuqtasida joylashgan aylana chizadi.



9.3-shakl

Biror t vaqtda mazkur nuqta M holatda bo'lib, dt vaqt o'tgandan kyoyin u trayektoriya bo'ylab M_1 holatga ko'chsin. Shu dt vaqt ichida jism o'q atrofida $d\varphi$ burchakka aylanadi. Nuqta esa trayektoriya bo'ylab $ds=Rd\varphi$ yoyni bosib o'tadi. Bunda

$$v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega \tag{9.9}$$

Bu formula yordamida aniqlanadigan v tezlik jism nuqtasining *chiziqli tezligi* deyiladi.

Shunday qilib, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasi harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasi chiziqli tezligining miqdori jism burchak tezligining mazkur nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga ko'paytmasiga teng. Chiziqli tezlik M nuqta chizgan aylanaga harakat yo'nalishi bo'yicha o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'naladi.

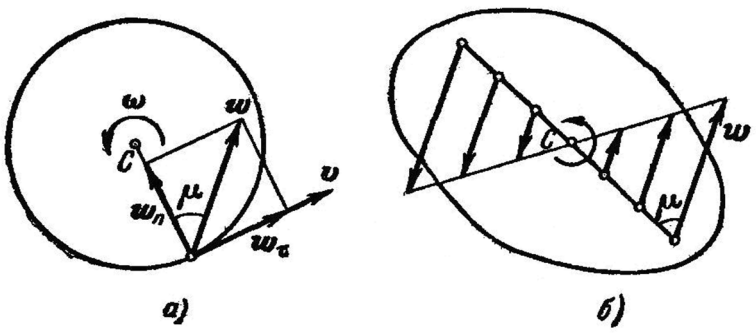
Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jism nuqtalarining trayektoriyalari aylanalardan iborat bo'lgani uchun, M nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlardan iborat bo'ladi.

$$w_\tau=\frac{dv}{dt} \qquad \textit{ва} \qquad w_n=\frac{v^2}{\rho}$$

Kurilayotgan holda $\rho=R$ va $v=R\omega$ bo'lgani uchun

$$w_\tau=\frac{d}{dt}\left(R-\omega\right)=R\cdot\varepsilon, \tag{9.10}$$

$$w_n=\frac{\left(R-\omega\right)^2}{R}=\omega^2\cdot R. \tag{9.11}$$



9.4-shakl

Ba'zida $\vec{w}_\tau$ ni aylanma tezlanish, $\vec{w}_n$ ni esa markazga intilma tezlanishi deb yuritiladi.

Tezlanishning miqdori

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{9.12}$$

va mazkur tezlanishning yo'nalishi

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{9.13}$$

topiladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Ilgarilanma harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Qanday harakatga jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati deyiladi?
3. Tekis aylanma harakat nima?
4. Aylanma harakatdagi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi ifodalarini ko'rsating
5. Aylanma harakatdagi jismning chiziqli tezligi va tezlanishi ifodalarini ko'rsating

10-MAVZU: Qattiq jismning tekis-parallel harakati.

Reja

1. Qattiq jismning tekis parallel harakati va uning erkinlik darajasi.

2. Tekis parallel harakatdagi qattiq jism nuqtalarining tezliklarini aniqlash usullari.

3. Tezliklar oniy markazi.

4. Tekis parallel harakatdagi qattiq jism nuqtalarining tezlanishlarini aniqlash. Tezlanishlar oniy markazi.

Tushuncha va tayanch iboralar

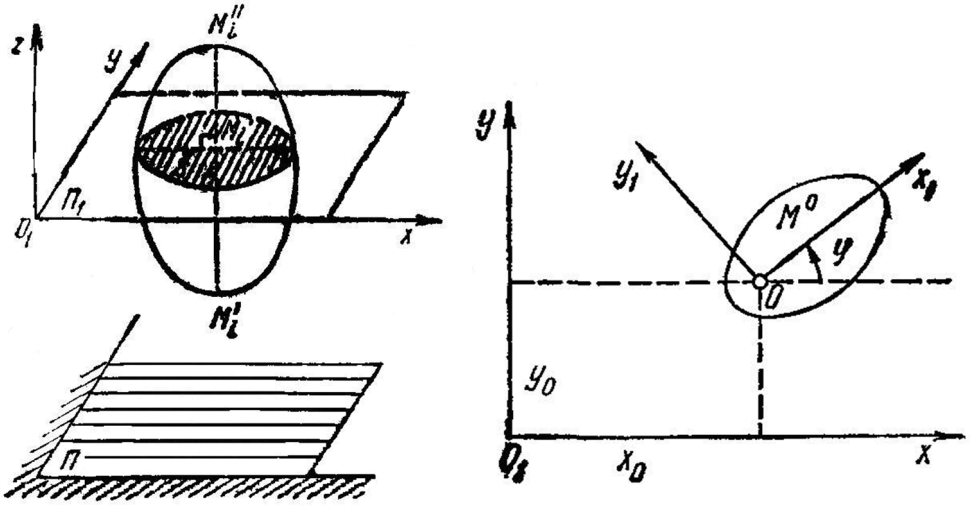
Tekis parallel harakat, tekis shaklning harakattekisligi, tezliklar oniy markazi, sentroidalar, tezlanishlar oniy markazi.

Mavzuni bayoni

Barcha nuqtalari berilgan qo'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlanuvchi jismning harakatiga tekis parallel harakat deyiladi.

Jismning tekis parallel harakatiga misol tarikasida vagon gildiragining to'g'ri chiziqli izda dumalalishni yoki bir tekislikda harakatlanuvchi mashina va mexanizm qismlarining harakatini keltirish mumkin.

Jismning tekis parallel harakatini aniqlash uchun berilgan qo'zg'almas tekislikni P bilan belgilaylik. Jismni P tekislikka parallel bo'lgan P_1 tekislik bilan fikran kesish natijasida hosil bo'lgan kesimni S bilan belgilab, uni tekis shakl deb ataymiz. Tekis parallel harakat ta'rifiga ko'ra, jismning harakati davomida bu tekis shakl doimo qo'zg'almas P tekislikka parallel bo'lgan P_1 tekislikda harakatlanadi.



10.1-shakl

Jismda olingan, P_1 tekislikka perpendikulyar (yoki 0_1z o'qqa parallel), MM kesma ilgarilama harakatda bo'ladi, barcha nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi hamda har onda bir xil tezlik va bir xil tezlanishiga ega bo'ladi.

Shu sababli $M'M''$ chiziqning harakatini o'rganish o'rniga uning tekis shaklga taalluqli M nuqtasini, yoki (ya'ni) jismning tekis parallel harakatini o'rganish o'rniga S tekis shaklning harakatini aniqlash yetarli bo'ladi. S yuza harakatlanadigan P_1 tekislik tekis shaklning harakat tekisligi deyiladi.

Harakat tekisligidagi 0_1xu qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan tekis shaklning harakatini tekshirish uchun tekis shaklda qutb deb ataladigan 0 nuqtani olib, bu nuqtada tekis shaklga biriktirilgan $0x_1u_1$ koordinatalar sistemasini o'tkazamiz. Agar $0(x_0,u_0)$ nuqtaning koordinatalari va $0x_1$ qo'zg'aluvchi o'q bilan 0_1x qo'zg'almas. O'q orasidagi φ burchak ma'lum bo'lsa, u holda qo'zg'aluvchi $0x_1u_1$ ning holati, binobarin, tekis shaklning harakat tekisligidagi holati ma'lum bo'ladi. Shu sababli tekis shaklning harakat tenglamasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f_1(t) \\ y_0 &= f_2(t) \\ \varphi_0 &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

(10.1) tenglamalar tekis shakl harakatining kinematik tenglamalari yoki *jism tekis parallel harakatining tenglamalari* deyiladi.

(10.1) tenglamadagi birinchi ikkita tenglama qutbning harakatini, uchinchisi esa tekis shaklning qutb atrofidagi aylanish qonunini ifodalaydi.

Aylanish burchagi φ dan vaqt bo'yicha olingan hosila tekis shaklning burchak tezligi deyiladi va ω_z bilan belgilanadi:

$$\omega_я = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Tekis shakl burchak tezligidan vaqt bo'yicha olingan hosila tekis shaklning burchak tezlanishi deyiladi va ε_z bilan belgilanadi:

$$\varepsilon_я = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Tekis shaklning burchak tezligi va burchak tezlanishi qutbning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmaydi.

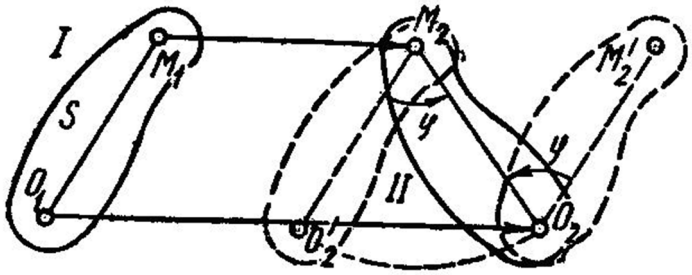
Alohida ahamiyatga molik bo'lgan quyidagi ikki holni ko'ramiz.

1. Agar $x_0=const,\ y_o=const$ bo'lsa, qutb qo'zg'almay, vaqtning o'tishi bilan faqat ω burchak o'zgaradi. Bu holda tekis shakl harakat tekisligiga perpendikulyar ravishda *O* nuqtadan o'tuvchi o'q atrofida aylanadi. Binobarin, qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati tekis parallel harakatning xususiy holi hisoblanadi.

2. Agar $\varphi=const$ bo'lsa, faqat qutbning koordinatalari vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi hamda qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi o'zining boshlang'ich holatiga parallel ravishda harakatlanadi. Bunda tekis shakl hamda qattiq jism ilgarilama harakatda bo'ladi.

Tekis parallel harakatdagi qattiq jism nuqtalarining tezliklarini aniqlash usullari

Teorema. *Tekis shaklning o'z tekisligidagi har qanday ko'chishini qutb bilan birgalikdagi ilgarilama ko'chish hamda qutb atrofidagi aylanma ko'chishdan tashkil topgan deb qarash mumkin.*

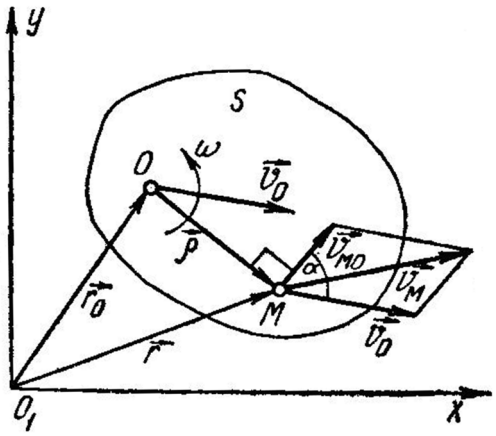


10.2-shakl

Tekis shakl OM kesmasining t_1 va t_2 ixtiyoriy paytdagi holatlarini mos ravishda O_1M_1 va O_2M_2 bilan belgilaylik. O nuqtasi qutb uchun qabul qilib, tekis shaklga shunday ilgarilama ko'chish beramizki, natijada uning O_1 nuqtasi O_2 bilan ustma-ust tushsin, M_1 nuqta M_2 holatni egallasin. Tekis shaklning ilgarilama ko'chishi O_1O_2 vektor bilan aniqlanadi. So'ngra tekis shaklni o'z harakat tekisligida O_2 qutb atrofida φ burchakka aylantirsak, O_2M_2 kesma O_2M_2 holatga o'tadi va tekis shakl II holatni egallaydi. Tekis shaklning ilgarilama harakati qutbga bog'liq bo'ladi, qutb atrofida alanish burchagi esa qutbni tanlashga bog'liq bo'lmaydi.

Tekis shakl nuqtalarining tezliklari. Teorema 1**.** *Tekis shakl ixtiyoriy M nuqtasining tezligi qutbning tezligi bilan M nuqtaning qutb atrofida aylanishdagi chiziqli tezligining geometrik yig'indisiga teng.*

O va M nuqtalarning qo'zg'almas Oxu koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorlari mos ravishda $\vec{r}_o$ va $\vec{r}$ bo'lsin. M nuqtaning O qutbga nisbatan radius-vektorini $\vec{\rho}$ bilan belgilaylik.



10.3-shakl

U holda

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\rho}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_M$ *ва* $\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \vec{v}_O$ mos ravishda M va O nuqtalarning O_1xu koordinatalar sistemasiga nisbatan tezliklari.

$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{MO}$ esa M nuqtaning O qutbdan o'tuvchi o'q atrofida aylanishidagi chiziqli tezligi.

$$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \qquad \vec{v}_{MO} = \omega \cdot \rho.$$

Shunday qilib

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \\ \vec{v}_{MO} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \end{aligned} \qquad (10.2)$$

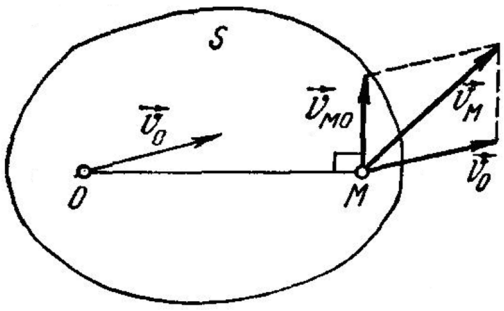
Tekis shakl nuqtasining tezligini (10.2) formula vositasida aniqlashga qutb usulida aniqlash deyiladi.

Agar $\vec{v}_O$ va $\vec{v}_{MO}$ va ular orasidagi burchak α berilgan bo'lsa, kosinuslar teoremasidan foydalanib M nuqta tezligining miqdori topiladi.

$$v_M = \sqrt{v_O^2 + v_{MO}^2 + 2v_O v_{MO} \cos\alpha} \qquad (10.3)$$

Teorema *Tekis shakl ikkita nuqtasi tezliklarining shu nuqtalardan o'tuvchi o'qdagi proyeksiyalari o'zaro teng.*

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}$$



10.4-shakl

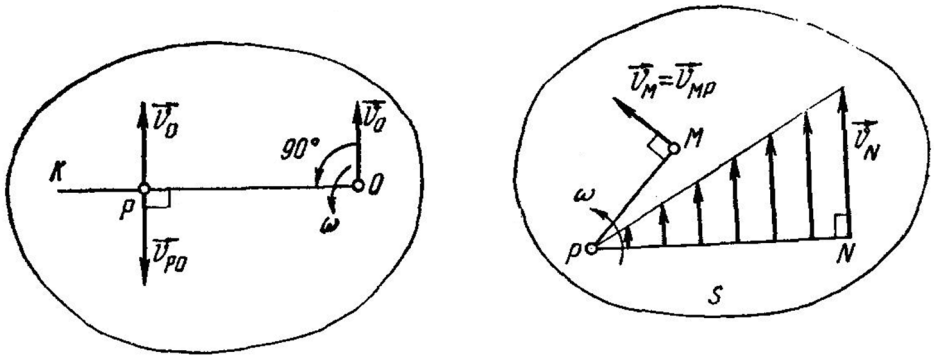
Bu ifodani OM o'qqa proyeksiyalaymiz:

$$\begin{aligned} &\Pi P_{OM}\vec{v}_M = \Pi P_{OM}\vec{v}_O + \Pi P_{OM}\vec{v}_{MO} \\ &\Pi P_{OM}\vec{v}_{MO} = 0 \\ &\Pi P_{OM}\vec{v}_M = \Pi P_{OM}\vec{v}_O \end{aligned} \qquad (10.4)$$

(10.4) ifoda yordamida tekis shakl nuqtasining tezligini aniqlashga proyeksiya usuli bilan aniqlash deyiladi.

Tezliklar oniy markazi.Tekis shaklning berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan nuqtasi tezliklar oniy markazi yoki aylanish oniy markazi deyiladi.

Teorema. *Agar tekis shaklning burchak tezligi noldan farqli bo'lsa, tezliklar oniy markazi mavjud bo'ladi.*



10.5-shakl

Berilgan onda burchak tezligi $\omega_z = \dot{\varphi}$ bo'lgan tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezligi $\vec{v}_o$ ga teng bo'lsin. O nuqtani qutb deb olamiz va burchak tezlikning ishorasiga qarab tekis shaklning qutb atrofidagi aylanish yo'nalishini aniqlaymiz. Agar $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$ bo'lsa, tekis shakl O nuqta atrofida soat strelkasi aylanishiga teskari, $\omega_z < 0$ bo'lsa, soat strelkasi aylanadigan yo'nalishda aylanadi $\omega_z > 0$ deb qarab aylanish yo'nalishi bo'yicha $\vec{v}_o$ tezlik vektorini O atrofida to'g'ri burchakka burish bilan olingan OK chiziqda yotuvchi va

$$PO = \frac{v_o}{\omega}$$

tenglikka binoan aniqlanadigan R nuqtaning tezligini hisoblaymiz.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO}$$

$$v_{PO} = \omega \cdot PO = \frac{v_o}{\omega} \cdot \omega = v_o$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = 0$$

Demak, tezligi nolga teng bo'lgan tezliklar oniy markazi mavjud ekan.

Agar R nuqtani qutb deb olsak, $\vec{v}_P = 0$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}$$

Bunda $\vec{v}_{MP} = \omega \cdot PM$ yoki

$$v_M = \omega \cdot PM$$

$$\omega = \frac{v_M}{PM}$$

$$v_N = \omega \cdot PN = v_M \frac{PN}{PM}$$

$$\frac{v_N}{v_M} = \frac{PN}{PM}$$

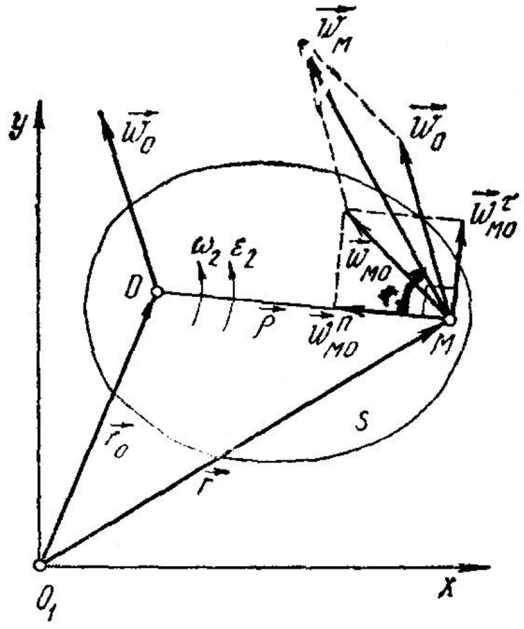
Ya'ni tekis shakl nuqtalarining tezliklari shu nuqtalardan tezliklar oniy markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi.

Tekis shakl nuqtasining tezlanishini qutb usulida aniqlash.

Teorema. *Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi qutbning tezlanishi bilan mazkur nuqtaning qutb atrofida aylanishdagi tezlanishining geometrik yig'indisiga teng.*

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO}$$

$$\vec{w}_{MO} = \vec{w}^{\tau}_{MO} + \vec{w}^{n}_{mo}$$



10.6-shakl

Bunda $\vec{w}^{\tau}_{MO}$ - M nutaning O qutb atrofida aylanishdagi aylanma tezlanishini, $\vec{w}^{n}_{MO} - M$ nuqtaning O qutb atrofidagi aylanishidagi markazga intilma tezlanishini ifodalaydi.

$$\vec{w}^{\tau}{}_{MO} = \varepsilon \cdot MO$$

$$\vec{w}^{\tau}{}_{MO} = \omega^2 MO$$

$$\vec{w}_{MO} = MO \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$\vec{w}_{MO}$ ning ynalishi quyidagi tenglikdan aniqlanadi.

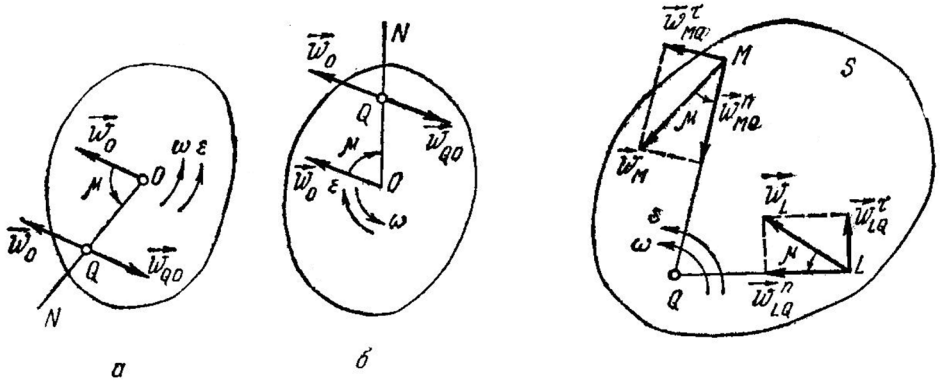
$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Tezlanish berilgan onda nolga teng bo'lgan tekis shaklning (yoki tekis shaklga mahkam biriktirilgan va u bilan birgalikda harakatlanuvchi tekislikning) nuqtasi *tezlanishlar oniy markazi* deyiladi.

Teorema. *Ilgarilama harakatda bulmagan tekis shaklning harakat tekisligida har onda tezlanishlar oniy markazi mavjud bo'ladi.*

Tekis shaklning burchak tezligi ω burchak tezlanishi ε va aylanish yo'nalishi hamda 0 nuqtasi (qutb) ning tezlanishi $\vec{w}_O$ berilgan bo'lsin. Tezlanishlar oniy markazini Q bilan belgilaylik. Q nuqtaning holatini aniqlash uchun μ burchakni topamiz.

$$\mu = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}$$



10.7-shakl

$\vec{w}_o$ vektori bilan μ burchak tashkil etuvchi ON to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, agar tekis shaklning aylanishi tezlanuvchan bo'lsa, μ burchak aylanish yo'nalishi bo'yicha, sekinlanuvchan bo'lsa, aylanishiga teskari yo'nalishda qo'yiladi.

ON chiziqda O nuqtadan

$$OQ = \frac{w_o}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

masofada Q nuqtani olsak, bu nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'ladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Qattiq jismning tekis parallel harakati deb qanday harakatga aytiladi?
2. Tekis shaklning harakat tenglamalarini keltiring
3. Qanday nuqtaga tezliklar oniy markazi deyiladi?
4. Tezliklar oniy markazini aniqlashga misollar keltiring
5. Qanday nuqtaga tezlanishlar oniy markazi deyiladi?

11-MAVZU: Nuqtaning murakkab harakati.

Reja

1. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakatlari

2. Tezliklarning qo'shish teoremasi.

3. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakat bo'lgan holda tezlanishlarni qo'shish teoremasi.

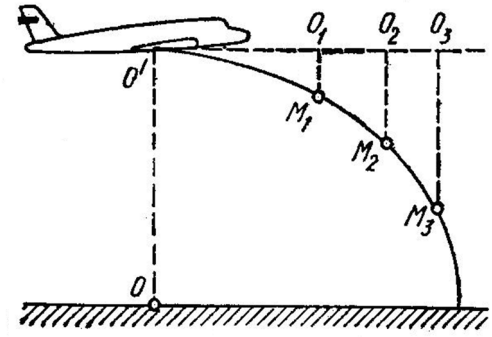
Tushuncha va tayanch iboralar

Nisbiy harakat, ko'chirma harakat, absolyut harakat, murakkab harakat, nisbiy, ko'chirma va Koriolis tezlanishi.

Mavzuni bayoni

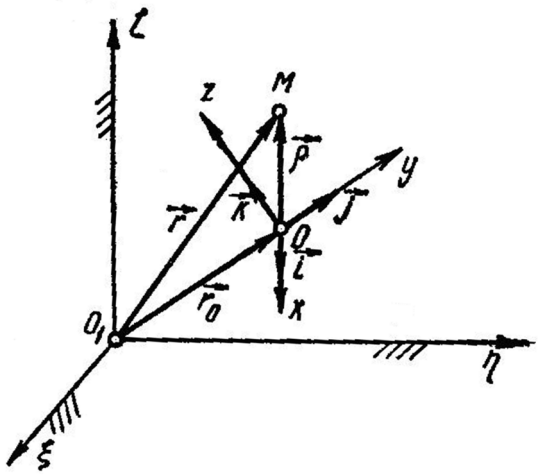
Mexanika masalalarini yechishda ko'pincha nuqtaning harakatini bir vaqtning o'zida ikkita koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshirish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu holda koordinatalar sistemalaridan birini qo'zg'almas deb qabul qilamiz va uni asosiy koordinatalar sistemasi deb ataymiz.

Masalan, o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanayotgan samolyotdan boshlang'ich tezliksiz tashlangan yukning harakatini Yer bilan bog'langan asosiy koordinatalar sistemasiga hamda samolyotga biriktirilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshirish mumkin.



11.1-shakl

M nuqta biror *0xuz* koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin. O'z navbatida bu koordinatalar sistemasi qo'zg'almas deb olinadigan $O_1\xi\eta\zeta$ asosiy koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin.



11.2-shakl

Nuqtaning ko'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati *nisbiy harakat* deyiladi.

M nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorini ρ koordinatalarini, x,u,z hamda qo'zg'aluvchi koordinata o'qlarining birlik yo'naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilasak,

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{11.1}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

M nuqtaning nisbiy harakat tenglamalarini Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasi quyidagicha yoziladi

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan, trayektoriyasi nisbiy trayektoriya deyiladi. Nuqtaning bunday harakatdagi tezlik va tezlanishi mos ravishda nisbiy tezlik va nisbiy tezlanish deyiladi hamda $\vec{v}_r$ *ва* $\vec{w}_r$ bilan belgilanadi.

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining va u bilan o'zgarmas ravishda bog'langan fazo nuqtalarining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati ko'chirma harakat deyiladi.

Ko'chirma tezlik $\vec{v}_e$ ko'chirma tezlanish $\vec{w}_e$ bilan belgilanadi.

Nuqtaning qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati absolyut harakat deyiladi. Nuqta bir vaqtning o'zida ikki yoki undan ortiq harakatda ishtirok etsa, bunday harakat murakkab harakat deyiladi.

Absolyut harakatdagi nuqtaning tezlik va tezlanishi mos ravishda absolyut tezlik $\vec{v}_a$ va absolyut tezlanish $\vec{w}_a$ deyiladi.

Tezliklarni qo'shish teoremasi.

Agar M va O nuqtalarning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan radius-vektorini mos ravishda $\vec{r}$ va $\vec{r}_o$ bilan belgilasak, rasmdan

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\rho} \tag{11.3}$$

munosabat o'rinli bo'lishini ko'ramiz (15.1) ni nazarda tutib, (11.3) ni

$$\vec{r} = \vec{r}_o + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{11.4}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

M nuqtaning absolyut tezligini aniqlash uchun (11.4) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{11.5}$$

(11.5) da quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \tag{11.6}$$

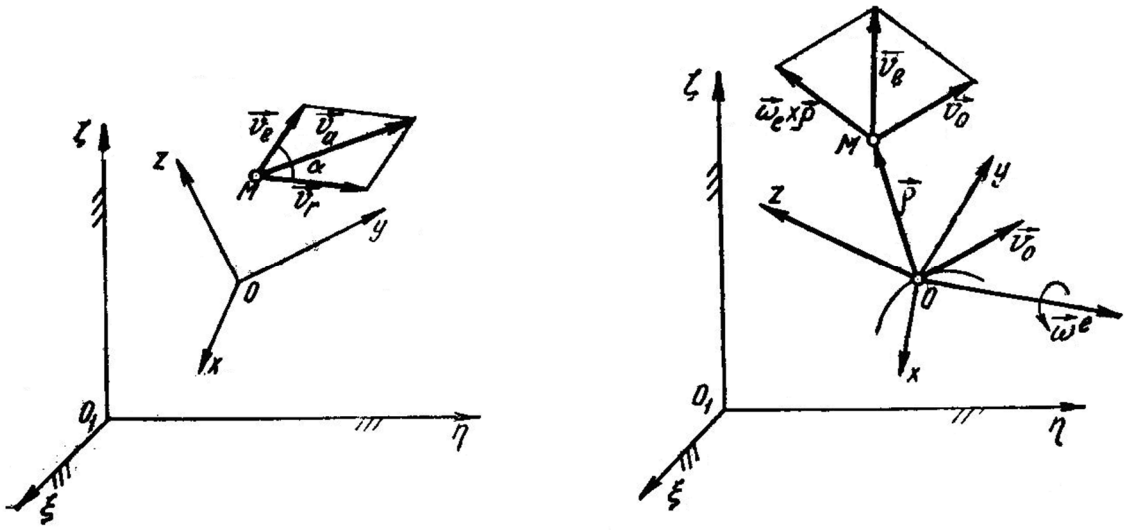
$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{11.7}$$

$$\vec{v}_o = \frac{d\vec{r}_o}{dt}; \qquad \vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Shunday qilib, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \tag{11.8}$$

(11.8) tenglama murakkab harakatdagi nuqtaning tezliklarini qo'shish haqidagi teoremani ifodalaydi: *nuqtaning absolyut tezligi mazkur nuqta nisbiy va ko'chirma tezliklarining geometrik yig'indisiga teng.*



11.3-shakl

Absolyut tezlikning moduli kosinuslar teoremasidan foydalanib aniqlanadi

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\alpha} \tag{11.9}$$

$\alpha = 90^0$ bo'lgan holda

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} \tag{11.10}$$

$\alpha = 0^0$ bo'lganda

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e}. \tag{11.11}$$

Nisbiy va ko’chirma tezliklar qarama-qarshi tomonga yo’nalsa,

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e} = |v_r + v_e|. \qquad (11.12)$$

munosaabatlar o’rinli bo’ladi.

Nuqtaning ko’chirma tezligini aniqlash ustida batafsiya to’xtalamiz. Agar qo’zg’aluvchi koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi ma’lum bo’lsa, u holda $\frac{d\vec{i}}{dt}, \frac{d\vec{j}}{dt}, \frac{d\vec{k}}{dt}$ kattaliklarni mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning uchlaridagi nuqtalarning tezligiga teng deb qarash mumkin. Shu sababli Eyler formulasiga ko’ra ushbu

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}. \qquad (11.13)$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

(11.13) ni (11.7) ga qo’yib, (11.1) ni e’tiborga olsak,

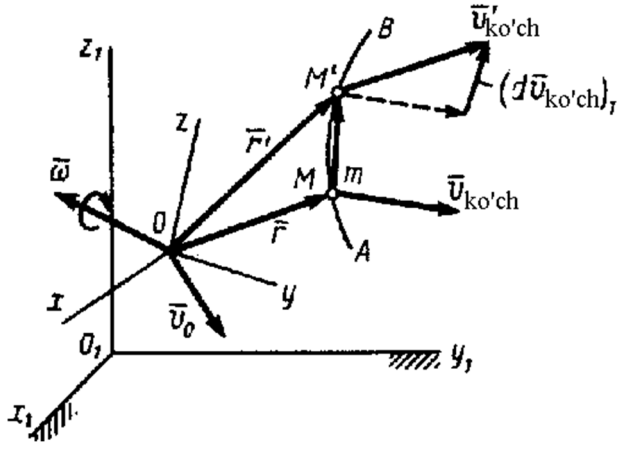
$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + \vec{\omega}_e \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \vec{v}_o + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}. \qquad (11.14)$$

formula o’rinli bo’ladi.

Ko’chirma harakat ilgarilama bo’lgan hol. Bunday harakatda, ya’ni ω=0 bo’lganda, $\overline{a}_{\text{kor}}$ =0 bo’ladi. Natijada

$$\overline{a}_{\text{abs}} = \overline{a}_{\text{nis}} + \overline{a}_{\text{ko'ch}} \qquad (11.5)$$

ya’ni, *agar ko’chirma harakat ilgarilanma bo’lsa, nuqtaning absolyut tezlaniishi nisbiy va ko’chirma tezlanishlarning geometrik yig’indisidan iborat bo’lar ekan.* Bunday natija, xuddi



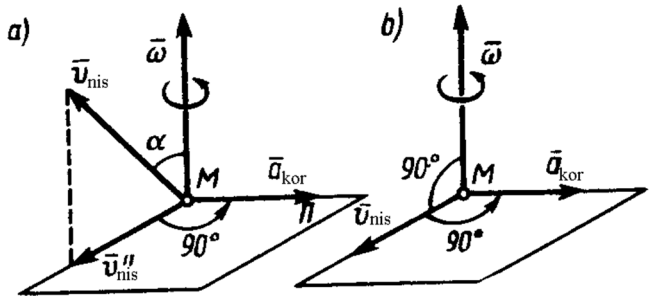
11.4-shakl

tezliklarni qo’shish teoremasiga o’xshash ekanligini ko’rsatib turibdi.

Nisbiy, ko’chirma va koriolis tezlanishlarni hisoblash. Nisbiy tezlanishni aniqlashda, ko’chirma harakatni e’tiborga olinmasligi sababli, uni oddiy kinematika masalalaridagi kabi aniqlanadi. Ko’chirma tezlanishni aniqlashda qo’zg’aluvchi o’qlarning M nuqta joylashgan o’rnining tezlanishini aniqlashdan, ya’ni qattiq jismning harakatida uning

birorta nuqtasini tezlanishini aniqlashga o'xshash. Agar $\overline{\omega}$ va $\overline{V}_{nis}$ vektorlar orasidagi burchak α -bo'lsa, koriolis tezlanishining moduli,

$$a_{kor}=2\,|\,\omega\,|\cdot|v_{nis}\,|\cdot\sin\alpha \qquad (11.6)$$



11.5- shakl

Koriolis tezlanish vektori - $\overline{a}_{kor}$ vektorning yo'nalishi $\overline{\omega}\times\overline{V}_{nis}$ vektorning yo'nalishi bilan bir-xil bo'lib, $\overline{\omega}$ va $\overline{V}_{nis}$ vektorlar joylashgan tekkislikka perpendikulyarl ravishda yo'nalgan va uning uchidan qaraganimizda $\overline{\omega}$ -vektorni soat strelkasiga teskari tomonga burganimizda 180° dan kichik burchakda $\overline{V}_{nis}$ vektorning ustiga tushishi kerak (11.5-shakl).

11.5-shakldan ko'rinib turibdiki, agar nisbiy tezlik vektori- $\overline{V}_{nis}$ ni $\overline{\omega}$ -vektorga perpendikulyarl bo'lgan P - tekislikka proyektsiyalab, shu proyektsiya $\overline{V}^{\,n}_{ko'ch}$ -vektorni ko'chirma harakatning aylanishi tomonga 90° ga bursak koriolis tezlanishining yo'nalishi aniqlanadi.

Agar nisbiy harakatning trayektoriyasibir tekislikda joylashgan bo'lsa va har doim shu tekislik ustida harakatlansa, u holda α=90° bo'ladi (11.5- shakl) va koriolis tezlanishning moduli quyidagicha bo'ladi:

$$a_{kor}=2\,|\,\omega\,|\cdot|v_{nis}\,| \qquad (11.7)$$

11.5-shakldan ko'rinib turganidek, nisbiy tezlik vektori - $\overline{V}_{nis}$ ni ko'chirma harakatning aylanish tomoniga 90° ga bursak ham, $\overline{a}_{kor}$ -tezlanishining yo'nalishi aniq bo'ladi.

1. ω=0 bo'lganda, ya'ni ko'chirma harakat ilgarilanma bo'lganda yoki shu ondagi ko'chirma burchakli tezlik nolga teng bo'lganda;

2. v_{nis}=0 bo'lganda, ya'ni shu ondagi nisbiy tezlik nolga teng bo'lganda;

3. α=0 yoki α=180° bo'lgan hollarda, ya'ni nisbiy tezlik vektori ko'chirma harakatning aylanish o'qiga parallel bo'lganda, yoki shu ondagi $\overline{V}_{nis}$ vektor ko'chirma harakatning oniy aylanish o'qiga parallel bo'lganda.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakati deb qanday harakatlarga aytiladi?
2. Nuqtaning absolyut tezligi ifodasini keltiring
3. Absolyut tezlik moduli qanday aniqlanadi?
4. Nuqtaning absolyut tezlanishi ifodasini keltiring.

12-MAVZU: Ko'chirma harakat aylanma harakat bo'lgan holda tezianishlarni qo'shish teoremasi. Koriolis tezlanishi.

Reja

1.Ko'chirma harakat aylanma harakat bo'lgan holda tezlanishlarni qo'shish teoremasi.
2. Koriolis tezlanishi.
3.Koriolis tezlanishiga oid masalalar

Tushuncha va tayanch iboralar

Ko'chirma harakat, aylanma harakat, koriolis teoremasi, tezlanishlarni qo'shish, ilgarilanma harakat, absolyut tezlanish.

Mavzuni bayoni

M nuqtaning $\vec{w}_a$ absolyut tezlanishi mazkur nuqtaning absolyut tezligidan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

$$\vec{w}_o = \frac{d\vec{v}_o}{dt}.$$

vaqt bo'yicha hosila olsak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\vec{w}_a = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} + \\ + 2\left(\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\right). \tag{12.1}$$

(12.1) da quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\vec{w}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \tag{12.2}$$

$$\vec{w}_e = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}, \tag{12.3}$$

$$\vec{w}_k = 2\left(\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\right). \tag{12.4}$$

Bu yerda $\vec{w}_r$ - nuqtaning nisbiy tezlanishi, $\vec{w}_e$ - nuqtaning ko'chirma tezlanishi, $\vec{w}_k$ - Koriolis tezlanishi.

Shunday qilib, nuqtaning absolyut tezlanishi uchun quyidagi tenglikni olamiz:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_k . \qquad (12.5)$$

(12.5) tenglik murakkab harakatdagi nuqtaning tezlanishlarini qo'shish haqidagi G.Koriolis teoremasini ifodalaydi: *murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanishi uning nisbiy, ko'chirma va Koriolis (yoki) kushimcha tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.*

Agar ko'chirma harakat ilgarilama harakatdan iborat bo'lsa, u holda qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlari harakat davomida hamisha o'ziga parallel ravishda ko'chadi. (12.4) va (12.5) da $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlardan vaqt bo'yicha olingan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar nolga teng bo'ladi, va

$\vec{w}_e = \vec{w}_o, \quad \vec{w}_k = 0$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Natijada

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e \qquad (12.6)$$

bo'ladi.

Absolyut tezlanishning moduli

$$w_a = \sqrt{w_r^2 + w_e^2 + 2w_r w_e \cos\left(\vec{w}_r \hat{,} \vec{w}_e\right)} \qquad (12.7)$$

(12.7) tenglik tezlanishlarning parallelogramm qoidasi deyiladi.Murkkab harakatdagi nuqtaning nisbiy, ko'chirma va Koriolis tezlanishlari Nuqtaning nisbiy tezlanishini bevosita (12.7) formula yordamida yoki ko'zg'aluvchan koordinatalar sistemasini fikran qo'zg'almas deb qarab aniqlash mumkin.

Nuqtaning ko'chirma tezlanishi (12.7) dan foydalanib hisoblanadi. Bu formulada $\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} = \vec{w}_o$ qo'zg'aluvchi *0xuz* koordinatalar sistemasi boshining tezlanishini ifodalaydi. (12.5) ni e'tiborga olib (12.7) xadlarini quyidagicha o'zgartirish mumkin:

$$\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_e \times \vec{i}\right) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \vec{i}\right),$$

bu tenglikda $\vec{\varepsilon}_e = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt}$ bilan berilgan ondagi ko'chirma harakat burchak tezlanishi belgilangan.

Xuddi shu singari $\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}$, $\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$ larni hisoblash mumkin:

$$\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{j} + \vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \vec{j}\right),$$

$$\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{k} + \vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \vec{k}\right).$$

Natijada

$$x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} = \vec{\varepsilon}_e \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) + \vec{\omega}_e \times \left[\vec{\omega}_e \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\right] =$$
$$= \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}\right)$$

tenglikni olamiz.

Shunday qilib, ko'chirma tezlanish uchun quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\vec{w}_e = \vec{w}_o + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) \tag{12.8}$$

yoki $$\vec{w}_e = \vec{w}_o + \vec{w}_e^{\varepsilon} + \vec{w}_e^{\omega}, \tag{12.9}$$

bu yerda $\vec{w}_e^{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho}$ - aylanma tezlanish, $\vec{w}_e^{\omega}$ - o'qqa intilma tezlanish.

(12.9) ni nazarda tutib, Koriolis tezlanishini ifodalovchi (12.9) tenglikni quyidagicha yoza olamiz:

$$\vec{w}_k = 2\left[\dot{x}(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + \dot{z}(\vec{\omega}_e \times \vec{k})\right] = 2\left[\vec{\omega}_e \times (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})\right].$$

Koriolis tezlanishini ifodalovchi bu ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

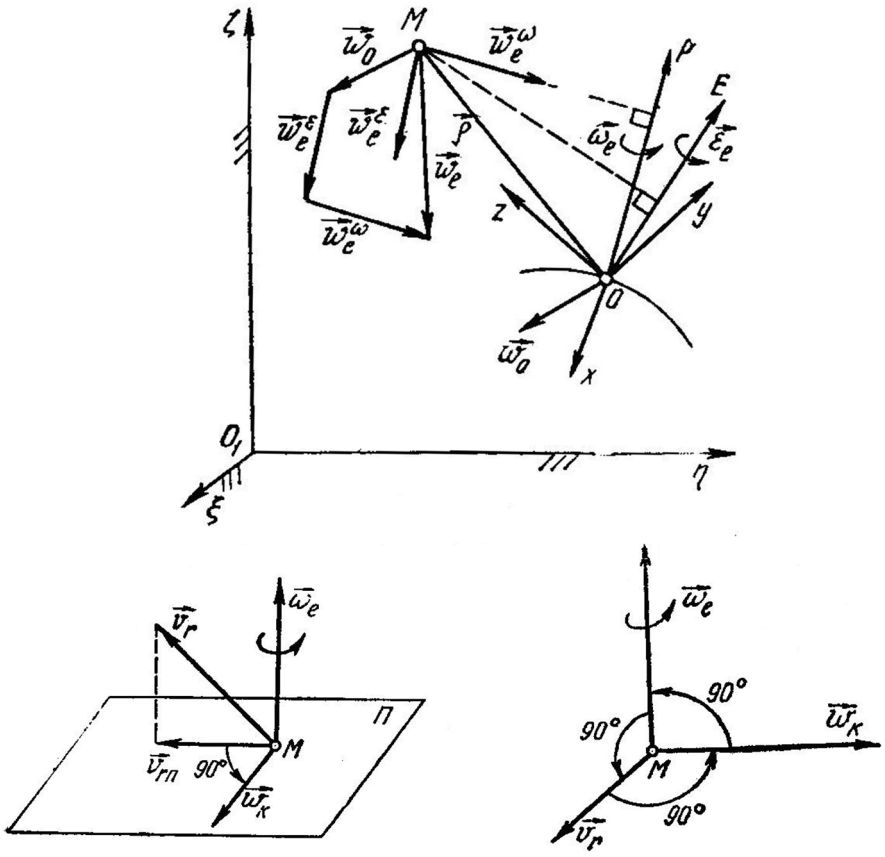
$$\vec{w}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \tag{12.10}$$

Demak, murakkab harakatdagi nuqtaning Koriolis tezlanishi qo'zg'aluvchi *0xuz* koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi bilan nuqtaning nisbiy tezligi vektorli ko'paytmasining ikkilanganiga teng.

Koriolis tezlanishining moduli (12.10) tenglikka binoan

$$w_k = 2\vec{\omega}_e \vec{v}_r \sin\left(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r\right). \tag{12.11}$$

formula bilan aniqlanadi.



12.1-shakl

Nuqtaning murakkab harakatiga oid masalalarni yechishda avvalo qo'zg'almas va qo'zg'aluvchi koordinata sistemalari tanlanib, nuqtaning absolyut harakati nisbiy va ko'chirma harakatlarga ajratiladi.

Murakkab harakatdagi nuqtaning tezligini topishda ifodalanadigan tezliklar parallelogrammi qoidasidan foydalaniladi.

Murakkab harakatdagi nuqtaning tezlanishlarini aniqlashga oid masalalarni 2 turga bo'lish mumkin:

1. Ko'chirma harakati ilgarilama harakat bo'lgan nuqtaning tezlanishlarini aniqlash.
2. Ko'chirma harakati ilgarilama harakatdan iborat bo'lmagan nuqtaning tezlanishlarini aniqlash.

Ko'chirma harakat aylanma bo'lganda. Quyida ko'chirma harakat qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo'lganida, $\overline{a}_{abs}$ aniqlashni ko'rib o'tamiz.

M nuqta BA qo'zg'almas o'q atrofida $\varphi=f_2(t)$ qonun bo'yicha aylanma harakat qilayotgan jism sirtida (shar ustida) berilgan AMB egri chiziq bo'ylab $s=f_1(t)$ qonunga muvofiq nisbiy harakat qilayotgan bo'lsin. Bu yerda $s = A\breve{M}$, φ -jismning burilish burchagi. Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati M nuqta uchun ko'chirma harakat hisoblanadi. Shu M nuqtaning $t=t_1$ vaqtdagi $\overline{a}_{abs}$-tezlanishi aniqlansin. Masala quyidagi tartibda yechiladi:

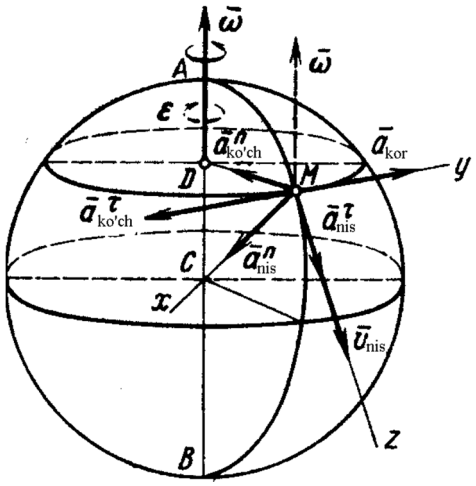
Nuqtaning holatini aniqlash. Nuqtaning harakat qonuni $s=f_1(t)$ ga $t=t_1$ -ni qo'yib, M nuqtaning AB egri chiziqdagi o'rnini aniqlaymiz va shaklda M nuqtani tasvirlaymiz.

$\overline{\mathrm{V}}_{nis}$ va $\overline{a}_{nis}$ *-ni aniqlash.* Nuqta kinematikasidagi formulalar orqali, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$v_{nis}=\dot{S}\,, \qquad a^{\tau}_{nis}=\dot{\mathrm{V}}_{nis}\,, \qquad a^{n}_{nis}=\mathrm{V}^2_{nis}/\rho_{nis}$$

bu yerda: ρ_{nis}-AB egri chiziqdagi M nuqta joylashgan o'rnining egrilik radiusi; So'ngra $t=t_1$ vaqt uchun bularning son qiymatlarini aniqlaymiz va ularni vektor shaklda $\overline{\mathrm{V}}_{nis}$, $\overline{a}^{\tau}_{nis}$ va $\overline{a}^{n}_{nis}$ larni chizmada tasvirlaymiz.

$\overline{a}_{ko'ch}$ *-tezlanishni aniqlash.* Avval $\omega=\dot{\varphi}$ va $\varepsilon=\dot{\omega}$ larni aniqlaymiz va $t=t_1$ vaqt uchun ularning son qiymatlarini hisoblaymiz. So'ngra t_1 vaqt uchun M



12.2- shakl

nuqtaning BA aylanish o'qigacha bo'lgan masofasi h - ni aniqlaymiz. Undan keyin $t=t_1$ vaqtda jismning M nuqta joylashgan o'rnining $a^{\tau}_{ko'ch}$ va $a^{n}_{ko'ch}$ -tezlanishlari son qiymatlarini quyidagi formulalar orqali aniqlaymiz,

$$\overline{a}^{\tau}_{ko'ch}=h\cdot\varepsilon_1,\quad \overline{a}^{n}_{ko'ch}=h\cdot\omega_1^2$$

son qiymatlari aniqlangan $\overline{a}^{\tau}_{ko'ch}$ va $\overline{a}^{n}_{ko'ch}$ -vektorlarni shaklda tasvirlaymiz.

$\overline{a}_{kor}$ -*tezlanishni aniqlaymiz.* $\overline{a}_{kor}$ -tezlanishning moduli va yo'nalishini qoida bo'yicha aniqlaymiz. $\overline{a}_{kor}$ -vektorni shaklda tasvirlaymiz.

$\overline{a}_{abs}$- *tezlanishni aniqlash.* Koriolis teoremasiga asosan, absolyut tezlanishni quyidagicha aniqlaymiz

$$\overline{a}_{abs}=\overline{a}^{\tau}_{nis}+\overline{a}^{n}_{nis}+\overline{a}^{\tau}_{ko'ch}+\overline{a}^{n}_{ko'ch}+\overline{a}_{kor}$$

Agar tenglamaning o'ng tomonidagi qiymatlarning yig'indisini geometrik usul bilan aniqlash murakkab bo'lsa, M nuqtadan Mxyz koordinata o'qlarini o'tkazib, barcha yig'indilarni shu o'qqa proyektsiyalaymiz. U holda vektorlar yig'indisining o'qlarga proyektsiyalari haqidagi teoremaga asosan

$$(a_{abs})_x=\sum a_{ix},\qquad (a_{abs})_u=\sum a_{iy},\qquad (a_{abs})_z=\sum a_{iz}$$

so'ngra

$$a_{abs}=\sqrt{(a_{abs})_x^2+(a_{abs})_y^2+(a_{abs})_z^2}$$

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Koriolis teoremasini tushintirib bering.
2.Ko'chirma harakatda tezlanish qanday aniqlanadi?
3.Nisbiy harakatda tezlanish qanday aniqlanadi?
4.Koriolis tezlanishini yo'nalishi qanday aniqlanadi?

13-MAVZU: Qattiq jismning sferik harakati.

Reja

1. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakat tenglamalari. Eyler burchaklari.
2. Eyler-Dalamber teoremasi. Oniy aylanish o'qi. Aksoidalar.
3. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat qiluvchi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi
4. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jism nuqtasining tezligi va tezlanishi.
5. Eylerning kinematik tenglamalari.

Tushuncha va tayanch iboralar

Eyler burchaklari, tugunlar chizig'i, presessiya burchagi, sof aylanish burchagi, nutasiya burchagi, oniy aylanish o'qi, aksoidlar.

Mavzuni bayoni

Harakat davomida bitta nuqtasi hamishiy qo'zg'almasdan koladigan qattiq jismning harakati qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakat yoki sferik harakat deyiladi.

Bunday harakatda jismning barcha nuqtalari umumiy markazi qo'zg'almas nuqta bilan ustma-ust tushuvchi sferelarning sirtlarida harakatlanadi.

Tayanch tekisligidagi nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan pririldoqning harakati yoki birgina sferik sharnirli bog'lanish qo'yilgan jismning harakati sferik harakatga misol bo'la oladi.

Qo'zg'almas O nuqtaga ega bo'lgan jismning $O\xi\eta\zeta$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan holatini aniqlash uchun jismga biriktirilgan va u bilan birga harakatlanuvchi hamda koordinatlar boshi qo'zg'almas O nuqta bilan ustma-ust tushuvchi *0xuz* qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini o'tkazamiz.

$O\xi\eta$ qo'zg'almas tekislikning qo'zg'aluvchi *Oxy* tekislik bilan kesishgan chizig'i *ON tugunlar chizig'i* deyiladi.

$O\xi\eta$ qo'zg'almas tekislikda yotuvchi $O\xi$ o'q bilan 0N tugunlar chizig'i orasidagi burchak ψ bilan belgilanadi va *presessiya burchagi* deyiladi.

Tugunlar chizig'ining *Ox* o'q bilan tashkil kelgan burchagi φ *sof aylanish burchagi* deyiladi. Qo'zg'aluvchi *0z* o'q *sof aylanish o'qi* deyiladi.

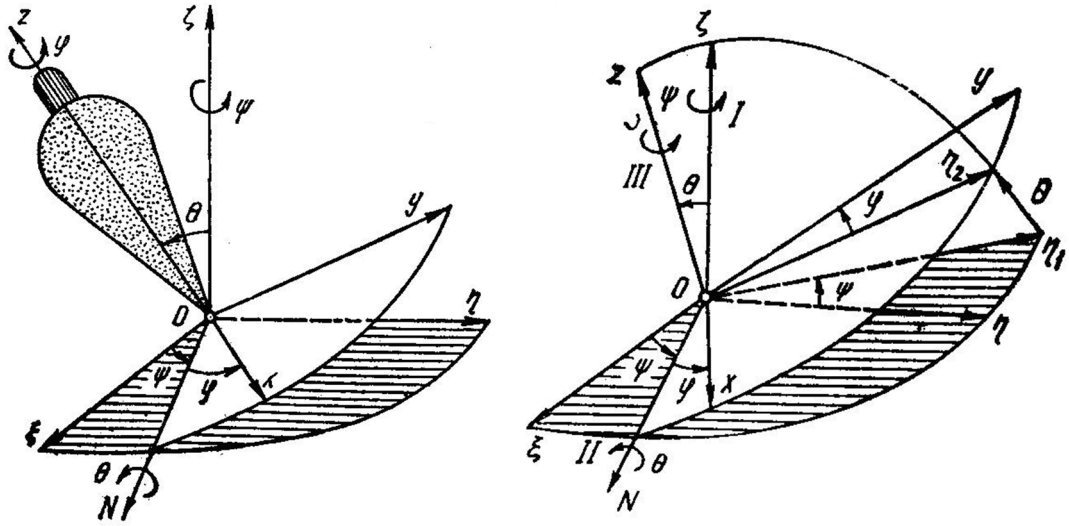
$O\xi\eta$ va *0xu* tekisliklar orasidagi burchak yoki $O\xi$ qo'zg'almas o'q bilan qo'zg'aluvchi o'q orasidagi burchak θ *nutasiya burchagi* deyiladi.

ψ,φ,θ burchaklar Eyler burchaklari deyiladi.

Eyler bulchaklarining musbat yo'nalishi uchun $O\zeta$, *Oz* va ON o'qlarning musbat yo'nalishidan qaraganda mos arvishda shu o'qlarga perpendikulyar tekisliklarda o'zgaruvchi burchaklarning soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishida orta boradigan yo'nalishlarini qabul qilamiz.

Eyler teoremasi. *Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi ixtiyoriy ko'chishini mazkur qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi uchta o'q atrofida ketma-ket uchta aylantirish bilan bajarish mumkin.*

Teoremaga ko'ra qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jismning istalgan paytdagi holatini bir-biriga bog'liq bulmagan uchta Eyler burchaklari vositasida aniqlash mumkin jismning harakati davomida bu burchaklar vaqtning uzluksiz funksiyasidan iborat bo'ladi:



13.1-shakl

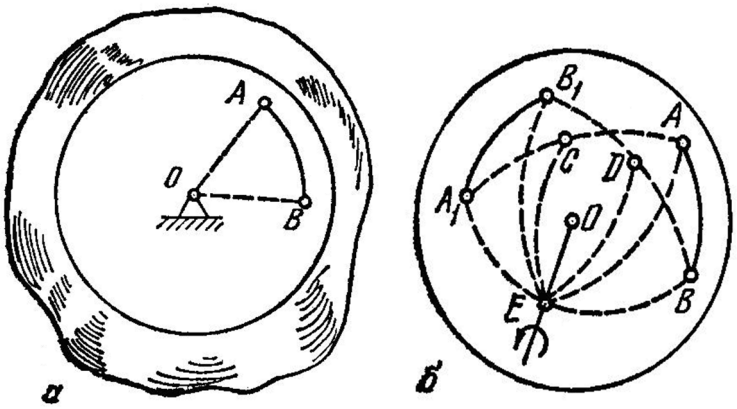
$$\psi = \psi(t), \qquad \theta = \theta(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$

Bu funksional munosabatlar qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jismning kinematik tenglamalari yoki sferik harakat tenglamalari deyiladi.

Eyler-Dalamber teoremasi. Oniy aylanish o'qi. Aksoidalar.

Teorema. *Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jismning bir holatdan ikkinchi holatga o'tuvchi o'q atrofida bir aylantirish bilan amalga oshirish mumkin.*

Sferik harakatdagi jismning holati uning qo'zg'almas O nuqtasi bilan bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan yana ikkita nuqtaning holati bilan aniqlanadi. O nuqtani markaz qilib jismni kesib o'tuvchi ixtiyoriy radiusli sfera o'tkazamiz. Bu sfera sirtida jismga taalluqli ikkita ixtiyoriy A va V nuqtalarni olamiz. U holda jismning holatini A va V nuqtalardan o'tuvchi sfera katta aylanasining yoyi AV bilan aniqlash mumkin.



13.2-shakl

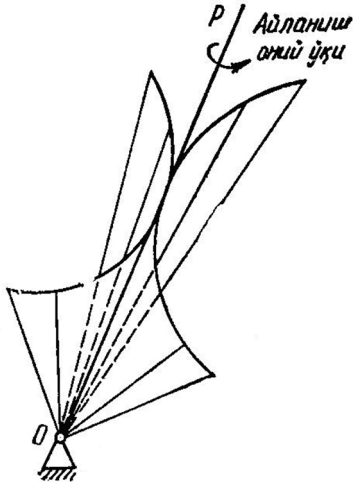
Aytaylik, jismning t vaqtdagi holati sfera katta aylanasining yoyi AV bilan aniqlansin, $t+\Delta t$ vaqtda yoyi A_1V_1 holatni egallasin. A va A_1 hamda V va V_1 nuqtalarni sfera katta aylanasining yoylari bilan tutashtiramiz. AA_1 va VV_1 yoylarning o'rtasidagi S va D nuqtalardan sferik perpendikulyar yoylar o'tkazib, ularning kesishgan nuqtasini Ye bilan belgilaylik. Ye

nuqta A va A_1 hamda V va V_1 nuqtalardan teng o'zoqlikda bo'lganligi tufayli $AYe=A_1Ye_1$, $VE=V_1Ye$. Jism absolyut qattiq bo'lganligidan $AV=A_1V_1$. Binobarin, AYeV va A_1YeV_1 sferik uchburchaklar o'zaro teng bo'ladi. Bu uchburchaklarni OE o'q atrofida $AYeA_1=VEV_1=\Delta\alpha$ burchakka bo'lsak, AYeV sferik uchburchak A_1YeV_1 sferik uchburchak ustiga tushadi, ya'ni AV sferik yoy A_1V_1 holatni egallaydi.

OYe o'q *chekli aylanish o'qi* deyiladi $\Delta\alpha$ burchak esa *chekli aylanish burchagi* deyiladi.

Oniy aylanish o'qi. Aksoidlar

Jism $\Delta t=t_2-t_1$ vaqt ichida I holatdan II holatga boshqa yo'l bilan o'tishii ham mumkin. Lyokin Δt vaqt oralig'i kichraya borgan sari jismning I va II holatlari bir-biriga tobora yaqinlasha boradi hamda chekli aylanish o'qi OE atrofidagi burchakka ko'chish jismning haqiqiy ko'chishiga yaqinlasha boradi. Δt nolga intilganda 0Ye o'qning limit holatini ifodalovchi OR o'q aylanish oniy o'qi deyiladi.



13.3-shakl

Bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning har qanday harakatini aylanish oniy o'qlari atrofidagi ketma-ket oniy aylanma harakatlar to'plamidan iborat deb qarash mumkin.

Jismning harakati tekshirilayotgan qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan aylanish oniy o'qlarining geometrik o'rni *qo'zg'almas aksoid* deyiladi.

Aylanish oniy o'qlarining jismga biriktirilgan va u bilan birgalikda harakatlanuvchi qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan geometrik o'rni konus sirtdan iborat bo'lib, *qo'zg'aluvchi aksoid* deyiladi.

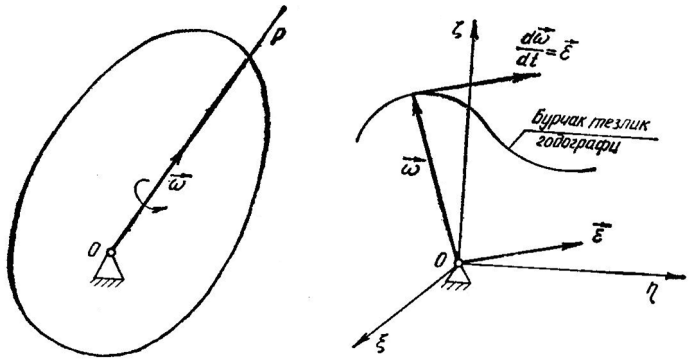
Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning harakatini qo'zg'aluvchi aksoidni qo'zg'almas aksoid ustida sig'antirmay dumalatish natijasida amalga mumkin. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat qiluvchi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi. Oniy burchak tezlikning miqdorini Δt vaqt ichida elementar aylanish burchagi $\Delta\alpha$ orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{\Delta t}.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda α burchakdan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng emas, chunki qattiq jism qo'zg'almas o'q atrofida harakatlanganda bunday burchakning o'zi mavjud bo'lmaydi.

Kelgusida qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning oniy burchak tezligini qo'zg'almas nuqtaga qo'yilgan va aylanish oniy o'qi bo'ylab yo'nalgan shunday $\boldsymbol{\omega}$ vektori tarzida ifodalaymizki, uning musbat yo'nalishidan qaraganda kuzatuvchi jismning aylanilishini soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda kurishi kerak.

Jism qo’zg’almas nuqta atrofida harakatlanganda aylanish oniy o’qining yo’nalishi o’zgara boradi, shu sababli oniy burchak tezligi ham miqdor va yo’nalish jihatdan o’zgara boradi.



13.4-shakl

Oniy burchak tezlik vektoridan vaqt bo’yicha olingan hosila bo’yicha olingan tezlanishi deyiladi, ya’ni

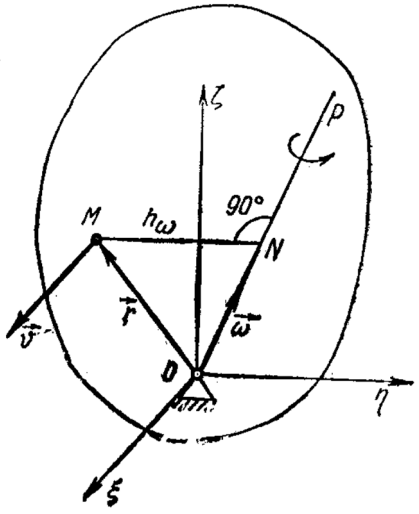
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Qo’zg’almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi.

Ma’lumki, qo’zg’almas nuqta atrofida aylanuvchi jismning har ondagi harakatini mazkur qo’zg’almas nuqtadan o’tuvchi aylanish oniy o’qi atrofidagi oniy aylanma harakatdan iborat deb qarash mumkin hamda aylanish oniu o’qida yotuvchi jism nuqtalarining berilgan ondagi tezliklari nolga teng bo’ladi. Agar aylanish oniy o’qi va jismning oniy burchak tezligi ma’lum bo’lsa, bitta qo’zg’almas nuqtaga ega bo’lgan jism ixtiyoriy *M* nuqtasining berilgan ondagi tezligini aniqlash uchun qo’zg’almas o’q atrofida aylanuvchi jism nuqtasi tezligi aniqlanadigan Eyler formulasidan foydalanish mumkin:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad (13.1)$$

bunda $\vec{r}$ bilan *M* nuqtaning qo’zg’almas nuqtaga nisbatan radius-vektori belgilangan.



13.5-shakl

$\vec{r}$ radius-vektor miqdor jihatdan qattiq jismning ikki nuqtasi orasidagi masofani ifodalagani tufayli shu jism harakati davomida uning faqat yo'nalishi o'zgaradi. Binobarin (13.1) formulani miqdor xihatdan o'zgarmasdan , yo'nalishi jismning qo'zg'almas nuqta atrofida **ω** burchak tezlik bilan aylanishi tufayli o'zgaradigan vektorning vaqt bo'yicha hosilasini hisoblash formulasi deb qarash mumkin.

(13.1) ga binoan *M* nuqta tezligining miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$\upsilon = \omega \cdot r \sin\left(\vec{\omega}, \hat{\ } \vec{r}\right) = \omega \cdot h_{\omega}, \tag{13.2}$$

bunda $h_{\omega} = r\sin\left(\vec{\omega}, \hat{\ } \vec{r}\right)$ bo'lib, *M* nuqtadan aylanish oniy o'qi *OP* gacha bo'lgan *MN* masofani ifodalaydi.

Shunday qilib, qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi miqdor xihatdan shu nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional bo'ladi, yo'nalishi esa $\vec{\omega}$ va $\vec{r}$ vektorlariga (binobarin *MN* ga) perpendikulyar tarzda oniy o'q atrofidagt aylanishga mos ravishda yo'naladi.

Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezlanishi.

Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism *M* nuqtasining tezlanishini aniqlash uchun (13.1) ifodadan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{13.3}$$

Bunda

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

bo'lgani uchun (13.3) ni

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{13.4}$$

yoki

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \tag{13.5}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(13.5) da tezlanishning

$$\vec{w}^{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{13.6}$$

tashkil etuvchisi *aylanma tezlanish,*

$$\vec{w}^{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{13.7}$$

tashkil etuvchisi esa *o'qqa intilma tezlanish deyiladi.*

Shunday qilib

$$\vec{w} = \vec{w}^{\varepsilon} + \vec{w}^{\omega}. \tag{13.8}$$

(13.8) ifoda *Rivals teoremasini* ifodalaydi: *qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi aylanma va o'qqa intilma tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng.*

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Sferik harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Koordinatalar sistemasida Eyler burchaklarini ko'rsating.
3. Sferik harakat tenglamalari ifodalarini keltiring.
4. Qanday o'qqa oniy aylanish o'qi deyiladi?
5. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakatdagi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi
6. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi qanday aniqlanadi?

14-MAVZU: Dinamikaga kirish. Dinamikaning asosiy qonunlari.

Reja

1. Dinamika predmeti.
2. Dinamikaning asosiy qonunlari.
3. Erkin moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari.

Tushuncha va tayanch iboralar

Dinamika, inersion massa, inersiya qonuni, inersial harakat, inersial sistema, dinamikaning asosiy qonuni, nuqtaning harakat miqdori, ta'sir va aks ta'sir qonuni, kuchlar ta'sirining o'zaro mustakillik qonuni.

Mavzuni bayoni

Dinamika yunoncha "dinamics" - kuch so'zidan olingan. Dinamikada moddiy nuqta, moddiy nuqtalar sistemasi va absolyut qattiq jismning harakati shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlar bilan birgalikda o'rganiladi.

Umumiy holatda kuch vaqtga, kuch qo'yilgan nuqtaning koordinatasiga va tezligiga bog'liq bo'lishi mumkin;

$$\vec{F} = \vec{F}\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \quad \text{yoki} \quad \vec{F} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right).$$

Har qanday jism harakati o'nga ta'sir etuvchi kuchlardan tashqari, jismning *inertligi* yoki inersiyasiga bog'liq bo'ladi.

Kuch ta'sir etmaganda jism o'z holatini yoki harakatini saqlashi kuch ta'sir etganda esa o'z harakatini birdaniga emas, balki jism tashkil topgan moddaning miqdoriga bog'liq ravishda asta-sekin o'zgarishi jismning inertligi xususiyatiga kiradi.

Qattiq jism tashkil topgan moddaning miqdori bilan xarakterlanuvchi va jismning inertlik o'chovini ifodalovchi kattalik *inersion massa* deyiladi.

Yer sirtiga yaqin masofadagi jism og'irligining P, uning erkin tushish tezlanishiga nisbati o'zgarmas bo'lib kuzatish joyiga bog'liq bo'lmaydi.

$$\frac{P}{g} = m = const \tag{14.1}$$

Jismning fizik xususiyatiga bog'liq bo'lgan va (14.1) formula yordamida aniqlanadigan m kattalikka *gravitasion massa* deyiladi.

Odatdagi sharoitda (kichik tezliklarda) gravitasion massa va inersion massa o'zaro tengligi isbotlangan.

Shunday qilib, massa jism tashkil topgan moddaning miqdoriy o'zlovchi bo'lishi bilan birga inersiya o'lchovini ham ifodalaydi.

A. Eynshteynning nisbiylik nazariyasida jismning massasi m uning tezligiga bog'liq ravishda ushbu formula yordamida aniqlanishi isbotlanadi

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

bu yerda m_0 - jismning tinch holatdagi massasi

v - jismining tezligi va

c - yorug'lik tezligi.

Klassik mexanikada jismlarning tezligi yorug'lik tezligidan ancha kichik deb qaraladi. Shu sababli $v^2/c^2 \Rightarrow 0$ va $m = m_0$ deb qaraladi.

SI birliklar sistemasida massa kilogramm (kg) bilan o'lchanadi.

Jismning harakati unga ta'sir etuvchi kuchlardan tashqari jismning shakliga, ya'ni jism massasining qanday taqsimlanganliliga ham bog'liq bo'ladi.

Dinamikada dastlab moddiy nuqtaning harakati o'rganiladi. So'ngra olingan natijalar moddiy nuqtalar sistemasi va qattiq jismga tatbiq qilinadi.

Dinamikaning asosiy qonunlari

1-qonun (inersiya qonuni). *Tashqi ta'sirdan tanholangan moddiy nuqta kuch ta'sir etmaguncha o'zining tinch holatini yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatini saqlaydi.*

Inersiya qonuniga asosli moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tekis harakati *inersial harakat* yoki inersiya bo'yicha harakat deyiladi.

Inersial harakatdagi moddiy nuqtaning tezlanishi nolga teng bo'ladi ($\boldsymbol{w}=0$). Moddiy nuqtaning tezligini o'zgartirish uchun biror tashqi ta'sir – kuch bo'lishi kerak.

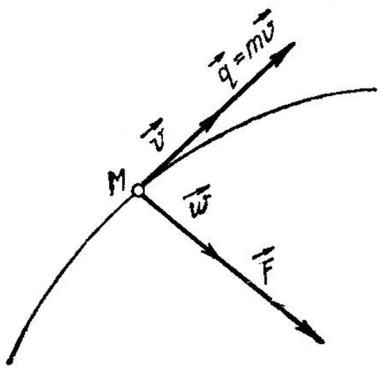
Dinamikada ham kinematikadagi kabi nuqtaning mexanik harakatini boshqa biror jism bilan bog'langan va sanoq sistemasi deb atalgan koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rganiladi. Agar tanlangan sanoq sistemasi uchun inersiya qonuni o'rinli bo'lsa, bunday koordinatalar sistemasi inersial sistema deyiladi. Inersial sanoq sistemasiga nisbatan tekshirilayotgan harakat absolyut harakat deb qaraladi.

Texnikada uchraydigan ko'pgina masalalarni yechishda Yer bilan bog'langan koordinatalar sistemasi olinadi.

2-qonun (dinamikaning asosiy qonuni). *Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi harakatlantiruvchi kuchga proporsional va kuchning ta'sir chizig'i bo'yicha sodir bo'ladi.*

Moddiy nuqtaning massasini uning berilgan ondagi tezlik vektoriga ko'paytmasiga teng $\boldsymbol{q}$ vektor *nuqtaning harakat miqdori* deyiladi.

$$\vec{q} = m\vec{v}$$



14.1-shakl

Nyuton ikkinchi qonunining vektorli ifodasi quyidagiga yoziladi:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \qquad (14.2)$$

Agar vaqt o'tishiibilan nuqtaning massasi o'zgarmasdan qolsa, u holda (14.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

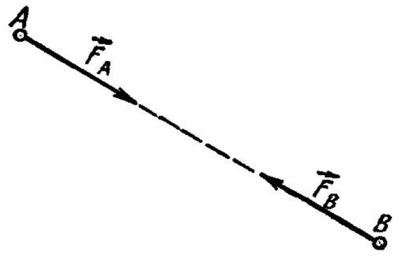
$$m\vec{v} = \vec{F}, \qquad (14.3)$$

bunda $\vec{w} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Nyutonning 2-qonunini ifodalovchi (14.3) tenglama nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi deyiladi.

3-qonun (ta'sir va aks ta'sir qonuni). *Har qanday ta'sirga unga miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'lgan aks ta'sir mos keladi, ya'ni ikkita moddiy nuqtaning o'zaro ta'siri miqdor jihatdan teng va shu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'naladi.*

Masalan A nuqta V nuqtaga $\boldsymbol{F_v}$ kuch bilan ta'sir etsin va V nuqta A nuqtaga $\boldsymbol{F_A}$ kuch bilan ta'sir etsin.



14.2-shakl

3-qonunga ko'ra

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A \qquad ёки \qquad \vec{F}_B = \vec{F}_A \qquad (14.4)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bunday ikkita kuchlar o'zaro muvozanatda bo'lmaydi, chunki ular moddiy nuqtalar deb tasavvur qilinadigan boshqa-boshqa jismlarga qo'yilgan.

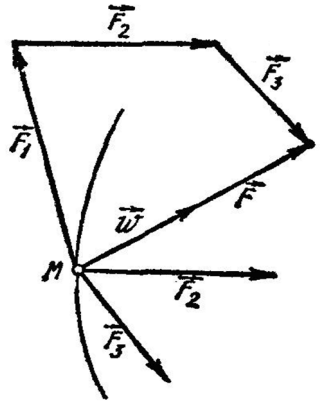
4-qonun (kuchlar ta'sirining o'zaro mustaqillik qonuni). *Agar moddiy nuqtaga bir nechta kuch ta'sir etsa, nuqtaning tezlanishi har bir kuchning alohida ta'siridan nuqta oladigan tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.*

Masalan M moddiy nuqta (F_1, F_2, ..., F_n) kuchlar ta'sirida bo'lsin.

U holda 4-qonunga asosan

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + ... + \vec{w}_n. \qquad (14.5)$$

Natija. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi shu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisiga dinamik ekvivalent bo'ladi.



14.3-shakl

M moddiy nuqtaga uchta F_1, F_2, F_3 kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsin (14.5) ni m ga ko'paytirsak,

$$m\vec{w} = m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2 + m\vec{w}_3 \qquad (14.6)$$

tenglik hosil bo'ladi.

2-qonunga ko'ra $m\vec{w}_1 = \vec{F}_1$, $m\vec{w}_2 = \vec{F}_2$, $m\vec{w}_3 = \vec{F}_3$

Shu sababli (14.6) ni quyidagicha yozish mumkin:

yoki $m\vec{w} = \sum \vec{F}_v \qquad (14.7)$

Bu vektorli tenglama kuchlar sistemasi ta'siridagi nuqta uchun *dinamikaning asosiy tenglamasini* ifodalaydi.

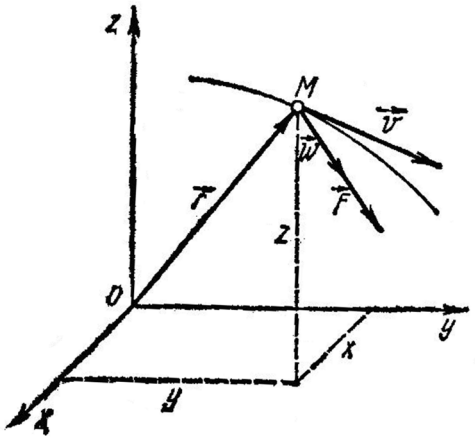
Erkin moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari .

Massasi m ga teng bo'lgan M erkin moddiy nuqta F_1, F_2, ... F_n kuchlar ta'sirida *0xuz* inersial to'g'ri burchakli Dekart koordinata o'qlari sistemasiga nisbatan harakatlansin. Yuqorida ko'rganimizdek bu nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasi:

$$m\vec{w} = \sum \vec{F}_v \quad \text{yoki} \quad m\vec{w} = \vec{F}$$

ko'rinishda yoziladi.

Bunda $\boldsymbol{F}$ - nuqtaga qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, $\boldsymbol{w}$ - nuqtaning $\boldsymbol{F}$ kuch ta'sir chizig'i bo'ylab yo'nalgan tezlanishi (rasmga qar.).



14.4-shakl

Erkin moddiy nuqta harakatining vektor formadagi differensial tenglamasi

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ bo'lgani uchun,

bunda $\boldsymbol{v}$ - nuqtaning tezlik vektori,

$\vec{r}$ - nuqtaning radius – vektori.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F} \tag{14.8}$$

yoki $$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}. \tag{14.9}$$

(14.8) yoki (14.9) tenglamalar erkin moddiy nuqta harakatining *vektor formadagi differensial tenglamasi* deyiladi.

Erkin moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari.

(14.9) ni *0xuz* inersial koordinata sistemasi o'qlariga proyeksiyalab, ushbu tenglamalarni olamiz:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=\vec{F}_y,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=\vec{F}_z$$
$$ёки\qquad m\ddot{x}=F_x,\qquad m\ddot{y}=\vec{F}_y,\qquad m\ddot{z}=\vec{F}_z \tag{14.10}$$

Bunda *x, u, z* harakatlanayotgan M nuqtaning koordinatalari

$\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z}$ - nuqta tezlanishi $\boldsymbol{w}$ ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari; $F_x,\ F_u,\ ...,\ F_z$ teng ta'sir etuvchi kuch $\boldsymbol{F}$ ning proyeksiyalari.

Agar $\boldsymbol{F_\nu}$ (ν=1,2,…,n) kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari $X_\nu Y_\nu Z_\nu$ bilan belgilasak, teng ta'sir etuvchining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari uchun

$$F_x=\sum X_\nu,\qquad \vec{F}_y=\sum Y_\nu,\qquad \vec{F}_z=\sum Z_\nu$$

munosabatlar urinlar bo'ladi. Shu sababli (14.10) ni

$$m\ddot{x}=\sum X_\nu,\qquad m\ddot{y}=\sum Y_\nu,\qquad m\ddot{z}=\sum Z_\nu \tag{14.11}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(14.10) yoki (14.11) tenglamalar erkin moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o'qidagi differensial tenlamalarini ifodalaydi.

Agar moddiy nuqta *0xu* tekisligida harakatlansa (14.10) ning birinchi ikkitasi o'rinli bo'ladi:

$$m\ddot{x}=F_x,\qquad m\ddot{y}=\vec{F}_y \tag{14.12}$$

Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa

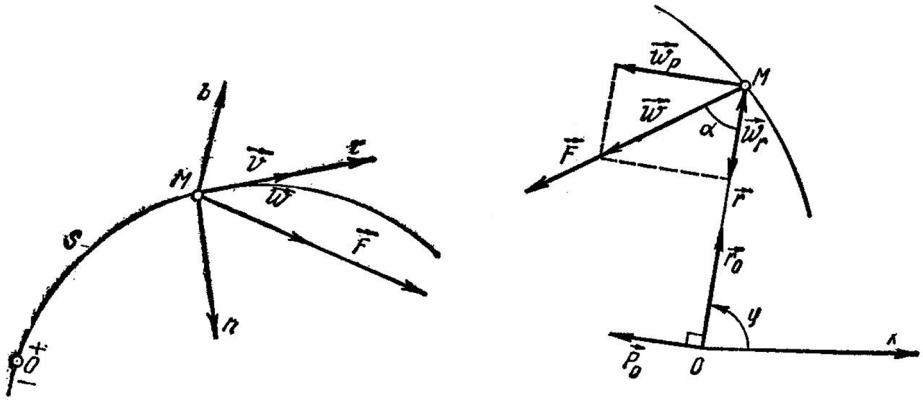
$$m\ddot{x}=F_x \tag{14.13}$$

Bu tanglama nuqta to'g'ri chiziqli harakatining differensial tenglamasi deyiladi.

Erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o'qlaridagi differensial tenlamalari.

Tabiiy koordinata o'qlari: M_τ - urinma; M_n - bosh nomal; M_ν - binormal.

Kinematikadan $w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0$



14.5-shakl

bunda v_τ - tezlik vektorining urinmadagi proyeksiyasi,

s - nuqtaning yoy koordinatasi

ρ - trayektoriyaning M nuqtadagi egrilik radiusi

Teng ta'sir etuvchining urinma, bosh normal va binormaldagi proyeksiyalarini mos ravishda F_τ, F_n, F_b bilan belgilanadi.

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n \quad 0 = F_b \tag{14.14}$$

(14.14) tenglamalarga erkin moddiy nuqta harakatining *tabiiy koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari* deyiladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Nazariy mexanikaning dinamika bo'limi nimani o'rganadi?
2. Klassik mexanika asosiy qonunlarining mohiyati haqida so'zlab bering.
3. Erkin moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari.
4. Erkin moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari necha xil ko'rinishda bo'ladi?

15-MAVZU: Moddiy nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasi.

Reja

1.Dinamikaning birinchi asosiy masalasi.

2.Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi.

3.Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida, dinamikaning asosiy masalasini yechish.

Tushuncha va tayanch iboralar

Nuqta dinamikasi, radius vector, to'g'ri masala, teskari masala, Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasi, Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi.

Mavzuni bayoni

Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasi, nuqtaning massasi va kinematik harakat tenglamalari berilganda shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlashdan iborat. Bu masalaga nuqta dinamikasining to'g'ri masalasi deyiladi.

Masalani yechish nuqtaning kinematik harakat tenlamalaridan tezlanishni aniqlashga keltiriladi.

1. Agar massasi *m* ga teng moddiy nuqtaning harakati ***r=r(t)*** vektor usulda berilsa, nuqtaning radius-vektoridan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olib, nuqtaning tezlanishni, so'ngra teng ta'sir etuvchi kuchni topamiz:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{15.1}$$

2. Agar massasi *m* ga teng moddiy nuqta kinematik harakat tenglamalarining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodalari *x=x(t), y=y(t), z=z(t)* ma'lum bo'lsa, ulardan ikki marta vaqt bo'yicha hosila olib, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini, so'ngra teng ta'sir etuvchi kuchning proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$F_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = m\ddot{y}, \qquad F_z = m\ddot{z} \tag{15.2}$$

Natijada teng ta'sir etuvchi kuch moduli

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{15.3}$$

3. Agar massasi *m* ga teng moddiy nuqtaning harakati tabiiy usulda berilsa, u holda teng ta'sir etuvchi kuchning tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

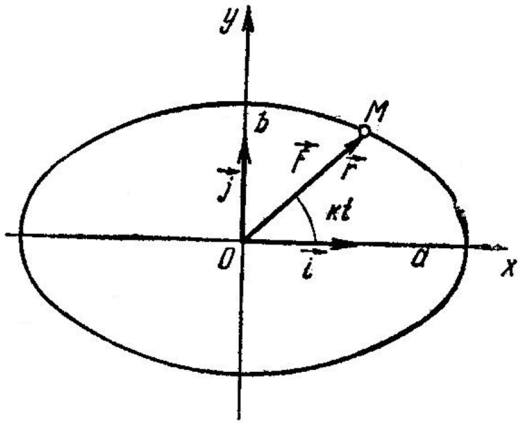
Teng ta'sir etuvchi kuch moduli

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_m^2} \tag{15.4}$$

1- masala. Massasi *m* ga teng bo'lgan moddiy nuqtaning harakati

$$\vec{r} = a\vec{i}\cos kt + b\vec{j}\sin kt \tag{15.5}$$

vektorli tenglama bilan berilgan. Bunda α *b k* o'zgarmas miqdorlar. ***i,j*** lar esa *x* va *u* o'qlarining birlik vektorlarini ifodalaydi. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuch aniqlancin.



15.1-shakl

Yechish. Koordinata o'qlarini rasmda ko'rsatilgandek olamiz. (15.5) ga ko'ra *M* nuqtaning koordinatalari *x=a·coskt*, *y=v·sinkt* tenglamalar bilan ifodalangani uchun mazkur nuqta yarim o'qlari *a* va *v* ga teng ellips bo'ylab xarakterlanadi.

(15.5)dan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -ak\vec{i}\sin kt + bk\vec{j}\cos kt$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k^2\left(a\vec{i}\cos kt + b\vec{j}\sin kt\right) \qquad (15.6)$$

(15.5) ga asosan nuqtaga ta'sir etuvchi kuch

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mk^2\left(a\vec{i}\cos kt + b\vec{j}\sin kt\right)$$

yoki (15.5) ni e'tiborga olsak

$$\vec{F} = -mk^2\vec{r}$$

ifoda topiladi.

Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi nuqtaning massasi va unga ta'sir etuvchi kuchlar berilganda nuqtaning kinematik tenglamalarini aniqlashdan iborat. Bu masala nuqta dinamikasining *teskari masalasi* deyiladi.

Ikkinchi asosiy masalani yechishda nuqta harakatining ikkinchi tartibli differensial tenlamalarini integrallash kerak. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar umumiy holda vaqt, nuqtaning holati va tezligiga bog'liq bo'lgani uchun bu differensial tenlamalarni umumiy holda integrallash mumkin emas. Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi ayrim xususiy hollardagina aniq yechimga ega.

Agarda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning (yoki unga ta'sir kuchlarning teng ta'sir etuvchisini) yo'nalishi o'zgarmas bo'lsa va boshlang'ich tezlik nol bo'lsa yoki uning yo'nalishi kuchga parallel bo'lsa, uning harakati to'g'ri chiziqli bo'ladi.

Agarda to'g'ri chiziqli harakatdagi nuqtaning yo'nalishi bo'yicha *Ox* koordinata o'qini yo'naltirsak, u holda moddiy nuqtaning harakati quyidagi formula orqali aniqlanadi, ya'ni

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx} \quad \text{yoki} \quad m\ddot{x} = \sum F_{kx} \qquad (15.7)$$

(15.7) tenglama, *to'g'ri chiziqli harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Ba'zi hollarda buni birinchi tartibli hosilalardan iborat bo'lgan ikkita tenglama bilan almashtirish mumkin bo'ladi,

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}\,, \qquad \frac{dx}{dt} = v_x \qquad (15.8)$$

Agarda masalaning shartiga ko'ra, tezlikni vaqtga bog'liq emas, balki uning x koordinatasiga (yoki kuchning o'zi x- ga bog'liq holda bo'lsa) bog'liq holda aniqlash zarur bo'lsa, (15.8) tenglamani o'zgaruvchi argumenti x -ga bog'liq bo'ladi,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\cdot v_x$$

u holda (15.8) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$mv_x \cdot \frac{dv_x}{dx} = \sum F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x \qquad (15.9)$$

Dinamikaning asosiy masalasini yechish shundan iborat bo‘ladiki, kuchlar ma’lum bo‘lsa, nuqtaning harakat qonunini, ya’ni $x=f(t)$ ni aniqlanadi. Buning uchun tegishli differentsial tenglamani integrallash lozim bo‘ladi. Tenglamaning o‘ng tarafidagi kuchlar vaqt, t -ga, nuqtaning holatiga yoki uning tezligiga, ya’ni x -ga va $v_x=\dot{x}$ -ga bog‘liq holda o‘zgarishi mumkin. Shu sababli umumiy holda tenglama matematik nuqtai nazardan qaralganda $m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$ ko‘rinishdagi 2 tartibli differentsial tenglamadan iborat bo‘ladi.

Agar aniq bir masala uchun tuzilgan differentsial tenglamani integrallash mumkin bo‘lsa, u holda yechimda ikkita (o‘zgarmas qiymatlar) C_1 va C_2 lardan iborat integral doimiylari paydo bo‘ladi va tenglamaning *umumiy yechimi* quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi,

$$x=f(t, C_1, C_2)$$

Har-bir muqim masalaning yechimini oxiriga etkazish uchun, C_1 va C_2 integral doimiylarini aniqlash lozim bo‘ladi. Buning uchun *boshlang‘ich shartlar*dan foydalaniladi.

Har qanday harakatni o‘rganishni *boshlang‘ich moment* deb ataladigan qandaydir ma’lum vaqtdan boshlanadi. Harakat davomidagi o‘tgan vaqtni shu t=0s momentdan boshlab o‘lchanadi. Amalda berilgan kuchlar ta’sirida boshlangan vaqtni, boshlang‘ich daqiqa, deb qabul qilinadi. Boshlang‘ich daqiqadagi nuqtaning dekart (yoki tabiiy) koordinatalaridagi o‘rnini *boshlang‘ich holat* deb ataladi, nuqtaning shu daqiqadagi tezligini, *boshlang‘ich tezlik* deb ataladi. (t=0s vaqtda boshlang‘ich tezlik nolga teng bo‘lmasligi mumkin, chunki nuqta inertsiyasi bilan harakatlanayotgan bo‘lishi yoki boshqa kuchlar ta’sirida olgan tezligi bilan harakatlanayotgan bo‘lishi mumkin). Demak, dinamikaning asosiy masalasini yechish uchun, berilgan kuchlardan tashqari, t=0 vaqtdagi nuqtaning boshlang‘ich holati va boshlang‘ich tezligi[3] aniq bo‘lishi shart ekan.

To‘g‘ri chiziqli harakatdagi boshlang‘ich shartlar quyidagi ko‘rinishda beriladi :

$$t=0 \text{ vaqtda } x=x_0, \quad v_x=v_0.$$

Boshlang‘ich shartlarga asoslanib C_1 va C_2 integral doimiylarining muqim qiymatlari aniqlanadi va ular yordamida nuqtaning harakat qonuni hisoblangan tenglamaning quyidagi ko‘rinishdagi xususiy yechimi aniqlanadi,

$$x=f(t, x_0, v_0)$$

Yuqorida aytilgan barcha fikrlarni quyidagi sodda bir misolda ko‘rib chiqamiz.

Nazorat savol va topshiriqlar

[3] Ba’zi masalalarda, integral doimiylarini boshlang‘ich shartlarni o‘rniga *chegaraviy shartlar* deb ataluvchi qiymatlar orqali ham aniqlanish mumkin bo‘ladi. Masalan vaqtning «chegaraviy» $[t_1,t_2]$ intervaldagi $t=t_0$ da $x=x_0$, hamda $t=t_1$ da $x=x_1$ kabi bo‘lishi mumkin. Bunday «chegaraviy masalalar» deb ataluvchi masalalarning tegishli xossalari 94§ da ko‘rib o‘tiladi.

1. Moddiy nuqta dinamikaning birinchi asosiy masalasining mazmuni nimadan iborat?
2. Moddiy nuqta dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi qanday yechiladi?
3. Dinamikaning ikkita asosiy masalasi nimadan iborat?
4. Dinamika masalalari statika masalalaridan nimasi bilan farq qiladi?

16-MAVZU: Moddiy nuqtaning nisbiy harakat dinamikasi.

Reja

1. *Moddiy nuqtaning nisbiy harakati differensial tenglamalari.*
2. *Yerning aylanishini jismlarning muvozanat holatiga va ularning harakatiga ta'siri.*
3. *Yerning sathiga yaqin joylardagi nisbiy muvozanat va nisbiy harakat.*

Tushuncha va tayanch iboralar

Og'irlik kuchi, inertsial tizim, ko'chirma harakat,ilgarilanma harakat,nisbiy harakat, koriolis inersiya kuchi, nisbiy muvozanat, qo'zg'aluvchi o'q.

Mavzuni bayoni.

Dinamikaning ikkinchi qonuni va yuqorida keltirib chiqarilgan tenglamalar va teoremalar nuqtanng faqat absolyut harakati uchungina, ya'ni inertsial («qo'zg'almas») o'qlarga nisbatangina o'rinlidir,

Endi nuqtaning nisbiy harakatini o'rganamiz, ya'ni uning inertsial sistemalarga nisbatan ixtiyoriy holda harakatlanuvchi noinertsial hisob sistemalarga nisbatan o'rganamiz.

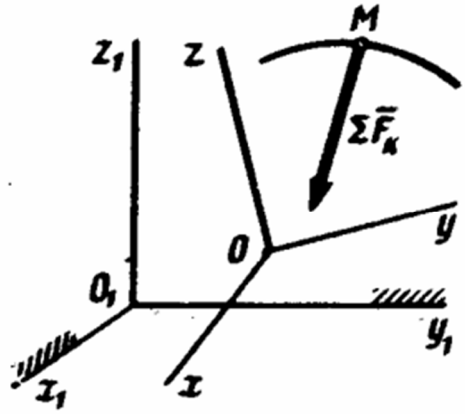
Moddiy M nuqta unga boshqa moddiy jismlarning ta'sirlaridan iborat bo'lgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ kuchlar ta'sirida harakat qilayotgan bo'lsin. Nuqtaning bunday harakatini $Ox_1y_1z_1$ inertsial o'qlar («qo'zg'almas o'qlar»)ga nisbatan ixtiyoriy harakatda bo'lgan Oxyz qo'zg'aluvchi o'qlarga nisbatan o'rganib chiqamiz.

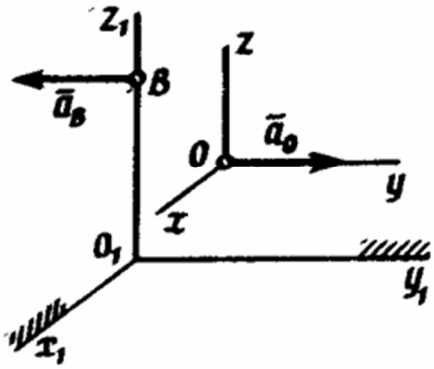
Nuqtaga ta'sir etayotgan kuchlar bilan nuqtaning nisbiy tezlanishi- $\overline{a}_{nis}$ orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Absolyut harakatdagi nuqta uchun dinamikaning asosiy qonuni,

$$m\overline{a}_{\text{abs}} = \sum \overline{F}_k \qquad (16.1)$$

Kinematikadan ma'lumki $\overline{a}_{\text{abs}} = \overline{a}_{nis} + \overline{a}_{ko'ch} + \overline{a}_{kor}$; bu yerdagi $\overline{a}_{nis}$, $\overline{a}_{ko'ch}$, $\overline{a}_{kor}$ - nuqtaning nisbiy, ko'chirma va Koriolis tezlanishlari. Absolyut tezlanishning ushbu qiymatini (16.1) tenglamaga qo'yamiz va keyinchalik foydalanish uchun $\overline{a}_{nis} = \overline{a}$ deb belgilaymiz, CHunki bu qiymat biz o'rganayotgan nisbiy harakatning tezlanishidan iborat, natijada

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + (-m\bar{a}_{ko'ch}) + (-m\bar{a}_{kor})$$





Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\bar{F}^{in}_{ko'ch} = -m\bar{a}_{ko'ch} \qquad \bar{F}^{in}_{kor} = -m\bar{a}_{kor}$$

$\bar{F}^{in}_{ko'ch}$ va $\bar{F}^{in}_{kor}$ qiymatlar kuchning o‘lchov birligi bilan o‘lchanadi. Ularni tegishlicha *ko‘chirma* va *koriolis inertsiya kuchlari* deb ataymiz. U holda yuqoridagi tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}^{in}_{ko'ch} + \bar{F}^{in}_{kor} \qquad (16.2)$$

(16.2) tenglama nuqtaning nisbiy harakati uchun dinamikaning asosiy qonuni hisoblanadi. (16.1) va (16.2) tenglamalarni solishtirib quyidagi xulosaga kelamiz: *nuqtaning nisbiy harakatida mexanikaning barcha tenglamalari va teoremalari, xuddi nuqtaning absolyut harakatidagi kabi tuziladi, lekin nuqtaga boshqa jismlarning ta’sirlaridan iborat bo‘lgan kuchlar qatoriga ko‘chirma va koriolis inertsiya kuchlarini ham qo‘shish lozim.* $\bar{F}^{in}_{ko'ch}$ va $\bar{F}^{in}_{kor}$ - kuchlarning qo‘shilishi qo‘zg‘aluvchi o‘qlarning harakatini nuqtaning nisbiy harakatiga bo‘lgan ta’sirini belgilaydi.

Bunday ta’sirning xarakterini tushunish uchun, misol tariqasida B nuqtaning inertsial hisob sistemasidagi qo‘zg‘almas $Ox_1y_1z_1$ o‘qlarga nisbatan shu $Ox_1y_1z_1$ o‘qlarga nisbatan $\bar{a}_0$ - tezlanish bilan ilgarilanma harakatda bo‘lgan Oxyz o‘qlarga nisbatan harakatini o‘rganib chiqamiz. Bu holda B nuqtaning Oxyz o‘qlarga nisbatan tezlanishi $\bar{a}_B = -\bar{a}_0$ bo‘ladi va bunday tezlanishning paydo bo‘lishiga *kinematik* sabab, ya’ni qo‘zg‘aluvchan hisob sistemasining harakati sababchi bo‘ldi.

Shunday qilib, (16.1) formuladan ko‘rinib turganidek, *noinertsial hisob sistemasidagi moddiy nuqta, nafaqat unga ta’sir etuvchi* $\bar{F}_k$ *-kuchlar ta’siridangina tezlanish olib qolmasdan, balki*

tezlanishga ega bo‘lgan qo‘zg‘aluvchi hisob sistemasining harakati oqibatida ham tezlanish olar ekan.

Umumiy holda, agar (16.1) tenglik orqali $\bar{a}_{abs}=\sum \bar{F}_k$ /m aniqlab va $\bar{a}_{abs}=\bar{a}_{nis}+\bar{a}_{ko'ch}+\bar{a}_{kor}$ ekanligini e’tiborga olib, hamda $\bar{a}_{nis}=\bar{a}$ belgilashdan foydalansak, nisbiy harakatning tezlanishi uchun quyidagi formulani keltirib chiqaramiz,

$$\bar{a}=\frac{1}{m}\sum \bar{F}_k+(-\bar{a}_{ko'ch})+(-\bar{a}_{kor}). \qquad (16.3)$$

Bu tenglama, nuqtaning nisbiy harakat qonunining boshqacha ifodasi bo‘lib, masalalar yechishda, undan bevosita foydalanish mumkin. Bu tenglamaning o‘ng tomonidagi birinchi yig‘indi, nuqtaga bevosita ta’sir etuvchi $\bar{F}_k$-kuchlarning ta’siridan oladigan tezlanish bo‘lsa, qolgan ikkita yig‘indi qo‘zg‘aluvchi hisob sistemasining harakatidan oladigan tezlanishlardan iborat.

(16.3) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, nuqtaga ta’sir etuvchi $\bar{F}_k$-kuchlar sistemasi ta’sirida oladigan tezlanish $\sum \bar{F}_k$ /m -dan iborat bo‘lib, u *ixtiyoriy hisob sistemasi*da ham bir xil bo‘ladi, lekin inertsial hisob sistemasida bu tezlanish nuqtaning to‘liq tezlanishidan iborat bo‘lsa, noinertsial hisob sistemasida esa bu nuqta tezlanishining bir qismini tashkil etadi xolos.

Ba’zi bir xususiy hollarni ko‘rib o‘tamiz.

1) Agar qo‘zg‘aluvchi o‘qlar ilgarilanma harakatda bo‘lsa, u holda $\bar{F}^{in}_{kor}=0$ bo‘ladi, chunki ilgarilanma harakatda $\bar{\omega}=0$ ($\bar{\omega}$ -qo‘zg‘aluvchan hisob sistemasining burchakli tezligi) va nisbiy harakat qonuni, quyidagicha bo‘ladi,

$$m\bar{a}=\sum \bar{F}_k+\bar{F}^{in}_{ko'ch}$$

2) Agar qo‘zg‘aluvchi o‘qlarning harakati ilgarilanma bo‘lib, to‘g‘ri chiziqli tekis harakatdan iborat bo‘lsa, u holda $\bar{F}^{in}_{ko'ch}=\bar{F}^{in}_{kor}=0$ bo‘ladi va nisbiy harakatning qonuni, xuddi qo‘zg‘almas o‘qlarga nisbatan harakat qonuniga o‘xshash bo‘lar ekan. Shu sababli, bunday hisob sistemasi ham *inertsial* hisob sistemasi deb ataladi.

Yuqoridagi natijalarga asoslanib, shuni ta’kidlash mumkinki inertsial hisob sistemasini qo‘zg‘almas ekanligini yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakat qilayotgan ekanligini hechqanday mexanik tajribalar orqali aniqlab bo‘lmaydi. G. Galiley tomonidan ochilgan *klassik mexanikaning nisbiylik printsipi* mana shunga asoslanadi.

3) Agar nuqta qo‘zg‘aluvchi o‘qlarga nisbatan muvozanatda bo‘lsa (nisbiy harakatda bo‘lmasa), u holda nuqtaning $\overline{a}$ =0 va $\overline{v}_{nis} = \overline{v}$ =0 bo‘ladi, demak $\overline{F}^{in}_{kor}$=0, chunki koriolis tezlanishi $\overline{a}_{kor}$ =2($\overline{\omega} \times \overline{v}_{nis}$). U holda tenglik, quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}^{in}_{ko'ch} = 0 \qquad (16.4)$$

(16.4) tenglama *nuqtaning nisbiy muvozanat* tenglamasidan iborat. Bundan, *nisbiy muvozanatlik tenglamasi ham, xuddi qo‘zg‘almas o‘qlardagi muvozanat tenglamalari kabi tuzilar ekan, lekin boshqa jismlarning ta’sir kuchlari qatoriga ko‘chirma inertsiya kuchlarini ham qo‘shish lozim ekan* -ligi kelib chiqadi.

4. Agar $\overline{F}^{in}_{kor} \neq 0$ bo‘lsa, nuqtaning nisbiy harakatining tenglamasi tuzilganda,

$$\overline{F}^{in}_{kor} = -m\overline{a}_{kor} = -2m(\overline{\omega} \times \overline{v}_{nis})$$

ekanligini hisobga olish kerak. Shu sababli, $\overline{F}^{in}_{kor}$ kuchi $\overline{v}_{nis} = \overline{v}$ -nisbiy tezlik vektoriga perpendikulyar bo‘ladi, demak u nisbiy harakatning trayektoriyasiga ham urinma bo‘lar ekan. Shuning uchun:

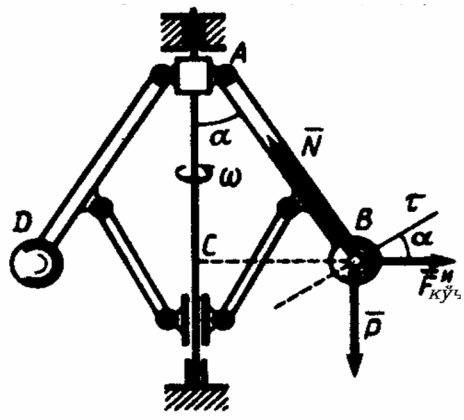
a) koriolis inertsiya kuchining nisbiy harakat trayektoriyasining urinmasi M_τ - ga bo‘lgan proyektsiyasi nolga teng bo‘lar ekan ($\overline{F}^{in}_{kor\tau}$ =0) va tenglamalar sistemasining nisbiy harakatdagi birinchi tenglamasi quyidagicha bo‘ladi,

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau} + F^{in}_{kor\tau} \qquad (16.5)$$

b) nuqtaning ixtiyoriy nisbiy harakatida koriolis inertsiya kuchining bajargan ishi nolga teng bo‘ladi va *nisbiy harakatdagi kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi* quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (v_1 va v_0-lar nisbiy tezliklar, A-*nisbiy ko‘chish*dagi bajarilgan ish):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k + A(\overline{F}^{in}_{ko'ch}) \qquad (16.6)$$

(16.5) va (16.6) dagi oxirgi yig‘indilar, qo‘zg‘aluvchi o‘qlarning nisbiy tezlik v-ga bo‘lgan ta’sirini belgilaydi.



16.3-shakl.

Umuman olganda nisbiy harakatning qolgan barcha tenglamalarida ko‘chirma va koriolis inertsiya kuchlari ishtirok etadi.

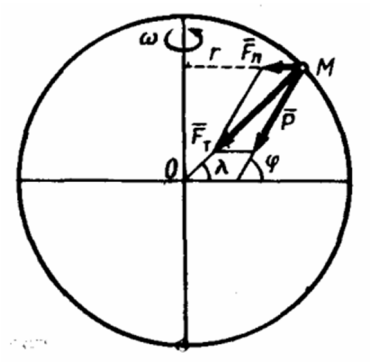
Harakati (yoki muvozanat holati) tekshirilayotgan moddiy nuqta harakati (yoki muvozanat holati)ga bog‘liq bo‘lgan jismlar sistemasini, *mexanik sistema* deb ataladi. Agar mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqta (jism)larning o‘zaro ta’sirlari mavjud bo‘lsa, u holda har pbir nuqta (jism)ning holati, qolgan barcha nuqta (jism)larning holatiga uzviy bog‘liq bo‘ladi. Bunga klassik misol tarzida quyosh sistemasini olishimiz mumkin bo‘lib, undagi barcha jismlar (Quyosh, planetalar va kometalar) o‘zaro tortilish kuchlari orqali bog‘langanlar.

Mexanik sistemaga ta’sir etuvchi-aktiv kuchlar va $\overline{N}_k$ -reaktsiya kuchlarini $\overline{F}_k^a$, $\overline{F}_k^e$ - tashqi va $\overline{F}_k^i$ -ichki kuchlarga ajratib yuboramiz (bu yerdagi e-extyerior, tashqi va i-intyerior, ichki so‘zlarning birinchi harflaridan iborat). Berilgan mexanik sistemaga kirmagan jismlarning sistema nuqtalariga ta’sir kuchlari, *tashqi* kuchlar deb ataladi. Sistemani tashkil etuvchi nuqta yoki jismlarning o‘zaro ta’sir kuchlari *ichki* kuchlar deb ataladi. Bunday ajratishlik shartli bo‘lib, mexanik sistemani tanlab olishimizga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, agar Quyosh sistemasini tanlab olsak, u holda Yer bilan Quyoshning o‘zaro tortilish kuchlari ichki kuchlar hisoblanadi; agar Yer bilan Oyni bitta sistema deb qabul qilsak, Quyoshning tortilish kuchi endi tashqi kuch hisoblanadi.

Texnikaga oid aksariyat masalalarni yechishda Yerga mahkamlangan hisob sistemasini inertsial (qo‘zg‘almas) deb hisoblanadi. Bu bilan Yerning yulduzlarga nisbatan sutka ichidagi aylanishini hisobga olinmaydi. Bu aylanish (sutkada bir marta aylanishi) quyidagi burchakli tezlik bilan bo‘ladi,

$$\omega=2\pi/(24\cdot60\cdot60)\approx0{,}000073\ c^{-1}$$

Yerning ushbu sekin aylanishi, Yer atrofidagi jismlarning harakati va muvozanatiga qanday ta’sir ko‘rsatishini ko‘rib o‘tamiz.



16.4- shakl.

O g‘ i r l i k k u ch i. Tortilish kuchi (Yerning tortishi)ning bir qismi hisoblangan og‘irlik kuchi Yerning sutka ichidagi aylanishiga bog‘liq bo‘ladi. Yerning sirtiga yaqin joylashgan moddiy nuqtaga, tortilish kuchi $\overline{F}_\tau$ ta’sir etib, u ikkita $\overline{F}_n$ va $\overline{\mathrm{P}}$ -tashkil etuvchilarga ajraladi (16.4- shakl).

$\overline{F}_n$ - kuch Yerning aylanish o‘qi tomon yo‘nalgan bo‘lib, moddiy nuqtaga $\overline{a}_n$- normal tezlanish beradi va bu tezlanish moddiy nuqtani Yer bilan birga aylanishidan hosil bo‘ladi; agar nuqtaning massasi m, Yer o‘qigacha bo‘lgan masofasi r- bo‘lsa, u holda $\overline{F}_n = m\overline{a}_n$ dan iborat bo‘lib, uning son qiymati $F_n=m\omega^2 r$ - ga teng bo‘ladi.

Tortilish kuchining ikkinchi tashkil etuvchisi - $\overline{\mathrm{P}}$ bo‘lib, u *og‘irlik kuchi* deb ataladi. Shunday qilib,

$$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{F}}_\tau - \overline{\mathrm{F}}_n$$

ya’ni, *og‘irlik kuchi, to‘liq tortilish kuchi bilan nuqtaning Yer bilan birga sutka ichidagi aylanishidan hosil bo‘ladigan kuchning vektor ayirmasiga teng ekan.*

$\overline{\mathrm{P}}$ -kuchining yo‘nalishi har bir hudud (punkt)ning vertikalini aniqlab beradi (ipga osilgan yukning yo‘nalishi; ipning tortilish kuch P-ga teng bo‘ladi) va $\overline{\mathrm{P}}$ -kuchining yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik, shu hududning gorizontal tekisligi deb ataladi. $F_n=m\omega^2 r$ (ω^2-juda kichik qiymat) kichkina qiymat bo‘lgani uchun, og‘irlik kuchi- $\overline{\mathrm{P}}$, tortilish kuchi $\overline{F}^*\tau$ -dan juda oz miqdorda farq qiladi. $\overline{\mathrm{P}}$ -kuchning modulini *jismning og‘irligi* deb ataladi.

Yerning sathiga yaqin joylardagi nisbiy muvozanat va nisbiy harakat. Agar, nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlardan $\overline{\mathrm{F}}_\tau$ tortilish kuchini ajratib qo‘ysak, nuqtaning aylanayotgan Yer ustidagi nisbiy muvozanati (tinch holati) quyidagicha bo‘ladi,

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}_\tau + \overline{F}^{in}_{ko'ch} = 0 .$$

Lekin $\overline{a}_{ko'ch} = \overline{a}_n$ va $\overline{F}^{in}_{ko'ch} = -m\overline{a}_{ko'ch} = -m\overline{a}_n = -\overline{F}_n$. U holda, $\overline{F}_\tau - \overline{F}^{in}_{ko'ch} = \overline{F}_\tau - \overline{F}_n = \overline{P}$ bo‘ladi va yuqoridagi tenglama $\sum \overline{F}_k + \overline{P} = 0$ ko‘rinishga keladi, ya’ni Yer bilan bog‘langan hisob sistemasi qo‘zg‘almas bo‘lgandagi kabi bo‘lar ekan.

Demak, *jismlarning Yerga nisbatan muvozanat tenglamalarini tuzganda Yerning aylanishi hisobiga hechqanday qo‘shimcha tuzatmaning kyeragi yo‘q ekan* (bu aylanishdagi tuzatma tenglamada $\overline{P}$ orqali ishtirok etar ekan).

Endi nisbiy harakat tenglamalarini olib ko‘ramiz, bu yerda ham tortilish kuchini ajratib olamiz. U holda

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{F}_\tau + \overline{F}^{in}_{ko'ch} + \overline{F}^{in}_{kor} .$$

Lekin yuqoridagi kabi $\overline{F}_\tau + \overline{F}^{in}_{ko'ch} = \overline{F}_\tau - \overline{F}_n = \overline{P}$ bo‘ladi va ushbu tenglama quyidagi ko‘riniishga keladi,

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{P} + \overline{F}^{in}_{kor} .$$

Bundan quyidai xulosa kelib chiqadi, *agar nuqtaning (jismning) harakat tenglamalarini tuzganda Yer bilan bog‘langan o‘qlarni qo‘zg‘almas deb hisoblansa, u holda faqat koriolis inertsiya kuchini etiborga olinmas ekan xolos*, uning son qiymati

$$F^{in}_{kor} = 2m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin\alpha$$

bu yerdagi α -nuqtaning nisbiy tezlik vektori $\overline{v}$ bilan Yerning o‘qi orasidagi burchak.

Yerning burchakli tezligi ω-juda kichik qiymat bo‘lganligi sababli, agar nisbiy tezlik-v uncha katta bo‘lmasa $\overline{F}^{in}_{kor}$ -kuchini hisobga olmasa ham bo‘ladi, chunki u og‘irlik kuchiga nisbatan kichkina qiymat bo‘ladi. Masalan, nisbiy tezlik 700 m/s (oddiy artilyeriya snaryadining tezligi) va α=90° bo‘lganda $\overline{F}^{in}_{kor}$ -kuchi, og‘irlik kuchi P-ning faqat 1 protsentini tashkil etadi. Shuning uchun ko‘pchilik injenerlik hisoblash ishlarida Yer bilan mahkamlangan hisob sistemasini inertsial (qo‘zg‘almas) deb hisoblanadi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Koriolis inertsiya kuchi deb nimaga aytiladi?
2.Nisbiy harakat deb nimaga aytiladi?
3.Og’irlik kuchi deb nimaga aytiladi?
4.Yerning o’z o’qi atrofida aylanishi jismlarga qanday ta’sir etadi?

17-MAVZU: **Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli erkin (garmonik) tebranma harakati. Moddiy nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati.**

Reja

1.Nuqtaning erkin tebranma harakati.
2.Erkin tebranma harakatning xossalari.
3.Nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati

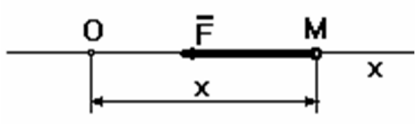
Tushuncha va tayanch iboralar.

Tebranma harakat, erkin tebranma harakat, statik og'ish, so'nuvchi tebranma harakat, rezanans, garmonik tebranma harakat, tebranish amplitudasi, tebranish fazosi, tebranish davri, tebranish chostatasi.

Mavzuni bayoni.

Tebranish nazariyasi fizika va texnikaning qator ilmiy asoslarini tashkil etadi. Fan va texnikaning turli bo'limlariga tegishli bo'lgan tebranishlar bir-birlaridan, masalan, mexanikadagi, radiotexnikadagi, akustikadagi va b., o'zlarining fizik mohiyati bilan tubdan farq qilsalar ham, lekin tebranma harakatning asosiy qonuniyatlari hamma vaqt bir xilligicha qolar ekan.

Shu sababli, mexanik tebranishlarning qonuniyatlarini o'rganish o'ta muhim bo'lib, uning natijalari nafaqat texnikada, undan tashqari tebranishga bog'liq bo'lgan juda ko'p boshqa sohalarda ham dolzarb (aktual) hisoblanadi. Avvaliga muhit qarshiligini hisobga olmagan holdagi erkin tebranishlarni ko'rib o'tamiz.



17.1-shakl

To'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi M nuqtaga, faqat bitta -*muvozanatlovchi* $\overline{F}$ kuch qo'yilgan bo'lib, yo'nalishi har doim O markazga qaraydi, moduli esa shu markazgacha bo'lgan masofaga to'g'ri proportsional bo'lsin

(17.1- shakl). Shu to'g'ri chiziqli trayektoriya bo'ylab o'tkazilgan koordinata o'qiga $\overline{F}$ - kuchning proyektsiyasi quyidagicha bo'ladi,

$$F_x=-cx \qquad (17.1)$$

Shakldan ko'rinib turganidek $\overline{F}$ -kuchi nuqtani O markazdagi muvozanat holatga keltirishga harakat qiladi, chunki shu O nuqtada F=0 ga teng bo'ladi; shu sababli uni

«muvozanatlovchi» kuch deb ataladi. Bunday kuchga elastiklik kuchi tortilish kuchi misol bo‘la oladi.

M nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz. Harakatning differentsial tenglamasini Ox o‘qidagi proyektsiyasini yozamiz:

$$m\ddot{x} = F_x \quad \text{yoki} \quad m\ddot{x} = -cx\,. \tag{17.2}$$

Tenglikning ikkala tomonini m-ga bo‘lib yuborib va $c/m=k^2$ belgilash kiritib, yuqoridagi tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{17.3}$$

(17.3) tenglama, *muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Ushbu chiziqli, ikkinchi darajali bir jinsli differentsial tenglamaning yechimini $x=e^{nt}$ ko‘rinishda izlanadi. (17.3) tenglamadagi x-ni $x=e^{nt}$ orqali ifodalab, noma’lum n- ni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglamadan iborat bo‘lgan xarakteristik tenglamani hosil qilamiz $n^2+k^2=0$. Ushbu tenglamaning ildizlari faqat mavhum ($n_{1,2}=\pm ik$) qiymatlar bo‘lgani sababli, differentsial tenglamalarning nazariyasiga asosan, (17.3) tenglamaning umumiy yechimi, quyidagicha bo‘ladi

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt, \tag{17.4}$$

bu yerdagi C_1 va C_2-lar integral doimiylari. Agar, C_1 va C_2- o‘zgarmas qiymatlarning o‘rniga A va α -dan tashkil topgan boshqacha, ya’ni $C_1=A\cos\alpha$, $C_2=A\sin\alpha$ -larni kiritsak, u holda tenglamaning ko‘rinishi $x=A(\sin kt\cdot\cos\alpha+\cos kt\cdot\sin\alpha)$ yoki

$$x=A\sin(kt+\alpha), \tag{17.5}$$

bo‘ladi. Bu (17.4) tenglamaning boshqacha yechimi bo‘lib, integral doimiylari sifatida A va α -lar ishtirok etmoqda. Ular orqali harakatni tadqiq qilish ancha qulay hisoblanadi.

Tebranma harakatdagi nuqtaning tezligi

$$v_x = \dot{x} = Ak\cos(kt+\alpha)\,, \tag{17.6}$$

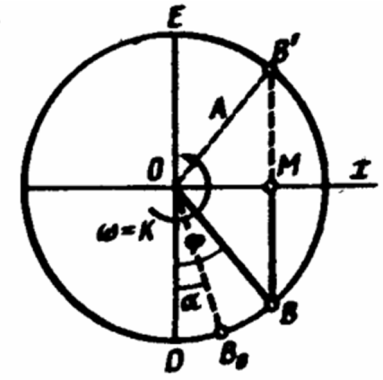
(17.6) qonuniyat bilan tebranuvchi nuqtaning harakati *garmonik tebranma harakat* deb ataladi. Bunday harakatning $\alpha=90°$ dagi grafigi tasvirlangan.

Bunday harakatning barcha xarakteristikalariga tasviriy kinematik tafsilotlar byerish mumkin. Radiusi A ga teng bo‘lgan aylana bo‘ylab tekis harakatlanayotgan B nuqtaning harakatini ko‘rib chiqaylik. Nuqtaning harakati V_0 -holatdan boshlanib, $DOB_0=\alpha$ burchak orqali aniqlanadi. OB radiusning burchakli tezligi-k o‘zgarmas qiymat bo‘lsin. U holda, ixtiyoriy t vaqtda burchak $\varphi=\angle DOB=\alpha+kt$ bo‘lsin, B nuqtaning (Ox o‘qiga) DE -ga perpendikulyar bo‘lgan diametrga proyektsiyasi M, $x=A\sin(kt+\alpha)$, qonuniyat bilan harakat qiladi, bu yerda x=OM, ya’ni garmonik tebranma harakat qilmoqda.

M nuqtaning tebranish markazi O nuqtadan eng katta uzoqlashgan qiymati A, *tebranish amplitudasi* deb ataladi. $\varphi=kt+\alpha$ *tebranish fazasi* deb ataladi. Tebranish fazasi- φ, nuqtaning koordinatasi x-dan farqli ravishda, berilgan vaqtdagi nuqtaning holatini aniqlabgina qolmasdan, keyingi harakatning yo‘nalishini ham belgilab beradi; masalan, fazasi φ bo‘lgan M holatdan, nuqta o‘ng tomonga qarab harakatlanadi, fazasi $(\pi-\varphi)$ bo‘lganda esa chap tomonga qarab harakatlanadi. Bir-biridan 2π fazaga farqlanuvchi tebranma harakatlar bir xil hisoblanadilar.

Tebranishning boshlang‘ich fazasini α-qiymat orqali aniqlanadi. Masalan, $\alpha=0$ bo‘lganda tebranma harakat sinusoida bo‘yicha sodir bo‘ladi (harakat O nuqtadan boshlanib, tezlik o‘ng tomonga yo‘naladi). $\varphi=\pi/2$-bo‘lganda kosinusoida (harakat x=A holatdan va v_0 - tezlik bilan boshlanadi), OB radiusning burchakli tezligi bilan bir xil bo‘lgan k- qiymat *tebranishning davriy chastotasi* deb ataladi .

Nuqtaning to‘la bir marta tebranishi uchun sarflangan vaqt oralig‘i T (yoki τ), *tebranish davri* deb ataladi. Davr o‘tishi bilan faza 2π-ga o‘zgaradi. Shu sababli $kT=2\pi$ bo‘lishi shart, bundan tebranish davri aniqlanadi



17.2-shakl

$$T=2\pi/k \qquad (17.7)$$

Tebranish davriga teskari nisbatda bo‘lgan

$$\nu=1/T=k/2\pi \qquad (17.8)$$

qiymat, tebranish chastotasi deb ataladi va u 1 s vaqt ichidagi tebranishlar sonini ifodalaydi.

Bundan ko‘rinib turibdiki, k - qiymat ν-dan faqat 2π ko‘paytmasi bilan farqlanar ekan. Keyinchalik, qisqaroq gapirish uchun k-ni ham chastota degan so‘z bilan atayvyeramiz.

Endi A va α integral doimiylarining son qiymatlarini aniqlaymiz.

A va α -ni boshlang‘ich shartlarga asosan aniqlash. Odatdagidek, t=0 da $x=x_0$, $v_x=v_0$ ekanligidan foydalanib va formulalar orqali $x_0=A\sin\alpha$, $v_0/k=A\cos\alpha$ -ni aniqlaymiz. Bu tengliklarni kvadratga ko‘tarib, ularni hadma-had qo‘shsak, so‘ngra ularning birini ikinchisiga nisbatini olsak, A va α larning qiymatlarini aniqlaymiz

$$A=\sqrt{x_0^2+v_0^2/k^2}\,, \quad \operatorname{tg}\alpha=kx_0/v_0 \qquad (17.9)$$

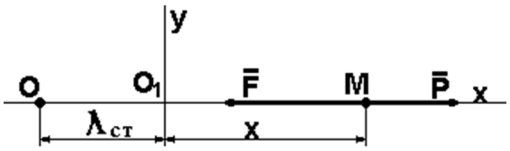
A va α -larni nuqtaning chegaraviy shartlari orqali aniqlash. Boshlang‘ich shartlarning o‘rniga quyidagi chegaraviy shartlar berilgan bo‘lsin: t=0 da $x=x_0$, $t=t_1$ da x=l bo‘lsin. U holda, formula orqali $0=\sin\alpha$, $l=A\cdot\sin(kt+\alpha)$ -ni yozamiz, bundan $\alpha=0$, A=l/sinkt bo‘ladi va tenglamaning yechimi (agar faqat $t_1\neq\pi/2=T/2$ bo‘lsa) $x=(l/\sin kt_1)\sin kt$ bo‘ladi, agar $t_1=\pi/2$ (yoki $2\pi/k$ va h.) bo‘lsa, u holda A -ni aniqlash uchun $l=A\sin\pi$ tenglama tuzamiz, lekin $l\neq0$ bo‘lganda u tenglamani qoniqtirmaydi, natijada masala yechimga ega bo‘lmaydi. Agar l=0 va $t_1=\pi/2$ bo‘lsa, A -ni aniqlash uchun $0=A\sin\pi$ tenglama hosil qilamiz, ya’ni A-ning ixtiyoriy qiymatlarida ham tenglamani qoniqtiradi. Demak tenglamaning yechimi $x=A\sin kt$ ko‘p bo‘lishi mumkin, A-ixtiyoriy son.

Shunday qilib, boshlang‘ich shartlarsiz, ya’ni chegaraviy shartlar berilgan masalalar bir nechayechimga yoki, umuman, yechimga ega bo‘lmasliklari mumkin ekan. Ko‘rilgan xususiy holda, agar masalaning sharti bo‘yicha t=0 da $x=x_0$ bo‘lsa, u holda yarim davrdan keyin ham, ya’ni $t_1=\pi/k$ bo‘lganda ham x=0 bo‘lishi kerak. Shuning uchun, $t_1=\pi/k$ bo‘lganda $x=l\neq 0$ bo‘lishi mumkin emas va $t_1=\pi/k$ bo‘lganda x=l=0 bo‘lishi doimo bajariladi, ya’ni ixtiyoriy A amplituda bilan.

E r k i n t e b r a n i s h l a r n i n g x o s s a l a r i . Mavzuning so‘nggida erkin tebranishlarning muhim xossalari bilan tanishtirib o‘tamiz: 1) amplituda va boshlang‘ich faza, boshlang‘ich (yoki chegaraviy) shartlarga *bog‘liq* bo‘ladi; 2) chastota k va o‘z navbatida davr T boshlang‘ich (yoki chegaraviy) shartlarga *bog‘liq bo‘lmaydi* va tebranuvchi sistemaning o‘zgarmas xarakteristikasi hisoblanadi. (*Xuddi mana shu ikkinchi xossasiga asosan soat mexanizmlari ixtiro etilgan - targ*).

Bundan xulosa qilib shuni aniqlash mumkin ekanki; agar masalada faqat davr (yoki chastota)ni aniqlash talab etilsa, u holda harakatning differentsial tenglamasini tuzib, uni ko‘rinishga keltirish kerak ekan. So‘ngra undan T (yoki k) ning qiymatini integrallamasdan turib formula orqali aniqlash mumkin ekan.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan tebranma harakat va quyidagilarda ko‘rib o‘tiladigan tebranma harakatlar *chiziqli* deb ataladi, chunki ularning differentsial tenglamalari chiziqli funktsiyalardan



17.3- shakl

tashkil topgan. Ushbu tebranma harakatlarning davri boshlang‘ich (yoki chegaraviy) shartlarga va amplitudaga bog‘liq emasligi chiziqli tebranma harakatlarning eng asosiy xossalaridan biri hisoblanadi. Harakati chiziqsiz differentsial tenglamalar orqali tuzilgan tebranma harakatlar, *chiziqsiz* deb ataladi; ular yuqoridagi xossalarga ega emaslar .

N u q t a n i n g e r k i n t e b r a n m a h a r a k a t i g a o ‘ z g a r m a s k u c h n i n g t a ’ s i r i . Faraz qilaylik, moddiy M nuqtaga, O markazga intilgan muvozanatlovchi $\overline{F}$ (son qiymati F=c·OM) kuchdan tashqari, moduli va yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lgan $\overline{P}$ -kuch ham ta’sir qilsin (17.3- shakl). Bunday holatda, M nuqtaning muvozanat holati O markazda bo‘lmay qoladi va u yangi O_1 nuqtada bo‘ladi. Chunki shu O_1 nuqtada $\overline{P}$ kuchi bilan $\overline{F}$ kuchi o‘zaro muvozanatlashadilar va bu $OO_1=\lambda_{st}$ masofa $c\lambda_{st}=P$ formula orqali aniqlanadi, ya’ni

$$\lambda_{st}=P/c \qquad (17.10)$$

λ_{st} -qiymat, *statik og‘ish* deb ataladi.

O_1-nuqtani koordinata boshi deb tanlab olaylik va O_1x o‘qni $\overline{P}$ kuchning yo‘nalishi bo‘yicha yo‘naltiraylik. U holda $F_x=-c(x+\lambda_{st})$ va $P_x=P$ bo‘ladi. Natijada tenglama formulaga

asosan $c\lambda_{st}=P$ ekanligini hisobga olib, nuqta harakatining differentsial tenglamasini tuzamiz, ya'ni $m\ddot{x} = -cx$ yoki $\ddot{x} + k^2 x = 0$.

Ushbu tenglama, tenglama bilan bir xil bo‘ladi. Bunga asosan xulosa qilib, shuni aytish mumkinki: *o‘zgarmas kuch, tebranma harakatning xarakteristikasini hechqanday o‘zgartirmas ekan, faqat tebranish markazini kuchning yo‘nalishi tomonga qarab statik og‘ish λ_{st} -ga teng bo‘lgan (OO_1) masofaga surar ekan.*

Tebranish davrini λ_{st}-orqali ifodalaymiz. formulalar orqali $k^2=P/m\lambda_{st}$-ni aniqlaymiz. U holda tenglikdan,

$$T = 2\pi\sqrt{m\lambda_{st} / P} \qquad (17.11)$$

Shunday qilib, tebranish davri statik og‘ish λ_{st}-ning kvadrat ildiziga to‘g‘ri proportsional ekan.

Xususiy holda, agar $\overline{P}$ kuchning o‘rnida og‘irlik kuchi qatnashsa, u holda P=mg bo‘ladi va formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$T = 2\pi\sqrt{\lambda_{st} / g} \qquad (17.12)$$

So‘nuvchi tebranishlar.

Ushbu mavzuda, yopishqoq muhitlarning qarshiligi ta'siridagi erkin tebranma harakatni tekshirib ko‘ramiz. Yo‘pishqoq muhitlar (turli yog‘lar, suv va boshqa suyuqliklar) ning qarshiliklari nuqtaning tezligiga to‘g‘ri proportsional ravishda o‘zgaruvchan funktsiyadan iborat bo‘ladi, masalan $\overline{R} = -\mu\overline{v}$ (manfiy ishora, kuchni tezlikka teskari yo‘nalishda ekanligini ko‘rsatib turibdi). Nuqtaning harakatida muvozanatlovchi $\overline{F}$ kuch va muhit qarshiligi kuchi $\overline{R}$, ta'sir etsin . U holda $F_x=-cx$, $R_x=-\mu v_x=-\mu\dot{x}$ bo‘lganligi uchun, shu nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagicha yoziladi

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$$

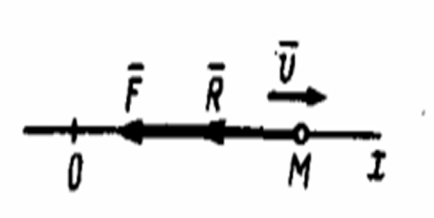
Tenglamaning ikkala tomonini m-ga bo‘lib yuborib, tegishli belgilashlar kiritsak,

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (17.13)$$

bu yerdagi

$$k^2=c/m; \quad 2b=\mu/m \qquad (17.14)$$

k va b -qiymatlarning o‘lchov birliklari bir xil (1/vaqt); shu sababli ularni o‘zaro solishtirish mumkin.



17.4-shakl

Tenglama *tezlikka proportsional bo'lgan qarshilik ta'siridagi erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning yechimini tenglamadagi kabi $x=e^{nt}$ ko'rinishda axtariladi. Ushbu x-ning qiymatini qo'ysak, xarakteristik tenglama kelib chiqadi, uning ildizlari

$$n_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-k^2} \qquad (17.15)$$

1. Agar, k>b bo'lsa, ya'ni muvozanatlovchi kuchga nisbatan qarshilik kuchi kichkina bo'lsa, quyidagi belgilash kiritilgandan so'ng

$$k_1=\sqrt{k^2-b^2} \qquad (17.16)$$

(17.15) ifoda $n_{1,2}=-b\pm ik_1$ ko'rinishga keladi, ya'ni xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlardan iborat bo'lar ekan. U holda tenglamaning umumiy yechimi, tenglamaning yechimidan faqat e^{-bt}-ko'paytmaga farq qilar ekan xolos, ya'ni

$$x=e^{-bt}(C_1\sin k_1t+C_2\cos k_1t) \qquad (17.17)$$

yoki o'zgartirilsa,

$$x=Ae^{-bt}\sin(k_1t+\alpha), \qquad (17.18)$$

(17.18) formuladagi A va α -lar integral doimiylari hisoblanadi va ularning son qiymatlari boshlang'ich shartlar yordamida aniqlanadi.

(17.18) tenglama bo'yicha sodir bo'ladigan harakat, so'nuvchi harakat bo'ladi, chunki tenglamada e^{-bt} dan iborat ko'paytma bo'lganligi sababli, x=OM qiymat vaqt o'tishi bilan kamayib borib nolga intiladi.

Ushbu tebranma harakatning grafigi tasvirlangan (grafik ikki tarafdan $x=Ae^{-bt}$ va $x=-Ae^{-bt}$ punktir egri chiziqlar ichiga olingan, chunki $\sin(kt+\alpha)$ ning son qiymati 1-dan oshmaydi).

Tebranayotgan nuqtaning ketma ket o'ng (yoki chap) tomonga ikkita maksimum og'ishiga ketgan vaqt ham T_1[4] -ga teng bo'lar ekan. Demak, agar birinchi maksimal og'ishi x_1, t_1 -vaqtga to'g'ri kelsa, undan keyingi maksimal og'ish vaqti $t_2=t_1+T_1$ ga to'g'ri keladi va h.k. U holda $k_1T_1=2\pi$ ekanligini hisobga olsak,

[4] x -ning maksimum va minimum qiymatlaridagi vaqtlar, $dx/dt=Ae^{-bt}[k_1\cos(k_1t+\alpha)-b\sin(k_1t+\alpha)]=0$ tenglama orqali aniqlanadi. Agar qandaydir $t=t_1$ vaqtda kvadrat qavs nolga teng bo'lsa, u t_1+T_1, t_1+2T_1 - va h.k. vaqtlarda ham nolga teng bo'ladi, chunki $k_1T_1=2\pi$.

$$x_1=A\,e^{-bt_1}\sin(k_1t_1+\alpha)$$

$$x_2=A\,e^{-b(t_1+T_1)}\sin(k_1t_1+k_1T_1+\alpha)=x_1\,e^{-bT_1}$$

Xuddi shunday ifodani har qanday ketma ket x_{n+1} ikkita og‘ish uchun $x_{n+1}=x_n\,e^{-bT_1}$ yozishimiz mumkin, Shunday qilib, tebranishning qulochi (razmaxi) geometrik progressiya bo‘yicha sekin asta kamayib borar ekan. Ushbu progressiya’ning mahraji e^{-bT_1} -ni *tebranish dekrementi* deb ataladi va uning logarifm modulini, ya’ni bT_1-ni *logarifmik dekrement* deb ataladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Erkin tebranma harakat deb nimaga aytiladi?

2.Tebranish dekrementi deb nimaga aytiladi?

3.So’nuvchi tebranma harakat deb nimaga aytiladi?

4.Tebranish davri va chastatasi deb nimaga aytiladi?

18-MAVZU: Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati. Moddiy nuqtaning qarshilik kuchi ta’siridagi majburiy tebranma harakati.

Reja

1.Nuqtaning majburiy tebranma harakati.

2.Muhit qarshiligi bo‘lmagan holdagi majburiy tebranishlari.

3 . Muhit qarshiligi ta’siridagi majburiy tebranishlar.

Tushuncha va tayanch iboralar

Majburiy tebranma harakat, Muhitning qarshiligi, qo’zg’atuvchi kuch, majburiy tebranishlar, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi, garmonik qo‘zg‘atuvchi kuch , dinamiklik koeffitsient.

Mavzuning bayoni.

Ushbu mavzuda, nuqtaga muvozanatlovchi $\overline{F}$ -kuchdan tashqari vaqt mobaynida davriy ravishda o‘zgarib turuvchi $\overline{Q}$ -kuchi ham ta’sir etgan, ya’ni tebranma harakatning juda bir muhim masalasini ko‘rib o‘tamiz. $\overline{Q}$ -kuchining Ox o‘qidagi proyektsiyasi,

$$Q_x=Q_0\sin pt \qquad (18.1)$$

ga teng bo‘lsin. Bunday kuchni *qo‘zg‘atuvchi kuch* deb ataladi va shu kuch ta’siridagi tebranma harakatni *majburiy tebranishlar* deb ataladi. (18.1) formuladagi p -qiymatni *qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi* deb ataladi.

Vaqtga bog‘liq bo‘lgan qo‘zg‘atuvchi kuch, boshqacha qonuniyat bo‘yicha ham o‘zgarishi mumkin. Lekin biz, faqat (18.1) ko‘rinishdagi qonuniyat bilan o‘zgaruvchi qo‘zg‘atuvchi kuchlar ustida mavzu olib boramiz xolos. Ushbu (18.1) ko‘rinishdagi qo‘zg‘atuvchi kuchni *garmonik qo‘zg‘atuvchi kuch* deb ataladi. Muhit qarshiligi bo‘lmagan holdagi majburiy tebranishlar.

Harakatlanuvchi nuqtaga muvozanatlovchi $\overline{F}$ kuchdan tashqari faqat *qo‘zg‘atuvchi kuch* - $\overline{Q}$ ta’sir etsin. U holda nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini m-ga bo‘lamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$c/m=k^2, \quad Q_0/m=P_0 \tag{18.2}$$

P_0-ning o‘lchov birligi tezlanish kabi bo‘ladi. U holda yuqoridagi differentsial tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt \tag{18.3}$$

(18.3) tenglama *muhit qarshiligi bo‘lmagan holdagi nuqtaning majburiy tebranma harakatining differentsial tenglamasi* deb ataladi. Differentsial tenglamalar nazariyasiga asosan, bunday tenglamaning yechimi $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerdagi x_1- tenglamaning umumiy yechimi bo‘lib, x_2-esa (18.3) to‘liq tenglamaning birorta xususiy yechimidan iborat bo‘ladi.

Tenglamaning x_2-yechimini $p\neq k$ deb hisoblab, quyidagi ko‘rinishda axtaramiz

$$x_2=B\sin pt$$

bu yerdagi B -o‘zgarmas qiymat bo‘lib, uning qiymati shunday bo‘lishi lozimki, uni (18.3)-ga qo‘yilganda tenglama ayniyatga aylanib qoladi. Shunga asosan, x_2 va uning ikkinchi tartibli hosilasi $\ddot{x}_2$ - ni (18.3) tenglamaga qo‘ysak,

$$-p^2B \sin pt+k^2B \sin pt=P_0 \sin pt$$

Ushbu tenglik vaqt t-ning ixtiyoriy qiymatlarida ham qanoatlanishi uchun $B(k^2-p^2)= P_0$ bo‘lishi kerak, yoki

$$B=P_0/(k^2-p^2)$$

Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim aniqlandi, ya’ni

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt \tag{18.4}$$

To‘liq yechim $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘lganligi sababli, hamda x_1-ning yechimi formuladan ma’lum bo‘lganligi uchun, (18.3) tenglamaning umumiy yechimi

$$x = A\sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt \tag{18.5}$$

bu yerdagi A va α - integral doimiylari bo‘lib, ular boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanadi. (18.5) yechimdan ko‘rinib turibdiki, tebranma harakat ikkita, ya’ni: 1) chastotasi -k va amplitudasi A -(amplituda boshlang‘ich shartlarga bog‘liq holda bo‘ladi) bo‘lgan *xususiy tebranishlar*; 2) chastotasi -p va amplitudasi B -(bu amplituda boshlang‘ich shartlarga bog‘liq holda bo‘lmaydi) bo‘lgan *majburiy tebranishlar* ning yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan.

Lekin amalda, u yoki bu qarshiliklar evaziga, xususiy tebranishlar tez orada so‘nadi. Shu sababli, nuqtaning asosiy tebranma harakati, (18.4) tenglama orqali bo‘ladigan majburiy tebranishlardan iborat bo‘ladi.

Majburiy tebranishlarning chastotasi -p, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasiga teng bo‘ladi. Agar shu majburiy tebranishlar amplitudasining qiymatini surat va mahrajini k^2-ga bo‘lib yuborsak,

$$B = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{\lambda_0}{\left|1 - p^2/k^2\right|} \tag{18.6}$$

bu yerdagi $\lambda_0=P_0/k^2=Q_0/c$, ya’ni λ_0-nuqtaning Q -kuch ta’siridagi statik og‘ishi bo‘lib (18.2) formula orqali aniqlanadi. Ko‘rinib turgandek, B-ning qiymati qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi p-ni, xususiy chastota k-ga nisbatiga bog‘liq ekan. Quyidagicha

$$z=p/k, \quad \eta=B/\lambda_0 \tag{18.7}$$

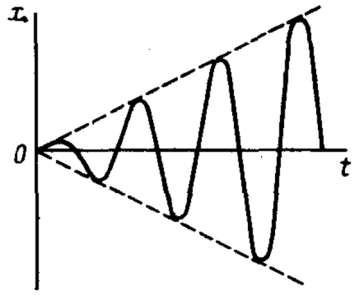
belgilashlar kiritamiz. O‘lchov birligi bo‘lmagan η-koeffitsientni *dinamiklik koeffitsient* deb ataladi. U orqali, majburiy tebranishlarning amplitudasi B-ning (ya’ni, tebranish markazidan maksimal og‘ishni), statik λ_0-og‘ishga nisbatan nechamarta katta bo‘lishi mumkin ekanligi aniqlanadi va chastotalarning nisbati z-ga bog‘liq bo‘ladi. (18.6) formulaning grafigi shaklda tasvirlangan bo‘lib, yuqoridagi egri chiziq h=0 (qolgan egri chiziqlar η va z -larga bog‘liq ravishda tasvirlangan)uchun ko‘rsatilgan.

Grafikdan ko‘rinib turibdiki, p va k-qiymatlarning turli nisbatlarda olish hisobiga turlicha amplitudalarga ega bo‘lgan majburiy tebranishlar hosil qilish mumkin ekan. Agar p=0 (yoki $p<<k$) bo‘lsa, amplituda λ_0 -ga teng (yoki shu qiymatga yaqin) bo‘ladi, Agar p -ning qiymati k -ga yaqin bo‘lsa, amplituda B juda katta bo‘ladi. Va nihoyat $p >> k$ bo‘lsa amplituda B -ning qymati juda kichik (yoki nolga yaqin) bo‘ladi. Yana shuni ta’kidlash lozimki, agar $p<k$ bo‘lsa, tenglamalarni solishtirish orqali majburiy tebranishlar fazasi bilan qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasi

ustma-ust (ikkalasi ham pt-ga teng) tushar ekan. Agar p>k bo‘lsa, u holda sinusning ostiga manfiy ishorani kiritib, (18.4) formulani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$x_2 = \frac{P_0}{p^2 - k^2}\sin(pt - \pi)$$

Demak, p>k bo‘lganda majburiy tebranishlar fazasi bilan, qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasi, bir-biriga nisbatan π burchakka yo qiymati 18.1- shaklda ko‘rsatilgandek, katta miqdorda (katta quloch bilan tebrana boshlaydi) ortib ketadi.



18.1- shakl

Agar p=k bo‘lsa (18.3) tenglamaning x_2=Csinpt dan iborat xususiy yechimi bo‘lmaydi, uning yechimini

x_2=C·t·cospt

ko‘rinishda axtariladi. U holda,

$\ddot{x}_2 = -2Cp\sin pt - p^2Ct\cos pt$, bularni (18.3)

tenglamaga qo‘ysak va p=k ekanligini e’tiborga olib, -2Cpsinpt=P_0sinpt, bundan C=-P_0/2p bo‘ladi. Natijada, muhit qarshiligi bo‘lmagan majburiy tebranma harakatdagi rezonans holatning tenglamasini yozamiz:

x_2=-(P_0/2p)t·cospt; yo‘ki x_2=(P_0/2p)t·sin(pt-π/2) (18.8)

Ushbu tenglamadan ko‘rinib turibdiki, haqiqatdan ham rezonans holatida majburiy tebranma harakatning qulochi vaqtga proportsional ravishda ortib borar ekan va bunday harakatning grafigi 18.1- shaklda tasvirlangan. Rezonans holatida faza π/2 burchakka suriladi.

M u h i t q a r s h i l i g i t a ’ s i r i d a g i m a j b u r i y t e b r a n i s h l a r .

Harakatdagi nuqtaga, muvozanatlovchi kuch $\overline{F}$, tezlikka proportsional ravishda o‘zgaruvchi qarshilik kuchi $\overline{R}$ va (18.1) formula orqali ifodalanadigan qo‘zg‘atuvchi kuch Q ta’sir etsin. Bunday kuchlar ta’siridagi nuqtaning harakat differentsial tenglamasi, quyidagicha bo‘ladi

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0\sin pt \qquad (18.9)$$

Tenglamaning ikkala tarafini m-ga bo‘lib, hamda (18.2) dagi belgilashlarni e’tiborga olsak, yuqoridagi tenglama

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = P_0\sin pt \qquad (18.10)$$

(18.10) tenglama, *yopishqoq muhit qarshiligi ta’siridagi majburiy tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning umumiy yechimi x=x_1+x_2 ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerdagi x_1- tenglamaning o‘ng tomonisiz, tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi, x_2 -esa (18.9)

to‘liq tenglamaning birorta xususiy yechimidan iborat bo‘ladi. Tenglamaning x_2 -yechimini, quyidagi ko‘rinishda axtaramiz

$$x_2=B\sin(pt-\beta)$$

bu yerdagi B va β -o‘zgarmas qiymatlar bo‘lib, ularning qiymatlari shunday bo‘lishi lozimki, ularning aniqlangan qiymatlarini (18.3)-ga qo‘yilganda, u tenglama ayniyatga aylanib qoladi. Shunga asosan, x_2 -ning hosilalarini hisoblaymiz

$$\dot{x}=Bp\cos(pt-\beta), \quad \ddot{x}=-Bp^2\sin(pt-\beta)$$

Bu hosilalarni va x_2-ning qiymatlarini (18.10) ning chap tomoniga keltirib qo‘ysak, hamda qisqaroq yozish maqsadida $pt-\beta=\psi$ (yoki $pt=\psi+\beta$) belgilash kiritsak

$$B(-p^2+k^2)\sin\psi+2bpB\cos\psi=R_0(\cos\beta\sin\psi+\sin\beta\cos\psi)$$

Har qanday ψ-qiymatlarda ham, ya’ni ixtiyoriy vaqt uchun ushbu tenglama qanoatlanishi uchun, uning chap va o‘ng tomonlaridagi sinψ va cosψ larni oldilaridagi o‘zgarmas koeffitsientlar o‘zaro teng bo‘lishlari shart; Demak

$$B(p^2-k^2)=P_0\cos\beta, \quad 2bpB=P_0\sin\beta$$

Yuqoridagi ikkala tenglamani (bulardan β -ning qiymatini aniqlashda ham foydalaniladi) kvadratlarining yig‘indilari va ularni bir-birlariga nisbatlari orqali B va β larning qiymatlarini aniqlaymiz

$$B=\frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)+4b^2p^2}}, \quad tg\beta=\frac{2bp}{k^2-p^2} \qquad (18.11)$$

(18.10) tenglamaning x_1- (k>b bo‘lgandagi) yechimida aniqlangan, shunga ko‘ra, (18.10) tenglamaning to‘liq yechimi, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

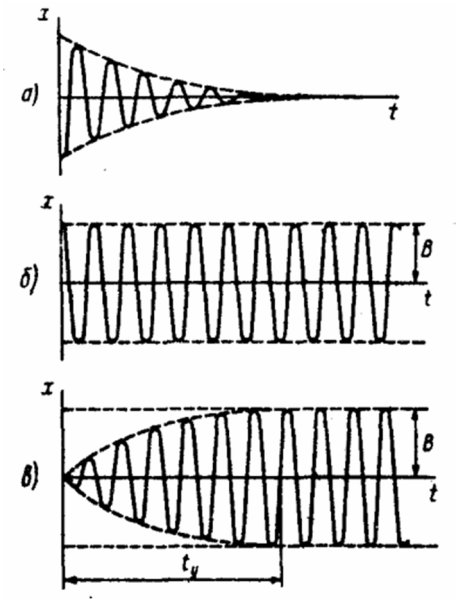
$$x=Ae^{-bt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(pt-\beta) \qquad (18.12)$$

bu yerdagi A va α -lar integral doimiylari bo‘lib, boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanadi. B va β lar esa (18.12) formulada aniqlangan bo‘lib, boshlang‘ich shartlarga bog‘liq emas, ularning b=0 bo‘lgandagi, ya’ni qarshilik kuchi yo‘q bo‘lgandagi qiymatlari (18.4) va (18.5) formulalarda aniqlangan.

Ushbu tebranma harakat murakkab bo‘lib, xususiy va majburiy tebranma harakatlarning yig‘indilaridan iborat bo‘ladi. Bunday harakatning xususiy tebranishlarida ko‘rib o‘tilgan edi. O‘sha yerda ta’kidlanganidek, bunday tebranishlar tez orada so‘nadi va bu so‘nish davri $t_{o‘rn}$ -ni *o‘rnashish (o‘tish jarayoni) vaqti* deb ataladi, lekin ko‘p hollarda u e’tiborga olinmaydi.

Masalan, xususiy tebranishlarning qulochi 0,01B bo‘lgan holdagi o‘rnashish vaqti $t_{o‘rn}$ - ni $Ae^{-bt}=0,01B$ tenglikdan aniqlanadi va $t_{o‘rn}=\frac{1}{b}\ln\frac{100A}{B}$ (18.13)

Ko‘rinib turganidek, qanchalik qarshilik kuchi (ya’ni, qanchalik b) kichkina bo‘lsa,



18.2-shakl

o‘rnashish davri shunchalik uzoq kyechadi.

(18.12) qonuniyat bo‘yicha sodir bo‘lishi mumkin bo‘lgan majburiy tebranma harakatning bir ko‘rinishi 18.2- shaklda tasvirlangan, bu yerda nuqtaning boshlang‘ich tezligi nolga teng. Boshlang‘ich shartlari hamda p va k_1 chastotalarning turli xil nisbatlari boshqacha bo‘lgan tebranishlarning $0<t<t_{o‘rn}$ vaqt oralig‘idagi, tebranish xarakterlari mutloq boshqacha bo‘lishi mumkin. Lekin, o‘rnash vaqti o‘tib ketgandan keyin xususiy tebranishlar batamom tugaydi va nuqta faqat

$$x=B\sin(pt-\beta) \qquad (18.14)$$

qonuniyat bilan harakatlanadi. Bunday qonuniyat bo‘yicha tebranishlar, *majburiy tebranishlar* deb ataladi. Ular, amplitudasi (18.11) formula orqali aniqlanadigan B-ga teng bo‘lgan va so‘nmaydigan garmonik tebranishlar bo‘lib, ularning chastotasi qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi p-ga teng bo‘ladi. Majburiy tebranishlarning fazasini qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasiga nisbatan surilishi β-ga teng bo‘ladi.

Olingan natijalarni tadqiq qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz,

$$z=p/k,\ h=b/k,\ \lambda_0=P_0/k^2=Q_0/c \qquad (18.15)$$

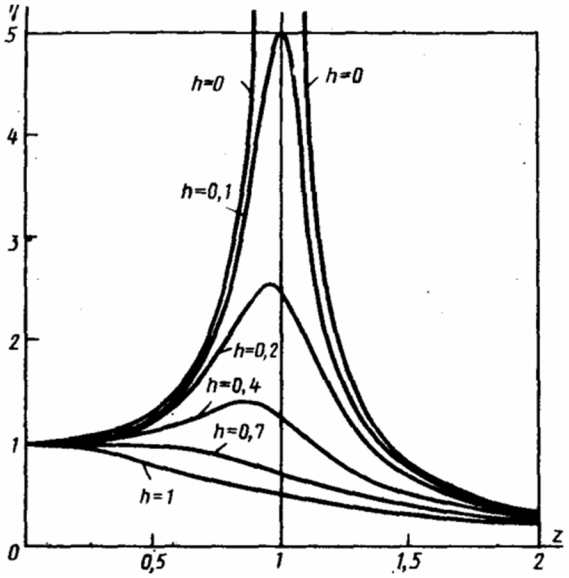
bu yerdagi z - chastotalarning nisbati; h- qarshilik kuchini belgilovchi qiymat; λ_0- Q kuchi ta'siridagi statik uzayish (masalan, prujinaga osilgan yukka qo'shimcha ravishda qo'yilgan Q kuch ta'sirida prujinaning qo'shimcha uzayishi-λ_0).

U holda, (18.11) tenglamaning surat va mahrajini k^2 -ga bo'lib yuborsak:

$$B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4h^2z^2}}, \qquad tg\beta = \frac{2hz}{1-z^2} \tag{18.16}$$

(18.16) formuladan ko'rinib turibdiki, B va β lar ikkita z va h o'lchovsiz qiymatlarga bog'liq ekan. Yanada yaxshiroq tushuntirish maqsadida, h -ning ba'zi bir qiymatlari uchun, ushbu bog'lanishlarning grafigi tasvirlangan. Birinchi grafikda *dinamiklik koefftsienti*ning $\eta=B/\lambda_0$ (amplituda B -ning qiymati, λ_0 -ning qiymatidan katta ekanligi) chastotalar nisbatiga qanday bog'liq ekanligi tasvirlangan.

Ikkinchi grafikda tebranish fazasining surilishi, ya'ni β-ning z -ga bog'liq holdagi grafigi tasvirlangan. Har bir muqim masalada, berilgan shartlarga binoan λ_0, z, h larni aniqlab, ular yordamida B va β lar (18.16) formula orqali hisoblanadi yoki grafik orqali aniqlanadi. Bu



18.3-shakl.

grafiklar (yoki formulalar)dan ko'rinib turibdiki, p va k -larning qiymatlarini turlicha tanlash evaziga turlicha amplitudaga ega bo'lgan majburiy tebranishlar olish mumkin ekan.

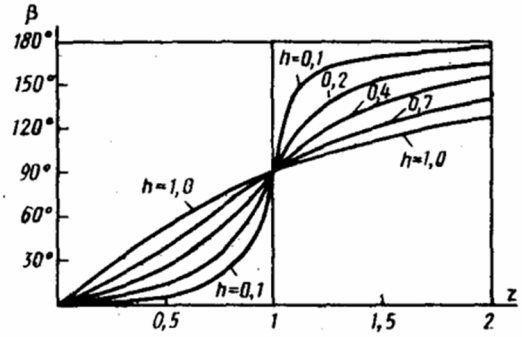
Qarshilik kuchi juda oz va z -ning qiymati 1-ga yaqin bo'lmagan son bo'lsa, (18.16) formulada taqriban $h\approx 0$ deb hisoblash mumkin bo'ladi. U holda, yuqoridagi 1p dagi natijalarni olishimiz mumkin, aniqrog'i:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\lambda_0}{\left|1-z^2\right|} \\ \beta &\approx 0 \quad (z<1 \text{ da}) \\ \beta &\approx 180^0 \quad (z>1 \text{ da}) \end{aligned}\right\} \qquad (18.17)$$

Quyidagi xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz.

1. Agar chastotalar nisbati z- juda kichkina (p<<k) bo‘lsa, u holda z≈0 deb hisoblab (18.16) formuladan B≈λ_0 ekanligini aniqlaymiz. Bu holdagi tebranma harakatning amplitudasi statik uzayish λ_0-ga teng bo‘lib, faza bo‘yicha surilish β≈0 bo‘ladi.

2. Agar chastotalar nisbati juda katta (p>>k) bo‘lsa, amplituda B kichkina bo‘ladi. Bu holat inshootlarni vibratsiyadan himoya qilishda, priborsozlikda va shunga o‘xshash texnikaning turli sohalari uchun katta ahamiyatga ega bo‘ladi. Qarshilik kuchi oz bo‘lsa, (18.16) formuladagi 2hz-ni e’tiborga olmasdan va $(1-z^2)\approx z^2$ deb hisoblasak, B-ning qiymatini aniqlash uchun



18.4-shakl.

taqribiy formula yozamiz,

$$B=\lambda_0/ z^2=P_0/p^2 \qquad (18.18)$$

3. Barcha amaliy ishlarda h-ning qiymati 1 -dan ancha kichkina bo‘lgan holat, ayniqsa, katta qiziqish uyg‘otadi. U holda, agar z - ning qiymati 1-ga yaqin son bo‘lsa (18.16) formuladan ko‘rinib turganidek, majburiy tebranishlarning amplitudasi o‘zining maksimal qiymatiga chiqadi. Bunday bo‘lgan holatni *rezonans* deb ataladi.

(18.16) formuladan ko‘rinib turibdiki, agar maxrajdagi $f(\xi)=(1-\xi)^2+4h^2\xi$ (bu yerda $\xi=z^2$) qiymat minimum bo‘lsa, $B=B_p=B_{max}$ bo‘lar ekan. Bu tenglamadan bir marta hosila olib, uni nolga tenglasak, ya’ni $f'(\xi)=-2(1-\xi-2h^2)=0$ bo‘ladi, bundan $\xi=1-2h^2$ bo‘ladi va shu qiymatda, ya’ni $z_p=\sqrt{1-2h^2}$ bo‘lganda B maksimum bo‘lar ekan. Demak, z -ning 1-dan ozgina kichik qiymatlarida rezonans hodisasi ro‘y byerar ekan. Lekin amalda 1-ga nisbatan h^2 ancha kichkina bo‘lganligi sababli $z_p=1$ deb hisoblanadi. Agar h-ning qiymatlari o‘rtacha bo‘lganda, rezonans

hodisasi uncha sezilmaydi (amplituda B uncha katta bo‘lmaydi, 18.4- shakl) va h> $\sqrt{2}$ /2≈0,7 bo‘lganda rezonans umuman sodir bo‘lmaydi.

Majburiy tebranishlarning rezonans holatidagi amplituda va fazaning surilishini amaliyotda z=1 deb qabul qilib, (18.16) formuladan kelib chiqadigan taqribiy hisoblashlar orqali aniqlanadi, ya’ni

$$B_p=\lambda_0/2h, \quad \beta_p=\pi/2 \qquad (18.19)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, h-ning kichkina qiymatlarida B_p -juda katta qiymatlarga ega bo‘lishi mumkin ekan.

Shuni ta’kidlash lozimki, amplitudasi B_p -ga teng bo‘lgan tebranishlar va rezonans holatidagi tebranishlar darhol ro‘y byermaydi. Majburiy tebranishlarning o‘rnashish protsessi ko‘rsatilgani kabi kyechadi. Qanchalik qarshilik kuchi kam bo‘lsa, ya’ni qanchalik b yoki h kichkina bo‘lsa, shunchalik B_p katta bo‘ladi; hamda shu o‘rinda majburiy tebranishlarning o‘rnashish vaqti $t_{o‘rn}$ - ham uzoq kyechadi

Qarshilik kuchi yo‘q bo‘lsa, ya’ni b=h=0 bo‘lsa, u holda rezonans holatidagi majburiy tebranishlar (18.7) formula orqali aniqlanadi. Shunday qilib, agar qarshilik kuchi yo‘q bo‘lsa, sistemaning «silkinish» protsessi shunchalik uzoq kyechadi, tebranishning qulochi esa muntazam o‘sib boradi. Agar qarshilik kuchi mavjud bo‘lsayu, lekin u juda kichkina bo‘lsa, yuqoridagi holatlar o‘shanday kechadi.

3. M a j b u r i y t e b r a n i s h l a r n i n g u m u m i y x o s s a l a r i .

Yuqorida olingan natijalarga asosan majburiy tebranishlar erkin tebranishlarga nisbatan quyidagi alohida muhim xususiyatlarga ega ekanligi aniqlandi: 1) majburiy tebranishlarning amplitudasi boshlang‘ich shartlarga bog‘liq emas ekan; 2) majburiy tebranishlar muhit qarshiligi ta’sirida so‘nmaydi; 3) majburiy tebranishlarning chastotasi, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasiga teng bo‘lib, tebranayotgan sistemaniing xarakteristikasiga bog‘liq emas ekan (qo‘zg‘atuvchi kuch tebranuvchi sistemaga o‘zinig chastotasini «o‘tkazar» ekan); 4) Agar, qarshilik kuchi kichkina bo‘lsa va chastota -p ning son qiymati, chastota -*k* ning son qiymatiga yaqin bo‘lsa, juda kichkina qo‘zg‘atuvchi (kichkina Q_0) kuch ham intensiv ravishda majburiy tebratadi; 5) Agar, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi -p ning son qiymati, xususiy chastota -*k* ning son qiymatidan katta farq qilsa, juda katta qo‘zg‘atuvchi (katta Q_0) kuch ta’sirida ham majburiy tebranishlarning amplitudasini hohlagan miqdorda kichkina qilish mumkin ekan.

Majburiy tebranishlar, ayniqsa ulardagi rezonans hodisasi fizika va mexanikaning turli sohalarida o‘ta muhim ahamiyatga ega. Masalan, mashina va dvigatellarning ishlashlarida, ularga davriy ravishda ta’sir etuvchi kuchlar paydo bo‘ladi, natijada fundamentning va mashinaning qismlari majburiy tebranishlar ostida bo‘lgan harakatlarda ishtirok etadilar.

Dvigatellarni turli xil aylanma tezliklar bilan ishlatish natijasida, majburiy tebranishlarning amplitudasini o‘zgarish qonuniyatini tekshirib borish mumkin, dvigatelning chastotasi p=ω bo‘ladi, bu yerdagi ω-dvigatelning burchakli tezligi ω-ning ortishi bilan, mashinaning (yoki fundamentning) tebranuvchi qismlarining amplitudasi ham ortib boradi va

ω=k bo‘lganda, rezonanas hodisasi ro‘y beradi va majburiy tebranishlarning qulochi maksimumga chiqadi.

Dvigatelning burchakli tezligi ω-ning qiymati, yana ortib borishi natijasida, majburiy tebranishlarning amplitudasi B kamaya boshlaydi va ω>>k bo‘lganda, B -ning qiymati nolga yaqinlashadi. Aksariyat injenerlik inshootlarida, rezonanas hodisasi katta ziyon keltiradi, shu sababli p va k -ning qiymatlarini (p>>k) tanlash orqali, majburiy tebranishlarning amplitudasini nolga yaqinlashtiriladi, natijada amplitudani nolga keltiriladi.

Majburiy tebranishlar nazariyasi, qator priborlarni yaratilishida, masalan vibrograflar - tebranuvchi jismlarning harakatlarini (fundamentning, mashinaning qismlarini va b.), seysmograflar - Yerning ustki qatlamini tebranishini o‘lchash ishlarida asosiy ilmiy manba bo‘lib xizmat qiladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Majburiy tebranma harakat deb nimaga aytiladi?
2.Majburiy tebranma harakatning xossalarini aytib bering?
3.Rezanans deb nimaga aytiladi?
4.Dinamik koeffitsient deb nimaga aytiladi?

19-MAVZU: Mexanik tizimlar massasi.

Reja

1. Ichki kuchlarning xossalari.

2. Tizim massalar markazi va uning koordinatalari.

3. Mexanik tizimlar ta’sir etuvchi kuchlarni klassifikatsiyasi.

4.Inersiya momenti. Gyuygens-shteyner teoremasi.

Tushuncha va tayanch iboralar

Mexanik tizim, ichki kuchlar, tashqi kuchlar, muvozanat holat, massalar markazi, inersiya moment, inersiya radiusi, qutbga nisbatan inersiya moment.

Mavzuning bayoni.

Harakati (yoki muvozanat holati) tekshirilayotgan moddiy nuqta harakati (yoki muvozanat holati)ga bog‘liq bo‘lgan jismlar sistemasini, *mexanik sistema* deb ataladi. Agar mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqta (jism)larning o‘zaro ta’sirlari mavjud bo‘lsa, u holda har pbir nuqta (jism)ning holati, qolgan barcha nuqta (jism)larning holatiga uzviy bog‘liq bo‘ladi. Bunga klassik misol tarzida quyosh sistemasini olishimiz mumkin bo‘lib, undagi barcha jismlar (Quyosh, planetalar va kometalar) o‘zaro tortilish kuchlari orqali bog‘langanlar.

Mexanik sistemaga ta’sir etuvchi-aktiv kuchlar va $\overline{N}_k$ -reaktsiya kuchlarini $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{a}}$, $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{e}}$ - tashqi va $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}$ -ichki kuchlarga ajratib yuboramiz (bu yerdagi e-extyerior, tashqi va i-intyerior, ichki so‘zlarning birinchi harflaridan iborat). Berilgan mexanik sistemaga kirmagan jismlarning sistema nuqtalariga ta’sir kuchlari, *tashqi* kuchlar deb ataladi. Sistemani tashkil etuvchi nuqta yoki jismlarning o‘zaro ta’sir kuchlari *ichki* kuchlar deb ataladi. Bunday ajratishlik shartli bo‘lib, mexanik sistemani tanlab olishimizga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, agar Quyosh sistemasini tanlab olsak, u holda Yer bilan Quyoshning o‘zaro tortilish kuchlari ichki kuchlar hisoblanadi; agar Yer bilan Oyni bitta sistema deb qabul qilsak, Quyoshning tortilish kuchi endi tashqi kuch hisoblanadi.

Ichki kuchlar quyidagi xossalarga egadilar:

1. *Mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining geometrik yig‘indisi (bosh vektori) nolga teng bo‘ladi*. Dinamikaning uchinchi qonuniga asosan, ixtiyoriy olingan ikkita nuqtaning o‘zaro ta’sir va aks ta’sir kuchlari, bir to‘g‘ri chiziqda yotib, son qiymatlari teng, yo‘nalishlari esa qarama-qarshi bo‘ladi, shu sababli $\overline{F}_{12}^{i}, \overline{F}_{21}^{i}$ -larning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘ladi. Xuddi shunday natijani ixtiyoriy olingan har bir ikkita nuqta uchun yozishimiz mumkin, demak

$$\sum \overline{F}_k^i = 0$$

2. *Mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining ixtiyoriy markazga yoki o‘qqa nisbatan olingan momentlarining yig‘indisi (bosh momenti) nolga teng bo‘ladi*. Haqiqatdan ham, ko‘rinib turibdiki, agar ixtiyoriy olingan O nuqtaga nisbatan momentlarning yig‘indisi $m_O(\overline{F}_{12}^{i})+m_O(\overline{F}_{21}^{i})=0$ bo‘ladi. Xuddi shunday natijani ixtiyoriy o‘qqa nisbatan olingan momentlar uchun ham isbot qilish mumkin, shu sababli mexanik sistema uchun,

$$\sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^i) = 0 \quad \text{va} \quad \sum \overline{m}_x(\overline{F}_k^i) = 0$$

Lekin yuqoridagilarga asosan, ichki kuchlar o‘zaro muvozanatlashib, mexanik sistemaning harakatiga ta’sir qilmas ekan deb hisoblamaslik lozim, chunki bu kuchlar sistemaning turli nuqtalariga qo‘yilgan bo‘lib, shu nuqtalarning nisbiy harakatlariga ta’sir qilishi mumkin. Agar sistema absolyut qattiq jismdan iborat bo‘lsa, u holda ichki kuchlarning yig‘indisi o‘zaro muvozanatlashgan bo‘ladi.

Sistemaning massasi. Massalar markazi.

Mexanik sistemaning harakati, unga ta’sir etuvchi kuchlardan tashqari, sistemaning umumiy massasi va massalarning qanday tarqalganligiga ham bog‘liq bo‘ladi. *Sistemaning massasi* (M yoki m -harflari orqali ifodalanadi), *sistemani tashkil etuvchi nuqtalar yoki jismlarning massalarini arifmetik yig‘indisiga teng bo‘ladi*:

$$M=\sum m_k$$

Massalarning tarqalganligi, sistemaning har bir nuqtasining massasi m_k va shu massalarning o‘zaro qanday joylashgan ekanlikligiga, ya’ni ularning x_k, y_k, z_k koordinatalariga

bog‘liq holda aniqlanadi. Lekin biz quyida ko‘rib o‘tadigan dinamikaga oid, aniqrog‘i qattiq jism dinamikasiga oid masalalarni yechishda, har bir nuqtaning massasi m_k va ularning koordinatalari x_k, y_k, z_k orqali emas, balki ularni xarakterlovchi umumiy ifodalar orqali amalga oshiriladi.

Ulardan biri, *massalar markazining koordinatasi* (sistema nuqtalari massalarining, ularning koordinatalariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi); ikkinchisi, *o‘qqa nisbatan inertsiya momentlari* (sistema nuqtalari massalarining, ularning ikkitadan iborat koordinatalari kvadratlariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi); uchinchisi, *markazdan qochma inertsiya momentlari* (sistema nuqtalari massalarining, ularning ikkita koordinatalariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi). Ushbu bobda, shu xarakteristikalarni aniqlash bilan shug‘ullanamiz.

M a s s a l a r m a r k a z i. Bir jinsli og‘irlik kuchi maydonida, ya’ni g=const bo‘lganda, har bir zarrachaning og‘irligi uning massasiga proportsional bo‘ladi. Shu sababli, sistema massalarining qanday tarqalganligini uning massa markazi orqali aniqlanadi. Og‘irlik markazini aniqlashga oid bo‘lgan formulani, ularning massalari orqali ifodalanadigan ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun, o‘sha formuladagi $r_k=m_kg$ va $P=Mg$ lar orqali ifodalaymiz va tenglikni g -ga qisqartirib yuborsak,

$$x_C=\frac{1}{M}\sum m_k x_k,\quad y_C=\frac{1}{M}\sum m_k y_k,\quad z_C=\frac{1}{M}\sum m_k z_k, \tag{19.1}$$

Olingan formulalarda, moddiy nuqta (zarracha)larni massalari -m_k va shu nuqtalarning x_k, y_k, z_k koordinatalari ishtirok etmoqda. Shu sababli, agar m_k, x_k, y_k, z_k lar sistema nuqtalarining massalari va ularning koordinatalaridan iborat bo‘lsa, haqiqatdan ham C (x_C, y_C, z_C) nuqtaning holati (o‘rni) har qanday jism yoki mexanik sistemaning massalarini tarqalishini xarakterlab beradi.

Koordinatasi (19.1) formula orqali aniqlanadigan C nuqtaning geometrik o‘rni, massalar markazi yoki mexanik sistemaning inertsiya markazi deb ataladi.

Agar, massa markazini uning radius vektor - $\bar{r}_C$ orqali ifodalansa, u holda (19.1) formuladan $\bar{r}_C$ -ni aniqlash formulasini yozamiz

$$\bar{r}_C=\frac{1}{M}\sum m_k\bar{r}_k \tag{19.2}$$

bu yerdagi $\bar{r}_k$- sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning radius-vektorlari.

Yuqorida aniqlangan natijalarga asosan, shuni ta’kidlab o‘tish lozim ekanki, bir jinsli og‘irlik kuchi maydonidagi qattiq jismning og‘irlik markazi va massalar markazining o‘rni bir joyda bo‘lar ekan. Lekin, massalar markazi og‘irlik markazidan mazmunan farqli bo‘lib, u o‘zining o‘rnini har qanday kuch maydonida (masalan, markaziy tortilish maydonida) ham saqlab qoladi va massalarni tarqalganlik xarakteristikasi faqat qattiq jism uchungina o‘rinli bo‘lib qolmasdan, ixtiyoriy mexanik sistema uchun ham o‘rinlidir.

O‘qqa nisbatan inertsiya momenti. Inertsiya radiusi.

Sistema massalar markazining holati sistema massalarining taqsimlanishini to'liq xarakterlay olmaydi. Masalan, bir xil A va V sharlari markazlaridan aylanish o'qi *Oz* gacha bo'lgan *h* masofalarni bab-baravar orttirsak, u holda A va V sharlardan tashkil topgan sistemaning massalar markazi o'zgarmaydi, biroq sistemaning massalari boshqacha taqsimlanadi va natijada sistemaning harakati o'zgaradi (boshqa shartlar o'zgarmaganda aylanish sekinroq sodir bo'ladi). Shu sababli mexanikada sistema massalarining taqsimlanishini xarakterlash uchun *sistemaning inersiya momenti* tushunchasi kiritiladi.

Jism (sistema)ning berilgan Oz o'qqa nisbatan inertsiya momenti deb, jism (sistema)ning barcha nuqtalarining massalarini shu o'qqacha bo'lgan masofalar kvadratlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'lgan, skalyar qiymatga aytiladi:

$$J_z=\sum m_k h_k^2 \qquad (19.3)$$

Yuqoridagi ifodaga asosan, jism (yoki sistema)ning ixtiyoriy o'qqa nisbatan inertsiya momenti, faqat musbat qiymatdan iborat bo'lib, hechqachon nolga teng bo'lmaydi.

Ilgarilanma harakatlarda jismning inertlik xususiyatini uning massasi qanday belgilagan bo'lsa, aylanma harakatdagi jismning inertlik xususiyatini o'qqa nisbatan inertsiya momenti belgilaydi, ya'ni *o'qqa nisbatan inertsiya momenti aylanma harakatdagi jismning inertlik o'lchovi bo'lib xizmat qiladi.*

(19.3) formulaga asosan, jismning inertsiya momenti, uning barcha qismlarining o'sha o'qqa nisbatan inertsiya momentlarining yig'indisiga teng ekan. Aylanish o'qidan h -masofada joylashgan moddiy nuqtaning inertsiya momenti $J_z=mh^2$ -ga teng bo'ladi. SI sistemasida inertsiya momentining o'lchov birligi 1 kg·m^2 (MKGSS sistemasida -1 kg·m·s^2).

O'qqa nisbatan inertsiya momentlarini hisoblash uchun, o'qlardan sistemaning nuqtalarigacha bo'lgan masofalarni ularning x_k, y_k, z_k koordinatalari (masalan, nuqtadan Ox o'qigacha bo'lgan masofaning kvadrati $y_k^2+z_k^2$) orqali ifodalanadi. U holda, Oxyz o'qlariga nisbatan inertsiya momentlari quyidagi formulalar orqali ifodalanadi

$$J_x=\sum m_k(y_k^2+z_k^2),\ J_y=\sum m_k(x_k^2+z_k^2),\ J_z=\sum m_k(x_k^2+y_k^2). \qquad (19.4)$$

Aksariyat, hisoblash ishlarida *inertsiya radiusi* degan iboradan foydalaniladi. Oz o'qiga nisbatan *inertsiya radusi* ρ_z deb, quyidagi musbat skalyar ifodaga aytiladi

$$J_z=M\rho_z^2 \qquad (19.5)$$

bu yerda M - jismning massasi. Yuqoridagi ifodadan ko'rinib turibdiki, inertsiya radiusi bu Oz o'qidan shunday nuqtagacha bo'lgan masofadan iborat ekanki, jismning butun massasini shu nuqtaga joylashtirib, so'ngra shu massaning Oz o'qiga nisbatan olingan inertsiya momentiga teng ekan.

Inertsiya radiusini bilgan holda, (19.5) formula orqali inertsiya momentini aniqlash mumkin yoki inertsiya momentini bilgan holda inertsiya radiusini aniqlash mumkin.

(19.2) va (19.3) formulalar, qattiq jism uchun ham, moddiy nuqtalarning ixtiyoriy sistemalari uchun ham o‘rinlidir. Agar jism yaxlit bo‘lsa, uni elementar bo‘lakchalarga ajratib yuboriladi, har bir elementar qismlarning inertsiya momentlari ning yig‘indisining limiti integralga aylanadi. Hamda dm=ρ·dV, bu yerda ρ-jismning zichligi, V-jismning umumiy hajmi ekanligini e’tiborga olsak, natijada

$$J_z=\int_{(V)} h^2 dm \quad \text{yoki} \quad J_z=\int_{(V)} \rho h^2 dV \tag{19.6}$$

Bu yerdagi integral jismning butun hajmi bo‘yicha olinadi, lekin ρ -zichlik va h - masofa, har bir nuqtaning koordinatasiga bog‘liq ravishda o‘zgaradi. Yaxlit jismlarning o‘qqa nisbatan inertsiya momentlari (19.4) ham, xuddi shu kabi ifodalanadi,

$$J_x=\int_{(V)} \rho(y^2+z^2)dV \quad \text{va h.} \tag{19.7}$$

Bir jinsli to‘g‘ri shakldagi jismlarning inertsiya momentlarini hisoblashda (19.6) va (19.7) formulalar juda katta qulayliklar tug‘diradi. Hamda jismning zichligi o‘zgarmas qiymat bo‘lganligi sababli integral ostidan chiqarib yuboriladi.

Gyuygens teoremasi.

Umuman olganda har bir jismning turli o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlari turlicha bo‘ladi. Quyida biz, jismning biror o‘qqa nisbatan inertsiya momenti aniq bo‘lsa, unga parallel bo‘lgan ixtiyoriy o‘qqa nisbatan inertsiya momentini qanday aniqlashni ko‘rsatib o‘tamiz. Jismning massa markazi C nuqtadan ixtiyoriy yo‘nalgan $Cx'y'z'$ o‘qlar o‘tkazamiz va ixtiyoriy O nuqtadan shu o‘qlarga tegishlicha parallel bo‘lgan, ya’ni $Ox\|Cx'$, $Ou\|Cy'$, $Oz\|Cz'$ -o‘qlarni o‘tkazamiz. Cz' va Oz o‘qlar orasidagi masofani d -harfi bilan belgilaylik. U holda:

$$J_{Oz}=\sum m_z(x_k^2+y_k^2),\ J_{Cz'}=\sum m_z(x_k'^2+y_k'^2).$$

Lekin shakldan ko‘rinib turganidek, ixtiyoriy nuqta uchun $x_k=x_k'-d$ va $x_k^2=x_k'^2+d^2-2x_k'd$, hamda $y_k=y_k'$ bo‘ladi. x_k' va y_k' -larning qiymatlarini J_{Oz} -ifodaga qo‘ysak va umumiy d^2 va $2d$ ko‘paytmalarni qavsdan chiqarsak,

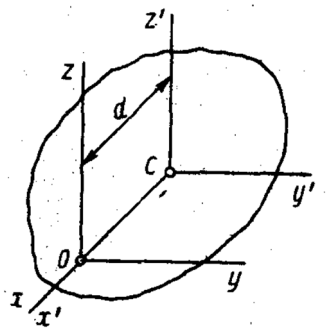
$$J_{Oz}=\sum m_z(x'^2_k+y'^2_k)+(\sum m_k)d^2-(\sum m_k x_k')2d$$

Ushbu tenglikning birinchi yig‘indisi $J_{Cz'}$ -ga teng, ikkinchisi jismning massasini o‘qlar orasidagi masofaning kvadratiga ko‘paytmasiga teng. Uchinchi yig‘indini aniqlaymiz. massa markazining koordinatasi $\sum m_k x_k' = Mx_C'$.

Ushbu masalada, C nuqta koordinata boshi bo‘lganligi uchun $x'_C = 0$ va $\sum m_k x'_k = 0$ bo‘ladi. Natijada,

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2 \qquad (19.8)$$

(19.8) formula G yu g e n s[5] ning quyidagi t e o r e m a s i ni ifodalaydi: *jismning berilgan o‘qqa nisbatan inertsiya momenti, shu o‘qqa parallel ravishda massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti va jismning umumiy massasini o‘qlar orasidagi masofa kvadratiga ko‘paytmasining yig‘indisiga teng ekan.*



19.1- shakl.

(19.8)formuladan ko‘rinib turgandek, $J_{Oz} > J_{Cz'}$. Demak, shu yo‘nalishdagi barcha o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlarining eng kichkinasi massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan bo‘lar ekan.

Agar, biror Az_2 o‘qqa nisbatan inertsiya momenti ma’lum bo‘lsa, Gyuygens teoremasi orqali, shu o‘qqa parallel yo‘nalgan *ixtiyoriy* Oz_1 o‘qqa nisbatan inertsiya momentini aniqlash mumkin ekan. Ammo qo‘shimcha ravishda, har bir o‘qning massa markazigacha bo‘lgan d_1 va d_2 masofalar ma’lum bo‘lishi kerak. U holda J_{Az2} va d_2 -larni bilgan holda (19.8) formula orqali $J_{Cz'}$ -ni aniqlaymiz, so‘ngra o‘sha (19.8) formula orqali J_{Oz1} ni aniqlaymiz.

Markazdan qochma inertsiya momentlari. Jismning bosh inertsiya o‘qlari haqida tushuncha.

Agar O nuqtadan Oxyz o‘qlarni o‘tkazsak, u holda bu o‘qlarga nisbatan, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} qiymatlardan iborat bo‘lgan va

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \quad J_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \quad J_{zx} = \sum m_k z_k x_k \qquad (19.9)$$

formulalar orqali aniqlanadigan markazdan qochma inertsiya momentlari (yoki *inertsiyalar ko‘paytmasi*) deb ataluvchi ifodalar paydo bo‘ladi. Bu yerdagi m_k- nuqtaning massasi x_k, y_k, z_k -lar nuqtaning koordinatalari, hamda $J_{xy} = J_{yx}$ bo‘ladi va h.k.

[5] Xristian Gyuygens (1629-1695 y.) - mashhur golland olimi, mexanik, fizik va astronom. Birinchi mayatnikli soatni kashf qilgan. Shu sababli, fizik mayatnikning tebranishlarini o‘rgangan va jismning inertsiya momenti tushunchasini kiritgan (lekin, bunday atamani keyinroq Eyler taklif qilgan).

Yaxlit jismlar uchun (19.9) formula (19.6) formula kabi quyidagi ko‘rinishga keladi

$$J_{xy}=\int_{(V)}\rho xydV \text{ va h.} \qquad (19.10)$$

Markazdan qochma inertsiya momentlari, o‘qlarga nisbatan momentlardan farqli ravishda, musbat yoki manfiy qiymatlarga ega bo‘lishlari ham mumkin va xususiy holda maxsus yo‘naltirilgan Oxyz o‘qlarga nisbatan nolga teng bo‘lishlari ham mumkin.

B o sh i n e r ts i ya o‘ q l a r i. Simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan bir jinsli jismni olib ko‘raylik. Oxyz koordinata o‘qlarini shunday yo‘naltiraylikki, Oz o‘qi jismning simmetriya o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lsin (19.2- shakl). U holda, simmetriya qoidasiga asosan, jismning m_k - massali va x_k, y_k, z_k - koordinatali har bir nuqtasiga tegishli ravishda boshqa indeksli shunday massali lekin koordinatalari teskari ishorali bo‘lgan, ya’ni $-x_k$, $-y_k$, z_k nuqta, albatta, mavjud bo‘ladi. Natijada $\sum m_k x_k z_k=0$ va $\sum m_k y_k z_k=0$ bo‘ladi, chunki bu yig‘indidagi qiymatlar moduli bo‘yicha o‘zaro teng, lekin teskari ishoralar bilan juft-juft bo‘lib ishtirok etadilar; bundan (19.10) tenglikni e’tiborga olsak

$$J_{xz}=0 \quad J_{yz}=0 \qquad (19.11)$$

bo‘ladi.

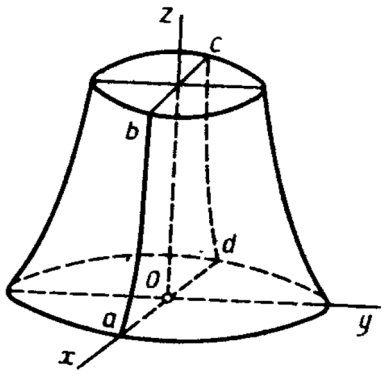
Shunday qilib, z -o‘qiga nisbatan massalar simmetrik ravishda joylashganliklari sababli J_{zx} va J_{yz} lar nolga aylanish bilan xarakterlanadi. *Markazdan qochma inertsiya momenti nolga teng bo‘lgan J_{xz} va J_{yz} qiymatlarning indekslarida ishtirok etgan Oz o‘q, jismning O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi deb ataladi.*

Yuqoridagilarga asosan, *agar jismning simmetriya o‘qi mavjud bo‘lsa, bu o‘q shu jismning ixtiyoriy nuqtasidagi bosh inertsiya o‘qi bo‘ladi.*

Bosh inertsiya o‘qi, albatta jismning simmetriya o‘qi bo‘lishi shart emas. Simmetriya tekislikka ega bo‘lgan, bir jinsli jismni olib ko‘raylik (19.2- shaklda *abcd* tekisligi simmetriya tekisligi hisoblanadi). Shu simmetriya tekisligida yotuvchi Oz, Ox va unga perpendikulyar yo‘nalgan Oy o‘qlarni o‘tkazaylik. U holda, simmetriya qoidasiga asosan, jismning m_k -massali va x_k, y_k, z_k - koordinatali har bir nuqtasiga, tegishli ravishda boshqa indeksli, shunday massali, lekin koordinatalari shunday va

teskari ishorali, ya’ni x_k, $-y_k$, z_k nuqta, albatta, mavjud bo‘ladi. Natijada yuqoridagi kabi $\sum m_k x_k y_k=0$ va $\sum m_k y_k z_k=0$, yoki $J_{xu}=0$, $J_{yz}=0$ bo‘ladi. Shu sababli, y -o‘qi O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi bo‘ladi. Shunday qilib, *agar jism simmetriya tekisligiga ega bo‘lsa, shu tekislikka perpendikulyar ravishda yo‘nalgan ixtiyoriy o‘q, shu tekislikni kesib o‘tgan O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi hisoblanar ekan.*

(19.11) tenglama, Oz -o‘qi jismning O nuqtasi (koordinata boshi)dagi inertsiya o‘qi ekanligining sharti hisoblanadi. Xuddi shu kabi, agar $J_{xy}=0$, $J_{yz}=0$ bo‘lsa, u holda Ou o‘qi jismning O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi hisoblanadi. Demak, *agar barcha markazdan qochma inertsiya momentlari, ya’ni*



19.2- shakl

$$J_{xy}=0, \quad J_{yz}=0, \quad J_{zx}=0 \qquad (19.12)$$

bo‘lsa, u holda har bir koordinata o‘qlari, jismning O nuqta (koordinata boshi) dagi bosh inertsiya o‘qi hisoblanadi.

Masalan, 19.2- shakldagi uchala Oxyz -o‘qlari (Oz -o‘qi simmetriya o‘qi bo‘lganligi sababli, Ox va Oy -o‘qlari esa simmetriya tekisligiga perpendikulyar bo‘lganligi sababli) jismning O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qlari hisoblanadi.

Bosh inertsiya o‘qlariga nisbatan aniqlangan inertsiya momentlari *jismning bosh inertsiya momentlari* deb ataladi.

Jismning massalar markazidan o‘tkazilgan bosh inertsiya o‘qlari, *bosh markaziy inertsiya o‘qlari* deb ataladi. Yuqorida isbot qilinganlarga asosan, agar jism simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, u holda bu o‘q jismning bosh markaziy o‘qlaridan biri hisoblanadi, chunki massa markazi shu o‘qda joylashgan bo‘ladi. Agar, jism simmetriya tekisligiga ega bo‘lsa, u holda shu tekislikka perpendikulyar bo‘lib, jismning massa markazidan o‘tsa, bu o‘q ham bosh markaziy inertsiya o‘qlaridan biri hisoblanadi.

Qattiq jism dinamikasida, bosh inertsiya o‘qlari tushunchasi katta ahamiyatga ega bo‘ladi. Agar Oxyz -koordinata o‘qlarini, ana shu bosh inertsiya o‘qlari bo‘yicha yo‘naltirsak, u holda hamma markazdan qochma inertsiya kuchlari nolga teng bo‘ladi, natijada tegishli tenglamalar va formulalar nihoyatda sodda holga keladilar.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Inertsiya moment deb nimaga aytiladi?
2. Sitemaning massasi va massalar markazini aniqlovchi ifodalarni keltiring.
3. Sistemaning o’qqa (nuqta yoki tekislikka) nisbatan inersiya momenti tushunchasining ta’rifini bering va ifodalarini keltiring.
4. Inersiya radiusi deb qanday o’lchamga aytiladi?

20-MAVZU: Mexanik tizim massalar markazining harakati haqidagi teorema.

Reja

1. Massalar markazi harakatining saqlanish qonuni.

2. Moddiy nuqta va mexanik tizim harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema.

3. Harakat miqdorining saqlanish qonuni.

Tushuncha va tayanch iboralar

Sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema, Sistema massalar markazi harakatining saqlanish qonuni, harakat miqdori, harakatmiqdorini saqlanish qonuni.

Mavzuni bayoni.

Ayrim hollarda, mexanik sistema (ayniqsa, qattiq jism) harakatining xarakterini aniqlash uchun, uning massalar markazining harakatini aniqlash lozim bo'ladi. Ushbu qonuniyatni aniqlash uchun, differentsial tenglamalar sistemasini o'ng va chap tomonlarini hadma-had qo'shamiz. Natijada

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i \qquad (20.1)$$

Tenglamaning chap tarafiga o'zgartirishlar kiritamiz. Radius-vektor uchun formuladan massa markazini aniqlaymiz

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C$$

Tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olsak va yig'indining hosilasi hosilalarning yig'indisiga teng ekanligi sababli

$$\sum m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2}$$

yoki

$$\sum m_k \bar{a}_k = M\bar{a}_C \qquad (20.2)$$

bu yerdagi $\bar{a}_C$- massalar markazining tezlanishi. Ichki kuchlarning xossasiga asosan $\sum \bar{F}_k^i = 0$ bo'ladi, natijada (20.2) e'tiborga olsak (20.1) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e \qquad (20.3)$$

(20.3) tenglama sistema massalarining markazini harakati haqidagi teoremani ifodalaydi: *sistemaning massasini uning massa markazini tezlanishiga ko‘paytmasi, sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng ekan. sistemaning massalari markazi, massasi sistemaning massasiga teng bo‘lgan va sistemaga qo‘yilgan barcha tashqi kuchlar ta’siridagi moddiy nuqta kabi harakatda bo‘lar ekan.*

(20.3) tenglikning ikkala tomonini koordinata o‘qlariga proyektsiyalasak

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e\,,\quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e\,,\quad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e \qquad (20.4)$$

Ushbu tenglamalar, *massa markazi harakatining differentsial tenglamasini* dekart koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalaridan iborat.

Yuqorida isbot qilingan teoremaning mohiyati quyidagicha:

1.Teorema nuqta dinamikasining usullariga asos bo‘lib xizmat qiladi. (20.4) tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, jismni moddiy nuqta deb hisoblab, ushbu tenglamalarni yechish natijasida shu jismning massa markazini harakatini aniqlar ekanmiz, ya’ni aniq birmazmunga ega ekan.

Xususiy holda, agar jism ilgarilanma harakatda bo‘lsa, massa markazining harakati jismning harakatini to‘liq ravishda ifodalaydi. Shunday qilib, *ilgarilanma harakatdagi qattiq jismni, massasi sistemaning massasiga teng bo‘lgan moddiy nuqta deb hisoblash mumkin ekan. J*ismning harakatini uning massa markazini holatini bilish kifoya qilgan hollarda yoki masalaning shartiga ko‘ra aylanma harakatni e’tiborga olinmaydigan hollarda ham, jismni moddiy nuqta deb hisoblash mumkin bo‘ladi.

Massalar markazining harakatini saqlanish qonuni.

Massalar markazining harakati haqidagi teoremadan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsin

$$\sum \bar{F}_k^e = 0$$

U holda (20.3) tenglamaga asosan $\bar{a}_C = 0$ yoki $\bar{v}_C$=const bo‘ladi.

Demak, *agar sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistemaning massa markazining tezligining son qiymati va yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lar ekan, ya’ni tekis va to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lar ekan.* Xususiy holda, agar jismning massalar markazi qo‘zg‘almas bo‘lgan bo‘lsa, qo‘zg‘almasligicha qolar ekan. Ko‘rinib turgandek, ichki kuchlarning jismga ta’siri uning massalar markazini harakatini o‘zgartira olmas ekan.

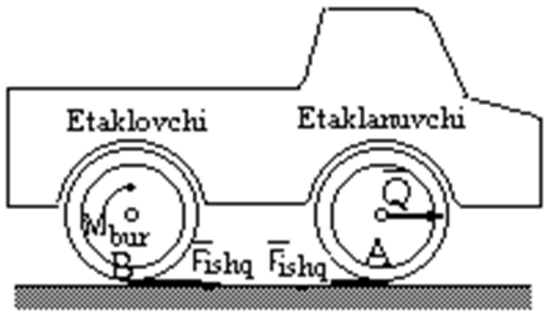
2. Jismga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning yig‘indisi nolga teng emas, lekin ularning birorta koordinata o‘qdagi (masalan, *x* o‘qdagi) proyektsiyalarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsin, ya’ni

$$\sum F_{kx}^{e} = 0$$

U holda, (20.4) tenglamaning birinchisidan,

$$\ddot{x}_C = 0 \quad \text{yoki} \quad \dot{x}_C = \mathrm{v}_{Cx} = const \ .$$

Demak, *agar sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o‘qdagi proyektsiyalarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, massalar markazining tezligini shu o‘qdagi proyektsiyasi o‘zgarmas bo‘lar ekan.* Xususiy holda, masalan, boshlang‘ich tezlikning *x* o‘qdagi



20.1- shakl

proyektsiyasi $v_{Cxo}=0$ bo‘lsa, keyingi hamma vaqtlarda ham u nolga teng bo‘ladi, ya’ni massalar markazi *x* o‘qi bo‘ylab harakat qilmaydi (x_C=const).

Yuqorida olingan barcha natijalar, *massalar markazining harakatini saqlanish qonuni*ni ifodalaydi. Quyida shu qonunni amaldagi ko‘rinishlarini ko‘rsatuvchi ba’zi misollarni ko‘rib o‘tamiz.

T o r m o z l a sh. Tormozlash uchun avtomobilning kuzoviga qattiq mahkamlangan tormoz kolodkalari bilan dumalab ketayotgan g‘ildirakning barabanini qattiq siqadilar. Buning natijasida kolodkalar bilan baraban orasida paydo bo‘ladigan ishqalanish kuchlari o‘z-o‘zidan massalar markazining harakatini o‘zgartira olmaydi, ya’ni poezd yoki avtomobilni to‘xtata olmaydi, chunki bu kuchlar ichki kuchlar hisoblanadi. Lekin, kolodkalarning barabanga ishqalanishi natijasida g‘ildirakning o‘z o‘qi atrofidagi aylanishi sekinlashadi va g‘ildirak bilan rels (yoki yer) orasida harakatga teskari yo‘nalishda bo‘lgan sirpanib ishqalanish kuchi paydo bo‘ladi. Bu kuch, tashqi kuch hisoblanadi va u poezd yoki avtomobilning massalari markazining harakatini sekinlashtiradi, ya’ni harakatni tormozlaydi.

Sistemaning harakat miqdori deb, sistema nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig‘indisi (bosh vektori)ga teng bo‘lgan $\overline{\mathrm{Q}}$ *-vektorga aytiladi*

$$\overline{\mathrm{Q}} = \sum \mathrm{m}_k \overline{\mathrm{v}}_k \qquad (20.5)$$

Ushbu ifodadan foydalangan holda, $\overline{Q}$-ning qiymatini bir muncha oson yo‘l bilan aniqlaydigan formulani keltirib chiqaramiz va uning mazmunini yoritib byeramiz.

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C$$

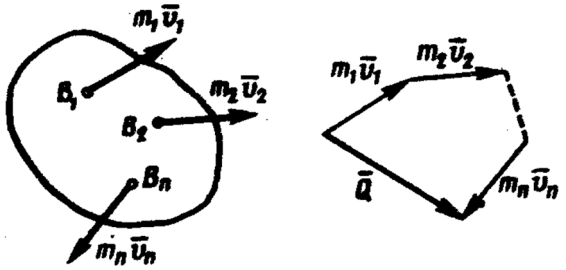
Bu tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo‘yicha hosila olsak

$$\sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = M\frac{d\bar{r}_C}{dt} \quad \text{yoki} \quad \sum m_k \bar{\mathrm{v}}_\mathrm{k} = M\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{C}$$

Bundan oxirgi natijani olamiz, ya’ni

$$\overline{Q} = M\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{C} \tag{20.6}$$

ya’ni, *sistemaning harakat miqdori, sistemaning butun massasini uning massasi markazining tezlik vektoriga ko‘paytmasiga teng ekan.* Bu formula qattiq jismlarning harakat miqdorlarini



20.2- shakl.

aniqlashda juda qo‘l keladi.

(20.6) formuladan ko‘rinib turibdiki, agar jism (yoki sistema)ning harakatida, uning massasini markazi qo‘zg‘almas bo‘lsa, u holda jismning (sistemaning) harakat miqdori nolga teng bo‘lar ekan. Masalan, massa markazidan o‘tuvchi qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakat qilayotgan jismning harakat miqdori nolga teng bo‘lar ekan.

Agar harakat murakkab bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori $\overline{Q}$, uning aylanma harakatiga bog‘liq bo‘lmas ekan. Masalan, dumalab ketayotgan g‘ildirakning harakat miqdori $\overline{Q} = M\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{C}$ -ga teng bo‘lib, g‘ildirakning massa markazi C atrofidagi harakatiga bog‘liq bo‘lmas ekan.

Shunday qilib, harakat miqdorini sistema (jism)ning faqat ilgarilanma harakatining xarakteristikasi deb qarash lozim ekan. Murakkab harakatda esa, uning massa markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatining xarakteristikasidan iborat ekan xolos.

Harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema.

N -ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistemani olib ko‘raylik. Bunday sistemaning harakatini differentsial tenglamalarini tuzaylik va ularni hadma-had qo‘shaylik. Natijada

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$

Ichki kuchlarning xossasiga binoan oxirgi yig‘indi nolga teng bo‘ladi. Undan tashqari

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{Q}}{dt}$$

bundan oxirgi natijani olamiz

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e \qquad (20.7)$$

(20.7) formula, sistema harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teoremaning differentsial formasini ifodalaydi: *sistemaning harakat miqdoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila, sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng ekan*. Koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \qquad (20.8)$$

Teoremaning boshqacha ifodasini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, t=0 da sistemaning harakat miqdori Q_0 bo‘lsin, $t=t_1$ da Q_1 bo‘lsin. U holda (20.9) tenglamaning ikkala tomonini dt-ga ko‘paytirib, so‘ngra integrallasak

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^t \bar{F}_k^e dt$$

yoki

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e \qquad (20.10)$$

chunki, yuqoridagi tenglamaning o‘ng tomonidagi integrallar, tashqi kuchlarning impulslaridan iborat.

(20.10) vektor tenglama, sistema harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teoremaning integral formasini ifodalaydi: *sistemag harakat miqdorining ma’lum vaqt oralig‘idagi o‘zgarishi, shu vaqt oralig‘ida sistemaga ta’sir etgan tashqi kuchlarning impulslarini geometrik yig‘iindisiga teng ekan.* Koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalari quyidagicha bo‘ladi:

$$Q_{1x}-Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y}-Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1z}-Q_{0z} = \sum S_{kz}^e \qquad (20.11)$$

Ushbu teorema bilan massalar markazining harakati haqidagi teoremaning orasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatib o‘tamiz. $\bar{Q} = M\bar{v}_C$ bo‘lgani uchun va $d\bar{v}_C / dt = \bar{a}_C$ -ekanligini e’tiborga olsak $M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$ bo‘ladi.

Demak, massalar markazining harakati haqidagi teorema va harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema, aslida bitta teoremaning turli ko‘rinishlarini ifoda etar ekan. Qattiq jismning (yoki jismlar sistemasining) harakatini o‘rganish hollarida, ushbu teoremalarning ixtiyoriy ko‘rinishlaridan foydalanish mumkin bo‘ladi.

Teoremaning amaliy muhim ahamiyati shundaki, uning yordamida oldindan noma’lum bo‘lgan ichki kuchlarni (masalan, suyuqlik zarrachalarining o‘zaro bosim kuchlarini) tenglamalardan chiqarib yuborishga yordam beradi.

Harakat miqdorining saqlanish qonuni.

Harakat miqdorining saqlanish qonunidan quyidagi muhim xulosalarni chiqarish mumkin.

1.Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsin:

$$\sum \overline{F}_k^e = 0$$

Shunday qilib, agar, *sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori vektori, ham moduli bo‘yicha, ham yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lar ekan.*

2. Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisining biror (masalan, Ox) o‘qdagi proyektsiyasi nolga teng bo‘lsin:

$$\sum F_{kx}^e = 0$$

U holda, Q_x=const ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, agar, *sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisining biror o‘qdagi proyektsiyasi nolga teng bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori vektorining shu o‘qdagi proyektsiyasi o‘zgarmas bo‘lar ekan.*

Ushbu natijalar, *sistemaning harakat miqdorini saqlanish qonunini* ifodalaydi. Bulardan ko‘rinib turibdiki, sistemaning ichki kuchlari, uning harakat miqdorini bevosita o‘zgartira olmas ekan. Ba’zi bir misollarni ko‘rib o‘tamiz.

S i l t a s h v a t i s t a r i s h (o t k a t , o r q a g a t e p i s h) h o d i s a s i . Agar miltiq va o‘qni bir mexanik sistema deb faraz qilsak, porox otilganda paydo bo‘ladigan gazlarning bosim kuchi ichki kuch hisoblanadi. Shu sababli, bu kuch sistemaning boshlang‘ich holatda nolga teng bo‘lgan harakat miqdorini o‘zgartira olmaydi. Lekin porox gazlarining bosim kuchi o‘qqa ta’sir etib, unga ma’lum miqdorda oldinga yo‘nalgan harakat miqdori beradi. Natijada, miltiq ham xuddi shunday miqdorda, lekin orqa tomonga yo‘nalgan harakat miqdori oladi. Bu esa miltiqni orqa tomonga qarab harakat qilishga olib keladi, ya’ni siltanishga olib keladi. Agar, og‘ir artilyeriyadan to‘p otilsa, orqa tomonga qarab siltanish kuchli bo‘ladi va uni tisarilish (otkat) deb ataladi.

E s h k a k v i n t (p r o p e l l e r) n i n g i s h i . Vint (suv kemasini yoki samolyotni harakatga keltiruvchi parrak-targ), ma’lum massaga ega bo‘lgan havo (suyuqlik)ni o‘zidan orqa tomonga olib tashlab, unga vintning o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan tezlik beradi. Agar, otib

tashlanayotgan havo (suv)ni va samolyot (kema)ni bir sistema deb hisoblasak, vint va muhit(havo, suv)ning o‘zaro ta’sir kuchlari ichki kuchlar bo‘lganligi uchun, sistemaning harakat miqdorini o‘zgartira olmaydi. Shu sababli, havo (suv)ni orqaga itarib (otib) yuborish natijasida samolyot (kema) oldinga yo‘nalgan tezlik oladi. Natijada, orqaga otib yuborilgan havo(suv)ning harakat miqdori bilan, samolyot (kema)ning oldinga qarab harakatdagi harakat miqdorlarining yig‘indisi har doim nolga teng bo‘ladi, chunki harakat boshlanguncha sistemaning umumiy harakat miqdori nolga teng bo‘lgan edi.

Xuddi shunday holat, qayiqni eshkak bilan yoki suzuvchi g‘ildirak bilan harakatlantirishda ham sodir bo‘ladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Tizim massalar markazining harakati haqidagi teorema qanday ifodalanadi?
2. O’zgaruvchan massali jism deb qanday jismga aytiladi?
3. Mexanik tizimning harakat miqdori nima?
4. Mexanik tizim harakat miqdorining o’zgarish haqidagi teoremaning ta’rifi va uni xarakterlovchi ifodani keltiring

21-MAVZU: Moddiy nuqta va mexanik tizim harakat miqdorining markazga yoki o'qqa nisbatan momenti.

Reja

1. Moddiy nuqta harakat miqdorining kinetik momentining o’zgarishi haqidagi teorema.

2. Mexanik tizim harakat miqdorining kinetik momentining o’zgarishi haqidagi teorema.

3. Kinetik momentning saqlanish qonuni.

Tushuncha va tayanch iboralar

Kinetik moment, harakat miqdori, mexanik tizim, bosh moment, o’qqa nisbatan harakat miqdori, aylanayotgan jismning kinetik moment.

Mavzuni bayoni.

Bitta moddiy nuqta uchun harakat miqdorining momenti haqidagi tushuncha bilan tanishgan edik. *Sistemaning O markazga nisbatan harakat miqdorining bosh momenti (*yoki *kinetik momenti) deb, sistemaning barcha nuqtalarining harakat miqdorlarini shu markazga nisbatan olingan momentlarining geometrik yig‘indisidan iborat bo‘lgan* $_{O}$ *-vektor qiymatiga aytiladi*[6]*:*

[6] Ixchamroq so‘zlar bilan aytish maqsadida $\overline{K}_O$ -ni kinetik moment yoki sistema harakat miqdorining momenti deb ataladi.

$$\overline{K}_O=\sum \overline{m}_O(m_k \overline{v}_k) \qquad (21.1)$$

Koordinata o‘qlariga nisbatan harakat miqdori momentlari ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$K_x=\sum m_x(m_k \overline{v}_k), \quad K_y=\sum m_y(m_k \overline{v}_k), \quad K_z=\sum m_z(m_k \overline{v}_k) \qquad (21.2)$$

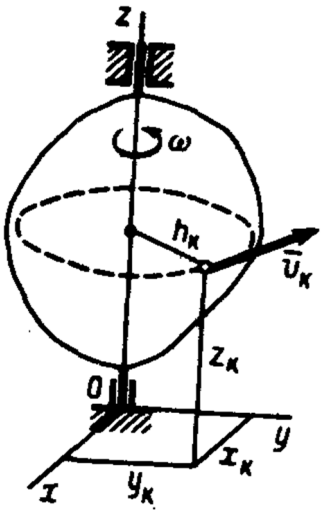
K_x, K_y, K_z -lar o‘z navbatida, $\overline{K}_O$ vektorning koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalaridan iborat bo‘ladi. Avval ta’kidlanganidek, sistemaning harakat miqdori, uning faqat ilgarilanma harakatining xarakatyeristikasidan iborat bo‘ladi. Quyidagilardan shu ma’lum bo‘ladiki, *sistema harakat miqdorining bosh momenti (kinetik momenti) sistemaning aylanma harakatining xarakteristikasini aniqlaydi.*

Aylanayotgan jismning kinetik momenti. Amaliy (aniq bir) misol tariqasida, qo‘zg‘almas z o‘qi atrofida aylanayogan qattiq jismning harakat miqdori momentini koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalari, ya’ni K_x, K_y, K_z -larni aniqlashni ko‘rib chiqamiz (21.1- shakl). 1. K_z*-ni aniqlash*. Aylanish o‘qidan h_k -masofada joylashgan ixtiyoriy nuqtaning tezligi $v_k=\omega h_k$ (ω-jismning burchakli tezligi) bo‘ladi. Demak, shu nuqta uchun $m_z(m_k \overline{v}_k)=m_k v_k h_k= m_k h_k^2 \omega$ bo‘ladi. Butun jism uchun umumiy bo‘lgan ω-ni qavsdan tashqariga chiqarib tashlasak

$K_z=\sum m_z(m_k \overline{v}_k)=(\sum m_k h_k^2)\omega$ Qavs ichidagi qiymat, qattiq jismning z o‘qiga nisbatan inertsiya momentidan iborat U holda,

$$K_z=J_z\omega, \qquad (21.3)$$

Shunday qilib, *aylanayotgan jismning aylanish o‘qiga nisbatan kinetik momenti, jismning*



21.1- shakl.

shu o‘qqa nisbatan inertsiya momentini uning burchakli tezligiga bo‘lgan ko‘paytmasiga teng ekan.

Agar sistema faqat bitta o‘q atrofida turlicha burchakli tezliklar bilan aylanayotgan bir nechta jismlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda:

$$K_z=J_{1z}\omega_1+ J_{2z}\omega_2+,...,+ J_{nz}\omega_{n.}. \qquad (21.4)$$

Jismning O_l oniy aylanish o‘qi atrofidagi burilishida ham (21.3) formula o‘rinli hisoblanadi. Chunki, bunday harakatda ham jism nuqtalarining tezliklar maydoni qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatdagi kabi aniqlanadi. Shunday qilib

$$K_l=J_l\omega. \qquad (21.5)$$

K_x va K_y -*ni aniqlash.* K_x - ni aniqlash uchun $m_x(\overline{v}_k)$ -ni xuddi kuchning momenti singari hisoblanadi; buning uchun F - ni o‘rniga v - ni qo‘yib, formuladan foydalanamiz. U holda,

$$m_x(\overline{v}_k)=y_kv_{kz}-z_kv_{ky}.$$

Formulaga asosan $v_{ky}=\omega x_k$, $v_{kz}=0$; shu sababli, $m_x(\overline{v}_k)=-x_kz_k\omega$. Umumiy ko‘paytma bo‘lgan ω-ni qavsdan tashqariga chiqarib yuborsak, natijada

$$K_x=\sum m_x(m_k\overline{v}_k)=-(\sum m_kx_kz_k)\omega=-J_{xz}\omega.$$

Qavs ichidagi qiymat, markazdan qochma inertsiya momentidan iborat. Agar, hamma joydagi *x* -ni o‘rniga *u*-ni qo‘ysak xuddi shu usul bilan K_u-ni aniqlaymiz, ya’ni

$$K_x=-J_{xz}\omega,\ \ K_y=-J_{yz}\omega. \qquad (21.6)$$

Shunday qilib, aylanayotgan jismning Oz aylanish o‘qida yotuvchi, O markazga nisbatan kinetik momenti Oxyz o‘qdagi proyektsiyalari (21.4) va (21.6) formulalar orqali aniqlanadigan $\overline{K}_O$ vektordan iborat ekan. Ko‘rinib turgandek umumiy holda $\overline{K}_O$ vektor Oz aylanish o‘qida yotmas ekan. Lekin Oz o‘qi O nuqta uchun jismniing bosh inertsiya o‘qi (xususiy holda, simmetriya o‘qi) bo‘lsa, u holda $J_{xz}=J_{yz}=0$. Shu sababli $K_x=K_y=0$ va $K_O=K_z$ bo‘ladi. Demak, agar jism O nuqta uchun jismning bosh inertsiya o‘qidan iborat bo‘lgan o‘q (yoki simmetriya o‘qi) atrofida aylanayotgan bo‘lsa, u holda $\overline{K}_O$ vektor aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘naladi va son qiymati bo‘yicha K_z ga teng bo‘ladi, ya’ni $J_z\omega$ -ga teng bo‘ladi.

Sistema harakat miqdorining bosh momentini o‘zgarishi haqidagi teorema. (Momentlar teoremasi).

Bitta moddiy nuqta uchun isbot qilingan momentlar teoremasi, sistemaning har bir nuqtasi uchun o‘rinli hisoblanadi. Demak, sistemaning m_k, massali va tezligi $\overline{v}_k$, bo‘lgan nuqtasini olib ko‘rsak, ushbu teorema quyidagicha yoziladi

$$\frac{d}{dt}[\overline{m}_O(m_k\overline{v}_k)]=\overline{m}_O(\overline{F}_k^e)+\overline{m}_O(\overline{F}_k^i),$$

bu yerdagi $\overline{F}_k^e$ va $\overline{F}_k^i$ -shu nuqtaga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchilari.

Shunday tenglamalarni har bir nuqta uchun yozib chiqib, so‘ngra ularni hadma-had qo‘shsak,

$$\frac{d}{dt}[\Sigma\, \overline{m}_O(m_k \overline{v}_k)]=\Sigma\, \overline{m}_O(\overline{F}_k^e)+\Sigma\, \overline{m}_O(\overline{F}_k^i),$$

Lekin, ichki kuchlarning xossasiga asosan oxirgi yig‘indi nolga teng bo‘ladi. Shu sababli

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt}=\Sigma\, \overline{m}_O(\overline{F}_k^e). \qquad (21.7)$$

Ushbu tenglama, sistema uchun quyidagi momentlar teoremasini ifodalaydi: *ixtiyoriy qo‘zg‘almas nuqtaga nisbatan sistemaning harakat miqdorini bosh momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu nuqtaga nisbatan olingan momentlarining geometrik yig‘indisiga teng ekan.*

(21.7) tenglikning ikkala tomonlarini qo‘zg‘almas Oxyz o‘qlarga proyektsiyalasak

$$\frac{dK_x}{dt}=\Sigma m_x(\overline{F}_k^e),\quad \frac{dK_y}{dt}=\Sigma m_y(\overline{F}_k^e),\quad \frac{dK_z}{dt}=\Sigma m_z(\overline{F}_k^e) \qquad (21.8)$$

hosil bo‘ladi.

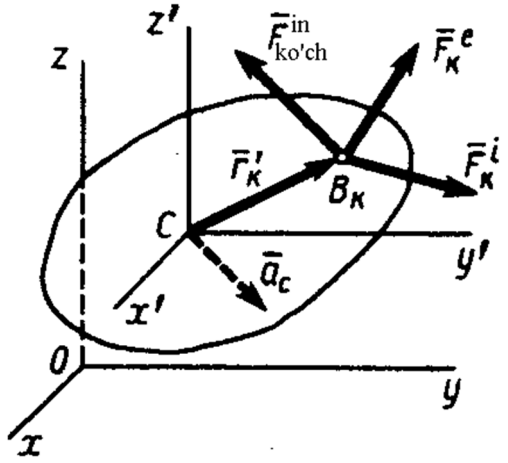
(21.8) tenglama, ixtiyoriy qo‘zg‘almas o‘qqa nisbatan olingan momentlar teoremasini ifodalaydi.

Ushbu teoremadan jismlarning aylanma harakatlarini, giroskoplar nazariyasini va zarba nazariyasini o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Lekin, teoremaning mohiyati shu bilan chegaralanib qolmaydi. Kinematika qismida qattiq jismning har qanday murakkab harakati, uning qutb bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatidan va shu qutb atrofidagi aylanma harakatdan tashkil topganligini ko‘rib o‘tgan edik.

Agar massa markazini qutb deb tanlab olinsa, u holda jismning ilgarilanma harakatini massa markazining harakati haqidagi teorema orqali, aylanma harakatini esa momentlar teoremasi orqali aniqlash mumkin. Bundan ko‘rinib turibdiki, erkin jismlarning harakatlarini o‘rganishda, ayniqsa, tekislikka parallel harakatlarni o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Ushbu teoremaning muhim amaliy ahamiyatlaridan yana biri shuki, harakat miqdorining o‘zgarish teoremasidagi kabi, sistemaning aylanma harakatlarida uchraydigan noma'lum ichki kuchlarni tenglamalardan chiqarib tashlashda juda ham qo‘l keladi.

Massalar markaziga nisbatan momentlar teoremasi. Ushbu teoremani, jismning tekislikka parallel harakatlariga yoki erkin qattiq jismning harakatlariga qo‘llash uchun, avvalo, bu teoremani massalar markaziga nisbatan bo‘lgan ifodasini aniqlab olish lozim. Faraz qilaylik, qo‘zg‘almas Oxyz koordinata o‘qlariga nisbatan mexanik sistemaning harakati o‘rganilayotgan bo‘lsin. $Cx'y'z'$ o‘qlar esa, sistemaning massalar



21.2- shakl

markazi C nuqtaga (21.2- shakl) o‘rnatilgan bo‘lib, u bilan birgalikda ilgarilanma harakatda bo‘lsin va shu sababli $Cx'y'z'$ o‘qlar sistemaning massalar markazining tezlanishiga teng bo‘lgan $\bar{a}_C$ -tezlanish bilan harakatlansin.

Ko‘rsatib o‘tilgandek, dinamikaning barcha tenglamalarini qo‘zg‘almas o‘qlardagi kabi $Cx'y'z'$ o‘qlarga nisbatan yozish mumkin, lekin sistemaning har bir nuqtasiga ta’sir etuvchi tashqi $\bar{F}^{e}_{k}$ va ichki $\bar{F}^{i}_{k}$ kuchlardan tashqari ko‘chirma inertsiya kuchi $\bar{F}^{in}_{ko'ch}$ -ni qo‘shish shart ekan (ushbu masalada koriolis inertsiya kuchi qo‘shilmaydi, chunki $Cx'y'z'$ o‘qlar faqat ilgarilanma harakat qiladi). Shu sababli, $Cx'y'z'$ o‘qlar uchun quyidagicha yoziladi

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt}=\sum \bar{m}_C(\bar{F}^{e}_{k})+\sum \bar{m}_C(\bar{F}^{in}_{ko'ch}) \qquad (21.9)$$

bu yerda, ichki kuchlarning ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng ekanligi uchun u yozilmadi. $\bar{K}_C$ -ning qiymati, quyidagi formula orqali aniqlanadi

$$\bar{K}_C=\sum \bar{m}_C(m_k \bar{v}'_k) \qquad (21.10)$$

bu yerdagi $\bar{v}'_k$ -sistema nuqtalarining qo‘zg‘aluvchi $Cx'y'z'$ o‘qlarga nisbatan tezligi.

(21.9) formulaning oxirgi yig‘indisining son qiymatini aniqlaymiz. Ta’rifga ko‘ra, $\overline{F}^{in}_{kko'ch} = -m_k \overline{a}_{kko'ch}$. $\tilde{N}x'y'z'$ o‘qlar ilgarilanma harakat qilganligi uchun, sistemaning ixtiyoriy B_k nuqtasi uchun $\overline{a}_{ko'ch} = \overline{a}_C$ bo‘ladi. Shu sababli $\overline{F}^{in}_{ko'ch} = -m_k \overline{a}_C$ va $\overline{m}_C(\overline{F}^{in}_{ko'ch}) = \overline{r}'_k \times (-m_k \overline{a}_C) = -m_k \overline{r}'_k \times \overline{a}_C$. Umumiy ko‘paytma $\overline{a}_C$ -ni qavsdan chiqarib tashlab va $\sum m_k \overline{r}'_k = M\overline{r}'_C$ ekanligini e’tiborga olsak

$$\sum \overline{m}_C(\overline{F}^{in}_{ko'ch}) = -(\sum m_k \overline{r}'_k) \times \overline{a}_C = -M\overline{r}_C \times \overline{a}_C = 0$$

hosil bo‘ladi, chunki C nuqta, $\tilde{N}x'y'z'$ o‘qlarning koordinata boshi hisoblanadi va shu sababli $\overline{r}'_C = 0$ bo‘ladi. Natijada (21.9) tenglamaning oxirgi ko‘rinishi

$$\frac{d\overline{K}_C}{dt} = \sum \overline{m}_C(\overline{F}^e_k) \qquad (21.11)$$

dan iborat bo‘ladi.

Ushbu natijani (21.7) tenglama bilan solishtirish orqali quyidagi xulosaga kelamiz, ya’ni: *sistemaning massalar markazi bilan ilgarilanma harakatda bo‘lgan o‘qlar uchun massalar markaziga nisbatan olingan momentlar teoremasi, qo‘zg‘almas markazga nisbatan olingan ko‘rinishini saqlab qolar ekan.* $\tilde{N}x'y'z'$ o‘qlarga nisbatan (21.11) formula orqali aniqlanadigan momentlar (21.8) formula bilan bir xilda bo‘lar ekan.

Yuqorida ko‘rilgan qo‘zg‘aluvchi hisob sistemasidan boshqa har qanday o‘qlarda yoki $\overline{r}'_C \neq 0$ bo‘ladi yoki koriolis inertsiya kuchi nolga teng bo‘lmaydi, natijada momentlar teoremasining ko‘rinishi (21.7) tenglamalardan farq qiladi.

Harakat miqdori bosh momentining saqlanish qonuni.

Momentlar teoremasidan quyidagi xulosalar kelib chiqadi.

1.Sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning O markazga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsin

$$\Sigma \overline{m}_O(\overline{F}^e_k) = 0.$$

U holda, (21.7) tenglamadan $\overline{K}_O = \text{const}$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, *agar sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning biror markazga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistema harakat miqdorining shu nuqtaga nisbatan olingan bosh momenti ham son qiymati bo‘yicha, ham yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lar ekan.* Ushbu natijani planetalarning harakatlariga tatbiqi 86§ da ko‘rib o‘tilgan.

2.Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o‘qqa bo‘lgan proyektsiyalarining yiig‘indisi nolga teng bo‘lsin

$$\sum m_z(\overline{F}_k^e)=0$$

U holda, (21.7) tenglamadan K_z=const ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, *agar sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning biror o‘qqa nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistema harakat miqdorining shu o‘qqa nisbatan olingan bosh momenti o‘zgarmas bo‘lar ekan.*

Ushbu natijalar, *sistema harakat miqdorining bosh momentini saqlanish qonunini* ifodalab byerar ekan. Bundan xulosa qilib shuni ta’kidlash lozimki, sistemaning harakat miqdorining bosh momentini ichki kuchlar o‘zgartira olmas ekan.

A y l a n a y o t g a n s i s t e m a . Qo‘zg‘almas z o‘q (yoki massa markazidan o‘tuvchi o‘q) atrofida aylanayotgan mexanik sistemani olib ko‘raylik. U holda (21.3) formulaga asosan $K_z=J_z\omega$ bo‘ladi. Agar $\sum m_z(\overline{F}_k^e)=0$ bo‘lsa, u holda

$$J_z\omega=\text{const}$$

Bundan quyidagi xulosalarga kelamiz:

a) agar sistema o‘zgarmas (absolyut qattiq jism) bo‘lsa J_z=const bo‘ladi va natijada ω=const, ya’ni qo‘zg‘almas o‘qqa o‘rnatilgan qattiq jism, o‘zgarmas burchakli tezlik bilan aylanma harakat qiladi;

b) agar sistema o‘zgaruvchan bo‘lsa, u holda ichki (yoki tashqi) kuchlar ta’sirida, uning ayrim nuqtalari o‘qdan uzoqlashishi natijasida J_z ning qiymati ortishi mumkin yoki yaqinlashishi natijasida J_z kamayishi mumkin. Lekin $J_z\omega$=const bo‘lgani sababli, inertsiya momentining ortishi bilan sistemaning burchakli tezligi kamayadi va inertsiya momentining kamayishi bilan sistemaning burchakli tezligi ortadi. Shunday qilib, ichki kuchlarning ta’siri hisobiga sistemaning burchakli tezligini o‘zgartirish mumkin ekan, chunki K_z- ning o‘zgarmas ekanligi ω - ning o‘zgarmas ekanligini bildirmaydi.

Ba’zi bir misollarni ko‘rib o‘tamiz.

a) J u k o v s k i y p l a t f o r m a s i b i l a n t a j r i b a l a r o ‘ t k a z i s h . Harakat miqdori momentini saqlanish qonunini demonstratsiya qilish (ko‘rsatish) uchun «Jukovskiy platformasi» deb ataluvchi sodda pribordan foydalanamiz. U sharikli tayanch podshipniklarga o‘rnatilgan yumaloq gorizontal platformadan iborat bo‘lib, juda oz miqdordagi ishqalanish kuchi ta’sirida vertikal *z* - o‘q atrofida aylanma harakat qilishi mumkin. Shu platformaning ustida turgan odam uchun $\sum m_z(\overline{F}_k^e)=0$ va $J_z\omega$=const bo‘ladi.

Agar, odam ikkala qo‘lini quloch qilib ochib yuborib biror turtki hisobiga aylanma harakat olib, keyin o‘z qo‘llarini pastga (yoki yuqoriga yig‘ishtirib olsa) tushirsa (yoki ko‘tarsa), u holda J_z kamayadi, shu sababli platformaning burchakli tezligi ortadi. Balet raqqosalari va sport gimnastlarining havodagi sakrashlarida (salto qilishida) shu usuldan foydalanadilar.

Platformaning ustida qo‘zg‘almas turgan odam (K_z=0) gorizontal holda uzatilgan qo‘llarini aylantirish hisobiga, unga teskari bo‘lgan yo‘nalishda ma’lum burchakka burilishi mumkin. Bu holda odamning burchakli tezligi shunday qiymatga ega bo‘ladiki, K_z-ning yig‘indisi har doim nolga teng bo‘ladi.

b) T e b r a n g i c h (H a y i n c h a k) n i n g t e b r a n i s h i n i t e z l a s h t i r i s h . Tebrangichda turgan odam oyoqlarining bosim (ichki kuchlar)kuchi hisobiga, Tebrangichning harakatini tezlata olmaydi. U quyidagicha amalga oshiriladi. Tebrangich o‘zining chap tomondagi eng yuqori A_0 nuqtasiga ko‘tarilganda, odam o‘tirib oladi. Tebrangich vertikal holatga yaqinlashganda, odam tik turib oladi. U holda massalar markazi Tebrangichning aylanish *z*-o‘qiga yaqinlashadi, natijada J_z bir muncha kamayadi, shuning evaziga Tebrangichning burchakli tezligi ω-ning qiymati sakrab oshadi. Burchakli tezlik ω-ning ortishi hisobiga Tebrangich o‘zining boshlang‘ich A_0 balandligidan yuqoriroq balandlikka ko‘tariladi. O‘ng tomondagi eng yuqori nuqtada, ya’ni ω=0 bo‘lganda, odam yana o‘tirib oladi natijada J_z-yana ortadi, lekin ω nolga tengligicha qoladi, so‘ngra vertikal holatga yaqinlashganda, odam yana tik turib oladi va h.k. Natijada Tebrangichning tebranishdagi balandliklari bora-bora ortavyeradi.

Shu tarzda mavjud bo‘ladigan majburiy tebranishlar *parametrik tebranishlar* deb ataladi, chunki ular davriy o‘zgaruvchan kuch hisobiga emas, balki sistemaning parametrlarini, ya’ni uning inertsiya momentini va og‘irlik kuchining o‘rnini davriy ravishda o‘zgarib turishi hisobiga amalga oshirildi.

v) V i n t (p a r r a k) n i n g r e a k t i v l i k m o m e n t i . Agar vyertolyotning korpusini (dvigateli bilan birgalikda) vintini (parragini) va vinti haydayotgan havoni bir sistema deb hisoblasak, u holda dvigatel bilan vintning o‘zaro ta’sirlari va vint bilan havoning o‘zaro ta’sirlari bunday sistema uchun ichki kuchlar hisoblanadi. Natijada dvigatelni yurgizguncha harakat miqdorining momenti nol bo‘lgan bo‘lsa, keyingi vaqtlarda ularning harakat miqdorlarining yig‘indisi bari bir nolga teng bo‘lib qolishi kerak.

Shu sababli, vyertolyotning korpusi vintning va havoning aylanishiga teskari yo‘nalishda aylanishi kerak. Shuning evaziga, vyertolyotga ta’sir etayotgan burovchi momentni *reaktivlik* momenti deb ataladi. Vyertolyotning korpusini reaktivlik momenti evaziga aylanishini yo‘qotish uchun, bir vintli vyertolyotlarning dum qismiga tegishli bo‘lgan rulevoy (boshqaruvchi) vint o‘rnatiladi. Ko‘p vintli vyertolyotlarda esa, vintlarning aylanishlari o‘zaro qarama-qarshi tomonga sodir bo‘ladi.

Reaktivlik momentini, aviatsiya dvigatellarining burovchi momentlarini ekspyerimental usulda aniqlashda foydalaniladi, chunki bu momentlar modullari bo‘yicha o‘zaro teng bo‘ladi. Reaktivlik momentini aniqlash uchun esa, aylanayotgan vintni dvigatel bilan birgalikda tegishli tarozilarga o‘rnatilib, ular yordamida aniqlanadi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Kinetik moment deb nimaga aytiladi?

2.Reaktivlik momenti deb nimaga aytiladi?

3.Paramerik momentlar deb nimaga aytiladi?

4. Bosh momentning saqlanish qonunini tushuntirib bering.

22-MAVZU: Kuchning elementar ishi. Kuchning chekli oraliqdagi ishi. Quvvat.

Reja

1. Kuchning elementar ishi.
2. Kuchning chekli oraliqdagi ishi.
3. Quvvat.

Tushuncha va tayanch iboralar

Elementar ish, chekli oraliqdagi ish, quvvat, siljish, analitik ifoda,ot kuchi, integral yig‘indi, urinma o‘q.

Mavzuni bayoni.

Jismga qo‘yilgan kuch ta’sirida, uning ma’lum ko‘chishidagi (harakatidagi) dinamik xarakteristikalarni belgilovchi asosiy qiymatlardan biri, bu kuchning bajargan ishi hisoblanadi va u nafaqat mexanikada, hatto, umuman texnikada katta ahamiyatga ega. Avvaliga elementar ish tushunchasini kiritamiz (*shuni eslatib o‘tish lozimki, ishni faqat kuch bajaradi,* kuch va siljish (harakat) yo‘q joyda ish yo‘q, *ya’ni ish o‘z-o‘zidan bajarilmaydi*).

Moddiy M nuqtaga qo‘yilgan $\overline{F}$ kuchning, shu kuch ta’sirida bajarilgan *elementar ishi* deb

$$dA=F_\tau \cdot ds \qquad (22.1)$$

iborat skalyar qiymatga aytiladi. Bu Erda F_τ - M nuqtaga ta’sir etayotgan $\overline{F}$ kuchning nuqta harakatining traektoriyasiga urinma M_τ - o‘qdagi proektsiyasi (yoki M nuqtaga ta’sir etayotgan $\overline{F}$ kuchning $\overline{v}$-tezlik yo‘nalishiga proektsiyasi); ds - M nuqtaning elementar ko‘chishining moduli.

Yuqoridagi ish haqida keltirilgan ifodalar, nuqtaning tezligining modulini o‘zgarishiga sababchi bo‘lgan ishni bajargan kuch haqidagi tushunchalarga oid xolos. Agar $\overline{F}$ kuchni ikkita F_τ va F_n tashkil etuvchilarga ajratib yuborsak, tezlikning modulini faqat F_τ - orqaligina o‘zgartirish mumkin ekanligini ko‘ramiz, chunki $F_\tau=ma_\tau=m\cdot dv/dt$. ($F_n$ tashkil etuvchisi esa tezlik $\overline{F}$-ning yo‘nalishni o‘zgartiradi, yoki Erkin bo‘lmagan harakatda jismning bog‘lanishiga ko‘rsatgan bosim kuchini ifodalaydi).

$F_\tau=F\cdot\cos\alpha$ bo‘lgani sababli, (bu Erda α - $\overline{F}$ kuch bilan M_τ - o‘q orasidagi burchak) elementar ish uchun (22.1) formula orqali boshqacha ifoda olamiz, ya’ni

$$dA=F\cdot ds\cdot\cos\alpha \qquad (22.2)$$

Agar α - burchak o‘tkir bo‘lsa, ish musbat bo‘ladi, $\alpha=0$ bo‘lsa elementar ish $dA=F\cdot ds$ -ga teng bo‘ladi.

Agar α - burchak o‘tmas bo‘lsa, ish manfiy bo‘ladi, $\alpha=180°$ bo‘lsa elementar ish $dA=-F\cdot ds$ -ga teng bo‘ladi.

Agar $\alpha=90°$ bo‘lsa, ya’ni: *kuch harakat yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lsa, bajarilgan elementar ish nolga teng bo‘ladi* ($dA=0$).

Ishning ishorasini ma’nosi quyidagicha: agar kuchning $\overline{F}_\tau$ -tashkil etuvchisi harakat yo‘nalishi bo‘yicha yo‘nalgan bo‘lsa, ish musbat bo‘ladi (chunki, bunday yo‘nalgan kuch harakatni tezlashtiradi); agar kuchning $\overline{R}$ - tashkil etuvchisi harakat (tezlikning) yo‘nalishiga teskari yo‘nalgan bo‘lsa, ish manfiy bo‘ladi (bunday kuch harakatni sekinlashtiradi); Agar $ds=|d\overline{r}|$-ekanligini e’tiborga olsak ($d\overline{F}$ -elementar ko‘chish vektori) va vektor algebrasidagi ikkita vektorning skalyar ko‘paytmasi haqidagi qoidaga asosan (22.2) formula quyidagicha ko‘rinishga keladi

$$dA=\overline{F}\cdot d\,\overline{r} \qquad (22.3)$$

Demak, *elementar ish deb, kuch vektorini elementar ko‘chish vektoriga bo‘lgan skalyar ko‘paytmasiga aytiladi.*

Agar (22.3) formuladagi $\overline{F}$ va $\overline{r}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini ularning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari, ya’ni: $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$ orqali ifodalasak, *elementar ishning analitik ifodasini* aniqlaymiz,

$$dA=F_x dx+ F_y dy+ F_z dz \qquad (22.4)$$

bu Erda x, y, z -lar $\overline{F}$-kuchning qoordinata o‘qlaridagi o‘rni.

Kuchning ixtiyoriy M_0M_1 tugal ko‘chishdagi (22.1- shakl) bajargan ishi tegishli elementar ishlarning integral yig‘indilarining chegarasidan iborat bo‘ladi,

$$A_{(M_0M_1)}=\int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds \qquad (22.5)$$

yoki

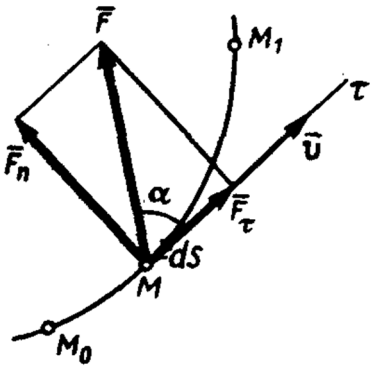
$$A_{(M_0M_1)}=\int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx+F_y dy+F_z dz) \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (22.6)$$

Demak, *ixtiyoriy* M_0M_1 *ko‘chishdagi kuchning bajargan ishi, shu harakat yo‘nalishidagi elementar ishlarning integral yig‘indisiga teng ekan.* Integralning chegarasi o‘zgaruvchilarning M_0 va M_1 -nuqtalaridagi qiymatlaridan iborat bo‘ladi (aniqroq qilib aytganda integral M_0M_1 egri chiziq bo‘yicha olinadi, ya’ni u egri chiziqli bo‘ladi).

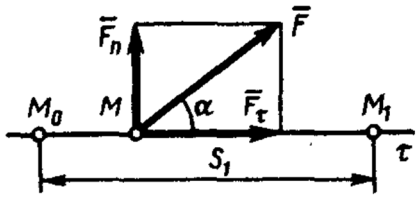
Agar F_τ -o‘zgarmas bo‘lsa ($F_\tau=const$), u holda M_0M_1 egri chiziqni s_1 orqali belgilasak, (22.5) tenglamadagi integral, quyidagicha bo‘ladi,

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot s_1 \qquad (22.7)$$

Bunday holat jismga ta’sir etayotgan kuch ham yo‘nalishi, ham moduli o‘zgarmas va



22.1- shakl



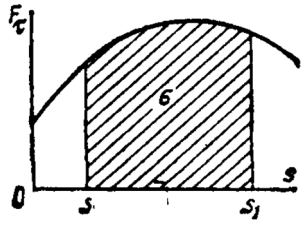
22.2- shakl

nuqtaning harakati to‘g‘ri chiziqli bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi (22.2- shakl). Ushbu holda $F_\tau=F\cos\alpha=const$ bo‘ladi va

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot s_1 \cdot \cos\alpha \qquad (22.8)$$

Ishning o‘lchov birligi SI sistemasida - 1 djoul ($1Dj=1N\cdot m=1kg\cdot m^2/c^2$), MKGSS sistemasida -1kG·m.

I s h n i g r a f i k u s u l d a h i s o b l a s h . Agar kuch masofaga bog‘liq bo‘lsa va F-kuchning s -masofaga bog‘lanish grafigi ma’lum bo‘lsa (21.8 shakl), u holda ishni grafik usulda hisoblash mumkin bo‘ladi. Nuqta M_0 holatda bo‘lganda, hisob boshidan s_0 -masofada joylashgan bo‘lsin, M_1 holatda bo‘lganda, hisob boshidan s_1 -masofada joylashgan bo‘lsin. U holda integralning geometrik mazmuniga asosan (21.16) formulaga asosan,



22.3- shakl.

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{S_0}^{S_1} F_\tau ds = \sigma$$

bu Erda σ - shtrixlangan figuraning yuzasini (22.3-shakl) masshtab koeffitsentiga ko‘paytmasi.

Q u v v a t. *Quvvat deb vaqt birligi ichidagi bajarilgan ishga aytiladi*. Agar ish bir maromda olib borilsa, u holda quvvat $N=A/t_1$, bu Erda t_1 - A ishni bajarishga ketgan vaqt. Umumiy holda, quvvat quyidagi formula orqali aniqlanadi,

$$N=dA/dt=F_\tau\cdot ds/dt= F_\tau\cdot v \qquad (21.18)$$

Demak, *quvvat kuchning urinma o‘qdagi tashkil etuvchisini tezlikka bo‘lgan ko‘paytmasidan iborat ekan.*

Quvvatning o‘lchov birligi SI sistemasida - 1 vatt (1Vt=1Dj/c), MKGSS sistemasida - 1kG·m/c. Texnikada quvvatning birligi sifatida 736 Vt yoki (75 kG·m/c) ga teng bo‘lgan 1 *ot kuchi* ishlatiladi.

Mashinaning bajargan ishini, uning quvvatini vaqtga bo‘lgan ko‘paytmasi orqali o‘lchash mumkin. Shu sababli ishning texnikada foydalaniladigan *kilovatt·soat* -dan iborat o‘lchov birligi paydo bo‘ldi (1 kVt·soat=$3,6\times10^6$ Dj≈367100 kG·m).

$N= F_\tau \cdot v$ -tenglikdan ko‘rinib turibdiki, quvvati N-ga teng bo‘lgan dvigatelning qanchalik v -tezligi kam bo‘lsa, uning tortish kuchi F_τ- shunga teskari proportsional ravishda katta bo‘ladi, yoki aksincha. Shu sababli, qiya balandlikka ko‘tarilishda yoki yo‘lning yomon (o‘ydim-chuqir) joylarida avtomobilni past tezlikka ulanadi, natijada past tezlik evaziga katta tortuvchi kuchi paydo bo‘ladi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Kuchning elementar ishi deb nimaga aytiladi?

2.Quvvat deb nimaga aytiladi?

3. Ish va quvvatning bir-biriga qanday bog’likligi mavjud?

4.Quvvat va ish qanday kattaliklar?

23-MAVZU: Moddiy nuqta va mexanik tizimning kinetik energiyasi.

Reja

1. Tizimning kinetik energiyasi.

2.Qattiq jismning ilgarilanma, aylanma va tekis parallel harakatlarida kinetic energiyasini hisoblash formulalari.

3.Moddiy nuqta va mexanik tizim kinetik energiyasi o’zgarishi haqidagi teoremaning turli ko’rinishlari.

Tushuncha va tayanch iboralar

Tizimning kinetik energiyasi, kinetik energiyasi o’zgarishi,skalyor qiymat,igarilanma harakat, aylanma harakat, tekis parallel harakat,inertsiya moment.

Mavzuni bayoni.

Sistemaning kinetik energiyasi deb, sistema nuqtalarining kinetik energiyalarining algebraik yig‘indilaridan iborat bo‘lgan skalyar qiymatga aytiladi va uni T harfi bilan belgilanadi.

$$T = \sum m_k \mathrm{v}_\mathrm{k}^2 / 2 \qquad (23.1)$$

Kinetik energiya sistemaning ham ilgarilanma, ham aylanma harakatlarining xarakteristikasini aniqlab beradi. T ifodaning, bundan oldin ko‘rib o‘tilgan $\overline{\mathrm{Q}}$ va $\overline{\mathrm{K}}_\mathrm{O}$

xarakteristikalaridan asosiy farqi shundan iboratki, kinetik energiya skalyar qiymat bo‘lib, har doim faqat musbat ishorali bo‘ladi. Shu sababli, uning qiymati sistema qismlarining harakatlari yo‘nalishlariga bog‘liq bo‘lmaydi va ularning harakat yo‘nalishlarini xarakterlamaydi.

Yana bir muhim holatni ta’kidlab o‘tamiz. Ichki kuchlar sistemaning qismlariga o‘zaro qarama-qarshi bo‘lgan yo‘nalishlarda ta’sir etadilar. Shu sababli, yuqorida ko‘rib o‘tganimizdek, ular (ichki kuchlar) $\overline{Q}$ va $\overline{K}_O$ -larning vektor xarakteristikalarini o‘zgartirmaydilar. Lekin ichki kuchlar ta’sirida sistema nuqtalari tezliklarining modullari o‘zgartirilsa, T - ning qiymati ham o‘zgaradi. Demak, kinetik energiyaning $\overline{Q}$ va $\overline{K}_O$ - lardan yana bir farqi shunda ekanki, faqat tashqi emas, balki ichki kuchlarning ta’sirlari orqali ham sistemaning kinetik energiyasi o‘zgarishi mumkin ekan.

Qattiq jismning turli harakatlaridagi kinetik energiyasini hisoblash uchun zarur bo‘lgan formulalarni keltirib chiqaramiz.

1. I l g a r i l a m a h a r a k a t. Bunday harakatda jismning barcha nuqtalari massa markazining tezligiga teng bo‘lgan bir xil tezliklar bilan harakatlanadilar. Demak, ixtiyoriy nuqtaning tezligi $v_k=v_C$ bo‘ladi va (41) formuladan quyidagi ifoda kelib chiqadi

$$T_{i\lg} = \sum m_k \mathsf{v}_\mathsf{k}^2 / 2 = (\sum m_k)\mathsf{v}_\mathsf{C}^2 / 2$$

yoki

$$T_{i\lg} = \frac{1}{2} M \mathsf{v}_\mathsf{C}^2 \qquad (23.2)$$

Shunday qilib *jismning ilgarilanma harakatidagi kinetik energiyasi, uning umumiy massasini massa markazi tezligining kvadaratiga bo‘lgan ko‘paytmasining yarmiga teng ekan.*

2. A y l a n m a h a r a k a t. Agar jism birorta Oz o‘qi atrofida aylanma harakat qilayotgan bo‘lsa, uning ixtiyoriy nuqtasining tezligi $v_k=\omega h_k$ bo‘ladi. Bu yerdagi -h_k nuqtadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofa, ω - jismning burchakli tezligi. Ushbu qiymatni (41) formulaga qo‘yib umumiy ko‘paytmalarni qavsdan tashqariga chiqarib yuborsak,

$$T_{ayl}=\sum m_k \omega^2 h_k^2 /2=(\sum m_k h_k^2)\omega^2/2.$$

Qavs ichidagi qiymat jismning z -o‘qiga nisbatan inertsiya momentini ifodalaydi. Shunday qilib, oxirgi natijani olamiz

$$T_{ayl} = \frac{1}{2} J_z \omega^2 . \qquad (23.3)$$

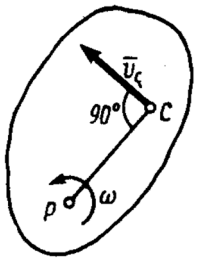
ya’ni, *jismning aylanma harakatidagi kinetik energiyasi uning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momentini uning burchakli tezlik kvadratiga bo‘lgan ko‘paytmasining yarmiga teng ekan.*

3. T e k i s l i k k a p a r a l l e l h a r a k a t . Jismning bunday harakatida, ixtiyoriy olingan vaqtda, uning barcha nuqtalarining tezliklari shunday tarqalganki, go‘yoki jism harakat tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan va oniy tezliklar markazi R nuqtadan o‘tuvchi o‘q atrofida aylanayotgandek hisoblanadi. Demak (23.3) formuladan

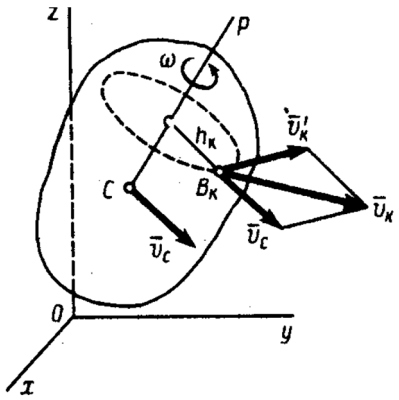
$$T_{tp} = \frac{1}{2} J_p \omega^2 \qquad (23.4)$$

bu yerdagi J_P - oniy tezliklar markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti; ω-jismning burchakli tezligi.

(23.4) dagi J_P-ifodaning qiymati o‘zgaruvchan bo‘ladi, chunki oniy tezliklar markazi P-ning o‘rni o‘zgaruvchan bo‘ladi. Shu sababli J_P -ning o‘rniga, jismning massalar markazi C nuqtadan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti J_C - ifodani kiritamiz. Jismning massa



23.1- shakl



23.2- shakl

markazi o‘zgarmas bo‘lgani uchun J_C - ifodaning qiymati ham o‘zgarmas bo‘ladi. Gyuygens teoremasiga asosan $J_P=J_C+Md^2$ bu yerdagi d=PC. J_P -ning ushbu qiymatini (23.4) ga qo‘yamiz. P nuqta oniy tezliklar markazi bo‘lganligi sababli, $\omega d=\omega \cdot PC=v_C$ bo‘ladi, bu yerdagi v_C - massa markazi bo‘lgan C nuqtaning tezligi. Shularga asoslanib, jismning tekislikka parallel harakatidagi kinetik energiyasini aniqlash formulasini keltirib chiqaramiz

$$T_{tp} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \qquad (23.5)$$

Demak, *jismning tekislikka parallel harakatidagi kinetik energiyasi, uning massa markazi tezligi bilan ilgarilanma harakatdagi kinetik energiyasi va uning massa markazidan o‘tuvchi o‘q atrofidagi aylanishidan oladigan kinetik energiyasining algebraik yig‘indisiga teng ekan.*

4. U m u m i y h o l d a g i h a r a k a t . Agar jismning massa markazi C nuqtani qutb deb tanlab olinsa, u holda jismning har qanday harakati umuman olganda, qutbning tezligi v_C bilan bo‘lgan ilgarilanma harakatdan va shu qutbdan o‘tuvchi CP oniy o‘q atrofidagi aylanma harakatlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Hamda da ko‘rsatib o‘tilgandek, ixtiyoriy B_k nuqtaning tezligi $\bar{V}_k$, qutbning tezligi v_C bilan, shu nuqtaning qutb (CP o‘qi) atrofidagi aylanishidan oladigan $\bar{V}'_k$ -tezlikning vektor yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan,

ya'ni $\overline{V}_k = \overline{V}_C + \overline{V}_k'$ bo'ladi. Moduli bo'yicha $V_k' = \omega h_k$, bu yerdagi h_k - B_k nuqtadan CP aylanish o'qi orasidagi masofa, ω -jismning burchakli tezligi bo'lib, uning qiymati qutbga bog'liq bo'lmaydi U holda*

$$\overline{V}_k^2 = V_k^2 = (\overline{V}_C + \overline{V}_k')^2 = V_C^2 + \overline{V}_k'^2 + 2\overline{V}_C \cdot \overline{V}_k' .$$

-ning, ushbu qiymatini (41) ga qo'ysak va $\overline{V}_k' = \omega h_k$ ekanligini e'tiborga olsak

$$T = (\sum m_k) V_C^2/2 + (\sum m_k h_k^2)\omega^2/2 + \overline{V}_C \sum m_k \overline{V}_k' .$$

Umumiy ko'paytmalar qavsdan tashqariga chiqarib yuborilgan.

Olingan tenglikdagi birinchi qavs ichidagi ifoda, jismning umumiy massasini beradi, ikkinchi qavsdagi esa jismning CP oniy aylanish o'qiga nisbatan inertsiya momenti J_{CP} dan iborat. $\sum m_k \overline{V}_k'$ -qiymat esa, jismning CP o'q atrofida aylanma harakatidagi harakat miqdori hisoblanadi va shu sababli u nolga teng bo'ladi, ya'ni $\sum m_k \overline{V}_k' = 0$.

Natijada,

$$T = M V_C^2/2 + J_{CP}\omega^2/2 \quad \text{bo'ladi.} \qquad (23.6)$$

Shunday qilib, *qattiq jismning umumiy harakatidagi* (xususiy holda tekislikka parallel harakatdagi) *kinetik energiyasi, massa markazining tezligiga teng tezlik bilan ilgarilanma harakatidagi kinetik energiya va massa markazidan o'tuvchi o'q atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan kinetik energiyaning algebraik yig'indisidan iborat ekan.*

Agar qutb sifatida massa markazi C -dan boshqa, masalan, birorta A nuqtani tanlab olsak, u holda AP oniy aylanish o'qi massa markazidan o'tmasligi mumkin, shu sababli bunday o'q uchun $\sum m_k \overline{V}_k' \neq 0$ bo'lib (23.6) formula kelib chiqmaydi.

Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema.

Isbot qilingan teorema, sistemaning ixtiyoriy nuqtalari uchun o'rinli hisoblanadi. Shu sababli, agar sistemaning massasi m_k , tezligi v_k -bo'lgan ixtiyoriy nuqtasi uchun

$$d(m_k V_k^2/2) = dA_k^e + dA_k^i \quad \text{bo'ladi.}$$

Bu yerdagi dA_k^e va dA_k^i -lar sistema nuqtalariga ta'sir etayotgan, tashqi va ichki kuchlarning elementar bajargan ishlari. Bunday tenglamalarni sistemaning har bir nuqtasi uchun tuzamiz va ularni hadma-had qo'shib chiqamiz, natijada

$$d(\sum m_k V_k^2/2) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

yoki

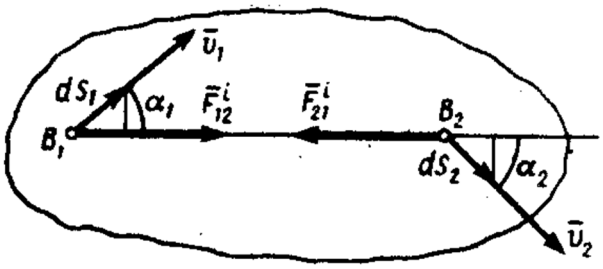
$$dT=\sum dA_k^e+\sum dA_k^i \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (23.7)$$

(23.7) tenglama, sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi teoremasining differentsial ko‘rinishini ifodalaydi. Ushbu tenglikning ikkala tomonini, sistemaning qandaydir tanlangan tegishli boshlang‘ich holatidagi kinetik energiyasi T_0 -dan, uning ixtiyoriy tugal ko‘chishidan keyingi kinetik energiyasi T_1

$$T_1-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (23.8)$$

Ushbu tenglama sistema kinetik energiyasi o‘zgarishi teoremasining boshqa (integral) ko‘rinishi bo‘lib: *sistemaning ma’lum bir tugal ko‘chishidagi kinetik energiyasining o‘zgarishi, sistemaga qo‘yilgan barcha tashqi va ichki kuchlarning shu ko‘chishda bajargan ishlarining yig‘indisiga teng.*

Oldingi teoremalardan farqli ravishda (23.7) va (23.8) tenglamalarda ko‘rsatilgandek, ichki kuchlar tenglamadan chiqarib tashlanmaydi. Haqiqatdan ham, agar $\overline{F}_{12}^i$ va $\overline{F}_{21}^i$ sistemaning B_1 va B_2 nuqtalarining o‘zaro ta’sir kuchlaridan iborat bo‘lsalar, u holda $\overline{F}_{12}^i+\overline{F}_{21}^i=0$ bo‘ladi. Lekin bu ob’ekt qattiq jism bo‘lmaganligi uchun, unga qo‘yilgan kuchlar ta’sirida B_1 nuqta B_2 tomonga qarab harakatlanadi, ya’ni B_2 nuqta B_1 tomonga qarab harakatlanadi. Sistema nuqtalarining bunday ko‘chishlarida har bir kuchning bajargan ishi musbat bo‘ladi, shu sababli ularning yig‘indilari nolga teng bo‘lmaydi.



23.3-shakl.

Masalan to‘pdan o‘q otilganda, otilgan to‘p (snaryad) bilan zambarak bitta mexanik sistemadan iborat bo‘lganligi uchun, poroxning yonishidan paydo bo‘lgan gazlarning bosim kuchlari ichki kuchlar hisoblansada ma’lum ish bajaradilar va sistemaning qismlariga tegishlicha tezlik beradilar.

Ikkita muhim xususiy holni ko‘rib o‘tamiz.

1. Shakli o‘zgarmaydigan mexanik sistema. Agar sistemaning har qanday harakatida, uning ixtiyoriy olingan ikkita nuqtalari orasidagi masofalar o‘zgarmaydigan bo‘lsa, bunday sistema *o‘zgarmaydigan* mexanik sistema deb ataladi.

O‘zgarmaydigan (B_1B_2=const) sistemaning bir-birlariga $\overline{F}_{12}^{i}$ va $\overline{F}_{21}^{i}=-\overline{F}_{12}^{i}$ kuchlar bilan o‘zaro ta’sir ko‘rsatayotgan ikkita B_1 va B_2 nuqtalarini (23.3- shaklga q.) olib ko‘raylik. U holda, B_1B_2 kesmaning harakatida $v_1\cos\alpha_1=v_2\cos\alpha_2$ bo‘ladi, shu sababli $ds_1\cos\alpha_1=ds_2\cos\alpha_2$ bo‘ladi. CHunki $ds_1=v_1dt$ va $ds_2=v_2dt$ (v_1, v_2 va ds_1, ds_2 -lar B_1 va B_2 nuqtalarning tegishlicha tezlik va ko‘chishlaridan iborat). Undan tashqari $F_{12}^{i}=F_{21}^{i}$. Natijada, bu kuchlarning elementar ishlarining yig‘indisi uchun quyidagi ifodani yozamiz:

$$dA_1+dA_2=F_{12}^{i}\,ds_1\cos\alpha_1-F_{21}^{i}\,ds_2\cos\alpha_2=0$$

Shunday natijalarni o‘zaro ta’sir ko‘rsatayotgan ixtiyoriy olingan ikkita moddiy nuqta uchun ham yozishimiz mumkin. Natijada quyidagi xulosaga kelamiz, ya’ni *o‘zgarmaydigan sistemaning barcha ichki kuchlarining bajargan ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘ladi*. Shunga asosan (23.7) yoki (23.8) tenglamalar quyidagi ko‘rinishga keladilar,

$$dT=\sum dA_k^{e} \quad \text{va} \quad T_1-T_0=\sum A_k^{e} \tag{23.9}$$

2. Ideal bog‘lanishli mexanik sistema. Sistemaga vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan bog‘lanishlar qo‘yilgan bo‘lsin. Sistemaning nuqtalariga ta’sir etuvchi barcha tashqi va ichki kuchlarni aktiv va reaktsiya kuchlariga ajratib yuboraylik. U holda, (23.7) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$dT=\sum dA_k^{a}+\sum d\,A_k^{r},$$

bu yerdagi dA_k^{a}-sistemaning k -nuqtasiga ta’sir etuvchi tashqi va ichki aktiv kuchlarning bajargan elementar ishlariva $d\,A_k^{r}$ - sistemaning shu nuqtasiga ta’sir etuvchi tashqi va ichki reaktsiya kuchlarning elementar bajargan ishlari.

Ko‘rib turganimizdek, sistemaning kinetik energiyasini o‘zgarishi aktiv kuchlarning va bog‘lanishlar reaktsiya kuchlarining bajargan ishlariga bog‘liq ekan. Lekin «ideal» mexanik sistema deb ataladigan shunday sistemalar bor ekanki, ularga qo‘yilgan bog‘lanishlar sistemaning kinetik energiyasini o‘zgarishiga aslo ta’sir ko‘rsatmas ekan. Bunday bog‘lanishlar uchun, quyidagi shart bajarilishi lozim:

$$\sum d\,A_k^{r}=0 \tag{23.10}$$

Agar vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan bog‘lanishlar reaktsiyalarining sistemani elementar ko‘chishida bajargan ishlari nolga teng bo‘lsa, bunday bog‘lanishlar *ideal* deb ataladilar. Bizga ma’lum bo‘lgan qator ideal bog‘lanishlar bilan tanishib chiqamiz.

Agarda jismga qo‘yilgan bog‘lanish ishqalanish kuchi nolga teng (o‘ta silliq) bo‘lgan qo‘zg‘almas yuzadan iborat bo‘lsa, jismning shu yuza (egri chiziq) bo‘ylab qilgan harakatida, bog‘lanishning reaktsiya kuchi N -ning bajargan ishi nolga teng bo‘lar ekan. So‘ngra, ko‘rsatib o‘tildiki, agar jism g‘adir-budur tekislik ustida sirpanmay dumalab harakatlansa va ularning o‘zaro uchrashgan (kontakt) nuqtalarida deformatsiya sodir bo‘lmasa, u holda yuzaning normal

reaktsiyasi $\overline{N}$ -ning va ishqalanish kuchi F^{ishq} (ya'ni, reaktsiyaning urinma tashkil etuvchisi)ning bajargan ishlari nolga teng bo'lar ekan.

Hamda, agar ishqalanishlar e'tiborga olinmasa, sharnirning reaktsiyasi $\overline{R}$-ning bajargan ishi ham nolga teng bo'ladi, chunki sistemaning har qanday harakatida $\overline{R}$ kuchining qo'yilgan nuqtasi o'zgarmasdan qoladi. Va nihoyat, agarda 23.3-shakldagi B_1 va B_2 moddiy nuqtalarni bir-birlari bilan qattiq (cho'zilmaydigan, siqilmaydigan) B_1B_2 sterjen orqali mustahkam qilib o'rnatib qo'yilgan deb faraz qilsak, u holda $\overline{F}_{12}^{i}$ va $\overline{F}_{21}^{i}$ kuchlari sterjenlarning reaktsiyalaridan iborat bo'ladi, shu sababli sistemaning harakatida ushbu reaktsiya kuchlarining har birini bajargan ishlari nolga teng emas, lekin yuqorida isbot qilganimizdek ularning yig'indisi nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, yuqorida sanab o'tilgan bog'lanishlarni, ularning ayrim kamchiliklarini hisobga olmagan holda ideal bog'lanishlar deb hisoblanadi.

Agar, mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar, faqat vaqt mobaynida o'zgarmaydigan ideal bog'lanishlardan iborat bo'lsa, yuqoridagi tenglik quyidagicha bo'ladi:

$$dT=\sum dA_k^a \quad va \quad T_1-T_0=\sum dA_k^a \qquad (23.11)$$

Shunday qilib vaqt mobaynida o'zgarmaydigan ideal bog'lanishlar qo'yilgan sistemaning har qanday harakatidagi kinetik energiyasini o'zgarishi, shu sistemaga qo'yilgan tashqi va ichki *aktiv* kuchlarning bajargan ishlarining yig'indisiga teng ekan.

Oldingi barcha teoremalarda, barcha ichki kuchlarni tenglamalardan chiqarib tashlash mumkin edi, lekin barcha tashqi kuchlar hamda tashqi bog'lanishlarning noma'lum bo'lgan reaktsiya kuchlari tenglamalarda saqlanib qolinar edi. Sistema kinetik energiyasi o'zgarish teoremasining muhim amaliy ahamiyati shundan iboratki, uning yordamida vaqt mobaynida o'zgarmaydigan barcha ideal bog'lanishlarning oldindan noma'lum bo'lgan reaktsiya kuchlarini harakat tenglamalaridan chiqarib tashlanishiga imkon beradi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Mexanik tizimning kinetik energiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Ilgarilanma harakatda kinetik energiya qanday aniqlanadi?
3. Aylanma harakatda kinetik energiya qanday aniqlanadi?
4. Tekis parallel harakatda kinetik energiya qanday aniqlanadi?

24-MAVZU: Moddiy nuqta uchun Dalamber tamoyili.

Reja

1. Dalamber tamoyili haqida tushuncha.

2. Mexanik tizim uchun Dalamber tamoyili.

3. Bog'lanishdagi moddiy nuqta va mexanik tizim dinamik reaksiyalarini Dalamber tamoyilidan foydalanib aniqlash.

Tushuncha va tayanch iboralar

Dalamber prinsipi, nuqtaning inersiya kuchi, aylanma va markazdan qochma inersiya kuchlari, Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi, inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti.

Mavzuni bayoni.

Bog'lanishdagi moddiy nuqta yoki sistemalarning harakatini o'rganishda J.Dalamber tomonidan kashf qilingan va «Dalamber prinsipi» deb ataladigan maxsus prinsipdan foydalaniladi.

Massasi *m* ga teng bog'lanishdagi *M* nuqta uchun dinamikaning asosiy qonunini

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R} \qquad (24.1)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bunda ***w*** - M nuqtaning tezlanishi, ***F*** - mazkur nuqtaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, ***R*** - bog'lanish reaksiya kuchi.

(24.1)ni $\vec{F} + \vec{R} + \left(-m\vec{w}\right) = 0$ ko'rinishda yozib

$$-m\vec{w} = \vec{\Phi} \qquad (24.2)$$

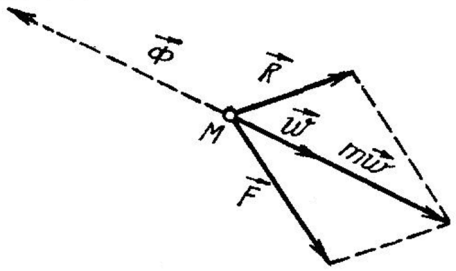
belgilash kiritsak

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0 \qquad (24.3)$$

tenglamani olamiz.

Miqdor jihatdan nuqtaning massasi bilan uning tezlanishi ko'paytmasiga teng va nuqtaning tezlanishiga qarama-qarshi yo'nalgan kuch *nuqtaning inersiya kuchi* deyiladi.

(24.3) tenglik *bog'lanishdagi nuqta uchun Dalamber prinsipini* ifodalaydi: *agar va bog'lanish reaksiya kuchlari qatoriga inersiya kuchini kushsak, u holda har onda muvozanatlashgan kuchlar sistemasini olamiz.*



24.1-shakl

Xususan, erkin moddiy nuqta uchun (24.3) da ***R = 0*** deb olinadi:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 \qquad (24.4)$$

(24.4) tenglik erkin moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi: *erkin moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar qatoriga har onda inersiya kuchini qo'shsak, bu kuchlar o'zaro muvozanatda bo'ladi.*

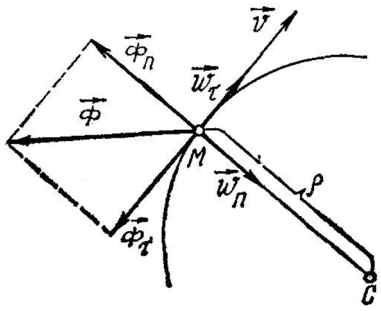
(24.3)ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab,

$$\left.\begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x = 0 \\ F_y + R_y + \Phi_y = 0 \\ F_z + R_z + \Phi_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24.5)$$

tenglamalarni olamiz. Bunda $\Phi_x = -m\ddot{x},\ \Phi_y = -m\ddot{y},\ \Phi_z = -m\ddot{z}$ inersiya kuchlarining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini ifodalaydi.

Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning inersiya kuchini $\boldsymbol{w_\tau}$ urinma tezlanishga qarama-qarshi yo'nalgan $\boldsymbol{F_\tau}$ urinma inersiya kuchi va $\boldsymbol{w_p}$ normal tezlanishga qarama-qarshi yo'nalgan $\boldsymbol{F_p}$ normal inersiya kuchlariga ajratish mumkin:

$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{w}_\tau,\ \ \vec{\Phi}_n = -m\vec{w}_n \qquad (24.6)$$



24.2-shakl

Xususan nuqta ρ radiusli aylana bo'ylab ω burchak tezlik va ε burchak tezlanish bilan harakatlansa, inersiya kuchining urinma va normaldagi proyeksiyalari uchun

$$\left.\begin{aligned} \left|\Phi_\tau\right| = mr\left|\varepsilon\right| \\ \Phi_m = mr\omega \end{aligned}\right\} \qquad (24.6)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Bu holda nuqtaning urinma va normal inersiya kuchlari mos ravishda *aylanma va markazdan qochirma inersiya kuchlari* deyiladi.

Moddiy nuqtalar sistsemasi uchun Dalamber tamoili.

Massalari $m_1, m_2, \ldots, m_N$ bo'lgan $M_1, M_2, \ldots, M_N$ moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistemaga geometrik bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin.

U holda sistema M_ν nuqtasi uchun Dalamber prinsipi quyidagicha yoziladi.

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu + \vec{\Phi}_\nu = 0,\ \ (\nu = 1,2,\ldots,N) \qquad (24.7)$$

Bunda $\vec{F}_\nu$ - sistema M_ν nuqtasiga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi; $\vec{R}_\nu$ - bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi; $\vec{\Phi}_\nu$ - nuqtaning inersiya kuchi.

(24.7) tengliklar sistema uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi: *agar aktiv bog'lanish reaksiya kuchlari ta'siridagi sistemaning har bir nuqtasiga inersiya kuchini qo'ysak, bu kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi.*

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu = \vec{F}_\nu^{\,e} + \vec{F}_\nu^{\,i}$$

Bunda $\vec{F}_\nu^{\,e}$ - M_ν nuqtadagi tashqi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi; $\vec{F}_\nu^{\,i}$ - ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchisi.

Bu kuchlar uchun Dalamber prinsipini

$$\vec{F}_\nu^{\,e} + \vec{F}_\nu^{\,i} + \vec{\Phi}_\nu = 0, \quad (\nu = 1,2,..., N) \tag{24.8}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Binobarin tashqi va ichki kuchlar ta'siridagi sistemaning har bir nuqtasiga har onda inersiya kuchini qo'ysak, bu kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi.

(24.7) ni qo'shib, sistema uchun quyidagi ifodani olamiz

$$\sum \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu + \vec{\Phi}_\nu = 0 \tag{24.9}$$

(24.9) ni M_ν nuqtalarning radius-vektorlari $\boldsymbol{r_\nu}$ ga vektorli ko'paytirib qo'shsak,

$$\sum\left(\vec{r}_\nu \vec{F}_\nu\right) + \sum\left(\vec{r}_\nu \vec{R}_\nu\right) + \sum\left(\vec{r}_\nu \vec{\Phi}_\nu\right) = 0$$

yoki

$$\sum\left[\vec{M}_o\left(\vec{F}_\nu\right) + \vec{M}_o\left(\vec{R}_\nu\right) + \vec{M}_o\left(\vec{\Phi}_\nu\right)\right] = 0 \tag{24.10}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$\sum \vec{F}_\nu = 0$ va undan $\sum \vec{M}_o\left(\vec{F}_\nu\right) = 0$ bo'lgani sababli ichki va tashqi kuchlar uchun

$$\left.\begin{aligned} &\sum\left(\vec{F}_\nu^{\,e} + \vec{\Phi}_\nu = 0\right) \\ &\sum\left[\vec{M}_o\left(\vec{F}_\nu^{\,e}\right) + \vec{M}_o\left(\vec{\Phi}_\nu\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{24.11}$$

tenglamalarni olamiz

(24.11) da $\sum \vec{F}_\nu^{\,e} = \vec{R}_\nu^{\,e}$ - tashqi kuchlarining bosh vektori;

$\sum \vec{\Phi}_\nu = \vec{\Phi}$ - inersiya kuchlarining bosh vektori;

$\sum \vec{M}_o\left(\vec{F}_\nu^{\,e}\right) = \vec{M}_o^{\,e}$ - tashqi kuchlarning O markazga nisbatan bosh momenti;

$\sum \vec{M}_o\left(\vec{\Phi}_\nu\right) = \vec{M}_o^{\,\phi}$ - inersiya kuchlarning O markazga nisbatan bosh momenti.

Demak,

$$\left.\begin{aligned} &\vec{R}^{\,e} + \vec{\Phi} = 0 \\ &\vec{M}_o^{\,e} + \vec{M}_o^{\,\phi} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{24.12}$$

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremadan va sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi tenglamalarni

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}^e - \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \\ \vec{M}_o^e - \frac{d\vec{K}_o}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24.13)$$

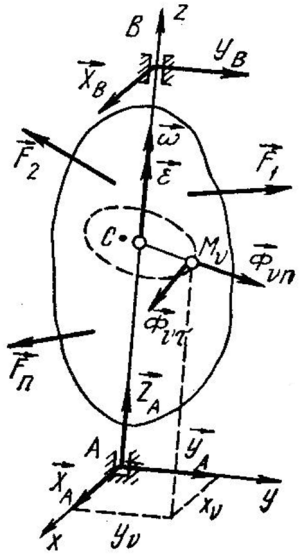
ko'rinishda yozib, (24.12) va (24.13) tenglamalarni solishtirsak, quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{M}_o^{\phi} = -\frac{d\vec{K}_o}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (24.14)$$

Harakatdagi sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanish reaksiya kuchlarini aniqlashda, ya'ni dinamik reaksiya kuchlarini aniqlashda Dalamber prinsipini kullash ayniksa qo'l keladi.

A va V tayanch nuqtalarning reaksiya kuchlarini statik va dinamik tashkil etuvchilarga ajratamiz.

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{cm} + \vec{R}_A^{\partial},$$
$$\vec{R}_B = \vec{R}_B^{cm} + \vec{R}_H^{\partial}.$$



24.3-shakl

Statik reaksiya kuchlarini aniqlashda $\varepsilon=0,\ \omega=0$ deb olamiz va quyidagi tenglamalardan foydalanamiz:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_v + X_A^{cm} + X_B^{cm} = 0 \\ \sum Y_v + Y_A^{cm} + Y_B^{cm} = 0 \\ \sum Z_v + Z_A^{cm} = 0 \\ \sum M_x\left(\vec{F}_v\right) - Y_B^{cm} h = 0 \\ \sum M_y\left(\vec{F}_v\right) - X_B^{cm} h = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24.15)$$

Bu tenglamalar statika bo'limida chiqarilgan qo'zg'almas o'qqa ega bo'lgan jismning muvozanat tenglamalarini ifodalaydi.

bunda, X_ν, Y_ν, Z_ν - jismga ta'sir etuvchi $\boldsymbol{F_\nu}$ $(\nu=1,2,...,N)$ kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari. h - A va V tayanch nuqtalari orasidagi masofa.

Berilgan kuchlar ta'sirida jism z o'q atrofida aylanganda inersiya kuchlari hosil bo'ladi va bu kuchlarni muvozanatlovchi reaksiya kuchlarning $\vec{R}_A^\partial$ va $\vec{R}_B^\partial$ tashkil etuvchilari *dinamik reaksiya kuchlari* deyiladi va quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} X_A^\partial + X_B^\partial + My_c \cdot \varepsilon + Mx_c \cdot \omega^2 = 0 \\ Y_A^\partial + Y_B^\partial - Mx_c \cdot \varepsilon + My_c \cdot \omega^2 = 0 \\ -Y_B^\partial \cdot h + J_{xz} \cdot \varepsilon - J_{yz} \cdot \omega^2 = 0 \\ X_B^\partial \cdot h + J_{yz} \cdot \varepsilon - J_{xz} \cdot \omega^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24.16)$$

Aylanish o'qi z bo'ylab yo'nalgan inersiya kuchlari mavjud bo'lmagani tufayli, bu o'q bo'ylab yo'nalgan dinamik reaksiya kuchlari ham bo'lmaydi.

Qo'zg'almas aylanish o'qiga ega bo'lgan va og'irlik markazi aylanish o'qida yotuvchi jism *statik muvozanatlashgan jism* deyiladi.

Dinamik reaksiya kuchlari nolga teng bo'lgan jism *dinamik muvozanatlashgan jism* deyiladi.

Qattiq jism inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti

Bizga ma'lumki, ixtiyoriy harakatdagi qattiq jismning harakat miqdori:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c$$

Shu sababli bunday sistema inersiya kuchlarning bosh vektori uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi.

$$\vec{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -M\vec{w}_c \qquad (24.17)$$

bunda M – jismning massasi; $\vec{w}_c$ - jism massalar markazining tezlanishi.

Ixtiyoriy harakatdagi qattiq jism inersiya kuchlarni bosh momentini hisoblashda qutb uchun odatda jism massalar markazidagi S nuqta olinadi.

$$\vec{M}_c^\phi = -\frac{d\vec{K}_c}{dt} \qquad (24.18)$$

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Erkin moddiy nuqta uchun Dalamber tamoili ifodasi va ta'rifini keltiring.
2. Mexanik sistema uchun Dalamber tamoili ifodasi va ta'rifini keltiring.
3. Inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti tushunchalari haqida so'zlab bering.
4. Qanday kuchlarga dinamik reaksiya kuchlari deyiladi?
5. Statik va dinamik muvozanatlashgan jismlar deb qanday jismlarga aytiladi?

25-MAVZU: Bog'lanishlar va bog'lanish tenglamalari. Bog'lanishlarni klassifikatsiyasi Ideal bog'lanishlar.

Reja

1. Analitik mexanikaning asosiy tushunchalari

2.Bog‘lanishlarning klassifikatsiyasi.
3.Mexanik tizimning mumkin bo’lgan ko’chishlari.
4.Mumkin bo’lgan ko’chish tamoili.
5.Mumkin bo’lgan ko’chish tamoilini bog’lanish reaksiyalarini aniqlashga tatbiqi.

Tushuncha va tayanch iboralar

Analitik mexanika, erkin sistema, bog’lanishdagi sistema, bo’shatmaydigan va bo’shatadigan bog’lanishlar, geometrik bog’lanishlar, kinematik bog’lanishlar, golonomli va begolonom bog’lanishlar, stasionar va stasionar bo’lmagan bog’lanishlar, mumkin bo’lgan ko’chish, ideal bog’lanishlar.

Mavzuni bayoni.

Analitik mexanikada mexanik sistemalarning muvozanati va harakati o’rganiladi. Mexanikaning asosiy prinsiplarini bayon etish, ulardan harakat differensial tenglamalarini chiqarish, mazkur tenglamalarini izohlash va integrallash usullari analitik mexanikaning asosiy mavzuini tashkil etadi.

Sistema nuqtalarining harakatini ularning harakat qonuniga bog’liq bo’lmagan va oldindan berilgan geometrik yoki kinematik shartlar bilan cheklovchi jismlarga bog’lanishlar yoki analitik bog’lanishlar deyiladi.

Sistema nuqtalarini harakatini cheklovchi har qanday jism analitik bog’lanishdan iborat bo’la olmasligini alohida ta’kidlab o’tamiz. Masalan, yuk osilgan prujina analitik bog’lanishdan iborat bo’lmaydi, chunki yukning harakatiga prujina tomonidan qo’yiladigan chek yukning harakat qonuniga bog’liq bo’ladi.

Agar sistema nuqtalariga bog’lanishlar qo’yilmagan bo’lsa, bunday sistema *erkin sistema* deyiladi. Aks holda sistema *bog’lanishdagi sistema* deyiladi.

Kuyosh sistemasiga kiruvchi planetalar erkin sistemani tashkil etadi.

Teplovozni bog’lanishdagi mexanik sistema deb karasak, temir yo’l bog’lanish vazifasini utaydi.

N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema nuqtalariga qo’yilgan bog’lanishlarning matematik ifodasi vaqt, sistema nuqtalarining koordinatalari va ularning hosilalariga bog’liq tenglamalar yoki tengsizliklar bilan aniqlanadi:

$$f_\mu\left(x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu, t\right) = 0, \quad (\mu = 1,2,...,l) \tag{25.1}$$

yoki
$$f_\mu\left(x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu, t\right) \geq 0, \quad (\mu = 1,2,...,l) \tag{25.2}$$

Tenglamalar bilan ifodalanadigan bog’lanishlar *bo’shatmaydigan bog’lanishlar*, tengsizliklar bidan ifodalanadigan bog’lanishlar esa *bo’shatadigan bog’lanishlar* deyiladi.

Masalan, ikkita moddiy nuqta o’zgarmas l o’zunlikka ega bo’lgan sterjen bilan tutashtirilgan bo’lsa, bunday bog’lanish

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2 - l^2 = 0 \tag{25.3}$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Agar ikkita moddiy nuqta egiluvchan, cho'zilmaydigan va uzunligi l ga teng ip bilan tutashtirilgan bo'lsa, bog'lanish

$$l^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \geq 0 \qquad (25.4)$$

tengsizlik bilan ifodalanadi. Ip tarang holatda bo'lganda, tenglik ishorasi, aks holda tengsizlik ishorasi olinadi.

Agar bog'lanishlar faqat sistema nuqtalarining koordinatalariga chek qo'ysa, bunday bog'lanishlar *geometrik bog'lanishlar* deyiladi.

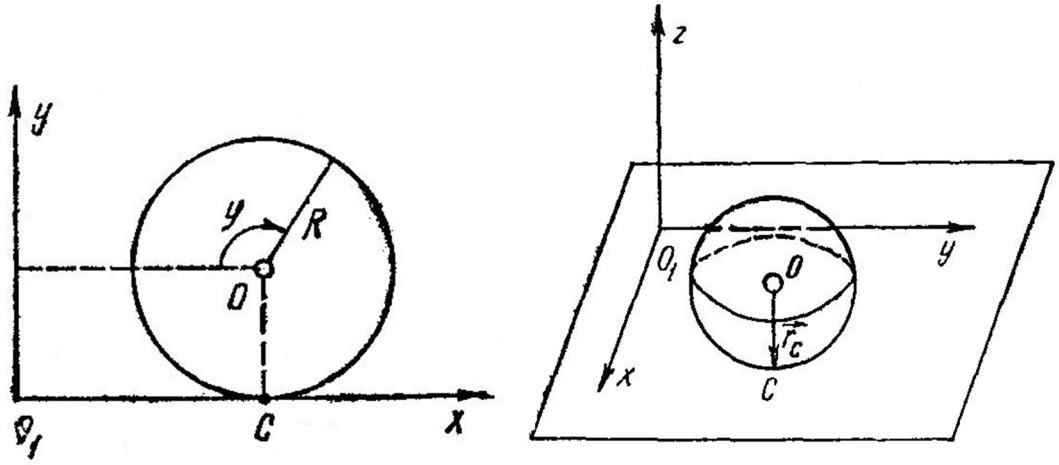
Geometrik bog'lanishlarning tenglamasi

$$F(x_v, y_v, z_v) = 0 \qquad (25.5)$$

ko'rinishda yoziladi.

(25.3) yoki (25.4) munosabatlar bilan ifodalangan bog'lanishlar geometrik bog'lanishlariga misol bo'la oladi.

Agar bog'lanishlar sistema nuqtalarining koordinatalaridan tashqari tezligiga ham chek qo'ysa, ularga *kinematik* yoki *differensialni bog'lanishlar* deyiladi.



25.1-shakl

Agar bog'lanish tenglamalari integrallanadigan bo'lsa, bog'lanish *golonomli bog'lanish*, integrallanmaydigan bo'lsa, *begolonom bog'lanish* deyiladi.

Masalan, radiusi R ga teng g'ildirak to'g'ri chiziqli rels bo'ylab sirpanmay harakatlansin.

Bunday g'ildirakning O_1xy harakat tekisligidagi holati g'ildirak O markazining koordinatalarni $x_o u_o$ va bu markaz atrofidagi aylanish burchagi φ bilan aniqlanadi. Agar x o'qni rels bo'ylab yunaltirsak, u holda

$$u_o = R \qquad (25.6)$$

munosabat geometrik bog'lanishni ifodalaydi. Bundan tashqari, g'ildirak sirpanmasdan harakatlangani uchun g'ildirakning relsga tegib turgan S nuqtasining tezligi nolga teng bo'ladi.

Bu shart $$\dot{x}_o - R\dot{\varphi} = 0 \qquad (25.7)$$

kinematik bog'lanish bilan ifoadalanadi. (25.7) ni integrallab x_o va φ orasidagi munosabatni aniqlaymiz.

$$x_o - R\varphi = const$$

Binobarin (25.7) tenglama bilan ifodalanadigan bog'lanish golonomli bog'lanishdan iborat bo'ladi.

Agar bog'lanishning analitik ifodasi vaqtga oshkora ravishda bog'liq bo'lsa, o'nga *stasionar bo'lmagan bog'lanish* deyiladi.

Masalan,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (at)^2 \qquad (25.8)$$

Agar bog'lanishning analitik ifodasi vaqtga oshkora ravishda bog'liq bo'lmasa, bunday bog'lanish *stasionar bog'lanish* deyiladi.

Kelgusida faqat golonomli bo'shatmaydigan bog'lanishlar ustida to'xtalamiz.

Bog‘lanishlarning klassifikatsiyasi.

Bog‘lanishlar haqidagi hamma tushunchalarni qamrab ololmagan edi. CHunki, biz quyida ko‘rib o‘tadigan masalalarning yechish usullarini har qanday bog‘lanishlar uchun qo‘llanilishi mumkin emas. Shu sababli, bog‘lanish va bog‘lanishlarning klassifikatsiyasi haqidagi tushunchalarni batafsilroq ko‘rib o‘tamiz.

Bog‘lanishlar deb, sistemaga ta'sir etayotgan kuchlarning qanday bo‘lishligidan qat'iy nazar, mexanik sistema nuqtalarining holatlariga va ularning tezliklariga qo‘yiladigan chegaralanishga aytiladi. Bunday bog‘lanishlarning qanday klassifikatsiya qilinishini ko‘rib o‘tamiz.

Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan bog‘lanishlarni, *statsionar* bog‘lanishlar deb ataladi vaqtga bog‘liq holda o‘zgaruvchi bog‘lanishlarni *nostatsionar* bog‘lanishlar deb ataladi.

Sistema nuqtalarining holatlariga (koordinatalariga) chegaralar qo‘yuvchi bog‘lanishlarni, *geometrik* bog‘lanishlar deb ataladi. Lekin, ular agar nuqtalarning tezliklariga (nuqtalarning koordinatalaridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilalariga) ham chegara qo‘yadigan bo‘lsalar -*kinematik* yoki *differentsial*[7] bog‘lanishlar deb ataladi.

Agar, differentsial bog‘lanishni geometrik bog‘lanish ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsa, ya'ni tezliklarga qo‘yilgan chegaralarni, ularning koordinatalariga qo‘yilgan chegaralar ko‘rinishiga keltirish mumkin bo‘lsa, bunday bog‘lanishlarni *integrallanuvchi*, aks holda *integrallanmaydigan* bog‘lanishlar deb ataladi.

Bog‘lanishlarning ko‘rinishlariga qarab, mexanik sistemalar ham *golonom* (golonomli bog‘lanishlarga ega) va *nogolonom* (nogolonom bog‘lanishlarga ega) bo‘lgan sistemalarga bo‘linadi.

Va nihoyat, *ushlab turaoluvchi* (bunday chegaralar sistemaning ixtiyoriy holatida ham ta'sir etadigan) va *ushlab tura ololmaydigan*, ya'ni yuqorigiday xossaga ega bo‘lmagan (sistema bunday bog‘lanishlardan «ozod bo‘la olishi» mumkin bo‘lgan) bog‘lanishlarga ajaraladilar. Yuqoridagilarga oid misollarni ko‘rib o‘tamiz.

---

[7] Mazmunan olganda geometrik bog‘lanishlar bir vaqtni o‘zida kinematik bog‘lanishlardan iborat bo‘ladi.. CHunki sistemaning koordinatalarini qanoatlantiruvchi geometrik bog‘lanishlardan olingan differentsiallar orqali, ularning tezliklari ham tegishli qonuniyat bo‘yicha o‘zaro bog‘langanlar.

Ko‘rib o‘tilgan barcha turdagi bog‘lanishlar geometrik (golonomli) va statsionar hisoblanadilar. Shaklda tasvirlangan, harakatlanayotgan liftning kabinasi ichdagi yuk uchun, lift nostatsionar geometrik bog‘lanish hisoblanadi (yuk joylashgan lift vaqt mobaynida o‘zining fazodagi holatini o‘zgartirib boradi), chunki yukning Oxyz o‘qlarga nisbatan holati vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarib bormoqda.

2. Sirpanmasdan dumalayotgan tsilindrning holati, uning markazi C nuqtaning x_C-koordinatasi va burilish burchagi φ - orqali aniqlanadi. Sof dumalashda $v_C=R\omega$ yoki $\dot{x}_C = R\dot{\varphi}$ shart bajarilishi lozim. Bu differentsial bog‘lanish hisoblanadi, lekin qo‘yilgan shart integrallanadi va $x_C=R\varphi$ ko‘rinishga keltiriladi, ya’ni koordinatalarga bog‘liq holga keltiriladi. Shu sababli, bu golonom bog‘lanish hisoblanadi.

Albatta bunday bog‘lanishni to‘g‘ridan-to‘g‘ri $x_C=R\varphi$ ko‘rinishda yozish ham mumkin edi. Lekin, u holda ushbu shartdan vaqt bo‘yicha bir marta hosila olib, yuqoridagi shartni kinematik hisoblash mumkin.

3. Yuqoridagi tsilindr o‘rniga, g‘adir-budir yuza ustida sof dumalayotgan sharni olib ko‘raylik. U holda, sharning yuza bilan tutashgan nuqtasi nolga teng ekanligini, (masalan, sharning markazi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanmasa) va sharning holatini faqat uning koordinatalari orqali ifodalangan ko‘rinishdagi shartni (munosabatni) yoza olmaymiz. Bunday bog‘lanishlar, nogolonom bog‘lanishlar turiga misol bo‘ladi. Bunday bog‘lanishlar qatoriga harakati boshqariluvchi jismlarning harakati ham misol bo‘ladi. Masalan, agar nuqta (raketa) ning harakatida ixtiyoriy vaqt uchun uning tezligining yo‘nalishi, harakatlanuvchi boshqa biror nuqta (dushman samolyoti)ning holatiga yo‘nalgan bo‘lishi shart bo‘lsa, u holda bunday shartni faqat nuqtaning koordinatalari orqali bog‘langan tenglamalar orqali ifodalab bo‘lmaydi.

Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar.

Yuqoridagi masalalarda ko‘rib o‘tganimizdek, mexanik bog‘lanishlarning samarasini, faqat ularning ko‘rsatgan reaktsiyalarini tenglamaga kiritish orqaligina aniqlash mumkin edi. Endi esa mexanik sistemalarga qo‘yilgan bog‘lanishlarni hisobga olgan holda, ular tomonidan qo‘yiladigan cheklanishlarni hisobga olgan holda, mexanik sistemalarning harakatlari orqali ham aniqlash mumkin ekanligini ko‘rib o‘tamiz. Bunday yo‘l bilan, reaktsiyalari noma’lum bo‘lgan mexanik sistemalarning muvozanat yoki harakat tenglamalarini to‘g‘ridan to‘g‘ri tuzish mumkin ekanligini ko‘rib o‘tamiz, natijada mexanika masalalarini yechish ancha soddalashadi.

Sarlavhada aytib o‘tilgan *mumkin bo‘lgan* (*virtual*) *ko‘chishlar,* quyidagi shartlarni bajarishi lozim: 1) ular o‘ta kichkina bo‘lishlari kerak, aks holda sistemaning katta ko‘chishlarida u mutloq boshqa sistemaga aylanib qolishi mumkin va bog‘lanishlarning samarasi o‘zgarib qoladi; 2) shu elementar ko‘chishda, sistemaga qo‘yilgan barcha bog‘lanishlar saqlanib qolinishi kerak, aks holda sistema boshqa turdagi bog‘lanishlar ta’siriga kirib qolishi mumkin.

Shunday qilib, *mexanik sistemaning mumkin bo‘lgan ko‘chishi deb, sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar tomonidan ko‘rsatiladigan chegaralanishlar saqlangan holda, uning mazkur holatidan bog‘lanishlarning ta’siri o‘zgarmaydigan ixtiyoriy boshqa holatlarga elementar ko‘chishlarning jamisi mumkin bo‘lgan ko‘chishlar deb ataladi.* Agar ushlab tura olmaydigan bog‘lanishlar qo‘yilgan bo‘lsa, bunday elementar ko‘chishda, bog‘lanish saqlanib qolingan bo‘lishligi zarur (sistemaning nuqtalari «erkin» holatga o‘tib olmasligi lozim).

Bundan keyingi mavzularda, harakatdagi jism nuqtasining dt vaqt ichidagi haqiqiy ko‘chishi dt -ni va nuqtaning unga qo‘yilgan bog‘lanishlar saqlanib qolingan holdagi mumkin bo‘lgan, lekin amalga oshirilmagan ixtiyoriy ko‘chishlarini farqlab olish lozim bo‘ladi.

Shu sababli nuqtaning mumkin bo‘lgan ko‘chishlarining barchasini $\delta\bar{r}$ [8] elementar vektor bilan belgilaymiz. Uning modulini δs ($\delta s=|\delta\bar{r}|$) bilan belgilaymiz va $\delta\bar{r}$ -ning koordinata o‘qlardagi proyektsiyalarini tegishlicha δx, δy, δz bo‘ladi; ushbu proyektsiyalar nuqtaning koordinatalarini mumkin bo‘lgan ko‘chishidagi elementar orttirmalaridan iborat bo‘lib, nuqtaning harakatini differentsiallash kabi shartli (formal, haqiqiy bo‘lmagan) ravishda aniqlanadi.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, agar bog‘lanishlar statsionar bo‘lsa, ixtiyoriy mexanik sistema nuqtasining mumkin bo‘lgan $\delta\bar{r}$ ko‘chishlaridan bittasi, albatta haqiqiy $d\bar{r}$ ko‘chish bilan ustma-ust tushadi. Agar bog‘lanish nostatsionar bo‘lsa, birorta mumkin bo‘lgan ko‘chish, haqiqiy elementar ko‘chish bilan ustma-ust tushmaydi.

Mexanik sistemaning umumiy muvozanat shartlarini belgilovchi, mexanikaning yana bir muhim printsipi bilan tanishib chiqamiz. Muvozanat holat deb, sistemaning shunday holatiga aytiladiki, unda sistemaga qo‘yilgan barcha kuchlar ta’siridagi sistemaning hamma nuqtalari («absolyut» sistema deb hisoblanuvchi) inertsial sistemaga nisbatan tinch holatda bo‘ladi. Hamda, shu sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishglar statsionar deb hisoblanadi, shu sababli keyinchalik bu haqda alohida yana aytib o‘tilmaydi.

Moddiy nuqtaning harakatida, uning haqiqiy elementar ko‘chishlaridan birortasi bilan ustma-ust tushadigan mumkin bo‘lgan ko‘chishda, shu nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlarning bajarishi mumkin bo‘lgan elementar ishni, *mumkin bo‘lgan ish* deb ataladi. Sistemaga ta’sir etuvchi aktiv kuchlarning mumkin bo‘lgan ko‘chishda bajargan ishlarini $\delta A^a\ (\delta A^a = \bar{F}^a \cdot \delta\bar{r})$ va reaktsiya kuchlari $\bar{N}$ -ning bajargan ishlarini $\delta A^r\ (\delta A^r = \bar{N} \cdot \delta\bar{r})$ orqali belgilaymiz.

Endi ilgari biz foydalangan ideal bog‘lanishlar tushunchasining umumiy ifodasini kiritamiz: *ideal bog‘lanishlar deb, shunday bog‘lanishlarga aytiladiki, sistemaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishlarida, ularning bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘ladi,* ya’ni

$$\sum \delta A_k^r = 0 \qquad (25.9)$$

Agar bog‘lanishlar statsionar bo‘lsa, ideal bog‘lanishlarning sharti (25.9) ifoda bilan bir xil bo‘ladi, chunki statsionar bog‘lishlardagi mumkin bo‘lgan ko‘chishlardan bittasi haqiqiy ko‘chish bilan albatta ustma-ust tushadi. Shu sababli bog‘lanishlar, ideal bog‘lanishlar hisoblanadilar.

[8] Matematika fanida «d» belgisi orqali differentsialni tushuniladi, «δ» belgi orqali funktsiyaning varitsiyasi tushuniladi.

Sistemaning muvozanatini zaruriy sharti shundan iborat bo‘ladiki, agar ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistema, unga qo‘yilgan kuchlar ta’sirida muvozanatda bo‘lsa, sistemaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishida

$$\sum \delta A_k^a = 0 \qquad (25.10)$$

yoki

$$\sum \overline{F}_k^a \cdot \delta \overline{r}_k = \sum F_k^a \delta s_k \cos \alpha_k = 0 \qquad (25.11)$$

bo‘lishi shart, bu yerdagi α_k -k nuqtaning mumkin bo‘lgan ko‘chish vektori bilan kuch vektori orasidagi burchak.

Sistemaning ixtiyoriy B_k nuqtasiga ta’sir etuvchi barcha (tashqi va ichki) aktiv kuchlarning va bog‘lanish reaktsiyalarining teng ta’sir etuvchilarini $\overline{F}_k^a$ va $\overline{N}_k$ bilan belgilaymiz. U holda har bir nuqta muvozanatda bo‘lganligi sababli $\delta A_k^a + \delta A_k^r = 0$ bo‘ladi, shu sababli B_k nuqtaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishidagi bajarilgan ishlar ham nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0$$

Lekin, bog‘lanishlar ideal bo‘lganliklari va $\delta \overline{r}_k$ sistema nuqtalarining mumkin bo‘lgan ko‘chishlaridan iborat ekanligi sababli (25.9) shartga ko‘ra ikkinchi yig‘indi nolga teng bo‘ladi. U holda birinchi yig‘indi ham o‘z-o‘zidan nol bo‘lar ekan, ya’ni (25.10) shart ham bajariladi. Shunday qilib, (25.10) tenglik mexanik sistema muvozanatining zaruriy sharti ekanligini isbot qildik. Endi esa shu shart etarli ham ekanligini, ya’ni agar muvozanat holatdagi mexanik sistemaning nuqtalariga (25.10) shartni qanoatlantiruvchi aktiv kuchlarni qo‘ysak, sistema muvozanat holatini o‘zgartirmaydi. Aksincha qarab ko‘raylik, ya’ni sistema harakatga kelib, uning ayrim nuqtalari $_k$ dan iborat bo‘lgan haqiqiy elementar ko‘chishlar olsin. U holda ushbu ko‘chishda kuchlari ish bajaradilar va kinetik energiya’ning o‘zgarish teoremasiga asosan

$$dT = \sum dA_k^a , \quad (dA_k^a = \overline{F}_k^a \cdot d\overline{r}_k)$$

bu yerda, dT>0 bo‘ladi, chunki sistema avval muvozanatda bo‘lgan edi; shu sababli $\sum \delta A_k^a > 0$ bo‘ladi. Lekin statsionar bog‘lanishlarda, haqiqiy elementar ko‘chish $d\overline{r}_k$, mumkin bo‘lgan $\delta \overline{r}_k$ ko‘chishlarning birortasi bilan ustma-ust tushadi va bu ko‘chishda $\sum \delta A_k^a > 0$ bo‘lishi kerak, bu esa (25.10) shartni qanoatlantirmaydi. Shunday qilib, agar sistemaga qo‘yilgan kuchlar (25.10) shartni qanoatlantirsa, sistema muvozanat holatdan chiqmaydi, natijada ushbu shart etarli hisoblanadi.

Yuqorida isbot qilinganlar asosida quyidagi m u m k i n b o ‘ l g a n k o ‘ c h i s h p r i n t s i p i kelib chiqadi: *ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistema muvozanatda bo‘lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistemaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishida, unga ta’sir etuvchi aktiv kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak.* Muvozanatning matematik sharti (25.10) tenglik orqali ifodalanadi va uni mumkin bo‘lgan ishlar tenglamasi deb ataladi. Ushbu tenglikning analitik ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum (F_{kx}^{a}\delta x_k + F_{ky}^{a}\delta y_k + F_{kz}^{a}\delta z_k) = 0 \qquad (25.11)$$

Mumkin bo‘lgan ko‘chish printsipi mexanik sistemaning umumiy muvozanat shartini belgilab beradi. Natijada, sistema qism (jism)larining muvozanatlik shartlarini alohida-alohida ko‘rib chiqishlikning hojati qolmaydi va ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan sistemalarning noma’lum reaktsiyalari tenglamadan chiqib ketadi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Analitik mexanika bo’limi nimani o’rganadi?
2. Bog’lanishlar turlari haqida so’zlab bering
3. Mumkin bo’lgan ko’chish tushunchasiga ta’rif bering
4. Qanday bog’lanishlarga ideal bog’lanishlar deyiladi?

26-MAVZU: Dinamikaning umumiy tenglamasi.

Reja

1.Umumlashgan koordinatalar
2.Umumlashgan kuch
3.Erkinlik darajasi

Tushuncha va tayanch iboralar

Sistemaning erkinlik darajasi, sistemaning umumlashagan koordinatalari, sistemaning erkinlik darajasi, ideal bog’lanishlar, mumkin bo’lgan ko’chish, Potensialli kuchlar, dinamikaning umumiy tenglamasi, Dalamber-Lagranj tamoili, umumlashgan koordinata, umumlashgan kuch,

Mavzuni bayoni.

Umuman olgan har qanday mexanik sistema, bir nechta mumkin bo‘lgan ko‘chishlarga ega bo‘lishligi mumkin. Lekin biz ko‘rib o‘tadigan ixtiyoriy sistemalar uchun, ma’lum miqdordagi mumkin bo‘lgan ko‘chishlarni tanlab olish mumkin bo‘lib, qolgan barcha mumkin bo‘lgan ko‘chishlar ular orqali ifodalanadi. Masalan, birorta tekislik (yuza)ning ustida joylashgan nuqtaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishini, o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan ikkita $\delta\bar{r}_1$ va $\delta\bar{r}_2$ elementar ko‘chishlar orqali ifodalash mumkin bo‘ladi, ya’ni $\delta\bar{r} = a\,\delta\bar{r}_1 + b\,\delta\bar{r}_2$, bu yerdagi a va b -ixtiyoriy bo‘lgan musbat yoki manfiy sonlar.

Mexanik sistemaning o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan mumkin bo‘lgan ko‘chishlarining soni, uning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi.

Shu sababli, tekislikda joylashgan nuqta ikkita erkinlik darajasiga ega bo‘ladi; uning tekislik ustidagi ixtiyoriy holatini, bir vaqtning o‘zida ikkita o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan (har bir

koordinata ikkinchisiga bog‘liq bo‘lmagan) koordinatalar orqali aniqlash mumkin bo‘ladi, masalan *x* va *y* koordinatalar orqali. Erkin moddiy nuqtaning erkinlik darajasi uchta (o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta o‘qlar bo‘yicha harakatlanishi mumkin) bo‘ladi; nuqtaning holati bir vaqtning o‘zidagi o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan x,y,z koordinatalar orqali aniqlanadi.

Ushbu natija, umumiy hisoblanadi, ya’ni *geometrik bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistemaning holatini aniqlovchi, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatalar soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi.* Shu sababli, bunday sistemalarning erkinlik darajasini, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar soni orqali yoki o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatalar orqali aniqlash mumkin ekan.

Masalan, krivoship-shatunli mexanizmning erkinlik darajasi bitta (mumkin bo‘lgan ko‘chishlar soni bitta, masalan OA krivoshipning aylanishi va φ burchakdan iborat bo‘lgan bitta koordinata) bo‘ladi. Erkin qattiq jismning erkinlik darajasi oltita (uchta o‘qlar bo‘yicha ilgarilama va uchta o‘qlar atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo‘lgan ko‘chishlar va qutbning uchta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatasi, hamda qutb atrofidagi Eyler burchaklarining koordinatalaridan iborat) bo‘ladi.

Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar.

Mexanik sistemaning holatini aniqlovchi koordinata (parametr)lar soni, sistemani tashkil etuvchi nuqta(jism)larning va bog‘lanishlarning soniga, hamda shu sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlarning haraktyeri (turlari)ga bog‘liq ravishda bo‘ladi. Biz faqat geometrik (aniqrog‘i, golonom) bog‘lanishlar qo‘yilgan mexanik sistemalarni o‘rganamiz xolos. sistemaning holatini aniqlab byeruvchi erkin koordinatalar soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi. Shunday koordinatalar sifatida, ixtiyoriy o‘lchovli va ixtiyoriy geometrik (yoki fizik) mazmunga ega bo‘lgan parametrlarni tanlab olish mumkin, masalan to‘g‘ri yoki egri chiziqli kesmani, burchakni, yuzani va h.

Ixtiyoriy o‘lchovli, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan va mexanik sistemaning holatini bir qiymatli ifodalovchi parametrlarni *umumlashgan koordinatalar* deb ataladi va ularning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi. Umumlashgan koordinatalarni lotincha q bilan belgilash qabul qilingan. U holda, erkinlik darajasi s -ga teng bo‘lgan mexanik sistemaning holati, s -ta umumlashgan koordinatalar orqali aniqlanadi

$$q_1, q_2,...,q_s. \tag{26.1}$$

Umumlashgan koordinatalar erkin (o‘zaro bog‘lanmagan) bo‘lganliklari sababli, ularning elementar orttirmalari

$$\delta q_1, \delta q_2,..., \delta q_s. \tag{26.2}$$

ham erkin bo‘ladi. Hamda, (26.2) dagi *har bir qiymat, boshqalariga bog‘liq bo‘lmagan holda, sistemaga mumkin bo‘lgan ko‘chish beradi*.

Har qanday bir koordinatalar sistemasidan boshqasiga o‘tilgandagi kabi, mexanik sistemaning ixtiyoriy nuqtasining dekart koordinatalari x_k, y_k, z_k -ni ham, umumlashgan

koordinatalar orqali ifodalab olamiz: $x_k=x_k(q_1,q_2,..,q_s)$ va h. Shu sababli, k nuqtaning radius-vektori $\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k}$ uchun ham tegishlicha[9]

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s). \tag{26.3}$$

Umumlashgan kuchlar. $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar ta'siridagi n -ta moddiy nuqtalardan iborat bo'lgan mexanik sistemani olib ko'raylik. Sistemaning erkinlik darajasi s -ga teng bo'lsin va uning holati (26.3) ko'rinishdagi umumlashgan koordinatalar orqali aniqlansin. Sistemaga mumkin bo'lgan shunday ko'chish byeraylikki, unda faqat q_1 koordinatagina δq_1 orttirma olsin, qolgan barcha δq_i umumlashgan koordinatalar o'zgarmasdan qolsin. U holda, sistemaning har bir nuqtasining radius-vektorlari $\bar{r}_k$ -lar ham tegishlicha $(\delta \bar{r}_k)_1$[10] elementar orttirma oladi. (26.3) formulaga asosan $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1,q_2,..,q_s)$ bo'lganligi uchun va hozirgi ko'chishda faqatgina q_1 o'zgarayotganligi (qolganlari o'zgarmasligicha qoladilar) uchun, $(\delta \bar{r}_k)_1$ ni xususiy differentsial olish kabi aniqlanadi, shu sababli,

$$(\delta \bar{r}_k)_1 = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1.$$

Ushbu tenglikdan foydalanib, sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarning sistemaning shu ko'chishida bajargan elementar ishlarini aniqlaymiz va ularni δA_1 deb belgilaymiz. Natijada:

$$\delta A_1 = \overline{F}_1 \cdot (\delta \bar{r}_1)_1 + \overline{F}_2 \cdot (\delta \bar{r}_2)_1 + ... + \overline{F}_n \cdot (\delta \bar{r}_n)_1 =$$
$$= \overline{F}_1 \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \overline{F}_2 \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1}\delta q_1 + ... + \overline{F}_n \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1}\delta q_1 \quad .$$

Umumiy ko'paytma bo'lgan δq_1 ni qavsdan tashqariga chiqarsak,

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1, \tag{26.4}$$

bu yerdagi

$$Q_1 = \sum \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \tag{26.5}$$

---

[9] Y'zuv ishlarni kamaytirish maqsadida qo'yilgan bog'lanishlarni statsionar deb hisoblaymiz (aks holda, $\bar{r}_k$ -t argumentga ham bog'liq bo'ladi). Oxirgi tenglamalarning ko'rinishi bunday cheklanishga bog'liq bo'lmaydi va nostatsionar bog'lanishlar uchun ham o'rinli hisoblanadi.

[10] $(\delta \bar{r}_k)_1$ -belgi, faqat koordinata q_1 o'zgarganda radius-vektor $\bar{r}_k$ -ni δq_1 -elementar qiymatga ortishini ko'rsatib turadi.

$\overline{F}$ kuchning bajargan ishi $\delta A=F_\tau \delta s$ tenglik orqali aniqlangani kabi, ushbu ifodani (26.5) bilan solishtirsak, Q_1 qiymat, umumlashgan koordinata q_1 -ga tegishli bo‘lgan *umumlashgan kuch* deb ataladi.

Sistemaga ikkinchi - q_2 umumlashgan koordinataga mumkin bo‘lgan ko‘chish byerish orqali, sistemaga ta’sir etuvchi barcha kuchlarning shu ko‘chishdagi bajargan ishlarini aniqlaymiz,

$$\delta A_2=Q_2\delta q_2, \tag{26.6}$$

bu yerdagi

$$Q_2=\sum \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2} \tag{26.7}$$

Q_2 qiymat umumlashgan koordinata q_2 -ga tegishli bo‘lgan *umumlashgan kuch* deb ataladi va h..

Agar sistemaning barcha umumlashgan koordinatalariga, tegishlicha mumkin bo‘lgan ko‘chishlar byerib chiqib, sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning har bir ko‘chishdagi elementar bajargan ishlarini yig‘ib chiqsak, quyidagi tenglik hosil bo‘ladi:

$$\sum\delta A_k=Q_1\delta q_1+ Q_2\delta q_2+...+ Q_s\delta q_s. \tag{26.8}$$

(26.8) formula, *sistemaga ta’sir etayotgan barcha kuchlarning bajargan to‘liq elementar ishlarining umumlashgan koordinatalardagi ifodasi* hisoblanadi. Undan ko‘rinib turibdiki, *umumlashgan kuchlar*, *bu sistemaga ta’sir etayotgan barcha kuchlarning bajargan to‘liq elementar ishlarining ifodasidagi umumlashgan koordinatalarning orttirmalari oldidagi koeffitsentdan iborat bo‘lgan qiymat ekan.*

Agar sistemaga faqat ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan bo‘lsa, u holda mumkin bo‘lgan ko‘chishlardagi barcha ishlarni faqat aktiv kuchlargina bajaradilar xolos, shu sababli Q_1, Q_2,...,Q_s qiymatlarni sistemaning *umumlashgan aktiv kuchlar* deb ataladi.

Umumlashgan kuchlarning o‘lchov birliklari tegishli umumlashgan koordinatalarning o‘lchov birliklariga bog‘liq holda bo‘ladi. Ish Q·q ko‘paytmadan iborat bo‘lgani uchun, u holda Qq ning o‘lchov birligi ishning o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi, shu sababli

$$[Q]=\frac{[A]}{[q]}, \tag{26.9}$$

ya’ni, *umumlashgan kuchning o‘lchov birligi, ishning o‘lchov birligini tegishli bo‘lgan umumlashgan koordinataning o‘lchov birligiga bo‘lgan nisbatiga teng bo‘ladi.* Bundan ko‘rinib turibdiki, agar q -masofa orqali o‘lchansa, u holda Q ning o‘lchov birligi kuchning o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi (SI sistemasida Nyutonlarda o‘lchanadi); agar q -burchak (o‘lchovsiz) orqali o‘lchansa, u holda Q ning o‘lchov birligi N·m, ya’ni momentning o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi; agar q -hajm (masalan, porshenning tsilindr ichidagi holatini, porshenning orqasidagi hajm orqali o‘lchanadi), orqali o‘lchansa, u holda Q ning o‘lchov birligi N/m^3, ya’ni bosimning

o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi va h.. Ko‘rinib turganidek, umumlashgan tezlikning analogi sifatida, umumlashgan kuchlar tushunchasi, moddiy jismlarning o‘zaro ta’sirlaridan iborat bo‘lgan barcha o‘lchovlarni qamrab olar ekan (kuch, kuchning momenti, bosim).

P o t e n t s i a l k u c h m a y d o n d a g i s i s t e m a . Agar sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning barchasi potentsial kuchlardan iborat bo‘lsa, u holda bizga ma’lumki sistema uchun x_k, y_k, z_k, koordinatalarga bog‘liq bo‘lgan shunday bir U kuch funktsiyasi mavjudki, uning to‘liq differentsiali, sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning elementar bajargan ishlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni $\sum\delta A_k=\delta U$. Lekin, umumlashgan q_1, q_2,..,q_s koordinatalarga o‘tishda barcha x_k, y_k, z_k, lar, umumlashgan koordinatalar orqali ifodalangan bo‘lishlari kerak, ya’ni $U=U(q_1,q_2,....,q_s)$. Shu sababli, δU-ni $U(q_1, q_2,...,q_s)$ funktsiyaning to‘liq differentsiali kabi aniqlanadi, natijada

$$\sum\delta A_k=\delta U=\frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2+,...,+\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s,$$

Ushbu ifodani (112) tenglik bilan solishtirib, quyidagini aniqlaymiz

$$Q_1=\frac{\partial U}{\partial q_1},\ Q_2=\frac{\partial U}{\partial q_2},...,Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}, \qquad (26.10)$$

yoki, potentsial energiya P=-U bo‘lganligi uchun,

$$Q_1=-\frac{\partial P}{\partial q_1},\ \ Q_2=-\frac{\partial P}{\partial q_2},...,\ Q_s=-\frac{\partial P}{\partial q_s}, \qquad (26.11)$$

Demak, *sistemaga ta’sir etuvchi barcha kuchlar potentsial kuchlardan iborat bo‘lsa, umumlashgan kuchlar kuch funktsiyasidan (yoki potentsial energiyasidan manfiy ishora bilan)tegishli umumlashgan koordinatalar bo‘yicha olingan xususiy hosilalarga teng ekan.*

Mumkin bo‘lgan printsipga binoan, har qanday mexanik sistema muvozanatining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ediki, sistemaning ixtiyoriy mumkin bo‘lgan ko‘chishida, unga ta’sir etuvchi aktiv (agar ish bajarsalar, ishqalanish kuchlarining ham) kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak, ya’ni $\sum\delta A_k=0$. Ushbu muvozanatlik sharti quyidagicha bo‘ladi

$$Q_1\delta q_1+ Q_2\delta q_2+,...,+ Q_s\delta q_s=0, \qquad (26.12)$$

$\delta q_1, \delta q_2,...,\delta q_s$ qiymatlar o‘zaro bog‘lanmaganligi sababli (26.12) tenglama qanoatlanishi uchun, faqatgina har $\delta q_1, \delta q_2,...,\delta q_s$ larning oldilaridagi koeffitsientlar, alohida-alohida nolga teng bo‘lishlari shart, ya’ni

$$Q_1=0,\ Q_2=0,...,\ Q_s=0, \qquad (26.13)$$

Haqiqatdan ham, birortasi aytaylik Q_1 nolga teng bo‘lmasin deb hisoblasak, sistemaga har doim shunday $\delta q_1\neq 0$ va $\delta q_2=\delta q_3=....=\delta q_s=0$ bo‘lgan ko‘chish byerish mumkinki, u holda (26.13) shart bajarilmay qoladi.

Shunday qilib, *mexanik sistema muvozanatda bo‘lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistema uchun tanlab olingan barcha umumlashgan koordinatalarga mos bo‘lgan umumlashgan kuchlarning har biri nolga teng bo‘lishi shart ekan.* (26.13) dagi muvozanat *tenglamalarning soni*, *sistemaning erkinlik darajasiga teng* ekan.

Umumlashgan kuchlarni hisoblashdagi va masalalarni yechishda usullarni solishtirish natijasida shu narsa tasdiqlandiki, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi orqali masalalarni yechishda tegishli bo‘lgan umumlashgan kuchlarni aniqlab, so‘ngra ularni nolga tenglagan ekanligimiz ayon bo‘ldi.

Mumkin bo’lgan ko’chish prinsipi. Ideal, stasionar va bo’shatmaydigan bog’lanishlar qo’yilgan moddiy nuqtalar sistemasi muvozanatda bo’lishi uchun sistema nuqtalariga qo’yilgan barcha aktiv kuchlarning sistema nuqtalarining har qanday mumkin bo’lgan ko’chishdagi elementar ishlari yig’indisi nolga teng bo’lishi, ya’ni

$$\sum \vec{F}_v \delta\vec{r}_v = 0 \qquad (26.14)$$

hamda sistema barcha nuqtalarining berilgan ondagi tezliklari nolga teng bo’lishi zarur va yetarlidir.

nuqtalarining *dt* vaqt ichidagi haqiqiy ko’chishi $d\boldsymbol{r}_v$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta\vec{r}_v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (v = 1,2,...,N) \qquad (26.15)$$

Mumkin bo’lgan ko’chishda bog’lanish tenglamasida vaqt o’zgarmas deb qaraladi, ya’ni $\delta t=0$.

U holda quyidagicha yozamiz.

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_v \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \delta q_i$$

yoki yig’indilarning tartibini almashtirsak,

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

tenglik hosil bo’ladi. Agar

$$Q_i = \sum_{v=1}^{N} \vec{F}_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \qquad (26.17)$$

belgilash kiritsak, oxirgi tenglikni, quyidagi ko’rinishda olamiz:

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \qquad (26.18)$$

Q_i kattalika q_i umumlashgan koordinataga mos bo’lgan, *umumlashgan kuch* deyiladi.

Kuchning mumkin bo’lgan ko’chishdagi elementar ishi. Ideal bog’lanishlar. Mumkin bo’lgan ko’chish prinsipi.

Nuqtaga ta’sir etuvchi $\boldsymbol{F}$ kuchning $\delta\boldsymbol{r}$ mumkin bo’lgan ko’chishdagi elementar ishini $\delta\boldsymbol{A}$ bilan belgilasak, quyidagi munosabat o’rinli bo’ladi.

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = xdx + ydy + zdz \qquad (26.19)$$

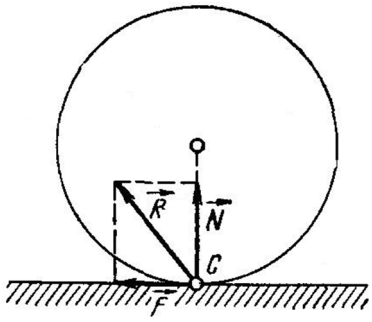
Xuddi shuningdek, N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema nuqtalariga ta’sir etuvchi kuchlarning sistemaning mumkin bo’lgan ko’chishidagi elementar ishi

$$\sum \delta A_\nu = \sum \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu \tag{26.20}$$

formula yordamida hisoblanadi. Binobarin ideal bog’lanishlar uchun

$$\sum \vec{R}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0 \tag{26.21}$$

tenglik o’rinli bo’ladi.



26.1-shakl

Ideal bog’lanishlarning ayrim turlari:

1. Absolyut qattiq jism nuqtalari orasidagi bog’lanish ideal bog’lanishdan iborat.
2. Sistema mahkamlangan nuqtalarini har biri ideal bog’lanishdan iborat bo’ladi, chunki bu nuqtalarni mumkin bo’lgan ko’chishi nolga teng.
3. Absolyut qattiq jism boshqa qattiq jism ustida sirpanmasdan dumalasa, bunday bog’lanish ham ideal bog’lanishdan iborat bo’ladi.

Dalamber prinsipiga ko’ra

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu + \vec{\Phi}_\nu = 0, \quad (\nu = 1,2,..,N) \tag{26.22}$$

Vaqtning qayd qilingan biror payti uchun sistema nuqtalariga $\delta \vec{r}_\nu$ mumkin bo’lgan ko’chish beramiz. (26.22) ni $\delta \vec{r}_\nu$ ga ko’paytirib, qo’shamiz.

$$\sum \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu + \sum \vec{R}_\nu \delta \vec{r}_\nu + \sum \vec{\Phi}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0$$

Ideal bog’lanishlarning ta’rifiga ko’ra

$$\sum \vec{R}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0$$

bo’lgani uchun

$$\sum \vec{R}_\nu \delta \vec{r}_\nu + \sum \vec{\Phi}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0 \tag{26.23}$$

yoki $\vec{\Phi}_\nu = -m_\nu \vec{w}_\nu$ ekanligini hisobga olinsa,

$$\sum \left(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{w}_\nu \right) \delta \vec{r}_\nu = 0 \tag{26.24}$$

tenglik o’rinli bo’ladi. Bu tenglama *dinamikaning umumiy tenglamasi* deyiladi.

(26.24)ga asosan, ideal va bo’shatmaydigan bog’lanishlar qo’yilgan harakatdagi sistema nuqtalariga ta’sir etuvchi barcha aktiv hamda inersiya kuchlarining har qanday mumkin bo’lgan ko’chishdagi elementar ishlarining yig’indisi har onda nolga teng bo’ladi.

(26.23) va (26.24) tenglamalar *Dalamber-Lagranj prinsipi* deb ataladi.

(26.24) ning Dekart koordinatalaridagi ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum\left[\left(x_\nu+\Phi_{\nu x}\right)\delta x_\nu+\left(y_\nu+\Phi_{\nu y}\right)\delta y_\nu+\left(z_\nu+\Phi_{\nu z}\right)\delta z_\nu\right]=0 \qquad (26.25)$$

Bunda x_ν, y_ν, z_ν bilan M_ν nuqtaning koordinatalari belgilangan.

Bu yerda

$$\Phi_{\nu x}=-m_\nu\ddot{x}_\nu,$$
$$\Phi_{\nu y}=-m_\nu\ddot{y}_\nu,$$
$$\Phi_{\nu z}=-m_\nu\ddot{z}_\nu,$$

bo'lgani uchun dinamikaning umumiy tenglamasini

$$\sum\left[\left(x_\nu+m_\nu\ddot{x}_\nu\right)\delta x_\nu+\left(y_\nu+m_\nu\ddot{y}_\nu\right)\delta y_\nu+\left(z_\nu+m_\nu\ddot{z}_\nu\right)\delta z_\nu\right]=0 \qquad (26.26)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Nazorat savol va topshiriqlar

1.Umumlashgan kuch va umumlashgan koordinatalar deganda nimani tushunasiz?
2.Dinamikaning umumiy tenglamasi mazmunini tushuntirib bering.
3.Dalamber-Lagranj tamoili haqida so'zlab bering.
4.Potensialli kuchlar deganda nimani tushunasiz?

27-MAVZU: Mexanik tizim harakti differensial tenglamalarining umumlashgan koordinatalarida ifodalanishi. Lagranjning 2-tur tenglamalari.

Reja

1. Mexanik tizim harakti differensial tenglamalarining umumlashgan koordinatalarida ifodalanishi.
2. Lagranjning 2-tur tenglamalari.
3. Potensial kuch maydondagi sistema

Tushuncha va tayanch iboralar

Potensial kuch maydoni, Lagranjning 2-tur tenglamalari, harakat differentsial tenglama, mexanik tizim, umumlashgan koordinata, umumlashgan inertsiya kuchi, sistemaning kinetik energiyasi, kinetik potensial, aktiv kuch.

Mavzuni bayoni.

Mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalaridagi harakat tenglamalarini aniqlash uchun dinamikaning umumiy tenglamasi ga murojaat qilamiz

$$\sum\delta A_k+\sum\delta A_k^{in}=0 \qquad (27.1)$$

Har turli sistemalarni qamrab olish maqsadida sistemaga qo'yilgan bog'lanishlarni ideal deb hisoblamaymiz. Shu sababli, birinchi yig'indiga aktiv kuchlarning bajargan ishlaridan tashqari, ishqalanish kuchlarning ham bajargan ishlarini (agar ular mavjud bo'lsa) qo'shamiz.

Faraz qilaylik, sistema s -ta erkinlik darajasiga ega bo‘lsin va uning holati umumlashgan koordinatalar orqali aniqlansin. U holda

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s. \qquad (27.2)$$

dA_k aktiv kuchlar uchun bajarilgani kabi, inertsiya kuchlarining bajargan elementar ishlarini ham umumlashgan koordinatalar orqali ifodalaymiz. U holda,

$$\sum \delta A_k^{in} = Q_1^{in} \delta q_1 + Q_2^{in} \delta q_2 + ... + Q_s^{in} \delta q_s. \qquad (27.3)$$

bu yerdagi $Q_1^{in}, Q_2^{in}, ..., Q_s^{in}$ lar, *umumlashgan inertsiya kuchlari*

$$Q_1^{in} = \sum \overline{F}_k^{in} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}, \ldots, \quad Q_2^{in} = \sum \overline{F}_k^{in} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2}, \ldots \qquad (27.4)$$

va (27.3) qiymatlarni (27.1)ga qo‘ysak,

$$(Q_1 + Q_1^{in})\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{in})\delta q_2 + , ..., + (Q_s + Q_s^{in})\delta q_s = 0$$

$\delta q_1, \delta q_2, .., \delta q_s$ o‘zaro bog‘lanmaganliklari sababli, ushbu tenglama qanoatlanishi uchun faqat va faqat har bir $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ larning oldilaridagi koeffitsientlar alohida-alohida nolga teng bo‘lishlari shart. Shu sababli

$$(Q_1 + Q_1^{in}) = 0, \quad (Q_2 + Q_2^{in}) = 0, .., (Q_s + Q_s^{in}) = 0 \qquad (27.5)$$

Ushbu tenglamalar sistemasini dinamika masalalarini yechishda bevosita qo‘llash mumkin. Lekin shu tenglamalardagi umumlashgan inertsiya kuchlarini sistemaning kinetik energiyasi orqali ifodalab olinsa, bunday tenglamalarni tuzish juda ham soddalashadi. Avvalo qiymatga tegishlicha o‘zgartirishlar kiritamiz. Sistemaning ixtiyoriy olingan k nuqtasining inertsiya kuchi $\overline{F}_k^{in} = -m_k \overline{a}_k = -m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt}$ bo‘lganligi uchun

$$-Q_1^{in} = \sum m_k \frac{d\overline{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}. \qquad (27.6)$$

Q_1^{in} -ni sistemaning kinetik energiyasi orqali ifodalash uchun, (27.6) tenglikning o‘ng tomoniga shunday o‘zgartirishlar kiritish lozimki, natijada ular faqat sistema nuqtalarining tezliklari orqaligina ifodalanishi lozim. Shu maqsadda, (27.6) ning o‘ng tomonidagi ifodani quyidagicha yozib olamiz

$$\frac{d\overline{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right) - \overline{v}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right) \qquad (27.7)$$

(27.7) tenglamani to‘g‘ri ekanligiga ishonish uchun, uning o‘ng tomonidagi qavslarning ichidagi ko‘paytmani differentsiallab ko‘rish mumkin. Bundan keyingi o‘zgartirishlarni quyidagi ikkita tenglik orqali amalga oshiramiz:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_1} \quad \text{va} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1}. \tag{27.8}$$

Avvalo, ularning birinchisini o‘rinli ekanligini isbot qilamiz.

$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s)$ ekanligi uchun

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ,...,+ \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s \quad \text{va} \quad \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}.$$

(27.8) tenglamalarning ikkinchisini o‘rinli ekanligi, shundan isbot bo‘ladiki, t -bo‘yicha to‘liq differentsiallash va q_1 bo‘yicha xususiy hosila olishlikning o‘rinlarini almashtirish mumkin ekanligiga asoslangan, ya’ni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1}.$$

Endi (27.8) dagi isbot qilingan o‘zgartirishlarni (27.7) ga qo‘ysak

$$\frac{d\bar{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial q_1}$$

hosilalarning yig‘indisi yig‘indining hosilasiga teng bo‘lishi va $\bar{v}_k^2 = v_k^2$ ekanligini e’tiborga olsak, (27.7) formuladan

$$-Q_1^{in} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q},$$

bu yerdagi $T = \frac{1}{2}m_k v_k^2$ -sistemaning kinetik energiyasi.

Shunday amallarni bajarib, umumlashgan inertsiya kuchlarning har biri uchun tegishli bo‘lgan ifodalarni olishimiz mumkin. Natijada (27.5) tenglikning oxirgi ko‘rinishini yozamiz

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_{1,}\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_{2,}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_{s.}
\end{aligned}\right\} \qquad (27.9)$$

(27.9) formula, *sistema harakatining umumlashgan koordinatalardagi differentsial tenglamalarini yoki Lagranjning*[11] *tenglamalarini matematik ko‘rinishini ifodalaydi.* Tenglamalarning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi. Lagranj tenglamalari dinamika masalalarini bir xil, hamda sodda bo‘lgan yechimini yaratishga imkon byerdi. Eng muhim tomonlaridan yana biri shuki, tenglamalarning ko‘rinishi va ularning soni, mexanik sistemani tashkil etuvchi jism (nuqta)larning soniga va ularning qanday harakatda ekanligiga bog‘liq bo‘lmas ekan; Lagranj tenglamalari sistemasining soni faqat uning erkinlik darajasiga bog‘liq ekan.

Agar sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar ideal bo‘lsa, (27.9) tenglamaning o‘ng tomonidagi qiymatlar faqat umumlashgan aktiv kuchlar ekanligi sababli, bog‘lanishlarning noma’lum bo‘lgan reaktsiya kuchlarini tenglamalardan chiqarib yuborishga imkon beradi.

Dinamikaning umumlashgan koordinatalardagi asosiy vazifasi shundan iboratki, umumlashgan Q_1, Q_2,..., Q_s kuchlarni va boshlang‘ich shartlari ma’lum bo‘lsa, sistemaning harakat qonunini aniqlash mumkin ekan, ya’ni umumlashgan q_1, q_2,…,q_s koordinatalarining vaqt t -ga bog‘liq bo‘lgan funtsiyalarini aniqlash mumkin ekan.

Kinetik energiya umumlashgan tezliklar $\dot{q}_i$ -ga bog‘liq bo‘lganligi uchun, (27.9) tenglamalardan vaqt t -bo‘yicha bir marta hosila olinishligi sababli, tenglamalarning o‘ng tomonlarida axtarilayotgan umumlashgan koordinatalarning ikkinchi tartibli $\ddot{q}_i$ hosilalari paydo bo‘ladi. Shu sababli, Lagranj tenglamalari umumlashgan q_1, q_2,..,q_s koordinatalarning ikkinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalaridan iborat bo‘lar ekan.

P o t e n t s i a l k u c h m a y d o n d a g i s i s t e m a . Agar sistemaga ta’sir etuvchi kuchlar potentsial kuchlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda $Q_1=-\frac{\partial P}{\partial q_1}$, $Q_2=-\frac{\partial P}{\partial q_2}$,..., $Q_s=-\frac{\partial P}{\partial q_s}$, formuladan foydalanib, (27.9) tenglamalarning birinchisini quyidagicha yozib olishimiz mumkin bo‘ladi:

[11] Lagranj tenglamasidan golonom (apniqrog‘i golonomli) bog‘lanishli ixtiyoriy mexanik sistemaning harakatini o‘rganishda foydalanish mumkin. Nogolonom sistemalarning harakatlarini o‘rganishda boshqa tenglamalardan foydalaniladi, lekin biz unday masalalarni bu qismda ko‘rib o‘tmaymiz, ular maxsus mavzularda ko‘rib o‘tiladi.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{\partial P}{\partial q_1}=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-P)}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial (T-P)}{\partial q_1}=0$$

Oxirgi tenglik o‘rinli bo‘ladi, chunki potentsial energiya P faqat umumlashgan q_1, q_2,...,q_s koordinatalarga bog‘liq bo‘ladi xolos, umumlashgan tezliklarga bog‘liq bo‘lmaydi, shu sababli $\partial P / \partial \dot{q}_1 = 0$ bo‘ladi.

(27.9) ning qolgan tenglamalarini ham shu tarzda o‘zgartiriladi. Quyidagi

$$L=T-P \tag{27.10}$$

funktsiyani kiritamiz. Sistemaning kinetik va potentsial energiyasining ayirmasidan iborat bo‘lgan, hamda umumlashgan koordinatalarga va umumlashgan tezliklarga bog‘liq bo‘lgan L funktsiyani *Lagranj funktsiyasi* yoki *kinetik potentsial* deb ataladi. U holda, potentsial kuchlardan iborat bo‘lgan sistema uchun, Lagranjning tenglamalari quyidagi ko‘rinishga keladilar:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_1}=0\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_2}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_s}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_s}=0
\end{aligned}\right\} \tag{27.11}$$

Olingan natijalardan ko‘rinib turibdiki, potentsial kuchlar ta’siridagi mexanik sistemaning holati, faqat bitta Lagranj funktsiyasi orqali berilar ekan xolos shu sababli, ushbu funktsiya ma’lum bo‘lsa sistemaning differentsial tenglamasini tuzish mumkin ekan.

Ushbu tushunchalarni tegishlicha umumlashtirsak, Lagranjning funktsiyasiga o‘xshash bo‘lgan funktsiyalar turli fizik sistemalarning holatlarini ifodalab beradi(uzluksiz muhitni, gravitatsion yoki elektr maydonini va h.k.). Shu sababli, (27.11) ko‘rinishdagi Lagranj tenglamalari fizikaning qator sohalarida muhim ahamiyat kasb etadi.

Nazorat savol va topshiriqlar

1. Lagranj funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Umumlashgan inersiya kuchlari deb nimaga aytiladi?
3. Aktiv kuchlar deb nimaga aytiladi?
4. Lagranjni 2-tur tenglamalarini ko’rinishi qanday?