

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT AGRAR UNIVERSITETI

K. SH. RUZMETOV

MATEMATIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
tomonidan oliy o'quv yurtlarining qishloq xo'jaligi sohasi talabalari
uchun darislik sifatida tavsiya etilgan

VNESHINVESTPROM
Toshkent – 2020

UO‘K 373.3.016

KBK 74.102

P-93

Ruzmetov, K. Sh.

Matematika [Matn]: darslik / K.Sh.Ruzmetov. – Toshkent: VneshInvestProm, 2020. – 328 b.

KBK 74.102

Mazkur darslik qishloq xo'jaligi sohasi mutaxassisligi talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda oliy algebra, analitik geometriya, matematik-analiz, extimollar nazariyasi va differentsial tenglamalar kurslarining muhim tushunchalari bayon qilingan.

Muallif: dots.Ruzmetov K.SH

Taqrizchilar:

1.Xudayarov.B.A - TIKXMMI “oliy matematika” kafedrasi mudiri ,proffesor,f-m.f.d

2.Yusupov.M-ToshDAU“Axborot texnologiyalari va matematika” kafedrasi dotsenti,f-m.f.n

ISBN 978-9943-4444-5-4

© VNESHINVESTPROM, 2020

M U N D A R I J A

SO'Z BOSHI	6
I BOB. DASTLABKI TUSHUNCHALAR.	7
1-§. To'plamlar va ular ustida amallar.	7
2-§. Haqiqiy sonlar.	13
3-§. Matematik induksiya usuli.	22
II BOB. OLIY ALGEBRA ELEMENTLARI.	31
1-§. 2-va 3-tartibli determinantlar, ularning xossalari. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish.	31
2-§. Matritsalar va ular ustida amallar. Gauss usuli.	35
3-§. Chiziqli (vektor) fazo va chiziqli almashtirishlar.	40
III BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI. ..	49
1-§. Dekart koordinatalar sistemasini. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.	49
2-§. To'g'ri chiziq va uning tenglamalari.	52
3-§. Ikkinchi tartibli chiziqlar.	58
4-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi.	64
IV BOB. VEKTORLAR NAZARIYASI.	73
1-§ Ikki vektorning skalyar, vektorli ko'paytmalari va ularning qo'llanilishi.	73
2-§ Ikki vektorning vektor ko'paytmasi.	75
V BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA.	81
1-§ Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari.	81
2-§ Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari.	82
3-§ To'g'ri chiziq va tekislik.	83
4-§ Sirtlar tenglamasi.	90
VI BOB. FUNKTSIYA TUSHUNCHASI VA GRAFIGI.	94
1-§. Funktsiya tushunchasi. Misollar. Murakkab funktsiya. Funktsiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi.	94
2-§. Funktsiya xossalari tekshirish. Teskari funktsiya.	101
4-§. Parametrik ko'rinishda va qutb koordinatalar sistemasida berilgan funktsiyalar.	120

VII BOB. LIMIT, UZLUKSIZLIK, HOSILA.	130
1-§. Ketma-ketlik va uning limiti.	130
2-§. Sonli qatorlar.	133
3-§. Funktsiya limiti.	141
4-§. Funktsiyaning uzluksizligi.	147
5-§. Hosila. Elementar funktsiyalarning hosilalari.	151
6-§. Differentsial hisobning asosiy xossalari.	156
7-§. Funktsiyani to'liq tekshirish va uning grafigini yasash.	159
VIII BOB. INTEGRAL HISOB.	183
1-§. Aniqmas integral va uni hisoblash.	183
2-§. Aniq integral va uning tadbiqlari.	189
IX BOB. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA TUSHUNCHASI	206
1-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiya tushunchasi.	206
2-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalari.	208
3-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari.	213
4-§. Kompleks sonlar.	216
X BOB. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENTIAL TENGLAMALAR.	224
1-§. Asosiy tushunchalar.	224
2-§. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar.	231
XI BOB. IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENTIAL TENGLAMALAR.	252
1-§. Boshlang'ich shart bilan berilgan ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar.	252
2-§. Differentsial tenglamaning tadbiqlari.	260
XII BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI. ASOSIY TUSHUNCHALAR.	280
1-§ Ehtimolning klassik ta'rifi va xossalari.	280
2-§. Ehtimollarni qo'shish, ko'paytirish teoremlari.	286
To'la ehtimol va Bayes formulalari.	
3-§ Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Muavr - Laplasning lokal va integral teoremlari.	

Puasson formulasi	292
4-§. Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari.....	298
5-§.Uzluksiz tasodifiy miqdor. Tasodifiy miqdorning.....	304
taqsimot funktsiyasi va uning xossalari. Sonli xarakteristikalari	
6-§ Normal taqsimot va uni tadbiqlari.....	306
7-§. Katta sonlar qonuni.....	309
8-§. Matematik statistika elementlari. Asosiy tushunchalar.	314
Statistik taqsimot va uni geometrik izohlash.....	
9-§Taqsimot parametrlarini statistik baholari. Nuqtaviy va	
intervalli statistik baholar. Normal taqsimotni noma'lum	317
parametrlariga intervalli statistik baho qurish.....	319
10-§ Intervalli statistik baho.....	
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI	325

SO'Z BOSHI

Hozirgi vaqtda matematik metodlar fan, texnika va xalq xo'jaligining ko'p sohalarida turli-tuman masalalarni hal qilishda keng qo'llanilmoqda. Ayniqsa, xalq xo'jaligining barcha sohalarida kompyuterlarning yalpi qo'llanilishi munosabati bilan matematik usullarning ahamiyati yanada ortdi.

Qishloq xo'jaligi sohasi mutaxassisliklarda matematikani o'qitishdan maqsad - talabaning mantiqiy fikrlashini o'stirish va tatbiqiy masalalarni matematik usullar bilan tekshirish malakalarini hosil qilishdan iboratdir.

Zamon talabi o'qitilayotgan fanning mos mutaxassisliklar bo'yicha amaliy tatbiqlarini hisobga olishni talab etmoqda.

Ushbu darslik qishloq xo'jaligi sohasi mutaxassisliklari talabalari uchun muljallangan o'quv reja va o'tiladigan o'quv dasturidan kelib chiqqan holda yozilgan. Darslikda oliy algebra, analitik geometriya, matematik-analiz va differentsial tenglamalar bo'limining elementlari, hamda mustaqil yechish uchun misol va masalalar keltirilgan.

Bundan tashqari bahzi biologiya va kimyoda uchraydigan ayrim masalalarning matematik modellari keltirilgan.

I-BOB. DASTLABKI TUSHUNCHALAR.

1-§. To'plamlar va ular ustida amallar.

1⁰. Matematikada yozuvni qisqartirib ifodalash, shuningdek iboralarni ixcham aytish maqsadida maxsus belgilar (mantiqiy belgilar) dan foydalaniladi:

- 1) $\Rightarrow$ belgi «agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi» iborasi o'rnida;
- 2) $\forall$ belgi, «har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so'zlari va so'z birikmalari o'rnida;
- 3) $\exists$ belgi, «mavjudki», «topiladiki» so'zlari o'rnida;
- 4) $\Leftrightarrow$ belgi, ikki ekvivalent tasdiqni ifodalashda;
- 5) $:=$ belgi, «tahrifga ko'ra teng» so'z birikmalari o'rnida;
- 6) $\in$ belgi, «tegishli», $\notin$ yoki $\overline{\in}$ belgilari esa «tegishli emas» so'zlari o'rnida ishlatiladi.

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, uni obyektlarning mahlum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi.

Bir qancha obyektlarni birgalikda yangi objekt deb qarash mumkin. Bu yangi objektga **to'plam** deyiladi.

Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi.

Odatda, to'plamlar bosh harflar, uni tashkil etuvchilari (elementlari) kichik harflar bilan belgilanadi.

To'plamning P xususiyatli x elementlaridan tashkil topgan to'plam quyidagicha $\{x \mid P\}$ belgilanadi.

2⁰. Ikki A va V to'plamlar berilgan bo'lsin. A to'plam V ning qismi ($A \subset V$), A va V to'plamlar tengligi ($A = V$), A va V to'plamlar yig'indisi ($A \cup B$), A va V to'plamlar ko'paytmasi ($A \cap V$), A to'plamdan V to'plamning ayirmasi ($A \setminus B$) quyidagicha tahriflanadi:

$$A \subset B: a \in A \Rightarrow a \in B;$$

$$A = B: A \subset B, B \subset A;$$

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ ёku } x \in B\};$$

$$A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\};$$

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

1-misol.

$$A = \{x \in N \mid -3 < x \leq 5\}$$

va

$$B = \{x \in N \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$$

to'plamlar

uchun

$A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ lar topilsin.

$$\blacktriangleleft A = \{x \in N \mid -3 < x \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ va}$$

$B = \{x \in N \mid x^2 + 2x - 3 = 0\} = \{1\}$ ekanligidan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A \setminus B = \{2, 3, 4, 5\},$$

$$B \setminus A = \emptyset,$$

$$A \cap B = \{1\}.$$

2 - misol. $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$ to'plamning barcha qism to'plamlarini yozing.

$\blacktriangleleft A = \{3; 5\}$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Bu to'plamning barcha qism to'plamlari quyidagi to'plamlardan iborat bo'ladi:

$$\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3; 5\} \blacktriangleright$$

3 - misol. Ushbu

$$1) \{1; 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{1; 3\}, \{1; 2; 3\}\}$$

$$2) \{1; 2\} \subset \{\{1\}, \{2\}, \{1; 3\}, \{1; 2; 3\}\}$$

munosabatlar to'g'rimi?

$\blacktriangleleft$ Agar $A = \{1; 2\}$ va $B = \{\{1\}, \{2\}, \{1; 3\}, \{1; 2; 3\}\}$ deb belgilasak, V to'plam elementlari orasida A to'plamga teng bo'lgan element bo'lmaganligi sababli $A \in B \Rightarrow 1)$ - munosabat to'g'ri emas.

$A \subset B$ esa bajariladi, chunki $1 \in B$ va $2 \in B$ Demak, 2) - munosabat to'g'ri. ▶

4 - misol. A, V, S to'plamlari uchun Ushbu

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Aytaylik, $x \in (A \setminus B) \cap C$ bo'lsin. Yuqorida keltirilgan to'plamlar ustida amallar tahriflaridan foydalanib topamiz:

$$x \in (A \setminus B) \cap C \Rightarrow x \in A \setminus B, x \in C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A, x \notin B, x \in C \Rightarrow x \in A \cap C, x \notin B \cap C \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

Demak,

$$(A \setminus B) \cap C \subset (A \cap C) \setminus (B \cap C). \quad (1)$$

Endi $x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$. bo'lsin. Unda

$$x \in A \cap C, x \notin B \cap C \Rightarrow x \in A, x \in C,$$

$$x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B, x \in C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap C.$$

Demak,

$$(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cap C. \quad (2)$$

(1) va (2) munosabatlardan

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

5 - misol. A, V, S to'plamlari uchun ushbu

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

tenglikning bajarilishi ko'rsatilsin.

◀ Faraz qilaylik, $x \in (A \setminus B) \setminus C$. bo'lsin. Unda

$$x \in A \setminus B, x \notin C \Rightarrow x \in A, x \notin B,$$

$$x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus C, x \notin B \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C),$$

Demak,

$$(A \setminus B) \setminus C \subset (A \setminus C) \setminus (B \setminus C). \quad (3)$$

Endi $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ bo'lsin. Unda

$$x \in A \setminus C, \quad x \notin B \setminus C \Rightarrow x \in A, \quad x \notin C,$$

$$x \in A \setminus B. \Rightarrow x \in A \setminus B \Rightarrow x \notin C. \Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C,$$

Demak,

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \setminus C. \quad (4)$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

Berilgan A va V to'plamlar uchun

$$A \cup B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \cap B$$

to'plamlar topilsin.

$$1. \quad A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x \leq 3\}, \quad B = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$$

J:

$$A \cup B = \{-1; 1; 3\}, \quad A \setminus B = \{1; 3\}, \quad B \setminus A = \{-1\}, \quad A \cap B = \{2\}.$$

2.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sin \pi x = 0, x \in [-\pi; \pi]\},$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \cos \frac{\pi x}{2} = 0, \quad x \in [0; 2\pi]\right\}.$$

J:

$$A \cup B = \{-1; 2; 3; 5\}, \quad A \setminus B = \{2\}, \quad B \setminus A = \{5\}, \quad A \cap B = \{1; 3\}.$$

$$3. \quad A = \{1; 2; 4\}, \quad B = \{2; 3\}.$$

j:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}, \quad A \setminus B = \{1; 4\}, \quad B \setminus A = \{3\}, \quad A \cap B = \{2\}$$

$$4. A = \{x \mid x^2 - 7x + 6 = 0\}, \quad B = \{1; 6\}.$$

J:

$$A \cup B = \{1; 6\}, \quad A \setminus B = \emptyset, \quad B \setminus A = \emptyset, \quad A \cap B = \{1; 6\}.$$

$$5. \text{ Agar } A = \{x \in N \mid 2 < x \leq 6\}, \quad B = \{x \in N \mid 1 < x < 4\}$$

$$\text{va } C = \{x \in N \mid x^2 - 4 = 0\} \text{ bo'lsa,}$$

1) $B \cup C$, 2) $A \cap B \cap C$, 3) $A \cup B \cup C$, 4) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$
to'plamlar topilsin.

J: 1) $\{2; 3\}$, 2) $\emptyset$, 3) $\{2; 3; 4; 5; 6\}$, 4) $\{2; 3\}$.

$$6. A = \{x \in N \mid 1 < x \leq 4\}, \quad B = \{x \mid x^2 - 9 = 0\}$$

bo'lsa, $A \cup B$ to'plamning barcha qism to'plamlari topilsin.

J: $\emptyset, \{-3\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{-3; 2\}, \{-3; 3\}, \{-3; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{3; 4\}, \{-3; 2; 3\}, \{-3; 2; 4\}, \{-3; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}, \{-3; 2; 3\}$.

7. Agar

$$A = \{x \in N \mid 0 \leq x < 3\}, \quad B = \{x \in N \mid -1 < z < 4\} \text{ va}$$

$$C = \{x \in N \mid x^2 - 9 = 0\} \text{ bo'lsa, 1) } B \cup C, \text{ 2) } A \cap B \cap C,$$

$$3) A \cup B \cup C, \text{ 4) } (A \cap B) \cup (B \cup C) \text{ to'plamlar topilsin.}$$

J: 1) $\{2; 3\}$, 2) $\emptyset$, 3) $\{1; 2; 3\}$, 4) $\{2; 3\}$.

$$8. A = \{x \in N \mid x^2 - 16 = 0\}, \quad B = \{x \in N \mid -4 \leq x \leq 2\}$$

bo'lsa, $A \cup B$ to'plamning barcha qism to'plamlari topilsin.

J: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1; 2\}, \{1; 4\}, \{2; 4\}, \{1; 2; 4\}$.

9. A to'plam 2 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami, V esa 3 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami bo'lsa, $A \cap B$ to'plam qanday bo'ladi?

J: 6 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami.

10. Agar $B \subset A$ bo'lib, ushbu

$$A \cap X = B$$

tenglik bajarilsa, unda X to'plam qanday bo'ladi?

J: $X=V$

11. Agar $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ bo'lsa, unda X va U to'plamlar qanday munosabatda bo'ladi?

$$J: \mathbf{X \subset Y}$$

A , V va S to'plamlar uchun quyidagi munosabatlarning bajarilishi ko'rsatilsin.

$$12. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$13. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

14. Agar

$$X = A \cup (B \setminus C), \quad Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$$

bo'lsa, X va U to'plamlar qanday munosabatda bo'ladi?

$$J: \mathbf{X \supset Y}$$

15. A to'plam 3 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami, V esa 5 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami bo'lsa, $\mathbf{A \cap B}$ to'plam qanday bo'ladi?

J: 15 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami

16. Ushbu

$$(A \setminus B) \cup B = A$$

tenglik faqat $\mathbf{B \subset A}$ bo'lgandagina bajarilishi ko'rsatilsin.

17. Ixtiyoriy A , V va S to'plamlari uchun ushbu

$$(A \cup B) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$$

munosabatning bajarilishi ko'rsatilsin.

Ixtiyoriy A , V va S to'plamlar uchun quyidagi munosabatlarning bajarilishi ko'rsatilsin.

$$18. A \cap (A \cup B) = A.$$

$$19. A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

$$20. (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

$$21. (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

$$22. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

23. Agar $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ bo'lsa, X va U to'plamlar qanday munosabatda bo'ladi?

$$J: X = Y.$$

24. Agar A to'plam 4 ta elementdan iborat bo'lsa, uning qisman to'plamlaridan tashkil topgan to'plamning elementlari soni 16 ta bo'lishi isbotlansin.

25. Agar A to'plamning elementlari soni m ta, V niki n ta bo'lib, $'$ va q to'plamlarning elementlari soni mos ravishda r va q ta bo'lsa

$$p = m + n - q$$

bo'lishi isbotlansin.

2-§. Haqiqiy sonlar.

1. Haqiqiy sonlar. Sanash jarayonida ishlatiladigan 1, 2, 3, ... sonlar **natural sonlar** deyilib, natural sonlar to'plami N bilan belgilanadi:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Barcha natural sonlar, nol soni va barcha manfiy ishora bilan olingan natural sonlardan tashkil topgan to'plam **butun sonlar** to'plami Z ni hosil qiladi:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Bu " n faktorial" deb o'qiladi.

$0! = 1$, deb qabul qilingan.

C_n^k binomial koeffitsientni quyidagi ko'rinishda aniqlaymiz:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in N, \quad k \leq n.$$

Barcha $n \in N$ lar uchun $C_n^0 = 1$ deb hisoblaymiz.

Quyidagi xossalarni keltiramiz,

- 1) $C_n^k = C_n^{n-k}$,
- 2) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Bu xossalardan binomial koeffitsient natural son ekanligi kelib chiqadi.

C_n^k dan foydalanib Nyuton binomi formulasini keltiramiz:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + a^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} a^k, n \in N.$$

Nyuton binomi formulasi xususiyl hollarda quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi:

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= x^2 + 2xa + a^2, \\(x+a)^3 &= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3, \\(x+a)^4 &= x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4.\end{aligned}$$

Mahlumki, qisqarmaydigan $\frac{p}{n}$ ($p \in Z, n \in N$) kasr ko'rinishida ifodalanadigan son **ratsional son** deyiladi va barcha ratsional sonlar to'plami Q deb belgilanadi:

$$Q = \left\{ r = \frac{p}{n} \mid p \in Z, n \in N, (p, n) = 1 \right\}.$$

Agar $\frac{p}{n}$ kasrning maxraji 10^q qo'rinishida bo'lsa, uni **o'nli kasr** deyiladi. O'nli kasrlar uch xil bo'ladi:

- 1) chekli o'nli kasrlar (1,5; 0,17; -0,01);
- 2) cheksiz davriy o'nli kasrlar (0,888... = 0,(8); 0,11777... = 0,11(7));
- 3) cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar (3,14...; 2,71...).

Har qanday ratsional son chekli o'nli kasr yoki cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalanadi va aksincha.

Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr **irrational son** deyiladi.

Ratsional hamda irratsional sonlar umumiy nom bilan **haqiqiy son** deb ataladi va barcha haqiqiy sonlar to'plami R deb belgilanadi.

2. Sonlar o'qi. Haqiqiy sonlar to'plami R bilan to'g'ri chiziq nuqtalari to'plami o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. Shu sababli haqiqiy sonlar to'plami **sonlar o'qi** yoki haqiqiy o'q, haqiqiy sonning o'zi esa **sonlar o'qining nuqtasi** ham deyiladi.

$x \in R$ son uchun

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

miqdor x ning **absolyut qiymati** deyiladi.

$x \in R$ sonning o'zidan katta bo'lmagan butun qismi $[x]$ kabi yoziladi, $\{x\} = x - [x]$ esa shu sonning kasr qismi bo'ladi.

Aytaylik, $a \in R$ va $b \in R$ bo'lib, $a < b$ bo'lsin.

Unda

$[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ kesma (segment),

$(a, b) = \{x \in R | a < x < b\}$ interval,

$[a, b) = \{x \in R | a \leq x < b\}$ yarim interval,

$(a, b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$ yarim interval deyilib, a va b lar

ularning chetki nuqtalari deyiladi. Shuningdek,

$[a, +\infty) = \{x \in R | x \geq a\},$

$(-\infty, a) = \{x \in R | x < a\},$

$(-\infty, +\infty) = R$

deb qaraymiz.

3. To'plamning chegaralari. Biror E ($E \subset R$) to'plam berilgan bo'lsin.

Agar

$$\exists b_0 \in E, \forall x \in E \Rightarrow x \leq b_0$$

bo'lsa, b_0 soni E to'plamning **eng katta elementi** deyiladi va

$$b_0 = \max E = \max \{x | x \in E\}$$

kabi belgilanadi. Agar

$$\exists a_0 \in E, \forall x \in E \Rightarrow x \geq a_0$$

bo'lsa a_0 soni E to'plamning **eng kichik elementi** deyiladi va

$$a_0 = \min E = \min \{x | x \in E\}$$

kabi belgilanadi.

Agar

$$\exists M \in R \quad \forall x \in E \Rightarrow x \leq M \quad (\exists m \in R \quad \forall x \in E \Rightarrow m \leq x)$$

bo'lsa, E to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan, $M(m)$ soni esa E to'plamning **yuqori (quyi) chegarasi** deyiladi.

Agar $a^* (a_*)$ soni

1) E to'plamning yuqori (quyi) chegarasi bo'lib,

2) E to'plamning ixtiyoriy yuqori (quyi) chegarasi d uchun $a^* \leq d$ ($a_* \geq d$) bo'lsa,

$a^* (a_*)$ soni E to'plamning **aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi** deyiladi va

$$a^* = \sup E \quad (a_* = \inf E)$$

kabi belgilanadi.

1-teorema. a^* soni E to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lishi uchun ushbu

1) a^* soni E to'plamning yuqori chegarasi,

2) $\forall d < a^* \exists x \in E \Rightarrow x > d$ shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

a_* soni E to'plamning aniq quyi chegarasi bo'lishi uchun ushbu

1') a_* soni E to'plamning quyi chegarasi

2') $\forall d > a_* \exists x \in E \Rightarrow x < d$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

2-teorema. Faraz qilaylik, $E \subset R$ bo'lib, $E \neq \emptyset$ bo'lsin. Agar E to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u aniq yuqori

chegaraga ega. Agar E quyidan chegaralangan bo'lsa, u aniq quyi chegaraga ega.

Agar E yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa $\sup E = +\infty$, quyidan chegaralanmagan bo'lsa $\inf E = -\infty$ deb qaraladi.

1-misol. Ushbu

$$\alpha = \sqrt{3}, \quad \beta = \log_7 6$$

sonlarning irratsional ekanligi ko'rsatilsin.

Faraz qilaylik, α ratsional son bo'lsin. Unda $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ bo'lib, p

va q lar o'zaro tubdir: $(p, q) = 1$.

Ravshanki, $p^2 = 3q^2$ bo'ladi. Demak, p^2 son 3 ga bo'linadi. Haqiqatdan ham, agar r son 3 ga bo'linmaydigan bo'lsa, unda $p = 3k + 1$ yoki $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) bo'ladi.

Agar $p = 3k + 1$ bo'lsa, $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$, ya'ni $p^2 - 3(3k^2 + 2k) = 1$ bo'ladi. Ayni paytda p^2 son 3 ga bo'linganligi sababli, $p^2 - 3(3k^2 + 2k)$ ham 3 ga bo'linishi lozim. Biroq, bu ayirma 1 ga teng bo'lishi ziddiyatga olib keladi.

Xuddi shunga o'xshash $p = 3k + 2$ bo'lganda ham ziddiyat kelib chiqadi. Demak, p soni 3 ga bo'linmaydi: $p = 3m$.

Shuni e'tiborga olib, $q^2 = 3m^2$ bo'lishini va yuqoridagi mulohazaga ko'ra q ning ham 3 ga bo'linishini topamiz: $q = 3n$.

Demak, p va q sonlarning har biri 3 ga bo'linadi. Bu esa p va q larning o'zaro tub ekanligiga ziddir. Ziddiyat, $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ deb olinishi

oqibatida sodir bo'ldi. Demak, $\sqrt{3}$ ni $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi. $\sqrt{3}$ - irratsional son.

$\beta = \log_7 6$ sonini ham ratsional, ya'ni $\log_7 6 = \frac{p}{q}$ deb faraz

qilamiz. Unda $7^{\frac{p}{q}} = 6, \Rightarrow 7^p = 6^q$ bo'ladi. Bu tenglik hech qachon o'rinli bo'lmaydi, chunki 6^q –juft, 7^p –toq sonidir.

Demak, $\log_7 6$ ni $\frac{p}{q}$ ko'rinishda ifodalab bo'lmaydi, u irratsional son.

2-misol. Agar r -ratsional son va α -irratsional son bo'lsa, $\alpha + r$ irratsional son bo'lishi isbotlansin.

$\alpha + r = \beta$ deb belgilab, β -ratsional son bo'lsin deb faraz qilamiz.
 $\Rightarrow \alpha = \beta - r$ -ratsional son. Ziddiyat hosil bo'ldi. Demak, $\alpha + r = \beta$ –irratsional son.

3-misol. Agar α va β lar irratsional sonlar bo'lsa, unda

1) $\alpha + \beta$,

2) α^β lar ratsional son bo'lishi mumkinmi?

$\alpha + \beta$ ratsional son bo'lishi mumkin. Masalan, $\alpha = \sqrt{3}$ va $\beta = 2 - \sqrt{3}$ lar irratsional, lekin $\alpha + \beta = 2$ - ratsional.

$\alpha + \beta$ α^β ham ratsional son bo'lishi mumkin.

Masalan, $\alpha = \sqrt{3}$ va $\beta = 2 \log_3 2$ larning irratsional ekanini ko'rish qiyin emas. Lekin $\alpha^\beta = \sqrt{3}^{2 \log_3 2} = 2$ -ratsional son.

4-misol. $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sonining irratsional son ekanligi isbotlansin.

Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ ratsional son bo'lsin. Unda $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r \Rightarrow 3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 5 = r^2$
 $\sqrt{15} = r^2 - \frac{8}{2}$. Bu tenglikning o'ng tomonida ratsional son turibdi, chapdagi $\sqrt{15}$ ning irratsional ekanini ko'rish qiyin emas. Ziddiyat $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ning irratsional son ekanini isbotlaydi.

5-misol. Ushbu

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$$

tengsizlik yechilsin.

$|x| > x$ tengsizlik $x < 0$ bo'lgandagina bajarilgani uchun berilgan tengsizlikdan

$$\frac{x}{x+1} < 0$$

ekanligini topamiz. Intervallar usulidan foydalansak –

$$-1 < x < 0$$

ekanligini ko'rish qiyin emas.

6-misol. $E \subset R, F \subset R$ to'plamlar yuqoridan chegaralangan va

$$E + F = \{x + y | x \in E, y \in F\}$$

bo'lsin. Unda

$$\sup(E + F) = \sup E + \sup F$$

bo'lishi isbotlansin.

Aytaylik, $\sup E = a$ va $\sup F = b$ bo'lsin. Unda 1-teoremaga ko'ra

$$\begin{aligned} \sup E &\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall x \in E, & x \leq a \\ 2) \forall d_1 < a \exists x_0 \in E \Rightarrow x_0 > d_1, \end{cases} \\ \sup F &\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall y \in F, & y \leq b \\ 2) \forall d_2 < b \exists y_0 \in F \Rightarrow y_0 > d_2, \end{cases} \end{aligned}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\forall x \in F, x \leq a; \forall y \in F, y \leq b \Rightarrow x + y \leq a + b$$

$$\forall d_1 < a \exists x_0 \in E \Rightarrow x_0 > d_1, \forall d_2 < b \exists y_0 \in F \Rightarrow y_0 > d_2$$

bo'lishidan

$\forall d < a + b$ olib $\exists x_1 + y_1 \in E + F : x_1 + y_1 > d$
bo'lsin. Yana 1- teorema ko'ra

$$\sup(E + F) = a + b$$

bo'ladi. Demak,

$$\sup(E + F) = \sup E + \sup F.$$

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1. Ushbu $\alpha = \sqrt{5}$ va $\beta = \lg 2$ sonlarining irratsional ekanligi isbotlansin.

2. Ushbu $\alpha = \sqrt{2}$ va $\beta = \log_2 3$ sonlarining irratsional ekanligi isbotlansin.

3. Ushbu 1) $2^x = 11$, 2) $x^2 - 7x + 1 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi ratsional son mavjud emasligi ko'rsatilsin.

4. Agar a, b va $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ratsional sonlar bulsa, $\sqrt{a}$ va $\sqrt{b}$ sonlar to'g'risida nima deyish mumkin?

5. Agar α va β -irratsional sonlar, r -ratsional son bo'lsa, ushbu 1) $\alpha + r$, 2) $\sqrt{r}$, 3) $\alpha \bullet r$, 4) $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$, 5) $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$ sonlarning qaysilari ratsional bo'lishi mumkin?

$$J: \sqrt{r}, \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}.$$

6. Ushbu 1) $x^3 = 7$, $x^2 + 3x + 1 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi ratsional son mavjud emasligi isbotlansin.

7. $\sqrt{2}$ va $\sqrt{3}$ sonlar orasida joylashgan ratsional son topilsin.

$$J: \text{bunday sonlar cheksiz ko'p, masalan } \frac{3}{2}.$$

8. Agar α va β -irratsional sonlar, r -ratsional bo'lsa, ushbu 1) $\alpha + \beta$, 2) $\sqrt{\alpha}$, 3) $\alpha \bullet \beta$, 4) $\sqrt{\alpha} + r$ va 5) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{r}$ sonlarning qaysilari ratsional bo'lishi mumkin?

$$J: \alpha + \beta, \alpha \bullet \beta, \sqrt{\alpha + \sqrt{r}}.$$

9. $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ sonining irratsional ekanligi isbotlansin.

10. Agar α va β - irratsional sonlar bo'lib, $\alpha + \beta$ - ratsional bo'lsa, unda $\alpha - \beta$ va $\alpha + 2\beta$ larning irratsional son bo'lishi ko'rsatilsin.

Quyidagi sonlar irratsional ekanligi isbotlansin.

11. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}.$

12. $\sqrt{5} - \sqrt{2}.$

Tengsizliklar yechilsin.

13. $|x + 3| > 2$ J: $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty).$

14. $|x - 4| + |x + 4| \leq 10.$ J: $-5 \leq x \leq 5.$

15. $|x| < x + 1.$ J: $x < -\frac{1}{2}.$

16. $|x - 2| < 3.$ J: $-1 < x < 5.$

17. $|x + 2| + |x - 2| \geq 12$ J: $x \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$

18. $|x^2 - 2x| > x^2 - |2x|$ J: $x < 2$ ($x \neq 0$)

19. Agar $a > \frac{1}{2}$, bo'lsa, $\frac{1}{a}$ sonning butun qismi topilsin.

J: 1, agar $\frac{1}{2} < a \leq 1$ bo'lsa, 0 agar $a > 1$, bo'lsa.

20. Ushbu $E = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \geq 1 \right\}$ to'plamning chegaralanganligi

ko'rsatilsin.

21. Ushbu $A = \{r \in Q \mid r^2 < 2\}$ to'plamning aniq yuqori va quyi chegaralari topilsin.

J: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$

22. Ushbu $\sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in N \right\} = 1$ tenglik isbotlansin.

23. Aytaylik, $E \subset R$ va $-E = \{x \mid -x \in E\}$ bo'lsin. Unda $\sup(-E) = -\inf E$, $\inf(-E) = -\sup E$ bo'lishi isbotlansin.

24. Ushbu $E = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 4} \mid n \in N \right\}$ to'plam uchun

$$\sup E = 1, \inf E = \frac{1}{5}$$

bo'lishi ko'rsatilsin.

3-§. Matematik induksiya usuli.

Mahlumki, fikr yuritish asosan ikki – deduktiv va induktiv formalarda olib boriladi. *Deduktsiya* – fikrlashning umumiy tasdiqlaridan xususiy tasdiqlarga o'tish, *induktsiya* esa fikrlashning xususiy tasdiqlaridan umumiy tasdiqlarga o'tish formasidir.

Aytaylik, $A(n)$ biror tasdiqni (fikr, mulohazani) ifodalasin ($n \in N$). Matematik induksiya usulida:

- 1) $n = n_0$ bo'lganda $A(n)$ tasdiqning to'g'riligi (mulohazaning rostligi) tekshiriladi;
- 2) $n = k$ bo'lganda ($k > n_0$) $A(n)$ tasdiqni to'g'ri deb faraz qilib, $n = k + 1$ uchun $A(n)$ ning to'g'riligi isbotlanadi ($A(k) \Rightarrow A(k + 1)$);
- 3) yuqoridagi 1) va 2) bandlar ijobiy hal bo'lgan taqdirda $A(n)$ tasdiq barcha $n \geq n_0$ lar uchun to'g'ri deb xulosa chiqariladi.

1-misol. Dastlabki n ta toq natural sonlar yig'indisi uchun

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

bo'lishi isbotlansin.

► Bu ayniyatni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

1) $n = 1$ bo'lganda $S_1 = 1 = 1^2$ bo'lib, $A(1)$ to'g'ri.

2) $n = k$ da $A(k)$ to'g'ri bo'lsin:

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Unda

$$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = S_k + 2k + 1 =$$

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

bo'ladi. Demak,

$$A(k) \Rightarrow A(k + 1).$$

Matematik induksiya usuliga binoan (1) tenglik ixtiyoriy natural n soni uchun to'g'ri bo'ladi ►

2-misol. $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $n(n^2 + 5)$ ning 6 ga bo'linishi ko'rsatilsin.

◄ 1) $n = 1$ bo'lganda $1 \cdot (1^2 + 5) = 6$ bo'lib, $A(1)$ tasdiq to'g'ri.

2) $n = k$ da $A(k)$ to'g'ri bo'lsin, yahni $k \cdot (k^2 + 5)$ 6 ga bo'linsin.

Unda

$$(k + 1) \cdot [(k + 1)^2 + 5] = (k + 1) \cdot (k^2 + 5 + 2k + 1) =$$

$$= k \cdot (k^2 + 5) + 2k^2 + k + k^2 + 5 + 2k + 1 = k(k^2 + 5) + 3k(k + 1) + 6$$

bo'lib, $k(k + 1)$ har doim juft son bo'lganligidan $3k(k + 1)$ soni 6 ga bo'linadi. Undan

$$A(k) \Rightarrow A(k + 1)$$

ni topamiz. Demak, $\forall n \in \mathbb{N}$ da $n(n^2 + 5)$ son 6 ga bo'linadi ►

3-misol. $\forall n \in \mathbb{N}$ va $\forall x > -1$ uchun ushbu

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Bernulli tengsizligi}) \quad (2)$$

tengsizlik isbotlansin.

◀ 1) $n = 1$ bo'lganda $(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x$ bo'lib, $A(1)$ to'g'ri.

2) $n = k$ da $A(k)$ to'g'ri bo'lsin:

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx \quad (3)$$

Ravshanki, $x > -1 \Rightarrow 1 + x > 0$. (3) tengsizlikning har ikki tomonini $1 + x$ ga ko'paytirib topamiz:

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx) \cdot (1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

Demak,

$$A(k) \Rightarrow A(k + 1)$$

Binobarin, $\forall n \in \mathbb{N}$ va $\forall x > -1$ uchun

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

bo'ladi ▶

4-misol. $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun Ushbu

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \cdot \sin \alpha}, \alpha \neq 0 \quad (4)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ 1) $n = 1$ da (4) tenglik o'rinli:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha &= \frac{1}{4 \sin \alpha} \cdot 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \\ &= \frac{1}{4 \sin \alpha} \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{4 \sin \alpha} = \frac{\sin 2^2 \alpha}{2^2 \cdot \sin \alpha} \end{aligned}$$

2) $n = k$ da $A(k)$ to'g'ri, yahni

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^k \alpha = \frac{\sin 2^{k+1} \alpha}{2^{k+1} \cdot \sin \alpha}$$

deb, $n = k + 1$ da $A(k + 1)$ ning to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^k \alpha \cdot \cos 2^{k+1} \alpha &= \frac{\sin 2^{k+1} \alpha}{2^{k+1} \cdot \sin \alpha} \cdot \cos 2^{k+1} \alpha = \\ &= \frac{2 \cdot \sin 2^{k+1} \alpha \cdot \cos 2^{k+1} \alpha}{2 \cdot 2^{k+1} \cdot \sin \alpha} = \frac{\sin(2 \cdot 2^{k+1} \alpha)}{2^{k+2} \cdot \sin \alpha} = \frac{\sin 2^{k+2} \alpha}{2^{k+2} \cdot \sin \alpha} \end{aligned}$$

Demak, (4) tenglik $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun o'rinli. ▶

5-misol. Ixtiyoriy natural $n > 1$ uchun

$$(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2 \quad (5)$$

tengsizlik isbotlansin.

1) $n = 2$ da $(2 \cdot 2)! = 4! = 24$ va

$2^{2 \cdot 2} \cdot (2!)^2 = 16 \cdot 4 = 64$ bo'lib, A(1) to'g'ri.

2) $n = k$ da A(k) to'g'ri bo'lsin, ya'ni $(2k)! < 2^{2k} \cdot (k!)^2$ tengsizlik bajarilsin. Unda

$$\begin{aligned} (2k+2)! &= (2k)!(2k+1) \cdot (2k+2) < 2^{2k} \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) = \\ &= 2^{2k+2} \cdot [(k+1)!]^2 \cdot \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)}{2^{2k+2} \cdot [(k+1)!]^2} = \\ &= 2^{2k+2} \cdot [(k+1)!]^2 \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{2^2 \cdot (k+1)^2} = 2^{2k+2} \cdot [(k+1)!]^2 \cdot \frac{2k^2 + 3k + 1}{2k^2 + 4k + 2} < \\ &< 2^{2k+1} \cdot [(k+1)!]^2 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, (5) tengsizlik ixtiyoriy natural $n > 1$ uchun o'rinli. ▶

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

Matematik induksiya usulini qo'llab, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi munosabatlarning to'g'riligi ko'rsatilsin.

$$1. \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Ko'rsatma: Avval 1-misoldan foydalanib, isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikni ushbu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

tenglik ko'rinishida yozib oling.

$$3. \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

$$4. \quad \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{2n+2}.$$

$$5. \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1).$$

$$6. \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$$

Ko'rsatma:

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$$

tenglikdan foydalaning.

$$7. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$8. \quad 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

.

$$9. \quad 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

$$10. \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$$

.

11. $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$
12. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$
13. $2^2 + 6^2 + \dots + (4n-2)^2 = \frac{4n \cdot (2n-1) \cdot (2n+2)}{3}$
14. $\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n}}.$

15-20 misollarda ko'rsatilgan ifodalarni $\forall n \in N$ uchun qavs ichida ko'rsatilgan songa bo'linishi isbotlansin.

15. $n^5 - n$ (5 ga).
16. $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ (11 ga). $n^3 + 11n$ (6 ga).
17. $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ (133 ga).
18. $7 \cdot 4^{2n} + 56$ (3 ga).
19. $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ (37 ga).
20. Ixtiyoriy $a \in R, b \in R$ va $\forall n \in N$ lar uchun ushbu

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + n \cdot a^{n-1} b +$$

$$+ \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + na \cdot b^{n-1} + b^n \quad (6)$$

tenglik (Nyuton binomi) isbotlansin. Bu yerda

$$C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0! = 1.$$

J. Ko'rsatma: Matematik induksiya usulidan foydalanamiz.

1) A(1) to'g'ri. 2) A(k) to'g'ri, ya'ni $(a+b)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^m$

tenglik bajariladi deb faraz qilamiz. Unda

$$(a+b)^{k+1} = (a+b) \cdot (a+b)^k = (a+b) \cdot \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^m = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^{m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^{k+1} C_k^{m-1} a^{k+1-m} b^m = a^{k+1} + \sum_{m=1}^k (C_k^m + C_k^{m-1}) a^{k+1-m} b^m + b^{k+1}$$

Agar $C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m$ va $C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1} = 1$ ekanligini e'tiborga olsak, oxirgi tenglikdan

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + b^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $A(k) \Rightarrow A(k+1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ uchun Nyuton binomi o'rinli.

21. $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun ushbu

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

tengsizlik isbotlansin.

Ko'rsatma: Nyuton binomidan foydalaning.

22. Ixtiyoriy natural $n > 1$ uchun ushbu

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

tengsizlik isbotlansin.

23. Agar $a > b > 0$ bo'lsa, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun ushbu

$$a^n > b^n$$

tengsizlik isbotlansin.

24. Ixtiyoriy natural $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

tengsizlik isbotlansin.

25. Agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar ixtiyoriy musbat sonlar bo'lib,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \quad (7)$$

munosabat bajarilsa, u holda

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \quad (8)$$

tengsizlikning bajarilishi isbotlansin.

J. Ko'rsatma: 1) $n=1$ bo'lganda, (7) shartga ko'ra $x_1=1$ bo'lib, $A(1)$ o'rinli.

2) $n=k$, bo'lganda $A(k)$ o'rinli deb faraz qilamiz va $n=k+1$ da $A(k+1)$ ning o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ lar $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy musbat sonlar bo'lsin.

(7) munosabat bajarilayotganda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin: yoki (7) munosabatdagi barcha sonlar 1 ga teng bo'lib, $A(k+1)$ bajariladi, yoki bu sonlar ichida kamida bitta birdan farqli son bor. Hech bo'lmaganda yana bitta birdan farqli son bo'lib, agar ularning biri 1 dan kichik bo'lsa, ikkinchisi albatta 1 dan katta bo'ladi. Umumiylikka ziyon keltirmagan holda $x_k > 1$ va $x_{k+1} < 1$ deb faraz qilish mumkin.

Endi ushbu k ta $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, (x_k \cdot x_{k+1})$ sonni ko'ramiz. Induktiv farazga ko'ra $x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k \cdot x_{k+1} \geq k$ tengsizlik o'rinli, chunki bu k ta sonning ko'paytmasi 1 ga teng. Bu tengsizlikning ikkala tomoniga $x_k + x_{k+1}$ ni qo'shib, $x_k \cdot x_{k+1}$ ni o'ng tomonga o'tkazamiz:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 = k + 1 + x_k \cdot (1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) = k + 1 + (1 - x_{k+1}) \cdot (x_k - 1) \geq k + 1$$

Demak, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Shunday qilib, (8)-tengsizlik $\forall n \in N$ uchun isbotlanadi.

Isbotdan shu narsa ko'rinib turibdiki, (8)-munosabat faqat $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ bo'lgandagina tenglikka aylanadi.

26. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ lar ixtiyoriy musbat sonlar bo'lsa, ushbu

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (9)$$

tengsizlikning bajarilishi isbotlansin.

Ko'rsatma.

$$x_k = \frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

deb olib, 25-misoldan foydalaning.

Matematik induksiya usulidan foydalanib quyidagi munosabatlarning o'rinli ekanligi isbotlansin

$$27. \quad n! < \left(\frac{n+1}{2} \right)^n \quad (n > 1).$$

Ko'rsatma: $a_k = k \quad (k = \overline{1, n})$ deb olib, 26-misoldan foydalaning.

$$28. \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

bu yerda $x_k > 0, k = \overline{1, n}$.

Ko'rsatma: (9) tengsizlikni $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ sonlar uchun

qo'llang.

$$29. \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \quad - \text{ Koshi } -$$

Bunyakovskiy tengsizligi. Bu yerda $x_i, y_i (i = \overline{1, n})$ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

J. Ko'rsatma: $\forall t \in R$ uchun $\sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2 \geq 0$ tengsizlik

o'rinli bo'lishidan foydalaning.

$$30. \quad (n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right]^n \quad (n > 1).$$

Ko'rsatma: $a_k = k^2$ deb olamiz, 26-misoldan foydalaning.

$$31. \quad n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3).$$

$$32. \quad (2n)! > \frac{4n}{n+1} \cdot (n!)^2 \quad (n > 1).$$

II-BOB. OLIIY ALGEBRA ELEMENTLARI.

1-§. 2-va 3-tartibli determinantlar, ularning xossalari. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish.

Aytaylik, a_1, a_2, b_1, b_2 sonlar berilgan bo'lsin.

Ushbu $a_1 b_2 - a_2 b_1$ songa **ikkinchi tartibli determinant** deb ataladi va u,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

kabi yoziladi.

a_1, a_2, b_1, b_2 sonlarga determinantning elementlari deyiladi.

Misol.
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23.$$

Xossalari.

1⁰. Agar determinantning mos qatorini mos ustuni bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{- tenglik o'rinli.}$$

2⁰. Agar determinantning yo'llari (yoki ustunlari) almashtirilsa, unda determinant ishorasini o'zgartiradi:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{3^0.} \quad \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4⁰. Birorta yo'lining (yoki ustunning) elementlari nollardan iborat bo'lsa, unda determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

5⁰. Agar ikkita yo'ldagi (yoki ustundagi) elementlar bir-biriga teng bo'lsa, unda determinant nolga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0$$

6⁰. Agar birorta yo'ldagi (yoki ustundagi) elementlar o'zgarmas songa ko'paytirilib boshqasiga qo'shilsa, unda determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm ka_2 & a_2 \\ b_1 \pm kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Endi 3-tartibli determinantning ta'rifini beramiz.

Aytaylik, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar berilgan bo'lsin.

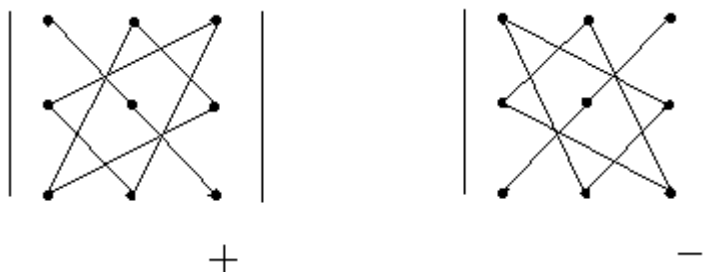
Ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1)$$

songa **3-tartibli determinant** deyiladi.

Δ ning qiymatini hisoblashning (1)-formulasiga **uchburchak usuli** deyiladi. Uni eslab qolishda quyidagi sxema yordam beradi:

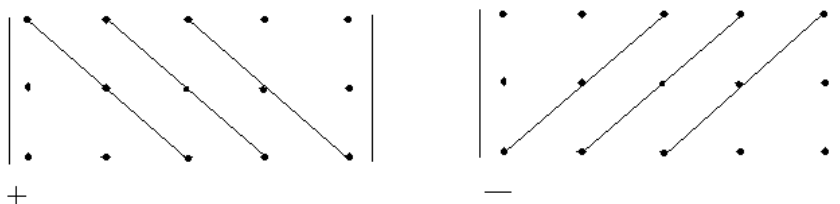


Δ ning qiymatini **Sarryus usuli** bilan ham hisoblash mumkin;

$$a_{11}a_{12}a_{13}a_{11}a_{12}$$

$$a_{21}a_{22}a_{23}a_{21}a_{22}$$

$$a_{31}a_{32}a_{33}a_{31}a_{32}$$



Uchinchi tartibli determinantning qiymatini determinantning tartibini pasaytirib, minorlar yordamida ham hisoblash mumkin. Masalan, birinchi yo'lning elementlari bo'yicha minorlarga yoyish yordamida quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (2)$$

$a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ elementlarga ko'paytirilgan ikkinchi tartibli determinantlar bu elementlarning **algebraik to'ldiruvchisi** deyiladi va A_{ij} kabi belgilanadi.

Agar $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ element turgan satr hamda ustunning nomerlari yig'indisi juft bo'lsa, u holda $A_{ij} = M_{ij}$ bo'ladi. Agar yig'indi toq bo'lsa, u holda $A_{ij} = -M_{ij}$ bo'ladi, ya'ni

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Uchinchi tartibli determinantlar ham 1^0-6^0 xossalarga ega. n-tartibli determinantlar ham yuqoridagi kabi aniqlanadi, faqat uning qiymati minorlar yordamida hisoblanadi.

Determinantlarning qo'llanish doirasi juda keng. Xususan ular yordamida chiziqli tenglamalar sistemasi osongina yechiladi.

Aytaylik, ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases} \quad (3)$$

uchta noma'lum chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lib, uni yechish talab qilinsin. Uning uchun ushbu determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{asosiy determinant.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ - yordamchi determinantlar.

Teorema (Kramer). Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, unda (3)-tenglamalar sistemasini yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi ushbu

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (4)$$

formulalar yordamida topiladi.

(4)-formulaga **Kramer formulasi** deyiladi va tenglamalar sistemasini yechishning bu usuliga esa **Kramer usuli** deb ataladi.

Izoh. Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ lardan birortasi $\neq 0$ bo'lsa, unda (3)-sistema yechimga ega emas. Agar $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsa, (3)-sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

n ta nomahlumli chiziqli tenglamalar sistemasini uchun ham Kramer teoremasi o'rinli.

Nazorat savollari.

- 1) 2- tartibli determinant deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
- 2) 3- tartibli determinant deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
- 3) Determinant xossalari. Misollar.
- 4) Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli. Misollar.

2-§. Matritsalar va ular ustida amallar.

Gauss usuli.

Ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A$$

jadvalga $(n \times m)$ **o'ltovli matritsa** deb ataladi. $n = m$ bo'lsa unga **kvadrat matritsa** deb ataladi.

Endi,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & \cdot & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2m} \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & b_{nm} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo'lsin.

Agar $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, n, j = 1, m$) bo'lsa, unda $A = B$ deyiladi.

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdot & a_{1m} + b_{1m} \\ \circ & \circ & \circ \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdot & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdot & \lambda a_{1m} \\ \circ & \circ & \circ \\ \lambda a_{n1} & \cdot & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}, \quad 0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

deb qabul qilamiz.

Xossalari:

1^o. $A + B = B + A$

2^o. $(A + B) + C = A + (B + C)$

3^o. $A\lambda = \lambda A$

Endi $n = m = 2$ bo'lganda, matritsani ko'paytirishni o'rganamiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (5)$$

(5)-tenglikdan ko'rinib turibdiki, $\forall A$ va V matritsalar berilganda, $A \cdot V$ aniqlanishi uchun A matritsaning ustunlar soni V matritsaning yo'llar soniga teng bo'lishi kerak.

Misollar.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

$$4^0. A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$5^0. (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$6^0. A \cdot E = E \cdot A = A, \text{ bu yerda } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{ birlik matritsa.}$$

A -kvadrat matritsa bo'lib, uning determinanti $|A| \neq 0$ bo'lsin.

Unda A^{-1} deb belgilanadigan shunday matritsa topiladiki, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ tenglik bajariladi, hamda A^{-1} ga teskari matritsa deb ataladi.

$$\text{Agar, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa,}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} \quad (6)$$

formula yordamida topiladi. Bu yerda $A_{il} - a_{il}$ elementining algebraik to'ldiruvchisi;

$$\text{Masalan, } A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

Matritsalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasi osongina yechiladi.

Aytaylik,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases} \quad (7)$$

(7)-tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{deb belgilasak,}$$

(7) ni $A \cdot X = C$ (8) matritsa ko'rinishida yozish mumkin.

$$X = A^{-1} \cdot C \quad (9)$$

$$\mathbf{1-misol.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases} \quad \text{tenglamalar sistemasi}$$

matritsalar usuli bilan yechilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 5.$$

(7) tenglamalar sistemasini nomahlumlarni ketma-ket yo'qotish usuli, ya'ni Gauss usuli bilan ham yechish mumkin.

Uni misolda tushuntiramiz.

2-misol.
$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Avval 1-qatorni 3 ga ko'paytirib, keyin ikkinchi qatordan ayiramiz, so'ng 1-qatorni uchinchi qatordan ayirib qo'yidagi sistemani hosil qilamiz (bunda biz determinantlarning 6^0 -xossasidan foydalanamiz):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ 0,5x_2 - 0,5x_3 = -0,5 \\ -1,5x_2 + 2,5x_3 = 4,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ -1,5x_2 + 2,5x_3 = 4,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = -1 + x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1.$$

SHunday qilib, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Nazorat savollari.

1. Matritsa tahrifi. Misollar.
2. Matritsalarini qo'shish va ko'paytirish. Misollar.
3. Teskari matritsa. Misollar.

4. Tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Misollar.
5. Gauss usuli. Misollar.

3-§. Chiziqli (vektor) fazo va chiziqli almashtirishlar.

Vektor tushunchasi, ular ustida amallar, ularning skalyar ko'paytmasi maktab kursidan ma'lum bo'lganligi sababli biz ularga to'xtalib o'tirmaymiz.

n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ tartiblangan sonlar to'plamini **n -o'lchovli x vektor** deb ataymiz va x vektorni $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ko'rinishda yozamiz. Agar $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nuqtalarning koordinatalari uchun $x_1 = b_1 - a_1, \quad x_2 = b_2 - a_2, \dots, x_n = b_n - a_n$ munosabatlar o'rinli bo'lsa A nuqta x vektorning boshi, B nuqta x vektorning oxiri ekanligini bildiradi. Vektorlar quyidagicha ham belgilanadi x , $\overline{x}$ va $\overline{AB}$.

x vektorni tashkil qiluvchi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar uning **komponentlari (koordinatalari)** deyiladi.

Barcha komponentlari nolga teng bo'lgan vektor **nol vektor** deyiladi.

Vektorlarni qo'shish va vektorlarni haqiqiy songa ko'paytirish vektorlar ustida **chiziqli amallar bajarish** deyiladi.

Ushbu

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \dots + \lambda_n e_n$$

(bu yerda $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ -turli vektorlar, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ -sonlar) ko'rinishda tasvirlangan x vektor $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vektorlarning **chiziqli kombinatsiyasidan** iborat deyiladi.

Agar hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$) shunday sonlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \quad (*)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vektorlar **chiziqli bog'liq vektorlar** deyiladi. Agar bunday $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ -sonlar mavjud bo'lmasa, ya'ni $(*)$ tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, unda $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vektorlar **chiziqli erkli vektorlar** deyiladi.

Ikkita vektor o'zaro kollinear bo'lganda ular **chiziqli bog'liq** bo'ladilar. Agar uchta vektor o'zaro komplanar bo'lsa, ular **chiziqli bog'liqli** bo'ladilar.

V – fazoning istalgan vektori chiziqli ifodalanadigan chiziqli erkli vektorlar to'plami shu fazoning **bazisi** deyiladi. V – fazoning bazisini tashkil etuvchi vektorlar **bazis vektorlar** deyiladi.

V – fazoning chiziqli erkli vektorlarining eng katta soni shu fazoning **o'lchovi** deyiladi.

Shunga muvofiq ravishda, to'g'ri chiziqni **bir o'lchovli V_1 fazo** deyiladi, birorta to'g'ri chiziqqa joylashgan vektorlar to'plamining bazisi bitta vektordan iborat. Tekislikni **ikki o'lchovli V_2 fazo** deyiladi, birorta tekislikda joylashgan vektorlar to'plamining bazislari ikkita vektordan iborat. Odatdagi fazoni **uch o'lchovli V_3 fazo** deyiladi, uning bazislari uchta nokomplanar vektordan iborat.

Quyidagi teorema o'rinli: V_3 fazoning istalgan x vektori shu fazoning uchta chiziqli erkli e_1, e_2, e_3 vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi yordamida bir qiymatli aniqlanadi, ya'ni

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Bu ifoda x vektorning e_1, e_2, e_3 bazisi bo'yicha yoyilmasi deyiladi. Vektorning bazis bo'yicha yoyilmasidagi x_1, x_2, x_3 koeffitsientlar vektorning shu bazisdagi *koordinatalari* deyiladi.

O'zaro perpendikulyar birlik vektorlardan iborat bo'lgan bazis **ortonormallangan bazis** deyiladi va quyidagicha yoziladi.

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$(i, j = 1, 2, \dots, n).$

V_3 fazoda biror qoida bo'yicha har bir vektor x ga shu fazoning y vektori mos qo'yilgan bo'lsin, ya'ni vektor argument x ning $y = A(x)$ vektor qiymatli funktsiyasi berilgan bo'lsa, u holda bu fazoda **vektorlarni almashtirish** berilgan deyiladi.

Agar

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) \quad (1)$$

shart bajarilsa A almashtirish **chiziqli almashtirish** deyiladi, bu yerda x_1 va x_2 - qaralayotgan fazoning ixtiyoriy vektorlari, λ_1 va λ_2 esa istalgan sonlar.

V_3 fazoda biror e_1, e_2, e_3 bazis tanlab olamiz va bazisning har bir vektori uchun A almashtirishni qo'llaymiz:

$$A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

$$A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 \quad (2)$$

$$A(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$$

Ixtiyoriy $x \in V_3$ vektorni olamiz va uni $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ bazis bo'yicha yoyamiz. U holda

$$y = A(x) = A(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1A(e_1) + x_2A(e_2) + x_3A(e_3)$$

(2) formuladan foydalanib va o'xshash hadlarni ixchamlab quyidagini hosil qilamiz

$$\begin{aligned} y &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3) + x_3(a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)e_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)e_3 \end{aligned}$$

y vektorning e_1, e_2, e_3 bazisdagi koordinatalarini y_1, y_2, y_3 orqali belgilab, V_3 fazodagi har qanday vektorning koordinatalarini chiziqli almashtirishini aniqlovchi formulani hosil qilamiz.

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad (3)$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

(3)ni matritsa shaklida yozamiz:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

yahni

$$Y = AX$$

Vektorlarning har bir $y = Ax$ chiziqli almashtirishga shu vektorlar koordinatalarining $Y = AX$ chiziqli almashtirishi mos keladi va aksincha.

Misol. Ikkita chiziqli

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 4x_2' + 3x_3' \\ x_2'' = 5x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 3x_1' + 6x_2' + 7x_3' \end{cases}$$

almashtirishlar berilgan. x_1'', x_2'', x_3'' ni x_1, x_2, x_3 orqali ifodalovchi almashtirishni toping.

Echilishi: Koordinatalarning birinchi chiziqli almashtirish matritsasini A bilan ikkinchisini B bilan belgilaymiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

x, x', x'' vektorlarning koordinatalaridan olingan vektor ustunlarini mos ravishda X, X', X'' bilan belgilaymiz, yahni

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \quad X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

U holda koordinatalarning berilgan chiziqli almashtirishlarini matritsa shaklida yozamiz:

$X' = AX$, $X'' = BX'$ ularga mos vektorlarning chiziqli almashtirishlari esa $x' = Ax$, $x'' = Bx'$ ko'rinishda yoziladi.

Hosil qilingan formulalar quyidagini ifodalaydi: A chiziqli almashtirish x vektorni x' vektorga o'tkazadi, hosil qilingan x' vektor B almashtirish bilan x'' vektorga o'tkaziladi. x vektorni y vektorga o'tkazuvchi chiziqli almashtirish bunday yoziladi:

$$x'' = B(Ax)$$

koordinatalarning unga mos chiziqli almashtirishi esa quyidagicha yoziladi:

$$X'' = BAX \quad (4)$$

B va A matritsalarini ko'paytiramiz:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}$$

Olingan BA matritsani (4) tenglikka qo'yamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

bundan

$$x_1'' = 15x_1 + 0 \cdot x_2 + 7x_3$$

$$x_2'' = 6x_1 + 4x_2 + 24x_3$$

$$x_3'' = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3$$

shuni topish talab qilingan edi.

Nazorat savollari.

- 1) Chiziqli bog'liqli va chiziqli erkli vektorlar.
- 2) Bazis tshunchasi. Misollar.
- 3) Chiziqli almashtirishlar.

Mustaqil yechish uchun misollar.

Chiziqli tenglamalar sistemasini uchta usul:

- 1) Kramer usuli.
- 2) Matritsa usuli .
- 3) Gauss usuli bilan yeching.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = -23 \\ 3x_1 - x_3 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5 = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 - 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 - 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Ikkita chiziqli almashtirish berilgan x_1'' , x_2'' , x_3'' ni x_1 , x_2 , x_3 orqali ifodalovchi almashtirishni toping.

$$1. \begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \\ x_3' = 7x_2 - x_3 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_1'' = 2x_1' + x_3' \\ x_2'' = x_2' - 5x_3' \\ x_3'' = 2x_1' \end{cases}$$

2.	$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -3x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 3x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2' \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3' \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 5x_2' - 3x_3' \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3' \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3 \\ x_3' = 9x_1 + x_2 + 8x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 5x_2' - 3x_3' \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3' \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3' \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_2 - 6x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' - 5x_3' \\ x_2'' = 7x_1' + x_2' + 4x_3' \\ x_3'' = 6x_1' + 4x_2' - 7x_3' \end{cases}$
8.	$\begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 - x_2 + 5x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = -3x_1' + x_3' \\ x_2'' = 2x_2' + x_3' \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3' \end{cases}$

9.	$\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 4x_3 \\ x_2' = 4x_2 - 9x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + 7x_3' \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3' \end{cases}$
10.	$\begin{cases} x_1' = 7x_1 - 4x_3 \\ x_2' = 4x_2 - 9x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = x_2' + 6x_3' \\ x_2'' = 3x_1' - 7x_3' \\ x_3'' = x_1' - x_2' + x_3' \end{cases}$
11.	$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3 \\ x_3' = 9x_1 + x_2 + 8x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3' \\ x_2'' = -4x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' - 4x_2' + 5x_3' \end{cases}$
12.	$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 4x_3 \\ x_2' = 4x_2 - 9x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + 7x_3' \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3' \end{cases}$
14.	$\begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 - x_2 + 5x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = -3x_1' + x_3' \\ x_2'' = 2x_2' + x_3' \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3' \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 5x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$	va	$\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 3x_2' + x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
16. & \begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3' \end{cases} \\
17. & \begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ x_2' = 6x_1 + 9x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_1'' = -x_1' + 8x_2' - 2x_3' \\ x_2'' = -4x_1' + 3x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' - 8x_2' + 5x_3' \end{cases} \\
18. & \begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 5x_3 \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 5x_2' - 3x_3' \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3' \end{cases} \\
19. & \begin{cases} x_1' = 3x_1 + 0 + 5x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_2 - 6x_3 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' - 5x_3' \\ x_2'' = 7x_1' + x_2' + 4x_3' \\ x_3'' = 6x_1' + 4x_2' - 7x_3' \end{cases} \\
20. & \begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -3x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 3x_3 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2' \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3' \end{cases}
\end{array}$$

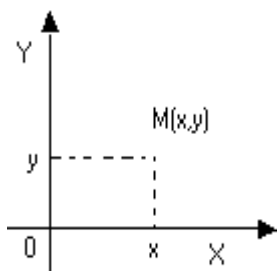
III-BOB.

ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI.

1-§. Dekart koordinatalar sistemasi. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

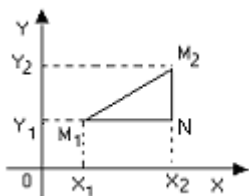
Tekislikda O nuqta orqali o'zaro perpendikulyar ikkita x va y to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. x o'qi (u odatda gorizontal bo'ladi) **abstsissalar o'qi** deyiladi, y o'qi esa (u

vertikal holatda bo'ladi) **ordinatalar o'qi** deyiladi. Kesishish nuqtasi O koordinatalar boshi deb ataladi. O nuqta o'qlarning har birini ikkita yarim o'qqa ajratadi. Ulardan birini **musbat yarim o'q** deb, uni strelka bilan belgilaymiz, ikkinchisini **manfiy yarim o'q** deyiladi. Bu o'qlarda uzunlik birligi tanlangan bo'lsa, birgalikda XOY – **Dekart koordinatalar sistemasi** berilgan deyiladi.



1-chizma.

$M_1(x_1, u_2)$, $M_2(x_2, u_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, $d = M_1M_2 = ?$



2-chizma.

Pifagor teoremasiga ko'ra,

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(M_1N)^2 + (M_2N)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (*)$$

bo'ladi.

(*)-ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasi deyiladi.

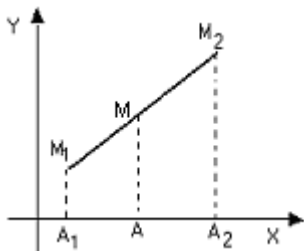
Endi $M_1(x_1, u_2)$, $M_2(x_2, u_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, M_1, M_2 nuqtalarda shunday $M(x, u)$ nuqtani topish kerakki,

$$\frac{|M_1M|}{|M_2M|} = \lambda$$

shart bajarilsin.

Elementar matematikadan mahlumki,

$$\frac{|M_1M|}{|M_2M|} = \frac{|A_1A|}{|AA_2|} \Rightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$



3-chizma.

Demak,

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (1)$$

Agar (1) da, $\lambda = 1$ desak,

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

kesma o'rtasining koordinatalarini hisoblash formulasini hosil qilamiz.

Misol. Uchlari $A(-5;3)$, $B(2;-4)$ nuqtalarda bo'lgan AB kesma berilgan. $C(x;y)$ nuqta kesmani $\frac{1}{4}$ nisbatda bo'ladi. $C(x;y)$ nuqta koordinatalari bilan AB kesma uzunligini toping.

Echilishi. Quyidagilarni yozib olamiz:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = \frac{1}{4}, \quad x_1 = -5, \quad y_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad y_2 = -4.$$

(1) formuladan foydalanib $C(x; y)$ nuqtaning koordinatalarini topamiz.

$$x = \frac{-5 + \frac{1}{4} \cdot 2}{1 + \frac{1}{4}} = -3,6; \quad y = \frac{3 + \frac{1}{4} \cdot (-4)}{1 + \frac{1}{4}} = 1,6. \quad C(-3,6; 1,6).$$

AB kesma uzunligini $(*)$ formuladan foydalanib topamiz.

$$AB = d = \sqrt{(2+5)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

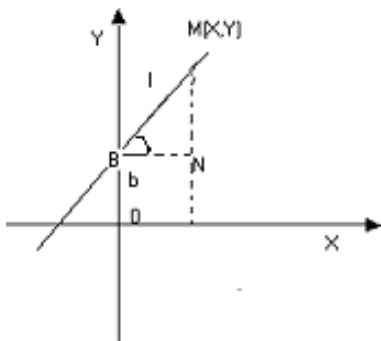
Nazorat savollari.

1. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini kiriting. Nuqtalar belgilab koordinatalarini aniqlang.
2. Ikki nuqta orasidagi masofa. Misollar.
3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Misollar.
4. Kesmaning o'rtasini topish. Misollar.

2-§. To'g'ri chiziq va uning tenglamalari.

1. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Aytaylik, l to'g'ri chiziq OU o'qiga parallel bo'lmasin va OX o'qi bilan φ burchakni tashkil qilib, OU o'qidan b birlik kesma kessin.



4-chizma.

$$\triangle MBN \text{ dan } \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{MN}{BN} = \frac{y - b}{x} \Rightarrow y = \operatorname{tg} \varphi \cdot x + b \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = k$$

desak,

$y = kx + b$ (1) to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

$y = b$ OX o'qiga parallel to'g'ri chiziq.

$x = a$ OU o'qiga parallel to'g'ri chiziq.

2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Teorema. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasida berilgan ixtiyoriy to'g'ri chiziq ushbu

$$Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

tenglama yordamida aniqlanadi va aksincha.

Bu yerda A, B, C lar o'zgarmas koeffitsientlar bo'lib A va B lardan hech bo'lmasa biri noldan farqli deb qaraladi.

Shuning uchun ham (2) tenglamaga **to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi** deb ataladi.

A, B, C o'zgarmas koeffitsientlar turli qiymatlarga teng bo'lganda turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Demak, to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati shu A, B, C sonlar bilan to'liq aniqlanadi.

3. Berilgan nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Aytaylik, $M(x_1, u_1)$ nuqta berilgan bo'lib, shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab qilinsin.

$y = kx + b$ ko'rinishda qidiramiz. To'g'ri chiziq $M(x_1, u_1)$ nuqtadan o'tganligi uchun $y_1 = kx_1 + b_1$ bo'ladi.

$$\Rightarrow y - y_1 = k(x - x_1) \quad (3)$$

izlanayotgan tenglama bo'ladi.

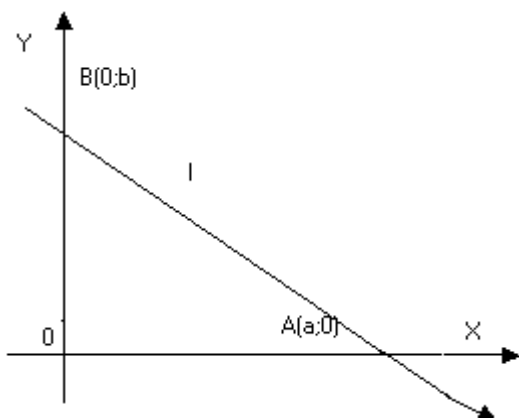
Agar $M(x_1, u_1)$ va $M_2(x_2, u_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, bu nuqtalardan o'tuvchi *to'g'ri chiziq tenglamasi* ushbu

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

tenglikdan topiladi.

4. To'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.

Aytaylik, l to'g'ri chiziq OX va OY o'qlarni mos ravishda a va b birlik kesmalarda kessin, ya'ni $A(a, 0)$ va $B(0, b)$ nuqtalardan o'tsin.



5-chizma.

(4) formuladan quyidagini yozib olamiz:

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$$

U holda uning tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5)$$

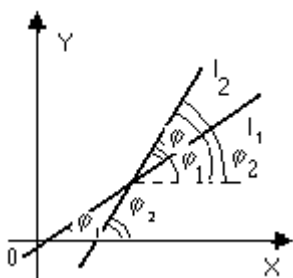
bo'lishini topish qiyin emas.

(3)-tenglamaga to'g'ri chiziqning **kесmalardagi tenglamasi** deb ataladi.

5. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Faraz qilaylik, $l_1 : y = k_1x + \vartheta_1$ va $l_2 : y = k_2x + \vartheta_2$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin.

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_1 = k_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = k_2 \quad \varphi = \left(\hat{l}_1, l_2 \right) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$



6-chizma.

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (6)$$

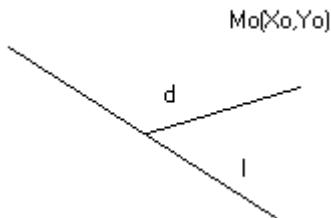
(6) ikkita to'g'ri chiziqning orasidagi burchakni hisoblash formulasi.

Agar ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\varphi = 0$ bo'lsa, ravshanki, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi. Bu holda $k_1 = k_2$ bo'lishi kelib chiqadi.

Agar ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, unda to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'ladi, ya'ni $k_1 k_2 = -1$.

Berilgan nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani quyidagi formuladan foydalanib topiladi.

$$l: Ax + By + C = 0$$



7- chizma.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (7)$$

Masala. Uchlarining koordinatalari $A(1; -1)$, $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $C(0, 0)$ bo'lgan AVS uchburchak uchun quyidagilarni aniqlang:

1. AV tomonining uzunligini hisoblang;
2. Tomonlarining tenglamasini tuzing;
3. S uchidan o'tkazilgan balandlikning tenglamasini tuzing;
4. V uchidan AS tomondacha bo'lgan masofani hisoblang;
5. Ichki A burchak bissektrisasining tenglamasini toping.

Echilishi.

1.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

2.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{dan foydalanib quyidagilarni topamiz:}$$

$$AV: 2x + y - 1 = 0$$

$$AC: x + y = 0$$

$$BC: -x + y = 0$$

3. $S(0, 0)$ nuqtadan $2x + y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz.

$$AV \text{ to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsienti } k_1 = -2$$

($y = -2x + 1$ dan) ga teng. Perpendikulyarlik shartidan

$$k_2 = \frac{1}{2} \text{ ekanini topamiz.}$$

$\Rightarrow y - y_c = k(x - x_c)$ dan qidirayotgan tenglamamiz

$$y = \frac{1}{2}x \text{ ekanini topamiz.}$$

4.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left| 1\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + 0 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

5. S nuqtaning koordinatalarini AV tomon tenglamasiga qo'ysak

$$2 \cdot 0 + 0 - 1 = -1 < 0$$

B nuqtaning koordinatalarini AC tomon tenglamasiga qo'ysak

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0,$$

Demak, AVS uchburchakning ichki A burchak bissektrisasi AV to'g'ri chiziqdan tekislikning manfiy qismidan o'tadi va AC to'g'ri chiziqdan tekislikning musbat qismidan o'tadi yahni bissektrisa nuqtalari uchun $2x + y - 1 < 0$, $x + y > 0$.

SHuning uchun ichki A burchak bissektrisasining tenglamasi quyidagicha:

$$\frac{y + 2x - 1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{y + x}{\sqrt{2}}.$$

Nazorat savollari.

1. To'g'ri chiziqning turli tenglamalari va ular orasidagi bog'lanish.
2. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti.
3. Berilgan nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

3-§. Ikkinchi tartibli chiziqlar.

Ushbu

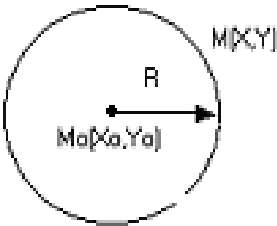
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

(1)-tenglama yordamida aniqlanadigan chiziqqa **ikkinchi tartibli chiziq** deb ataladi. Ular jumlasiga matematikada muhim rolg' o'ynaydigan *aylana, ellips, giperbola va parabolalar* kiradi.

1.Aylana. Markaz deb ataladigan nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga **aylana** deyiladi.

$M_0M = R \quad \forall M(x, y)$ uchun aylananing *kanonik tenglamasi* quyidagicha:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (2)$$



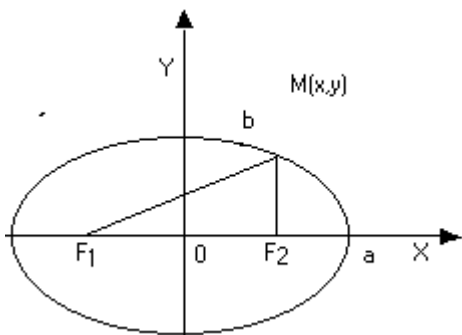
8-chizma.

2. Ellips. Ixtiyoriy nuqtasidan fokus deb ataladigan ikkita qo'zg'almas F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas $2a$ ga teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Ellipsdan $\forall M(x, y)$ nuqta olamiz. Aytaylik, $F_1(-c; 0)$ va $F_2(c; 0)$ bo'lsin.

SHartga ko'ra

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$



9-chizma.

B_1

MF_1 va MF_2 larning o'rniga qo'ysak:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

tenglamani hosil qilamiz. Tenglikni chap tomonidagi qo'shiluvchilarning birini o'ng tomonga o'tkazib kvadratga ko'taramiz. Hosil bo'lgan ifodani soddalashtirib, yana kvadratga ko'taramiz. Natijada,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

tenglik hosil bo'ladi.

$$2a > 2c \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$$

ekanligidan

$$b^2 = a^2 - c^2$$

deb belgilay olamiz

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Bundan,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

tenglik kelib chiqadi.

(3)-tenglik ellipsning kanonik tenglamasini ifodalaydi.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ -ellipsning ekstsentrishiteti deyiladi, $0 \leq \varepsilon < 1$.

Ekstsentrismet ellipsning siqilish darajasini aniqlaydi. Ekstsentrismet tahrifidan va $b^2 = a^2 - c^2$ tenglikdan quyidagi kelib chiqadi:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Bundan kelib chiqadiki, ε qancha katta bo'lsa $\frac{b}{a}$ nisbat shuncha kichik bo'ladi va ellips shuncha cho'zilgan bo'ladi.

Agar $\varepsilon = 0$ bo'lsa *ellips aylanaga* aylanadi.

$$r_1 = a - \varepsilon x \quad r_2 = a + \varepsilon x$$

ellipsning fokal radiuslari deyiladi.

Yarim o'qlar a va b , fokuslar orasidagi masofa $2s$ ga teng.

1-misol. Agar yarim o'qlar yig'indisi 16 ga va fokuslar orasidagi masofa 8 ga teng bo'lsa, ellips tenglamasini yozing.

Echilishi. $a + b = 16$; $2c = 8 \Rightarrow c = 4$ ma'lumki $a^2 - b^2 = c^2$,

$$16(a - b) = 16 \Rightarrow a - b = 1.$$

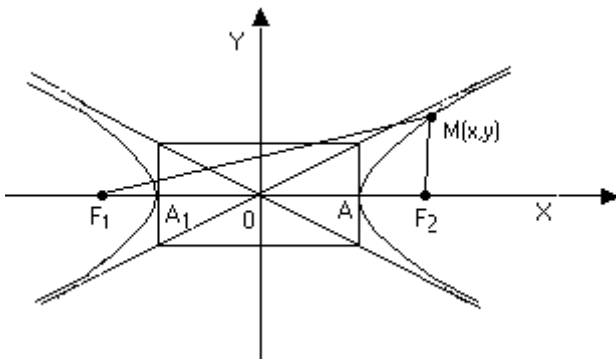
$$\begin{cases} a + b = 16 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechamiz. $a = 8,5$, $b = 7,5$..

Qidirilayotgan *ellips tenglamasi* quyidagicha yoziladi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{17^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \Rightarrow \frac{4x^2}{17^2} + \frac{4y^2}{15^2} = 1.$$

3. Giperbola. Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataladigan ikkita qo'zg'almas F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ ga teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **giperbola** deyiladi.



10-chizma.

Giperbola tahrifidan foydalanib, so'ngra ellips kanonik tenglamasini keltirib chiqarishga o'xshash amallar bajarib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

giperbolaning *kanonik tenglamasini* keltirib chiqarish mumkin, bu yerda $b^2 = c^2 - a^2$.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ - giperbolaning asimptotalari.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - giperbolaning ekstsentrisiteti, $\varepsilon > 1$.

$$r_1 = \varepsilon x - a \quad r_2 = \varepsilon x + a$$

, **giperbolaning fokal radiuslari** deyiladi.

Agar giperbolada $a = b$ bo'lsa, hosil bo'lgan

$$x^2 - y^2 = a^2$$

giperbolaga **teng tomonli giperbola** deb ataladi.

2-misol. Berilgan $9x^2 - 25y^2 = 225$ giperbolada a va b lar uzunligini, fokuslar koordinatalarini va ekstsentrisitetini toping.

Echilishi:

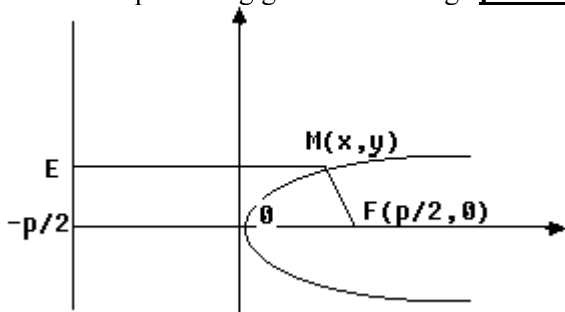
$$\frac{9x^2}{225} - \frac{25y^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5, \quad b = 3$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan foydalanib c ni topamiz:

$$c = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

Demak, $F_2(\sqrt{34}; 0), \quad F_1(-\sqrt{34}; 0).$

4. Parabola. Fokus deb ataladigan qo'zg'almas F nuqtadan va direktrisa deb ataladigan l to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **parabola** deyiladi.



11-chizma.

Parabolaning ta'rifiga ko'ra uning ixtiyoriy M nuqtasidan F nuqtagacha va M nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha masofalar teng ekan. F nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha masofani x o'qini l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar hamda F nuqtadan o'tadigan, y o'qni esa b to'g'ri chiziq va F nuqtaning o'rtasidan o'tadigan qilib olsak

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

tenglik hosil bo'ladi. Tenglikni ikkala tarafini kvadratga ko'tarib, ixchamlashtirganimizdan so'ng,

$$y^2 = 2px \quad (5)$$

parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi.

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \text{ parabola fokusi;}$$

$$x = -\frac{p}{2} \text{ parabola direktrisasi;}$$

$$r = x + \frac{p}{2} \text{ parabolaning fokal radiusi deyiladi.}$$

3-misol. $y^2 = 6x$ paraboladagi fokal radiusi 4,5 ga teng nuqtalarni toping.

Echilishi. Berilgan parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik:

$$2p = 6 \Rightarrow \frac{p}{2} = 1,5 \quad r = x + \frac{p}{2} \text{ dan } 4,5 = x + 1,5; \quad x = 3.$$

$$y^2 = 6 \cdot 3 = 18 \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}.$$

Demak, qidirilayotgan nuqtalar quyidagicha:

$$A(3; 3\sqrt{2}), B(3; -3\sqrt{2})$$

Nazorat savollari.

1. Aylana. Misollar.
2. Ellips va uning elementlari.
3. Giperbola va uning elementlari.
4. Parabola va uning elementlari.

4-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi.

Biz yuqorida ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola, parabolalarni keltirdik va ularning sodda xossalarini o'rgandik.

Endi biz ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasini keltiramiz:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

1) Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish;

2) Koordinata o'qlarini ma'lum α burchakka burish natijasida.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasini *kanonik ko'rinishga* keltirish mumkin.

Dekart koordinatalar sistemasining biridan ikkinchisiga o'tishda ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasidagi koeffitsientlar umuman aytganda, o'zgaradi. Biroq chiziq tenglamasi koeffitsientlarining funktsiyalari bo'lgan bahzi kattaliklar mavjud bo'lib, ularning qiymatlari bir dekart koordinatalar sistemasidan ikkinchisiga o'tganda o'zgarmaydi. Bunday kattaliklar **invariantlar** deyiladi.

Ushbu

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(bu yerda $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$) kattaliklar ikkinchi tartibli chiziq tenglamasining dekart koordinatalar sistemi almashtirishlariga nisbatan invariantdir.

Barcha ikkinchi tartibli chiziqlar quyidagi uchta tipga ajraladi:

agar $I_2 > 0$ bo'lsa, chiziq elliptik tipda;

agar $I_2 < 0$ bo'lsa, chiziq giperbolik tipda;

agar $I_2 = 0$ bo'lsa, chiziq parabolik tipda bo'ladi.

Agar ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasi koordinatalar sistemasini almashtirish yo'li bilan

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + m = 0 \quad (2)$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lsa, chiziqning invariantlarini yozamiz:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (3)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \quad (4)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 m \quad (5)$$

(3) va (4) tengliklardan Viet teoremasiga muvofiq λ_1 va λ_2 lar

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0 \quad (6)$$

kvadrat tenglamaning ildizlari ekanligi kelib chiqadi.

(4) va (5) tengliklardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$m = \frac{I_3}{I_2} \quad (7)$$

Agar (1) tenglama

$$\lambda_1 x^2 + 2ky = 0 \quad (8)$$

ko'rinishga keltirilsa, u holda quyidagi ifodalar uning invariantlari bo'ladi:

$$I_1 = \lambda_1, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1 k^2,$$

bundan

$$k = \pm \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} \quad (9)$$

Agar (1) tenglama

$$\lambda_1 x^2 + n = 0 \quad (10)$$

ko'rinishga keltirilsa, tenglama bir juft to'g'ri chiziqni (ustma-ust tushgan haqiqiy yoki mavhum parallel to'g'ri chiziqlarni) aniqlaydi. Bu holda invariantlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$I_1 = \lambda_1, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0.$$

1-misol. $x^2 - 8xy + 7y^2 - 18 = 0$ ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Echilishi:

$$I_1 = 8, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -9, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = 162$$

$I_2 < 0$ bo'lgani uchun qaralayotgan tenglama giperbolik tipdagi chiziqni aniqlaydi.

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0, \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = -1.$$

(7) formuladan foydalanib, topamiz.

$$m = \frac{I_3}{I_2} = -18$$

va giperbola tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$9x^2 - y^2 - 18 = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{18} = 1$$

2-misol. $8x^2 + 4\sqrt{2}xy + y^2 + 6x - 12\sqrt{2}y = 0$ ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Echilishi:

$$I_1 = 9, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2\sqrt{2} & 3 \\ 2\sqrt{2} & 1 & -6\sqrt{2} \\ 3 & -6\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -729$$

$$k = \pm \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = \pm \sqrt{\frac{729}{9}} = \pm 9$$

$I_2 = 0$ bo'lgani uchun qaralayotgan chiziqli parabolik tipdagi chiziqli bo'lib, uning tenglamasi quyidagicha:

$$9x^2 - 18y = 0 \quad \text{yoki} \quad 9x^2 + 18y = 0$$

bundan

$$x^2 = 2y \quad \text{yoki} \quad x^2 = -2y.$$

3-misol. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ ikkinchi tartibli egri chiziqli tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Echilishi:

$$I_1 = 5, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Bu holda $k = \pm \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 0$, demak tenglamaning chap qismi chiziqli ko'paytuvchilarning ko'paytmasidan iborat.

$$x^2 - 2(2y - 1)x + 4y^2 - 4y - 3 = 0$$

bundan

$$x_{1,2} = 2y - 1 \pm \sqrt{(2y - 1)^2 - 4y^2 + 4y + 3},$$

$$x_1 = 2y + 1, \quad x_2 = 2y - 3,$$

yoki

$$(x - 2y - 1)(x - 2y + 3) = 0.$$

Shunday qilib, berilgan tenglama bilan aniqlangan chiziqli bir juft parallel to'g'ri chiziqli ajraladi:

$$x - 2y - 1 = 0 \quad \text{va} \quad x - 2y + 3 = 0$$

(1) tenglama koordinatalar sistemasini tanlash yo'li bilan, shu sistemada qarayotgan quyidagi kanonik ko'rinishlardan bittasiga keltiriladi.

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellips)
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (mavhum ellips)
- 3) $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ (ikki mavhum kesishuvchi chiziqlar)
- 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (giperbola)
- 5) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ (ikki kesishuvchi chiziqlar)
- 6) $y^2 = 2px$ (parabola)
- 7) $y^2 - a^2 = 0$ (ikki parallel chiziqlar)
- 8) $y^2 + a^2 = 0$ (ikki parallel mavhum chiziqlar)
- 9) $y^2 = 0$ (ikki o'zaro ustma-ust tushuvchi chiziqlar)

Nazorat savollari.

- 1) Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi.
- 2) Invariantlik xossasi.
- 3) Ikkinchi tartibli chiziqlarning tiplari.
- 4) Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni kanonik kurinishga keltirish. Misollar.

Mustaqil yechish uchun misollar va masalalar.

1-masala. AVS uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan, quyidagilar talab qilinadi:

1. AV tomonning uzunligini hisoblash;
2. AV kesma o'rtalarining koordinatalarini topish;
3. AV tomonning tenglamasini tuzish;
4. S uchidan o'tkazilgan balandlikning tenglamasini tuzish;

5. V uchidan AS tomonga bo'lgan masofani hisoblash;
 6. Ichki A burchak bissektrisasining tenglamasini topish;

1.1.	$A(-6;-4),$	$V(-10;-1),$	$S(6;1).$
1.2.	$A(-2;-4),$	$V(2;-8),$	$S(10;2).$
1.3.	$A(12;0),$	$V(1;8),$	$S(0;5).$
1.4.	$A(-10;-2),$	$V(\sqrt{2}; -\sqrt{7})$	$S(2\sqrt{2}; 0).$
1.5.	$A(-2;-6),$	$V(-6;-3),$	$S(10;-1).$
1.6.	$A(4;3),$	$V(7;6),$	$S(2;11).$
1.7.	$A(8;2),$	$V(14;10),$	$S(-4;7).$
1.8.	$A(2;-1),$	$V(4;2),$	$S(5;1).$
1.9.	$A(2;-4),$	$V(-2;-1),$	$S(14;1).$
1.10.	$A(1;-5),$	$V(2;7),$	$S(-4;11).$
1.11.	$A(2;-1),$	$V(8;7),$	$S(-10;4).$
1.12.	$A(4;11),$	$V(-1;-1),$	$S(5;7).$
1.13.	$A(5;-3),$	$V(1;0),$	$S(17;2).$
1.14.	$A(3;8),$	$V(10;2),$	$S(2;7).$
1.15.	$A(14;-6),$	$V(20;2),$	$S(2;-1).$
1.16.	$A(7;2),$	$V(1;9),$	$S(-8;-4).$
1.17.	$A(3;4),$	$V(-1;7),$	$S(15;9).$
1.18.	$A(5;-7),$	$V(-4;-2),$	$S(15;-1).$
1.19.	$A(1;-2),$	$V(7;6),$	$S(-11;3).$
1.20.	$A(-3;-3),$	$V(-1;3),$	$S(11;-1).$

2-masala.

2.1. Agar parallelogrammning diagonallari $(-1;0)$ nuqtada kesishishi ma'lum bo'lsa, uning $x + u - 1 = 0$ va $u + 1 = 0$ tomonlarining kesishish nuqtasidan o'tmaydigan diagonalning tenglamasini toping.

2.2. $2x + u + 11 = 0$ to'g'ri chiziqda berilgan ikki: $A(1;1)$ va $V(3;0)$ nuqtadan baravar uzoqlashgan nuqtani toping.

2.3. $(2;-4)$ nuqtaga $4x + 3u + 1 = 0$ tenglamaga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtaning koordinatalarini toping:

2.4. Uchlari $A(-1;1)$, $V(2;-1)$, $S(4;0)$ bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazining koordinatalarini hisoblang;

2.5. $(2;6)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlari bilan ikkinchi chorakda joylashib 3 kv. birlik yuzaga ega bo'lgan uchburchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

2.6. $A(-1;2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasini shunday tuzingki, uning $x + 2u + 1 = 0$ va $x + 2u - 3 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan kesmasining bir uchi $x - u - 6 = 0$ to'g'ri chiziqda yotsin.

2.7. Uchburchak ikkita tomonining tenglamalari berilgan: $4x - 5u + 9 = 0$ va $x + 4u - 3 = 0$. Agar bu uchburchakning meridianalari $(3;1)$ nuqtada kesishishi ma'lum bo'lsa, uchburchak tomonining tenglamasini toping.

2.8. Romb ikkita tomonining tenglamasi: $2x - u + 4 = 0$ va $2x - u + 10 = 0$, hamda diagonallaridan birining tenglamasi $x + u + 2 = 0$ ma'lum bo'lsa, romb uchlarining koordinatalarini toping.

2.9. Agar $A(-5;5)$ va $V(3;1)$ -uchburchakning ikkita uchi; $M(2;5)$ esa uning balandliklarining kesishgan nuqtasi bo'lsa, uchburchak tomonlarining tenglamasini tuzing.

2.10. $x + 3u - 7 = 0$ kvadrat tomonlaridan birining tenglamasi va $S(0;-1)$ – bu kvadratning qolgan uchta tomonlarining kesishgan nuqtasi. Qolgan tomonlarning tenglamasini tuzing.

3-masala.

3.1. Elipsning ekstsentrisiteti 0,8 ga, uning nuqtalaridan birining fokal radiuslari 2 va 3 ga teng, ellipsning katta o'qi abtsissalar o'qi bilan, uning markazi esa koordinatalar boshi bilan mos keladi deb olib, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

3.2. $9x^2 - 16u^2 = 144$ giperbolada shunday nuqtalarni topingki bu nuqtalar bilan giperbolaning chap fokusi orasidagi masofa ularning o'ng fokusigacha bo'lgan masofasidan ikki marta kichik bo'lsin.

3.3. Agar $u^2 = 2rx$ parabolaning $u = x$ to'g'ri chiziq bilan $x^2 + u^2 - 6x = 0$ aylananing kesishish nuqtalaridan o'tishi ma'lum bo'lsa, shu parabolaning parametrini va uning direktrisasi tenglamasini toping.

3.4. $\frac{x^2}{441} + \frac{y^2}{216} = 1$ ellipsda shunday nuqtalarni topingki, ularda fokal radiuslar o'zaro perpendikulyar bo'lsin.

3.5. Giperbolaning fokuslari $F_1(\sqrt{7}, 0)$ va $F_2(-\sqrt{7}, 0)$ nuqtalarda joylashgan. Giperbola $A(2;0)$ nuqtadan o'tadi. Uning asimptotalarining tenglamasini va ular orasidagi burchakni toping.

3.6. $A(2;2)$ nuqtadan va abtsissalar o'qidan teng masofada joylashgan nuqtalar geometrik o'rning tenglamasini tuzing.

3.7. Har biri $A(3;0)$ nuqtadan ordinata o'qlariga qaraganda ikki marta uzoqroq masofada joylashgan nuqtalar geometrik o'rning tenglamasini tuzing.

3.8. Koordinata boshigacha bo'lgan masofalarning $3x + 16 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofalariga nisbati 0,6 ga teng bo'lgan nuqtalar geometrik o'rning tenglamasini tuzing.

3.9. Har biri $A(1;0)$ nuqtaga $V(-2;0)$ nuqtaga qaraganda ikki marta yaqin bo'lgan nuqtalar geometrik o'rning tenglamasini tuzing.

3.10. Abtsissalar o'qiga urinuvchi va $A(0;3)$ nuqtadan o'tuvchi aylana markazlari geometrik o'rinlarining tenglamasini tuzing.

3.11. Ellipsning ekstsentrisiteti 0,4 ga uning nuqtalaridan birining fokal radiuslari 4 va 6 ga teng ellipsning katta o'qi abtsissalar o'qi bilan, uning markazi esa koordinatalar boshi bilan mos keladi, deb olib, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

3.12. $36x^2 - 64u^2 = 2304$ giperbolada shunday nuqtalarni topingki, bu nuqtalar bilan giperbolaning chap fokusi orasidagi masofa ularning o'ng fokusigacha bo'lgan masofalaridan ikki marta kichik bo'lsin.

3.13. $9x^2 - 4u^2 = 36$ giperbola asimptotalari va $9x - 2u - 24 = 0$ to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan uchburchak yuzi topilsin.

3.14. Asimptotasi $y = \pm \frac{3}{4}x$ va $(2;1)$ nuqtadan o'tgan giperbola tenglamasini yozing.

3.15. Fokus $4x - 3u - 4 = 0$ to'g'ri chiziq va OX o'qi bilan kesishish nuqtasida yotgan parabola tenglamasi tuzilsin.

3.16. $4x + 3y + 10 = 0$ to'g'ri chiziqdan 2 birlik o'zoqlikda yotgan $u^2 = 32x$ parabolaga tegishli nuqta topilsin.

3.17. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbolaning $x^2 + u^2 = 91$ aylana bilan kesishish nuqtasida yotgan fokal radius topilsin.

3.18. $M(9;8)$ nuqtadan o'tgan, $y = \pm(\frac{2\sqrt{2}}{3})x$ asimptotaga ega bo'lgan giperbola tenglamasi tuzilsin.

3.19. $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ nuqtadan o'tuvchi, ekstsentrisiteti giperbolaning $\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan giperbola tenglamasi tuzilsin.

3.20. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ parabolaning o'ng tarmog'idan shunday nuqta topingki uning o'ng fokusigacha bo'lgan masofa chap fokusigacha bo'lgan masofadan 2 marta kichik bo'lsin.

4-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishiga keltiring.

$$4.1 \quad 5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$$

$$4.2 \quad 4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 = 24$$

$$4.3 \quad 6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21$$

$$4.4 \quad 5x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2 = 14$$

$$4.5 \quad 7x^2 + 2\sqrt{18}xy + 4y^2 = 15$$

$$4.6 \quad 3x^2 + 2\sqrt{14}xy + 8y^2 = 10$$

$$4.7 \quad 7x^2 + 2\sqrt{6}xy + 2y^2 = 24$$

$$4.8 \quad 9x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = 20$$

$$4.9 \quad 6x^2 + 2\sqrt{10}xy + 3y^2 = 16$$

$$4.10 \quad 4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 5y^2 = 40$$

$$4.11 \quad 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

$$4.12 \quad 5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$$

$$4.13 \quad x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

$$4.14 \quad x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

$$4.15 \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$$

$$4.16 \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$$

$$4.17 \quad 8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$$

$$4.18 \quad x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

$$4.19 \quad 2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$$

$$4.20. \quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$$

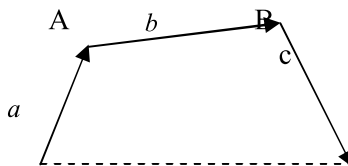
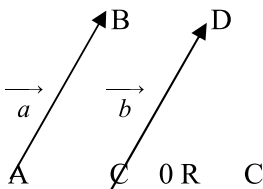
IV BOB. VEKTORLAR NAZARIYASI.

1-§ Ikki vektorning skalyar, vektorli ko'paytmalari va ularning qo'llanilishi

Ta'rif. Yo'naltirilgan kesma $\overrightarrow{AB}$ vektor deyiladi.

Bunda **A** nuqta vektorning boshi, **B** nuqta uning oxiri. Vektor boshi

va oxiri ko'rsatilib, $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda yoki bir harf bilan $\overrightarrow{a}$ belgilanadi. Masalan, tezlik, tezlanish, kuch momenti va boshqalar vektor miqdorlardir. Vektorning koordinatalari deb uning **OX**, **OY** va **OZ** koordinata o'qlaridagi proeksiyalari a_x , a_y , a_z ga aytiladi $\overrightarrow{a} \{a_x; a_y; a_z\}$ va ular diagonali $\overrightarrow{a}$ vektordan iborat bo'lgan paralelipedning qirralaridir.



Agar $\overrightarrow{a}$ vektor Ox o'q bilan φ burchak tashkil etsa, vektorning bu o'qdagi proeksiyasi

$$\text{pp}_{ox} \overrightarrow{a} = \left| \overrightarrow{a} \right| \cos \varphi$$

bo'ladi. Vektorning uzunligi (moduli) $\overrightarrow{AB}$ yoki $\left| \overrightarrow{a} \right|$ bilan belgilanadi.

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \left| \overrightarrow{a} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Bir to'g'ri chiziqqa parallel vektorlar kollinear vektorlar, bir tekislikka parallel bo'lgan vektorlar, komplanar vektorlar deyiladi.

Ikki vektorning yigindisi, ayirmasi va vektorning songa ko'p-aytmasi uchun quyidagilar o'rinalidir:

$$(\vec{a} \pm \vec{b}) = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}, \lambda \vec{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$$

bu yerda, λ - skalyar miqdor .

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi.

Ta'rif. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning skalyar ko'paytmashu vektorlar modullarining ular orasidagi burchak kosinusi bilan ko'paytmasiga teng

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega.

$$\text{I. } (\vec{a}; \vec{a}) \geq 0, \quad \text{II. } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a}),$$

$$\text{III. } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c}), \quad \text{IV. } (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

V. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ va

$\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, vektorlarning skalyar ko'paytmasi,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

orasidagi burchak

$$\cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Bundan, paralellik

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = m.$$

va perpendikulyarlik

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

shartlari kelib chiqadi.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasining fizik ma'nosi F kuchni jismga ta'siri natijasida uni S masofaga ko'chirib bajarilgan ishdur.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \varphi.$$

2-§ Ikki vektorning vektor ko'paytmasi.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektorli $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]$ ko'paytmasi deb

shunday uchinchi $\vec{c}$ vektorga aytiladiki:

1) Moduli berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuziga teng;

2) y parallelogramm tekisligiga perpendikulyar.

Ikki vektorning vektorli ko'paytmasini moduli

$$\left| \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \right| = |\vec{c}| = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) .$$

Ikki vektor ko'paytmasining asosiy xossalari.

I. $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = -\left[\vec{b} \times \vec{a} \right],$

II. $\left[\vec{a} + \vec{b} \right] \times \vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{c} \right] + \left[\vec{b} \times \vec{c} \right],$

III. $\left[(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} \right] = \lambda \left[\vec{a} \times \vec{b} \right].$

Agar $\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} \{b_x; b_y; b_z\}$, bo'lsa, ularning vektorli ko'paytmasi

$$\begin{aligned} \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] &= \vec{a} \{a_y b_z - a_z b_y\} \vec{i} - \{a_x b_y - a_z b_x\} \vec{j} + \\ &+ \{a_x b_y - a_y b_x\} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Moduli

$$\left| \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \right| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuzi

$$c = \left| \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \right|,$$

shu vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \right|.$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar bilan shu vektor orasidagi burchaklar mos ravishda α, β va φ bilan belgilab $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Mavzuga doir namunaviy misolni yechimi

Misol. Piramida ucharining koordinatalari berilgan $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$. Quyi-dagilarni topish talab etiladi:

1) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlarni va ularning modullarini $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|$;

2) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlar orasidagi A burchakni;

3) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini;

4) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlarning vektorli ko'paytmasining moduli.

5) C nuqtadan o'tib, $\vec{AB}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan, Q tekislik tenglamasini tuzish.

Yechish. 1) $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektorlarni va ularni modellarini topamiz. Vektorlarga doir yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy vektorni a_x, a_y, a_z o'qdagi proeksiyalari hamda birlik $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlari (ortlari) yordamida yagona usul bilan yoyib yozish mumkin.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{AB} = (2 - 0) \vec{i} + (3 - 0) \vec{j} + (5 - 1) \vec{k} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} + 4 \vec{k},$$

$$\vec{AC} = (6-0)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (3-1)\vec{k} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AD} = (3-0)\vec{i} + (7-0)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Bu vektorlarni modullari $\left| \vec{a} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ formulaga asosan topamiz:

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11},$$

$$\left| \vec{AD} \right| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{59}.$$

2) $\overline{AB}$ va $\overline{AC}$ vektorlar orasidagi φ burchakni hisoblaymiz.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \bullet \vec{AC}}{\left| \overline{AB} \right| \left| \overline{AC} \right|} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{11}} = \frac{13}{\sqrt{319}} \approx 0,728$$

Bradis jadvalidan, $\varphi \approx 43^\circ$.

3) $\vec{AD}$ vektorni $\vec{AB}$ vektordagi proeksiyasi

$$np_{\overline{AB}} \vec{AD} = \frac{\vec{AD} \bullet \vec{AB}}{\left| \overline{AB} \right|} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1}{\sqrt{29}} \approx \frac{31}{5,39}$$

4) Piramidaning $_{ABC}$ tomoni, uchburchak yuzasini hisoblaymiz

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|.$$

Bu yerda ikki vektorni ko'paytmasi

$$\left[\vec{AB} \times \vec{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 20\vec{j} - 14\vec{k}$$

$$\left| \left[\vec{AB} \times \vec{AC} \right] \right| = \sqrt{(-2)^2 + 20^2 + (-14)^2} = \sqrt{4 + 400 + 196} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \text{ kvadrat birlik.}$$

5) Piramidaning hajmini uchta komplanar bo'lmagan $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ vektorlarni aralash ko'paytmasi qoidasiga asosan hisoblaymiz:

$$V = \frac{1}{6} \left| \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \cdot \vec{c} \right| = \left| \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right| = \left| \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20$$

kub birlik.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Tekislikda $A(0; -2)$, $B(4; 2)$ va $C(4; -2)$ nuqtalar berilgan. Koordinatalar boshidan $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ va $\vec{OC}$ kuchlar qo'yilgan. Ularning teng ta'sir etuvchisi $\vec{OM}$ yasalsin va uning o'qlardagi proeksiyalari hamda uzunligi topilsin. $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ va $\vec{OM}$ kuchlar $\vec{i}$ va $\vec{j}$ birlik vektorlar orqali ifodalansin.

2. Uchta komplanar $\vec{m}$, $\vec{n}$ va $\vec{p}$ birlik vektor berilgan, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = 30$ va $(\vec{n} \wedge \vec{p}) = 60$ u $u = m + 2n - 3p$ vektor yasali b uning moduli hisoblansin.

3. Uchta komplanar bo'lmagan $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, $\vec{OC} = c$ vektorlardan parallelopiped yasalgan. Uning mos ravishda $a + b - c$, $a - b + c$, $a - b - c$ va $b - a - c$ larga teng vektor – diagonallari ko'rsatilsin.

4. Tekislikda $A(3; 3)$, $B(-3; 3)$ va $C(-3; 0)$ nuqtalar berilgan, koordinatalar boshidan $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ va $\vec{OC}$ kuchlar qo'yilgan. Ularning teng ta'sir etuvchisi $\vec{OM}$ yasalsin va uning o'qlardagi proeksiyalari hamda kattaligi topilsin. $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ va $\vec{OM}$ vektorlar o'qlardagi $\vec{i}$ va $\vec{j}$ birlik vektorlar orqali ifodalansin.

5. $M(5; -3; 4)$ nuqta yasalsin va uning radiusi-vektorining uzunligi hamda yo'nalishi aniqlansin.

6. $\vec{r} = \vec{OM} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$ vektor yasalsin va uning radius-vektorining uzunligi hamda yo'nalishi aniqlansin ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ formula bo'yicha tekshirilsin).

7. $A(1; 2; 3)$ va $B(3; -4; 6)$ nuqtalar berilgan. $u = \overline{AB}$ vektor va uning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari yasalsin hamda uning uzunligi va yo'nalishi aniqlansin. u vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari yasalsin.

8. $A(2; 1; -1)$ nuqtaga $R = 7$ kuch qo'yilgan. Bu kuchning ikki koordinatasi $X = 2$ va $Y = -3$; o'sha kuchni ifodalovchi vektorning yo'nalishi va oxirgi nuqtasi aniqlansin.

9. Parallelogrammning ketma-ket uchta $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ va $C(6; 4; 4)$ uchlari berilgan. Uning to'rtinchi uchi D topilsin.

10. $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchak aniqlansin.

11. Uchlari $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ va $C(0; 0; 5)$ nuqtalarda bo'lgan $\triangle ABC$ ning burchaklari aniqlansin.

12. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ vektorlarda yasalgan parallelogramm diagonallari orasidagi burchak topilsin.

13. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\cos \angle a, b$ aniqlansin.

14. 1) Agar m va n o'zaro 30° burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $(m + n)^2$ hisoblansin; 2) agar $a = 2\sqrt{2}$ va $b = 4$ hamda $(a \wedge b) = 135^\circ$ bo'lsa, $(a - b)^2$ hisoblansin.

15. Agar m va n oralaridagi burchagi 60° ga teng birlik vektorlar bo'lsa, $a = 2m + n$ va $b = m - 2n$ vektorlarda yasalgan parallelogramm diagonallarining uzunliklari aniqlansin.

16. $a = 2m - n$ vektor berilgan bo'lib, bunda m va n oralaridagi burchagi 120° ga teng birlik vektorlardir.

$\cos(a \wedge m)$ va $\cos(a \wedge n)$ topilsin.

17. $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(0; -3; 0)$ va $D(0; 2; -4)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}=a$ va $\overrightarrow{CD}=b$ vektorlar yasalsin hamda $\Pi P_a b$ topilsin.

18. Agar 1) $\vec{a}=3\vec{i}$; $\vec{b}=2\vec{k}$; 2) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$;

3) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k}$; bo'lsa, $c=a \times b$ vektor aniqlansin va yasalsin. Har bir hol uchun berilgan vektorlarda yasalgan paralelgramm yuzi hisoblansin.

19. Ushbu a) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$;

b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$;

c) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;

d) $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 4\vec{k}(\vec{i} \times \vec{j})$

ifodalardagi qavslarni ochib soddalashtirilsin.

20. $\vec{a}=3\vec{k}-2\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$ va $\vec{c}=\vec{a} \times \vec{b}$ vektorlar yasalsin. c vektorning moduli hamda a va b vektorlarda yasalgan uchburak yuzi hisoblansin.

Fazoda $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar koordinatalari bilan berilan. Quyidagilarni topish talab etiladi:

a) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlarni va ularni modullarini $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|$;

b) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlar orasidagi A burchakni;

c) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini;

d) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektorlarning vektorli ko'paytmasining moduli.

f) S nuqtadan o'tib, $\vec{AB}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan, Q tekislik tenglamasini tuzish.

21. $A(1;2;1)$, $B(-1;5;1)$, $C(-1;2;7)$, $D(1;5;9)$.

22. $A(2;3;2)$, $B(0;6;2)$, $C(0;3;8)$, $D(2;6;10)$.

23. $A(0;3;2), B(-2;6;2), C(-2;3;8), D(0;6;10).$
24. $A(2;1;2), B(0;4;2), C(0;1;8), D(2;4;10).$
25. $A(2;3;0), B(0;6;0), C(0;3;6), D(2;6;8).$
26. $A(2;2;1), B(0;5;1), C(0;2;7), D(2;5;9).$
27. $A(1;3;1), B(-1;6;1), C(-1;3;7), D(1;6;9).$
28. $A(1;2;2), B(-1;5;2), C(-1;2;8), D(1;5;10).$
29. $A(2;3;1), B(0;6;1), C(0;3;7), D(2;6;9).$
30. $A(2;2;2), B(0;5;2), C(0;2;8), D(2;5;10).$

V BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA.

1-§ Fazoda tekislik va to'g'ri chiziqli tenglamalari. Tekislik tenglamalari.

$M(x; y; z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{N}\{A; B; C\}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi $\vec{M_1M}$ va $\vec{N}$ vektorlarning perpendikulyarlik shartiga asosan,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Tekislikning umumiy tenglamasi quyidagicha

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1).$$

$\vec{N}\{A; B; C\}$ vektor tekislikni normal vektori deyiladi.

Tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1')$$

Ikki tekislik orasidagi burchak

$$\cos \varphi = \pm \frac{\vec{N} \bullet \vec{N}_1}{|\vec{N}| \cdot |\vec{N}_1|} = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{|\vec{N}| \cdot |\vec{N}_1|} \quad (2)$$

formuladan topiladi, bunda $\vec{N}$ va $\vec{N}_1$ mos ravishda $Ax + By + Cz + D = 0$ va $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ tekisliklarni normal vektorlari.

Parallellik sharti:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

Perpendikulyarlik sharti:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\left| \vec{N} \right|} \quad (3)$$

Berilgan ikki tekislikning kesishgan chizig'idan o'tuvchi barcha tekisliklar dastasining tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

2-§ Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari

$A(a; b; c)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{P}\{m; n; p\}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamalari. $N(x; y; z)$ - to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda $\vec{AN} \parallel \vec{P}$ va ikki vektorning parallellik shartiga ko'ra:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad (1)$$

(1) tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

$\vec{P}\{m; n; p\}$ vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

(1) tenglamadagi har bir nisbatni t parametrغا tenglab, to'g'ri chiziqning

$$\left. \begin{aligned} x &= mt + a, \\ y &= nt + b, \\ z &= pt + c \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ko'rinishdagi parametrik tenglamalariga ega bo'lamiz.

Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3)$$

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) tenglamalardan bir marta y ni, ikkinchi marta x ni yo'qotib, to'g'ri chiziqning proeksiyalari bo'yicha yozilgan tenglamalariga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} x &= mz + a, \\ y &= nz + b. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

tenglamalarni ushbu $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-0}{1}$ kanonik ko'rinishda yozish mumkin.

3-§ To'g'ri chiziq va tekislik

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad \text{to'g'ri chiziq bilan} \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

tekislik orasidagi burchak:

$$\sin \varphi = \frac{\left| \vec{N} \cdot \vec{P} \right|}{\left| \vec{N} \right| \left| \vec{P} \right|} = \frac{\left| Am + Bn + Cp \right|}{\left| \vec{N} \right| \left| \vec{P} \right|} \quad (1)$$

ularning parallellik sharti ($N \perp P$):

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad (2)$$

ularning perpendikulyarlik sharti ($N \parallel P$):

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} \quad (3)$$

Tekislik bilan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasini topish uchun to'g'ri chiziq tenglamasini $x = mt + a$, $y = nt + b$, $z = pt + c$ parametrik ko'rinishda yozib, tekislikning $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasidagi x ; y ; z larning o'rniga ularning t ga nisbatan

yoʻzilgan qiymatlarini qoʻyamiz. Hosil boʻlgan tenglamadan t_0 ni, soʻngra kesishgan nuqta koordinatalari x_0 ; y_0 ; z_0 ni topamiz.

Ikki toʻgʻri chiziq $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ va $\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1}$ bir tekislikda yotish sharti:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Mavzuga doir namunaviy masalalarning yechimi

1-misol. $A(1; 1; 1)$ va $B(0; 2; 1)$ nuqtalardan oʻtib $\vec{a}(2; 0; 1)$ vektorga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$ va $\vec{a}(2; 0; 1)$ vektorlar kollinear boʻlmagan vektorlar boʻlganligi sababli, bu masala yagona yechimga ega va tekislikni normal tenglamasi

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = \vec{n}(1; 1; -2)$$

koʻrinishda boʻladi.

Berilgan nuqtadan oʻtib, $\vec{n}(A; B; C)$ normal vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ asosan talab qilingan tekislik tenglamasi $(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0$, $x + y - 2z = 0$ koʻrinishda ekanligini topamiz.

2-misol. Toʻgʻri chiziqni umumiy shakldagi tenglamasiga koʻra uning kanonik tenglamasini tuzing.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Yechish. $M(0; 2; 2)$ nuqta toʻgʻri chiziq ustida yotadi yaʼni uning tenglamasini qanoatlantiradi. Toʻgʻri chiziqni yoʻnaltiruvchi vektori

sifatida $\vec{q}(l; m; n) = \begin{bmatrix} \vec{n}_1 & \vec{x} & \vec{n}_2 \end{bmatrix}$ olamiz. Bu erda $\vec{n}_1(1; 1; -1)$,

$\vec{n}_2(2; -1; 0)$ har bir tekislikni normal vektorlari, bu tekisliklarni kesishishidan to'g'ri chiziq hosil bo'ladi.

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} = \vec{q}(-1; 1; -3)$$

Natijada $M(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning quyudagi ko'rinishdagi kanonik tenglamasini tuzamiz

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-3}$$

Bu tenglamadan to'g'ri chiziqni parametrik tenglamasi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

3-misol. Berilgan $M_0(5,2,-3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n} = (2,-1,4)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing

Yechish. $\vec{n} = (A, B, C)$ demak, shartga ko'ra $A=2$, $B=-1$, $S=4$, $x_0=5$, $y_0=2$, $z_0=-3$. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,
 $2(x-5)-(y-2)+(z+3)=0, 2x-y+z+4=0$

4-misol. $M_0(1,1,1)$ nuqtadan $2y+2y-z+3=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

$$D = \frac{|Ax_0 + BY_0 + CZ_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$x_0=1 \ y_0=1 \ z_0=1, d = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

5-misol. Berilgan $4x-10y+z-3=0$ va $-11x+8y+7z+5=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formulaga ko'ra

$$\cos \varphi = \frac{-44 - 80 + 7}{\sqrt{16 + 100 + 1} \cdot \sqrt{121 + 64 + 49}} = \frac{-127 + 7}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} = \frac{-117}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{2} \sqrt{117}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi tekisliklar yasalsin

1) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; 2) $3x + 2y - z = 0$;

3) $3x + 2z = 6$; 4) $2z - 7 = 0$

2. $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ tekislik yasalsin va unga normal vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari topilsin.

3. $M_1(0; -1; 3)$ va $M_2(1; 3; 5)$ nuqtalar berilgan. M_1 nuqtadan o'tuvchi va $\vec{N} = \vec{M_1 M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi yozilsin.

4. $M_1(0; 1; 3)$ va $M_2(2; 4; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi va Ox o'qqa parallel tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

5. Ox o'qdan va $M_1(0; -2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

6. Oz o'qdan va $M_1(2; -4; 3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

7. Oy o'qqa parallel, Ox va Oz o'qlardan α va β kesmalarni ajratuvchi tekislik tenglamasi yozilsin. Tekislik yasalsin.

8. $M(2; -1; 3)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlaridan teng kesmalarni ajratuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9. a) $2x + y - z + 6 = 0$; b) $x - y - z = 0$; c) $y - 2z + 8 = 0$;

d) $2x - 5 = 0$; f) $x + z = 1$; h) $y + z = 0$

tekisliklar yasalsin.

10. $2x - 2y + z - 6 = 0$ tekislik yasalsin va unga normal vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari topilsin.

11. a) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ va $x + z - 6 = 0$

b) $x + 2z - 6 = 0$ va $x + 2y - 4 = 0$

tekisliklar orasidagi burchak topilsin.

12. $M(2; 2; -2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x - 2y - 3z = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

13. $(-1; -1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x - 2y + z - 4 = 0$ hamda $x + 2y - 2z + 4 = 0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

14. $M_1(-1; -2; 0)$ va $M_2(1; 1; 2)$ nuqtalardan o'tuvchi hamda $x + 2y + 2z - 4 = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

15. $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ va $M_3(1; 1; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

16. $(4; 3; 0)$ nuqtadan $M_1(1; 3; 0)$, $M_2(4; -1; 2)$ va $M_3(3; 0; 1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin.

17. $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ va $4x + 3y - 5z + 12 = 0$ parallel tekisliklar orasidagi masofa topilsin.

18. $2x - y + 3z - 6 = 0$ va $x + 2y - z + 3 = 0$ tekisliklarning kesishgan chizig'idan va $(1; 2; 4)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

19. $2x + 2y + z - 8 = 0$ tekislikka parallel va undan $d=4$ masofa uzoqlikda joylashgan tekisliklarning tenglamalari topilsin.

20. $4x - y + 3z - 6 = 0$ va $x + 5y - z + 10 = 0$ tekislikning kesishgan chizig'idan o'tuvchi va $2x - y + 5z - 5 = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi topilsin.

21. 1) $\begin{cases} x = z + 5 \\ y = 4 - 2z \end{cases}$ va 2) $\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} \end{cases}$

to'g'ri chiziqlarning xOy va xOz tekisliklardagi izlari topilsin va to'g'ri chiziqlar yasalsin.

$$22. \left. \begin{aligned} x + 2y + 3z - 13 &= 0 \\ 3x + y + 4z - 14 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ to'g'ri chiziq tenglamalarini proeksiyalari}$$

bo'yicha va kanonik ko'rinishlari yozilsin. To'g'ri chiziqning koordinata tekisliklaridagi izlari topilsin hamda to'g'ri chiziq va uning proeksiyalari yasalsin.

23. $A(4; 3; 0)$ nuqtadan o'tuvchi va $P\{-1; 1; 1\}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamalari topilsin. To'g'ri chiziqning yOz tekislikdagi izi topilsin va to'g'ri chiziq yasalsin.

$$24. 1) \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}, 2) \begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1 \end{cases}, 3) \begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlar yasalsin va ularning yo'naltiruvchi vektorlari aniqlansin.

25. $A(-1; 2; 3)$ va $B(2; 6; -2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari yozilsin va uning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

$$26. \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

27. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ to'g'ri chiziqning $x = z + 1$, $y = 1 - z$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamalari topilsin.

28. $N(2; -1; 3)$ nuqtadan $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

29. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ va $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

$$30. \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

31. $y = 3x - 1$, $2z = -3x + 2$ to'g'ri chiziq bilan $2x + y + z - 4 = 0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

32. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziq $2x + y - z = 0$ tekislikka parallel ekanligi, $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ to'g'ri chiziq esa shu tekislik ustida yotishi ko'rsatilsin.

33. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$ to'g'ri chiziqdan va $(3; 4; 0)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi topilsin.

34. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $2x + 3y - z = 4$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi topilsin.

35. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ va $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi topilsin.

36. $x = 2t - 1, y = t + 2, z = 1 - t$ to'g'ri chiziqning $3x - 2y + z = 3$ tekislik bilan kesishgan nuqtasi topilsin.

37. Ushbu

$$1) \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad \text{va} \quad \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1};$$

$$2) \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{va} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

$$38. \left. \begin{array}{l} y = z \text{ tekislik} \\ \text{va} \quad \begin{array}{l} x = -z + 1 \\ y = 2 \end{array} \end{array} \right\} \text{ to'g'ri chiziq yasalsin va:}$$

1) ularning kesishgan nuqtasi;

2) ular orasidagi burchak topilsin.

39. $(1; 2; 8)$ nuqtaning $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = z$ to'g'ri chiziqdagi proeksiyasi topilsin.

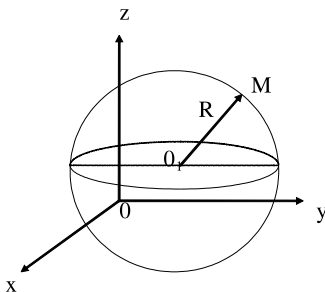
40. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ va $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi topilsin.

4-§ Sirtlar tenglamasi.

Sfera va silindr

1°. Markazi $C(a; b; c)$ nuqtada va radiusi R bo'lgan sferaning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (1)$$



2°. z ishtirok etmagan $F(x; y) = 0$ tenglama, yasovchilari O_2 o'qqa parallel silindrik sirtni aniqlaydi. Shunga o'xshash

1) $F(y; z) = 0$ va 2) $F(x; z) = 0$ tenglamalarning har bir yasovchilari 2) O_x , 2) O_y o'qlarga parallel bo'lgan silindrik sirtlarni aniqlaydi.

3°. Yo'naltiruvchi $F(x; y) = 0$, $z = 0$ yasovchilari esa $P\{m; n; p\}$ vektorga parallel bo'lgan silindrik sirt tenglamasi. Ixtiyoriy yasovchining tenglamasi.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z}{p}$$

dan iborat, bundagi $(x_0; y_0; 0)$ - yo'naltiruvchida yotuvchi nuqta. So'ngi tengliklardan $(x_0; y_0)$ ni topib, yo'naltiruvchining tenglamasiga qo'ysak, silindrik sirtning

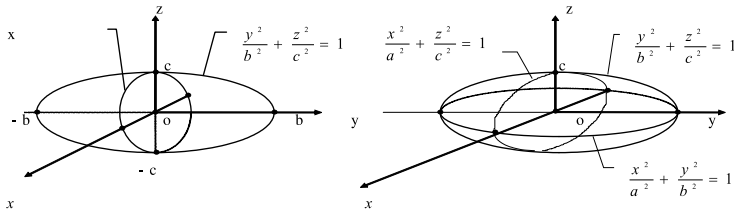
$$F\left(x - \frac{m}{p}z, y - \frac{n}{p}z\right) = 0 \quad (2)$$

tenglamasini hosil qilamiz.

Ellipsoid, giperboloidlar va paraboloidlar

1°. Kanonik tenglamalar. Silindrik sirtlardan boshqa quyidagi kanonik (eng sodda) tenglamalar bilan aniqlanuvchi oltita asosiy ikkinchi tartibli sirtlar bor:

I. Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

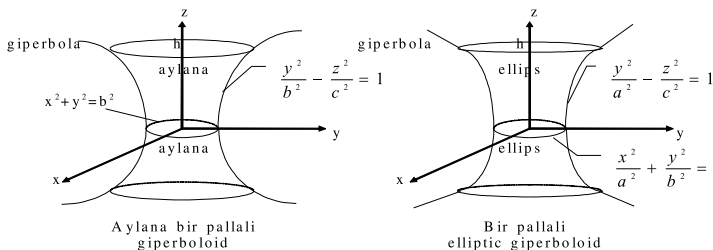


$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6)$$

II. Bir g'ovakli giperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ikki g'ovakli giperboloid. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



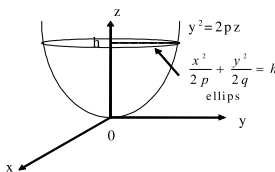
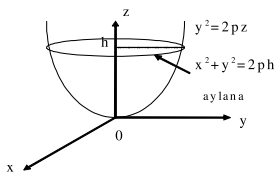
Aylana bir pallali
giperboloid

Bir pallali
elliptic giperboloid

III. Ikkinchi tartibli konus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

IV. Elliptik paraboloid $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, ($pq > 0$ bo'lganda)

Giperbolik paraboloid $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.



Mustaqil yechish uchun misollar

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ sferalarning markazi va radiusi topilsin hamda ikkinchi sferaning tasviri yasalsin.

2.
$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x + y + z &= a \end{aligned} \right\} \text{aylanadan va } (a; a; a) \text{ nuqtadan o'tuvchi}$$

sferaning tenglamasi yozilsin.

3. Quyudagilar yasalsin

1) $y^2 + z^2 = 4$; 2) $y^2 = ax$; 3) $xz = 4$; 4) $x^2 + y^2 = ax$

4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ sfera tashqarisida chizilgan, yasovchilari mos ravishda: 1) Ox o'qqa; 2) Oy o'qqa; 3) Oz o'qqa parallel uchta silindrik sirtning tenglamalari yozilsin.

5.
$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 16 \\ x^2 + y^2 &= 4x \end{aligned} \right.$$

Ushbu egri chizig'ining $x = 0$; 2 va 4 bo'lgandagi koordinatalar sistemasining chap birinchi oktantida uning shakli chizilsin. Egri chiziqning xOz tekislikdagi proeksiyasi parabola ekanligi ko'rsatilsin.

6.
$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 10y \\ x + 2y + 2z - 19 &= 0 \end{aligned} \right.$$

aylananing markazi va radiusi topilsin.

7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z = 0$ sirtning markazi C dan o'tuvchi va OC to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1, y = 0$ ellipsning Oz o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning tenglamasi yozilsin.

9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ sirt yasalsin va uning: 1) $z = 3$;

2) $y = 1$ tekisliklar bilan kesimlarining yuzalari topilsin.

10. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ egri chiziqning: a) Oz o'q; b) Ox o'q

atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tenglamasi topilsin. Ikkala sirt koordinatalarning ikkinchi choragida yasalsin.

11. 1) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; 2) $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$ sirtlar yasalsin.

12. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ giperboloid yasalsin va uning (4; 1; -3)

nuqtadan o'tuvchi yasovchilari topilsin.

13. $x^2 - y^2 = 4z$ sirt (koordinatalar sistemasining chap oktantida) yasalsin va uning (3; 1; 2) nuqtadan o'tuvchi yasovchilari topilsin.

14. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ ellipsoidning eng katta doiraviy kesimi topilsin.

15. Ushbu

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$

2) $x^2 = 2az$

3) $x^2 + y^2 = 2az$

4) $x^2 = 2yz$

5) $x^2 + y^2 = 2az$

6) $z = 2 + x^2 + y^2$

7) $x^2 - y^2 = 2az$

8) $(z-a)^2 = xy$

9) $x^2 - y^2 = z^2$

10) $(z-2x)^2 + 4(z-2x) = y^2$

sirtlardan har birining nomi aniqlansin va ular yasalsin.

16. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{3z^2}{25} = 1$ giperboloidning eng kichik doiraviy kesimlari

topilsin.

17. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$ giperbolik paraboloidning (4; 3; 0) nuqtadan

o'tuvchi to'g'ri chiziqlar yasovchilarining tenglamalari topilsin.

VI BOB.

FUNKTSIYA TUSHUNCHASI VA GRAFIGI.

1-§. Funktsiya tushunchasi. Misollar. Murakkab funktsiya. Funktsiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi.

1. Funktsiya tushunchasi. Aytaylik, $X \subset R$ va $Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lib, x o'zgaruvchi X da, y o'zgaruvchi Y to'plamda o'zgarsin $x \in X, u \in Y$.

Agar har bir $x \in X$ songa biror f qoidaga ko'ra bitta $y \in Y$ son mos qo'yilsa, X to'plamda funktsiya berilgan deyiladi. Uni

$$f : X \rightarrow Y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

X to'plam funktsiyaning **aniqlanish to'plami (sohasi)**, Y esa funktsiyaning **o'zgarish to'plami (sohasi)**, **x -erkli o'zgaruvchi** yoki **funktsiya argumenti**, **u -erksiz o'zgaruvchi** yoki **x o'zgaruvchining funktsiyasi** deyiladi.

Ushbu $Y_f = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ **to'plam funktsiyaning qiymatlari to'plami** deyiladi.

Odatda, $y = f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$, qiymatlari to'plami esa $E(f)$ kabi belgilanadi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar berilgan bo'lib,

1) $D(f) = D(g)$,

2) $\forall x \in D(f)$ uchun $f(x) = g(x)$ shartlar bajarilsa, unda $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar D to'plamda teng deyiladi.

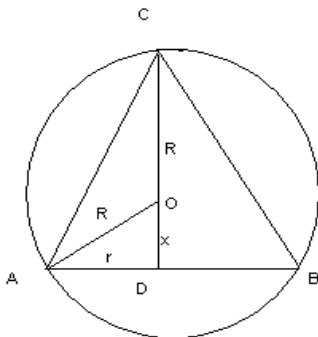
Masalan, $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$ va $\varphi(x) = |x|$ bo'lsin. Bu funktsiyalar uchun $D(f) = D(g) = D(\varphi) = R$, lekin f funktsiya g bilan $A = [0, +\infty)$ to'plamdagina ustma-ust tushadi, φ bilan esa butun R da teng.

Aytaylik, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funktsiyalari berilgan bo'lsin. Ushbu $z = \varphi(x) = g(f(x))$, $x \in X$ munosabat bilan aniqlangan. $\varphi : X \rightarrow Z$ funktsiya **murakkab funktsiya** yoki f va g funktsiyalarning **superpozetsiyasi** deyiladi.

2. Misollar.

1-misol. Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning hajmi uning o'q kesimining uchidagi burchak funktsiyasi ko'rinishida ifodalansin.

Echilishi. R radiusli shar olib, unga ichki konus chizamiz. Konusning o'q kesimini olamiz (1-chizma).



1-chizma.

Aytaylik,

$\angle ACB = \alpha$, $AD = r$, $CD = H$ bo'lsin.

Mahlumki,

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$$

formula o'rinli. Masalani yechish uchun r va H larni R va α lar yordamida ifodalashimiz kerak.

$OD = x$ desak, bundan kelib chiqadiki $H = R + x$.

$$\Delta AOC \Rightarrow AO = OC = R \Rightarrow \angle ACO = \angle CAO = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\Rightarrow \angle AOC = \pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \pi - \alpha. \Rightarrow \angle AOD = \alpha. \quad \text{Unda}$$

$\triangle AOD$ dan qo'yidagilarni topamiz:

$$x = R \cos \alpha, \quad r = R \sin \alpha \Rightarrow H = R + x = R \cdot (1 + \cos \alpha).$$

Demak,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \cdot (1 + \cos \alpha).$$

2-misol. Parashyutchi a sek. davomida erkin tushib, keyin parashyutni ochdi va b sek. davomida o'zgarmas v_0 tezlik bilan tushdi. Parashyutchining t vaqt davomida bosib o'tgan yo'li $S(t)$ topilsin.

Echilishi. Bu masalada har xil oraliqda funktsiya ham turli analitik ifodalar yordamida beriladi. Haqiqatan ham, agar $0 \leq t \leq a$ bo'lsa, maktab fizika kursidan mahlumki,

$$S(t) = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

bo'ladi. Bu yerda g -erkin tushish tezlanishi.

Agar $a \leq t \leq a + b$ bo'lsa,

$$S(t) = \frac{g \cdot a^2}{2} + v_0 \cdot (t - a)$$

ekanini ko'rish qiyin emas. Demak,

$$S(t) = \begin{cases} \frac{g \cdot t^2}{2}, & 0 \leq t \leq a \\ \frac{g \cdot a^2}{2} + v_0 \cdot (t - a), & a < t \leq a + b \end{cases}$$

ekan.

3. Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plamini topish.

3-misol. Agar $f = x^2$ va $\varphi = 2^x$ bo'lsa, $f[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$, $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$ murakkab funksiyalar topilsin.

Echilishi:

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4,$$

$$\varphi[\varphi(x)] = 2^{\varphi(x)} = 2^{2^x}$$

$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

$$\varphi[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Echilishi:

$$D(f) = R \setminus \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = R \setminus \{2; 3\} = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$$

5-misol. Agar $f(x) = \frac{1}{1-x}$ bo'lsa,

1) $\varphi(x) = f(f(x))$,

2) $\varphi(x) = f(f(f(x)))$ funksiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechilishi:

1) $\varphi(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = x - \frac{1}{x}$ bo'lib, uning

aniqlanish sohasi

$$D(\varphi) = R \setminus \{0; 1\} = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

bo'ladi.

$$2) \varphi(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = x \quad \text{bo'lib, bu}$$

funksiyaning ham aniqlanish sohasi $D(\varphi) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ bo'ladi.

6-misol. Agar $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ bo'lsa, $f(x)$ topilsin.

Echilishi: Berilgan munosabatda $\frac{x}{x+1} = t$ deb belgilaymiz.

Unda

$$\frac{x}{x+1} = t \Rightarrow x = tx + t \Rightarrow x = \frac{t}{1-t} \quad \text{bo'lib} \quad f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2,$$

yag'ni $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ bo'ladi.

7-misol. Ushbu funktsiyalar aynan tengmi?

$$1) f(x) = \lg x^2 \quad \text{bilan} \quad \varphi(x) = 2 \lg |x|,$$

$$2) f(x) = \lg x^2 \quad \text{bilan} \quad \varphi(x) = 2 \lg x,$$

$$3) f(x) = \left(\frac{2x^2}{x^2}\right) \quad \text{bilan} \quad \varphi(x) = 2$$

Echilishi:

1) $f(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalarning aniqlanish sohasi bir xil:

$$D(f) = D(\varphi) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{bo'lib,} \quad \forall x \in D(f) \text{ da}$$

$$f(x) = \lg x^2 = 2 \lg |x| = \varphi(x) \quad \text{bo'ladi.}$$

2) $\varphi(x) = 2 \lg x$ funksiyaning aniqlanish sohasi esa $D(\varphi) = (0; +\infty)$ bo'ladi. Demak, $D(f) \neq D(\varphi)$. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalar aynan teng emas.

3) $f(x) = \left(\frac{2x^2}{x^2} \right)$ funksiyaning aniqlanish sohasi

$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ bo'lib, $\varphi(x) = 2$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty; +\infty)$ bo'ladi. Bu to'plamlar bir-biriga teng emas. Binobarin, $f(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalar aynan teng emas.

8-misol. Ushbu $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi

$D(f)$ va qiymatlari to'plami $Y_e(f)$ lar topilsin.

Echilishi:

Ravshanki, $D(f) = \{x \in R | \sin x \neq 0\} = \{x \in R | x \neq \pi k, k \in Z\}$

bo'ladi. $Y_e(f)$ ni topish uchun $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{\sin x}$ deb olib, -

$1 \leq \sin x \leq 1$ foydalanamiz. Demak,

$$\frac{1}{\sin x} \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty) \Rightarrow E(f) = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$$

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1. Radiusi R ga teng bo'lgan doiraga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi uning asosining funktsiyasi ko'rinishida ifodalansin.

$$J: S(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}, \quad 0 < x < 2R.$$

2. Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning hajmi konus balandligining funktsiyasi ko'rinishida ifodalansin.

$$J: V = \frac{\pi H^2 \cdot (2R - H)}{3}, \quad 0 < H < 2R.$$

3. Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning hajmi konus asosi radiusining funktsiyasi ko'rinishida ifodalansin.

$$J: V = \frac{\pi r^2 \cdot (R + \sqrt{R^2 - r^2})}{3}, \quad 0 < r < R.$$

Modul belgisini ishlatmay qo'yidagi funktsiya analitik ko'rinishda yozilsin.

$$4. \text{ a) } y = |x^2 - 5x + 6|, \quad \text{b) } y = |\lg x|.$$

$$J: \text{ a) } y = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & -\infty < x \leq 2, \\ -x^2 + 5x - 6, & 2 < x \leq 3 \\ x^2 - 5x + 6, & 3 < x < +\infty \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} -\lg x, & 0 < x \leq 1, \\ \lg x, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{1}{2}(x + |x|), \quad \text{b) } y = \frac{1}{2}(x - |x|),$$

$$J: \text{ a) } y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad \text{b) } y = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$$

Quyidagi funktsiyalarning aniqlanish sohalarini toping.

$$6. \text{ a) } f(x) = \frac{3x-1}{x^2-3x+2}, \quad \text{b) } f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$$

$$J: \quad \text{a) } D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty), \quad \text{b) } D(f) = (-\infty; +\infty).$$

$$7. \text{ a) } f(x) = \lg(3\sin^2 x - 4), \quad \text{b) } f(x) = \log_2 |4 - x^2|.$$

$$J: \text{ a) } D(f) = \emptyset, \quad \text{b) } D(f) = (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

8. Agar $f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasi $[-1; 0]$ kesma bo'lsa, quyidagi funktsiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

$$\text{a) } f(-x^2), \quad \text{b) } f(\cos x).$$

$$J: \text{ a) } [-1; 1], \quad \text{b) } \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \leq x \leq \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

9. Qo'yidagi funktsiyalarning qiymatlar to'plami topilsin.

$$a) f(x) = x + \frac{1}{x} (x \in (0; +\infty)), \quad b) f(x) = 2^{x^2 + 4x - 5}$$

$$J: a) E(f) = [2^{-9}; +\infty) \quad b) E(f) = [2; +\infty),$$

2-§. Funktsiya xossalari tekshirish. Teskari funktsiya.

1⁰. Agar $\forall x \in X \subset R$ uchun $-x \in X$ bo'lsa, X to'plam O nuqtaga nisbatan **simmetrik to'plam** deyiladi. Bunday to'plamda $f(x)$ funktsiya aniqlangan bo'lsin.

Agar $\forall x \in X \subset R$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, *juft*; $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, *toq funktsiya* deyiladi.

Endi davriy funktsiya tushunchasini keltiramiz. Aytaylik, $f(x)$ funktsiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar, $\exists T \neq 0 (T \in R), \quad \forall x \in X$ uchun $x - T \in X, x + T \in X, \quad f(x + T) = f(x)$ shartlar bajarilsa, $f(x)$ **davriy funktsiya** deyiladi, T esa **funksiyaning davri** deyiladi.

Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) bo'lsa, $f(x)$ funktsiya X to'plamda *o'suvchi* (*qatg'iy o'suvchi*), ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$) ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) bo'lsa, $f(x)$ funktsiya X to'plamda *kamayuvchi* (*qatiy kamayuvchi*) deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funktsiyalar umumiy nom bilan **monoton funktsiyalar** deyiladi. $y = f(x)$ funktsiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, uning qiymatlari to'plami $E(f)$ bo'lsin. Agar har bir $y \in E(f)$ ga $y = f(x)$ munosabatni qanoatlantiruvchi bitta $x \in X$ son mos qo'yilsa, unda yuzaga kelgan funktsiya $y = f(x)$ ga **teskari funktsiya** deyiladi va u $x = f^{-1}(y)$ kabi yoziladi.

2⁰. Ma'lumki, asosiy elementar funktsiyalarga darajali funktsiya, ko'rsatkichli funktsiya, logarifmik funktsiya, trigonometrik va teskari trigonometrik funktsiyalar kiritiladi. Asosiy elementar funktsiyalarning

aniqlanish sohasi, qiymatlar to'plami va ularning xossalari maktab matematika kursidan ma'lum.

Asosiy elementar funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish yordamida hosil qilinib, bitta formula yordamida beriladigan funktsiyalarga **elementar funktsiyalar** deyiladi.

Masalan: 1) $f(x) = x^2 - \cos x$ 2)

$$f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$$

3) $f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^2 x$ funktsiyalar elementar funktsiyalarga misol bo'ladi.

Elementar funktsiyalarning superpozitsiyasi ko'rinishida ifodalab bo'lmaydigan funktsiyaga **elementar bo'lmagan funktsiyalar** deyiladi. Masalan, bir nechta formula yordamida aniqlangan ushbu

$$y = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$$

funktsiya elementar bo'lmagan funktsiyaga misol bo'ladi.

3^o. 1-misol. Ushbu a) $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, b) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ funktsiyalar juft yoki toqlikka tekshirilsin.

$$a) f(-x) = \frac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x). \quad \text{Demak,}$$

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \text{ funktsiya juft.}$$

$$b) f(-x) = \lg \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \lg \frac{1-x}{1+x} = \lg \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\lg \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\text{Demak, } f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x} \text{ funktsiya toq.}$$

2-misol. Simmetrik to'plamda aniqlangan har qanday funktsiya juft va toq funktsiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi isbotlansin.

Aytilik, $f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Agar

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \varphi(x) + \psi(x)$$

deb olsak, $\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ funksiya juft, $\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ funksiyaning esa toq bo'lishini ko'rish qiyin emas.

3-misol. Ushbu, $f(x) = A \sin(\alpha x + \beta)$ funksiyaning davri topilsin, bunda A, α, β - o'zgarmas sonlar.

Aytaylik, $f(x)$ funksiyaning davri T bo'lsin ($T \neq 0$).

Unda

$f(x+T) = f(x)$, yag'ni $A \sin[\alpha(x+T) + \beta] \equiv A \sin(\alpha x + \beta)$ bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\sin \frac{\alpha T}{2} \cdot \cos \left(\alpha x + \beta + \frac{\alpha T}{2} \right) \equiv 0$$

bu tenglikdan $\sin \frac{\alpha T}{2} = 0$ bo'lishi kelib chikadi. Demak, $\frac{\alpha T}{2} = \pi n$,

yag'ni $T = \frac{2\pi n}{\alpha}$ bo'ladi, bunda $n \in \mathbb{Z}$. Berilgan funksiyaning eng

kichik musbat davri $T_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$ bo'ladi.

4-misol. Ushbu $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ funksiya monotonlikka tekshirilsin.

Ravshanki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty; +\infty)$ bo'ladi.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ bo'lsin. Unda

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2^2} - \frac{x_1}{1+x_1^2} = \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 \bullet x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo'ladi. Bu ayirmaning ishorasi $1 - x_1 x_2$ ning ishorasiga bog'liq bo'ladi.

Agar $x_1, x_2 \in (-1; 1)$ bo'lsa, $1 - x_1 \bullet x_2 > 0$, $x_1 x_2 \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ bo'lsa $1 - x_1 x_2 < 0$ bo'ladi. Binobarin, $\forall x_1, x_2 \in (-1; 1)$ da

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lib, berilgan funksiya $(-1; 1)$ oraliqda **o'suvchi** $\uparrow$ bo'ladi.

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ da

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lib, berilgan funksiya $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ to'plamda **kamayuvchi** $\downarrow$ bo'ladi.

5-misol. Ushbu

$$y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1)$$

funksiyaga teskari funksiya topilsin. Ravshanki,

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Rightarrow y + yx = 1 - x \Rightarrow (1+y)x = 1 - y \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y} \quad (y \neq -1)$$

Demak, berilgan funksiyalarga teskari funksiya $y = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \neq -1$) bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1. Quyidagi funksiyalar juft yoki toqlikka tekshirilsin.

a) $f(x) = x^2 - \cos x$

$$\text{b) } f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\text{v) } f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^2 x$$

J: a) juft; b) juft ham, toq ham emas; v)juft ham, toq ham emas.

Quyidagi funksiyalar davriylikka tekshirilsin, davriy bo'lsa, eng kichik musbat davri topilsin.

$$2. \text{ a) } f(x) = x^2 + x - 1, \quad \text{b) } f(x) = 3.$$

J: a) Davriy emas; b) $f(x+T) = f(x)$ tenglik $\forall T$ uchun bajariladi, lekin eng kichik musbat davr mavjud emas.

$$3. \text{ a) } f(x) = \sqrt{\sin 3x} \quad \text{b) } f(x) = \sin^2 x$$

$$J: \text{ a) davriy, } T_0 = \frac{2\pi}{3}; \quad \text{b) davriy, } T_0 = \pi$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \cos x^2, \quad \text{b) } f(x) = \{x\} = x - [x]$$

$$J: \text{ a) davriy emas; b) davriy, } T_0 = 1$$

$$5. \text{ a) } f(x) = \sin 2\pi x, \quad \text{b) } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$J: \text{ a) davriy, } T_0 = 1; \quad \text{b) davriy, } T_0 = \frac{\pi}{2}$$

6. Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ($T \neq 0$) bo'lsa, $y = f(ax+b)$ ($a \neq 0$) davriy funksiya bo'lib, uning davri $\frac{T}{a}$ bo'lishi isbotlansin.

7. Ushbu $f(x) = x - \sin x$ funksiya $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda kamayuvchi bo'lishi isbotlansin.

Ko'rsatma: $\forall x_1, x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ va $x_1 < x_2$ uchun $\sin x_1 < \sin x_2$ tengsizlikning bajarilishidan foydalaning.

$$8. \text{ a) } f(x) = \sin 4x + 5 \cos 6x, \quad \text{b) } f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

J: a) Davriy, $T_0 = \pi$; b) Davriy, $T_0 = 2\pi$.

$$9. \text{ a) } f(x) = \cos \pi x ; \quad \text{ b) } f(x) = \left| \sin(\sqrt{2}x + 1) \right| .$$

$$J: \text{ a) Davriy, } T_0 = 2 ; \quad \text{ b) Davriy, } T_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

10. Davriy bo'lmagan shunday $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga shunday misollar keltirilsinki,

$$1) f(x) + g(x),$$

$$2) f(x) \bullet g(x)$$

funksiyalar davriy bo'lsin.

11. Shunday davriy $f(x)$ va davriy bo'lmagan $g(x)$ funksiyalarga misollar keltirilsinki, $f(x) + g(x)$, $f(x) \bullet g(x)$ funksiyalar davriy bo'lsin.

12. Ushbu $f(x) = (x^2 - 1)^2$ funksiyalarning $(-1; 0)$ intervalda o'suvchi, $(0; 1)$ intervalda esa kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

Quyidagi funksiyalar monotonlikka tekshirilsin.

$$13. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad \text{ b) } f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} .$$

J: a) $(-\infty; 0)$ da $\downarrow$, $(0; +\infty)$ da $\uparrow$; b) $(-\infty; -1)$ va $(-1; 0)$ da $\uparrow$, $(0; 1)$ va $(1; +\infty)$ da $\downarrow$.

$$14. \text{ a) } f(x) = \frac{x - 1}{|x| + 1}; \quad \text{ b) } f(x) = 1 - \frac{|x - 1|}{1 + |x|} .$$

J: a) $(-\infty; 0)$ da o'zgarmas, $(0; +\infty)$ da $\uparrow$; b) $(-\infty; 0)$ da o'zgarmas $(0; 1) \uparrow$, $(1; +\infty)$ da $\downarrow$.

$$15. \text{ a) } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad x \in [0; \pi],$$

$$\text{ b) } f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}, \quad x \in [0; 2\pi].$$

$$J: a) \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ va } \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \text{ da } \downarrow, \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ va } \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right] \text{ da } \uparrow.$$

$$b) \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ va } \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \text{ da } \downarrow, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \text{ da } \uparrow.$$

$$16. \quad a) f(x) = [x], \quad b) f(x) = |x| - x$$

J: a) o'suvchi, b) $x \leq 0$ da kamayuvchi, $x > 0$ da o'zgarmas 0 ga teng.

$$17. a) f(x) = x^4 + 6x^2 + 1), \quad b) f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}.$$

J: a) $x > 0$ da o'suvchi, $x < 0$ da kamayuvchi. b) $x < -2$ da o'suvchi, $x > -2$ da kamayuvchi.

18. Quyidagi funktsiyalarning o'zaro teskari funktsiyalar ekanligi isbotlansin:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \frac{x}{x+1}, & g(x) &= \frac{x}{1-x} \\ b) f(x) &= 1 - \sqrt[3]{x}, & g(x) &= (1-x)^3 \\ v) f(x) &= \sqrt[3]{x^5}, & g(x) &= \sqrt[5]{x^3} \end{aligned}$$

19. Aytaylik, $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funktsiyalar $M \subset \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $y = f(x) > 0$ kamayuvchi va $y = g(x) < 0$ esa o'suvchi bo'lsin. Ushbu funktsiyalar M to'plamda monotonlikka tekshirilsin.

$$\begin{aligned} a) f(x) + g(x); \quad b) f(x) + 4g(x); \quad v) y = f^2(x); \\ g) y = g^2(x). \end{aligned}$$

J: a) o'suvchi, b) kamayuvchi, v) kamayuvchi, g) kamayuvchi.

Quyidagi funktsiyalarga teskari bulgan funktsiyalar topilsin.

$$20. \quad a) f(x) = 2x - x^2, \quad x \geq 1:$$

$$b) f(x) = 2x - x^2, \quad x \leq 1:$$

$$v) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad (|x| \leq 1)$$

$$J: a) f = 1 + \sqrt{1-x}, \quad x \leq 1; b) f = 1 - \sqrt{1-x}, \quad x \leq 1;$$

$$v) f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

$$21. a) y = \lg(x-1), \quad b) y = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

$$J: a) y = 10^x + 1; \quad b) y = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

$$22. y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x < -1.$$

$$J: y = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0$$

$$23. y = x|x| + 2x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad b) y = \sin x \quad x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right].$$

$$J: a) y = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x} & x < 0 \\ -1 + \sqrt{1+x} & x \geq 0 \end{cases} \quad b) y = 3\pi - \arcsin x,$$

$$x \in [-1; 1].$$

3-§. Funksiyalarning grafiklari.

1⁰. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset \mathbb{R}$ to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0 \in X$ da $f(x_0) = y_0$ deylik. Ravshanki, (x_0, y_0) juftlik tekislikda nuqtani tasvirlaydi.

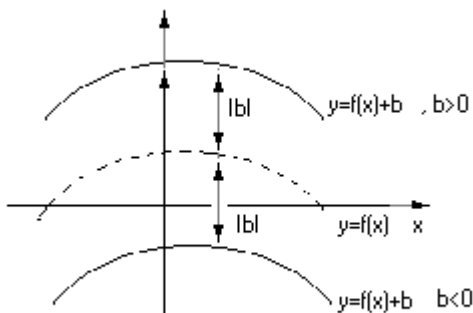
Tekislikning nuqtalaridan iborat ushbu $\{(x, y) | x \in X, y = f(x)\}$ to'plam $y = f(x)$ **funksiyaning grafigi** deyiladi.

- 1) Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli juft va toq funksiyalarning grafigini faqat argumentning musbat qiymatlari uchun bilish yetarli.

- 2) Davriy funksiya uchun esa uning grafigini bir davr oralig'ida bilish kifoya.

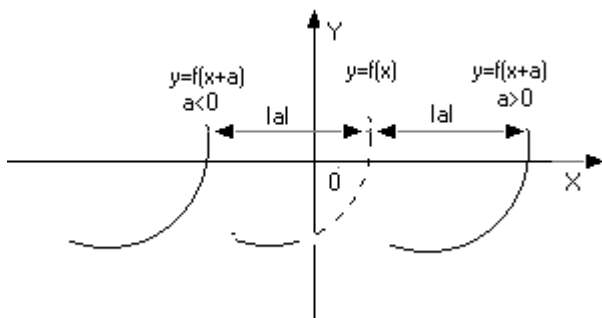
2⁰. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funktsiya grafigining tekislikdagi tasviri ma'lum bo'lsin. Unga ko'ra quyidagi $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$ (bunda a, b — o'zgarmas sonlar) funksiyalarning grafiglarini yasash usullarini keltiramiz:

1) $y = f(x) + b$ **funksiyaning grafigi**. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini ordinatalar o'qi bo'yicha $|b|$ masofaga parallel ko'chirish bilan yasaladi. Bunda grafik $b > 0$ bo'lganda yuqoriga, $b < 0$ bo'lganda parallel ko'chiriladi.



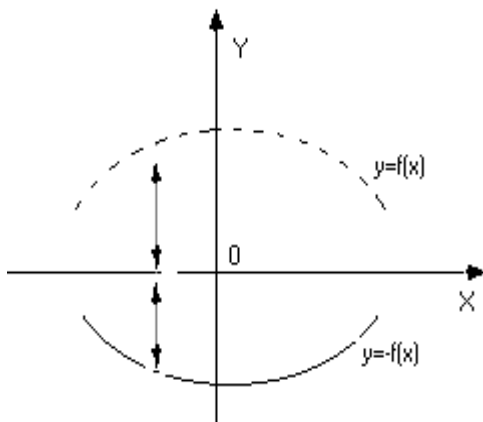
2-chizma.

2) $y = f(x + a)$ **funksiyaning grafigi**. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini abstsissalar o'qi bo'yicha $|a|$ masofaga parallel ko'chirish bilan yasaladi. Bunda grafik $a > 0$ bo'lganda chapga, $a < 0$ bo'lganda o'ngga parallel ko'chiriladi.



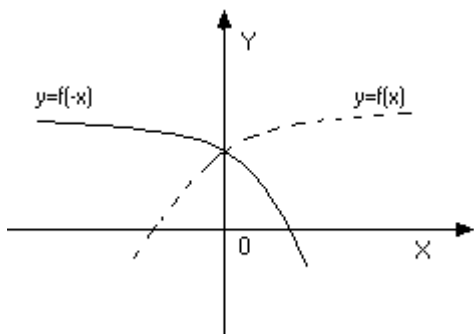
3-chizma.

3) $y = -f(x)$ **funksiyaning grafigi.** Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini abstsissalar o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan yasaladi.



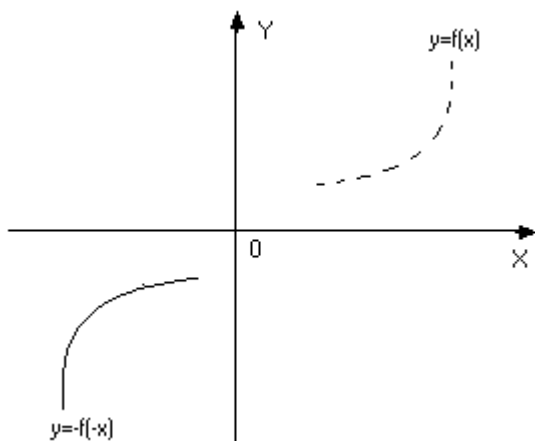
4-chizma.

4) $y = f(-x)$ **funksiyaning grafigi.** Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigini ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan yasaladi.



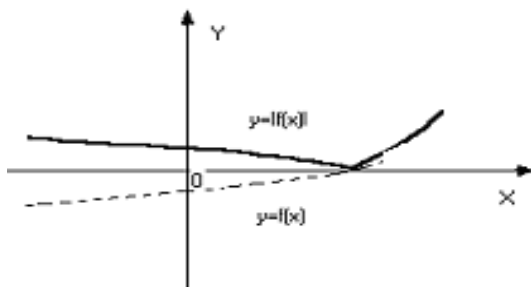
5-chizma.

5) $y = -f(-x)$ **funksiyaning grafigi.** Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigini koordinata boshiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan yasaladi.



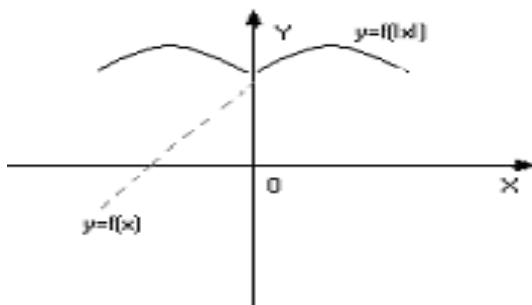
6-chizma.

6) $y = |f(x)|$ **funksiyaning grafigi.** Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigining OX o'qidan yuqorida joylashgan qismini qoldirish, OX o'qidan pastda joylashgan qismini esa shu o'qqa simmetrik ravishda yuqoriga ko'tarish bilan yasaladi.



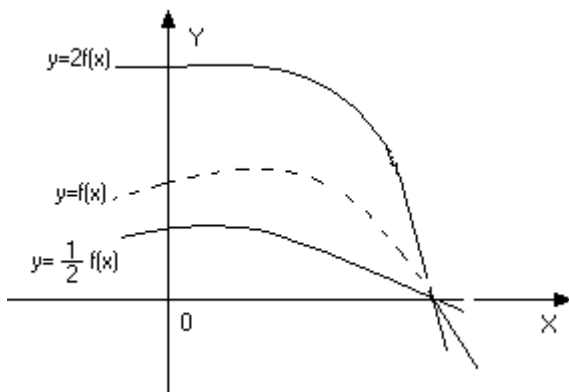
7-chizma.

7) $y = f(|x|)$ **funksiyaning grafigi.** Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigining OU o'qidan o'ng tomonda joylashgan qismini qoldirish, OU o'qidan chap tomonda joylashgan qismini tashlab, uning o'rniga OU ning o'ng tomondagi qismini shu o'qqa simmetrik ravishda chapga o'tkazish bilan yasaladi.



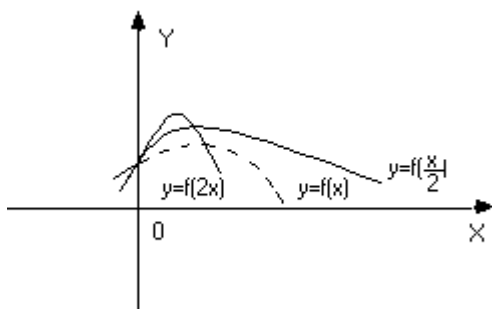
8-chizma.

8) $y = af(x)$ **funksiyaning grafigi.** Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiyaning grafigining har bir ordinatasini a ga ko'paytirish bilan yasaladi.



9-chizma.

9) $y = f(ax)$ **funksiyaning grafigi.** Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigining har bir abstsissani a ga bo'lish bilan yasaladi.



10-chizma.

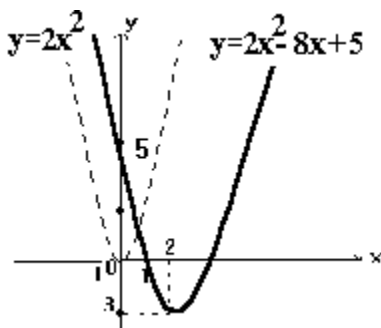
3⁰. Ko'pincha $y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiylarning grafiklarini bilgan holda bu funksiylarning mos ordinatalarining (ikkalasining ordinatalari bitta x nuqtada hisoblanadi) qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish bilan $f(x) + \varphi(x)$, $f(x) - \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiylarning grafigini yasash mumkin bo'ladi.

1-misol. Ushbu $y = 2x^2 - 8x + 5$ funksiya grafigi yasalsin.

Kvadrat uchhadning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$y = 2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2(x - 2)^2 - 3. \text{ Demak, berilgan}$$

funktsiyalarning grafigini 1) va 2)-qoidalarga asosan $y = 2x^2$ parabolaning grafigini 2 birlik o'ngga surish va 3 birlik pastga siljitish yordamida hosil qilinadi (11-chizma).



11-chizma

Izoh. Shu yo'l bilan ixtiyoriy kvadrat uchlarning grafigini yasash mumkin.

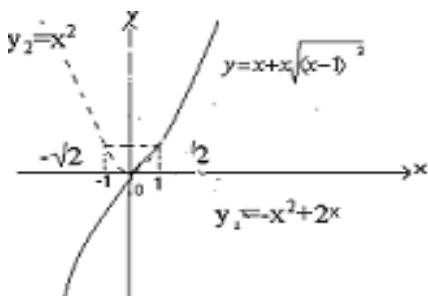
2-misol. Ushbu $y = x + x\sqrt{(x-1)^2}$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Agar $x > 1$ bo'lsa $y = x + x(x-1) = x^2$, $x \leq 1$ bo'lsa

$$y = x + x(1-x) = -x^2 + 2x$$

bo'ladi.

Demak, berilgan funksiyaning grafigi $(-\infty ; 1)$ oraliqda $y_1 = -x^2 + 2x$ hamda $[1; +\infty)$ da $y = x^2$ parabolalardan tashkil topgan chiziqni ifodalaydi (12-chizma).



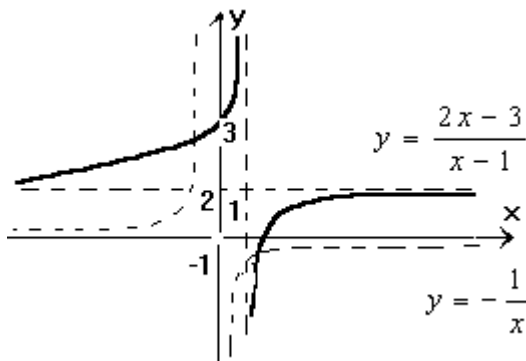
12-chizma.

3-misol. Ushbu $y = \frac{2x-3}{x-1}$ funksiya grafigi yasalsin.

Funktsiyaning ko'rinishini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$y = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

Bu funksiyaning grafigini yasash uchun $y = -\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigini chizib, uni 1 birlik o'ngga surish va 2 birlik yuqoriga ko'tarish kerak (13-chizma).



13-chizma

Izoh: Shu yo'l bilan ixtiyoriy kasr-chiziqli $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funksiyaning grafigini yasash mumkin.

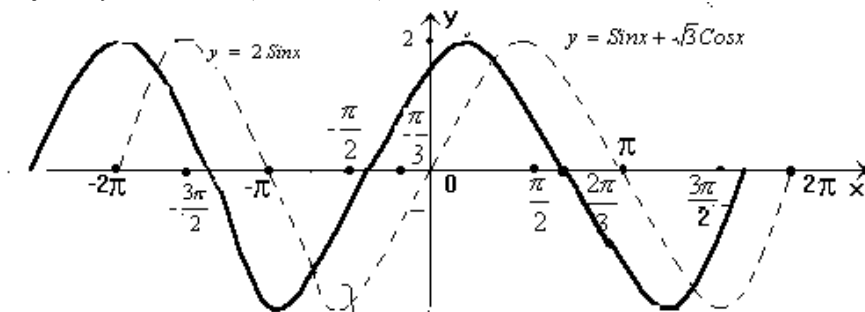
4-misol. Ushbu $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ funksiyaning grafigi yasalsin.

$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Quyidagi amallarni bajaramiz:

Shunday qilib, berilgan funksiyaning grafigini chizish uchun

$y = 2\sin x$ funksiyaning grafigini chizib, uni $\frac{\pi}{3}$ birlik chapga siljitish yetarli ekan (14-chizma)

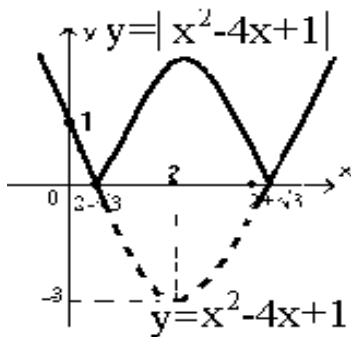


14-chizma

Izoh: Shu yo'l bilan $y = a\sin x + b\cos x$ ko'rinishidagi ixtiyoriy funksiyaning grafigini yasash mumkin.

5-misol. Ushbu $y = |x^2 - 4x + 1|$ funksiyaning grafigi yasalsin.

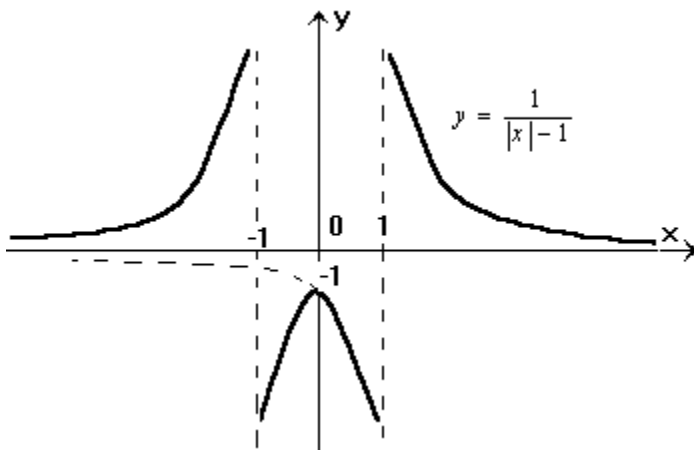
Bu funksiyaning grafigini yasash uchun avval $y_1 = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ funksiyaning grafigini yasab, so'ng $y = |y_1|$ funksiyaning grafigini yasashda 6-xossadan foydalanamiz (15-chizma).



15-chizma.

6-misol. Ushbu $y = \frac{1}{|x| - 1}$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Bu funksiya juft bo'lganligi sababli uning grafigini OU o'qidan o'ng tomonda joylashgan qismini chizish yetarli bo'ladi (chap tomonga OU o'qiga nisbatan simmetrik ko'chiriladi). Demak, $x \geq 0$ da $y = \frac{1}{x - 1}$ bo'lib, uning grafigini o'ng yarim tekislikda chizamiz va bu grafik yordamida berilgan funksiyaning grafigini hosil qilamiz. (16-chizma).



16-chizma.

7-misol. Ushbu

$$y = \arcsin(\sin x)$$

funksiyaning grafigi yasalsin.

Bu funksiya 2π davrli funksiya bo'ladi, chunki
 $\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x)$

Arksinus ta'rifiga binoan, birinchidan

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

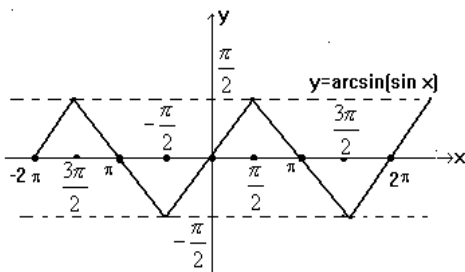
ikkinchidan esa $\sin y = \sin x$ bo'ladi.

Demak,

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{da} \quad y = x,$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{da} \quad y = \pi - x$$

bo'ladi (17-chizma).



17-chizma.

8-misol. Ushbu

$$f(x) = |x| + |x-1| + |x+1|$$

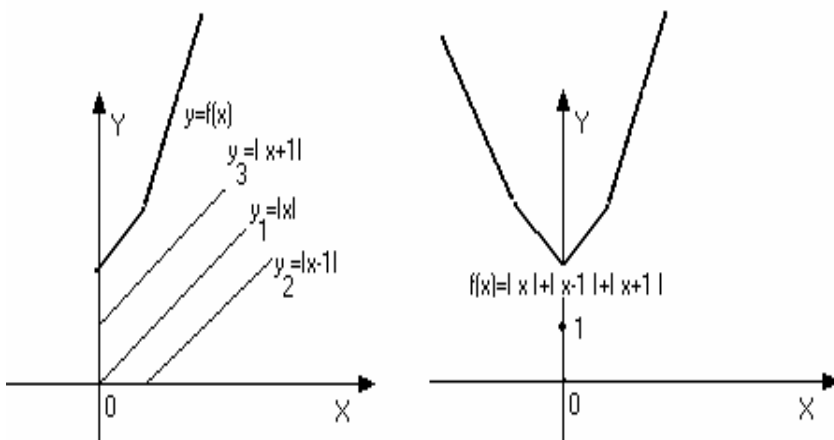
funksiyaning grafigi yasalsin.

Bu funksiya $R = (-\infty; +\infty)$ deb aniqlangan juft funksiyalardir. Haqiqatdan ham,

$$f(-x) = |-x| + |-x-1| + |-x+1| = |x| + |(-1)(x+1)| + |-(x-1)| = |x| + |x+1| + |x-1| = f(x)$$

Demak, berilgan funksiya grafigining OU o'qidan o'ng tomonda joylashgan qismini topish yetarli bo'ladi (chap tomonga OU o'qiga nisbatan simmetrik ko'chiriladi). Ravshanki, $y = f(x)$

funksiya $y_1 = |x|$, $y_2 = |x-1|$, $y_3 = |x+1|$, funksiyalar yig'indisidan iborat. Bu funksiyalar grafiklarini chizib (y_2 va y_3 funksiyalarning grafiklarini chizishda $y_1 = |x|$, funksiyaning grafigi va 2-qoidadan foydalaniladi), so'ng har bir x ga mos ordinatalarini qo'shib, berilgan funksiya grafigi topiladi (18-chizma).



18-chizma

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

Quyidagi funksiyalarning grafiklari yasalsin.

1. $y = 3x^2 - 6x - 17$
2. $y = -2x^2 - 4x + 4$
3. $y = \frac{2x+5}{x-2}$
12. $y = \max\left\{x^3; \frac{1}{x}\right\}$
13. $y = \frac{2x-3}{3-x}$
14. $y = 2^{1-x^2}$

4. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
5. $y = \sqrt{\lg \sin x}$
6. $y = \sin^2 x$
7. $y = 0,5(|x + 1| + |x - 1|)$
8. $y = \arctg(\tg x)$
9. $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$
10. $y = \cos(\lg x)$
11. $y = \operatorname{Sign}(\sin x)$
15. $y = 2^{\arctg x}$
16. $y = \log_2 \log_2 x$
17. $y = \frac{\cos 2x}{\sin x}$
18. $y = \arcsin(3x - 1)$
19. $y = x^2 + \frac{1}{x}$
20. $y = \frac{x^2}{|x| - 1}$
21. $y = x \cdot \operatorname{Sign}(\sin x)$
22. $y = \min\{\log_2 x, \log_x 2\}$

4-§. Parametrik ko'rinishda va qutb koordinatalar sistemasida berilgan funksiyalar.

1^o. Aytaylik, $T \subset \mathbb{R}$ to'plamda

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in T \quad (1)$$

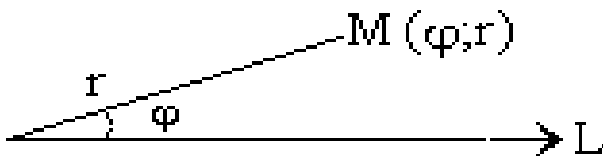
funksiyalar berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, X va U to'plamlar, mos ravishda, $T \subset \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan $x = \varphi(t)$ va $y = \psi(t)$ funksiyalarning qiymatlar to'plami bo'lsin. Agar ixtiyoriy $t \in T$ olinganda ham unga mos $x = \varphi(t) \in X$ uchun yagona $y = \psi(t) \in Y$ mos kelsa, unda (1) sistema parametrik ko'rinishda berilgan funksiyani aniqlaydi deyiladi. Masalan,

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in R$$

funksiyalar oshkor ko'rinishda berilgan $y = x^2$ funksiyaning parametrik ko'rinishini ifodalaydi.

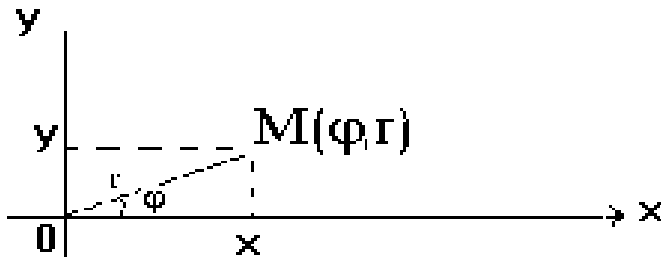
2^o. Amaliyotda dekart koordinatalar sistemasidan keyin eng ko'p ishlatiladigan sistema – qutb koordinatalar sistemasi hisoblanadi.

Qutb koordinatalar sistemasida tekislikdagi ixtiyoriy M nuqta, O qutb nuqtagacha bo'lgan masofa $|OM| = r$ va OM vektorining OL qutb o'qi bilan hosil qilgan burchagi φ yordamida aniqlanadi (19-chizma).



19-chizma

Agar dekart koordinatalar sistemasi markazini qutb nuqta, Ox o'qining musbat qismini qutb o'qi bilan ustma-ust tushirsak, unda qutb va dekart koordinatalar sistemalari orasidagi bog'lanishlar quyidagi tengliklar yordamida ifodalanadi (20-chizma):



20-chizma

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2)$$

Izoh. Qutb koordinatalar sistemasidagi ixtiyoriy $(\varphi; 0)$ juftlikka Dekart koordinatalar sistemasidagi $(0; 0)$ nuqtani mos qo'yamiz.

3°. 1-misol. $A(0; -1)$ va $V(1, 6; -0, 2)$ nuqtalarning qaysilari Ushbu

$$l = \begin{cases} x = \sin t + 1 \\ y = \cos t - 1 \end{cases} \quad \text{chiziqda yotishi aniqlansin.}$$

Echilishi:

Avval $A(0; -1)$ nuqtani tekshiramiz. $\Rightarrow x = 0, \quad y = -1, \quad x = 0$ bo'lganda $\sin t + 1 = 0$ bo'lib, bu tenglik $t = \frac{3\pi}{2}$ da bajariladi. $\Rightarrow y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} - 1 = -1$. Demak $(0; -1) \in l$.

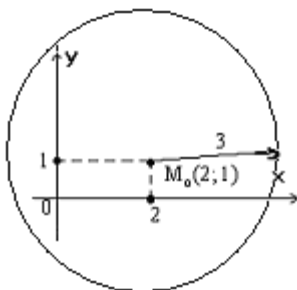
$V(1, 6; -0, 2)$ uchun $x = 1, 6$ va $y = -0, 2$.
 $\Rightarrow \sin t + 1 = 1, 6 \Rightarrow \sin t = 0, 6. \Rightarrow \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = 0, 8. \Rightarrow y = \cos t - 1 = 0, 8 - 1 = -0, 2 \Rightarrow B(1, 6; -0, 2) \in l$.

2-misol. Chiziqlarning ushbu $\begin{cases} x = 2 - 3 \cos t \\ y = 1 + 3 \sin t \end{cases}$ parametrik

tenglamasidan t parametr yo'qotilib, uning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi topilsin va grafigi chizilsin.

Echilishi: Berilgan sistemadan $\begin{cases} x - 2 = -3 \cos t \\ y - 1 = 3 \sin t \end{cases}$ ekanligi va bu

yerdan $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9$ bo'lishini topamiz. Demak, berilgan chiziq markazi $(2; 1)$ nuqtada, radiusi 3 ga teng bo'lgan ushbu $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ aylanadan iborat ekan. (21-chizma).



21-chizma

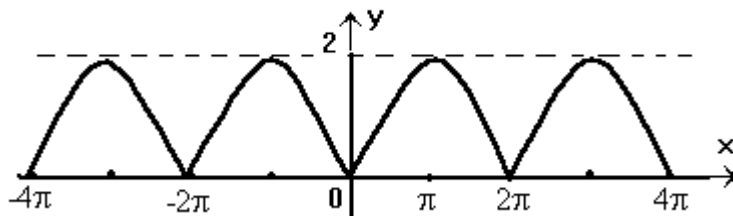
3-misol. Ushbu
$$\begin{cases} x = t - S \operatorname{int} \\ y = 1 - \operatorname{Cost} \end{cases} \quad (3)$$

tsikloidaning grafigi yasalsin.

Echilishi: (3)-sistema yordamida aniqlanadigan funktsiyani $y = f(x)$ oshkor ko'rinishda ifodalab bo'lmaydi. Bu funktsiya x ning barcha qiymatlarida aniqlangan ($x \in (-\infty; +\infty)$) va chegaralangan $y \in [0; 2]$ hamda t parametr bo'yicha davriy bo'lib, davri 2π ga teng. Xarakterli nuqtalar uchun quyidagi jadvalni tuzamiz.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{2} + 1$	$\frac{7\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2π
y	0	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Bu jadvaldan foydalanib tsikloidaning grafigini chizamiz. (22-chizma)



22-chizma.

4-misol. Ushbu $A(2\sqrt{3};2)$, $V(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ nuqtalarning qutb koordinatalari va $S(\frac{\pi}{2}; 10)$, $D(\frac{5\pi}{4}; 2)$ nuqtalarning Dekart koordinatalari topilsin.

Echilishi: Masalani yechish uchun Dekart va qutb koordinatalar sistemalarini bog'lovchi (2) tengliklardan foydalanamiz:

$$A(2\sqrt{3};2) \Rightarrow x = 2\sqrt{3}, y = 2. \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{6}; 4\right) \quad B(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2+2} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = -1.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{V} & \text{nuqta} & \text{IV-chorakda} & \text{yotgani} & \text{uchun} \\ \varphi = 2\pi - \arctg 1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} & \text{bo'ladi.} & \Rightarrow & V\left(\frac{7\pi}{4}; 2\right). & S\left(\frac{\pi}{2}; 10\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, r = 10 \Rightarrow C(0; 10).$$

$$D\left(\frac{5\pi}{4}; 10\right) \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}; r = 2 \Rightarrow x = r \cos \varphi = 2 \cos \frac{5\pi}{4} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$; y = r \sin \varphi = 2 \sin \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} \Rightarrow D(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

5-misol. Ushbu

$r = 5 \sin 3\varphi$ “uch yaprokli gul” grafigi yasalsin.

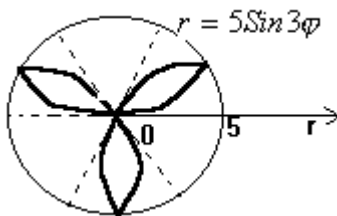
Echilishi: Avval berilgan funktsiyaning aniqlanish sohasini topamiz : $D(r) = \{\varphi | \sin 3\varphi \geq 0\} = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Qiymatlar to'plami $Ye(r) = [0; 5]$ funktsiya davriy bo'lib, uning asosiy davri $T_o = \frac{2\pi}{3}$ bo'ladi. Demak, funktsiya grafigini $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ kesmada,

xususan $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ kesmada, chizish kifoya. Buning uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

φ	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$
r	0	2.5	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	5	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	2.5	0

Jadvaldan va funktsiyaning davriyligidan foydalanib $r = 5 \sin 3\varphi$ funktsiyaning grafigini chizamiz (23-chizma).



23-chizma.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1. $A(0;0)$ va $V(3;3)$ nuqtalarning qaysilari ushbu

$$l: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

chiziqqa tegishli ekanligi aniqlansin.

J: A tegishli, V tegishli emas.

2. $A\left(\frac{3}{2}; \sqrt{3}\right)$ va $V(1;2)$ nuqtalarning qaysilari ushbu

$$l: \begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}, \quad \text{chiziqqa tegishli ekanligi}$$

aniqlansin.

J: V tegishli, A tegishli emas.

Berilgan A va V nuqtalarning qaysilari tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan chiziqqa tegishli ekanligi aniqlansin.

3. $x = t^2$, $y = t^3$; $A(1;1)$, $B(4;-8)$. J: A va V.

4. $x = 1 + \cos t$; $y = \sin t$; $A(0;0)$ $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

J: A tegishli, V tegishli emas

5. $x = 2^t \sin t$; $y = 2^t \cos t$; $A(2;2)$, $B(0;2\pi)$.

J: A ham, V ham tegishli emas

6. Ushbu

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos^2 t \end{cases}, \quad \text{sistema qanday chiziqni aniqlashi topilsin.}$$

J: $y = x^2$ parabolaning $A(-1;1)$ va $V(1;1)$ nuqtalarini tutashtiruvchi AOV yoyini aniqlaydi.

7. Chiziqning ushbu

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan t parametr yo'qotilib, uning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi topilsin va grafigi chizilsin.

Ko'rsatma: Avval birinchi tenglamani 3 ga, ikkinchi tenglamani 2 ga bo'lib, so'ngra t parametrni yo'qoting.

$$J: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{-ellips.}$$

Berilgan chiziqning parametrik tenglamasidan t parametr yo'qotilib, uning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi topilsin va grafigi chizilsin.

$$8. \quad x = t - 1, \quad y = t^2 - 2t + 2. \quad J: \quad y = x^2 + 1.$$

$$9. \quad x = |\ln t|, \quad y = 1 + t^3. \quad J: \quad 3x = |\ln(y - 1)|.$$

$$10. \quad x = (t + 1)^2, \quad y = (t - 1)^2. \quad J: \quad 8(x + y) = (x - y)^2 + 16.$$

$$11. \quad x = a \operatorname{Sect}, \quad y = b \operatorname{tgt}. \quad J: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{-giperbola.}$$

12. Ushbu

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

astroidaning grafigi chizilsin.

13. Ushbu Dekart koordinatalar sistemasida berilgan $A(2;0)$, $V(1;1)$, $S(-2;0)$ va $D(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtalarning qutb koordinatalari topilsin.

$$J: A(0;2), B\left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right), C(\pi;2), D\left(\frac{5\pi}{4}; 2\right)$$

14. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan ushbu $A\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$,

$B\left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$, $C\left(\frac{3\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$ va $D\left(\frac{7\pi}{6}; 4\right)$ nuqtalarning Dekart koordinatalari topilsin

J: $A(1;\sqrt{3})$, $B(0;-3)$, $C(-1;1)$, $D(-2\sqrt{3};-2)$

15. Dekart koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi chiziqlarning tenglamalari qutb koordinatalar sistemasida yozilsin:

a) $x + y^2 = 2x$, b) $x = y^2 - \frac{1}{4}$.

J: a) $r = 2\cos\varphi$, b) $r = \frac{1}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

16. Quyidagi chiziqlarning grafiklari yasalsin:

a) $r = 2(1 - \cos\varphi)$ -kardioida, b) $r = 3 + 2\sin\varphi$

17. Ushbu $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ tenglama bilan berilgan “Bernulli lemniskatasi”ning grafigini qutb koordinatalar sistemasiga o’tish yordamida chizing.

Quyidagi chiziqlarning grafiklari chizilsin.

18. $x = 2 - t$, $y = 1 - t^2$

19. $x = 2\cos^2 t$, $y = 3\sin^2 t$

20. $x = \sin t$, $y = \cos t$

Ko’rsatma: t parametr yo’qotilsa, $y = \frac{1}{x}$ tenglama hosil bo’ladi.

Grafik chizilayotganda $|x| \leq 1$ va $|y| \geq 1$ bo’lishini ehtiborga olish kerak.

21. Dekart koordinatalar sistemasida berilgan ushbu $A(2\sqrt{3};2)$, $B(0;-1)$, $C(2\sqrt{3};-2)$ va $D(-1;1)$ nuqtalarning qutb koordinatalari topilsin.

J: $A\left(\frac{\pi}{6};4\right)$, $B\left(\frac{3\pi}{2};1\right)$, $C\left(\frac{11\pi}{6};4\right)$, $D\left(\frac{5\pi}{4};\sqrt{2}\right)$.

22. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan ushbu $A(\frac{5\pi}{3};2)$, $B(\pi;4)$, $C(\frac{4\pi}{3};2)$ va $D(\frac{5\pi}{4};4)$ nuqtalarning Dekart koordinatalari topilsin.

$$J: A(1;-\sqrt{3}), B(-4;0), C(-1;-\sqrt{3}), D(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2}).$$

23. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan $M(\frac{\pi}{4};3)$ va $N(\frac{3\pi}{4};4)$ nuqtalar orasidagi masofa hisoblansin. **J:** 5.

Ko'rsatma: M va N nuqtalarning Dekart koordinatalarini toping hamda $M(x_1, y_1)$ va $N(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani hisoblash uchun $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ formuladan foydalaning.

Dekart koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi chiziqlarning tenglamalari qutb koordinatalar sistemasida yozilsin.

$$24. x + y + 1 = 0. \quad J: r = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right)}.$$

$$25. 2xy = x^2 - y^2 \quad J: \varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad (n = 1, 2, 3) \text{ va } r = 0$$

Quyidagi chiziqlarning grafiklari yasalsin.

$$26. r = \varphi, \varphi \in [0; 2\pi] \text{ -Arximed spirali.}$$

$$27. r = 2(1 + \sin\varphi) \text{ -Kardioda}$$

$$28. r = 4\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \text{ -Aylana}$$

$$29. r = \frac{1}{\cos\varphi - \sin\varphi} \text{ -To'g'ri chiziq}$$

$$30. r = \sin^2 2\varphi \text{ -to'rt yaproqli gul.}$$

VII BOB. LIMIT, UZLUKSIZLIK, HOSILA.

1-§. Ketma-ketlik va uning limiti

Ketma-ketlik tushunchasi maktab kursidan ma'lum.

Aytaylik, $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) bo'lsa, unda $\{x_n\}$ ketma-ketlik **o'suvchi (kamayuvchi)** deyiladi.

Agar $\forall n \in N$ uchun $\exists M(m)$ son : $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik **yuqoridan (quyidan) chegaralangan**

deb ataladi. Agar ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda bunday ketma-ketlik **chegaralangan ketma-ketlik** deyiladi.

Agar ketma-ketlik o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lsa, unda unga **monoton ketma-ketlik** deb ataladi.

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik va a son berilgan bo'lsin.

Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$: $\forall n \geq n_0$ uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ bo'lsa a son $\{x_n\}$ **ketma-ketlikning limiti** deb ataladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ kabi belgilanadi.

Misollar.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ tenglik isbotlansin.

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ olamiz, } |x_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right].$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$ tenglik isbotlansin.

$$x_n = \frac{n-1}{n}, \quad a = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ olamiz.}$$

$$|x_n - a| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right].$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq \exists$$

Shuni isbotlaylik. Buning uchun teskarisini faraz qilaylik, yahni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \exists \text{ bo'lsin. Unda tahrifga ko'ra}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \text{ uchun } |x_n - a| < \varepsilon \text{ bo'ladi.}$$

$$\text{Aytaylik, } \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ bo'lsin } |x_{2n} - a| < \varepsilon \text{ va}$$

$$|x_{2n-1} - a| < \varepsilon \Rightarrow |x_{2n} - x_{2n-1}| = |x_{2n} - a - (x_{2n-1} - a)| \leq |x_{2n} - a| + |x_{2n-1} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 1$$

$$\text{bo'ladi. Lekin } |x_{2n} - x_{2n-1}| = |(-1)^{2n} - (-1)^{2n-1}| = 2 > 1 \text{ ziddiyat}$$

$$\text{kelib chiqdi. Demak, } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq \exists$$

Sonli ketma-ketlikning xossalari.

1^o. Sonli ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, uning limiti yagona bo'ladi.

2^o. Agar ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, ya'ni yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

Izoh. Bu xossaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas. Masalan, $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ ketma-ketlik chegaralangan, lekin $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \exists$.

3^o. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda bunday ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.

Bu xossa ketma-ketlik limitini hisoblashda keng qo'llaniladi.

$$\mathbf{4-misol,} \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-}$$

ketlik monoton o'suvchi va chegaralangan.

Nyuton binomi formulasidan foydalanib topamiz:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

yoki

$$x_n = 2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki:

$$2 < x_n = 2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Demak, x_n ketma-ketlik chegaralangan $2 < x_n < 3$.

Unda 3^0 -xossaga asosan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \exists$. Bu limit ye deb belgilanadi va ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

tenglikka ikkinchi **ajoyib limit** deb ataladi. ye-irratsional son bo'lib, $e \approx 2,718281\dots$ taqribiy tenglik o'rinli.

e soni asos qilib olingan logarifmlarga **natural logarifmlar** deb ataladi va $\ln x$ kabi belgilanadi.

e soni matematik analiz va uning tatbiqida muhim o'rin tutadi.

Misol uchun radioaktiv elementlarning xossalaridan biri uning yemirilishidir. Faraz qilaylik, $t=0$ da radiyning miqdori m_0 bo'lsin. t vaqt o'tgandan so'ng radiy miqdori x ga teng bo'lsin. U holda radiyning yemirilish qonuni quyidagicha:

$$x = m_0 e^{-kt}$$

k-bu yerda proportsionallik koeffitsenti.

Nazorat savollari.

1. Sonli ketma-ketliklar. Misollar.
2. Monoton ketma-ketliklar. Misollar.
3. Ketma-ketlik limitining xossalari.
4. ye-soni.

2-§. Sonli qatorlar.

1. Sonli qatorlar.

Ketma-ketliklar nazariyasida maxsus ko'rinishdagi ketma-ketliklar, qatorlar muhim ahamiyatga ega.

1-Tahrif. Aytaylik, $\{a_n\}$ - haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. U holda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

ifoda **sonli qator** deb ataladi.

a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) son qator hadlari, a_n qatorning **umumiy hadi** deyiladi.

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (2).$$

Yig'indilarni tuzamiz. Bu yig'indilar qatorning **qisman yig'indilari** deyiladi.

2-Tahrif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (1) qatorning qisman yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

bo'lsa, u holda (1)- qator **yaqinlashuvchi** deyiladi. Aks holda, yahni limiti cheksiz yoki limit mavjud bo'lmasa (1) qator **uzoqlashuvchi** deyiladi.

S son (1) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

1-misol.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Qatorning qisman yig'indisi tahrifga ko'ra:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

S_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$n \rightarrow \infty$ da limitga o'tamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi, uning yig'indisi 1 ga teng.

2-misol. $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Mahlumki, arifmetik progressiyaning dastlabki n ta hadining yig'indisini hisoblash formulasidan foydalanib, berilgan qatorning qisman yig'indisi quyidagiga teng ekanini topamiz:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty,$$

demak, qator uzoqlashuvchi.

1-Teorema (qator yaqinlashishi uchun Koshi kriteriyasi).

(1) qator yaqinlashishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n \geq n_0$ va $m \geq n_0$ lar uchun

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon \quad (3)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Natija 1. Agar sonli qatorning chekli sondagi hadlari o'zgartirilsa, u holda asl qatorning yaqinlashishidan (uzoqlashishidan) hosil bo'lgan yangi qator ham yaqinlashadi (uzoqlashadi).

Natija 2. (1) qatorning yaqinlashishi uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

tenglikning bajarilishi zarur.

Isbot. (3) shartni $m = n + 1$ bo'lganda qarash yetarli:

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Bu tengsizlikdan quyidagi kelib chiqadi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0 \text{ yoki } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Shunday qatorlar borki $n \rightarrow \infty$ da $a_n \rightarrow 0$, lekin qator uzoqlashuvchi.

3-misol.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

qatorga **garmonik qator** deyiladi, chunki bu nom quyidagi shartning bajarilishi bilan bog'langan.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right),$$

bu yerda a_n a_{n-1} va a_{n+1} orasidagi **o'rta garmonik** deyiladi.

2. Musbat hadli qatorlar. Solishtirish teoremlari.

3-Tahrif. Agarda $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator **absolyut yaqinlashadi** deyiladi.

2-Teorema. Agar qator *absolyut yaqinlashsa, u holda qator yaqinlashadi.*

Isbot. Quyidagi tengsizlik:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m|,$$

va Koshi kriteriyasidan teoremaning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

3-Teorema.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

manfiy bo'lmagan hadlardan iborat qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qisman yig'indilaridan iborat ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremadan foydalanib quyidagi solishtirish teoremasini hosil qilamiz.

4-Teorema. Faraz qilaylik, hadlari manfiy bo'lmagan ikkita qator berilgan bo'lsin:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (A),$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (B).$$

Agar shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ nomer topilsaki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$a_n \leq b_n$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

1) (B) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (A) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) (A) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (B) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-misol.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (4),$$

qatorni solishtirish alomatidan foydalanib yaqinlashishga tekshiramiz.

Ushbu

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots \quad (5),$$

qatorni yaqinlashishga tekshirish oson.

$$S_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Demak, qator yaqinlashadi. Bundan va ushbu

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

tengsizlikdan solishtirish teoremasiga ko'ra (4) qator yaqinlashadi.

5-Teorema (Absolyut yaqinlashuvchi qator uchun Veyershtas alomati). Faraz qilaylik (A) va (B) qatorlar berilgan

va (B) qator yaqinlashuvchi (A) ixtiyoriy qator bo'lsin.

Agar shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ nomer topilsaki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|a_n| \leq b_n$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda (A) qator absolyut yaqinlashadi.

5-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ qator absolyut yaqinlashadi, chunki

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{uchun} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{qator yaqinlashadi.}$$

3. Yaqinlashish alomatlari.

Koshi alomati. Agar (A) qatorning umumiy hadi a_n uchun biror $n_0 \in \mathbb{N}$ nomerdan boshlab, barcha $n \geq n_0$ lar uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \left(\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \right)$$

o'rinli bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

Amaliy masalalarni hal qilishda ko'pincha, Koshi alomatining quyidagi limit ko'rinishidan foydalaniladi.

Agar Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $k < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $k > 1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

6-misol.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

qatorni Koshi alomatidan foydalanib yaqinlashishga tekshiring.

$$a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

bo'ladi. $\frac{1}{e} < 1$ bo'lgani uchun Koshi alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

Dalamber alomati. Agar (A) qatorning a_n va a_{n+1} ($n \geq n_0$) hadlari uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$$

bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \geq 1$$

bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Dalamber alomatini ham limit ko'rinishida ifodalash mumkin.
Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $q < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $q > 1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

7-misol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

qatorni Dalamber alomatidan foydalanib yaqinlashishga tekshiring.

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Shunday qilib, $q < 1$ va qator yaqinlashadi.

4-Tahrif.

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots \quad (6)$$

ko'rinishda bo'lib, $a_n > 0$ bo'lsa, u holda bunday qatorga **hadlarining ishorasi almashinib keluvchi qator** deyiladi.

6-Teorema (Leybnits alomati). Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

qator berilgan bo'lib,

$$1) \{a_n\} \downarrow, \text{ yahni } a_n \geq a_{n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

bo'lsa, u holda (6) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

8-misol.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Berilgan qatorning hadlari absolyut qiymat bo'yicha monoton kamayadi:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots,$$

uning umuiy hadi esa $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0.$$

Qator Leybnits alomatiga ko'ra yaqinlashadi.

Nazorat savollari.

- 1) Sonli qator deb nimaga aytiladi va u qachon yaqinlashadi.
- 2) Qator yaqinlashishi uchun Koshi kriteriyasi.
- 3) Musbat hadli qatorlar.
- 4) Solishtirish teoremlari. Misol.
- 5) Yaqinlashish alomatlari (Koshi, Dalamber va Leybnits).

3-§. Funktsiya limiti.

Ushbu

$$U_{\varepsilon}(a) = \{x : x \in R, \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam $x = a$ nuqtaning **atrofi** (ε - **atrofi**) deb ataladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya biror X oraliqda aniqlangan bo'lib, $x = a$ nuqta biror X oraliqning limit nuqtasi bo'lsin yahni a nuqtaning ixtiyoriy $U_{\varepsilon}(a)$ atrofi olinganda ham $U_{\varepsilon}(a) \setminus \{a\}$ to'plamda X ning kamida bitta nuqtasi mavjud bo'lsin.

1-tahrif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists \delta(\varepsilon, a) = \delta > 0 :$
 $\forall x \in X \cap \{0 < |x - a| < \delta\},$ uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa,

u holda b soni $f(x)$ funktsiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti deb ataladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ kabi belgilanadi.

1-misol. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ ushbu tenglikni tahrif

yordamida isbotlang.

$$f(x) = 2x + 3, \quad b = 5, \quad a = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ olamiz.}$$

$$|f(x) - b| = |2x + 3 - 5| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

2-tahrif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists E > 0 : \quad \forall |x| > E$
 $|f(x) - b| < \varepsilon$

bo'lsa, unda $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ deb ataladi.

2-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$ ushbu tenglikni tahrif
yordamida isbotlang.

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad b = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ olamiz,}$$

$$|f(x) - b| = \left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| = \frac{1}{|x-1|} = (|x| > E \Rightarrow |x-1| > E-1) < \frac{1}{E-1} = \varepsilon \Rightarrow E = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

. Bundan kelib chiqadiki $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1.$

3-tahrif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad (\infty)$ bo'lsa, unda $x \rightarrow a$ da
 $f(x)$ funktsiya **cheksiz kichik (katta) funktsiya** deb ataladi.

Masalan, $x \rightarrow 1$ da $f(x) = x - 1$ cheksiz kichik, $\varphi(x) = \frac{1}{x-1}$
funktsiya esa **cheksiz katta funktsiya** bo'ladi.

Xossalar:

1⁰. $\alpha_1(x)$ va $\alpha_2(x)$ funktsiyalar cheksiz kichik bo'lsa, unda
 $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2⁰. O'zgarmas sonni cheksiz kichikka ko'paytmasi cheksiz kichik
bo'ladi.

3⁰. Chegaralangan funktsiyaning cheksiz kichik funktsiyaga
ko'paytmasi yana cheksiz kichik bo'ladi.

4⁰. Chekli sondagi cheksiz kichiklarning ko'paytmasi cheksiz kichik
bo'ladi.

5°. Agar $f(x)$ cheksiz katta bo'lsa, unda $\frac{1}{f(x)}$ cheksiz kichik bo'ladi. ($f(x) \neq 0$).

6°. $\alpha(x)$ cheksiz kichik bo'lsa, unda $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta bo'ladi ($\alpha(x) \neq 0$).

Endi funktsiyaning limiti haqidagi asosiy teoremlarni keltiramiz.

1-teorema. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lishi uchun

$f(x) = b + \alpha(x)$ bo'lishi zarur va yetarlidir, bu yerda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funktsiya.

Isbot. Zaruriyligi: faraz qilaylik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lsin.

Bu degani

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

yahni $\alpha(x) = f(x) - b$ funktsiya cheksiz kichik miqdor va $f(x) = b + \alpha(x)$.

Etarliligi: faraz qilaylik $f(x) = b + \alpha(x)$, bu yelda $\alpha(x)$ -cheksiz kichik miqdor. U holda $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, $0 < |x - a| < \delta$ dan olingan x lar uchun $|\alpha(x)| = |f(x) - b| < \varepsilon$ o'rinli, yahni b soni $f(x)$ funktsiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti.

2-teorema. Agar $\forall x \in U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ uchun $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$) bo'ladi.

Isloh. Agar 2-teoremada qat'iy tengsizlik qo'yilsa, u o'rinli bo'lmay qolishi mumkin. Masalan, $f(x) = |x|$ va $a = 0$

bo'lsin. $\forall x \in U_\delta(0)$ uchun $f(x) > 0$ va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \exists$, lekin $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

3-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada chekli limitga ega bo'lsa, u holda shu nuqtada

$$a) f(x) \pm g(x),$$

$$b) f(x) \cdot g(x),$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

bo'lganda, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyalar ham chekli limitga ega bo'lib,

ushbu

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right).$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

$$1\text{-natija.} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

$$2\text{-natija.} \quad \lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

4-teorema. Agar a nuqtaning biror atrofida $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'ladi.

Isbot. Teorema shartidan a nuqtaning $0 < |x - a| < \delta$ atrofida bir vaqtning o'zida quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$|f_1(x) - b| < \varepsilon, \quad |f_2(x) - b| < \varepsilon,$$

bu yerda ε - ixtiyoriy musbat son. Bundan quyidagini yozib olamiz:

$$b - \varepsilon < f_1(x) < b + \varepsilon, \quad b - \varepsilon < f_2(x) < b + \varepsilon.$$

Bu tengsizliklardan quyidagini yozib olamiz:

$$b - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < b + \varepsilon.$$

Yuqoridagi tengsizliklardan

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \quad \text{yoki} \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

kelib chiqadi.

$$\text{Ushbu, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{limitlarga mos}$$

ravishda birinchi va ikkinchi **ajoyib limitlar** deyiladi. Bu limitlar limit hisoblashda, $\frac{0}{0}$ va 1^∞ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda keng qo'llaniladi.

$$\text{3-misol. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} \quad \text{limitni toping.}$$

$x \rightarrow 0$ da limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishga keladi. Aniqmaslikdan qutilish uchun kasr suratini qo'shmasiga ko'paytirib bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x})(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x-4-x}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

4-misol

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0.$$

5-misol.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2} \right]^{\frac{x}{-x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{x^2}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

6-misol.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ [1 + (-\sin x)]^{\frac{1}{\sin x}} \right\}^{\frac{\sin x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sin x}{x^2} \right)} = \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}} = e^{-1 \cdot 0} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

7-misol.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^{\frac{\operatorname{tg} x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 - \cos^2 x)^{\frac{-1}{\cos^2 x}} \right]^{\frac{\cos^2 x \operatorname{tg} x}{2}} = \\ &= e^{-\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \sin x} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Nazorat savollari.

1. Funktsiya limiti.
2. Cheksiz katta (kichik) funktsiyalar.
3. Funktsiya limitining xossalari.
4. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.

4-§. Funksiyaning uzluksizligi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, x nuqta shu intervalga (atrofga) tegishli nuqta bo'lsin.

$x - x_0 = \Delta x$ deb belgilaymiz $\Rightarrow$

$x = x_0 + \Delta x$, Δx - argument orttirmasi.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - funktsiya orttirmasi.

1-tahrif: Agar $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ bo'lsa, unda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

2-tahrif: Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

Misollar: 1) $y = x$, 2) $y = x^3$, 3) $y = \sin x$ funksiyalar $\forall x_0 \in R$ nuqtalarda uzluksiz.

1-teorema: Agar $f(x), g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

1) $f(x) \pm g(x)$, 2) $f(x) \cdot g(x)$, 3) $f(x)/g(x)$ ($g(x) \neq 0$),

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema: Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida bir xil ishorani saqlaydi, $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) bo'lsa, $\exists U_\delta(x_0)$ atrof: $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$$

bo'ladi.

3-tahrif: Funksiyaning uzluksizligi buziladigan nuqtalarga uning **uzilish nuqtalari** deb ataladi.

Uzilish nuqtalari uch turga bo'linadi:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$ bo'lsin.

Bu holda $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ va $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$ Lar mavjud bo'lib, $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$ bo'ladi. Bunday nuqta bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi deb ataladi.

Misol.
$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ azap} & x \neq 0 & \text{булса} \\ 1, \text{ azap} & x = 0 & \text{булса} \end{cases}$$

Funksiya uchun $x = 0$ nuqta bartaraf qilish mumkin bulgan uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = 0$ va $f(0) = 1$. Agar $f(0) = 0$ deb qabul qilsak, funksiya uzluksiz bo'lib qoladi.

2) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ — mavjud bo'lmasin.

Bunda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin.

a) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$ va $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ lar mavjud va $f(a-0) \neq f(a+0)$.

Funksiyaning bunday nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilish va $|f(a-0) - f(a+0)|$ ayirmaga funksiyaning a nuqtadagi sakrashi deyiladi.

b) $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlaridan hech bo'lmaganda biri mavjud bo'lmasin. Funksiyaning a nuqtadagi bo'nday uzilishi ikkinchi tur uzilish deyiladi.

Misol.
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, \text{ azap} & x > 0 \\ -x, \text{ azap} & x \leq 0 \end{cases}$$

Funksiya $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-x) = 0 = f(0), \quad \text{lekin}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} - \text{mavjud emas.}$$

v) $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlaridan biri cheksiz yoki o'ng va chap limitlar turli ishorali cheksiz. Funksiyaning a nuqtadagi bo'nday uzilishi ham ikkinchi tur uzilish deyiladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$) bo'lsa, unda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtalarda **chapdan (o'ngdan) uzluksiz** deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, (a, b) intervalda uzluksiz hamda a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada **uzluksiz** deb ataladi va $f(x) \in C[a, b]$ kabi belgilanadi.

Endi kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalarini keltiramiz:

1^o. Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida turli ishoralarni qabul qilsa, $\exists c \in (a, b)$ nuqtalarda $f(c) = 0$ bo'ladi.

2^o. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow f(x)$ - chegaralangan, ya'ni $\exists M$ son: $\forall x \in [a, b]$ uchun $|f(x)| \leq M$ bo'ladi.

3^o. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a, b]$ nuqtalar: $f(x_1)$ va $f(x_2)$ lar mos ravishda $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari bo'ladi.

Izoh. Xossalardagi oraliqlarning yopiq kesmadan iborat bo'lishlik sharti muhim shartdir.

Masalan, **2^o** – xossada oraliq $(0, 1)$ intervaldan iborat bo'lib, $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsin. $f(x) = \frac{1}{x} \in C(0, 1)$, lekin funksiya $(0, 1)$ oraliqda chegaralangan emas.

Uzluksiz funksiyaning biologik masalalarda qo'llanilishi.

Bahzi biologik hodisalar uzluksiz va uzilishga ega bo'lgan funksiyalar yordamida ifodalanadi.

Shuni tahkidlash kerakki eshitish, ko'rish, ulg'ra tovushlarni eshitish tebranma harakatlar bilan bog'langan bo'lib, bu harakatlar $\sin x$, $\cos x$ kabi trigonometrik funktsiyalar yordamida ifodalanadi.

Aniq tajribalarda populyatsiya biomassasi, populyatsiya miqdori, yo'l, temperatura, vaqt va hokazolar har qanday haqiqiy sonlarni qabul qilmasligi mumkin. Masalan, yo'l kilometr yoki millimetrdan, biomassa tonnada yoki milligrammda, vaqt yillar yoki o'ndan bir sekundlarda o'lchanadi. SHartli ravishda kelishilganda keltirilgan funktsiyalarning qiymatlar va aniqlanish sohalari oraliqlar bo'lmasdan, balki juda kichik maxsus to'plamlardir. Juda katta hayvonlarning yoshi yillar bilan, bahzi mikroorganizmlarning yoshi sekundning o'ndan biri bilan o'lchanadi. Mikroorganizmlar 3,1 yoki 3,2 sekund yashaydi deya olishimiz mumkin, lekin π sekund yashadi deb ayta olmaymiz. Bunday funktsiyalar to'g'risida gapirganda uzluksiz funktsiya haqida gapirib bo'lmaydi. Matematik analiz tushunchalaridan foydalanganda funktsiyaning aniqlanish sohasi ikkita elementdan iborat bo'lsa uni oraliq bilan almashtirish maqsadga muvofiq emas. Biroq funktsiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi cheklita, lekin qandaydir mahnoda yetarlicha katta miqdordagi bir-biriga yaqin joylashgan elementlardan iborat bo'lsa (yahni o'lchami juda kichik oraliqlarga bo'lingan bo'lsa), u holda bo'nday funktsiyaning Aniqlanish sohasini shartli ravishda oraliq bilan almashtirsa bo'ladi. Bu keltirgan izoh uzluksiz funktsiyadan foydalanish uchun keltirilgan matematik modeldir. Qaralayotgan funktsiyalarni uzluksiz deb faraz qilamiz va bundan buyon bu haqda eslatmaymiz.

Biologiyada uzluksiz funktsiyaga doir misolni qaraymiz. Hujayralar bo'linishidagi mikroorganizmlar o'sishini o'rganayotganda $f(t) = ae^{kt}$ kabi funktsiyalarga duch kelamiz (bu yerda argument t vaqtni aniqlaydi).

Darajali funktsiya $f(x) = Ax^\alpha$ - hayvon og'irligidan asosiy intensiv almashinuvning bog'liqligini ifodalaydi. Bu yerda x -hayvon og'irligi, $f(x)$ - birlik vaqt ichida yutiladigan kislorod miqdori, A va α - tirik mavjudotning turiga qarab

aniqlanadigan o'zgarmas parametrlar. Misol uchun qushlarda $A = 70$, $\alpha = 0,74$ ga, baliqlarda $A = 0,3$ $\alpha = 0,8$ ga teng.

Uzilishga ega bo'lgan funksiya uchun misol keltiramiz. Tashqi tahsirdan qo'zg'aladigan ho'jayralarni qaraylik. Misol uchun nerv hujayralari, mushak hujayralari va boshqalar. t_0 vaqtda hujayra signal qabul qiladi. Biroq tahsir birmuncha keyinroq bo'ladi, yahni $t_1 > t_0$. $[t_0; t_1]$ kesma latent davri deyiladi. t_1 vaqtda hujayra oniy qo'zg'aladi va eng yuqori qiymatga erishadi, so'ngra asta sekin kamayib toki boshqa tahsir bo'lmaguncha nolga yaqinlashib boradi.

Shunday qilib harakat miqdorining funksiyasi t ga bog'liq bo'lib, latent davrining oxirida uzilishga ega bo'lar ekan.

Nazorat savollari.

1. Funksiya uzluksizligining tahrifi.
2. Funksiya uzilish nuqtalari.
3. Uzluksiz funksiyalarning xossalari.
4. Uzluksiz funksiyaning biologik masalalarda qo'llanilishi.

5-§. Hosila. Elementar funksiyalarning hosilalari.

Tabiatdagi ko'p masalalar hosila tushunchasiga olib keladi. Masalan, harakatdagi nuqtaning tezligi haqidagi masala, egri chiziqqa o'tkazilgan urinma masalasi va boshqalar.

Ximik reaksiya tezligi haqidagi masala. Aytaylik $m = m(t)$ funksiya berilgan bo'lsin, bu yerda m — t vaqtdagi ximyoviy reaksiyaga kirishgan modda miqdori. Δt orttirmaga m miqdorning Δm orttirmasi mos keladi. $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ nisbat

Δt vaqtdagi ximik reaksiyaning o'rtacha tezligi. Bu nisbatning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti t vaqtdagi ximik reaksiya tezligini beradi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funktsiya (a, b) oraliqda aniqlangan bo'lib,

$$\exists \Delta x \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} 0$$

$x \in (a, b)$ bo'lsin. x nuqtaga orttirma beraylikki, $x + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Unda funktsiya ham $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirma qabul qiladi.

Agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

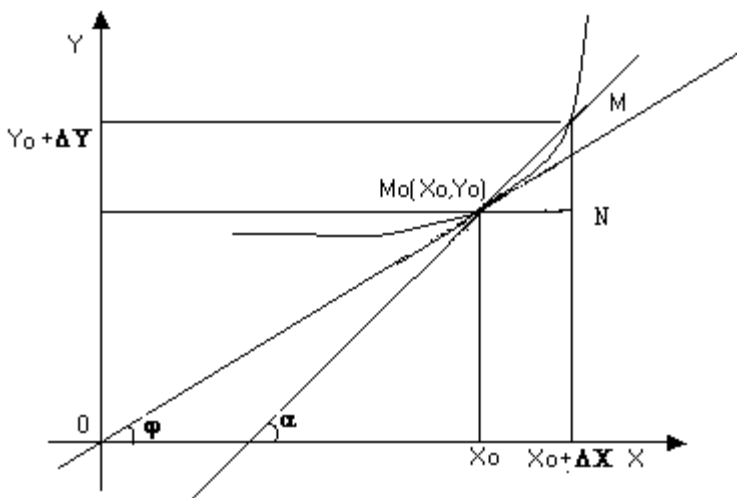
mavjud bo'lib, chekli songa teng bo'lsa, shu songa $y = f(x)$ funktsiyaning x **nuqtadagi hosilasi** deb ataladi va u $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, y' - kabi belgilanadi.

Shunday qilib,

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Misollar. 1) $(C)' = 0$, 2) $(x)' = 1$, 3) $(x^3 - 1)' = 3x^2$

Hosilaning geometrik mahnosi.



Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\angle MM_0N = \alpha$$

$$tg\alpha = \frac{MN}{M_0N} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (3) - \text{urinma tenglamasi.}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (4) - \text{normal tenglamasi.}$$

1-teorema: Agar $y = f(x)$ funksiya biror x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu x nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Izoh. Teoremaning teskarisi har doim ham o'rinli bo'lavermaydi. Masalan, $y = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz, lekin differentsiallanuvchi emas.

CHunki,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ agar } \Delta x > 0 \\ -1, \text{ agar } \Delta x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0)$$

mavjud emas.

2-teorema. Aytaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $x = 0$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib, chekli $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

Unda,

$$\begin{aligned} 1) [u \pm v]' &= u' \pm v', \\ 2) [u \cdot v]' &= u'v \pm uv', \\ 3) \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0) \end{aligned}$$

bo'ladi.

Natija: $[C \cdot f(x)]' = C \cdot f'(x)$.

3-teorema. Aytaylik $y = f(u)$ bo'lib, $u = \varphi(x)$ bo'lsin. Agar $u = \varphi(x)$ funktsiya x nuqtada $\varphi'(x)$ hosilaga, $y = f(u)$ funktsiya esa x nuqtaga mos $u = \varphi(x)$ nuqtada $\varphi'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ murakkab funktsiya ham x nuqtada hosilaga ega bo'ladi va

$$y' = F'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad (5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(5) – tenglikka **murakkab funktsiyaning hosilasini hisoblash formulasi** deyiladi.

Endi $y = f(x)$ funktsiya va unga teskari bo'lgan $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ funktsiyalar berilgan bo'lsin.

4-teorema: Agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ funktsiyalar differentsiallanuvchi bo'lsa, unda $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ yoki $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ (6)

formulalar o'rinli bo'ladi.

2 – 4 – teoremlarni qo'llash natijasida quyidagi hosilalar jadvalini hosil qilamiz.

- | | |
|--|--|
| 1) $(C)' = 0$, | 11) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, |
| 2) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, | 12) $(\sin u)' = u' \cos u$, |
| 3) $(u + v)' = u' + v'$, | 13) $(\cos u)' = -u' \sin u$, |
| 4) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, | 14) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$, |
| 5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, | 15) $(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$, |
| 6) $(x'_y)' = \frac{1}{y'_x}$, | 16) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, |

$$7) (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \quad 17) (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$8) (a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a, \quad (a > 0) \quad 18) (\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2},$$

$$9) (e^u)' = e^u \cdot u', \quad 19) (\operatorname{arccctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

$$10) (\log_a u)' = \frac{u'}{u}, \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Bu jadvalda $u = u(x)$ va $v = v(x)$ lar differentsiallanuvchi funktsiyalar.

Agar funktsiya orttirmasini ushbu,

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = A(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x \quad (7)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lib, bu yerda A - o'zgarmas son va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$ bo'lsa unda $y = f(x)$ funktsiya x nuqtada

differentsiallanuvchi deyiladi va $A \cdot \Delta x$ ga funktsiya orttirmasining **chiziqli bosh qismi** deyiladi, hamda $df(x)$ kabi belgilanadi.

(7) tenglikdan, $df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Agar bu tenglikda $\Delta x = dx$ desak, u holda

$$df(x) = f'(x) dx \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(7) va (8) dan

$$\Rightarrow \Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (dy + \alpha \cdot \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} dy \Rightarrow \Delta y \approx dy = f'(x) \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

(9)

(9) – taqribiy hisoblash formulasi.

1-misol. $\sqrt[3]{1,1}$ ni hisoblang.

Funktsiyaning $f(x) = \sqrt[3]{x}$ deb, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x = 1$, $\Delta x = 0,1$

kabi olamiz. (9) formuladan foydalanamiz:

$$\sqrt[3]{1,1} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot 0,1 = 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 1,033.$$

Jadvalga ko'ra $\sqrt[3]{1,1} \approx 1,032$ ga teng.

$y = f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $y' = f'(x)$ dan olingan hosilaga (agar u mavjud bo'lsa) $y = f(x)$ funksiyaning **ikkinchi tartibli hosilasi** deb ataladi va

$$y'', f''(x), \frac{d^2 f}{dx^2}$$

belgilarining biri yordamida belgilanadi. Funktsiyaning n – tartibli hosilasi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$y^{(n)} := \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

Funktsiyaning yuqori tartibli differentsiallari ham shu kabi aniqlanadi.

Nazorat savollari.

1. Funktsiya hosilasining tahrifi.
2. Hosilaning geometrik mahnosi.
3. Hosila jadvali.
4. Hosila yordamida taqribiy hisoblash.

6-§. Differentsial hisobning asosiy xossalari.

1-teorema. (Ferma): Agar (a, b) da berilgan $y = f(x)$ funksiya shu intervalning birorta ichki s nuqtasida eng katta yoki eng kichik qiymatiga erishsa va $f'(c) = 0$ bo'lsa, unda $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya s nuqtada $(c \in (a, b))$ o'zining eng katta qiymatiga erishsin. s qiymatga yetarlicha kichik Δx orttirma beramiz. U holda $f(c + \Delta x) < f(c)$. Agar $\Delta x < 0$ bo'lsa,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0 \quad \text{va} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \geq 0 \quad (1).$$

bo'ladi. Agar $\Delta x > 0$ bo'lsa $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ va

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \leq 0 \quad (2)$$

bo'ladi. (1) va (2) lardan $f'(c) = 0$ kelib chiqadi.

Bu teoremaning geometrik mahnosi funksiya grafigining $(c; f(c))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma OX o'qiga parallel bo'ladi.

Izoh. Teoremaning barcha shartlari muhim. Misol uchun $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ segmentda $y = \sin x$ funksiya $x_0 = 0$ eng kichik qiymatga erishadi, lekin funksiyaning hosilasi shu nuqtada birga teng.

2-teorema (Rollg'): Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $f(x) \in C[a, b]$
- 2) $\forall x \in (a, b)$ uchun $f'(x) \neq 0$
- 3) $f(a) \neq f(b)$

U holda $\exists c \in [a, b]$ nuqta: $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Izoh. Rollg' teoremasining shartlari ham muhim. $x = 0$ nuqtadan tashqarida $f(x) = |x|$ funksiya $-1 \leq x \leq 1$ da teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. $(-1; 1)$ oraliqda birorta ham nuqta yo'qki hosilasi 0 ga teng bo'lsa: $(-1; 0)$ da

$f'(x) = -1$, $(0;1)$, $f'(x) = 1$ ga teng. $x = 0$ da funktsiya hosilaga ega emas.

3-teorema (Lagranj): $[a,b]$ da aniqlangan $y = f(x)$ funktsiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$1) \quad f(x) \in C[a,b],$$

$$2) \quad \forall x \in (a,b) \text{ uchun } f'(x) \neq 0.$$

Unda $\exists c \in [a,b]$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (3)$$

bo'ladi.

Agar Lagranj teoremasida $f(a) = f(b)$ bo'lsa, unda $f'(c) = 0$ bo'ladi, yahni Lagranj teoremasidan Rollg' teoremasi kelib chiqadi.

Natija: Agar (a,b) da $f'(x) = 0$ bo'lsa, unda shu intervalda $f(x) = \text{const}$ bo'ladi.

4-teorema (Lopitalg' qoidasi): Faraz qilamiz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

(∞) va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (∞) bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \exists$ bo'lsin.

U holda,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (4)$$

bo'ladi.

Izoh: Boshqa barcha aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltirish yordamida yechiladi.

1-misol.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} = \ln 2.$$

2-misol.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}.$$

3-misol.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = -\frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Nazorat savollari.

1. Ferma teoremasi.
2. Rollg' teoremasi.
3. Lagranj teoremasi.
4. Lopitalg' qoidasi.

7-§. Funksiyani to'liq tekshirish va uning grafigini yasash.

1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funktsiya (a, b) intervalda berilgan bo'lsin. Agar shu intervaldan olingan ixtiyoriy $x_2 > x_1$ uchun $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$) bo'lsa, unda $f(x)$ funktsiya (a, b) oraliqda **o'suvchi (kamayuvchi)** deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funktsiyalarga **monoton funktsiyalar** deb ataladi. Monoton funktsiyalar hayotda ko'p uchraydi. Masalan, o'sayotgan daraxtning bo'yi, yetilayotgan donning og'irligi-vaqtning o'suvchi funktsiyalari; yorug'lik manbaidan mahlum masofadagi yoritilganlik – masofaning kamayuvchi funktsiyasi bo'ladi.

1-teorema: Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da differentsiallanuvchi bo'lib, kamayuvchi (o'suvchi) bo'lmasa, u holda (a,b) oraliqda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bo'ladi.

2-teorema: Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differentsiallanuvchi bo'lib, $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) shartni qanoatlantirsa, u holda (a,b) oraliqda funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Misollar.

- 1) $y = e^x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ da o'suvchi, chunki $\forall x \in R$ uchun $y' = e^x > 0$.
- 2) $y = x^2$ funksiya uchun $y' = 2x \Rightarrow x^2$ funksiya $[-\infty; 0]$ da kamayuvchi va $[0; +\infty)$ da o'suvchi.

2. Funksiyaning ekstremumlari.

Agar x_0 nuqtaning $\exists \cup_{\delta}(x_0)$ atrofi; $\forall x \in \cup_{\delta}(x_0)$ uchun $f(x) < f(x_0), (f(x) > f(x_0))$ tengsizlik bajarilsa, unda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal **maksimumga (minimumga) erishadi** deyiladi va $f(x_0)$ qiymatga funksiyaning $\cup_{\delta}(x_0)$ atrofdagi **maksimum (minimum) qiymati** deb ataladi, hamda u

$$\max_{\cup_{\delta}(x)} \{f(x)\}, \quad \min_{\cup_{\delta}(x)} \{f(x)\}$$

kabi belgilanadi.

1-teorema: (Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti).

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differentsiallanuvchi bo'lib, x_0 ($a < x < b$) nuqtada ekstremumga erishsa, u holda $f'(x_0) = 0$, bo'ladi.

Izoh: $f(x) = x^3$ funksiya uchun $x = 0$ nuqtada $f'(x) = 0$ lekin bu nuqtada funksiya ekstremumga erishmaydi, funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lishi yetarli bo'lmay, zaruriy shart ekan.

2-teorema: (Etarli shart). Agar $f'(x_0)=0$ bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tganda ishorasini musbatdan (manfiydan) manfiyga (musbatga) o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi. Agar x_0 nuqtadan o'tganda ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Misollar.

1) $f(x) = e^x - x$, $f'(x) = e^x - 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	kamayuvchi	min	o'suvchi

$$y_{\min} = f(0) = e^0 - 0 = 1$$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	o'suvchi	max	kamayuvchi	min	o'suvchi

$$y_{\max} = y(-1) = 4, \quad y_{\min} = y(1) = 0$$

3-teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqta va uning atrofida uzluksiz hamda $f'(x), f''(x) \in C\{x_0\}$ bo'lib, $f'(x) = 0, f''(x) \neq 0$ bo'lsin. Agar, $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga (maksimumga) erishadi.

Izohlar:

1) Funksiya hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtada ham ekstremumga erishishi mumkin. Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya uchun $f'(0)$ mavjud emas, lekin funksiya $x = 0$ nuqtada minimumga erishadi.

2) Shuningdek funktsiyaning hosilasi ∞ ga aylanadigan nuqtada ham funksiya ekstremumga erishishi mumkin. Masalan, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ funksiya uchun $f'(0) = \infty$ bo'lsa ham shu nuqtada funksiya min ga erishadi.

3. Funksiyaning botiq va qavariqligi. Burilish nuqtasi.

Faraz qilaylik, (a, b) oraliqda differentsiallanuvchi $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Unda bu funksiya grafigining ixtiyoriy nuqtasidan urinma o'tkazish mumkin. Agar har doim urinma grafikdan pastda (yuqorida) joylashgan bo'lsa, unda funksiya (a, b) oraliqda **botiq (qavariq)** deb ataladi. Funksiya grafigi o'z botiqligi yoki qavariqligini o'zgartiradigan nuqtaga esa **egilish nuqtasi** deyiladi.

5-teorema. Agar (a, b) oraliqda $f''(x) > 0 (< 0)$, bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigi (a, b) oraliqda botiq (qavariq) bo'ladi.

4. Funksiyaning asimptotalari.

a) Vertikal asimptota. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ bo'lsa, $x = a$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

b) Gorizontal asimptota. Agar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ bo'lsa, $y = b$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota bo'ladi.

v) Og'ma asimptota. Agar $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ bo'lsa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'ladi.

To'g'ri chiziqning parametrlari ushbu,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

tengliklar yordamida topiladi.

Endi funksiya grafigini yasashga o'tish mumkin.

U quyidagi sxema asosida bajariladi:

- 1) *Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.*
- 2) *Funksiyaning juft-toqligini aniqlash.*
- 3) *Funksiyaning davriyligini aniqlash.*
- 4) *Funksiyaning uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish.*
- 5) *Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish.*
- 6) *Monotonlik oraliqlarini aniqlash.*
- 7) *Ekstremumga tekshirish.*
- 8) *Botiq va qavariqlikka tekshirish.*
- 9) *Funksiyaning asimptotalarini topish.*
- 10) *Funksiya grafigini chizish.*

Misollar.

$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

1. Funktsiya $x = 1$ nuqtadan tashqari barcha sonlar o'qida aniqlangan.

2. $f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x-1)^2} \neq f(x)$ va $f(-x) \neq f(x)$ demak funktsiya

toq ham emas, juft ham emas.

3. Funktsiya davriy emas.

4. $x = 1$ nuqtada II-tur uzilishga ega.

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty$ qolgan nuqtalarda funktsiya uzluksiz.

5. $x = 1$ funksiyaning vertikal asimptotasi $y = 0$ gorizontal

asimptotasi, yahni $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 0$

Og'ma asimptotasini topamiz.

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 0, \text{ u}$$

holda $k = 0$,

$$b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0, \text{ u holda } b = 0.$$

Bundan kelib chiqadiki $y = kx + b$ og'ma asimptota yo'q.

$$6. \quad y' = -\frac{2x}{(x-1)^2} \quad \text{funksiya aniqlanish sohasini quyidagi}$$

oraliqlarga bo'lamiz: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. $(-\infty; 0)$ oraliqlarda funksiya kamayadi. $(0; 1)$ oraliqda esa funksiya o'sadi. $(1; +\infty)$ oraliqda funksiya kamayadi.

7. $x = 0$ nuqtada funksiya aniqlangan va uzluksiz, $y'(x)$ hosila ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, u holda funksiya, bu nuqtada $y_{\min} = y(0) = -1$ erishadi.

8. Funksiya botiq va qavariqligini tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilani olamiz. $y'' = 2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^4}$ funksiyaning aniqlanish sohasini quyidagi oraliqlarga ajratamiz.

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $(1; +\infty)$. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, da $f''(-1) = -\frac{1}{8} < 0$, funksiya qavariq,

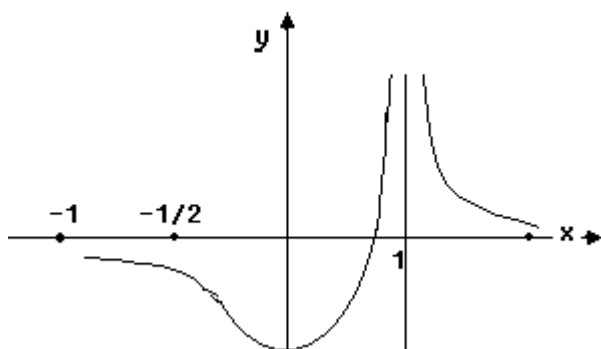
$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ da $f''(0) = 2 > 0$ funksiya botiq, $(1; +\infty)$ oraliqda $f''(0) = 10 > 0$ funksiya botiq. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 1$ nuqtaga o'tishdan o'z ishorasini o'zgartiradi, bundan

kelib chiqadiki, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$ nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

9. Agar $x = 0$ bo'lsa, u holda $y = -1$ va $y = 0$ da $x = \frac{1}{2}$.

Bundan kelib chiqadiki, $(0; -1)$ va $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ nuqtalar funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari.

10. Funksiya grafigi:



Nazorat savollari:

1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi.
2. Funksiyaning ekstremumlari.
3. Funksiyaning botiq va qavariqligi. Burilish nuqtasi.
4. Funksiyaning asimptotalari.

Mustaqil yechish uchun misollar va masalalar.

1-masala. Qatorlarni yaqinlashishga tekshiring va yig'indisini toping.

$$1.1. \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$$

$$j: S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \right)^n, \quad S = \frac{1}{2}.$$

$$1.2. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} + \dots$$

$$j: S_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \quad S = \frac{3}{4}.$$

$$1.3. \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3^2 + 5^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right) + \dots$$

$$j: S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} - \frac{1}{4 \cdot 5^n}, \quad S = \frac{3}{4}.$$

$$1.4. \quad \left(3 + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{18} \right) + \dots + \left(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} \right) + \dots$$

$$j: S_n = \frac{51}{8} - \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{8 \cdot 3^{n-1}}, \quad S = \frac{51}{8}.$$

$$1.5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}.$$

$$j: S_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right), \quad S = \frac{1}{4}.$$

$$1.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 5n - 6}.$$

$$j: S_n = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right), \quad S = \frac{1}{15}.$$

$$1.7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5}.$$

$$j: S_n = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6n+1} \right), \quad S = \frac{1}{6}.$$

$$1.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2 + 7n - 12}.$$

$$\mathbf{j:} \quad S_n = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7n+4} \right), \quad S = \frac{1}{28}.$$

$$1.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

$$\mathbf{j:} \quad S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right), \quad S = \frac{3}{4}.$$

$$1.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n - 3}.$$

$$\mathbf{j:} \quad S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right), \quad S = \frac{1}{3}.$$

$$1.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 15}.$$

$$\mathbf{j:} \quad S_n = -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+3} \right), \quad S = -\frac{1}{12}.$$

$$1.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 + 12n - 35}.$$

$$\mathbf{j:} \quad S_n = \frac{2}{21} - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+7} \right), \quad S = \frac{2}{21}.$$

$$1.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$\mathbf{j:} \quad S = \frac{1}{2}$$

$$1.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\mathbf{j:} \quad S = 2$$

$$1.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\mathbf{j:} \quad S = 2$$

$$1.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$\mathbf{j:} \quad S = \frac{1}{3}$$

$$1.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$j: S = 1$$

$$1.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$$

$$j: S = \frac{3}{8}.$$

$$1.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$j: S = \frac{1}{2}.$$

2-masala. Quyidagi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorlarni yaqinlashishga yaqinlashish alomatlaridan foydalanib tekshiring.

$$2.1. a_n = \frac{3^n}{n^n}.$$

$$2.2. a_n = \frac{n!}{10^n}.$$

$$2.3. a_n = \frac{n}{3^n}.$$

$$2.4. a_n = \frac{3^n}{n!}.$$

$$2.5. a_n = \frac{n^3}{3^n}.$$

$$2.6. a_n = \frac{n!a^n}{n^n}, \quad a \neq e, a > 0$$

$$2.7. a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{3^n n!}.$$

$$2.8. a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$2.9. a_n = \frac{100^n}{n!}.$$

$$2.10. a_n = \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}.$$

$$2.11. a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^n.$$

$$2.12. a_n = \left(\frac{100}{n}\right)^n.$$

$$2.13. a_n = 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

$$2.14. a_n = 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}.$$

$$2.15. a_n = \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}.$$

$$2.16. a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

$$2.17. a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2+4n+5}.$$

$$2.18. a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{\sqrt{n^3+3n+1}}.$$

$$2.19. a_n = 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$2.20. a_n = \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{2n}{3}}.$$

3-masala. Quyidagi tengliklar tahrif yordamida isbotlansin :

$$3.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5 - 2}{x + 2} = -7.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 + x - 1}{x + \frac{1}{2}} = -5.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - x - 1}{x - \frac{1}{2}} = 5.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{9x^2 - 1}{x + \frac{1}{3}} = -6.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{3}} = -4.$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - \frac{1}{2}} = 5.$$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} = -1.$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow -\frac{7}{5}} \frac{10x^2 + 9x - 7}{x - \frac{7}{5}} = -19.$$

3.15.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{7}{2}} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\frac{1}{2}.$$

$$3.16. \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \frac{1}{2}.$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^2 + x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 5.$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow -11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23.$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13.$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = \frac{5}{3}.$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8.$$

$$3.27. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - \frac{1}{2}} = -3.$$

$$3.29. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 8.$$

3.18.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 + 75x - 39}{x - \frac{1}{2}} = -81.$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$$

$$3.26. \lim_{x \rightarrow -10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49.$$

$$3.28. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19.$$

$$3.30. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{5}} = -8.$$

4- masala. Fuksiya limiti hisoblansin.

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt[3]{x^2} - 1}$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[8]{x} - 2}$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + x^2 - (1+x)}{x}$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2}$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{16}} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}}$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2} - (1+x)}{\sqrt[3]{x}}$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 4)^2}}$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x^2} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x + 2}$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x + \sqrt[3]{x^4}}$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2} + x^3}$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x+5}}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3\sqrt{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3} + 8}$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

5-masala. Funksiyaning limiti hisoblansin.

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{tg^2 \pi x}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - tg^2 x}{(x - \pi)^4}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$$

$$5.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$$

$$5.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$$

$$5.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{tg \pi x}$$

$$5.17. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x}$$

$$5.19. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{tg \pi x}{x + 2}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{tg 3x}{tg x}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{tg \pi x}$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$$

$$5.12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$$

$$5.14. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$$

$$5.16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln tg x}{\cos 2x}$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctg(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$$

$$5.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$5.30. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{tg 3x}$$

6-masala. Funksiyaning limiti hisoblansin.

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x - 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x) \frac{ctg 2x}{\sin 3x}$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6 - x}{3} \right)^{tg \frac{\pi x}{6}}$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{tg \frac{\pi x}{2}}$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9 - 2x}{3} \right)^{tg \frac{\pi x}{6}}$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x - a}}$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x - 2}}$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (tg x)^{\frac{1}{\cos \left(\frac{3\pi}{4} x \right)}}$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{tg \frac{\pi x}{2a}}$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{ctg x}{\sin 4x}}$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{tg 5x - \sin 2x}}$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{6tg x \cdot tg 3x}$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{1-x} - 1)^{\frac{x}{x-1}}$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$$

$$6.23. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$$

$$6.27. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(tg \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\sec x}$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(ctg \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$6.26. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$6.28. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{18 \sin x}{ctg x}}$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow \pi} \left(ctg \frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{\cos \frac{x}{2}}}$$

7-masala. Funksiya grafigining abtsissasi x_0 bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan normal (5.1-5.12 misollarda) yoki urinma (5.13-5.30 misollarda) tenglamasi topilsin.

$$7.1. \quad y = \frac{4x - x^2}{4}, \quad x_0 = 2$$

$$7.3. \quad y = x - x^3, \quad x_0 = -1$$

$$7.5. \quad y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1$$

$$7.2. \quad y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2$$

$$7.4. \quad y = x^2 + 8\sqrt{x-32}, \quad x_0 = 4$$

$$7.6. \quad y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8$$

$$7.7. \quad y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$$

$$7.9. \quad y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1$$

$$7.11. \quad y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 64$$

$$7.13. \quad y = 2x^2 + 3, \quad x_0 = -1$$

$$7.15. \quad y = 2x + \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$$

$$7.17. \quad y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1$$

$$7.19. \quad y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), \quad x_0 = 1$$

$$7.21. \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = -2$$

$$7.23. \quad y = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 11$$

$$7.25. \quad y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$7.27. \quad y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$$

$$7.29. \quad y = \frac{x^2}{10} + 3, \quad x_0 = 2$$

$$7.8. \quad y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16$$

$$7.10. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, \quad x_0 = 3$$

$$7.12. \quad y = \frac{x^3 + 3}{x^3 - 2}, \quad x_0 = 2$$

$$7.14. \quad y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1$$

$$7.16. \quad y = -\frac{2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}, \quad x_0 = 1$$

$$7.18. \quad y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$7.20. \quad y = \frac{1}{3x + 2}, \quad x_0 = 2$$

$$7.22. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}, \quad x_0 = 3$$

$$7.24. \quad y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), \quad x_0 = 1$$

$$7.26. \quad y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, \quad x_0 = 1$$

$$7.28. \quad y = \frac{3x - 2x^3}{3}, \quad x_0 = 1$$

$$7.30. \quad y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}, \quad x_0 = 4$$

8-masala. Differentsial yordamida taqribiy hisoblang.

8.1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76$

8.2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012$

8.3. $y = \frac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}, \quad x = 0,98$

8.4. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54$

8.5. $y = \arcsin x, \quad x = 0,08$

8.6. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97$

8.7. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46$

8.8. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97$

8.9. $y = x^{11}, \quad x = 1,021$

8.10. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21$

8.11. $y = x^{21}, \quad x = 0,998$

88.12. $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03$

8.13. $y = x^6, \quad x = 2,01$

8.14. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,24$

8.15. $y = x^7, \quad x = 1,996.$

8.16. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,64.$

8.17. $y = \sqrt{4x - 1}, \quad x = 2,56$

8.18. $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}, \quad x = 1,016$

8.19. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,36$

8.20. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x = 4,16$

8.21. $y = x^7, \quad x = 2,002$

8.22. $y = \sqrt{4x - 3}, \quad x = 1,78$

8.23. $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98$

8.24. $y = x^5, \quad x = 2,997$

$$8.25. \quad y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1,03$$

$$8.26. \quad y = x^4, \quad x = 3,998$$

$$8.27.$$

$$y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0,01$$

$$8.28.$$

$$y = \sqrt[3]{3x+\cos x}, \quad x = 0,01$$

$$8.29.$$

$$y = \sqrt[4]{2x - \sin \frac{\pi x}{2}}, \quad x = 1,02$$

$$8.30.$$

$$y = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x = 1,97$$

9-masala. Berilgan funksiyaning hosilasini toping.

$$9.1. \quad y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+2}}$$

$$9.2. \quad y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$$

$$9.3. \quad y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$$

$$9.4. \quad y = \frac{(2x^2 - x - 1)}{3\sqrt{2+4x}}$$

$$9.5. \quad y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$$

$$9.6. \quad y = \frac{x^2}{2\sqrt{1+3x^4}}$$

$$9.7. \quad y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$$

$$9.8. \quad y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$$

$$9.9. \quad y = \frac{4+3x^3}{x^3\sqrt{(2+x^3)^2}}$$

$$9.10. \quad u = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{\frac{3}{4}})^2}{x^{\frac{3}{2}}}}$$

$$9.11. \quad y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$9.12. \quad y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$$

$$9.13. \quad y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$$

$$9.14. \quad y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$$

$$9.15. \quad y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$$

$$9.16. \quad y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^3}}$$

$$9.17. y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$$

$$9.19. y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$$

$$9.21. y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$$

$$9.23. y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$9.25. y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}$$

$$9.27. y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$$

$$9.29. y = \frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$$

$$9.18. y = (1-x^2)^5\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}$$

$$9.20. y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$$

$$9.22. y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$9.24. y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$9.26. y = \frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$$

$$9.28. y = \frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$$

$$9.30. y = \frac{3x+\sqrt{x}}{x^2+2}$$

10-masala. Berilgan funksiyaning hosilasini toping.

$$10.1. y = ((\arctg x))^{\frac{1}{2}\ln \arctg x}$$

$$10.3. y = (\sin x)^{5e^x}$$

$$10.5. y = (\ln x)^{3^x}$$

$$10.7. y = (\ctg 3x)^{2e^x}$$

$$10.9. y = (\tg x)^{4e^x}$$

$$10.11. y = (x \sin x)^{\sin(x \sin)}$$

$$10.13. y = (x^3+4)^{\tg x}$$

$$10.15. y = (x^2-1)^{\sin x}$$

$$10.17. y = (\sin x)^{\frac{5x}{2}}$$

$$10.2. y = (\sin \sqrt{x})^{\ln \sin \sqrt{x}}$$

$$10.4. y = (\arcsin x)^{e^x}$$

$$10.6. y = x^{\arcsin x}$$

$$10.8. y = x^{e^{\tg x}}$$

$$10.10. y = (\cos 5x)^{e^x}$$

$$10.12. y = (x-5)^{\sin x}$$

$$10.14. y = x^{\sin x^3}$$

$$10.16. y = (x^4+5)^{\ctg x}$$

$$10.18. y = (x^2+1)^{\cos x}$$

$$10.19. y = 19^{x^{19}} x^{19}$$

$$10.21. y = \left(\sin \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{e^x}}$$

$$10.23. y = x^{e^{\cos x}}$$

$$10.25. y = x^{e^{\sin x}}$$

$$10.27. y = x^{e^{\arctg x}}$$

$$10.29. y = x^{29^x} 29^x$$

$$10.20. y = x^{3x} 2^x$$

$$10.22. y = x^{e^{\ctg x}}$$

$$10.24. y = x^{2x} 5^x$$

$$10.26. y = (\ctg x)^{\ln \tg^{\frac{x}{4}}}$$

$$10.28. y = (x^8 + 1)^{\ctg x}$$

$$10.30. y = (\cos 2x)^{\ln \cos \frac{x}{2}}$$

11-masala. Berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasini hisoblang.

$$11.1. y = x e^{ax}$$

$$11.2. y = \sin 2x + \cos(x + 1)$$

$$11.3. y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$$

$$11.4. y = \frac{4x + 7}{2x + 3}$$

$$11.5. y = \lg(5x + 2)$$

$$11.6. y = a^{3x}$$

$$11.7. y = \frac{x}{2(3x + 2)}$$

$$11.8. y = \lg(x + 4)$$

$$11.9. y = \sqrt{x}$$

$$11.10. y = \frac{2x + 5}{13(3x + 1)}$$

$$11.11. y = 2^{3x+5}$$

$$11.12. y = \sin(x + 1) + \cos 2x$$

$$11.13. y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$$

$$11.14. y = \frac{4 + 15x}{2x + 1}$$

$$11.15. y = \lg(3x + 1)$$

$$11.16. y = 7^{5x}$$

$$11.17. y = \frac{x}{9(4x + 9)}$$

$$11.18. y = \lg(1 + x)$$

$$11.19. y = \frac{4}{x}$$

$$11.20. y = \frac{5x + 1}{13(2x + 3)}$$

$$11.21. y = a^{2x+3}$$

$$11.22. y = \sin(3x + 1) + \cos 5x$$

$$11.23. y = \sqrt{e^{3x+1}}$$

$$11.25. y = \lg(2x + 7)$$

$$11.27. y = \frac{x}{x+1}$$

$$11.29. y = \frac{1+x}{1-x}$$

$$11.24. y = \frac{11+12x}{6x+5}$$

$$11.26. y = 2^{kx}$$

$$11.28. y = \log_3(x+5)$$

$$11.30. y = \frac{7x+1}{17(4x+3)}$$

12-masala. Birinchi funksiyaning grafigini yasang.

$$12.1. y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$$

$$12.3. y = x^2(x-2)^2$$

$$12.5. y = 2 - 3x^2 - x^3$$

$$12.7. y = 2x^3 - 3x^2 - 4$$

$$12.9. y = (x-1)^2(x-3)^2$$

$$12.11. y = 6x - 8x^3$$

$$12.13. y = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

$$12.15. y = (2x+1)^2(2x-1)^2$$

$$12.17. y = 12x^2 - 8x^{23} - 2$$

$$12.19. y = \frac{27(x-x^2)}{4} - x$$

$$12.21. y = \frac{x^2(x-4)^2}{16}$$

$$12.23. y = \frac{16-6x^2-x^3}{8}$$

tartibli hosiladan foydalanib

$$12.2. y = 3x - x^2$$

$$12.4. y = \frac{x^3 - 9x^2}{4} + 6x - 9$$

$$12.6. y = (x+1)^2(x-1)^2$$

$$12.8. y = 3x^2 - 2 - 3x^3$$

$$12.10. y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5$$

$$12.12. y = 16x^2(x-1)^2$$

$$12.14. y = 2 - 12x^2 - 8x^3$$

$$12.16. y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$$

$$12.18. y = (2x-1)^2(2x-3)^2$$

$$12.20. y = \frac{x(12-x^2)}{8}$$

$$12.22. y = \frac{27(x^3+x^2)}{4} - 5$$

$$12.24. y = -\frac{(x^2-4)^2}{16}$$

$$12.25. y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$$

$$12.26. y = \frac{6x^2 - x^3 - 16}{8}$$

$$12.27. y = -\frac{(x-2)^2(x-6)^2}{16}$$

$$12.28. y = 16x^3 - 12x^2 - 4$$

$$12.29. y = \frac{11 + 9x - 3x^2 - x^3}{8}$$

$$12.30. y = -\frac{(x+1)^2(x-3)^2}{16}$$

13-masala. Funksiyaning asimptotalarini toping va grafigini yasang.

$$13.1. y = \frac{17 - x^2}{4x - 5}$$

$$13.2. y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}$$

$$13.3. y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$$

$$13.4. y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}$$

$$13.5. y = \frac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}$$

$$13.6. y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$$

$$13.7. y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}$$

$$13.8. y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}$$

$$13.9. y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}$$

$$13.10. y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$$

$$13.11. y = \frac{2 - x^2}{\sqrt{9x^2 - 4}}$$

$$13.12. y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$$

$$13.13. y = \frac{3x^2 - 7}{2x - 1}$$

$$13.14. y = \frac{x^2 - 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}$$

$$13.15. y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$$

$$13.16. y = \frac{21 - x^2}{7x + 9}$$

$$13.17. y = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$13.18. y = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}$$

$$13.19. y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}$$

$$13.21. y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$$

$$13.23. y = \frac{x^3 + x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 2}$$

$$13.25. y = \frac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$13.27. y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x^2 - 23}$$

$$13.29. y = \frac{-x^2 - 4x + 13}{4x + 3}$$

$$13.20. y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$13.22. y = \frac{x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$$

$$13.24. y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 4}$$

$$13.26. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$$

$$13.28. y = \frac{3x^2 - 10}{3 - 2x}$$

$$13.30. y = \frac{-8 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

14-masala. Funksiyani to'liq tekshiring va grafigini yasang.

$$14.1. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

$$14.3. y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

$$14.5. y = \frac{12x}{9 + x^2}$$

$$14.7. y = \frac{4 - x^3}{x^2}$$

$$14.9. y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$$

$$14.11. y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

$$14.13. y = \frac{12 - 3x^3}{x^2 + 12}$$

$$14.2. y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$14.4. y = \frac{4x^2}{3 + x^2}$$

$$14.6. y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

$$14.8. y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$$

$$14.10. y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$14.12. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$14.14. y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$$

$$14.15. y = -\frac{8x}{x^2 + 4}$$

$$14.17. y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

$$14.19. y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$14.21. y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$$

$$14.23. y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$$

$$14.25. y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$$

$$14.27. y = \frac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4}$$

$$14.29. y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$$

$$14.16. y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

$$14.18. y = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$14.20. y = \frac{1-2x^3}{x^2}$$

$$14.22. y = \frac{4}{3+2x-x^2}$$

$$14.24. y = \frac{1}{x^4 - 1}.$$

$$14.26. y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$$

$$14.28. y = \frac{3x-2}{x^3}$$

$$14.30. y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$$

VIII BOB. INTEGRAL HISOB.

1-§. Aniqmas integral va uni hisoblash.

$f(x)$ funksiya biror (a, b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo'lsin.

1-tahrif. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda differentsiallanuvchi $F(x)$ funktsiyaning hosilasiga teng, ya'ni $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$ bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f(x)$ funktsiyaning **boshlang'ich funktsiyasi** deyiladi.

1-misol: $F(x) = x^3$ funktsiya sonlar o'qida $f(x) = 3x^2$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'ladi, chunki

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x).$$

$F(x)$ va $\Phi(x)$ funktsiyalarning har biri (a, b) intervalda bitta $f(x)$ funktsiya uchun boshlang'ich funktsiya bo'lsa, bu $F(x)$ va $\Phi(x)$ funktsiyalar (a, b) intervalda bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi. SHu narsani ta'kidlashimiz kerakki, $f(x) = 3x^2$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi sifatida ixtiyoriy $\Phi(x) = x^3 + C$ funktsiyani olishimiz mumkin. Bu yerda S -ixtiyoriy o'zgarmas son.

2-tahrif. (a, b) intervalda berilgan $f(x)$ funktsiya boshlang'ich funktsiyalarining umumiy ifodasi $F(x) + C$ $C = const$, shu $f(x)$ funktsiyaning **aniqmas integrali** deb ataladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Bunda $\int$ —integral belgisi, $f(x)$ -integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ esa **integral ostidagi ifoda** deyiladi. Demak,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C = const)$$

2-misol. Ushbu $\int (x^2 + 2x + 5)dx$ aniqmas integralni toping.

Quyidagi $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + C$ funktsiya uchun

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + C\right)' = x^2 + 2x + 5 \quad \text{bo'ladi.} \quad \text{Demak,}$$

$$\int (x^2 + 2x + 5)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + C.$$

Aniqmas integralning tahrifidan bevosita uning quyidagi sodda xossalari kelib chiqadi.

$$1. \frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x), \text{ demak } d \int f(x)dx = f(x)dx$$

$$2. \int F'(x)dx = F(x) + C, \text{ yahni } \int dF(x) = F(x) + C$$

$$3. \int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$$

$$4. \int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Elementar funktsiyalarning aniqmas integrallari.

$$1. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1), \quad 8. \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \cdot ctgax + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad 9. \int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + a| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 10. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

$$4. \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C, \quad 11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$5. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax + C. \quad 12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

$$6. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax + C. \quad 13. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \cdot tgax + C.$$

Integrallash usullari.

1.O'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli.

Ushbu $\int f(x)dx$ aniqmas integralni hisoblash talab etilgan bo'lsin. Bunda $f(x)$ funktsiya biror $X = (a, b)$ intervalda aniqlangan va $f(x) = \varphi(g(x)) \cdot g'(x)$ ko'rinishda yozish mumkin deylik. Agar $\varphi(t)$ funktsiya $T = (t_1; t_2)$ intervalda boshlang'ich $\Phi(t)$ ga ega bo'lib, $g(x)$ funktsiya $X \in (a, b)$ intervalda $(g(x) \subset T)$ differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int f(x)dx = \int \varphi(g(x))g'(x)dx = \Phi(g(x)) + C$$

tenglik o'rinli.

3-misol. $\int \frac{xdx}{x^2 + a^2}$ ni hisoblang ($a = \text{const}$).

Echilishi:

$x^2 + a^2 = t$ kabi almashtiramiz.

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$$

2. Bo'laklab integrallash usuli.

$u = u(x)$ va $v = v(x)$ funktsiya (a, b) intervalda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu tenglikka **bo'laklab integrallash formulasi** deyiladi.

4-misol. $\int xe^x dx$ ni hisoblang.

Bu intervalda $u = x$, $dv = e^x dx$ deb olamiz. Bundan kelib chiqadiki $du = dx$, $v = e^x$.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C..$$

Ratsional funktsiyalarni integrallash.

1. Sodda kasrlarni integrallash.

Biror

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

ko'phad berilgan bo'lsin, bunda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, $a_n \neq 0$, $n \in N$ esa ko'phadning darajasi.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k} \quad (k \in N)$$

ga **kasr ratsional funktsiya** deyiladi, agar $n < k$ bo'lganda to'g'ri kasr, aks holda **noto'g'ri kasr** deyiladi.

Ushbu

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \quad m=1,2,\dots \quad (2)$$

ko'rinishdagi kasrlar **sodda kasrlar** deyiladi, bunda A, B, C hamda a, p, q lar o'zgarmas sonlar, $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas.

Har qanday to'g'ri kasr (2) sodda kasrlar orqali ifodalanadi.

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr maxrajidagi $Q(x)$ ko'phad, quyidagi

$$Q(x) = (x-\alpha)^m Q_1(x) \quad (m \in N)$$

ko'rinishda bo'lib, $Q_1(x)$ ko'phad esa $(x-\alpha)$ ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasr quyidagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

ko'rinishda ifodalanishi mumkin, bunda $A_1, A_2, \dots, A_m$ -o'zgarmas haqiqiy sonlar, $P_1(x)$ -ko'phad.

Agar $Q(x)$ ko'phad

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^n \cdot Q_1(x)$$

ko'rinishga ega bo'lib ($x^2 + px + q$ kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas), $Q_1(x)$ ko'phad $x^2 + px + q$ ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasr quyidagi ko'rinishda ifodalanishi mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bunda $B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$ - o'zgarmas sonlar, $P_1(x)$ - ko'phad.

Sodda kasrlarning aniqmas integrallarini hisoblaymiz.

$$1. \quad \int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \bullet \ln|x-a| + C$$

$$2. \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \bullet \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$$

$$3. \quad I = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \quad \text{bu integralni hisoblashda ikkita hol bo'lishi mumkin.}$$

a) $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad to'liq kvadrat bo'lsa, I-integral 1 va 2 hollarga keltiriladi.

b) Agar $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad to'liq kvadratga kelmasa, bu holda uni to'liq kvadratga to'ldirib integrallash mumkin.

5-misol.

$$I = \int \frac{2x-2}{x^2-x+1} dx = \int \frac{2x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx, \quad x - \frac{1}{2} = t \quad \text{desak}$$

$$I = \int \frac{2t-1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{2t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln(x^2 - x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Izoh: Mahlumki, elementar funktsiyaning hosilasi yana elementar funktsiya bo'lar edi, lekin integral olish uchun bu tasdiq o'rinli bo'lishi shart emas, ya'ni bahzi bir elementar

funktsiyalarning integrallari elementar funksiya bo'lmay qolishi mumkin. Masalan, Ushbu

$$1. \int e^{-x^2} dx,$$

$$2. \int \cos x^2 dx,$$

$$3. \int \sin x^2 dx,$$

$$4. \int \frac{dx}{\ln x} \quad (x \geq 0, x \neq 1),$$

$$5. \int \frac{\cos x}{x} dx (x \neq 0),$$

$$6. \int \frac{\sin x}{x} dx$$

integrallarning har biri elementar funktsiyalar yordamida ifodalanmaydi. Bu funktsiyalar amaliyotda ko'p uchraganligi sababli ularning qiymatlarini hisoblash uchun alohida jadval tuzilgan va ularning grafiklari yasalgan. Shu yo'l bilan elementar funktsiyalarda integrallanmaydigan funktsiyalar ham to'la o'rganilgan.

Nazorat savollari.

1. Boshlang'ich funksiya.
2. Aniqmas integral.
3. O'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli.
4. Bo'laklab integrallash usuli.
5. Ratsional funktsiyalarni integrallash.
6. Boshlang'ich funktsiyalar jadvali.

2-§. Aniq integral va uning tadbiqlari.

1. O'tilgan yo'l haqidagi masala. Biror moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida $v = v(t)$ tezlik bilan ($t \in [t_0, T]$) harakat qilayotgan bo'lsa, uning bosib o'tgan yo'li S ni topish talab etilsin. $[t_0, T]$ vaqt oralig'ini $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ n -ta bo'lakka bo'lamiz va $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, ($k = 1, 2, \dots, n$) deb olamiz. Bu bo'laklarning eng kattasini $\lambda = \max \Delta t_k$ deb belgilaymiz. Agar bu

oraliqlar kichik bo'lsa, u holda katta bo'lmagan xatolik bilan har bir oraliqda harakat bir xil deb hisoblashimiz mumkin.

$$S \approx v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \dots + v(\tau_n)\Delta t_{n-1},$$

bu yerda $\tau_k \in [t_{k-1} : t_k]$. Yig'indini $\sum_{k=1}^n v(\tau_k)\Delta t_k$ - deb belgilaymiz

va

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\tau_k)\Delta t_k$$

deb olamiz.

Aytaylik $[a, b]$ kesmada chegaralangan $f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesmada ushbu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ifodani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalarni olamiz.

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{va} \quad \lambda = \max_{k=0, n-1} \Delta x_k$$

deb belgilaymiz.

$\forall \tau_k \in [x_k, x_{k+1}]$ nuqtalarni olib, quyidagi yig'indini tuzamiz

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\Delta x_k.$$

Agar $[a, b]$ kesmaning bo'linish holatiga va τ_k nuqtani tanlashga bog'liq bo'lmagan xolda yig'indining $\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\Delta x_k$ chekli limiti mavjud bo'lsa, bu holatda bu limitga $f(x)$ funktsiyaning $[a, b]$ segmentdagi **aniq integrali** deb ataladi va quyidagicha belgilanadi.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k)\Delta x_k$$

$f(x)$ -ga **integral osti funktsiya** deyiladi. a, b -larga mos ravishda integralning **quyi va yuqori chegarasi** deyiladi.

2. Aniq integral xossalari.

1⁰. O'zgarmas sonni integral belgisi ostidan chiqarib yozish mumkin:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx.$$

$$2^0. \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

$$3^0. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$4^0. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$(a < c < b).$

Teorema: Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va $F(x)$ bu kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

bo'ladi.

Bu formulaga **Ng'yuton-Leybnits formulasi** deb ataladi.

Misol.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Teorema: (O'rta qiymat haqidagi teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda $[a, b]$ segmentda shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Ng'yuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ deb yozishimiz mumkin. Lagranj teoremasiga

ko'ra $F(b) - F(a) = (b-a) \cdot F'(c) = (b-a)f(c)$, bu yerda $a < c < b$ teorema isbot bo'ldi.

3. Yoy uzunligini hisoblash.

Mahlumki, egri chiziq yoyining uzunligi shu egri chiziqqa chizilgan sinq chiziq perimetrining limiti sifatida tahriflanadi. Sinq chiziq perimetri yig'indiga (integral yig'indiga) keladi va uning limiti aniq integralni ifodalaydi.

1. Faraz qilaylik, AV yoy $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) tenglama bilan aniqlansin. Bunda $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. AV yoyning uzunligi

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (1)$$

bo'ladi.

1. Faraz qilaylik, AV yoy

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlansin (bu holda egri chiziq parametrik holda berilgan deyiladi). Bunda $x = x(t)$, $y = y(t)$ funktsiyalar $[\alpha, \beta]$ da aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz $x'(t)$, $y'(t)$ hosilalarga ega.

AV yoyning uzunligi;

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

bo'ladi.

3. Faraz qilaylik, AV egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $\rho = \rho(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) funktsiya bilan berilgan bo'lsin. Bunda $\rho = \rho(\theta)$ funktsiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz va $\rho'(\theta)$ hosilaga ega. Bu holda AV egri chiziqlarning uzunligi

$$\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta \quad (3)$$

bo'ladi.

4. Aniq intergalning biologiyaga bag'zi tadbiqlari.

Populyatsiya miqdori.

Vaqt o'tishi bilan populyatsiya miqdori o'zgarib turadi. Agar populyatsiya uchun sharoit yetarlicha yaxshi bo'lsa, u holda tug'ilish soni o'lishga nisbatan ko'p bo'ladi. Populyatsiya tezligini $v = v(t)$ (birlik t vaqt ichida) bilan belgilaymiz. Eski populyatsiya yashash joyida $v(t)$ tezlik kamayadi va asta-sekin nolga yaqinlashadi. Lekin populyatsiya yosh bo'lsa, o'zaro bir-biri bilan bo'lgan munosabatlar hali o'rnatilmagan bo'lsa yoki mavjud bo'lgan bag'zi tashqi tahsirlar bunga tahsir qilsa, misol uchun insonning aralashuvi, u holda $v(t)$ tezlik sezilarli darajada ko'payib yoki kamayib to'radi.

Agar populyatsiya tezligi $v(t)$ ma'lum bo'lsa, u holda biz t_0 dan T vaqtgacha bo'lgan oraliqda populyatsiya miqdorining o'sishini topa olamiz. Haqiqatdan ham t vaqt ichida $v(t)$ tahrifidan, bu funktsiya $N(t)$ populyatsiya miqdoridan olingan hosilaga teng va bundan kelib chiqadiki $N(t)$ populyatsiya miqdori $v(t)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi. SHuning uchun

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^T v(t) dt \quad (1)$$

Ma'lumki juda yaxshi sharoitda populyatsiya tezligining o'sishi $v(t) = ae^{kt}$ bo'ladi. Populyatsiya bu holda keksaymaydi. Bu holda (1) formuladan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$N(T) = N(t_0) + a \int_{t_0}^T e^{kt} dt = N(t_0) + \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^T = N(t_0) + \frac{a}{k} (e^{kT} - e^{kt_0}) \quad (2)$$

Bu formula orqali bahzi zambrug'larning (penitsillin ajratib chiqaradigan) miqdorini hisoblab chiqarish mumkin.

Populyatsiya biomassasi.

SHunday biomassalarni qaraymizki hayoti davomida massasi sezilarli o'zgaradi va shu populyatsiya umumiy biomassasini hisoblaymiz. Aytaylik, τ qaysidir birlik vaqtning o'sishini aniqlasin, $N(\tau)$ o'sishi τ ga teng populyatsiyaning maxsus miqdori. $R(\tau)$ -maxsus τ o'sishidagi o'rtacha massa, $M(\tau)$ - 0 dan τ o'sishgacha bo'lgan biomassa.

SHuni aniqlaymizki, $N(\tau)R(\tau)$ ko'paytma τ o'sishdagi biomassaga teng. Ayirmani qaraylik,

$$M(\tau + \Delta\tau) - M(\tau)$$

Yuqoridagi ayirma τ dan $\tau + \Delta\tau$ o'sishdagi biomassa, quyidagini qanoatlantiradi:

$$N\left(\overset{\vee}{\tau}\right)P\left(\overset{\vee}{\tau}\right)\Delta\tau \leq M(\tau + \Delta\tau) - M(\tau) \leq N\left(\overset{\wedge}{\tau}\right)P\left(\overset{\wedge}{\tau}\right)\Delta\tau \quad (3)$$

bu yerda $N(\tau)P(\tau)$ funktsiyaning $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ oraliqdagi $N\left(\overset{\vee}{\tau}\right)P\left(\overset{\vee}{\tau}\right)$ -

etarlicha kichik, $N\left(\overset{\wedge}{\tau}\right)P\left(\overset{\wedge}{\tau}\right)$ -etarlicha katta miqdorlari. $\Delta\tau > 0$ ni hisobga olib (3) tengsizlikdan quyidagiga kelimiz.

$$N\left(\overset{\vee}{\tau}\right)P\left(\overset{\vee}{\tau}\right) \leq \frac{M(\tau + \Delta\tau) - M(\tau)}{\Delta\tau} \leq N\left(\overset{\wedge}{\tau}\right)P\left(\overset{\wedge}{\tau}\right) \quad (4),$$

$N(\tau)R(\tau)$ funktsiyalar uzluksizligidan (yag'ni $N(\tau)$ va $R(\tau)$ larning uzluksiz bulgani uchun) quyidagiga kelimiz.

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[N\left(\overset{\vee}{\tau}\right) P\left(\overset{\vee}{\tau}\right) \right] = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[N\left(\overset{\wedge}{\tau}\right) P\left(\overset{\wedge}{\tau}\right) \right] = N(\tau)P(\tau),$$

$$\text{bundan} \quad \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{M(\tau + \Delta\tau) - M(\tau)}{\Delta\tau} = N(\tau)P(\tau) \quad \text{yoki}$$

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = N(\tau)P(\tau) \quad \text{kelib chiqadiki, } M(\tau) \text{ biomassa } N(\tau)R(\tau)$$

larning boshlang'ich funktsiyasi. Demak

$$M(T) - M(0) = \int_0^{\pi} N(\tau)P(\tau)d\tau,$$

bu yerda T-berilgan biomassaning maksimal yoshi. M(0) aniqki nolga teng, u holda

$$M(T) = \int_0^{\pi} N(\tau)P(\tau)d\tau$$

bu ifoda orqali populyatsiyaning umumiy biomassasini hisoblaymiz.

Nazorat savollari.

1. Aniq integral.
2. Aniq integral xossalari.
3. O'rta qiymat haqidagi teorema.
4. Yoy uzunligini hisoblash.
5. Tekis shaklning yuzasini hisoblash.
6. Aniq integralning biologik masalalarga tadbiqu.

Mustaqil yechish uchun misollar va masalalar.

1-masala. Aniqmas integral topilsin.

$$1.1. \int (4 - 3x)e^{-3x} dx$$

$$1.2. \int \arctg \sqrt{4x - 1} dx$$

- 1.3. $\int (3x+4)e^{3x} dx$
- 1.5. $\int (4-16x)\sin 4x dx$
- 1.7. $\int (1-6x)e^{2x} dx$
- 1.9. $\int \ln(4x^2+1) dx$
- 1.11. $\int \arctg \sqrt{6x-1} dx$
- 1.13. $\int e^{-3x}(2-9x) dx$
- 1.15. $\int \arctg \sqrt{3x-1} dx$
- 1.17. $\int (5x+6)\cos 2x dx$
- 1.19. $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx$
- 1.21. $\int (2x-5)\cos 4x dx$
- 1.23. $\int (x+5)\sin 3x dx$
- 1.25. $\int (4x+3)\sin 5x dx$
- 1.27. $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3x dx$
- 1.29. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
- 1.4. $\int (4x-2)\cos 2x dx$
- 1.6. $\int (5x+2)e^{3x} dx$
- 1.8. $\int \ln(x^2+4) dx$
- 1.10. $\int (2-4x)\sin 2x dx$
- 1.12. $\int e^{-2x}(4x-3) dx$
- 1.14. $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx$
- 1.16. $\int \arctg \sqrt{5x-1} dx$
- 1.18. $\int (3x-2)\cos 5x dx$
- 1.20. $\int (4x+7)\cos 3x dx$
- 1.22. $\int (8-3x)\cos 5x dx$
- 1.24. $\int (2-3x)\sin 2x dx$
- 1.26. $\int (7x-10)\sin 4x dx$
- 1.28. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$
- 1.30. $\int x \sin^2 x dx$

2-masala. Aniqmas integral hisoblansin.

- 2.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
- 2.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
- 2.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
- 2.2. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$
- 2.4. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx$
- 2.6. $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{array}{ll}
2.7. \int \operatorname{tg} x \ln \operatorname{Cos} x dx & 2.8. \int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\operatorname{Cos}^2(x+1)} dx \\
2.9. \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx & 2.10. \int \frac{1-\operatorname{Cos} x}{(x-\operatorname{Sin} x)^2} dx \\
2.11. \int \frac{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{(\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x)^5} dx & 2.12. \int \frac{x \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x}{(x \operatorname{Sin} x)^2} dx \\
2.13. \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx & 2.14. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} \\
2.15. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} & 2.16. \int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx \\
2.17. \int \frac{(x^2+1) dx}{(x^3+3x+1)^5} & 2.18. \int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx \\
2.19. \int \frac{x^3 dx}{x^2+4} & 2.20. \int \frac{x + \operatorname{Cos} x}{x^2 + 2 \operatorname{Sin} x} dx \\
2.21. \int \frac{2 \operatorname{Cos} x + 3 \operatorname{Sin} x}{(2 \operatorname{Sin} x - 3 \operatorname{Cos} x)^3} dx & 2.22. \int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx \\
2.23. \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} & 2.24. \int \frac{x}{x^4 + 1} dx \\
2.25. \int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx & 2.26. \int \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\
2.27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx & 2.28. \int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx \\
2.29. \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1} & 2.30. \int \frac{(\operatorname{arc} \operatorname{Sin} x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx
\end{array}$$

3-masala. Aniqmas integral hisoblansin.

$$3.1. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx$$

$$3.2. \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$$

$$3.3. \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$$

$$3.4. \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx$$

$$3.5. \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx$$

$$3.6. \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$$3.7. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$3.8. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx$$

$$3.9. \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+1)} dx$$

$$3.10. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx$$

$$3.11. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx$$

$$3.12. \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx$$

$$3.13. \int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx$$

$$3.14. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)^x} dx$$

$$3.15. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx$$

$$3.16. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx$$

$$3.17. \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx$$

$$3.18. \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx$$

$$3.19. \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx$$

$$3.20. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx$$

$$3.21. \int \frac{x^3 - 5x + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx$$

$$3.22. \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)^x} dx$$

$$3.23. \int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx$$

$$3.24. \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(X+1)} dx$$

$$3.25. \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx$$

$$3.26. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx$$

3.27.

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-5)(x+2)} dx$$

$$3.28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx$$

3.29.

$$\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx$$

$$3.30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx$$

4-masala. Aniq integral hisoblansin.

$$4.1. \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$$

$$4.2. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx$$

$$4.3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx$$

$$4.4. \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx$$

$$4.5. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx$$

$$4.6. \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx$$

$$4.7. \int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx$$

$$4.8. \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx$$

$$4.9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx$$

$$4.10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx$$

$$4.11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx$$

$$4.12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx$$

$$4.13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx$$

$$4.14. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx$$

$$4.15. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx$$

$$4.16. \int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx$$

$$4.17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx$$

$$4.19. \int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x dx$$

$$4.21. \int_1^2 x \ln^2 x dx$$

$$4.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$4.25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx$$

$$4.27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx$$

$$4.29. \int_{-1}^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$4.18. \int_0^{\pi/4} (x^2 + 17.5) \sin 2x dx$$

$$4.20. \int_{\pi/4}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx$$

$$4.22. \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$$

$$4.24. \int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx$$

$$4.26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx$$

$$4.28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx$$

$$4.30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$$

5-masala. Aniq integral hisoblansin.

$$5.1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$$

$$5.3. \int_0^1 \frac{4 \arctg x - x}{1 + x^2} dx$$

$$5.5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$$

$$5.7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx$$

$$5.2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}$$

$$5.4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}$$

$$5.6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx$$

$$5.8. \int_1^4 \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$$

$$5.9. \int_0^1 \frac{xdx}{x^4 + 1}$$

$$5.11. \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{8}}{3}} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$5.13. \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx$$

$$5.15. \int_0^{\text{Sin}1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.17. \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{8}}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$5.19. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$5.21. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

$$5.23. \int_0^{\pi/4} \text{tg} x \ln \cos x dx$$

$$5.25. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.27. \int_{\pi}^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$$

$$5.29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$$

$$5.10. \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{8}}{3}} \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$5.12. \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx$$

$$5.14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$$

$$5.16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx$$

$$5.18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$$

$$5.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$$

$$5.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$5.24. \int_{-1}^0 \frac{\text{tg}(x + 1)}{\cos^2(x + 1)} dx$$

$$5.26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$$

$$5.28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$$

$$5.30. \int_{-2}^0 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x - 1}}$$

6-masala. Aniq integral hisoblansin.

$$6.1. \int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1 - \cos x)}$$

$$6.3. \int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1 + \cos x)}$$

$$6.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx$$

$$6.7. \int_{2\arctg \frac{1}{3}}^{2\arctg \frac{1}{2}} \frac{dx}{\sin x(1 - \sin x)}$$

$$6.9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4\cos x}$$

$$6.11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x + \cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}$$

$$6.13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos x + \sin x} dx$$

$$6.15. \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1 + \cos x + \sin x}$$

$$6.17. \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}$$

$$6.19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$6.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}$$

$$6.4. \int_{2\arctg \frac{1}{2}}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}$$

$$6.6. \int_{2\arctg 2}^{2\arctg 3} \frac{dx}{\cos x(1 - \cos x)}$$

$$6.8. \int_{2\arctg \frac{1}{2}}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}$$

$$6.10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx$$

$$6.12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \cos x + \sin x}$$

$$6.14. \int_0^{2\arctg \frac{1}{2}} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx$$

$$6.16. \int_0^{2\arctg 1/3} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$6.18. \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$6.20. \int_0^{2\arctg \frac{1}{2}} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x(1 + \cos x)}$$

$$6.21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$$

$$6.23. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$6.25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

$$6.27. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)}$$

$$6.29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$$

$$6.22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$$

$$6.24. \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$6.26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

$$6.28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$$

$$6.30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}$$

7-masala. Aniq integral hisoblansin.

$$7.1. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx$$

$$7.16. \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{x}{4} dx$$

$$7.2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx$$

$$7.17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$7.3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx$$

$$7.18. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx$$

$$7.4. \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx$$

$$7.19. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$$

$$7.5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx$$

$$7.20. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx$$

$$7.6. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^8 x dx$$

$$7.7. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$$

$$7.8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx$$

$$7.9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx$$

$$7.10. \int_0^{2\pi} \cos^8 \frac{x}{4} dx$$

$$7.11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 \frac{x}{2} dx$$

$$7.12. \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$$

$$7.13. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx$$

$$7.14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx$$

$$7.15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx$$

$$7.21. \int_0^{2\pi} \sin^8 x dx$$

$$7.22. \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx$$

$$7.23. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$$

$$7.24. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$$

$$7.25. \int_{-\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx$$

$$7.26. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx$$

$$7.27. \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx$$

$$7.28. \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx$$

$$7.29. \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$$

$$7.30. \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \cos^8 x dx$$

8-masala. Aniq integral hisoblansin.

$$8.1. \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} - dx$$

$$8.2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$8.3. \int_0^5 \frac{dx}{(25 + x^2)\sqrt{25 + x^2}}$$

$$8.4. \int_0^{36} \frac{dx}{(9 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$8.5. \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \frac{dx}{(5 - x^2)^3}$$

$$8.6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$$

$$8.7. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

$$8.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$$

$$8.9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$8.10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$8.11. \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$8.12. \int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$8.13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$$

$$8.14. \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$8.15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx$$

$$8.16. \int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$$

$$8.17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}$$

$$8.18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4} dx$$

$$8.19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}}$$

$$8.20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$8.21. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$8.22. \int_0^1 x^2 \sqrt{49-x^2} dx$$

IX BOB. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA TUSHUNCHASI.

1-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiya tushunchasi.

1⁰. Ushbu $f: R^2 \rightarrow R$ akslantirish ko'p o'zgaruvchili (ikki o'zgaruvchili) funktsiya tushunchasiga olib keladi.

1-Tahrif: Agar $E(E \subset R^2)$ to'plamdagi har bir (x, y) nuqtaga biror qoida yoki qonunga ko'ra bitta haqiqiy u son ($u \in R$) mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda **ikki o'zgaruvchili funktsiya berilgan (aniqlangan)** deyiladi.

Uni

$$f: (x, y) \rightarrow u \text{ yoki } u = f(x, y)$$

kabi belgilanadi. Bunda E funktsiyaning aniqlanish to'plami, x, y - funktsiya argumentlari, u esa x va y larning funktsiyasi deyiladi.

Masalan: f -har bir

$(x, y) \in \{(x, y) \in R^2 : \rho((x, y), (0, 0)) \leq 1\} = E$ nuqtaga ushbu

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{1-x^2-y^2}$$

qoida bilan bitta haqiqiy sonni mos qo'ysin. Bu holda $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$ funktsiyaga ega bo'lamiz.

Aytaylik, $u = f(x, y)$ funktsiya $E(E \subset R^2)$ to'plamda berilgan bo'lsin. Ushbu $\{(x, y, u) : (x, y) \in E, u = f(x, y)\}$ to'plam $u = f(x, y)$ **funktsiyaning grafigi** deyiladi.

Masalan, $u = x^2 + y^2$, $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ funktsiyalarning grafiklari mos ravishda aylanma paraboloid hamda yuqori yarim sferani ifodalaydi.

Aytaylik, $u = f(x, y)$ funktsiya $E \subset R^2$ to'plamda berilgan, $(x_0, y_0) \in R^2$ nuqta E ning limit nuqtasi bo'lsin.

2-Tahrif:

Agar

$$\forall \{(x_n, y_n)\}$$

$((x_n, y_n) \in E, (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0), n = 1, 2, \dots)$ ketma-ketlik uchun $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ da $f(x_n, y_n) \rightarrow A$ ($A \in R$) bo'lsa, u holda A $f(x, y)$ **funktsiyaning** $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ **dagi limiti (karrali limiti)** deyiladi va

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ yoki } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = A$$

kabi belgilanadi.

2⁰. Aytaylik, $u = f(x, y)$ funktsiya ochiq $E \subset R^2$ to'plamda berilgan, $(x_0, y_0) \in E$ nuqtalarga mos ravishda Δx va Δy orttirma beramiz, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in E$ bo'lsin. Ushbu

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (1)$$

ayirma $f(x, y)$ **funktsiyaning** (x_0, y_0) **nuqtadagi to'liq orttirmasi** deyiladi.

3-Tahrif: Agarda $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da to'liq orttirma $\Delta f(x_0, y_0)$ nolga intilsa, yahni

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

bo'lsa, $u = f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) **nuqtada uzluksiz** deyiladi,

4-Tahrif: Agar $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ da $f(x, y)$ funktsiyaning limiti mavjud bo'lmasa yoki

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty \text{ yoki } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \neq f(x_0, y_0)$$

bo'lsa, $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) **nuqtada uzilishga ega** deyiladi.

2-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalari.

1. Funktsiyaning differentsiallanuvchiligi tushunchasi.

1^o. Ushbu

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

orttirmalar funktsiyaning (x_0, y_0) **nuqtadagi xususiy orttirmalari** deyiladi.

1-Tahrif: Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ nisbatning limiti

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x, y)$ funktsiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchisi bo'yicha **xususiy hosilasi** deyiladi va $f'_x(x_0, y_0)$ yoki $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ kabi belgilanadi:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Xuddi shunga o'xshash y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosila tahriflanadi:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalarini hisoblashda bir o'zgaruvchili funktsiyaning hosilalarini hisoblashdagi ma'lum qoida va jadvallardan foydalanish mumkin.

Misol. Ushbu $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funktsiyaning xususiy hosilalari $(x, y) \neq (0, 0)$ nuqtada

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

bo'ladi.

Berilgan funktsiya $(x, y) = (0, 0)$ nuqtada xususiy hosilaga ega emas:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 0^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} - \text{ mavjud emas;}$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0^2 + y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y} - \text{ mavjud emas.}$$

2-Tahrif: Agar $f(x, y)$ funktsiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi to'liq orttirmasini quyidagi

$$\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \quad (2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) **nuqtada differentsiallanuvchi** deyiladi, bunda A, B — o'zgarmas, α va β lar Δx va Δy larga bog'liq, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$.

Agar $f(x, y)$ funktsiya $E \subset R^2$ to'plamning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, $f(x, y)$ funktsiya E to'plamda **differentsiallanuvchi** deyiladi. SHunday qilib, $f(x, y)$ funktsiyaning differentsiali quyidagicha yoziladi:

$$df = f'_x dx + f'_y dy \text{ yoki}$$

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy \quad (3)$$

Misol. Agar $f(x, y) = (x + y)^2$ bo'lsa, u holda
 $f'_x = f'_y = 2(x + y)$ va $df = 2(x + y)(dx + dy)$.

Teorema: Agar $f(x, y)$ funktsiya $(x_0, y_0) \in E$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, funktsiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot: $\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$
munosabatdan, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da $\Delta f(x_0, y_0) \rightarrow 0$ bo'lishini topamiz.

Demak, $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz.

Teorema: Agar $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, funktsiyaning shu nuqtadagi xususiy hosilalari $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ mavjud bo'lib, $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$ bo'ladi.

Isbot: $\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$ da
 $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$ deb, $\Delta x \rightarrow 0$ da

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = A,$$

yahni $f'_x(x_0, y_0) = A$ bo'lishini topamiz.

Xuddi shunga o'xshash $f'_y(x_0, y_0)$ ning mavjudligi va $f'_y(x_0, y_0) = B$ bo'lishi ko'rsatiladi.

Endi murakkab

$$u = f(x, y) = f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) = F(s, t)$$

funktsiyaning differentsialini hisoblaymiz.

(3) formulaga ko'ra

$$df = \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

bo'ladi. Endi

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

ekanini ehtiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned}$$

Misol. Agar $f = xy$ bo'lib, bu yerda $x = t \sin 2\tau$, $y = t^2 \tau$ bo'lsa, u holda

$$f'_t = y \sin 2\tau + 2x\tau, \quad f'_\tau = -2yt \cos 2\tau + xt^2$$

bo'ladi.

2. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarning yuqori tartibli hosila va differentsiallari.

Aytaylik, $f(x, y)$ funktsiya ochiq $E \subset R^2$ to'plamda berilgan bo'lib, $\forall (x, y) \in E$ nuqtada $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin.

3-Tahrif: $f(x, y)$ funktsiya xususiy hosilalari $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ larning x va y o'zgaruvchilari bo'yicha xususiy hosilalari $f(x, y)$ funktsiyaning **ikkinchi tartibli xususiy hosilalari** deyiladi.

Demak,

$$\begin{aligned}(f'_x(x,y))'_x &= f''_{x^2}(x,y), & (f'_x(x,y))'_y &= f''_{xy}(x,y), \\ (f'_y(x,y))'_x &= f''_{yx}(x,y), \\ (f'_y(x,y))'_y &= f''_{y^2}(x,y)\end{aligned}$$

yoki

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Odatda $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ hosilalar **aralash hosilalar** deyiladi.

Xuddi shunga o'xshash $f(x,y)$ funktsiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibdagi xususiy hosilalari tahriflanadi.

Ushbu

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

funktsiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

Ravshanki,

$$f'_x(x,y) = [\ln(x^2 + y^2)]'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x,y) = [\ln(x^2 + y^2)]'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

bo'ladi. Ta'rifdan foydalanib funktsiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$f''_{x^2}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_x = 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$f''_{xy}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$f''_{yx}(x, y) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$f''_{y^2}(x, y) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_y = 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari.

Aytaylik, $f(x, y)$ funktsiya ochiq $E \subset R^2$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, y_0) \in E$ bo'lsin.

Tahrif. Agar shunday $U_\delta((x_0, y_0)) \subset E$ atrof topilsaki, $\forall (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$ uchun

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$$

bo'lsa, $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) **nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi** deyiladi. (x_0, y_0) funktsiyaning **maksimum (minimum) nuqtasi** deyiladi. $f(x_0, y_0)$ miqdor funktsiyaning **maksimum (minimum) qiymatlari** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f(x_0, y_0) = \max_{(x, y) \in U_\delta} \{f(x, y)\}, \quad \left(f(x_0, y_0) = \min_{(x, y) \in U_\delta} \{f(x, y)\} \right)$$

funktsiyaning maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning **ekstremumi** deyiladi.

Teorema. (Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti).

Agar $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga erishib, shu nuqtada chekli xususiy hosilalari f'_x va f'_y mavjud bo'lsa, u holda

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan shart yetarli shart bo'la olmaydi.

Misol. $z = x^3 + y^3$, $z'_x = 3x^2$, $z'_y = 3y^2$. Bu funktsiya $(0,0)$ nuqtada hosilasi nolga teng, ammo bu funktsiya $(0,0)$ nuqtada ekstremumga ega emas, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida xar xil ishorali qiymat qabul qiladi, nuqtaning o'zida $z = 0$.

Teorema. (Ekstremum mavjudligining yetarli sharti).

Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funktsiya (x_0, y_0) nuqta atrofida birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsin:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

va quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0), \quad D = AC - B^2.$$

Unda 1) agar $D > 0$ bo'lsa, u holda (x_0, y_0) nuqtada $f(x, y)$ funktsiya ekstremumga erishadi, agarda $A < 0$ bo'lsa maksimumga, $A > 0$ bo'lsa minimumga.

2) agar $D < 0$ bo'lsa, u holda (x_0, y_0) nuqtada $f(x, y)$ funktsiya ekstremumga ega emas.

3) agar $D = 0$ bo'lsa, u holda (x_0, y_0) nuqtada $f(x, y)$ funktsiya ekstremumga erishishi ham, erishmasligi ham mumkin.

Masala. Ximik reaksiya tarkibida x , y va z moddalar qatnashadi. Reaksiya tezligi V quyidagi qonun bilan ifodalanadi:

$$V = kx^2yz.$$

Shunday x , y va z moddalar tarkibini topingki ximik reaksiya tezligi V maksimal bo'lsin.

Echilishi: Aytaylik,

$$x + y + z = 100 \text{ } (\%), \text{ u holda}$$

$$z = 100 - x - y \text{ va}$$

$$V = kx^2y(100 - x - y) \quad (1)$$

V funktsiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(200xy - 3x^2y - 2xy^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = k(100xy - x^3 - 2x^2y).$$

nolga tenglaymiz,

$$\begin{cases} 200xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0 \\ 100x^2 - x^3 - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

Bilamizki (1) funktsiya $x = 0$ va $y = 0$ da maksimumga erishmaydi, u holda

$$\begin{cases} 200 - 3x - 2y = 0 \\ 100 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechib $x = 50$, $y = 25$ ni topamiz. U holda $z = 25$. Bunda $(50, 25)$ nuqtada $\mathcal{M} > 0$ va $A < 0$ ekanini topamiz.

Demak, $x = 50\%$, $y = 25\%$ va $z = 25\%$ bo'lgan tarkibda V tezlik maksimal bo'lar ekan.

Nazorat savollari.

1. Ikki o'zgaruvchili funktsiya tushunchasi.
2. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning limiti va uzluksizligi.
3. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalari.
4. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning differentsiali.
5. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarning yuqori tartibli hosila va differentsiallari.
6. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari.
7. Ikki o'zgaruvchili funktsiya ekstremumining zaruriy va yetarli shartlari.

4-§. Kompleks sonlar.

Quyidagi

$$z = x + iy \quad (1)$$

ko'rinishdagi son **kompleks son** deyiladi, bunda x va y - ixtiyoriy haqiqiy sonlar, i esa $i^2 = -1$ tenglik bilan aniqlanadigan mavhum birlik, x va y sonlar z kompleks sonning mos ravishda *haqiqiy qismi* va *mavhum qismi* deb ataladi va

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

deb belgilanadi. Kompleks sonning (1) ko'rinishdagi yozuvi uning *algebraik shakli* deyiladi.

$z = x + iy$ kompleks son xOy dekart koordinatalar tekisligida abstsissasi x , ordinatasi y bo'lgan nuqta bilan yoki bu nuqtaning radius-vektori bilan tasvirlanishi mumkin. Bu vektorning uzunligi z kompleks sonning *moduli* deb ataladi va $|z|$ yoki r orqadi belgilanadi:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Bu vektorning Ox haqiqiy o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi z sonning *argumenti* deb ataladi va $\operatorname{Arg} z$ orqali belgilanadi:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x} \quad (3)$$

$\operatorname{Arg} a$ ko'p qiymatli kattalik va u 2π ga karrali songa qadar aniqlikda aniqlangan. $\operatorname{Arg} z$ ning $-\pi$ dan π gacha bo'lgan oraliqda joylashgan qiymati uning *bosh qiymati* deyiladi va $\operatorname{Arg} z$ yoki φ orqali belgilanadi:

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Agar ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari mos ravishda teng yahni

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2$$

bo'lsa, ular teng hisoblanadi.

Faqat mavhum qismining ishorasi bilan bir-biridan farq qiladigan $z = x + iy$ va $z = x - iy$ kompleks sonlar *qo'shma kompleks sonlar* deyiladi.

Algebraik shaklda berilgan kompleks sonlar ustida amallar quyidagi qoidalar bo'yicha bajariladi:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2); \\(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \\ \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

Kompleks sonlarni qo'shish (ayirish) bu sonlarni tasvirlovchi vektorlarni qo'shishga (ayirishga) keltiriladi.

z_1 va z_2 kompleks sonlar yig'indisining radius-vektori qo'shiluvchilarning radius-vektorlariga yasalgan parallelogramm diagonalidir.

z_1 va z_2 kompleks sonlar ayirmasining radius-vektori quyidagicha topiladi: ayriluvchining radius-vektori uchini kamayuvchining radius-vektori uchi bilan tutashtirish, so'ngra hosil qilingan vektorni o'z-o'ziga parallel ko'chirib, uning boshini O nuqtaga joylashtirish lozim.

$z = x + iy$ kompleks o'zgaruvchining asosiy transtsendent funktsiyalari quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi:

ko'rsatkichli funktsiya

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (1)$$

trigonometrik funktsiyalar

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (2)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad (3)$$

giperbolik funktsiyalar

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (5)$$

$z = x + iy$ kompleks sonning *trigonometrik* va *ko'rsatkichli* shakli quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (6)$$

$$r = re^{i\varphi}. \quad (7)$$

bunda r va φ - mos ravishda z kompleks sonning moduli va argumentining bosh qiymati.

Trigonometrik va ko'rsatkichli shaklda berilgan kompleks sonlar uchun ko'paytirish, bo'lish, musbat butun darajaga ko'tarish, musbat butun darajadan ildiz chiqarish quyidagi formulalar yordamida bajariladi:

$$[r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)]X[r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (8)$$

$$(r_1 e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (8')$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (9)$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (9')$$

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (10)$$

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad (10')$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (11)$$

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (11')$$

(10) va (11) munosabatlar **Muavr formulalari** deyiladi. Ko'rsatilgan tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalarni trigonometrik yoki ko'rsatkichli shaklga keltirishda $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, $e^{i\varphi}$ funktsiyalarning $2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) davrga egaligidan foydalaniladi.

1-misol. Ushbu tenglamaning haqiqiy yechimlarini toping:

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

Echilishi. Tenglamaning chap qismidan haqiqiy va mavhum qismini ajratamiz:

$$(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i.$$

Bundan quyidagini yozib olamiz

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Bu tenglamani yechib quyidagini topamiz:

$$x = 2, \quad y = 1.$$

2-misol. Quyidagi kompleks sonning moduli va argumentini toping.

$$z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}.$$

Echilishi. Quyidagiga egamiz:

$$x = -\sin \frac{\pi}{8} < 0, \quad y = -\cos \frac{\pi}{8} < 0.$$

Argumentning bosh qiymati quyidagiga teng:

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}\right) = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{3}{8}\pi\right) = -\pi + \frac{3}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi.$$

Bundan kelib chiqadi,

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1.$$

3-misol. Ushbu kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda yozing.

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Echilishi. Quyidagini yozib olamiz,

Bundan kelib chiqadi,

$$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right].$$

4-misol. $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$ ni hisoblang.

Echilishi. $z = -1 + i\sqrt{3}$ kompleks sonning trigonometrik ko'rinishini yozamiz,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right).$$

$$(-1 + i\sqrt{3})^{60} = 2^{60} \left[\cos\left(60 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(60 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) \right] = 2^{60} (\cos 50\pi + i \sin 50\pi) = 2^{60}.$$

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

Quyidagi funktsiyalarning aniqlanish sohasini toping.

1. $u = 10 + 2x - y$

j: XOY tekisligi.

2. $u = \frac{5}{2x^2 + y^2}$

j: $(0;0)$ dan tashqarii XOY

tekisligi.

3. $u = \frac{2}{\sqrt{xy}},$

j: I va III chorak:

$x > 0, \quad y > 0; \quad \text{ba} \quad x < 0, \quad y < 0.$

4. $u = \ln(x + y) + 2x - y + 7,$

j: $x + y > 0$ yarim

tekislik.

Quyidagi funktsiyalarning birinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

1. $u = x^2 + 5xy^2 - y^3,$

j: $u'_x = 2x + 5y^2, \quad u'_y = 10xy - 3y^2.$

2. $u = \sqrt{2x + 5y},$

j: $u'_x = \frac{1}{\sqrt{2x + 5y}}, \quad u'_y = \frac{5}{2\sqrt{2x + 5y}}.$

3. $u = \ln(x + y) + 2x - y + 7,$

j: $u'_x = \frac{1}{x + y} + 2, \quad u'_y = \frac{1}{x + y} - 1.$

4. $u = x^2 \sin y + y^3,$

j: $u'_x = 2x \sin y, \quad u'_y = x^2 \cos y + 3y^2.$

Quyidagi funktsiyalarni ekstremumga tekshiring.

$$1. \quad u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5, \quad \text{j: } \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ nuqtada}$$

$$u_{\min} = 36; \quad (0;0) \text{ nuqtada ekstremumga ega emas.}$$

$$2. \quad u = (x-1)^2 + 2y^2 \quad \text{j: } (1;0) \text{ nuqtada } u_{\min} = 0.$$

$$3. \quad u = 2x^3 - x^2 + xy^2 - 4x + 3, \quad \text{j: } \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \text{ nuqtada}$$

$$u_{\max} = 4\frac{17}{27}, \quad (1;0) \text{ nuqtada } u_{\min} = 0, \quad (0;-2), \quad (0;2)$$

nuqtalarda ekstremumga ega emas.

$$4. \quad u = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad \text{j: } (0;3) \text{ nuqtada } u_{\max} = 9.$$

Tenglamani yeching.

$$1. \quad (3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i,$$

$$\text{j: } x = \frac{20}{17}, \quad y = -\frac{36}{17}.$$

$$2. \quad \frac{1}{z-i} + \frac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}, \text{ bu yerda } z = x + iy, \text{ j: haqiqiy}$$

yechimi yo'q.

$$3. \quad (4x - 3y) + (3x + 5y)i = 10 - (3x - 2y - 30)i,$$

$$\text{j: } x = 4, \quad y = 2.$$

$$4. \quad (2 - 7i)x + (8 + 6i)y = (-6 + 5i)x - 8,$$

$$\text{j: } x = -\frac{1}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}.$$

Quyidagi kompleks sonlarning moduli va argumentini toping.

$$5. \quad z = 4 + 3i; \quad \text{j: } |z| = 5, \quad \varphi = \arctg \frac{3}{4}.$$

$$6. \quad z = -2 + 2\sqrt{3}i; \quad \text{j: } |z| = 4, \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

$$7. \quad z = -7 - i; \quad j: |z| = 5\sqrt{2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} - \pi.$$

$$8. \quad z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}; \quad j: |z| = 1, \quad \varphi = \frac{4}{5}\pi.$$

Ushbu kompleks sonlarni trigonometrik ko'rinishda yozing.

$$9. \quad -2; \quad j: 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

$$10. \quad 2i; \quad j: 2\left(\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi\right).$$

$$11. \quad -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \quad j: 2\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right).$$

$$12. \quad -1 - i\sqrt{3}; \quad j: 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

Quyidagilarni hisoblang.

$$13. \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}; \quad j: -2^{19}(1+i\sqrt{3}).$$

$$14. \quad (2-2i)^7; \quad j: 2^{10}(1+i).$$

$$15. \quad (\sqrt{3}-3i)^6; \quad j: 1728.$$

$$16. \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8; \quad j: 1.$$

X BOB

BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENTIAL TENGLAMALAR.

1-§. Asosiy tushunchalar.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama **n-tartibli oddiy differentsial tenglama** deyiladi.

Differentsial tenglamaning tartibi deb bu tenglamaga kiruvchi **eng yuqori tartibli hosila tartibiga** aytiladi. Masalan, $y - xy' = 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + e^x}$$

tenglama birinchi tartibli;

tenglama ikkinchi

tartibli; $y''' - 8y = 0$ tenglama esa uchinchi tartibli.

Tenglamadagi y ning o'rniga qo'yganda uni ayniyatga aylantiruvchi $\varphi(x)$ funktsiya **tenglamaning yechimi** deyiladi. Yechimning grafigi **tenglamaning integral egri chizig'i** deyiladi. Agar differentsial tenglamani qanoatlantiruvchi funktsiya oshkormas ko'rinishda, yag'ni $\varphi(x, y) = 0$ ko'rinishdagi munosabat orqali berilgan bo'lsa, u holda tenglama integrali xaqida gapiriladi.

(1) differentsial tenglamaning barcha yechimlarini, ixtiyoriy o'zgarmaslar $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ga bog'liq bo'lgan

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

munosabat bilan umumiy ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu munosabatga (1) differentsial **tenglamaning umumiy yechimi** deyiladi.

Masalan, birinchi tartibli tenglama uchun umumiy yechim $y = \varphi(x, c)$ ko'rinishga, ikkinchi tartibli tenglama uchun esa $y = \varphi(x_1, c_1, c_2)$ ko'rinishga ega.

Umumiy yechimdan erkli o'zgarmaslarning turli son qiymatlarida hosil qilinadigan yechimlar bu **tenglamaning xususiy yechimlari** deyiladi.

Umumiy yechim geometrik nuqtai nazardan egri chiziqlar oilasini, xususiy yechim esa bu oilaning birorta egri chizig'ini aniqlaydi. Differentsial tenglamaning xususiy yechimini topish uchun boshlang'ich shartlar beriladi.

1-Misol. $y = 2x$ funktsiya $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ tenglamaning yechimi ekanligini tekshiring.

Echilishi: $y' = 2$, $y'' = 0$ larni tenglamaga qo'yamiz:

$$x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 2 + 2 \cdot 2x = 0 - 4x + 4x = 0$$

yahni, $y = 2x$ funktsiya haqiqatdan ham berilgan differentsial tenglamaning yechimi ekan.

2-Misol. $y' - 2y = 0$ differentsial tenglamaning umumiy yechimi $y = Ce^{2x}$ ko'rinishga ega. Uning $y(1) = e^2$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Echilishi: Ixtiyoriy o'zgarmas S ning izlanayotgan xususiy yechimga mos qiymati umumiy yechimining ifodasiga boshlang'ich shartlarni keltirib qo'yish natijasida hosil bo'ladi:

$$e^2 = Ce^2$$

bu yerdan $C = 1$. Hosil qilingan $C = 1$ qiymatni umumiy yechimga qo'yib, berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y = e^{2x}$ xususiy yechimni hosil qilamiz.

1.O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalar.

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \quad (2)$$

ko'rinishga ega bo'lgan tenglama, **o'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglama** deyiladi. Tenglamani yechish uchun, tenglamaning birinchi hadlarini $M_2(y)N_1(x)$ (noldan farqli deb faraz

qilamiz) ga bo'lib o'zgaruvchilari ajralgan $\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$

tenglamani hosil qilamiz. Tenglamaning umumiy integrali hadma-had integrallash bilan topiladi:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C$$

3-Misol. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Echilishi: Berilgan tenglamani $y' = \frac{dy}{dx}$ ko'rinishda yozib olamiz va tenglamaning ikkala qismini dx ga ko'paytiramiz:

$$(\sqrt{y} + 1)\sqrt{x}dy - ydx = 0$$

o'zgaruvchilarni ajratamiz,

$$\frac{\sqrt{y} + 1}{y} dy - \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 0$$

va integrallab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int \left(y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1} \right) dy - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = C$$

bundan

$$2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C$$

ni topamiz.

4-Misol. $ydx + ctgxdy = 0$ tenglamaning $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy integralini toping.

Echilishi: O'zgaruvchilarni ajratib quyidagiga kelimiz,

$$\frac{dx}{ctgx} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{yoki} \quad tgx dx + \frac{dy}{y} = 0$$

ikkala qismini integrallaymiz va natijada

$$-\ln|\cos x| + \ln|y| = \ln C.,$$

$$|y| = C|\cos x|; \quad y = \pm C \cos x = C_1 \cos x$$

ga ega bo'lamiz. Boshlang'ich shartdan foydalansak, $(x = \frac{\pi}{6}, y = -1)$

$$-1 = C_1 \cos \frac{\pi}{6} = C_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad C_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Shunday qilib, izlanayotgan xususiy integral quyidagicha bo'ladi.

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos x$$

1-Masala. (*bakteriya ko'payishining tezligi haqida.*)

Bakteriya ko'payish tezligi uning soniga to'g'ri proporsional. Boshlang'ich $t=0$ vaqtda 100 ta bakteriya bo'lsin, 3 soatdan keyin ularning soni ikki barobar ko'payadi. Bakteriya sonining vaqtga bog'liqligini aniqlash kerak va 9 soatda bakteriya qancha marta ko'payadi?

Echilishi. Aytaylik, x bakteriyalar soni bo'lsin. Masala shartiga ko'ra

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

bu yerda k -proporsionallik koeffitsienti. Tenglamani o'zgaruvchilarga ajratib integrallasak, quyidagini hosil qilamiz:

$$x = Ce^{kt}$$

S ni aniqlash uchun $t=0$ va $x=100$ dan foydalanamiz. $S=100$ bo'ladi, demak,

$$x = 100e^{kt}$$

k -proporsionallik koeffitsientini $t=3$ va $x=200$ dan foydalanib topamiz:

$$200 = 100e^{3k} \quad \text{yoki} \quad 2 = e^{3k}$$

bundan kelib chiqadiki $e^k = 2^{\frac{1}{3}}$. Shuning uchun qidirilayotgan funktsiya

$$x = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

bundan $t=9$ da $x=800$ ekanligini topamiz. Demak, 9 soat ichida bakteriya 8 marta ko'payar ekan.

2-Masala. (*Aralashmaning kontsentratsiyasi.*) Tarkibida 100l suv va 10 kg tuz bo'lgan idishga 30 l/min tezlik bilan suv to'xtovsiz quyib turiladi va idishdan 20 l/min tezlik bilan aralashma oqib chiqadi. Faraz qilamiz, suv bilan tuz tez aralashib ketadi. t vaqt ichida idishda qancha tuz qolishini aniqlang.

Echilishi. Aytaylik, t vaqt ichida x -miqdorda tuz bor. dt vaqt ichida idishda dx -miqdorda tuz chiqib ketadi. (minus ishorasi x -kamayuvchi funktsiya ekanini bildiradi). t vaqtda idishda aralashma hajmi quyidagiga teng.

$$v = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t$$

shuning uchun tuz miqdori (bir litr aralashmada) t vaqtda

$$\frac{x}{100 + 10t}$$

ga teng. Bundan kelib chiqadiki, dt vaqt ichida tuz

$$\frac{x}{100 + 10t} \cdot 20t$$

ga kamayadi.

Bundan quyidagi differentsial tenglamaga ega bo'lamiz.

$$-dx = \frac{20xdt}{100 + 10t}$$

yoki

$$-dx = \frac{2xdt}{10 + t}$$

o'zgaruvchilarga ajratib integrallasak,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{10 + t},$$

$$\ln x = -2 \ln(10 + t) + \ln C$$

bundan kelib chiqadiki

$$x = \frac{C}{(10 + t)^2}.$$

Agar $t=0$, $x=10$ da $S=1000$ ga teng.

Shunday qilib, t vaqt ichida idishda tuzning kg hisobiga kamayish qonuni, quyidagi formula bilan beriladi:

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2} \quad (1).$$

(1) formula orqali havzadagi tuz miqdorini bilgan holda yuqoridagi hodisaning boshlanganiga qancha vaqt o'tganini bilish mumkin. Mana shu fikr asosida dengiz va okean yoshi aniqlanadi.

3-Masala. (*Jismning sovishi.*) Atrofdagi havo temperaturasi 20^0 ga teng bo'lsin. Jismning sovish tezligi jism temperaturasi va atrofdagi havo temperaturasi ayirmasiga to'g'ri proporsional. Mahlumki, 20 min ichida jism 100^0C dan 60^0C gacha soviydi. Jism temperaturasi θ ning t vaqt ichida o'zgarish qonunini aniqlang.

Echilishi. Masala shartiga ko'ra, quyidagini yozamiz:

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - 20),$$

bu yerda k -proporsionallik koeffitsienti. O'zgaruvchilarga ajratib integrallasak:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{\theta - 20} &= k dt, \\ \ln(\theta - 20) &= kt + \ln c. \end{aligned}$$

Bu ifodani potentsirlasak,

$$\theta - 20 = ce^{kt}.$$

c ni aniqlash uchun boshlang'ich shartdan foydalanamiz:

$$t = 0 \text{ da } \theta = 100^0.$$

Bundan $c = 80$. SHuning uchun

$$\theta = 20 + 80e^{kt}.$$

Proporsionallik koeffitsienti k ni qo'shimcha shartlar yordamida aniqlaymiz, $t = 20$ $\theta = 60^0$. Bundan:

$$60 = 20 + 80e^{20k}$$

yoki

$$e^{20k} = \frac{1}{2}.$$

Demak,

$$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

SHunday qilib, natija quyidagicha:

$$\theta = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

2. Bir jinsli differentsial tenglamalar.

Quyidagi tenglikni $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ qanoatlantiruvchi $f(x, y)$ funktsiyaga **m tartibli bir jinsli funktsiya** deyiladi. Masalan,

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

2- tartibli bir jinsli funktsiya bo'ladi.

$$(tx)^2 + 2(ty)^2 - (tx)(ty) = t^2(x^2 + 2y^2 - xy)$$

Agarda $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funktsiyalar bir xil tartibli bir jinsli funktsiyalar bo'lsa, unda ushbu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga **bir jinsli birinchi tartibli tenglama** deyiladi,

Bir jinsli tenglama $y = ux$ (bu yerda u yangi izlanayotgan funktsiya) almashtirish orqali o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglamaga keltiriladi. $y = ux$ tenglikni differentsiallab, topamiz: $dy = udx + xdu$.

4-Misol. $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0$, $y(0) = 0$ boshlang'ich shart bilan berilgan tenglamani yeching.

Tenglamani yechish uchun $y = ux$ almashtirish bajaramiz.

$$(u^2x^2 - 3x^2)dx + 2x^2u(udx + xdu) = 0$$

yoki

$$3(u^2 - 1)dx + 2xudu = 0,$$

$$\frac{3dx}{x} + \frac{2udu}{u^2 - 1} = 0 \quad \text{ni integrallab, } 3 \ln x + \ln(u^2 - 1) = \ln C \quad \text{ni hosil}$$

qilamiz. Bu tenglikni potentsirlab, $x^2(u^2 - 1) = C$ ni topamiz. $u = \frac{y}{x}$

ni o'rniga qo'yib $x^3 \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) = C$ yoki $x(y^2 - x^2) = C$ boshlangich

shartdan foydalanib $S=0$ ni topamiz. Qidirilayotgan xususiy yechim $y = \pm x$ bo'ladi.

Nazorat savollari.

1. Asosiy tushunchalar.
2. O'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar.
3. Bir jinsli tenglamalar.
4. Masalalar.

2-§. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar.

Ushbu

$$y' + py = q \quad (1)$$

tenglamaga **birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglama** deyiladi.

Bu yerda $p = p(x)$ va $q = q(x)$ lar (a, b) da uzluksiz funktsiyalar.

$y = u \cdot \mathcal{G}$ almashtirish bilan tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan ikkita

tenglamaga keltiriladi. $u = u(x)$ funktsiya yangi noma'lum funktsiya,

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(x)$ funktsiya esa ixtiyoriy tanlab olinadi. Bu almashtirish

tenglamani

$$u' \mathcal{G} + u \mathcal{G}' + pu \mathcal{G} = q$$

yoki

$$\vartheta \frac{du}{dx} + \left(\frac{d\vartheta}{dx} + p\vartheta \right) u = q$$

ko'rinishga keltiradi. ϑ ning ixtiyoriyligidan

$$\frac{d\vartheta}{dx} + p\vartheta = 0$$

deb olamiz. O'zgaruvchilarga ajratib va integrallab:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -pdx, \ln \vartheta = -\int pdx$$

yoki

$$\vartheta = e^{-\int pdx}$$

bundan

$$e^{-\int pdx} \frac{du}{dx} = q$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechsak,

$$u = \int q e^{\int pdx} dx + C$$

ga kelamiz. Nihoyat, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{-\int pdx} \left[\int q e^{\int pdx} dx + C \right]$$

(2)

bo'ladi.

Izoh: Agar (1) tenglamada $q(x) = 0$ bo'lsa, u holda tenglama birinchi tartibli **chiziqli bir jinsli tenglama** deyiladi, aks holda **chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglama** deyiladi. Bundan kelib chiqadiki, birinchi tartibli bir jinsli tenglama

$$y' + py = 0 \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi, yechimi esa quyidagicha:

$$y = Ce^{-\int pdx} \quad (4)$$

1-Misol. $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$ tenglamaning yechimini toping.

Echilishi: Tenglamaning ikkala tomonini $x^2 y^2$ ga bo'lamiz,

$$y' + \frac{y}{x} = y^{-2} \cdot \frac{1}{x^2},$$

agar $p = x^{-1}$, $q = x^{-2}$ deb olsak, tenglama

$$y' + py = qy^{-2}$$

Bernulli tenglamasiga keladi. $y = u \cdot v$ deb olsak, $y' = u'v + uv'$ deb tenglamaga qo'yamiz:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$$

yoki

$$u' \cdot v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$$

Quyidagi ikkita tenglamani yechamiz:

$$1) v' + \frac{v}{x} = 0, \quad 2) u' \cdot v = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$$

Birinchi tenglamani yechib v ni topamiz:

$$\frac{dv}{v} + \frac{dx}{x} = 0; \quad \ln v + \ln x = 0, \quad vx = 1; \quad v = \frac{1}{x}$$

v -ni 2-chi tenglamaga qo'yib, u ni topamiz:

$$\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2}; \quad u^2 du = x dx; \quad \frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{3}; \quad u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$$

qidirilayotgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y = u \cdot v = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{c}{x^3}}$$

1. Chiziqli differentsial tenglamalarning biologiyaga tadbiqu.

Masala. Ovqatlanish resursi juda yaxshi sharoitda bo'lgan mikroorganizmlar jamoasini qaraylik. Vaqt o'tishi bilan jamoaning ko'payishi va nobud bo'lishi o'zgarib turadi. Ana shu o'zgarish qonunini toping.

Echilishi. Aytaylik, $x = x(t)$ t vaqt ichidagi tirik organizmlarning soni bo'lsin, $x(t + \Delta t)$ esa $t + \Delta t$ vaqtdagi soni. U holda ayirma

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x$$

ni beradi. Δt vaqt ichida balog'atga yetganlarining bir qismi nasl qoldiradi, qolgan qismi nobud bo'lishi mumkin. Shunday qilib,

$$\Delta x = G - H$$

bu yerda G t dan $t + \Delta t$ vaqt o'tganda tug'ilganlari soni, H shu vaqt ichida nobud bo'lganlar soni.

Tug'ilganlar soni G Δt vaqt oralig'iga bog'liq va nasl qoldiruvchi "ota-ona" larning soniga bog'liq, chunki ular qancha ko'p bo'lsa tug'ilish shuncha ko'p bo'ladi.

Shunday qilib,

$$G = \Phi(x, \Delta t)$$

bu yerda $\Phi(x, \Delta t)$ funktsiya x yoki Δt ning o'sishi bilan o'sadi yoki x yoki Δt larning biri nolga intilsa nolga teng bo'ladi.

Δt o'zgaruvchiga kelsak eng oddiy tajriba shuni ko'rsatadiki, u chiziqli bo'lib agar kuzatishni ikki marta uzaytirsak, mikroorganizmlar nasli ham ikki marta oshadi. Shunday qilib,

$$\Phi(x, \Delta t) = f(x)\Delta t$$

$f(x)$ funktsiya xususiyati murakkabroq. Biz bilamizki, x o'sishi bilan $f(x)$ monoton o'sadi va $x=0$ bo'lsa nol bo'ladi. Ammo o'sish mikroorganizm turiga bog'liq. Biz nasl miqdorining "ota-ona" lar soniga to'g'ri proporsional bo'lgan holati bilan chegaralanamiz, yag'ni $f(x) = \alpha x$ ($\alpha = const$). Shunday qilib,

$$G = \alpha x \Delta t .$$

Shunga o'xshash,

$$H = \beta x \cdot \Delta t$$

va bundan kelib chiqadiki,

$$\Delta x = \alpha x \Delta t - \beta x \Delta t$$

yoki

$$\Delta x = \gamma x \Delta t \quad (1)$$

bu yerda

$$\gamma = \alpha - \beta$$

(1) da tenglamaning ikkala tomonini Δt ga bo'lib, limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

natijada quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \quad (2)$$

yoki

$$\frac{dx}{dt} - \gamma x = 0 .$$

Birinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani yechib,

$$x = C e^{\gamma t} \quad (3)$$

ni hosil kilamiz.

$t = t_0$ da $x = x(t_0)$ (bu yerda t_0 boshlang'ich vaqtda $x(t_0) = x_0$ tirik mikroorganizmlar soni) boshlang'ich shart bilan S ni topamiz.

$$C = x_0 e^{-\gamma t_0}$$

buni (3) ga qo'yib, vaqt davomida mikroorganizmlar o'zgarish qonunini topamiz.

$$x = x_0 e^{\gamma(t-t_0)} \quad (4)$$

Ammo topgan bu qonuniyatimiz qanchalik haqiqiy hayotga to'g'ri kelish kelmasligini tajriba va kuzatishlar hal etadi. (4) formula shuni ko'rsatadiki, o'sish eksponentsial darajada, lekin hayotda birorta ham tirik organizm bu darajada o'smaydi. Chunki biz faraz qilgan (2) tenglamada ovqatlanish sharoiti yaxshiligi va tashqi faktorlarning tag'siri yo'qligi bu haqiqatga ziddir. Shunday qilib (2) tenglama yoki nazariy xarakterga ega (uzluksiz oziqlantirib turilganda va tashqi halaqit beruvchi kuchlar bo'lmasa, tirik organizmlar qanday ko'payishini ko'rish mumkin) yoki sunhiy ko'paytirishlar natijasini ko'rsatadi.

(2) tenglamani birinchi marta 1802 yil Malhtus qo'llagan. Uning xatosi bu tenglamani nafaqat tabiatga, hatto insonlarga qo'llasa ham bo'ladi deb tushungan. Aslida tenglama tor doirada qo'llaniladi.

2. Tuliq differentsialli birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Integrallovchi ko'paytuvchi.

Ushbu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

tenglama to'liq differentsialli tenglama deyiladi. Agarda tenglamaning chap tarafini $u(x, y)$ funktsiyaning to'liq differentsiali ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa:

$$Mdx + Ndy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

(1) chi differentsial tenglamaning to'liq differentsialli tenglamasi bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

ning bajarilishi zarur va yetarli. (1) ning umumiy integrali

$$u(x, y) = C$$

yoki

$$\int_{x_0}^x Mdx + \int_{y_0}^y Ndy = C$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bahzi hollarda (1) chi tenglama tuliq differentsialli bo'lmasa, shunday $\mu(x, y)$ funktsiya tanlash mumkinki (1) ning chap tarafiga ko'paytirsak tenglama tuliq differentsialli ko'rinishga keladi.

$$du = \mu Mdx + \mu Ndy \quad (3)$$

bunday funktsiya $\mu(x, y)$ integrallovchi ko'paytuvchi deyiladi va quyidagilar kelib chiqadi.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

yoki

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$$

hamda

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4)$$

Agar $\mu = \mu(x)$ bo'lsa, u holda $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ va (4) tenglama quyidagi

ko'rinishga keladi:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (5)$$

Agar $\mu = \mu(y)$ bo'lsa, yuqoridagidek $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{1}{M}$

ko'rinishda bo'ladi.

2-Misol: $2xy + 3y^2 + (x^2 + 6xy - 3y^2) \frac{\partial y}{\partial x} = 0$

tenglamani yeching.

Echilishi: $N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y$

$$M(x, y) = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y$$

Shunday qilib, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, ya'ni tenglamaning chap qismi $u(x, y)$

funktsiyaning to'liq differentsiali bo'ladi.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2$$

Birinchi tenglamadan

$$u(x, y) = x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ funktsiyanı aniqlash uchun, u bo'yicha oxirgi tenglikni differentsiallaymiz:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{du}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \text{ya'ni} \quad \frac{du}{dy} = -3y^2.$$

bundan $\varphi(y) = -y^3 + c_1$.

Shuning uchun,

$$u(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + c_1.$$

Tenglamaning yechimi:

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = c$$

3-Misol. $(1 - \frac{x}{y})dx + (2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2})dy = 0$

tenglamani yeching.

Echilishi: $M(x, y) = 1 - \frac{x}{y};$

$$N(x, y) = 2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y + \frac{1}{y} + \frac{2x}{y^2}.$$

Demak, tenglama to'liq differentsialli tenglama emas.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2} = -(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}).$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{x}, \quad \frac{d\mu}{\mu} + \frac{dx}{x} = 0$$

bundan $\mu = \frac{1}{x}$ ni topamiz.

Berilgan tenglamani $\frac{1}{x}$ ga ko'paytiramiz:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

Quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{y} + 2y\right)dy - \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0$$

$$d\left(\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right) = 0 \quad \text{dan}$$

$$\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = C \quad \text{yechimga ega bo'lamiz.}$$

3. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar.

Agar $F(x, y, y') = 0$ tenglama y' ga nisbatan 2-darajali bo'lsa, bu tenglama, biror sohada x va y ga nisbatan uzluksiz $y' = f_1(x, y)$ va $y' = f_2(x, y)$ echimga ega. Geometrik nuqtai nazardan bu tenglama shu sohaning ixtiyoriy (x_0, y_0) nuqtasida ikkita integral chiziqning yo'nalishlarini aniqlaydi.

Ushbu

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

tenglama **Langranj tenglamasi** deyiladi.

Bunda $y' = p$ almashtirish x ga nisbatan tenglamani chiziqli ko'rinishga keltiradi:

$$P = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}.$$

Uni yechsak,

$$x = \varphi(p)x + \psi(p)$$

bu yerda p

$$p = \varphi(p)$$

tenglamaning yechimi.

Ushbu

$$y = xy' + \psi(y')$$

tenglama **Klero tenglamasi** deyiladi. Bu tenglama Langranj tenglamasining xususiy holidir. Bu tenglama $y = Cx + \psi(c)$ umumiy integralga va $y = px + \psi(p)$ hamda $x + \psi'(p) = 0$ tenglamalardan r parametрни yo'qotishdan hosil bo'ladigan maxsus yechimga egadir.

4-Misol. $y' + y = x(y')^2$ tenglamani yeching.

Echilishi: Bu tenglama Lagranj tenglamasi. Belgilash kiritamiz.

$p = y'$, u holda $y = xp^2 - p$ bo'ladi.

x ga nisbatan differentsiallaymiz:

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px \frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}$$

yoki

$$p = p^2 + 2px \frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}$$

Quyidagi chiziqli differentsial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)}$$

x ga nisbatan yechilib, $x = \frac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}$ ni topamiz.

5-Misol. $\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0$ tenglamani yeching.

Echilishi: Bu tenglama Lagranj tenglamasi. Belgilash kiritamiz.

$p = y'$, u holda $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$ bo'ladi.

x ga nisbatan differentsiallaymiz:

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{p \frac{dp}{dx}}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Bundan $\left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) \frac{dp}{dx} = 0$, $x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$ yoki $p = C$.

Shunday qilib, $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$ va

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \\ y = px + \sqrt{1 + p^2} \end{cases}$$

Bu sistemadan p ni yo'qotib quyidagini topamiz: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Nazorat savollari.

1. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar.
2. CHiziqli differentsial tenglamalarning biologiyyaga tadbiqi.
3. Tuliq differentsialli birinchi tartibli differentsial tenglamalar .
4. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1. Quyidagi misollarda berilgan funktsiyalar mos ravishda tenglamalarning yechimi ekanligi tekshirilsin.

1. $y = \frac{\sin x}{x}$ $xy' + y = \cos x$.
2. $y = c\ell^{-2x} + \frac{1}{3}\ell^x$ $y' + 2y = \ell^x$.
3. $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$ $(1-x^2)y' + xy = 2x$.
4. $y = x\sqrt{1-x^2}$ $yy' = x - 2x^3$.
5. $y = \ell^{\arcsin cx}$ $xy' = y \lg \ln y$
6. $y = (x-c)^3$ $y' = 3y^{2/3}$.
7. $y = \ell^{cx}$ $y = \ell^{xy'/y}$.
8. $y = cx^3$ $xy' = 3y$.
9. $y = \sin(x+c)$ $y^2 + y'^2 = 1$.
10. $x^2 + cy^2 = 2y$ $x^2 y' = yy' + xy$.
11. $y^2 + cx = x^3$ $2xyy' - y^2 = 2x^3$.
12. $y = c(x-c)^2$ $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$.
13. $cy = \sin cx$ $y' = \cos \frac{x\sqrt{1-y'^2}}{y}$.
14. $y = cx + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ $y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

$$15. x^2 + y^2 - cx = 0 \quad 2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

$$16. y = \sin x + c \cdot \cos x \quad y' \cos x + y \sin x = 1.$$

$$17. x + y + c(1 - xy) = 0 \quad y' + \frac{1 + y^2}{1 + x^2} = 0.$$

$$18. x - y - c\ell^{\frac{x}{y-x}} = 0 \quad yy' - 2y + x = 0.$$

$$19. y^2 = cx \quad 2xy' - y = 0.$$

$$20. y = \frac{c}{\cos x} \quad y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

$$21. y = -\frac{1}{3x + c} \quad y' = 3y^2.$$

$$22. y = \ell n(c + \ell^x) \quad y' = \ell^{x-y}.$$

$$23. x = y\ell ncy \quad y'(x + y) = y.$$

2. O'zgaruvchilarga ajraladigan birinchi tartibli differentsial tenglamalar yechilsin.

$$1. \quad x(1 + y^2) + y(1 + x^2)y' = 0 \quad \text{як.} \quad (1 + x^2)(1 + y^2) = c.$$

$$2. \quad y' = xy^2 + 2xy \quad \text{як.} \quad \frac{y}{y + 2} = c\ell^{x^2}.$$

$$3. \quad \ell^x dx - (1 + \ell^x)ydy = 0 \quad \text{як.} \quad \ell^{\frac{y^2}{2}} = \frac{\sqrt{\ell}}{2}(1 + \ell^x).$$

$$4. \quad y' + y = 2x + 1 \quad \text{як.} \quad y - 2x - 1 = -2 + c\ell^{-x}.$$

$$5. \quad y' = \cos(x - y - 1) \quad \text{як.} \quad y = x - 1 - 2\operatorname{arctg}(c - x) + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \quad (1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0 \quad \text{як.} \quad x + y = c(1 - xy).$$

7.

$$(1 + y^2)dx + xydy = 0 \quad \text{жс.} \quad x^2(1 + y^2) = c.$$

8.

$$(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0 \quad \text{жс.} \quad (x + y)(x - y - 2) + 2\ell n\left(\frac{1+x}{1-y}\right) + c.$$

9.

$$(1 + y^2)dx = xdy \quad \text{жс.} \quad y = \operatorname{tg} \ell n cx.$$

10.

$$x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0 \quad \text{жс.} \quad \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c.$$

11.

$$x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0 \quad y(0) = 1 \quad \text{жс.} \quad \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1.$$

12.

$$\ell^{-y}(1 + y') = 1 \quad \text{жс.} \quad \ell^x = c(1 - \ell^{-y})$$

13.

$$y' = \sin(x - y) \quad \text{жс.} \quad x + c = \operatorname{ctg}\left(\frac{y - x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

14.

$$y' = ax + by + c. \quad (a, b, c = \text{const}) \quad \text{жс.} \quad b(ax + by + c) + a = c\ell^{bx}.$$

15.

$$(x + y)^2 y' = a^2 \quad \text{жс.} \quad x + y = \operatorname{atg}\left(c + \frac{y}{a}\right).$$

16.

$$(x - y^2)dx + 2xydy = 0 \quad \text{жс.} \quad x\ell^{\frac{y^2}{x}} = c.$$

17.

$$(1 + x^2)dy - xydx = 0 \quad y(2) = 1 \quad \text{жс.} \quad y = \sqrt{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

18.

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad 1 + y^2 = c(1 - x^2).$$

19.

$$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x^2y^2 + x^2 - y^2 = c.$$

20.

$$xy' + y = y^2 \quad y(1) = 0,5 \quad \text{жс.} \quad y(1 - cx) = 1.$$

21.

$$xy' = \operatorname{tg} y \quad \text{жс.} \quad \sin y = cx.$$

22.

$$2xyy' = y^2 - 1$$

$$\text{ЖС.} \quad y^2 - 1 = cx.$$

3. Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar yechilsin.

1.

$$y' = \frac{xy + y^2 \ell^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$$

$$\text{ЖС.} \quad \ell^{\frac{x}{y}} + \ell n|x| = c.$$

2.

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$$

$$\text{ЖС.} \quad x = c \ell^{-\sin \frac{y}{x}}.$$

3.

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

$$\text{ЖС.} \quad y = x \sin \ell n cx.$$

4.

$$y' = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}$$

$$\text{ЖС.} \quad \frac{y^2 - x^3}{y^2 + 4x^3} x^5.$$

5.

$$(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0$$

$$\text{ЖС.} \quad x = c \ell^{y^2/(2x^2)}.$$

6.

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

$$\text{ЖС.} \quad x = c \ell^{\frac{y}{x}}.$$

7.

$$xy' = 3y - x$$

$$\text{ЖС.} \quad x^3 = c(2y - x).$$

8.

$$(x - y) dx + x dy = 0$$

$$\text{ЖС.} \quad y = x(c - \ell n|x|).$$

9.

$$y^2 dx - (x^2 + xy) dy = 0$$

$$\text{ЖС.} \quad y = c \ell^{\frac{y}{x}}.$$

10.

$$(x^2 - xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$$

$$\text{ЖС.} \quad x = c \ell^{\frac{x}{x-y}}.$$

11.

$$(x + 2y) dx - (2x + y) dy = 0$$

$$\text{ЖС.} \quad (x - y)^3 = c(x + y).$$

12.

$$xy' = y + x\ell^{\frac{y}{x}} \quad \text{жс.} \quad \ell n|cx| = -\ell^{\frac{-y}{x}}.$$

13.

$$xy' - x \cos^2 \frac{y}{x} = y \quad \text{жс.} \quad xc \ell^{tg(y/x)}.$$

14.

$$y - xy' = \sqrt{x^2 - y^2} \quad \text{жс.} \quad x = c \ell^{\arccos \frac{y}{x}}.$$

15.

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = c.$$

16.

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x + 2y + 3 \ln|x + y - 2| = c.$$

17.

$$(x^2 y^2 - 1)dy + 2xy^3 dx = 0 \quad \text{жс.} \quad y = \frac{1 + x^2 y^2}{c}.$$

18.

$$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0 \quad \text{жс.} \quad y^2 - 3xy + 2x^2 = c.$$

19.

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} \quad \text{жс.} \quad c(y^2 - x^2) = y^3.$$

20.

$$(y - xy')^2 = x^2 + y^2 \quad \text{жс.} \quad c^2 x^2 = 1 + 2cy; \quad c^2 - x^2 = 2cy.$$

21.

$$3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0 \quad \text{жс.} \quad (x - 1)(3x + 2y - 1) = c.$$

22.

$$(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad (x + y + 1)^5 \cdot (x - y - 1)^2 = c.$$

4. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va Bernulli differentsial tenglamalari yechilsin.

1.

$$y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4 \quad \text{жс.} \quad y = (c + x^3 \ell^{-x^2}) \ell^{x^2} = c \ell^{x^2} + x^3.$$

2.

$$y' + y \cos x = \ell^{-\sin x} \quad \text{жс.} \quad y = (x + c) \ell^{-\sin x}.$$

3.

$$y + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{жс.} \quad y = c \cos x + \sin x.$$

4.

$$y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\text{жс.} \quad y = c \sin x + \frac{\sin x}{x}.$$

5.

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

$$\text{жс.} \quad y = c \cdot \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}.$$

6.

$$y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$$

$$\text{жс.} \quad y = cx^2 + x^4.$$

7.

$$y' + 2xy = 2x\ell^{-x^2}$$

$$\text{жс.} \quad y = (x^2 + c)\ell^{-x^2}.$$

8.

$$y' + 2y = x^2 + 2x$$

$$\text{жс.} \quad y = c\ell^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1).$$

9.

$$(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$$

$$\text{жс.} \quad y = c\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x.$$

10.

$$2xy' - y = 3x^2$$

$$\text{жс.} \quad y = c\sqrt{x} + x^2.$$

11.

$$xy' + y = y^2 \ell nx$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{1}{1 + cx + \ell nx}.$$

12.

$$2yy' - x = -x^3 \sin y$$

$$\text{жс.} \quad y = (c - \cos y)x^2.$$

13.

$$y' + 2y = \ell^x y^2$$

$$\text{жс.} \quad y(\ell^x + c\ell^{2x}) = 1.$$

14.

$$y' - 2xy = \ell^{x^2}$$

$$\text{жс.} \quad y = (x + c)\ell^{x^2}.$$

15.

$$y' + xy + x = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = c\ell^{-\frac{x^2}{2}} - 1.$$

16.

$$xy' = 2x\ell nx - y$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{c}{x} + x\ell nx - \frac{x}{2}.$$

17.

$$(y + \ell^x)dx - dy = 0 \quad \text{жс.} \quad y = (c + x)\ell^x.$$

18.

$$y'(1 + x^2) - xy = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{жс.} \quad y = (\arctg x + c)\sqrt{x^2 + 1}.$$

19.

$$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2} \quad \text{жс.} \quad y^3 = cx^2 + x^3.$$

20.

$$x^2 y' + 2x^3 y = y^2 (1 + 2x^2) \quad \text{жс.} \quad \frac{1}{y} = c\ell^{x^2} + \frac{1}{x}.$$

21.

$$(xy + x^2 y^3)y' = 1 \quad \text{жс.} \quad \frac{1}{x} = 2 - y^2 + c\ell^{\frac{y^2}{2}}.$$

22.

$$y = xy' + y'\ell ny \quad \text{жс.} \quad x = cy - 1 - \ell ny.$$

5. То'лиқ differentialsli 1-tartibli differential tenglamalar yechilsin.

1.

$$(\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x \sin xy = c_1.$$

2.

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x^4 + 2(xy)^2 + y^4 = 0.$$

3.

$$(x + y^2)dx - 2xy dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x = c \cdot \ell^{\frac{y^2}{x}}.$$

4.

$$2xy \ell ny dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1})dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x^2 \ell ny + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = c.$$

5.

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad x^2 y + 3xy^2 - y^3 = c.$$

6

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0 \quad \text{жс.} \quad 3xy^2 + x^2 y + 3y + x^2 = c.$$

7.

$$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = c.$$

8.

$$(y^2 + x^2 + a)yy' + (y^2 + x^2 - a)x = 0$$

$$\text{жс.} \quad (x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = c.$$

9.

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad \ell n|x| + \ell n|y| + y^2 - \frac{x}{y}.$$

10.

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad x^2 + \sin^2 y = cx.$$

11.

$$ydx - (x + x^2 + y^2)dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad \arctg \frac{x}{y} - y = c, \quad y = 0.$$

12.

$$(x + y - 1)dx + (\ell^y + x)dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad \ell^y + \frac{1}{2}x^2 + xy - x = c_1 + 1.$$

13.

$$(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad x^2 y + 3xy^2 - y^3 = c.$$

14.

$$ydx - (4x^2 y + x)dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad \frac{y}{x} + 2y^2 = c.$$

15.

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad 3x^2 y - y^3 = c.$$

16.

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$$

$$\text{жс.} \quad x^2 - 3x^3 y^2 + y^4 = c.$$

17.

$$\frac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ell nx\right)dy = 0$$

$$\text{жс.} \quad 4y\ell nx + y^4 = c.$$

18.

$$3x^2(1 + \ell ny)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$$

$$\text{жс.} \quad x^3 + x^3 \ell ny - y^2 = c.$$

19.

$$\ell^y - (2y + x\ell^{-y})dy = 0 \rightarrow$$

$$\text{жс.} \quad x\ell^{-y} - y^2 = c.$$

6. Hosilaga nisbatan yechilmagan 1-tartibli differentialsial tenglamalar. Lagranj va Klero tenglamalari yechilsin.

1.

$$y = x + y' - \ell n y'$$

$$\text{жс.} \quad p \neq 1. \quad y = \ell^{x-c} + c; \quad p = 1. \quad y = x + 1.$$

2.

$$y = 2xy' + \ell n y'$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{2c}{\rho} + \ell n \rho - 2 \quad x = \frac{c}{\rho^2} - \frac{1}{\rho}.$$

3.

$$y = xy' + \frac{a}{2y'} \quad (a = \text{const})$$

$$\text{жс.} \quad y = cx + \frac{a}{c^2}; \quad 4y^3 = 27ax^2.$$

4.

$$(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x$$

$$\text{жс.} \quad y = x^2 + c.$$

5.

$$(y')^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0$$

$$\text{жс.} \quad \left(y - \frac{1}{x+c} \right) \left(y - c\ell^{\frac{x^2}{2}} \right).$$

6.

$$(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$$

$$\text{жс.} \quad (y - \cos x - c)(y\ell^{-x^2} - c)$$

7.

$$y = (y')^2 \ell^y$$

$$\text{жс.} \quad y = 0, \quad y = \rho^2 \ell^\rho, \quad x = (\rho + 1)\ell^\rho + c.$$

8.

$$\ell n y' + \sin y' - x = 0$$

$$\text{жс.} \quad \begin{cases} x = \ell n \rho + \sin \rho \\ y = \rho + \cos \rho + \rho \sin \rho + c \end{cases}.$$

9.

$$y' \sin y' + \cos y' - y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = 1, \quad x = \sin \rho + c.$$

10

$$(y')^2 + (x+a)y' - y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = (x+a)c + c^2 \quad \text{ба} \quad \begin{cases} y = \rho^2 + (x+a)\rho \\ 2\rho + x + a = 0 \end{cases}.$$

11.

$$\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = cx + \sqrt{1+c^2} \quad \text{ба} \quad \begin{cases} x = \frac{-\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \\ y = \rho x + \sqrt{1+\rho^2} \end{cases}.$$

12.

$$x^4(y')^2 - xy' - y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = x^4 \rho^2 - x\rho, \quad 1 - 2\rho x^3 = 0 \quad \text{ёки} \quad y = -\frac{1}{4x^2}.$$

13.

$$xy' = y + x\sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\text{жс.} \quad x = \frac{c(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})}{\sqrt{1 + \rho^2}}; \quad y = x(\rho - \sqrt{1 + \rho^2}).$$

14. $y' + y = x(y')^2$

$$\text{жс.} \quad x = \frac{(\rho - \ell n \rho + c)}{(\rho - 1)^2}.$$

15.

$$y(y')^2 + 2xy' - y' = 0$$

$$\text{жс.} \quad z = y^2, \quad y^2 = cx + \frac{c^2}{4}.$$

16.

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

$$\text{жс.} \quad y = \pm 1, \quad y = \cos(x - c).$$

17.

$$(y')^2 - 2xy' + y = 0$$

$$\text{жс.} \quad x = \frac{2}{3}\rho + \frac{c}{\rho^2}; \quad y = 2\rho x - \rho^2, \quad y = 0.$$

18.

$$y = x + 2y' - (y')^2$$

$$\text{жс.} \quad y = x + 1, \quad x = -2\rho + c, \quad y = x + 2\rho - \rho^2.$$

19.

$$2y = xy' + y' \ell n y$$

$$\text{жс.} \quad \begin{cases} x = 2c\rho - \ell n \rho - 2 \\ y = c\rho^2 - \rho \end{cases}.$$

20.

$$y = x(1 + y') + y'^2$$

$$\text{жс.} \quad \begin{cases} x = 2(1 - \rho) + c\ell^{-\rho} \\ y = [2(1 - \rho) + c\ell^{-\rho}](1 + \rho) + \rho^2 \end{cases}.$$

XI BOB.
IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENTIAL
TENGLAMALAR.

1-§. Boshlang'ich shart bilan berilgan ikkinchi tartibli
differential tenglamalar.

$$y'' = f(x, y, y') = f(x) \quad (1)$$

ko'rinishdagi ikkinchi tartibli differential tenglamalar ikki marta integrallash bilan yechiladi. $y' = z$ deb $y'' = z'$ ni topamiz. Natijada o'zgaruvchilarga ajraladigan birinchi tartibli tenglamaga kelamiz:

$$z' = f(x) \text{ yoki } \frac{dz}{dx} = f(x) \text{ yoki } dz = f(x)dx.$$

Bu tenglamani integrallab quyidagini $\int dz = \int f(x)dx$ topamiz, bu yerdan

$$z = F(x) + C_1$$

ga kelamiz.

Buni ham yechsak, z ni $\frac{dy}{dx}$ ga almashtiramiz.

$$dy = [F(x) + C_1]dx$$

buni integrallasak,

$$y = \int F(x)dx + C_1x + C_2$$

bu yerdan

$$y = \Phi(x) + C_1x + C_2 \quad (2).$$

Bu $y'' = f(x)$ tenglamaning umumiy yechimidir. (2) tenglikda ikkita ixtiyoriy C_1 va C_2 koeffitsientlar hosil bo'ldi. Agar (1) tenglama uchun umumiy yechimdan qandaydir xususiy yechimga kelish kerak bo'lsa, $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ boshlang'ich shart talab qilish zarur. U holda

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2),$$

$$y'_0 = \varphi_x(x_0, C_1, C_2)$$

bo'ladi.

1-Misol. $y'' = \sin x - x$ tenglamaning $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Echilishi: $\frac{dy}{dx} = z$ desak,

$$\frac{dz}{dx} = \sin x - x; \quad dz = (\sin x - x)dx; \quad z = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C_1$$

Demak,

$$y' = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C_1$$

$y'(0) = 1$ boshlang'ich shartdan foydalanib, topamiz:

$$1 = -\cos 0 + C_1$$

bu yerdan $C_1 = 2$. Shunday qilib,

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - \frac{x^2}{2} + 2 \quad \text{yoki} \quad dy = \left(-\cos x - \frac{x^2}{2} + 2 \right) dx$$

bu tenglamani integrallaymiz:

$$y = -\sin x - \frac{x^3}{6} + 2x + C_2$$

Endi $y(0) = -1$ boshlang'ich shartdan foydalanib, topamiz:

$$-1 = C_2$$

Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim ushbu ko'rinishga ega:

$$y = -\sin x - \frac{x^3}{6} + 2x - 1.$$

1. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan yuqori tartibli differentsial tenglamalar.

n-tartibli differentsial tenglamalarning umumiy ko'rinishi quyidagicha

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

yoki n tartibli hosilaga nisbatan yechilgan differentsial tenglama quyidagicha

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

bo'ladi. Bunda x -erkli o'zgaruvchi, $y = y(x)$ –nomahlum funktsiya, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ lar nomahlum funktsiyaning birinchi, ikkinchi va x.k., n-tartibli hosilalari. (1) differentsial tenglama xususiyl holda ushbu

$$y^{(n)} = f(x) \quad (3)$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Bunda (3) ni ketma-ket n marta integrallab umumiy yechimi topiladi. (1) differentsial tenglamada nomahlum funktsiya va uning dastlabki bir nechta tartibdagi hosilalari qatnashmasin:

$$\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

Bu holda $y^{(k)} = p = p(x)$ almashtirish natijasida (4) differentsial tenglamaning tartibi pasayib, ushbu

$$\Phi(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0$$

ko'rinishga keladi.

(1) differentsial tenglamada erkli o'zgaruvchi x qatnashmasin:

$$\Phi(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

bu holda $y' = p = p(x)$ almashtirish bilan differentsial tenglamaning tartibi bir birlikka pasayadi, yag'ni

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left(p \cdot \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(p \cdot \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2$$

va x.k. bo'lishi ehtiborga olinadi.

2-Misol. $y''' = 60x^2$ tenglamani yeching.

Echilishi: Tenglamaning ikkala tomonini dx ga ko'paytirib 2-chi tartibli tenglamani hosil qilamiz. $y'''dx = 60x^2dx$ dan $y'' = 20x^3 + C_1$ ni hosil qilamiz.

So'ngra yuqoridagini qo'llab 1-chi tartibli tenglamani hosil qilamiz.

$y''dx = (20x^3 + C_1)dx$ dan $y' = 5x^4 + C_1x + C_2$ ni hosil qilamiz.

$$y'dx = (5x^4 + C_1x + C_2)dx \text{ dan } y = x^5 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

2. O'zgarmas ko'effitsientli bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar.

Ushbu

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \quad (1)$$

tenglamaga **bir jinsli chiziqli differentsial tenglama** deyiladi.
Tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

dan iborat, bunda $y_1, y_2, \dots, y_n$ lar (1) tenglamaning chiziqli bo'lmagan xususiy yechimlari, $C_1, C_2, \dots, C_n$ lar esa ixtiyoriy o'zgarmaslar.

O'zgarmas ko'effitsientli **ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglama** deb

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

(3) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (4)$$

xarakteristik tenglama tuziladi, bu tenglama (3) tenglamadan izlanayotgan funktsiya hosilalarni r ning mos darajalari bilan funktsiyaning o'zini esa bir bilan almashtirish natijasida hosil qilinadi. U holda (3) tenglamaning umumiy yechimi (4) tenglama ildizlari r_1 va r_2 ning xarakteriga bog'liq holda topiladi. Bu yerda uch hol ro'y berishi mumkin.

1-hol. r_1 va r_2 ildizlar haqiqiy va har xil. Bunday holda (3) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

2-xol. r_1 va r_2 ildizlar xaqiqiy va bir-biriga teng:

$$r_1 = r_2 = r,$$

bu holda (3) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

3-xol. r_1 va r_2 ildizlari qo'shma kompleks:

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha - \beta i$$

Bunday holda umumiy yechim

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

ko'rinishda yoziladi.

3-Misol. $y'' + 3y' - 4y = 0$ tenglamani yeching.

Echilishi: Xarakteristik tenglamani yozamiz:

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

echimlari: $k_1 = -4, \quad k_2 = 1$

1-holga ko'ra umumiy yechim: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$

4-Misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ tenglamani yeching.

Echilishi: Xarakteristik tenglamani yozamiz:

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

echimlari: $k_1 = k_2 = 3$,

2-holga ko'ra umumiy yechim: $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$

5-Misol. $y'' + 4y' + 13y = 0$ tenglamani yeching.

Echilishi: Xarakteristik tenglamani yozamiz:

$$k^2 + 4k + 13 = 0$$

echimlari: $k_1 = -2 + 3i$, $k_2 = -2 - 3i$

3-holga ko'ra umumiy yechim: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

3. O'zgarmas koeffitsientli va maxsus o'ng tomonga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differentsial tenglamalar.

Ushbu

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

tenglama **o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differentsial tenglama** deyiladi. U mos chiziqli bir jinsli

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

tenglamadan o'ng tomonga turgan $f(x)$ funktsiya bilan farqlanadi.

(1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun (2) tenglamaning umumiy yechimi y_1 ni, so'ngra (1) tenglamaning birorta xususiy yechimi y^* ni topish kerak. Ularning yig'indisi berilgan bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi

$$y = y_1 + y^*$$

Quyidagi ikki holda (1) tenglamaning xususiy yechimi y^* ni topish qoidasini keltiramiz.

O'ng tomoni $f(x)$

$$f(x) = e^{kx} P_n(x) \quad (3)$$

ko'rinishga ega, bu yerda $P_n(x)$ ko'phad n -darajali ko'phad: $f(x)$ ning o'ng tomoni

$$f(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x \quad (4)$$

ko'rinishga ega.

Bu hollarning har qaysisini alohida-alohida ko'ramiz.

I. (1) tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = e^{kx} P_n(x)$ ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda k soni (2) bir jinsli tenglamaga mos keluvchi xarakteristik tenglama

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (5)$$

ning ildizi bo'lmasin. U holda (1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y'' = e^{kx} Q_n(x) \quad (6)$$

ko'rinishda izlash kerak, bu yerda $Q_n(x)$ birorta n -darajali koeffitsientlari noaniq bo'lgan ko'phad.

Agar k soni (5) xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda (1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y'' = x^m e^{kx} Q_n(x)$$

ko'rinishda izlash kerak, bu yerda m son k ildizning karraligi (yag'ni, agar k -bir karrali ildiz bo'lsa, $m=1$, agar k -ikki karrali ildiz bo'lsa, $m=2$).

II. (1) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x$$

ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda $\pm \lambda i$ sonlar (5) xarakteristik tenglamaning ildizlari emas. U holda (1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y^* = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x$$

ko'rinishda izlash kerak, bu yerda A va V —noaniq koeffitsientlar.

Agar $\pm \lambda i$ kompleks sonlar (5) xarakteristik tenglamaning ildizlari bo'lsa, (1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y^* = x(a \cos \lambda x + b \sin \lambda x)$$

shaklida izlash kerak.

6-Misol. $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Echilishi: Xarakteristik tenglamani yozamiz:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \text{ yoki } (r - 3)^2 = 0 \text{ va yechimi } r_{1,2} = 3 \text{ ga teng.}$$

Bundan

$$u = e^{3x}(C_1 + C_2x)$$

Berilgan tenglamaning xususiy yechimi u_1 ni topamiz. Bu yerda o'ng tomoni $f(x) = 3x - 8e^x$ ko'rinishga ega. Ko'phadning birinchi darajali qismi $3x$ va ko'rsatkichli qismi $-8e^x$ ga teng.

Demak, xususiy yechimi $u_1'' = Ax + B + Ce^x$ ga teng.

$u_1' = A + Ce^x$ ga, $u_1'' = Ce^x$ ga tengligidan, tenglama quyidagi ko'rinishga keladi.

$$9Ax + (9B - 6A) + 4Ce^x = 3x - 8e^x$$

Bundan, $9a = 3$, $9B - 6A = 0$, $4c = -8$ ga tengligidan

$$A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{9}, C = -2$$

Demak,

$$u_1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - 2e^x,$$

$$y = u + u_1 = e^{3x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - 2e^x.$$

Nazorat savollari.

1. Boshlang'ich shart bilan berilgan ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar .
2. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan yuqori tartibli differentsial tenglamalar .
3. O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar.
4. O'zgarmas koeffitsientli va maxsus o'ng tomonga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differentsial tenglamalar.

2-§. Differentsial tenglamaning tatbiqlari.

I. Populyatsiya miqdorining dinamikasi.

Populyatsiya miqdorining dinamikasi (yahni, populyatsiya davrida tug'ilish va o'lish natijasida tirik mavjudotlar miqdorining o'zgarishi) ekologiyaning muhim masalalaridan biri. Birinchi tartibli differentsial tenglamalarni o'rganishda yuqoridagi masalaning eng oddiy holatini qaradik. Oziq-ovqat bilan tahminlangan va tashqi muhit tahsiridan chegaralangan holda populyatsiya dinamikasi quyidagi differentsial tenglama bilan berildi:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \quad (1)$$

Bu yerda $x = x(t) - t$ vaqtdagi populyatsiya miqdori. Bu tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$x = x_0 e^{\gamma(t-t_0)}$$

ekanligi kelib chiqdi.

Bu yerda x_0 , t_0 boshlang'ich vaqtdagi populyatsiya miqdori. (1) tenglama yoki nazariy ahamiyatga ega yoki sunhiy sharoitdagi mavjudotlarning populyatsiyasini aniqlaydi.

Populyatsiyaning rivojlanishini 1845 yilda Ferxylg'sta- Perla tenglamasi aniqroq yoritib beradi. Bu tenglamada mavjudotlarning ichki qarama-qarshiliklarini hisobga oladi, bu esa populyatsiya miqdorining

tezligini sekinlashtiradi. Bu qarama-qarshiliklarga oziq-ovqat uchun kurash, jips yashaganda infeksiya tarqalishi va h.k. kiradi. Yuqoridagi faktlarni hisobga olib, Δx o'sishni hisoblashda $\gamma x \Delta t$ qiymatdan $h(x, \Delta t)$ qiymatni ayiramiz:

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - h(x, \Delta t)$$

$h(x, \Delta t)$ funktsiya o'rniga ko'pchilik hollarda $\delta x^2 \Delta t$ populyatsiyani qaraymiz:

$$h(x, \Delta t) = \delta x^2 \Delta t$$

bu yerda δ - koeffitsient ichki qarama-qarshiliklar.

$h(x, \Delta t)$ qiymat – bu ichki qarama-qarshiliklar evaziga populyatsiya miqdori tezligining kamayishini ifodalaydi. Qarama-qarshiliklar qancha yuqori bo'lsa, urug'lanadiganlarning bir-biri bilan uchrashishi shuncha ko'p, bu uchrashishlar soni $x \cdot x$ ko'paytmaga to'g'ri proporsional, yahni x^2 . Ikki xil mavjudotning uchrashishi xy ga to'g'ri proporsional. Bu turlar bir-birining joyini egallashi mumkin.

Shunday qilib,

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - \delta x^2 \Delta t \quad (2)$$

bu tenglikni Δt ga bo'lamiz.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma x - \delta x^2$$

va $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz.

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2 \quad (3)$$

bu tenglama **Ferxylg'sta-Perla tenglamasi**.

Bu tenglamadan γx ni qavsdan chiqarib quyidagicha yozamiz:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \left(1 - \frac{\delta}{\gamma} x \right)$$

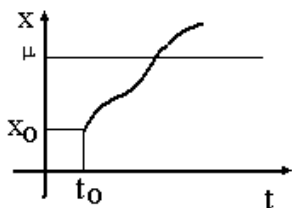
yoki

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \cdot \frac{\frac{\nu}{\delta} - x}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

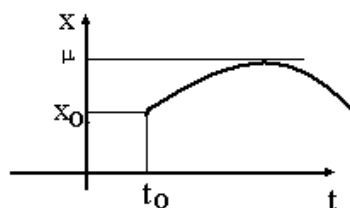
$\frac{\gamma}{\delta} = \mu$ deb belgilaymiz:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \frac{\mu - x}{\mu} \quad (5)$$

Agar $x_0 < \mu$ bo'lsa, u holda barcha $t > t_0$ vaqt uchun haqiqatan ham $x(t)$ differentsiallanuvchi funktsiya. (5) tenglamadan kelib chiqadiki, $x(t) < \mu$ da $\frac{dx}{dt}$ musbat bundan kelib chiqadiki, $x(t)$ o'sadi. Bundan shuni xulosa qilish mumkinki, $x(t)$ μ ga teng qiymatni qabul qilsa o'sadi. $x = \mu$ to'g'ri chiziqni kesib o'tadi (1-rasm) yoki $x = \mu$ to'g'ri chiziqqa urinadi (2-rasm).



1-rasm



2-rasm

Birinchi holda: $x(t) > \mu$ va $x'(t) > 0$. Bu (5)-tenglamaga zid. Ikkinchi holda, $x(t) < \mu$ va $x'(t) < 0$, bu ham (5)-tenglamaga zid. SHunday qilib, $x(t)$ μ ga teng bo'lishi mumkin emas, agar $x_0 < \mu$ bo'lsa.

O'zgaruvchilarni ajratib

$$\frac{\mu dx}{x(\mu - x)} = \gamma dt$$

yoki

$$\frac{(\mu - x) + x}{x(\mu - x)} dx = \gamma dt$$

bundan

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\mu - x} \right) dx = \gamma dt$$

Agar $x_0 < \mu$ deb hisoblasak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ln x - \ln(\mu - x) = \gamma t + \ln C$$

bundan

$$\frac{x}{\mu - x} = Ce^{\gamma t} \quad (6)$$

Qulaylik uchun $t_0 = 0$ va $x(0) = x_0 < \mu$ deb olib, (6) ga qo'ysak,

$$C = \frac{x_0}{\mu - x_0}$$

topilgan qiymatni (6) ga qo'ysak quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{x}{\mu - x} = \frac{x_0}{\mu - x_0} e^{\gamma t}$$

Bundan qidiralayotgan Ferxylug'sta-Perla modelini hosil qilamiz:

$$x = \frac{x_0 \mu e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}$$

2. Epidemiya nazariyasida differentsial tenglama.

Epidemiyaning eng oddiy turini qaraymiz. Aytaylik, o'rganilayotgan kasallik uzoq vaqt davom etadi, demak infektsiya

tarqalishi kasallanishga nisbatan tezroq tarqaladi. Biz infektsiya tarqalish holati bilan chegaralanamiz. Aytaylik, a va n lar mos ravishda infektsiya yuqtirganlar va yuqtirmaganlar sonini aniqlasin. $x = x(t)$ t vaqtdagi sog'lom organizmlar, $y = y(t)$ t vaqtdagi infektsiyalangan organizmlar soni. Uncha katta bo'lmagan vaqt oralig'ida yahni $0 \leq t \leq T$ quyidagi tenglik o'rinli:

$$x + y = n + a \quad (9)$$

Demak, uchrashish chog'ida infektsiya yuqtirilgan organizmdan sog'lom organizmga o'tadi, u holda sog'lom organizmlar soni vaqt o'tishi bilan kamayadi va u uchrashuvlar soniga proporsional bo'ladi (yahni, $x \bullet y$ ga proporsional). Bundan sog'lom organizmlar soni kamayadi va kamayish tezligi quyidagiga teng:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta \cdot xy \quad (10)$$

bu yerda β -proporsionallik koefitsienti. Bundan y ni topib (9) ga qo'ysak:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta \cdot x(n + a - x).$$

O'zgaruvchilarga ajratib quyidagini topamiz:

$$\frac{dx}{x(n + a - x)} = -\beta \cdot dt$$

yoki

$$\frac{(n + a - x) + x}{x(n + a - x)} dx = -\beta(n + a)dt.$$

Bundan

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx}{n - x + a} = -\beta(n + a)dt.$$

Integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\ln x - \ln(n - x + a) = -\beta(n + a)t + \ln c$$

yoki

$$\ln \frac{x}{n-x+a} = ce^{-\beta(n+a)t}$$

c ni topish uchun quyidagi boshlang'ich shartdan foydalanamiz. Agar $t = 0$ da sog'lom organizmlar soni n bo'lsa

(yahni $x = n$). Bundan $c = \frac{n}{a}$ ekanligi kelib chiqadi va

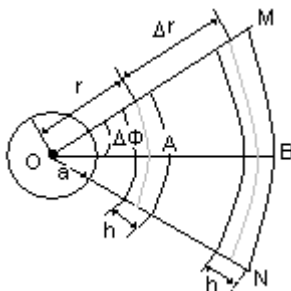
$$\frac{x}{n-x+a} = \frac{n}{a} e^{-\beta(n+a)t}.$$

Demak, qidirayotgan ifodamiz quyidagiga teng ekan:

$$x = \frac{n(n+a)}{n + ae^{\beta(n+a)t}}$$

3. Chumoli inidan tashqarida chumolining zichligi.

Chumoli hayotining umumiy yashash belgilari ko'pchilikka ma'lum. Chumoli topilgan oziq-ovqatni yoki qurilish materiallarini topilgan joyidan uyasiga tashiydi. Shuning uchun chumoli soni uyasining yaqinida uyidan o'zoqroqqa nisbatan ko'proq (3-rasm).



(3-rasm)

Oddiylik uchun chumoli uyasining markazi deb radiusi a ga teng doirani olamiz va bu doiradan tashqarida chumolilar uchun oziq-ovqat bir xilda taqsimlangan deb hisoblaymiz. Bu degani radiusi r ga teng aylanadagi muhit undan tashqarida ham bir xil. Shuning uchun radiusi r ga teng aylanada ($r > a$) chumoli zichligi bir xil taqsimlangan deb faraz

qilamiz. (Hashoratlar zichligi deganda mahlum atrofdagi hashoratlar sonining shu atrof yuziga nisbatiga aytiladi). Bundan kelib chiqadiki, zichlik bu r masofaning funktsiyasi bo'lib, nuqtalari bitta nurda yotgan nuqtalar bilan chegaralansak kifoya.

Soddalik uchun statsionar holatni, yag' ni vaqt o'tishi bilan zichlik har bir nuqtada o'zgarmas deb hisoblaymiz. Ammo bu degani, chumoli bir-biri bilan aralashib ketmaydi degani emas. Oziq-ovqat qidirishda chumoli bir joydan ikkinchi joyga ko'chib yuradi. Biz bu qidirishni tasodifiy deb hisoblaymiz, yag' ni birlik vaqt ichida ovqat qidirib biror atrofni tark etsa, xuddi shuncha sondagi chumolilar shu atrofga qo'shni atrofdan o'tadi. Shunday qilib chumoli uyasi atrofidan ovqat izlab boshqa joyga ko'chishsa, yana shu sondagi chumolilar uyasidan chiqadi.

Bir nurda yotgan ikkita qo'shni nuqtani qaraymiz: A nuqta chumolilar uyasining markazidan r masofada joylashgan bo'lsin, V nuqta $r + \Delta r$ masofada bo'lsin. Bu nuqtalar atrofiga chumolilarning ko'chishini kuzatamiz. Aytaylik, $Q(r + \Delta r)$ V nuqtadagi chumolilar soni. Chumoli ovqat qidirayotganda birorta yo'nalish ikkinchisidan yaxshi bo'la olmaydi. Chunki atrof bir xil deb hisoblangan. Chumoli soni uning qaysi yo'nalishdan ovqat qidirishiga bog'liq emas. Bundan kelib chiqadiki, agarda A nuqta atrofidan V nuqtaga qarab $\alpha Q(r)$, $\alpha < 1$ chumolilar chiqqan bo'lsa, u holda V nuqta atrofidan A nuqtaga $\alpha Q(r + \Delta r)$ sondagi chumolilar chiqishdi.

Bunda eng muhimi ikkala holatda ham α sonining bir xil ekanligidir. α fiksirlangan yo'nalishdagi chumolilar qismini aniqlaydi. Ammo A nuqta atrofidan V nuqta atrofiga chiqqan chumolilarning barchasi ham V nuqtaga yetib bormaydi, chunki yo'lda ovqatni topganlari uyasiga qaytib ketadi. Bu toifadagi chumolilar A va V nuqtalar orasidagi masofa qancha katta bo'lsa shuncha ko'p bo'ladi. Shuning uchun A nuqta atrofidan chiqqan V nuqta atrofiga yetib boradigan chumolilar soni quyidagi ayirma bilan ifodalanadi:

$$Q_{AB} = \alpha Q(r) - \beta \alpha Q(r) \Delta r$$

Bu yerda β -proportsianallik koeffitsienti (manzilga yetmasdan qaytgan chumolilarni aniqlaydi). Bu koeffitsient atrofga bog'liq, lekin atrofda sharoit bir xil bo'lganligi uchun β shu atrofda o'zgarmas. $\alpha Q(r + \Delta r)$ qiymatga V nuqta atrofidan A nuqta atrofiga emas, boshqa yo'nalishga chiqib, yo'ldan ovqat topib orqaga qaytganlari ham kiradi.

Bunday chumolilarga OMN sektordan hali chiqib ulgurmaganlari ham A nuqta atrofiga kiradi. Δr qancha katta bo'lsa, ular shuncha ko'p bo'ladi. SHunday qilib, V nuqta atrofidan chiqib A nuqta atrofiga tushadiganlari, quyidagi yig'indi orqali aniqlanadi.

$$Q_{AB} = \alpha Q(r + \Delta r) + \beta_1 \alpha Q(r + \Delta r) \Delta r$$

bu yerda β_1 -chumoli uyasiga qaytgan chumolilar sonini aniqlaydigan proportsianallik koeffitsienti. Biz statsionar holatda bo'lganimiz uchun, yag'ni nuqta atrofida o'zgarmas sonda qolgani uchun quyidagi tenglik bajariladi.

$$Q_{AB} = Q_{BA}$$

yag'ni,

$$\alpha Q(r) - \beta \alpha Q(r) \Delta r = \alpha Q(r + \Delta r) + \beta_1 \alpha Q(r + \Delta r) \Delta r$$

Bundan biz differentsial tenglamaga kelamiz. CHumolilar soni uning zichligining yuza ko'paytmasiga teng bo'lgani uchun (α ga qisqartirib) oxirgi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$n(r)S_A - \beta n(r)S_A \Delta r = n(r + \Delta r)S_B + \beta_1 n(r + \Delta r)S_B \Delta r \quad (12)$$

bu yerda $n(r)$ va $n(r + \Delta r)$ lar A va V nuqtalardagi mos ravishda zichligini belgilaydi; S_A va S_B shu nuqta atrofining yuzalari.

Yuzani qutb koordinatalar sistemasida hisoblab, quyidagini hosil qilamiz:

$$S_A \approx hr\Delta\Phi; \quad S_B \approx h(r + \Delta r)\Delta\Phi.$$

Buni (12) – tenglikka qo'yamiz:

$$n(r)hr\Delta\Phi - \beta n(r)hr\Delta\Phi\Delta r = n(r + \Delta r) \cdot h(r + \Delta r)\Delta\Phi + \\ + \beta_1 n(r + \Delta r) \cdot h(r + \Delta r)\Delta\Phi\Delta r$$

buni $h\Delta\Phi$ ga qisqartirib gruppallasak, quyidagini hosil qilamiz:

$$(r + \Delta r)h(r + \Delta r) - r \cdot n(r) = -[\beta_1 n(r + \Delta r)(r + \Delta r) + \beta n(r)r]\Delta r$$

Bu tenglikni Δr ga bo'lib $\Delta r \rightarrow 0$ sak

$$\frac{d}{dr}(r \cdot n(r)) = -(\beta_1 + \beta) \cdot r n(r) \quad (13).$$

Qisqalik uchun $\beta_1 + \beta = \gamma$ deb belgilaymiz va

$$\frac{d(r \cdot n(r))}{r \cdot n(r)} = \gamma \cdot dr \quad (14)$$

Biz $n(r)$ zichlik uchun differentsial tenglama hosil qildik.

Aytaylik, $n(a)$ -chumoli uyasining chegarasidagi ($r = a$) zichlik qiymati. (14) ni integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\ln[r \cdot n(r)] = -\gamma r + C \quad (15)$$

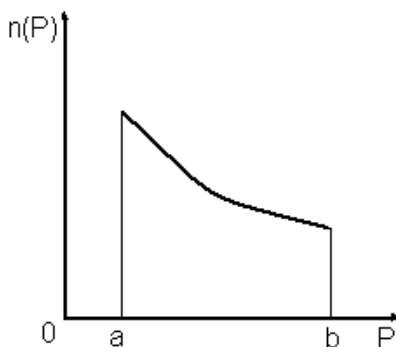
Boshlang'ich shartdan foydalanib, $C = \ln[a \cdot n(a)] + \gamma a$ ni hosil qilamiz. Buni (15) ga qo'yib,

$$\ln \frac{r \cdot n(r)}{a \cdot n(a)} = -\gamma(r - a)$$

bundan

$$n(r) = \frac{a}{r} n(a) e^{-\gamma(r-a)} \quad (16)$$

Bu qidirilayotgan egri chiziq tenglamasi. Agar a , $n(a)$ va γ larning qiymatlari mag'lum bo'lsa, grafigini chizish mumkin. (4-rasm).



(4-rasm).

r o'sishi bilan egri chiziqli kamayadi. a va $n(a)$ larni tajriba yo'li bilan topish qiyin emas. Ammo γ koeffitsientni hisoblash qiyinroq. Agarda tuzilgan matematik modelni to'g'ri deb hisoblasak, bundan kelib chiqadiki qandaydir γ ni berilgan deb (16) dan zichlikning masofaga bog'liqligidan γ ni hisoblasak bo'ladi. Agar (16) o'rinli bo'lsa, u holda $r > a$ uchun ham o'rinli, xususan $r = b$ uchun

$$n(b) = \frac{a}{b} n(a) e^{-\gamma(b-a)},$$

bundan

$$\gamma = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a \cdot n(a)}{b \cdot n(b)} \quad (17)$$

γ ni hisoblash uchun n ni ham $n(a)$ kabi (16) formuladan hisoblashimiz kerak. Buning uchun quyidagilarni hisobga olishimiz kerak.

A). (16) formuladan ixtiyoriy katta r uchun $n(r) \neq 0$. Haqiqiy hayotda albatta bunday emas.

V). γ qiymat vaqtga albatta bog'liq, chunki kechasi va kunduzi quyosh aktiv vaqtda chumoli boshqa vaqtga nisbatan aktivligi kam bo'ladi.

Ammo kunning har xil vaqtda $n(a)$ va $n(b)$ qiymatlarni (17) formulaga asoslanib hisoblab, γ ni (16) formulaga qo'yib har xil vaqtda o'zining egri chizig'ini topa olamiz.

4. O'simlik bargining o'sishi.

Tuzilishi doira shaklida bo'lgan yosh yaproq yuzasining o'sish tezligi yaproq aylanasi uzunligi va unga tushgan quyosh nuri miqdoriga to'g'ri proporsional. Bu esa quyosh nuri va yaproq orasidagi burchak kosinusi va yaproq yuzasiga to'g'ri proporsional. Agar ertalab soat 6^{00} da yaproq yuzasi 1600 sm^2 va kech soat 18^{00} da shu kuni 2500 sm^2 bo'lsa yaproq yuzi S bilan t vaqt orasida bog'lanishni toping.

Quyosh nuri va yaproq orasidagi burchakni, ya'ni soat 6^{00} va 18^{00} ni (ishorasini hisobga olmagan holda) 90^0 ga teng, kun yarmida 0^0 ga teng deb qabul qilamiz.

Aytaylik, t vaqt yarim tun 00 dan boshlansin. Agar yaproq yuzasi S o'zgarsa, u holda yaproq o'sishining tezligi

$$\frac{ds}{dt} = k_1 2\pi r Q$$

bu yerda $2\pi r$ -yaproq aylanasining uzunligi, Q -yoruglik nurining soni, k_1 -proportsionallik koeffitsenti.

Yaproq yuzasi $S = \pi r^2$ dan quyidagini yozib olamiz

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

U holda

$$\frac{ds}{dt} = k_1 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{S} Q \quad (18)$$

Quyidagi shartdan

$$Q = k_2 S \cos \alpha \quad (19)$$

(bu yerda α -nur va vertikal orasidagi burchak, k_2 -proportsionallik koeffitsenti) α burchak t argumentning chiziqli o'suvchi funktsiyasi ekanligi kelib chiqadi:

$$\alpha = k_3 t + b$$

k_3 va b parametrlarni qo'shimcha shartlar asosida topamiz:

$$\text{agar } t = 6 \text{ bo'lsa } \alpha = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{agar } t = 12 \text{ bo'lsa } \alpha = 0,$$

$$\text{agar } t = 18 \text{ bo'lsa } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Oxirgi ikkita shartdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 0 = 12k_3 + b \\ \frac{\pi}{2} = 18k_3 + b \end{cases}$$

bu sistemani yechib

$$k_3 = \frac{\pi}{12}, \quad b = -\pi$$

ni topamiz. Bundan

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(t-12)$$

buni (19) ga qo'yamiz.

$$Q = k_2 S \cos \left[\frac{\pi}{12}(t-12) \right]$$

buni (18) ga qo'yamiz.

$$\frac{ds}{dt} = k_1 k_2 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} S \sqrt{S} \cos \left[\frac{\pi}{12}(t-12) \right]$$

$k_1 \cdot k_2 = k$ deb belgilasak. U holda o'zgaruvchilarni ajratsak

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = k \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right) dt$$

buni integrallab

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} \sin \left[\frac{\pi}{12}(t-12) + C \right] \quad (20)$$

$t=6$ da $S=1600$ va $t=18$ da $S=2500$ shartlar bilan

$$\begin{cases} -\frac{1}{20} = -\frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C \\ -\frac{1}{25} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C \end{cases}$$

Bu sistemani yechib

$$C = -\frac{9}{200}, \quad k = \frac{\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200}$$

ni topamiz. Buni (20) ga qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right] - \frac{9}{200}$$

Bundan esa

$$S = \frac{160000}{\left\{9 - \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right]\right\}^2}$$

ni topamiz.

5. Daraxt o'sishini hisoblash haqidagi masala.

Nega sharoit eng yaxshi bo'lganda ham daraxt ma'lum uzunlikdan oshmaydi? Nega daraxt turiga bog'liq bo'lmagan holda boshlang'ich vaqtda tez o'sadi, so'ngra o'sishi sekinlashib, asta-sekin o'sishi nolga teng bo'ladi?

Biroq biz bilamizki, daraxt tomirlarining o'sishi fotosintez yordamida energiyasi ko'payishiga olib keladi, ammo oziqlanish borgan sari qiyinlashib, bora-bora energiya yetishmay boshlaydi va daraxt o'sishdan tuxtaydi.

SHu fikrlarga asoslanib, energiya balansining taxminiy tenglamasini tuzamiz, yahni matematik modelini tuzamiz.

1. O'sayotgan daraxt o'sish davrida geometrik xususiyatini saqlaydi, yahni uzunligining daraxt diametriga nisbati o'zgarmaydi.

2. Erkin energiyani (yoki harakatdagi moddani) faqat fotosintez orqali oladi.

3. Erkin energiya tirik to'qima hosil qilishga va tuproqdan aralashmalarning ko'tarilishiga sarf bo'ladi.

4. O'rtacha hisobda katta vaqt oralig'ida birlik sirt yuzasiga o'zgarmas miqdorda yorug'lik tushadi va tarkibidagi moddalardan bir qismini yutishi mumkin.

Aytaylik, x daraxtning chiziqli ulchami. Bu degani daraxt balandligini x orqali, yaproqning yuzasini x^2 orqali va nihoyat daraxt hajmini x^3 orqali belgilaymiz. x ning o'zgarishini t orqali, yag'ni $x = x(t)$ orqali ifodalashga harakat qilamiz.

Aytaylik, $x(t_0) = 0$ bo'lsin. Balans tenglamasini x bo'yicha ifodalasak, E erkin energiya daraxt tanasining yashil qismidan fotosintez orqali hosil bo'ladi, yashil qismi qanchalik ko'p bo'lsa shuncha energiya ko'p bo'ladi. Shunday qilib, E x^2 ga to'g'ri proportsional

$$E = \alpha x^2$$

bu yerda α -proportsionallik koeffitsenti (α yaproqning o'lchamiga va tuzilishiga hamda fotosintezga bog'liq). Bizning farazimizga ko'ra, boshqa energiya beruvchi omillar yo'q va biz energiyaning taqsimlanishini kuzatishimiz kerak. Energiya birinchidan, fotosintez sodir bo'lishi uchun sarflanadi. Bu sarflanish xam x^2 ga to'g'ri proportsional, yag'ni βx^2 , bu yerda β proportsionallik koeffitsenti α dan kichik.

Energiya ozuqaning butun daraxt tanasiga tarqalishi uchun sarflanadi. Mahlumki, u energiya qancha ko'p sarflansa tana shuncha katta bo'ladi. Bundan tashqari bu sarflanish og'irlik kuchini yengishga bog'liq va bundan kelib chiqadiki, agar ozuqani qancha balandga ko'tarib sarflasa energiya shuncha ko'p sarflanadi. Shunday qilib, energiyaning bu sarfi hajmi x^3 ga va balandlik x ga to'g'ri proportsional, yag'ni $\gamma \cdot x^3 \cdot x$.

Nihoyat energiya daraxtning massasini oshirishga sarflanadi (yag'ni o'sishiga). Bu sarflanish o'sish tezligiga to'g'ri proportsional, yag'ni $m = \rho x^3$ massadan vaqt bo'yicha hosila (ρ -daraxtning o'rtacha zichligi, x^3 -hajmi). Shunday qilib, oxirgi energiya sarflanishi quyidagicha ifodalanadi.

$$\delta \frac{d}{dt}(\rho x^3)$$

Energiyaning saqlanish qonunidan energiya sarfi quyidagiga teng bo'ladi.

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}(\rho x^3)$$

yoki

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta \rho x^2 \frac{dx}{dt} \quad (21)$$

bu esa biz qidirayotgan energiya balansining tenglamasi. Bu tenglamani $3\delta \rho x^2$ bo'lib quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\alpha - \beta}{3\delta \rho} = a, \quad \frac{\gamma}{3\delta \rho} = b$$

bundan:

$$\frac{dx}{dt} a - bx^2, \quad a > 0, b > 0 \quad (22)$$

kelib chiqadi.

Daraxt o'sayotgan ekan, u holda $\frac{dx}{dt} > 0$ bu demak, $a - bx^2 \geq 0$, bundan $x^2 < \frac{a}{b}$ kelib chiqadi. SHuning uchun (22) ni quyidagicha yozamiz.

$$-\frac{dx}{b\left(x^2 - \frac{a}{b}\right)} = dt$$

buni integrallab

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = t + c$$

boshlang'ich shart $x(t_0) = 0$ dan foydalanib $c = -t_0$ ni xosil qilamiz.

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = t + t_0 \quad (23)$$

bu tenglamani x ga nisbatan yechamiz

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}} \quad (24)$$

Bu daraxt o'sishini aniqlaydigan formula.

Agar a, b va t_0 qiymatlari ma'lum bo'lsa, bu formula yordamida vaqtga nisbatan o'rtacha o'sishini hisoblash mumkin. (24)

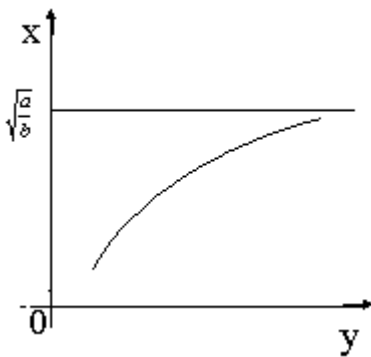
formula bilan berilgan egri chiziqni tekshirish mumkin. $\frac{dx}{dt} > 0$ ligidan va (22) formuladan quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2bx$$

Shunday qilib, agar $t > t_0$, $x(t) > 0$ (bu daraxt balandligi)

bo'lsa, u holda oxirgi tenglikdan $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$ ga kelamiz. Demak, (24)-chiziq o'suvchi qavariq chiziq. (24) formuladan $t \rightarrow +\infty$ da

$x(t) \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}$ hosil bo'ladi. Grafigi quyidagicha bo'ladi.



(5-rasm)

$\sqrt{\frac{a}{b}}$ balandlik daraxt o'sishining chegarasi, chunki energiya

daraxtning fotosintez va ozuqa bilan tahminlanishiga sarflanadi. Daraxt shuning uchun bu ko'rsatkichdan yuqori o'smaydi.

(24) formula bilan berilgan egri chiziq daraxt o'sishini qanchalik to'g'ri ifodalaydi? Bu savolga javob berish uchun dub daraxtini olib ko'ramiz. Yoshi 40 yildan 220 yilgacha bo'lgan dub daraxti uzunligi (24) formulada tekshirildi. a va b o'zgaruvchili ikkita tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi va bu o'zgaruvchilarni topish mumkin. Topilgan a va b qiymatga qarab aniq egri chiziq chizildi. Bu egri chiziq tajribadagi dub daraxt o'sishining egri chizig'i bilan ustma-ust tushdi. Boshqacha qilib aytganda (40: x (40)) va (220: x (220)) nuqtadagi nazariy va tajribadagi egri chiziqlar ustma-ust tushdi. Demak, ko'rilgan matematik model ishonarli.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan yuqori tartibli differentsial tenglamalar yechilsin.

1.

$$y'' = \cos x$$

$$\text{JHC.} \quad y = -\cos x + c_1 x + c_2.$$

2.

$$y'' = 1 - x^2$$

$$\text{JHC.} \quad y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2.$$

3.

$$y'' = \sin x - 1, y(0) = -1, y'(0) = 1$$

$$\text{JHC.} \quad y = -\sin x - \frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

4.

$$y'' = \cos 2x$$

$$\text{JHC.} \quad y = -\frac{1}{4} \cos 2x + c_1 x + c_2.$$

5.

$$y'' = \frac{1}{x}$$

$$\text{JHC.} \quad y = x \ln|x| - x + c_1 x + c_2.$$

6.

$$y'' = \ln x$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{x^2 \ln|x|}{2} - \frac{3x^2}{4} + c_1 x + c_2.$$

7.

$$y'' + y'^2 = 2e^{-y}$$

$$\text{жс.} \quad e^y + \frac{c_1}{4} = (x + c_2)^2.$$

8.

$$y^{iv} = x$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{x^5}{120} + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

9.

$$y''' = xe^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = (x-3)e^x + \frac{x^2}{2} + 2x + 3.$$

10.

$$y''' = x \ln x, y(1) = 1, y'(1) = 0, y''(1) = -1$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{x^4}{24} \ln - \frac{13}{288} x^4 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{8}{9} x + \frac{17}{32}$$

11.

$$y'''^3 - 2y'' - x = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{9}{28} t^7; \frac{9}{10} t^5 + \left(\frac{2}{3} + c_1\right) \cdot t^3 - 2c_1 t + c_2; x = t^3 - 2t.$$

12.

$$y''' = \sin x + \cos x$$

$$\text{жс.} \quad y = \cos x - \sin x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

13.

$$y''' = \ln/x^2, y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 2$$

$$\text{жс.} \quad \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \ln^2 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \\ y = -\frac{x}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

14.

$$y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{e^{x+c_1} - e^{-(x+c_1)}}{2} + c_2 x + c_3$$

15.

$$x = y''^2 + 1$$

$$\text{жс.} \quad x = z^2 + 1, y = \frac{4}{15} z^5 + c_1 z^2 + c_2$$

16.

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = e^{-x} (3 \cos x - 2 \sin x)$$

17.

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = e^{2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$$18. y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$$

$$19. y' y''' = 3y''^2$$

$$\text{ЖК.} \quad x = y^2 + y$$

$$20. y'' = y'^2$$

$$\text{ЖК.} \quad x + c = e^{-y}$$

$$21.$$

$$yy'' + y'^3 - y'^2 = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad x = y + \ln y$$

$$22.$$

$$y'' = -y$$

$$\text{ЖК.} \quad y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$23.$$

$$yy'' + y'^2 = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = \sqrt{(x + c_1)^2 + c_2}$$

2. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalar yechilsin.

$$1.$$

$$y'' - 5y' - 6y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{6x}$$

$$2.$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = e^{2x} (c_1 + c_2 x)$$

$$3.$$

$$y'' + 9y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

$$4.$$

$$y'' + 6y' + 25 = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = e^{-3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$$

$$5.$$

$$y'' - 9y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

$$6.$$

$$y'' - 8y' = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = c_1 + c_2 e^{8x}$$

$$7.$$

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = e^{-3x} (c_1 + c_2 x)$$

$$8.$$

$$y'' + 16y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$$

$$9.$$

$$y' + 2y' + 2y = 0$$

$$\text{ЖК.} \quad y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

10.

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

11.

$$2y'' - 3y' - 2y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{2x}$$

12.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

13.

$$y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 7$$

$$\text{жс.} \quad y = e^{3x}(x + 2)$$

14.

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = e^{5x}(c_1 + c_2 x)$$

15.

$$y'' + 49y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x$$

16.

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

17.

$$y'' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$\text{жс.} \quad y = 2 - e^{-3}$$

18.

$$y'' + 4y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\text{жс.} \quad y = -\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

19.

$$y' - y' - 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$\text{жс.} \quad y = \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}$$

20.

$$y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$$

$$\text{жс.} \quad y = e^x(\cos 2x - \sin 2x)$$

21.

$$y'' + 24y' + 144y = 0$$

$$\text{жс.} \quad [y = e^{-12}(c_1 + c_2 x)]$$

22.

$$y'' - 5y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = c_1 e^{-\sqrt{5}x} + c_2 e^{\sqrt{5}x}$$

23.

$$y'' - 22y' + 121y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = e^{11x}(c_1 + c_2 x)$$

24.

$$y'' - y' - 6y = 0$$

$$\text{жс.} \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

XII BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI. ASOSIY TUSHUNCHALAR.

1-§ Ehtimolning klassik ta'rifi va xossalari

Ehtimollar nazariyasi ommaviy bir jinsli tasodifiy jarayonlarni umumiy qonuniyatlarini o'rganuvchi fandır.

Ehtimollar nazariyasini muhim tushunchalaridan biri hodisa tushunchasidir. Muayyan shart-sharoitda tajriba (sinash) natijasida hodisa ro'y beradi. Masalan, to'q mag'izli chigitni er sharoitida ma'lum bir chuqurlikka ekanimizda tuproqni namligi, qarorati, unumdorligi etarli bo'lganda unib chiqish yoki chiqmaslik hodisalaridan biri ro'y beradi. Bu erda chigitni ekish tajriba, uni unib chiqish yoki chiqmasligi hodisadir.

Hodisalar uch xil bo'ladi: muqarrar, mumkin bo'lmagan, tasodifiy hodisalar. Odatda, hodisalarni ro'y berishi uchun qulaylik tug'diruvchi shartlar majmui o'zgarmas deb qaraladi.

Muayyan shart-sharoitda har bir tajribada ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi.

Tasodifiy hodisalar lotin alifbosining A, B, C, D, ... bosh harflari bilan belgilanadi.

Har bir tajriba natijasi elementar hodisa deyiladi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha hodisalar elementar hodisalar to'plamini tashkil etadi.

A tasodifiy hodisa bo'lsin. Unga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan $\bar{A}$ hodisaga aytiladi. qarama-qarshi hodisalar yig'indisi muqarrar hodisadan iborat bo'ladi.

Masalan, tanga tashlash tajribasida A-gerbli tomon tushish hodisasi bo'lsa, $\bar{A}$ raqamli tomon tushish hodisasi bo'lib, ular o'zaro qarama-qarshi hodisalar bo'ladi.

Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bitta va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisalar yagona mumkin bo'lgan, birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'ladi.

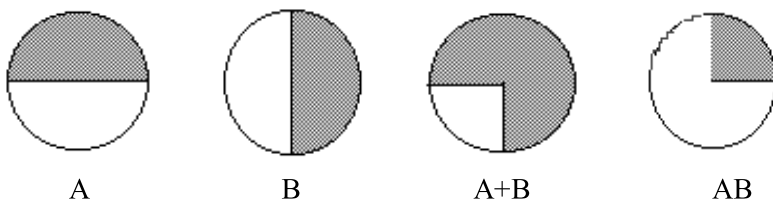
Masalan, o'yin soqqasini tashlaganda biror ochko tushish hodisasi yagona mumkin bo'lgan hodisadir. Chunki {1, 2, 3, 4, 5, 6} ochkolardan albatta biri tushadi.

Agar bir nechta hodisalardan hech birini boshqalariga nisbatan ro'y berishi ko'proq deyishga asos bo'lmasa, ular teng imkoniyatli hodisalar deyiladi.

Ikkita A va B hodisalarning yig'indisi deb, ulardan kamida birining ro'y berishidan iborat bo'lgan C hodisaga aytiladi va uni $C=A+B$ ko'rinishda belgilanadi.

Ikkita A va B hodisalarning ko'paytmasi deb, ikkala hodisaning bir vaqtda ro'y berishidan iborat C hodisaga aytiladi va $C=A \cdot B$ ko'rinishda yoziladi.

Agar ikkita A va B hodisalar bir vaqtda ro'y bermasa, ya'ni ko'paytmasi mumkin bo'lmagan hodisa bo'lsa, $A \cdot B = \emptyset$, u holda bu hodisalarni birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.



Agar har bir sinashda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan kamida bittasi ro'y bersa, ya'ni $A_1+A_2+\dots+A_n=U$ bo'lsa, u holda bu hodisalar, hodisalarining to'la gruppasini tashkil etadi.

Agar $A_1+A_2+\dots+A_n=U$ bo'lib, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) bo'lsa bu hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini hosil qiladi.

Ehtimolning klassik ta'rifi va xossalari

Ehtimollar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri-hodisaning ehtimoli tushunchasidir. Ehtimol hodisaning ro'y berish imkoniyatini xarakterlovchi sonidir.

Bizga quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi hodisalar berilgan bo'lsin:

1. Bu hodisalar jufti-jufti bilan birgalikda emas, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$)
2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar yagona mumkin bo'lgan to'la hodisalar to'plamini tashkil etsin, ya'ni $A_1+A_2+\dots+A_n=U$ bo'lsin.
3. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar teng imkoniyatli bo'lsin.

Faraz qilaylik, qarayotgan n ta $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan m tasi A hodisaning ruy berishiga qulaylik tug'dirsini.

Ta'rif. A tasodifiy hodisaning $P(A)$ ehtimoli deb, A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar sonining teng imkoniyatli barcha elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Ehtimolning xossalari:

1. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng, ya'ni $P(U) = 1$, chunki $m=n$

2. Mumkin bo'lmagan hodisani ehtimoli 0 ga teng. Bu holda $m=0$,

$$\text{demak, } P(V) = \frac{m}{n} = 0$$

3. Tasodifiy hodisaning ehtimoli musbat son bo'lib, u nol va bir orasida bo'ladi, ya'ni $0 < P(A) < 1$.

Yuqoridagilardan istalgan hodisaning ehtimoli $0 \leq P(A) \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Kombinatorika elementlari

Ehtimollar nazariyasiga doir misollarni echishda quyidagi kombinatorika elementlaridan foydalaniladi.

1. n ta elementdan k ta dan tuzilgan o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]$$

2. n ta elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, birdan n gacha bo'lgan sonlar ko'paytmasiga teng.

3. n ta elementdan k tadan tuzilgan guruxlashlar (kombinatsiyalar) soni

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Mavzuga doir namunaviy masalalarni echimi

1-misol: 4 kishilik stol atrofiga 4 odamni necha xil usulda joylashtirish mumkin.

Yechish: $P_n = n!$ Formuladan foydalanamiz, $n=4$. $P_4=4!=1*2*3*4=24$

2-misol. Talaba 20 ta savoldan 2 tasiga javob berishi kerak. Bu ikkita savolni necha xil usulda tanlash mumkin.

$$\text{Yechish: } n=20, k=2 \text{ deb olamiz, u xolda: } C_{20}^2 = \frac{A_{20}^2}{P_2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$$

Demak, 190 usulda tanlash mumkin ekan.

3-misol. Tekshirishda aniqlandiki, Har 8 ta qorako'l terisidan 1 donasi nostandart. Tavakkaliga olingan 3 ta qorako'l terilarini barchasini standart bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Ehtimolikning klassik ta'rif $P(A) = \frac{m}{n}$ dan foydalanamiz.

$$\text{Bunda } n = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56, \quad m = C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \quad \text{Demak,}$$

$$P(A) = \frac{35}{56} = 0,625$$

4-misol. 200 chigitdan 20 tasi sifatsiz. a) tavakkaliga olingan bir dona chigitni; b) olingan ikki dona chigitni sifatli bo'lish ehtimollarini toping.

Yechish. A hodisasi bilan tavakkaliga olingan bir dona chigitni sifatli chigit bo'lishini belgilaylik. Talab qilingan $P(A)=?$

Bizning misolda $n=200$, $m_A=180$. Bundan talab qilingan bir dona chigitni sifatli bo'lish ehtimolli

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{180}{200} = 0.9$$

b) B hodisa bilan ikkala chigitni ham sifatli bo'lishini belgilaymiz. Bu holda barcha imkoniyatlar soni n hamda m_A lar quyidagi gruppalar sonini topish formulasi bilan hisoblanadi:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

bu yerda $n!=1*2*3*...*n$ (faktorial), $0!=1$ deb qabul qilingan.

$$\text{U holda } n = C_{200}^2 = \frac{200!}{2!198!} = \frac{199 \cdot 200}{1 \cdot 2} = 19900$$

Xuddi shunday B-hodisani yuzaga kelishi uchun qulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar soni

$$m_B = C_{180}^2 = \frac{180!}{2!178!} = \frac{179 \cdot 180}{1 \cdot 2} = 16110$$

bo'lganligidan talab qilingan hodisa ehtimoli (1) formulaga asosan

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{16110}{19900} \approx 0.81$$

5-misol. Brigadada 11 ishchi bor. Shulardan 4 tasi ayol. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 5 ishchi tanlab olindi. Bulardan ikkitasi ayol kishi bo'lish hodisasining ehtimolini toping.

Yechish: A – tanlab olingan ishchilardan ikkitasi ayol kishi bo'lish hodisasi bo'lsin.

Barcha mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni, gruppalash formulasiga asosan

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$n = C_{11}^5 = \frac{11!}{5!6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 462$$

Endi A – hodisani yuzaga kelishi uchun qulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar sonini hisoblaymiz.

Buning uchun tanlab olingan ishchilardan uchtasi erkak kishi, ikkitasi ayol ishchi bo'lishini $C_7^3 C_4^2$ usul bilan tanlash mumkin.

$$m_A = C_7^3 C_4^2 = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 210,$$

U holda talab qilingan ehtimol $P(A) \approx 0.46$ ga teng ekanligi kelib chiqadi.

Mustaqil echish uchun masalalar

1. Guruhda 16 ta talaba bo'lsa, ulardan uchlikni (sardor, kamolot, kasaba uyushma) necha xil usul bilan saylash mumkin.
2. 6 ta kishini 6 ta joyga necha xil usul bilan joylashtirish mumkin.
3. Guruhda 18 ta talaba bo'lib, ulardan 5 talabani ko'rik tanloviga olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin.
4. Javondagi 8 ta kitobni necha xil usul bilan o'rinlarini almashtirib qo'yish mumkin.
5. Etishtirilayotgan 12 ta ko'chatdan 3 tasini boshqa joyga ko'chirish kerak. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin.
6. 10 ta pilladan istalgan 3 tasini tekshirish kerak bo'lsin. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin.
7. O'yin soqqasi tashlanganda juft ochko tushish ehtimolini toping.
8. Ikkita o'yin soqqasi tashlanganda 8 ochko, 10 ochko, 11 ochko tushish ehtimollarini toping.
9. Qutida 10 ta bo'yalgan 5 ta bo'yalmagan sharchalar bor. Tavakkaliga 4 ta sharcha olinganda ulardan 3 tasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.
10. Ekishga tayyorlangan 12 ta ko'chatdan 2 tasi yaroqsiz. Shulardan tavakkaliga 5 tasi olinganda 4 tasini yaroqli ko'chat bo'lish ehtimolini toping.
11. Guruhda 12 ta o'g'il va 6 ta qiz talaba o'qiydi. Tavakkaliga olingan 4 ta talabadan 3 tasi o'g'il bola bo'lish ehtimolini toping.
12. 3 ta o'yin soqqasi tashlanganda 15 ochko tushish ehtimolini toping.
13. Domino toshlaridan tavakkaliga bittasi olinganda undagi ochkolar soni 3 dan kam bo'lish ehtimolini toping.
14. Tajribalardan aniqlandiki, Har10 dona pilladan 2 tasi nostandart. Tavakkaliga olingan 4 ta pilladan 3 tasi standart bo'lish ehtimoli topilsin.
15. Telefon qiluvchi nomer terayotib, oxirgi ikki raqamni eslay olmadi va bu raqamlar har xil ekanini bilgan holda, tavakkaliga terdi. To'g'ri nomer terilganligi ehtimolini toping.
16. Ikkita o'yin soqqasi tashlandi. Chiqqan ochkolar yig'indisi 9 ochko bo'lish hodisasining ehtimolini toping.
17. Gruppada 15 nafar talaba ta'lim oladi, shulardan 6 nafari a'lochi. Jurnal nomeri bo'yicha tavakkaliga 8 nafar talaba tanlab olindi. Shulardan 4 nafarining a'lochi bo'lish hodisasining ehtimolini toping.

18. Yashikda 28 ta shar bor. Bulardan 7 tasi qizil, 8 tasi qora, 5 tasi ko'k va 8 tasi oq rangda. Tavakkaliga olingan sharning rangli shar bo'lish ehtimolini toping.

19. Xaltachada oltita bir xil kub bor. Har bir kubning barcha tomonlariga quyidagi harflardan biri yozilgan. a, a, a, t, l, b. Bittalab olingan va «bir» qator qilib terilgan kublarda «talaba» so'zini hosil bo'lishligi ehtimolini toping.

20. 36 dona kartadan uchta karta olindi. Ularni uchalasini ham tuz bo'lish ehtimolini toping.

21. Kartochkalarga r, z, yo, yu, i, y, t harflari yozilgan. Tavakkaliga kartochkalar olinib ketma-ket qo'yilganda unda «Riyoziyot» so'zini hosil bo'lish ehtimolini toping?

22. Yashikdan 15 ta bir xil detaldan 12 tasi sifatli. Tavakkaliga 4 ta detal olindi. Ulardan 3 tasini sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

2-§. Ehtimollarni qo'shish, ko'paytirish teoremlari.

To'la ehtimol va Bayes formulalari.

Faraz qilaylik A va B hodisalar birgalikda bo'lmasin va ularning ehtimollari $P(A)$ va $P(B)$ berilgan bo'lsin.

Teorema. Birgalikda bo'lmagan ikkita A va B hodisadan ixtiyoriy bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng.

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \quad (1)$$

Natija. Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan ixtiyoriy birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng.

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=\sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (2)$$

Agar bitta tajribada ikkita hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor etmasa, bu hodisalar birgalikda deyiladi.

Faraz qilaylik A va B birgalikda bo'lgan hodisalar bo'lib, $P(A)$, $P(B)$ va $P(AB)$ ehtimollar berilgan bo'lsin. $A+B$, ya'ni A va B hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimolini topish talab etilsin.

Birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan bittasini ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayirilganiga tengdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad (3)$$

To'la grupp tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar ehtimollari yig'indisi 1 ga teng.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(U) = 1.$$

Agar $A+B=U$ va $AB=V$ bo'lsa, u holda A va B hodisalarni o'zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

Agar ikkita hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berish yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, bu hodisalar erkli hodisalar deyiladi.

Agar ikki hodisadan birining ro'y berish ehtimoli ikkinchi hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lsa, bu hodisalar bog'liq deyiladi.

Faraz qilaylik, A va B birgalikda va erkli hodisalar bo'lib, ularning $P(A)$ va $P(B)$ ehtimollari berilgan bo'lsin.

Teorema. Ikkita A va B erkli hodisalarni birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko'paytmasiga teng.

$$P(AB)=P(A) P(B) \quad (4)$$

Natija. Birgalikda o'zaro bog'liq bo'lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko'paytmasiga teng. Xususan

$$P(ABC) = P(A) P(B) P(C) \quad (5)$$

B hodisaning A hodisa ro'y bergan degan shartda hisoblanadigan ehtimoliga shartli ehtimol deyiladi va u $P(B/A)$ yoki $P_A(B)$ bilan belgilanadi.

Teorema. Ikkita A va B bog'liq hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini shu hodisa ro'y bergan degan farazda hisoblanadigan ikkinchi hodisaning shartli ehtimoli ko'paytmasiga teng

$$P(AB)=P(A) P(B/A) \quad (6)$$

Xususan 3 ta bog'liq hodisalarni birgalikda ro'y berish ehtimollari uchun ushbu formula o'rinlidir

$$P(ABC)=P(A) P_A(B) P_{AB}(C) \quad (7)$$

Birgalikda bog'liq bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan kamida bittasini sodir bo'lish ehtimoli

$$P(A)=1-q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$$

To'la ehtimol formulasi

A hodisa to'la grupp tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalaridan biri ro'y berganda ro'y bersin, ya'ni $A=AB_1+AB_2+\dots+AB_n$, $P(A)=?$.

Talab qilingan ehtimol quyidagi to'la ehtimol formulasi bilan hisoblanadi

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i) \quad (8)$$

Ko'pincha amaliyotda A hodisa ro'y berganligi shartida $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalaridan birining ro'y berish ehtimolini topish, ya'ni $P(B_i/A)$ shartli ehtimollarni topish zarur bo'ladi. Bu ehtimollar uchun quyidagi kurinishdagi Bayes formulasi mavjud $P(A) \neq 0$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} \quad (9)$$

Mavzuga doir namunaviy masalalarni echimi

1-misol. O'tkazilgan o'rik va gilos ko'chatlarini ko'karish ehtimoli mos ravishda 0,8 va 0,6 ga teng bo'lsa,

- a) shulardan hech bo'lmaganda bittasini ko'karish ehtimoli topilsin;
- b) ikkalasini ham ko'karish ehtimoli topilsin.

Yechish: a) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$ kurinishdagi formuladan foydalanamiz. Bunda

$$P(A)=0,8; P(B)=0,6, P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)=0,8 \cdot 0,6=0,48,$$

$$U holda P(A+B)=0,8+0,6-0,48=0,92$$

$$b) P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B) \text{ formuladan } P(A \cdot B)=0,8 \cdot 0,6=0,48$$

2-misol. 36 talik o'yin qartasidan ketma-ket 2 ta qarta olingan.

a) ikkalasi ham valet;

b) biri valet ikkinchisi dama bo'lish hodisalarini ehtimollari topilsin.

Yechish: Ushbu hodisalarni kiritamiz: A, B, C.

A - birinchi qarta valet;

B - ikkinchi qarta valet;

C - ikkinchi qarta dama.

Masala shartiga ko'ra $P(AB)=?$ $P(AC)=?$ topish kerak. (3) shartli ehtimol formulasiga ko'ra

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B/A)=\frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35}=\frac{1}{105}$$

$$P(AC)=P(A) \cdot P(A/C)=\frac{4}{36} \cdot \frac{4}{35}=\frac{1}{135}$$

3-misol. Paxta zavodiga birinchi fermer xo'jaligi 50%, ikkinchi fermer xo'jaligi 20%, uchinchi fermer xo'jaligi 30% maxsulot beradi. Undan birinchi fermer xo'jaligi maxsulotining 70%, ikkinchi fermer xo'jaligining 85%, uchinchi fermer xo'jaligining 95% birinchi nav bo'lsa, tavakkaliga tekshirish uchun olingan tolaning birinchi nav bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A—olingan tolani birinchi nav bo'lish hodisasi, B_1 , B_2 , B_3 , —mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi fermer xo'jaligini paxta tolasini bo'lish hodisalari bo'lsin.

Masala shartiga asosan $P(B_1)=0.5$; $P(B_2)=0.2$; $P(B_3)=0.3$ va shartli ehtimollari

$$P(A/B_1)=0.7; P(A/B_2)=0.85; P(A/B_3)=0.95$$

To'la ehtimol formulasiga asosan talab qilingan ehtimol

$$P(A)=P(B_1) \cdot P(A/B_1)+P(B_2) \cdot P(A/B_2)+P(B_3) \cdot P(A/B_3)=0.5 \cdot 0.7+0.2 \cdot 0.85+0.3 \cdot 0.95=0.36+0.17+0.285=0.805$$

4-misol. Ikki xil nav chigit bor. Undan 70% maydonga birinchi nav chigit ekildi. Birinchi nav chigitning unib chiqish ehtimoli 0.98, ikkinchi nav chigitni unib chiqish ehtimoli 0.8 ga teng.

Agar maydonga ekilgan chigit unib chiqqan bo'lsa, uni birinchi nav chigit bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A—ekilgan chigitlarni unib chiqish hodisasi, B_1 —maydonga ekilgan chigitni nav bo'lish hodisasi, B_2 —ekilgan chigitni ikkinchi nav bo'lish hodisasi bo'lsin.

Misol shartga asosan B_1 , B_2 hodisalarning ehtimollari

$$P(B_1)=0.7, P(B_2)=0.8$$

Talab qilingan ehtimollik Bayes formulasiga, ya'ni

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)} \text{ ga asosan}$$

$$P(B_1/A)=(0.7 \cdot 0.98)/(0.7 \cdot 0.98 + 0.3 \cdot 0.8)=(0.686/0.926)=0.741$$

Demak, bu maydonga birinchi nav chigit ekilgan bo'lish ehtimoli 0.741 ga teng ekan.

Mustaqil echish uchun masalalar

1. Bahorda o'rik va gilos ko'chatlari ekildi. Agar o'rik ko'chatining ko'karish ehtimoli 0.7 ga, gilosniki 0.6 teng bo'lsa, ulardan kamida bittasining ko'karish ehtimolini toping.

2. O'tkazilgan olma va nok ko'chatlari ko'karib ketish ehtimollari mos ravishda 0.9 va 0.4. Shulardan aniq bittasini ko'karish ehtimolini toping.

3. Agar biror xo'jalik yilida davlatga sotgan qorako'l terilarining 95% standart, shundan 80% birinchi sortli bo'lsa, shu xo'jalikdan olingan terilardan tavakkaliga olingan bittasining birinchi sort bo'lish ehtimolini toping.

4. Bazada 17 ta kinoskop bor, bulardan 9 tasi Toshkent shaxrida tayyorlangan. Tavakkaliga olingan 7 ta kinoskop ichida 4 tasi Toshkent shaxrida tayyorlangan bo'lish ehtimolini toping.

5. Tanga ikki marta tashlanganda, hech bo'lmaganda bir marta «gerb» tomoni tushish ehtimolini toping.

6. Uchta o'yin soqqasi tashlanganda chiqqan ochkolar yig'indisi o'n sakkiz bo'lish ehtimolini toping.

7. To'rtta o'yin kubigi tashlandi. Kamida bittasida olti ochko tushish ehtimolini toping.

8. Ekish uchun to'rt xil nav bug'doy urug'i bor. Maydonni 90% ga birinchi nav, 5% ga ikkinchi nav, 3% ga uchinchi nav, 2% ga to'rtinchi nav urug'i ekiladi. Bug'doyning har bir boshog'ida 50 donadan ortiq don bo'lish ehtimoli birinchi nav urug'i uchun 0.6, ikkinchi nav urug'i uchun 0.2, uchinchi nav uchun 0.15 va to'rtinchi nav uchun 0.06 bo'lsa, tasodifiy olingan boshog'da kamida 50 dona don bo'lish ehtimolini toping.

9. Agar ma'lum bir jamiyatdagi erkak va ayollar soni teng bo'lib, ulardan 5% erkaklar, 0.25% ayollar daltoniklar (rang ajrataolmaydigan odamlar) bo'lishsa, tasodifiy olingan daltonikni erkak kishi bo'lish ehtimolini toping.

10. Uch stanok fabrikaga mos ravishda 25%, 30% va 45% mahsulot etishtirib beradi. Birinchi stanokni 1%, ikkinchi stanokni 2%, uchinchi stanokni 3% mahsuloti sifatsiz. Tasodifiy olingan mahsulotni sifatsiz ekanligi ma'lum bo'lsa, uni qaysi stanokda tayyorlanganligi eng katta ehtimolga ega.

11. Zavod ishlab chiqargan detalning 37% ni birinchi stanokda, 42% ni ikkinchi stanokda, 21% ni uchinchi stanokda tayyorlagan. Stanoklarning sifatsiz maxsulot tayyorlashlari mos ravishda 7%, 3%, 1% ga teng. Tavakkaliga zavod detali olinganida sifatsiz ekanligi ma'lum bo'ldi, uni qaysi stanokda tayyorlangan bo'lishi eng katta ehtimolga ega.

12. Dub daraxtining ikki xil urug'i bor. Ekilgan dub urug'ining 60% birinchi nav. Birinchi nav urug'ining 90%, ikkinchi nav 65% unib chiqadi. Agar ekilgan urug'lar unib chiqqan bo'lsa, shu maydonga birinchi nav urug' ekilgan bo'lish ehtimolini toping.

13. Gruppada 25 talaba bo'lib, imtihon topshirishga kelgan talabalarning a'lo bahoga tayyorlangani 6 ta, yaxshi bahoga 10 ta, o'rta bahoga 7 ta hamda qoniqarsiz bahoga 2 ta. Imtihon savollari 30 ta bo'lib, a'lochi talaba hammasini, yaxshi bahoga tayyorlangan talaba 24 savolni, o'rta bahoga tayyorlangan talaba 16 savolni, yomon tayyorlangan talaba 10 savolni biladi. Tavakkaliga chaqirilgan talaba 3 ta savolga ham javob bergan bo'lsa, uni a'lo bahoga tayyorlangan talaba bo'lish ehtimolini toping.

14. Talabalarning sport musobaqasiga qatnashishi uchun birinchi gruppadan 5 ta, ikkinchi gruppadan 2 ta, uchinchi gruppadan 2 ta talaba olindi. Olingan gruppada talabalarining institut terma komandasiga tushish ehtimolliklari mos ravishda har bir gruppada talabasi uchun 0.7, 0.8 va 0.5 ga teng. Agar tavakkaliga olingan talaba institut komandasidan bo'lsa, uni qaysi gruppada talabasi bo'lish ehtimoli eng katta ehtimolga ega.

15. Omborga 3 ta xo'jalikdan mahsulotlar keltirilgan. Bu mahsulotlardan 35% birinchi xo'jalikda, 40% ikkinchi va 25% uchinchi xo'jalikda tayyorlangan. Bu xo'jaliklar uchun sifatsiz mahsulotlarning o'rtacha foizi mos ravishda 5%, 3% va 2% ni tashkil etadi. Tavakkaliga olingan mahsulot sifatsiz bo'lsa, uning ikkinchi xo'jalikda tayyorlangan bo'lish ehtimoli topilsin.

16. Maxsus kasalxonaga B₁- kasallik bilan 40%, B₂- kasallik bilan 26% va B₃- kasallik bilan esa 34% kasallar keltiriladi. B₁ kasallik bilan og'rigan bemorning to'la sog'ayib chiqish ehtimoli 0.9 ga, B₂ va B₃ kasalliklar bilan og'rigan bemorlar uchun bu ehtimolliklar mos ravishda

0.8 va 0.95 ga teng. Kasalxonaga keltirilgan bemor to'la sog'ayib chiqqan bo'lsa, uning B_1 kasallik bilan og'rikan bo'lish ehtimoli topilsin.

17. Dukonga keltirilgan mahsulotning 60% №1 va 40% №2 fabrikada tayyorlangan, mahsulotning 85% oliy sifatli hamda 15% o'rtacha sifatli bo'lib, №2 fabrika uchun esa bu ko'rsatkichlar mos ravishda 70% va 30% ni tashkil etadi. Har idor sotib olgan bitta mahsulot oliy sifatli bo'lsa, uning №1 fabrikada tayyorlangan bo'lish ehtimoli topilsin.

18. Qurilma ikki qismdan iborat bo'lib, u ishlenganda ikkala qism barobar ishlaydi. Bu qismlarning uzluksiz (buzilmasdan) ishlashi mos ravishda 0.7 va 0.9 ga teng. Sinash paytida qurilma ishdan chiqqan bo'lsa, birinchi qismining ishdan chiqqan bo'lish ehtimoli topilsin.

19. Uchta merganning mos ravishda nishonga tekkazish ehtimoli 0.3; 0.5; 0.6 ga teng. Merganlar barobariga o'q uzishganda nishonga bitta o'q tegdi. Nishonga birinchi mergan tekkizgan bo'lish ehtimolini toping.

20. Kuzatish uchun olingan 10 dona pilladan 2 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga olingan 6 ta pilladan yaroqsizi bittadan ortiq bo'lmalik ehtimoli topilsin.

21. Uchta mergan nishonga qarab, 0.9, 0.8 va 0.7 tekkizish ehtimoli bilan bittadan o'q uzishyapti. Hech bo'lmaganda bittasi nishonga tekkizish ehtimolini toping.

22. Merganning bir dona o'qi nishonga tekkizish ehtimoli 0.8 bo'lsa, otgan uchta o'qni barchasi nishongan tegish ehtimolini toping.

23. Uchta o'yin soqqasi tashlanganda kamida bittasida 6 ta ochko tushish ehtimolini toping.

24. Merganning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli 0.6. Merganning 0.8 dan kichik bo'lmagan ehtimol bilan o'qni nishonga tekkizishi uchun kamida necha marta o'q uzishi kerak

3-§Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Muavr - Laplasing lokal va integral teoremlari. Puasson formulasi

Bog'liq bo'lmagan (erkli) tajribalar ketma-ketligi o'tkazilayotgan bo'lib, tajribaning har birida A hodisa yoki $\bar{A}$ ro'y bersin. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas $P(A)=p$ ga, uning ro'y bermaslik ehtimoli

$P(\bar{A})=1-P(A)=1-p=q$ bo'lsin. n ta erkli tajribalar ketma-ketligida A hodisaning k marta ro'y berishi ehtimoli $P_n(k)$ Bernulli formulasi bilan hisoblanadi

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1)$$

Bu yerda $k=0, 1, 2, \dots, n$,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, k!=1*2*\dots*k, 0!=1$$

Muavr-Laplasning lokal va integral teoremlari, Puasson formulasi.

Tajribalarda n ta erkli sinashda hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli Bernulli formulasi bilan hisoblanadi. Agar erkli sinashlar soni n katta bo'lsa, talab qilingan ehtimollarni Bernulli formulasi bilan hisoblash qiyin bo'ladi.

Tajribalarda n -ning qiymati katta bo'lib, har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A)=p$ o'zgarmas ($0<p<1$ nolga ham 1 ga ham yaqin bo'lmaganda) $np \geq 10$ bo'lganda talab qilingan ehtimolni quyidagi Muavr-Laplasning taqribiy lokal va integral formulasidan foydalanib hisoblash mumkin:

a). **Muavr-Laplasning lokal teoremasi.** n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro'y berish $P_n(k)$ ehtimolini yuqoridagi shart $np \geq 10$ bajarilganda taqriban quyidagi formula bilan hisoblanishi mumkin

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \quad (2)$$

$$\text{Bu yerda } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$\varphi(x)$ funktsiya juft funktsiya bo'lib, uning qiymatlari ($0 \leq x \leq 4$) maxsus jadvaldan olinadi (ilovadagi 1-jadval).

b) Muavr-Laplasning integral teoremasi.

Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas va p - ga ($0<p<1$) teng bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1 < k < k_2)$ n katta bo'lib, $np \geq 10$ bo'lganda taqriban quyidagi formula bilan hisoblanishi mumkin

$$P_n(k_1 < k < k_2) \approx F(x_2) - F(x_1) \quad (4)$$

Bu yerda

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ va } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

Laplas funktsiyasi $F(-x) = 1 - F(x)$ toq funktsiya, qiymatlari maxsus jadvaldan olinadi (2-jadval, $0 \leq x \leq 5$). Agar $x > 5$ bo'lsa, $F(x) \approx 0.5$ deb olish mumkin.

c). **Puasson formulasi.**

Tajribalardagi n -ta erkli sinash seriyasining har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli juda kichik, sinashlar soni n katta va $\lambda = np = \text{const} < 10$ bo'lsa, u holda n ta erkli sinashda A hodisani k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ uchun quyidagi taqribiy formula o'rinli bo'ladi:

$$P_n(k) \approx (\lambda^k e^{-\lambda}) / k! \quad (5)$$

Bu erda $k=0, 1, 2, \dots$.

Ehtimoli (5) ifoda bilan aniqlanadigan tasodifiy hodisa Puasson qonuni bilan taqsimlangan deyiladi

Mavzuga doir namunaviy masalalarni echimi.

1-misol. Har bir chigitni unib chiqish ehtimoli 0.9 teng bo'lsa, 4 ta ekilgan chigitdan aniq 3 tasini unib chiqish $P_4(3)$ ehtimolni toping.

Yechish. Masala shartiga asosan $n=4$, $k=3$, $P(\bar{A})=p=0.9$, $P(A)=q=1-p=0.1$. Talab qilingan ehtimollik Bernulli formulasiga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P_4(3) = C_4^3 (0.9)^3 (0.1) = 0.729 \cdot 0.1 = 0.0729 = 0.0729$$

2-misol. Agarda biror o'simlik urug'ining 80% i unib chiqadigan bo'lsa, ekilgan 300 dona urug'dan unib chiqqanlar soni a) 240 dona, b) 220 dan 260 ta oraliqda bo'lish ehtimolliklarini toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra $n=300$, har bir urug'ni unib chiqish ehtimoli $p=0.8$, chiqmaslik ehtimoli $q=0.2$ ga teng.

a) $k=240$, talab qilingan $P_{300}(240)=?$.

Bernulli formulasi bilan $P_{300}(240) = (0.8)^{240} (0.2)^{60}$ ehtimolikni aniq hisoblash juda qiyin. Umuman n - ni qiymati katta bo'lganda Bernulli formulasidan foydalanish qiyinlashadi. Bunday hollarda, ya'ni n -katta bo'lib, har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas, ya'ni $np > 10$ bo'lsa, u holda n ta erkli sinashda A hodisaning k -marta ro'y

berish ehtimoli $P_n(k)$ ni taqriban (2) Muavr-Laplas formulasi (lokal teoremasi) yordamida hisoblash mumkin. Bunda, agar $x > 4$ bo'lsa, $\varphi(x) < 0.0001$ bo'ladi.

Qaralayotgan misolda $n=300$, $k=240$, $p=0.8$, $q=0.2$ bo'lganligidan

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{240 - 300 \cdot 0.8}{\sqrt{300 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{240 - 240}{\sqrt{48}} = 0$$

talab qilingan ehtimol

$$P_{300}(240) \approx \frac{1}{\sqrt{48}} \varphi(0) \approx \frac{1}{6.93} \varphi(0)$$

Ilovadagi 1-jadvaldan $\varphi(0)=0.3989$ topsak,

$$P_{300}(240) \approx \frac{1}{6.93} \cdot 0.3989 \approx 0.0576$$

ekanligi kelib chiqadi.

b) Bu holda $n=300$, $p=0.8$, $q=0.2$, $k_1=220$, $k_2=260$, $P_{300}(220 \leq k \leq 260) = ?$ ehtimolni hisoblashda Muavr-Laplasning (4) ko'rinishdagi integral teoremasidan foydalanish mumkin.

Qayd etilgan misolda

$$x^1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{220 - 300 \cdot 0.8}{\sqrt{300 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{220 - 240}{\sqrt{48}} \approx -2.89$$

$$x^2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{260 - 300 \cdot 0.8}{\sqrt{300 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{260 - 240}{\sqrt{48}} \approx 2.89$$

bo'lganligi uchun talab qilingan ehtimol (4) formulaga asosan:

$$P_{300}(220 \leq k \leq 260) \approx F(2.89) - F(-2.89) = F(2.89) + F(2.89) = 2 \cdot F(2.89)$$

Ilovadagi 2-jadvaldan $F(2.89)=0.4980$ topamiz, u holda

$$P_{300}(220 \leq k \leq 260) \approx 2 \cdot 0.4980 = 0.996 \text{ bo'ladi.}$$

Demak, 300 ta ekilgan chigitdan unib chiqqanlari soni (220; 260) oralig'ida bo'lishi qariyb muqarrar hodisa ekan.

Mustaqil echish uchun masalalar

1. Har bir ekilgan ko'chatning ko'karib ketish ehtimoli 0.9 bo'lsa, 5 ta ko'chatdan 4 tasini ko'karish ehtimolini toping.

2. Tanga 4 marta tashlanganda) ikki marta gerb tomoni tushishi b) kamida 3 marta gerb tomoni tushish ehtimoli topilsin.

3. Ekilgan chigitning unib chiqish ehtimoli 0.8 bo'lsa, a) 4 ta chigitdan 3 tasini unib chiqish ehtimoli, b) ko'pi bilan bittasini unib chiqish ehtimolini toping.

4. Agar chigitning ko'karish ehtimoli 0.9 bo'lsa, 100 ta chigitdan 92 tasi ko'karish ehtimolini toping.

5. Chigitning unuvchanligi 75% bo'lsa 100 chigitdan a) 70 bilan 80 orasida unib chiqish ehtimoli b) kamida 80 tasi unib chiqish ehtimoli topilsin.

6. Karam ko'chatining ko'karish ehtimoli 0.9 bo'lsa, ekilgan 400 ta ko'chatdan a) 350 tasini ko'karish ehtimoli, b) (350, 370) oralig'idagi songateng miqdorda ko'karish ehtimoli v) kamida 350 tasini ko'karish ehtimoli topilsin.

7. Merganning o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0.75 bo'lsa, 100 ta o'qdan a) 70 bilan 80 orasida b) 70 dan ko'p emas v) kamida 70 marta nishonga tekkizish ehtimollarini toping.

8. Pillalar orasida yaroqsizi 0.1% ni tashkil etadi. Tekshirish uchun olingan 2000 pillaorasida ko'pi bilan 3 tasi yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

9. Tovuqchilik fermasidan sotuvgaolib kelinguncha tuxumning sinish ehtimoli 0.001, keltirilgan 2000 tuxumdan singanlari soni a) ko'pi bilan 2 ta b) aniq 3 ta bo'lish ehtimoli topilsin.

10. O'simlik urug'ining 70% unib chiqadigan bo'lsa, 5 dona ekilgan urug'dan unib chiqqanlari soni a) 2 ta, b) 3 tadan kam emaslik ehtimollarini toping.

11. O'rtacha 1 m²erda 3 dona begona o't uchrasa, tasodifan olingan 1m²erdaa) begona o't uchramaslik; b) begona o't 2 tadan ortiq bo'lmaslik ehtimollarini toping.

12. Bug'doy donining zararkunandalar bilan zaharlanishi 0.1% tashkil qilsa, 3000 dona tasodifan olingan don ichida zaharlanganlar soni: a) 2 ta, b) 2 tadan ko'p emaslik ehtimollarini toping.

13. Paxtaning 20% ti qisqa tolali bo'lsa, tasodifiy ravishdaolingan beshta toladan ko'pi bilan 2 tasi qisqa tolali bo'lish ehtimolini toping.

14. Inkubatorga 1000 tuxum qo'yildi. Har bir tuxumning jo'jaolib chiqish ehtimoli 0.9 bo'lsa, 1000 ta tuxumdan ochib chiqqan jo'jalar soni a) 900 ta; b) kamida 850 ta bo'lish ehtimollarini toping.

15. Pespublikamizning janubiy hududlarida qishda ko'milmagan anorning sovuq urish ehtimoli 0.015 ga teng bo'lsa, bahorda tavakkaliga kuzatilgan 200 anordan sovuq o'rganlari soni ko'pi bilan 3 ta bo'lish ehtimolini toping.

16. Fermer xo'jaliklarini xo'jalik yilida rejani bajarish ehtimoli 0.9 bo'lsa, shu xo'jalik yilida 4 ta fermerdan kamida 3 tasining rejani bajargan bo'lish ehtimolini toping.

17. Biror xo'jalikning bir quti pilla qurtidan 70 kg pilla olish ehtimoli 0.8 ga teng. Tavakkaliga o'rganilgan 100 ta zvenolardan: a) aniq 80 tasini; b) kamida 75 tasini 70 kg dan pilla etishtirishgan bo'lish ehtimolini toping.

18. Tovuqchilik fermasidan savdo tarmoqlariga jo'natilgan tuxumlarning yo'lda sinish ehtimoli 0.002 bo'lsa, sotilayotgan tuxumlardan 2000 tasi ichida singanlar soni ko'pi bilan 2 ta bo'lish ehtimolini toping.

19. Paxtaga tushgan ko'sak qurtining har bir tup g'o'zaga ziyon etkazish ehtimoli 0.002 bo'lsa, maydondan tavakkaliga kuzatilgan 1000 ta g'o'zadan ko'sak qurti ziyon etkazganlari soni ko'pi bilan 3 ta bo'lish ehtimolini toping.

20. Paxtaning 30% qisqa tolali bo'lsa, tasodifiy ravishda olingan 3 ta toladan ko'pi bilan 2 tasi qisqa tolali bo'lish ehtimolini toping.

21. Bada urug'ining ichida 0.1% begona o't urug'i bo'lsa, tasodifiy olingan 3000 ta urug' ichida: 1) 4 ta, 2) ko'pi bilan 3 ta begona o't urug'i bo'lish ehtimollarini toping.

41. Paxtaga tushgan ko'sak qurtining har bir tup g'o'zaga ziyon etkazish ehtimoli 0.001 bo'lsa, maydondan tavakkaliga ko'zatilgan 1000 ta g'o'zadan ko'sak qurti ziyon etkazganlari soni kamida 3 ta bo'lish ehtimolini toping.

42. Agar o'rtacha har bir 1 m² paxta maydonida 2 ta begona o't uchrasa, tasodifiy olingan 2m² maydonda ko'pi bilan 3 ta begona o't bo'lish ehtimolini toping.

43. Paxtaning 17% qisqa tolali bo'lsa, tasodifiy ravishda olingan 7 toladan ko'pi bilan 4 tasi qisqa tolali bo'lish ehtimolini toping.

44. Bog'ga 3 tup o'rik ko'chati o'tkazildi. Har bir tup o'rikning ko'karib ketish ehtimoli 0.8 ga teng bo'lsa; a) shu ekilgan 3 tup ko'chatdan rosa 2 tasini, b) barcha ekilgan ko'chatlarni ko'karish ehtimolini toping.

45. Harbir tup g'ozaning vilt kasalligiga chalinish ehtimoli 0.0005 bo'lsin, tasodifiy kuzatilgan 6000 tup g'ozadan kasallanganlar soni 2 tadan kam bo'lmaslik ehtimolini toping.

46. Paxtaga tushgan ko'sak qurtining harbir tup g'ozaga ziyon etkazish ehtimolligi 0.001 bo'lsa, maydondan tavakkaliga kuzatilgan 4000 ta g'ozadan ko'sak qurti ziyon etkazganlari soni ko'pi bilan 8 ta bo'lish ehtimolini toping.

4-§. Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari.

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir.

Ta'rif. Tasodifiy miqdor deb, avvaldan qanday qiymat qabul qilishi noma'lum bo'lgan va tasodifga bog'liq holda sinov natijasida qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlaridan bitta va faqat bittasini qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar uch xil bo'lib, ulardan diskret va uzluksiz holini o'rganamiz.

Diskret tasodifiy miqdor deb, ayrim sanoqli qiymatlarni ma'lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi. Diskret tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Uzluksiz tasodifiy miqdor deb, chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan miqdorga aytiladi. Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1-misol. 100 ta ekilgan chigitdan o'nib chiqqanlari soni tasodifiy miqdor bo'lib u, 0, 1, 2, 3, ..., 100 qiymatlardan birini qabul qiladi. Bu diskret tasodifiy miqdor misol bo'ladi.

2-misol. Qishloq xo'jalik ekinlarini vegetatsiya davrida o'sish jarayoni tasodifiy miqdordir.

2-misolda keltirilgan tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdorga misol bo'la oladi.

Odatda tasodifiy miqdorlarni X , U , Z , ..., bosh harflar bilan, ularning mumkin bo'lgan qiymatlarini tegishli x , u , z kichik harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorni to'la xarakterlash uchun uning qabul qilish mumkin bo'lgan qiymatlari va bu qiymatlarni qanday ehtimolliklar bilan

qabul qilishni bilish lozimdir. X tasodifiy miqdorning x_i qiymatini qabul qilishi ehtimolini p_i orqali belgilaymiz, ya'ni $P(X=x_i)=p_i, (i=1, 2,...)$

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, uni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan shu qiymatlarni qabul qilish ehtimolliklari jadvaliga aytiladi.

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

bu erda $x_1, x_2, ..., x_n$ X diskret tasodifiy miqdorni qabul qiladigan qiymatlar i, $p_1+p_2+...+p_n=1$.

Diskret taqsimot funktsiyaga tipik misol sifatida Binominal, Puassonva Geometrik taqsimotlarni keltirish mumkin.

Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini hisoblash va ularni xossalari

Bizga ma'lumki, tasodifiy miqdor o'zining taqsimot qonuni bilan to'la aniqlanadi.

Tasodifiy miqdorning muhim sonli xarakteristikalariga matematik kutilish, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishlar kiradi.

a) Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

Tarif. Tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatiga matematik kutilish deb ataladi.

X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M(X)$ deb, uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini mos ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi.

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum x_ip_i(1)$$

Matematik kutilishning xossalari

1) O'zgarmas miqdorning matematik kutilishi shu o'zgarmasning o'ziga teng $M(C)=C$.

2) O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin

$$M(cX)=cM(X)$$

3). Ikkita erkli X va U tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi ularning matematik kutilishlari ko'paytmasiga teng.

$$M(XU)=M(X)M(U)$$

4) Ikkiga tasodifiy miqdor yig'indisining matematik kutilishi qo'shiluvchilarining matematik kutilishlari yig'indisiga teng.

$$M(X+U)=M(X)+M(U)$$

b) Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi.

Amaliyotda ko'pincha tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning o'rtacha qiymati (matematik kutilishi) atrofida joylashish tarqoqligini baholash talab qilinadi. Masalan, nishonga otilgan o'qlarning nishon atrofiga qanchalik yaqin tushishini bilish muhimdir.

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, $(X-M(X))^2$ miqdorning matematik kutilishiga aytiladi va u $D(X)$ bilan belgilanadi,

$$D(X)=M(X-M(X))^2=MX^2-(M(X))^2,$$

bu yerda

$$MX^2=\sum x_i^2 p_i=x_1^2 p_1+x_2^2 p_2+\dots+x_n^2 p_n$$

Dispersiyaning xossalari.

1. C o'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$D(C)=0, \quad D(C)=M(C-M(C))^2=0$$

2. X tasodifiy miqdor bo'lib, C o'zgarmas son bo'lsa, u holda $D(CX)=C^2 D(X)$ bo'ladi.

3. Ikkita erkli X va Y tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi bu miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

Diskret tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanish deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi va $\sigma(X)$ bilan belgilanadi.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Mavzuga doir namunaviy masalalarni echimi.

1-misol. O'yin kubogi (soqqasi) bir marta tashlandi. Chiqqan ochkolar sonini taqsimot qonunini tuzing. X-o'yin kubogi bir marta tashlaganda tushadigan ochkolar soni bo'lsin. Uni qabul qilishi mumkin bo'lgan 1, 2, ..., 6 qiymatlari bo'lib, ular teng ehtimollidir, ya'ni

$$P(X=i)=1/6 \quad i=\overline{1,6}$$

natijada X tasodifiy miqdorining taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2-misol. Tangani ikkimarta tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. X gerbli tomon tushishlar sonining taqsimot qonunini topilsin.

Yechish: Tangani tashlaganda u yoki bu tomonini tushishi teng ehtimolli bo‘lib, $r=q=1/2$ ga tengbo‘ladi. X gerbli tomon tushishlari soni (Bernulli formulasiga ko‘ra) mos ravishda ushbu ehtimolliklarga ega bo‘ladi:

$$P_0=P(X=0)=C_2^0 (1/2)^0 (1/2)^{2-0}=1/4;$$

$$P_1=P(X=1)=C_2^1 (1/2)^1 (1/2)^{2-1}=2 \cdot 1/4=1/2$$

$$P_2=P(X=2)=C_2^2 (1/2)^2 (1/2)^{2-2}=1/4=1/4$$

demak, izlanayotgan taqsimot Binomial taqsimotga ega bo‘ladi.

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

3-misol. Diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan bo‘lsin.

x_i	1	3	5	7
p_i	0.1	0.2	0.4	0.3

Shu tasodifiy miqdorning: 1) matematik kutilishini, 2) dispersiyasini, 3) o‘rtacha kvadratik chetlanishini hisoblang.

Yechish. 1.(1) formulaga asosan

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n=\sum_{i=1}^n x_i p_i ,$$

$$M(X)=1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.3 = 0.1 + 0.6 + 2 + 2.1 = 4.8$$

Demak, $M(X)=4.8$

2. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini quyidagi formula yordamida hisoblaymiz.

$$D(X)=MX^2-[M(X)]^2$$

Bu yerda

$$MX^2=x_1^2p_1+x_2^2p_2+\dots+x_n^2p_n=\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

Bizning misolda

$$MX^2=1^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.2 + 5^2 \cdot 0.4 + 7^2 \cdot 0.3 = 0.1 + 1.8 + 10 + 114.7 = 26.6$$

Demak,

$$D(x)=26.6-(4.8)^2=26.6-23.04=3.56$$

$$3. \text{ O'rtacha kvadratik chetlanish } \sigma(x)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3.56}\approx 1.9$$

Mustaqil echish uchun misollar.

Quyidagi 1–20 misollarda diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuniga ko‘ra uning: Matematik kutilishi; 2.Dispersiyasi; 3.O‘rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

1.

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.3	0.2	0.4	0.1

2.

x_i	1.2	1.7	2.1	2.8
p_i	0.25	0.3	0.15	0.3

3.

x_i	10	12	14	16
p_i	0.2	0.35	0.15	0.3

4.

x_i	22	28	32	33
p_i	0.1	0.3	0.25	0.35

5.

x_i	3.2	3.6	3.9	4.2
p_i	0.05	0.15	0.4	0.4

6.

x_i	14	19	24	29
p_i	0.1	0.3	0.4	0.2

7.

x_i	6	9	15	16
p_i	0.1	0.2	0.4	0.3

8.

x_i	0.2	0.3	0.5	0.7
p_i	0.15	0.25	0.3	0.3

9.

x_i	1.6	1.9	2.3	2.7
p_i	0.15	0.35	0.45	0.05

10.

x_i	2.3	2.7	3.2	3.5
p_i	0.1	0.2	0.4	0.3

11.

x_i	16	19	21	24
p_i	0.05	0.25	0.15	0.55

12.

x_i	12	17	19	28
p_i	0.1	0.3	0.5	0.1

13.

x_i	-3	-2	1	2
p_i	0.3	0.2	0.1	0.4

14.

x_i	13	23	33	43
p_i	0.3	0.1	0.2	0.4

15.

x_i	3.2	3.6	3.9	4.3
p_i	0.25	0.15	0.35	0.25

16.

x_i	8	12	16	20
p_i	0.2	0.3	0.4	0.1

17.

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.15	0.3	0.15	0.4

18.

x_i	3	5	7	9
p_i	0.15	0.35	0.2	0.3

19.

x_i	29	34	36	40
p_i	0.15	0.3	0.3	0.25

20.

x_i	16	19	21	26
p_i	0.3	0.45	0.15	0.1

21. Har bir chigitni unib chiqish ehtimoli 0.9 teng. Ekilgan 4 ta chigitdan unib chiqqanlari soni X tasodifiy miqdorni taqsimot qonunini tuzing.

22. Har bir sut sog'ish apparatining beto'xtov ishlash ehtimoli 0.9 teng bo'lsa, 3 ta apparatdan uzluksiz ishlaydiganlarining soni X tasodifiy miqdorni taqsimot qonunini tuzing.

5-§.Uzluksiz tasodifiy miqdor. Tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi va uning xossalari. Sonli xarakteristikalari

Biz yuqorida o'rgangan diskret tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli qiymatlar qabul qiladi. Agar tasodifiy miqdor biror oraliqdagi bircha qiymatlarni qabul qilsa, uni taqsimot qonunini diskret holdagidek jadval shaklda yozib bo'lmaydi.

Biz ixtiyoriy (diskret yoki uzluksiz) tasodifiy miqdor uchun o'rinli bo'lgan taqsimot funktsiya tushunchasini o'rganamiz.

Faraz qilaylik A hodisa $A=\{X<x\}=\{-\infty<X<x\}$ bo'lsin. Pavshanki, A hodisaning ehtimoli x ning funktsiyasidan iborat bo'ladi.

Ta'rif. Har bir x qiymat uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini aniqlovchi $F(x)$ funktsiyaga X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi yoki taqsimotning integral funktsiyasi deyiladi,

$$F(x)=P(X<x) \quad (1).$$

Ta'rif. Agar X tasodifiy miqdor taqsimotining integral funktsiyasi $F(x)$ uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda X tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Taqsimotning integral funktsiyasining xossalari.

1. Taqsimot funktsiyaning qiymatlari $[0,1]$ kesmaga tegishlidir $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ kamaymaydigan funktsiyadir, ya'ni agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_2) \leq F(x_1)$.

3. Taqsimot funktsiya chapdan uzluksiz bo'lib, X tasodifiy miqdorning $(a; b)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimoli integral funktsiyaning shu integrvaldagi orttirmasiga teng

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Xususan, X uzluksiz tasodifiy miqdorning tayin bitta qiymat qabul qilish ehtimoli nolga teng $P(X=x_1)=0$

4. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari $(-\infty; +\infty)$ bo'lsa, u holda quyidagi limitlar o'rinlidir:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Ta’rif. Taqsimot funktsiyaning $f(x)$ zichlik funktsiyasi deb, integral funktsiyadan olingan birinchi tartibli $f(x)=F'(x)$ hosilaga aytiladi.

Uzluksiz taqsimot funktsiyaga misol sifatida ko‘p qo‘llaniladigan tekis taqsimot, ko‘rsatkichli taqsimot va normal taqsimot funktsiyalarni ko‘rsatish mumkin.

Zichlik funktsiyaning xossalari:

1) Zichlik funktsiya manfiy emas $f(x) \geq 0$, zichlik funktsiyadan $(-\infty; +\infty)$ gacha olingan xosmas interval 1 ta teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$2) \text{ Ixtiyoriy } x \in [a; b] \text{ uchun } P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Zichlik funktsiyaning ehtimoliy ma’nosi X tasodifiy miqdorning $(x; x+\Delta x)$ oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli taqriban x nuqtadagi ehtimol zichligini x interval uzunligini ko‘paytmasiga teng.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari $[a; b]$ kesmaga tegishli bo‘lsa, bu tasodifiy miqdorni matematik kutilishi quyidagi formula bilan hisoblanadi.

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx \quad (1)$$

Xuzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasini hisoblash formulasi

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx \quad (2)$$

O‘rtacha kvadratik chetlanishi:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} \quad (3)$$

Eslatma. Dispersiyani ushbu formula bilan ham hisoblash mumkin: $D(X) = MX^2 - [M(X)]^2$, bu yerda

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx$$

6-§ Normal taqsimot va uni tadbiqlari

Qishloq xo'jaligi, tibbiyot va boshqa sohalarga doir amaliy masalalarni echishda keng qo'llaniladigan muhim taqsimot funktsiyalardan biri normal taqsimotdir.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimotni differentsial funktsiyasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

bu yerda $-\infty < a < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$, a va σ - parametr ga ega: a - normal taqsimotning matematik kutilishi, ya'ni $M(X)=a$, σ - normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi.

Standart normal taqsimotni differentsial funktsiyasi $a=0$ va $\sigma=1$ parametrlari bo'ladi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning $(0, x)$ intervalga tushish ehtimoli

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3)$$

(3) Laplas funktsiyasini qiymatlari jadvali tuzilgan.

Agar X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilishi $M(X)=a$ o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = \sqrt{D(x)}$ bo'lsa, shu tasodifiy miqdorning (α, β) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli quyidagi formula bilan topiladi:

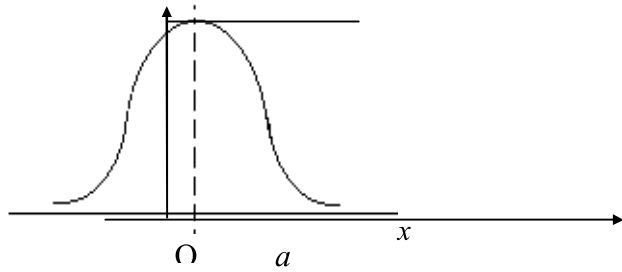
$$P\{\alpha \leq x \leq \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \quad (4)$$

bu yerda $F(x)$ Laplas funktsiyasi

Yuqoridagi (1) tenglamadan foydalanib normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini a dan farqi δ musbat sondan absolyut qiymat bo'yicha kichik bo'lish ehtimoli

$$P \left\{ |x - a| \leq \delta \right\} = 2 \Phi \left(\frac{\delta}{\sigma} \right) \quad (5)$$

a , δ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni taqsimotni zichlik funksiyasini quyidagicha geometrik izohlash mumkin (shakl- 1).



shakl- 1

Mavzuga doir namunaviy masalalarni echimi

1-misol. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyaga ega bo'lsin

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & -1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Cinash natijasida X tasodifiy miqdor $(0,1)$ intervalda yotgan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. Uzlüksiz tasodifiy miqdorni $(a; b)$ oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli (2) formulaga asosan

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = 2/3 - 1/3 = 1/3$$

2-misol. Tovuqchilik fermasidan jo'natilayotgan tuxumlarning o'rtacha og'irligi (a) 60 g va o'rtacha kvadratik chetlanishi (σ) 5g ga teng. Tuxum og'irligini X normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarab jo'natilayotgan tuxumlar ichida og'irliklari 1) 50 grammdan 70 grammgacha bo'lgan tuxumlar qancha foizni tashkil qilishini; 2) tasodifiy olingan tuxum og'irligini uning o'rtacha og'irligidan absolyut qiymat bo'yicha 5 g dan oshmaslik ehtimolini hamda 3) og'irligi 70 grammdan ortiq bo'lgan tuxumlar foizni toping.

Yechish. X tasodifiy olingan tuxum og'irligi bo'lsin, masala shartiga asosan $a=M(X)=60g$ $\sigma=\sqrt{D(x)}=5g$ 1) $\alpha=50$, $\beta=70$ topish kerak $P\{50 < x < 70\}=?$

Tasodifiy miqdor X -normal taqsimlanganligidan yuqoridagi (1) formulaga asosan talab qilingan ehtimol:

$$P\{50 < x < 70\} = \Phi\left(\frac{70-60}{5}\right) - \Phi\left(\frac{50-60}{5}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

Bu yerda $F(x)$ - toq funktsiya bo'lganligidan, $F(-x)=-F(x)$. Ilovadagi 2-jadvaldan, Laplas funktsiyasining qiymatini topamiz:

$$F(2)=0.4772,$$

$$\text{u holda } P\{50 < x < 70\} = F(2) + F(2) = 2F(2) = 2 * 0.4772 = 0.9544$$

Demak, jo'natilayotgan tuxumlar ichida og'irliklari 50 grammdan to 70 grammgacha bo'lganlari umumiy tuxumlarning 95% dan ortiqrog'ini tashkil qilargan.

$$2) a=60, \delta=5, \sigma=5g \text{ talab qilingan } P\{|x-60| < 5\}=?$$

Bu ehtimolini yuqoridagi (2) formula yordamida topamiz:

$$P\{|x-60| < 5\} = 2F(5/5) = 2F(1) =$$

2-jadvaldan $F(1)=0.3413$ ekanligidan

$$= 2 * 0.3412 = 0.6826$$

$$3) \text{ Masala shartiga asosan } \alpha=70 \text{ va talab qilingan } P\{70 < x\}=?$$

$$\text{Ehtimol } P\{70 < x\} = P\{70 < x < \infty\} = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{70-60}{5}\right) = 0.5 - \Phi(2) =$$

2-jadvaldan qiymati $F(\infty)=0.5, F(2)=0.4772$, u holda talab qilingan ehtimol

$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228.$$

Demak, og'irligi 70 grammdan katta bo'lgan tuxumlar jami fermadan jo'natilgan tuxumlarning 2% ni tashkil qilargan.

Mustaqil echish uchun misollar

Quyidagi 1-20 masalalarda o'rganilayotgan tasodifiy miqdorni normal tasodifiy miqdor deb qarab, uning matematik kutilishi $M(X)=a$, o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=\sqrt{D(x)}$ berilganda quyidagi ehtimollarni hisoblang. 1) X tasodifiy miqdorni (α ; β) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimolini, 2) tasodifiy miqdorning matematik

kutilishidan farqini absalyut qiymat bo'yichaδ dan kichik bo'lish ehtimolini

$$P\{|x-a|<\delta\}=?$$

1. $a=20, \sigma=1, \alpha=15, \beta=24, \delta=5.$
2. $a=19, \sigma=2, \alpha=14, \beta=23, \delta=4.$
3. $a=18, \sigma=3, \alpha=13, \beta=22, \delta=3.$
4. $a=17, \sigma=4, \alpha=12, \beta=21, \delta=2.$
5. $a=16, \sigma=5, \alpha=11, \beta=20, \delta=1.$
6. $a=15, \sigma=1, \alpha=10, \beta=19, \delta=5.$
7. $a=14, \sigma=2, \alpha=9, \beta=18, \delta=4.$
8. $a=13, \sigma=3, \alpha=8, \beta=17, \delta=3.$
9. $a=12, \sigma=4, \alpha=7, \beta=16, \delta=2.$
10. $a=11, \sigma=5, \alpha=6, \beta=15, \delta=1.$
11. $a=9, \sigma=1, \alpha=5, \beta=14, \delta=5.$
12. $a=8, \sigma=2, \alpha=4, \beta=13, \delta=4.$
13. $a=7, \sigma=3, \alpha=3, \beta=12, \delta=3.$
14. $a=6, \sigma=4, \alpha=2, \beta=11, \delta=2.$
15. $a=5, \sigma=5, \alpha=1, \beta=10, \delta=1.$
16. $a=4, \sigma=1, \alpha=0, \beta=9, \delta=2.$
17. $a=3, \sigma=1, \alpha=1, \beta=8, \delta=0,5.$
18. $a=2, \sigma=1, \alpha=0, \beta=7, \delta=1.$
19. $a=21, \sigma=2, \alpha=16, \beta=25, \delta=4.$
20. $a=22, \sigma=1, \alpha=17, \beta=26, \delta=3.$
21. $a=12, \sigma=2, \alpha=10, \beta=16, \delta=4.$
22. $a=18, \sigma=4, \alpha=15, \beta=25, \delta=4.$
23. $a=14, \sigma=8, \alpha=12, \beta=24, \delta=2.$
24. $a=5, \sigma=4, \alpha=3, \beta=17, \delta=5.$
25. $a=3, \sigma=1, \alpha=2, \beta=6, \delta=2.$
26. $a=8, \sigma=1, \alpha=4, \beta=16, \delta=3.$
27. $a=9, \sigma=5, \alpha=3, \beta=24, \delta=10.$
28. $a=15, \sigma=3, \alpha=9, \beta=21, \delta=4.$
29. $a=2, \sigma=3, \alpha=0, \beta=8, \delta=4.$
30. $a=6, \sigma=3, \alpha=3, \beta=12, \delta=5.$
31. $a=7, \sigma=4, \alpha=0, \beta=11, \delta=2.$
32. $a=11, \sigma=6, \alpha=5, \beta=20, \delta=4.$
33. $a=12, \sigma=8, \alpha=4, \beta=16, \delta=8.$
34. $a=9, \sigma=5, \alpha=3, \beta=24, \delta=10.$
35. $a=3, \sigma=1, \alpha=2, \beta=6, \delta=2.$
36. $a=10, \sigma=3, \alpha=7, \beta=16, \delta=2.$
37. $a=20, \sigma=2, \alpha=14, \beta=24, \delta=3.$
38. $a=19, \sigma=5, \alpha=13, \beta=23, \delta=10.$
39. $a=4, \sigma=2, \alpha=0, \beta=10, \delta=3.$
40. $a=6, \sigma=3, \alpha=3, \beta=12, \delta=5.$

7-§. Katta sonlar qonuni.

Biz o'tgan mavzularda tasodifiy miqdor, ularning turlari, taqsimot qonunlari, sonli xarakteristikalarini hisoblash, shuningdek muhim amaliy ahamiyatga ega bo'lgan normal taqsimot tushunchalarini o'rgandik.

Ma'lumki alohida tajriba (sinov) natijasida tasodifiy miqdorni qanday qiymatni qabul qilishini oldindan aytib bo'lmaydi. Bundan katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisini qanday qiymat qabul qilishini bilish mumkin emasdek ko'rinadi. Baholanki, ma'lum shartlar bajarilganda

etarli katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi tasodifiylik xususiyatini yo'qotib, ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi. Bu shartlar katta sonlar qonuni deb nomlanuvchi teoremlarda o'z ifodasini topgan.

Chebyshev tengsizligi.

Chekli dispersiyaga ega bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishidan chetlanishining absolyut qiymatini musbat ε sonidan kichik bo'lish ehtimoli

$P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2$ dan kichik bo'lmaydi.

Teorema. Agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ juft-jufti bilan erkli tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularni dispersiyalari $D(x_i) < C < \infty$ tekis chegaralangan bo'lsa, u holda

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i)\right| \leq \varepsilon\right)$$

hodisaning ehtimoli 1 ga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i)\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

Katta sonlar qonunidan chekli dispersiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni o'rta arifmetik qiymati etarli katta n uchun qariyb o'zgarmas bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni o'zini tasodifiylik xususiyatini yo'qotadi.

Markaziy limit teorema.

Bizga $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Shu tasodifiy miqdorlarni $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ yig'indisini qaraymiz.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi chekli

$$M(x_k) = a_k, D(x_k) = \sigma_k^2 \quad (k=1, 2, \dots)$$

matematik kutilish va dispersiyalarga ega bo'lsin.

$$MS_n = Mx_1 + Mx_2 + \dots + Mx_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n$$

$$DS_n = Dx_1 + Dx_2 + \dots + Dx_n = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 = B_n^2$$

Qanday shartda quyidagi yig'indi

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (X_k - a_k) = \frac{S_n - A_n}{B_n}$$

normal taqsimotga yaqinlashadi?

Lyapunov teoremasi. Agar o'zaro bog'liq bo'lmagan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $\sigma > 0$ musbat son mavjud bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da quyidagi shart bajarilsa

$$\frac{1}{B_n^{2+\sigma}} \sum_{k=1}^n |X_k - a_k|^3 \rightarrow 0$$

u holda barchax uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{B_n}(S_n - A_n) < x\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \Phi_{0.1}(x)$$

Xususan agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir xil taqsimotga ega bo‘lsa chekli dispersiyaga ega bo‘lgan

$$MX_k = a, DX_k = \sigma^2, MS_n = na, DS_n = n\sigma^2$$

bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi.

Ehtimollar nazariyasi tadqiqotlaridan ma’lumki, bir-biridan katta farq qilmaydigan tasodifiy miqdorlar yig‘indisi yanada umumiy shartda ham normal taqsimotga ega bo‘ladi.

Ma’lumki, qishloq xo‘jalik ekinlari etarli katta maydonlarda ekilib, ular qariyb bir xil sharoitda etishtiriladi, ya’ni qalinliklari bir xil, agrotexnik ishlovlar, parvarish qilish barcha maydon uchun bir vaqtda amalga oshiriladi. Shu sababli, o‘rganilayotgan belgini masalan, bir xil sharoitda etishtirilgan g‘o‘zalarni uzunliklari, shoxlar soni, ko‘saklar soni, ochilgan chanoqlar soni va boshqalarni ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasiga asosan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarashimiz mumkin.

Markaziy limit teoremani qishloq xo‘jalik masalalarini echishga qo‘llanilishiga doir namunaviy masalani echimi

1-misol. Norma bo‘yicha 1 gaerga 45 kg to‘ksiz chigit ekilishi kerak. Aslida 1 ga maydonga ketadigan chigit miqdori tasodifiy miqdor bo‘lib, uni o‘rtacha kvadratik chetlanishi 5 kg bo‘lsa, xo‘jalikni 100 gaeriga 97% li kafolat bilan ketadigan chigit miqdorini toping?

Yechish. X_i -tasodifiy miqdor bilan i ga yerga ketadigan chigit miqdorini belgilaymiz, masala shartiga asosan seyalka (nazariy) har bir gaerga 45 kg dan chigit tashlashi lozim, ya’ni ular barcha maydon uchun bir xil taqsimlangan

$$M(X_i) = 45 \text{ kg}, \sigma = \sqrt{D(X_i)} = 5 \text{ kg} \quad (i = \overline{1, 100})$$

Agar X bilan 100 ga yerga ketadigan chigit miqdorini belgilasak,

$$X=X_1+X_2+\dots+X_{100}=\sum_{i=1}^{100} X_i \text{ bo'ladi,}$$

bu yerda $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ o'zaro bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdordir. Ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasi shartlari bajariladi, demak X taqriban normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qaralishi mumkin, uni

$$M(X)=\sum_{i=1}^{100} M(X_i)=100*45=4500\text{kg} = 4.5\text{t.}$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{100} D(X_i)=100*5^2=100*25=2500$$

o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma = 50\text{kg}=0.05\text{t}$$

β bilan 100 ga yerni kamida 97% ga etadigan chigit miqdorini belgilaymiz. Masala shartiga asosan $P\{X<\beta\}=0.97$ $n=100$ etarli katta bo'lganligidan X -tasodifiy miqdorni $N(4.5;0.05)$ parametrlil normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblaymiz. Normal taqsimlangan $X\sim N(a;\sigma)$ miqdorni (α ; β) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli formulasidan

$$P\{\alpha < X < \beta\} = F((\beta - a)/\sigma) - F((\alpha - a)/\sigma) \quad (4)$$

foydalanamiz: $P\{\infty < X < \beta\} = F((\beta - 4.5)/0.05) + F(\infty) = 0.97$ bo'lganligidan $F((\beta - 4.5)/0.05) + F(\infty) = 0.97$

Bu yerda $F(X)$ -qiymatlari jadvashtirilgan Laplas funktsiyasi,

$$F(+\infty)=0.5; F((\beta - 4.5)/0.05)=0.47$$

Normal taqsimot funktsiya jadvalidan foydalanib, $F(1.88)=0.47$

bo'lganligidan $(\beta - 4.5)/0.05 = 1.88$ bo'ladi.

$$\beta = 4.5 + 0.05 \times 1.88 = 4.594\text{t} = 4594\text{kg.}$$

Demak, 100 ga maydonni kamida 97% ga, ya'ni kamida 97 ga yerga etadigan chigit miqdori 4594 kg ekan.

To'kli yoki to'ksiz chigitni 1 ga maydonga ekish normasi ma'lum

$$\text{bo'lganda: } \frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = 1.88 \quad (97\% \text{ li kafolat bilan})$$

$\beta = MS_n + 1,88$ $DS_n = na + 1,88 \sqrt{n\sigma}$ formuladan foydalanib, xo'jalikka ekish uchun avvaldan, qancha miqdorda chigit urug'ini buyurtma berish lozimligini aniqlash mumkin. Bu yerda

$$MS_n = A_n = na, DS_n = n\sigma = B_n,$$

n -jami paxta ekiladigan yer maydoni, $a=1$ ga maydonga norma bo'yicha ekiladigan chigit miqdori (kg), σ -o'rta kvadratik chetlanishi.

Mustaqil echish uchun masalalar

1-misol. Norma bo'yicha 1 ga erga a kg to'ksiz chigit ekilsa, n ga maydonga ketadigan chigit miqdori tasodifiy miqdor bo'ladi, uni o'rtacha kvadratik chetlanishi σ kg bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb, xo'jalikni n ga eriga 97% li kafolat bilan ketadigan chigit miqdorini toping.

Variant	a	σ	$n(\text{ga})$	γ
1	50	5	80	0,97
2	55	8	120	0,97
3	60	10	130	0,97
4	65	5	70	0,97
5	70	8	80	0,97
6	75	10	90	0,97
7	80	8	55	0,97
8	70	6	40	0,97
9	65	10	70	0,97
10	60	6	45	0,97
11	55	8	80	0,97
12	50	10	30	0,97
13	45	8	60	0,97
14	40	5	25	0,97
15	45	8	60	0,97
16	50	6	120	0,97
17	70	10	160	0,97
18	75	12	230	0,97
19	45	9	140	0,97
20	50	7	160	0,97

8-§. Matematik statistika elementlari. Asosiy tushunchalar.

Statistik taqsimot va uni geometrik izohlash

Bir jinsli ob'ektlar to'plamini uning sifat yoki son belgisiga ko'ra o'rganish talab etilgan bo'lsin. Masalan, fermerni etishtirgan paxta hosilini sifat belgisi uning navi, tola chiqishi, tolani uzunligi bo'lsa, son belgisi uning hajmi, hosildorligi bo'ladi.

Matematik statistikaning birinchi vazifasi statistik ma'lumotlarni to'plash va gruppalash usulini ko'rsatish bo'lsa, uning ikkinchi vazifasi - statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini ishlab chiqish ular asosida ilmiy va xulosalar chiqarishdan iboratdir.

1-ta'rif. Tahlil qilish uchun ajratilgan bir jinsli ob'ektlar to'plami bosh to'plam deyiladi.

Masalan, xo'jalikni 1000 ga maydonda etishtirgan paxtasi, Toshkent shahrida ta'lim olayotgan talabalar to'plamlari bosh to'plamga misol bo'ladi.

Bosh to'plamni o'rganishda unga tegishli barcha ob'ektlarni (ularni soni katta bo'lsa) tekshirish iqtisodiy va jismonan mumkin bo'lmaydi. Bunday hollarda bosh to'plamdan ma'lum bir qism elementlari ajratib olinib tekshiriladi.

2-ta'rif. Bosh to'plamdan tahlil qilish uchun tasodifiy ravishda tanlab olingan ma'lum bir elementlar to'plamiga tanlanma to'plam deyiladi.

Xo'jalikni barcha 1000 ga er maydonida etishtirgan paxtasi bosh to'plam, undan tahlil qilish uchun ajratilib olingan 100 tup g'o'za tanlanma to'plam bo'ladi.

Tanlanma to'plamning hajmi deb shu to'plamdagi barcha ob'ektlar soniga aytiladi. Masalan 10000 tup g'o'zadan tahlil qilish uchun 70 dona g'o'za tanlab olingan. Bu misolda bosh to'plamni hajmi $N=10000$, tanlanmaning hajmi $n=70$.

Bosh to'plamdan tanlanma to'plamni shunday ajratish lozimki unda bosh to'plamning muhim, xarakterli xususiyatlari to'liq saqlasin. Bunday tanlanmani reprezentativ tanlanma to'plam deyiladi. Aks holda barcha o'tkazilgan statistik tadqiqotlar noto'g'ri xulosalarga olib kelishi mumkin.

Bosh to'plamni X son yoki sifat belgisi bo'yicha o'rganish uchun undan hajmi n ga teng bo'lgan tanlanma to'plam olingan bo'lsin: $X: \bar{x}_i$,

$\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$. Ularni kuzatish natijalarini (variantlarni) o'sib borish tartibda joylashtirsak, variatsion qator hosil bo'ladi. Agar bunda $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlar mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ marotaba kuzatilgan bo'lsa,

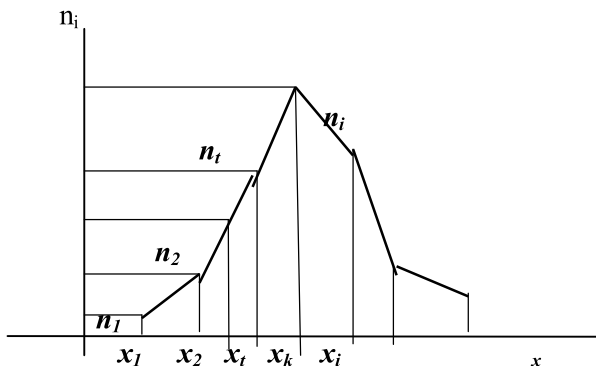
$$\sum_{i=1}^k n_i = n \text{ bo'ladi.}$$

Ta'rif. Variatsion qatorning variantlari va ularga mos absolyut chastotalari yoki nisbiy chastotalari ro'yxatiga tanlanmaning statistik taqsimoti deyiladi

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
W_i	w_1	w_2	...	w_k

Bu yerda $\sum_{i=1}^k n_i = n$ - tanlamani hajmi, $\sum_{i=1}^k W_i = 1$

Bu statistik taqsimotni poligon chizig'ini chizamiz. Chastotalar poligoni deb, $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun abstsissalar o'qiga x_i variantlarni, ordinatalar o'qiga esa, mos n_i chastotalarini qo'yib chiqiladi. So'ngra $(x_k; n_k)$ nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib chiqiladi. Hosil bo'lgan grafik chastotalar poligoni deyiladi (1-shakl).



1-shakl.

Agar o'rganilayotgan belgi uzluksiz o'zgaruvchan variantadan iborat bo'lsa, yoki diskret bo'lib qabul qiladigan qiymatlar soni ko'p ($n > 30$) va ular har xil bo'lsa, unday holda statistik taqsimotning intervalli variatsion qatorini tuzish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Bosh to'plamni intervalli statistik taqsimot sifatida tahlil qilishda tanlanma to'plamning quyidagi Sterdjess formulasi yordamida k-ta intervallarga bo'lib o'rganish mumkin:

$$k=1+3,322 \lg n \quad (2)$$

Interval uzunligi

$$h=(x_{\max} - x_{\min})/k \quad (3)$$

formuladan topiladi. Bu yerda $x_{\max}$ - $\tilde{o}_{\min}$ variatsiya qulochi deyiladi, k-chi interval sifatida $[x_{\min}+(k-1)h; x_{\min}+kh)$ interval olinadi.

Xususan $k=1$ bo'lganda birinchi interval $[x_{\min}; x_{\min}+h)$ bo'ladi. Bu $x_{\max}$, $\tilde{o}_{\min}$ mos ravishda variatsion qatorning eng katta va eng kichik qiymatlarini bildiradi. Albatta intervallarni shunday olish kerakki, har bir varianta faqat bitta intervalga kirsin.

Uzluksiz o'zgaruvchan variantadan iborat bo'lgan tanlanma to'plamning intervalli statistik taqsimoti quyidagicha bo'ladi:

Barianta intervallari	intervalga tegishli variantalar soni (chastotasi)	nisbiy chastota $W_i=n_i/n$
$[x_{\min}; x_{\min}+h)$	n_1	W_1
$[x_{\min}+h; x_{\min}+2h)$	n_2	W_2
...	...	...
$[x_{\min}+(k-1)h; x_{\min}+kh)$	n_k	W_k

Bu yerda $\sum_{i=1}^k n_i = n, \sum_{i=1}^k W_i = 1$

Intervalli variatsion qatorlarni gistogrammasini chizish. Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa n_i/h nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi. Chastotalar gistogrammasini yasash uchun abstsissalar o'qiga h uzunlikdagi qismaniy intervallar, ularning ustiga esa n_i/h masofada abstsissalar o'qiga parallel kesmalar o'tkaziladi, i -qismaniy to'g'ri to'rtburchakning yuzi $hn_i/h=n_i$ ga, ya'ni intervaldagi variantalarning chastotalari yig'indisiga teng; chastotalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig'indisiga, ya'ni tanlanma hajmiga teng.

9-§ Taqsimot parametrlarini statistik baholari. Nuqtaviy va intervalli statistik baholar. Normal taqsimotni noma'lum parametrlariga intervalli statistik baho qurish

Ko'pincha o'rganilayotgan X son belgining sonli xarakteristikalarini tanlanma to'plam yordamida baholash kerak bo'ladi. Uni baholashda nuqtaviy va intervalli statistik baholar mavjud. Avvalo biz bitta son qiymat bilan aniqlanadigan nuqtaviy statistik baholarni o'rganamiz.

Nuqtaviy statistik baholar. Statistik taqsimotning sonli xarakteristikalariga, tanlanma o'rtacha qiymat, tanlanma dispersiya, tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish, moda, mediana va variatsiya ko'effitsientlari, boshlang'ich va markaziy empirik momentlar kiradi.

1) **Tanlanma o'rtacha qiymatlarni hisoblash.** Tanlanma o'rtacha qiymati deb, tanlanma to'plam belgisining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi va $\bar{x}_T$ bilan belgilanadi. (Bu ehtimollar nazariyasida o'rganilgan matematik kutilishning statistik bahosidir.)

Tanlanma o'rtacha qiymat quyidagi formula bilan hisoblanadi

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \frac{1}{n} (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k) \quad (1)$$

bu yerda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ tanlanmani hajmi.

Agar taqsimotning intervalli variatsion qatori berilgan bo'lsa, u holda tanlanma o'rtacha qiymatini hisoblashda x_i sifatida i -chi intervalning o'rtacha qiymati olinadi.

2) **Tanlanma dispersiya.** Tanlanma o'rtacha qiymat statistik taqsimot haqida to'la ma'lumot bermaydi. Taqsimotlari har-xil, ammo bir xil matematik kutilishga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar mavjud. Amaliyotda tanlanma qiymatlarini $\bar{x}_T$ atrofida joylashish tarqoqligini bilish lozim bo'ladi.

Tanlanma dispersiya D_T , X belgining kuzatiladigan qiymatlarini ularning $\bar{x}_T$ o'rtacha qiymatidan chetlanishi kvadratlarning o'rtacha arifmetik qiymatiga teng.

Agar n hajmli tanlanmaning barcha $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ chastotalarga ega bo'lsa, u holda tanlanma dispersiya quyidagi formula bilan topiladi

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \overline{x_T})^2 \quad (2)$$

Yuqoridagi tanlanma dispersiyani hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$D_T = \overline{x^2} - [\overline{x_T}]^2 \quad (3),$$

bu yerda $\overline{x^2} = (x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \dots + x_k^2 n_k)$

Bu formuladan variantlarning qiymatlari kichik sonlar bo'lganda foydalanish qulay.

$$S_T^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x_T})^2 n_i$$

tuzatilgan tanlanma dispersiya deyiladi, bu siljimagan asosli statistik baho bo'ladi. D_T va S_T^2 orasida $S_T^2 = n/(n-1) D_T$ bog'lanish mavjud, agar n tanlanmani hajmi katta bo'lsa ular bir-birlaridan kam farq qiladi.

3) **Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish.** Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish deb, tanlanma dispersiyasidan chiqarilgan kvadrat ildizga aytiladi va σ_T bilan belgilanadi:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \quad (4)$$

4) Eng katta chastotaga esa bo'lgan variantaning qiymatiga M_0 moda deyiladi.

5). Statistik taqsimotni teng ikkiga bo'ladigan variantaning qiymatiga mediana deyiladi:

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k + 1 \quad \text{bo'lsa} \\ \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), & n = 2k \quad \text{bo'lsa} \end{cases} \quad (5)$$

6) **Variatsiya koeffitsienti.** Turli tanlanmalarni qiymatlarini o'rtacha qiymati atrofida joylashish tarqoqligini taqqoslashda variatsiya koeffitsientidan foydalaniladi. Variatsiya koeffitsienti

$$V_T = \frac{\sigma}{x_T} 100\% \quad (6)$$

10-§ Intervalli statistik baho

O'tgan mavzuda bitta son qiymat bilan aniqlanuvchi nuqtaviy statistik baholarni o'rgandik. Agar tanlanmani hajmi kichik bo'lsa nuqtaviy bahoni aniqligi kamayadi. Noma'lum parametrga ikkala tomondan yaqinlashuvchi statistik baholarni qurishni o'rganamiz.

Interval baho deb, ikkita son - intervalning uchlari bilan aniqlanadigan statistik bahoga aytiladi.

Faraz qilaylik tanlanma ma'lumotlar bo'yicha topilgan θ_n^* baho θ noma'lum parametrlarning statistik bahosi bo'lsin. Pavshanki, qurilgan baho tanlanmani funktsiyasidan iborat bo'ladi.

θ ning θ_n^* baho bo'yicha ishonchliligi deb, $|\theta_n^* - \theta| < \delta$ tengsizlikni bajarilish ehtimoli P -ga aytiladi. Ishonchlilik γ bilan belgilanadi va 0,95; 0,99; 0,90 qiymatlardan birini qabul qilishi mumkin.

Bunday hol qishloq xo'jaligida ko'p uchraydi. Masalan, paxtani biror navi bo'yicha ilmiy tajribalar 3-5 yil o'tkazilib shu asosida uni o'rtacha hosildorligi, sifati va boshqa ko'rsatkichlari bo'yicha xulosalar chiqariladi.

Normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun intervalli statistik baho qurish.

Muhim vazifalaridan biri qishloq xo'jalik ma'lumotlarini statistik tahlil qilish asosida kelgusi yillar uchun hosildorlikni ma'lum bir kafolat bilan bashorat qilishdir. Albatta kafolatli xulosani aytish uchun o'rganilayotgan X son belgini taqsimot qonuni ma'lum bo'lishi kerak.

Qishloq xo'jalik ekinlari etarli katta maydonlarda ekilib, ular qariyb bir xil sharoitda etishtiriladi, ya'ni qalinliklari bir xil, agrotexnik ishlov, parvarish qilish barcha maydon uchun bir vaqtda amalga oshiriladi. Shu sababli, o'rganilayotgan X - son belgini ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasiga asosan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarashimiz mumkin, masalan, ma'lum bir maydonda bir xil sharoitda etishtirilgan g'o'zalarni uzunliklari, harbiridagi shoxlar, ko'saklar, ochilgan chanoqlar soni normal taqsimotga ega bo'ladi deb qarash mumkin. Umuman bir biridan katta farq qilmaydigan 30 dan ortiq tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetigi taqriban normal taqsimlangan bo'ladi. Bu muhim xulosa ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasining natijasidir. Bu tasdiqdan barcha ilmiy tajriba natijalarini tahlil qilishda foydalanamiz.

Normal taqsimotni noma'lum parametrlariga intervalli statistik baho qurish

Bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. adabiyotlarda $M(x)=a$, $\sigma=\sqrt{D(x)}$ parametrlari normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor qisqacha $X \sim N(a; \sigma)$ deb yoziladi. Odatda σ ma'lum va noma'lum hollar ayrim-ayrim tahlil qilinadi. Ammo amaliy masalalarni echishda normal taqsimotning ikkala parametri a va σ noma'lum bo'ladi. Shu sababli biz faqat ikkala parametr ham noma'lum holni o'rganamiz.

1) Faraz qilaylik o'rganilayotgan bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan va uni matematik kutilishi a va o'rtacha kvadratik chetlanish σ noma'lum bo'lsin. Normal taqsimotning noma'lum matematik kutilish a ga γ kafolat bilan intervalli baho qurish talab etiladi.

Styudent (Gosset) σ noma'lum bo'lganda, noma'lum matematik kutilish a uchun γ kafolat (ishonchlilik) bilan ishonchlilik intervalini quyidagi munosabat orqali qurish mumkinligini isbotlagan:

$$\left(\bar{x}_T - t_\gamma \frac{S_T}{\sqrt{n}}; \bar{x}_T + t_\gamma \frac{S_T}{\sqrt{n}} \right) \quad (1)$$

Bu yerda $t_\gamma = t(n, \gamma)$ ni qiymati berilgan n va γ lar bo'yicha Styudent taqsimot jadvalidan olinadi (Masalan, B.E.Gmurman «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» T.»O'qituvchi», 1977y, 358 betdagi 3 ilovasi jadvalidan topiladi).

2) **Normal taqsimotning noma'lum o'rtacha kvadratik chetlanish σ uchun intervalli baho qurish.** Normal taqsimotning noma'lum o'rtacha kvadratik chetlanish σ -ni tuzatilgan o'rtacha kvadrat chetlanish S orqali baholash talab qilinadi.

Isbotlanganki, σ -ga berilgan γ kafolat (ishonchlilik) bilan qoplaydigan intervalli bahosi quyidagi munosabatlar yordamida quriladi:

$$1) q < 1 \text{ bo'lganda } S_i(1-q) < \sigma < S_i(1+q) \quad (2)$$

$$2) q > 1 \text{ bo'lganda } 0 < \sigma < S_i(1+q) \quad (3)$$

Bu erda $q = q(n, \gamma)$ -ning qiymatini berilgan n va γ lar bo'yicha (B.E.Gmurman «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» T.»O'qituvchi», 1977y,) qo'llanmani 4 -ilovasidan topiladi.

Mavzuga doir namunaviy masalalarni echimi

1-misol. Fermer xo'jaligini 20 ga maydonida eishtirilgan paxtani birinchi terimda hosildorligini baholash uchun shu maydondan tasodifiy

ravishda barcha maydonni xarakterlaydigan qilib 50 tup g'ozolindi. Ulardagi ochilgan ko'saklar soni sanalganida quyidagicha bo'ldi:
 3,4,6,4,3,6,5,3,4,7,4,5,2,6,4,5,3,4,2,4,5,3,2,4,5,3,1,6,4,5,4,0,4,5,2,4,5,3,
 4,0,1,8,2,4,7,5,1,3,6,4.

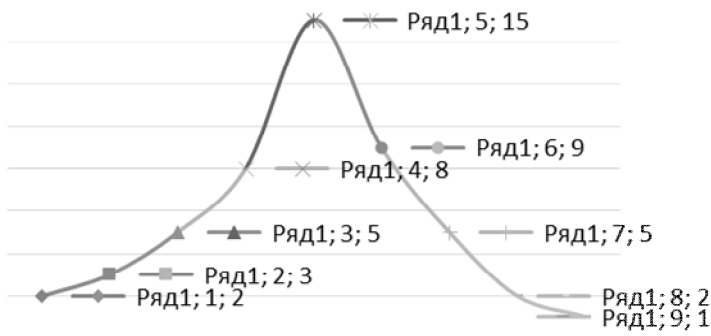
Talab qilingan ochilgan ko'saklar soni X son belgining
 1) statistik taqsimotini tuzish va uni poligon, gistogrammasini yasash; 2) tanlanma o'rta qiymatini, 3) tanlanma dispersiyasini, 4) tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishini, 5) moda, mediana hamda variatsiya koeffitsientlarini hisoblash.

Yechish. 1) Har bir tup g'ozadagi ochilgan ko'saklar sonini tasodifiy miqdor X bilan belgilaymiz, ajratilgan 50 tup g'oz ichida bitta ham ochilgan chanog'i bo'lmagan g'oz (0,0) -2 ta, 1 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (1,1,1) - 3 ta, 2 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (2,2,2,2,2)- 5 ta, 3 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (3,3,3,3,3,3,3,3)-8 ta, 4 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4)- 15 ta, 5 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (5,5,5,5,5,5,5,5,5,5)- 9 ta, 6 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (6,6,6,6,6,6)-5 ta, 7 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (7,7)- 2 ta, 8 ta ochilgan chanog'i bo'lgani (1)- 1 ta ekanligini ko'ramiz. Natijada bu misol uchun X -ochilgan ko'saklar sonini statistik taqsimoti quyidagicha bo'ladi:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	2	3	5	8	15	9	5	2	1

Bu yerda $X:0,1,\dots,8$ -ochilgan chanoqlar soni, $n_i : 2,3,\dots,1$ mos ravishda g'oz turlari sonidir. Bu statistik taqsimotni poligon chizig'i quyidagicha tavsivlanadi. (1-chizma)

Yuqorida tushuntirilganidek, ba'zi hollarda, masalan, uzluksiz X belgi kuzatilganida yoki tanlanmani hajmi katta bo'lib variantalarni qiymatlari har xil bo'lsa intervalli variatsion qator tuzish kerak bo'ladi. k -intervallar /guruhlar/ soni va $\Delta x = h$ interval uzunligi Sterdjess formulasi bilan aniqladi ((2), (3) formulalarga qarang).



1-shakl

Bizni misolda $n=50$, $k=1+3,32*\lg 50=1+3,32*1,699=6,64$

Demak, barcha kuzatishlarni $[k]=7$ guruhga bo'lib o'rganish lozim.

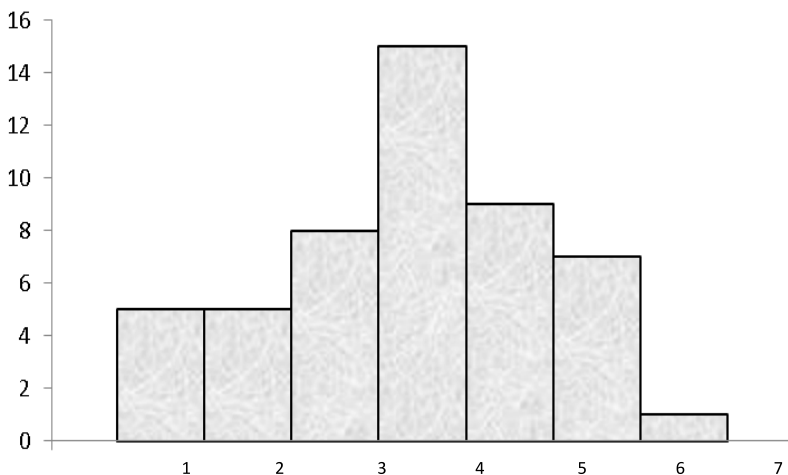
$$\Delta x = h = (x_{\max} - x_{\min}) / (1 + 3,32 * \lg n) = (8 - 0) / 6,64 = 1,2$$

interval uzunligi. Natijada intervalli variatsion qator quyidagicha bo'ladi:

Inter val soni	$[x_i - x_{i+1})$	n_i	W_i
1	[0 - 1,2)	5	0,1
2	[1,2 - 2,4)	5	0,1
3	[2,4 - 3,6)	8	0,16
4	[3,6 - 4,8)	15	0,13
5	[4,8 - 6,0)	9	0,18
6	[6,0 - 7,2)	7	0,14
7	[7,2 - 8,4)	1	0,02
Σ		50	1,00

Bu yerda $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ va har bir oraliqni yuqori chegarasi shu oraliqqa qarashli, quyi chegarasi qarashli bo'lmaydi.

Endi intervalli variatsion qatorni gistogrammasini yasaymiz (2-chizma).



2-shakl.

2) Statistik taqsimotning talab qilingan tanlanma xarakteristikalarini hisoblaymiz.

2) Tanlanma o'rta qiymat $\bar{x}_T$ ni hisoblash:

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \frac{1}{n} (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k) =$$

$$= (1/50)(0,2+1,3+3,8+4,15+5,9+6,5+7,2+8,1) = 3,88$$

$\bar{x}_T = 3,9$. Demak, 100 tup g'ozada o'rtacha 388 ta ochilgan chanoq bo'ladi.

3) Tanlanma dispersiya D_T ni hisoblaymiz.

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 n_i = 1/50 [(0-3,9)^2 * 2 + (1-3,9)^2 * 3 + (2-3,9)^2 * 5 + (3-3,9)^2 * 8 + (4-3,9)^2 * 15 + (5-3,9)^2 * 9 + (6-3,9)^2 * 5 + (7-3,9)^2 * 2 + (8-3,9)^2 * 1] = 163,70/503,27 = 3,27.$$

4) Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish σ_T ,
 $\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{3,27} \approx 1,81$

5) a) Ma'lumki eng katta chastotali varianta M_0 - modda bo'lganligidan, bizning misolda $M_0 = 4$.

b) Bariatsion qatorni teng ikkiga bo'luvchi varianta mediana $M_e=4$ ekanligi kelib chiqadi.

c) Bariatsiya koeffitsenti kuzatish natijalarini joylashish tarqoqligini baholaydi (o'zgaruvchanlik koeffitsenti ham deyiladi) $V_k = \sigma_T / \bar{x}_T) 100\% = 1,81/3,9 * 100\% = 46,4\%$.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Ruzmetov K.Sh, G'.X.Djumabayev. Matematika darslik Toshkent „O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati" nashriyoti, 2018 – 452 b.
2. Mathematical Analysis 1, Claudio Canuto-Anita Tabacco, Milano, Italiya, 2015.
3. Y.Soatov, «Oliy matematika». Darslik. 3-jild.- T.:“O'zbekiston”, 1996 y. - 640 b.
4. T.Jo'raev., A.Sadullaev., G.Xudoyberganov., X.Mansurov., A.Vorisov. **“Oliy matematika asoslari”**. 1-tom., Toshkent «O'zbekiston», 1995 yil, 2-tom. Toshkent «O'zbekiston», 1998 yil.
5. Kudryavtsov V.A., Demidovich V.P. **“Kratkiy kurs visshey matematiki”**. 1989 g.
6. N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S.Axmedova, “Oliy matematika”, O'quv qo'llanma, Qarshi Davlat Universiteti, 1-,2-jild, 2010 y.
7. Minorskiy V.P. **“Oliy matematikadan masalalar to'plami”**. 1980 yil.
8. T.T.To'ychiev., D.X.Djumaboev. **«Matematik analiz fanidan 1-kurs talabalari uchun laboratoriya ishlari»**. Toshkent, 2003.
9. Bugrov Ya.S., Nikol'skiy S.M. **“Element lineynoy algebra va analiticheskoy geometrii”**. 1980 g.
10. A.Sadullaev., X.Mansurov., G.Xudoyberganov., A.Vorisov, R.G'ulomov **“Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami”**. 1-tom, 1994 yil.
11. Fayziev A.A, Rajabov B, Rajabova L. **Oliy matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika**. Oquv uslubiy qollanma.Toshkent 2014 yil TashDAU nashriyoti.

Ruzmetov Kudrat Shermatovich

MATEMATIKA

darslik

Toshkent – «VNESHINVESTPROM» – 2020

Muharrir:	<i>S.T.Xashimov</i>
Musahhih:	<i>S.Gapurova</i>
Sahifalovchi:	<i>A.Hidoyatov</i>

Nashriyot lisenziyasi AI № 242 04.07.2013 y.
Bosishga 20.01.2020 y. ruxsat etildi. Bichimi 60x84 ¹/₁₆.
«Times» garniturası. Ofset bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabogʻi 20,5. Nashr tabogʻi 6,5.
Adadi 500 nusxa. 35-sonli buyurtma.

«VNESHINVESTPROM» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Navoiy koʻch., 30-uy.