ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 517.929

Д.Я. ХУСАИНОВ, А.Т. КОЖАМЕТОВ

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим неавтономные системы нейтрального типа, записанные в виде ([1], сс. 36, 322; [2], с. 201)

$$\frac{d}{dt}[x(t) - D(t)x(t-\tau)] = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau). \tag{1}$$

Пусть матричные функции $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ непрерывны, ограничены при $t \geq t_0$ и выполнены условия "устойчивости" разностного оператора, т. е.

$$\|D(\,\cdot\,)\| < 1, \quad \|D(t)\| = \max_{t \geq t_0}\{|D(t)|\}.$$

Как правило, для практических задач необходимо, кроме факта об асимптотической устойчивости, иметь мажорантные оценки сходимости решений. Для их получения воспользуемся неавтономным функционалом квадратичного вида ([3], с. 120–122)

$$V[t, x(t)] = [x(t) - D(t)x(t-\tau)]^T H(t)[x(t) - Dx(t-\tau)] + \int_{-\tau}^{0} e^{\beta s} x^T(t+s)G(t+s)x(t+s)ds \tag{2}$$

с положительно-определенными матрицами $G(t)$ и $H(t)$, удовлетворяющими двусторонним неравенствам

$$\begin{aligned} &\lambda_0|x|^2 \leq \lambda_{\min}[H(t)]|x|^2 \leq x^T H(t)x \leq \lambda_{\max}[H(t)]|x|^2, \quad \lambda_0 > 0;\\ &g_0|x|^2 \leq \lambda_{\min}[G(t)]|x|^2 \leq x^T G(t)x \leq \lambda_{\max}[G(t)]|x|^2, \quad g_0 > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — экстремальные собственные числа соответствующих положительно-определенных матриц. Под векторными и матричными нормами будем понимать

$$|x(t)| = \Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\Big\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_{\tau,\beta} = \Big\{\int_{-\tau}^{0} e^{\beta s}|x(t+s)|^2 ds\Big\}^{1/2}, \quad |A| = \{\lambda_{\max}(A^T A)\}^{1/2}.$$

Кроме того, предполагается, что матричная функция $H(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H(t) + A^T(t)H(t) + H(t)A(t) = -C(t)$$

с положительно-определенной матрицей $C(t)$, удовлетворяющей двусторонним неравенствам

$$c_0|x|^2 \leq \lambda_{\min}[C(t)]|x|^2 \leq x^T C(t)x \leq \lambda_{\max}[C(t)]|x|^2, \quad c_0 > 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$M[H(t)] = \begin{bmatrix} H(t) & -H(t)D(t) \\ -D^T(t)H(t) & D^T(t)H(t)D(t) \end{bmatrix},$$

$$S[G(t),H(t)] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} -A^T(t)H(t) - H(t)A(t) - \\ -G(t) - \frac{d}{dt}H(t) \end{matrix} & \begin{matrix} A^T(t)H(t)D(t) - H(t)B(t) + \\ +\frac{d}{dt}H(t)D(t) \end{matrix} \\ \\ \begin{matrix} D^T(t)H(t)A(t) - B^T(t)H(t) + \\ +D^T(t)\frac{d}{dt}H(t) \end{matrix} & \begin{matrix} B^T(t)H(t)D(t) + D^T(t)H(t)B(t) + \\ +G(t-\tau) - D^T(t)\frac{d}{dt}H(t)D(t) \end{matrix} \end{bmatrix},$$

$$g^*(t) = \max_{-\tau\le s\le 0}\{\lambda_{\max}[G(t+s)]\}, \quad g_*(t) = \min_{-\tau\le s\le 0}\{\lambda_{\min}[G(t+s)]\},$$

$$L(t) = \max\{\lambda_{\max}(M[H(t)]), g^*(t)\},$$

$$r(t,\beta) = \min\{\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)]) - (1-e^{-\beta\tau})g^*(t-\tau),\ \beta g_*(t)\}, \tag{4}$$

$$\overline{\varphi(t)} = \frac{\lambda_{\max}(M[H(t_0)])}{g_*(t)}, \quad \overline{\psi}(t) = \frac{g^*(t_0)}{g_*(t)}.$$

Справедлива

Теорема. *Пусть существуют положительно-определенные матрицы $G(t)$ и $H(t)$, при которых матрица $S[G(t),H(t)]$ также положительно определена, и параметр $\beta^* > 0$ такие, что при всех $t \ge t_0$ выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)]) - (1-e^{-\beta\tau})g^*(t-\tau) \ge 0, \quad \beta \le \beta^*.$$

1. *Если при всех $t \ge t_0$ выполняется $L(t)\gamma_1(t) \le r(t,\beta)$,*

$$\gamma_1(t) = \lambda_{\min}(S[G(t),H(t)])/\lambda_{\max}(M[H(t)]), \tag{5}$$

то для решений $x(t)$ системы (1) справедлива верхняя оценка

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta} \le \{\sqrt{\overline{\varphi(t)}}\,[|x(t_0)| + |x(t_0-\tau)|] + \sqrt{\overline{\psi(t)}}\,\|x(t_0)\|_{\tau,\beta}\}e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma_1(s)ds}, \quad t \ge t_0. \tag{6}$$

2. *Если при всех $t \ge 0$ выполняется $L(t)\gamma_1(t) > r(t,\beta)$, то справедливо*

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta} \le \{\sqrt{\overline{\varphi(t)}}\,[|x(t_0)| + |x(t_0-\tau)|] + \sqrt{\overline{\psi(t)}}\|x(t_0)\,\|_{\tau,\beta}\}e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma_2(s)ds}, \quad t \ge t_0, \tag{7}$$
$$\gamma_2(s) = r(s,\beta)/L(s).$$

Доказательство. Получим двусторонние оценки неавтономного функционала Ляпунова–Красовского (2). Как следует из вида зависимости (2), нижняя оценка имеет вид

$$g_0\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \le g_*(t)\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \le V[t,x(t)], \quad g_*(t) = \min_{-\tau\le s\le 0}\{\lambda_{\min}[G(t+s)]\}. \tag{8}$$

Перепишем функционал (2) в виде

$$V[t,x(t)] = (x^T(t), x^T(t-\tau))\begin{bmatrix} H(t) & -H(t)D(t) \\ -D^T(t)H(t) & D^T(t)H(t)D(t) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix} + \\ + \int_\tau^0 e^{\beta s}x^T(t+s)G(t+s)x(t+s)ds.$$

Отсюда верхняя оценка имеет вид

$$V[t,x(t)] \le \lambda_{\max}(M[H(t)])[|x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2] + g^*(t)\|x(t)\|^2_{\tau,\beta}, \tag{9}$$
$$g^*(t) = \max_{-\tau\le s\le 0}\{\lambda_{\max}[G(t+s)]\}.$$

Произведем замену $t+s=\xi$ и преобразуем функционал (2) следующим образом:

$$V[t,x(t)] = [x(t)-D(t)x(t-\tau)]^T H(t)[x(t)-D(t)x(t-\tau)] + \int_{t-\tau}^{t} e^{-\beta(t-\xi)} x^T(\xi)G(\xi)x(\xi)d\xi. \quad (10)$$

Вычислим полную производную преобразованного функционала (10), учитывая (1). Получаем

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}V[t,x(t)] = [A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)]^T H(t)[x(t)-D(t)x(t-\tau)] + \\ +[x(t)-D(t)x(t-\tau)]^T H(t)[A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)] + \\ +[x(t)-D(t)x(t-\tau)]\frac{dH(t)}{dt}[x(t)-D(t)x(t-\tau)] - \\ -\beta\int_{t-\tau}^{t} e^{-\beta(t-\xi)}x^T(\xi)G(\xi)x(\xi)d\xi + x^T(t)G(t)x(t) - e^{-\beta\tau}x^T(t-\tau)G(t-\tau)x(t-\tau). \end{gathered}$$

Соберем три первых слагаемых в единую квадратичную форму

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[t,x(t)] = &-(x^T(t),x^T(t-\tau))S[G(t),H(t)]\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau)\end{pmatrix} + \\ &+(1-e^{-\beta\tau})x^T(t-\tau)G(t-\tau)x(t-\tau) - \beta\int_{t-\tau}^{t} e^{-\beta(t-\xi)}x^T(\xi)G(\xi)x(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

где $S[G(t),H(t)]$ — матричная функция, определенная в (4).

Пусть существуют положительно-определенные матрицы $H(t)$ и $G(t)$, при которых матрица $S[G(t),H(t)]$ также положительно определена. Тогда для производной функционала $V[t,x(t)]$ будет выполняться неравенство

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}V[t,x(t)] \le -\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)])[|x(t)|^2+|x(t-\tau)|^2] + \\ +(1-e^{-\beta\tau})g^*(t-\tau)|x(t-\tau)|^2 - \beta g_*(t)\|x(t)\|^2_{\tau,\beta}, \\ g^*(t-\tau) = \max_{-\tau\le s\le 0}\{\lambda_{\max}[G(t-\tau+s)]\}. \end{gathered} \quad (11)$$

Обозначим

$$L(t) = \max\{\lambda_{\max}(M[H(t)]), g^*(t)\}, \quad t\ge t_0.$$

Тогда двусторонние оценки (8), (9) для функционала $V[t,x(t)]$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} g_0\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \le g_*(t)\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \le V[t,x(t)] \le \\ \le \lambda_{\max}(M[H(t)])|x(t)|^2 + L(t)[|x(t-\tau)|^2 + \|x(t)\|_{\tau,\beta}]. \end{aligned} \quad (12)$$

Перепишем неравенство (11) для полной производной функционала $V[t,x(t)]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[t,x(t)] \le &-\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)])|x(t)|^2 - \\ &-\{\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)]) - (1-e^{-\beta\tau})g^*(t-\tau)\}|x(t-\tau)|^2 - \beta g^*(t)g_*(t)\|x(t)\|^2_{\tau,\beta}. \end{aligned}$$

Поскольку по условию теоремы матрица $S[G(t),H(t)]$ положительно-определенная, то

$$\{\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)]) - (1-e^{-\beta\tau})g^*(t-\tau)\}_{\beta=0} = \lambda_{\min}(S[G(t),H(t)]) \ge \alpha_0 > 0.$$

Пусть существует параметр $\beta^*>0$ такой, что

$$\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)]) - (1-e^{-\beta\tau})g^*(t-\tau) \ge 0, \quad t\ge t_0, \quad \beta<\beta^*. \quad (13)$$

Положим

$$r(t,\beta) = \min\{\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)]) - (1-e^{-\beta\tau})g^*(t-\tau),\ \beta g^*(t)g_*(t)\}. \quad (14)$$

Тогда для оценки производной функционала $V[t,x(t)]$ получим

$$\frac{d}{dt}V[t,x(t)] \le -\lambda_{\min}(S[G(t),H(t)])|x(t)|^2 - r(t,\beta)[|x(t-\tau)|^2 + \|x(t)\|^2_{\tau,\beta}]. \tag{15}$$

Полная производная функционала оценивается выражением, содержащим три нормы фазовой координаты. Для упрощения вернемся к правосторонней оценке функционала $V[t,x(t)]$ вида (12).

1) Перепишем (12) в виде

$$-|x(t)|^2 \le -\frac{1}{\lambda_{\max}(M[H(t)])}V[t,x(t)] + \frac{L(t)}{\lambda_{\max}(M[H(t)])}[|x(t-\tau)|^2 + \|x(t)\|^2_{\tau,\beta}]$$

и подставим полученное выражение в правую часть (15):

$$\frac{d}{dt}V[t,x(t)] \le -\gamma_1(t)V[t,x(t)] + [L(t)\gamma_1(t) - r(t,\beta)][|x(t-\tau)|^2 + \|x(t)\|^2_{\tau,\beta}].$$

Пусть параметры системы (1) таковы, что при всех $t \ge t_0$ выполняется неравенство

$$L(t)\gamma_1(t) \le r(t,\beta), \quad t \ge t_0. \tag{16}$$

Тогда для полной производной функционала $V[t,x(t)]$ будет иметь место неравенство

$$\frac{d}{dt}V[t,x(t)] \le -\gamma_1(t)V[t,x(t)], \quad t \ge t_0, \tag{17}$$

причем $\gamma_1(t)$ определяется формулой (5).

2) Перепишем неравенство (12) в виде

$$-[|x(t-\tau)|^2 + \|x(t)\|^2_{\tau,\beta}] \le -\frac{1}{L(t)}V[t,x(t)] + \frac{\lambda_{\max}(M[H(t)])}{L(t)}|x(t)|^2$$

и вновь подставим в оценку правой части производной функционала $V[t,x(t)]$. Получим

$$\frac{d}{dt}V[t,x(t)] \le -\frac{r(t,\beta)}{L(t)}V[t,x(t)] + \left[r(t,\beta)\frac{\lambda_{\max}(M[H(t)])}{L(t)} - \lambda_{\min}(S[G(t),H(t)])\right]|x(t)|^2.$$

Если параметры системы (1) такие, что при всех $t \ge t_0$ выполняется

$$L(t)\gamma_1(t) > r(t,\beta), \tag{18}$$

то для оценки полной производной функционала $V[t,x(t)]$ имеет место

$$\frac{d}{dt}V[t,x(t)] \le -\gamma_2 V[t,x(t)], \quad \gamma_2(t) = \frac{r(t,\beta)}{L(t)}, \quad t \ge t_0. \tag{19}$$

Объединяя оба случая, получаем, что дифференциальные неравенства (17), (19) имеют решение

$$V[t,x(t)] \le V[t_0,x(t_0)]e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}, \tag{20}$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & L(t)\gamma_1(t) \le r(t,\beta), \quad t \ge t_0; \\ \frac{r(t,\beta)}{L(t)}, & L(t)\gamma_1(t) > r(t,\beta), \quad t \ge t_0. \end{cases}$$

Вновь вернемся к двусторонним оценкам функционала $V[t,x(t)]$ вида (8), (9). Используя неравенство (20), запишем

$$g_*(t)\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \le V[t,x(t)] \le V[t_0,x(t_0)]e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds} \le$$

$$\le \Big[\lambda_{\max}(M[H(t_0)])[|x(t_0)|^2 + |x(t_0-\tau)|^2] + g^*(t_0)\|x(t_0)\|^2_{\tau,\beta}\Big]e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}.$$

Отсюда следует

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta} \le \Big\{\sqrt{\tfrac{\lambda_{\max}(M[H(t_0)])}{g_*(t)}}[|x(t_0)| + |x(t_0-\tau)|] + \sqrt{\tfrac{g^*(t_0)}{g_*(t)}}\|x(t_0)\|_{\tau,\beta}\Big\}e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}, \quad t \ge t_0.$$

Таким образом, если существует $\beta^* > 0$ такое, что при всех $t \ge t_0$ выполняется (16), то для решений $x(t)$ системы (1) справедлива верхняя оценка вида

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta} \le \Big\{\sqrt{\overline{\varphi(t)}}\,[|x(t_0)| + |x(t_0-\tau)|] + \sqrt{\overline{\psi(t)}}\,\|x(t_0)\|_{\tau,\beta}\Big\}e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma_1(s)ds}, \quad t \ge t_0.$$

Если же при всех $t \ge t_0$ выполняется (18), то справедлива оценка

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta} \le \Big\{\sqrt{\overline{\varphi(t)}}\,[|x(t_0)| + |x(t_0-\tau)|] + \sqrt{\overline{\psi(t)}}\,\|x(t_0)\|_{\tau,\beta}\Big\}e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma_2(s)ds}, \quad t \ge t_0. \quad \square$$

Литература

1. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
3. Кореневский Д.Г. *Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров.* – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

Киевский национальный университет

Поступила 02.12.2003