

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

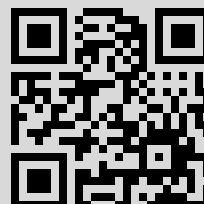
Д. Я. Хусаинов, А. Ф. Иванов, А. Т. Кожаметов, Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 8, 1137–1140

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.230.96.200

19 января 2020 г., 09:10:44



УДК 517.929.4

ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2005 г. Д. Я. Хусаинов, А. Ф. Иванов, А. Т. Кожаметов

1. Исследование асимптотической устойчивости методом функционалов Ляпунова–Красовского. Одним из общепринятых методов исследования устойчивости нулевого решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n,$$

$F(0, 0) = 0$, является метод функционалов Ляпунова–Красовского. В работе [1, с. 172] доказано, что если система с последствием такова, что можно указать функционал $V[x(t), t]$, определенно-положительный, допускающий бесконечно малый высший предел и такой, что величина правой производной вдоль решений системы является определенно-отрицательной, то тривиальное решение асимптотически устойчиво. Приведенное утверждение дает достаточные условия асимптотической устойчивости. При определенных условиях утверждение допускает обращение.

Однако построить функционал, удовлетворяющий оценкам с одной нормой, даже для линейных систем с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \tag{1}$$

весьма затруднительно. Для линейных систем наиболее естественно использовать функционал квадратичного вида

$$V[x(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds \tag{2}$$

с положительно-определенными матрицами H и G . Однако он не удовлетворяет неравенствам с одной метрикой. Функционал Ляпунова–Красовского вида (2) удовлетворяет двусторонним оценкам

$$\lambda_{\min}(H)|x(t)|^2 + \lambda_{\min}(G)\|x(t)\|_{\tau}^2 \leq V[x(t)] \leq \lambda_{\max}(H)|x(t)|^2 + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_{\tau}^2,$$

где $|x(t)| = (\sum_{i=1}^n x_i^2(t))^{1/2}$, $\|x(t)\|_{\tau} = (\int_{-\tau}^0 |x(t+s)|^2 ds)^{1/2}$, $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ – минимальное и максимальное собственные числа соответствующих симметричных положительно-определенных матриц.

Для производных функционала $V[x(t)]$ вида (2) в силу системы (1) справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] = -(x^T(t), x^T(t - \tau)) \begin{bmatrix} -A^T H - H A - G & -H B \\ -B^T H & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{pmatrix},$$

откуда получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H])(|x(t)|^2 + |x(t - \tau)|^2),$$

где

$$S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^T H - H A - G & -H B \\ -B^T H & G \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если существуют положительно-определенные матрицы G и H , при которых матрица $S[G, H]$ также будет положительно-определенной, то система (1) асимптотически устойчива равномерно по запаздыванию $\tau > 0$ [2, с. 134].

Следует отметить, что при практическом исследовании систем простого установления факта асимптотической устойчивости недостаточно. Часто требуется получить некоторые априорные характеристики, устанавливающие скорость сходимости процесса к установившемуся положению равновесия. Так, для линейных стационарных систем без запаздывания $dx(t)/dt = Ax(t)$ с помощью метода квадратичных функций Ляпунова $V[x(t)] = x^T H x$ можно получить следующие верхние оценки сходимости:

$$|x(t)| \leq ((\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))|x(0)|)^{1/2} \exp(-\lambda_{\min}(C)t/\lambda_{\max}(H)), \quad t \geq 0.$$

Здесь C – произвольная положительно-определенная матрица, H – решение матричного уравнения Ляпунова $A^T H + H A = -C$. Целью настоящей работы является получение аналогичных оценок для систем с запаздыванием и нейтрального типа.

2. Верхние мажорантные оценки сходимости решений линейных дифференциально-разностных систем с запаздыванием. Рассмотрим возможность установления аналогичных оценок сходимости для решений $x(t)$, $x(t) = \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, систем вида (1). Для этого будем использовать функционал вида

$$V[x(t)] = x^T(t) H x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} x^T(t+s) G x(t+s) ds, \quad \beta > 0.$$

Наличие под интегралом экспоненты позволяет оценить производную с использованием слагаемого, содержащего интегральную норму. Обозначим

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} = \left[\int_{-\tau}^0 e^{\beta s} |x(t+s)|^2 ds \right]^{1/2}, \quad \varphi_{11}(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \varphi_{12}(G, H) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(H)},$$

$$\varphi_{21}(G, H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(G)}, \quad \varphi_{22}(G) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть существуют положительно-определенные матрицы G и H , при которых $S[G, H]$ также положительно определена. Тогда система (2) асимптотически устойчива и для ее решений справедливы верхние экспоненциальные оценки сходимости

$$|x(t)| \leq [\sqrt{\varphi_{11}(H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{12}(G, H)} \|x(0)\|_{\tau, \beta}] e^{-\gamma t/2}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} \leq [\sqrt{\varphi_{21}(G, H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{22}(G)} \|x(0)\|_{\tau, \beta}] e^{\gamma t/2}, \quad t \geq 0; \quad (4)$$

здесь

$$\gamma = \min(\lambda_{\min}(S[G, H])/\lambda_{\max}(H), \beta \lambda_{\min}(G)/\lambda_{\max}(G)). \quad (5)$$

Величина β может быть произвольной при $\lambda_{\min}(S[G, H]) \geq \lambda_{\max}(G)$ и

$$0 < \beta \leq \tau^{-1} \ln(\lambda_{\max}(G)/(\lambda_{\max}(G) - \lambda_{\min}(S[G, H]))),$$

если $\lambda_{\min}(S[G, H]) < \lambda_{\max}(G)$.

Замечание. Поскольку для $\|x(t)\|_{\tau, \beta}^2$ справедливы верхние оценки

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta}^2 = \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} |x(t+s)|^2 ds \leq \max_{-\tau \leq s \leq 0} [|x(t+s)|^2] \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} ds \leq \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \tau}) \|x(t)\|_{\tau}^2 \leq \tau \|x(t)\|_{\tau}^2,$$

где $\|x(t)\|_{\tau} = \max_{-\tau \leq s \leq 0} [|x(t+s)|]$, то неравенство (3) можно заменить следующим:

$$|x(t)| \leq [\sqrt{\varphi_{11}(H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{12}(G, H)} \|x(0)\|_{\tau}] e^{-\gamma t/2}, \quad t \geq 0,$$

или даже

$$|x(t)| \leq [\sqrt{\varphi_{11}(H)} + \sqrt{\varphi_{12}(G, H)}] \|x(0)\|_{\tau} e^{-\gamma t/2}, \quad t \geq 0.$$

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x}(t) = -ax(t) + bx(t - \tau)$. Возьмем функционал Ляпунова-Красовского в виде

$$V_0[x(t)] = hx^2(t) + g \int_{-\tau}^0 x^2(t+s) ds.$$

Минимальное собственное число матрицы $S[G, H]$ при $g = 1$, $h = a/b^2$ равно

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) = (a/b^2)[a - \sqrt{a^2 - b^2}] > 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{\min}(G) = \lambda_{\max}(G) = 1, \quad \lambda_{\min}(H) = \lambda_{\max}(H) = a/b^2.$$

Поскольку $\lambda_{\min}(G) = 1 > (a/b^2)[a - \sqrt{a^2 - b^2}] = \lambda_{\min}(S[G, H])$, то величина β выбирается из условия

$$\beta \leq \frac{1}{\tau} \ln \left[\frac{b^2}{a\sqrt{a^2 - b^2} - (a^2 - b^2)} \right].$$

Таким образом, показатель γ с учетом (5) равен $\gamma = \min[(a - \sqrt{a^2 - b^2}), \beta]$.

3. Оценки сходимости решений систем нейтрального типа. Установим верхние оценки сходимости решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t - \tau)] = Ax(t) + Bx(t - \tau).$$

Предполагается, что $|D| < 1$, где под матричной нормой понимается спектральная. Для вывода оценок сходимости будем использовать функционал вида [3, с. 121]

$$V[x(t)] = [x(t) - Dx(t - \tau)]^T H[x(t) - Dx(t - \tau)] + \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} x^T(t + s) G x(t + s) ds, \quad \beta > 0, \quad (6)$$

с положительно-определенными матрицами G , H . Наличие в первом слагаемом разности $x(t) - Dx(t - \tau)$ удобно при вычислении полной производной в силу системы, однако затрудняет получение оценки функционала снизу.

Введем следующие обозначения:

$$M[H] = \begin{pmatrix} H & -HD \\ -D^T H & D^T H D \end{pmatrix}, \quad S[G, H] = \begin{pmatrix} -A^T H - HA - G & A^T H D - HB \\ D^T H A - B^T H & B^T H D + D^T H B + G \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(G, H) = \lambda_{\max}(M[H])/\lambda_{\min}(G), \quad \varphi_2(G) = \lambda_{\max}(G)/\lambda_{\min}(G), \quad L = \max\{\lambda_{\max}(M[H]), \lambda_{\max}(G)\}.$$

Теорема 2. Пусть существуют положительно-определенные матрицы G , H , при которых матрица $S[G, H]$ также положительно определена. Тогда для решений $x(t)$ системы нейтрального типа (6) справедлива следующая верхняя оценка:

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} \leq [\sqrt{\varphi_1(G, H)}(|x(0)| + |x(-\tau)|) + \sqrt{\varphi_2(G)}\|x(0)\|_{\tau, \beta}]e^{-\gamma t/2}, \quad t \geq 0,$$

где $\gamma = \min[\lambda_{\min}(S[G, H])/\lambda_{\max}(M[H]), \beta^* \lambda_{\min}(G)/L]$, $\beta^* > 0$ – корень уравнения

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) - (1 - e^{-\beta\tau})\lambda_{\max}(G) = \beta\lambda_{\min}(G).$$

Пример 2. Для скалярного уравнения

$$\frac{d}{dt}[x(t) - dx(t - \tau)] = -ax(t) + bx(t - \tau), \quad a > 0, \quad |d| < 1,$$

функционал Ляпунова–Красовского возьмем в виде

$$V[x(t)] = h(x(t) - dx(t - \tau))^2 + g \int_{-\tau}^0 e^{\beta s} x^2(t + s) ds,$$

положим $h = 1$, $g = a - bd$, и найдем β^* как решение уравнения

$$a + bd - |b + ad| - (1 - e^{-\beta\tau})(a - bd) = \beta(a - bd). \quad (7)$$

Поскольку при $\beta = 0$ левая часть последнего уравнения $a + bd - |b + ad| > 0$, а правая часть равна нулю, при $\beta \rightarrow +\infty$ левая часть стремится к $a + bd - |b + ad| - (a - bd)$, а правая уходит на бесконечность, то уравнение (7) имеет единственное решение $\beta = \beta^* > 0$, откуда следует, что

$$\|x(t)\|_{\tau, \beta} \leq \left[\sqrt{\frac{2d^2}{a - bd}}|x(0)| + \sqrt{\frac{2d^2}{a - bd}}|x(-\tau)| + \|x(0)\|_{\tau, \beta} \right] e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

$$\gamma = \min \left\{ \frac{1}{2} [a + bd - |b + ad|], \frac{\beta^*(a - bd)}{L} \right\}, \quad L = \max \{ 2d^2, (a - bd) \}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Государственного комитета по науке и технике Украины (проект 01.07/00081).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
3. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев, 1989.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступила в редакцию
22.04.2003 г.