

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМий ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ**

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ТЕХНИКА УНИВЕРСИТЕТИ

РАҲМОНОВ ЎКТАМ СОДИҚОВИЧ

**ИККИНЧИ ВА УЧИНЧИ ТИП КЛАССИК СОҲАЛАР БИЛАН
БОҒЛАНГАН МАТРИЦАВИЙ ШАРЛАРДА ИНТЕГРАЛ
ФОРМУЛАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ**

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2020 йил

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Раҳмонов Ўктам Содикович

Иккинчи ва учинчи тип классик соҳалар билан боғланган матрицавий шарларда интеграл формулалар ва уларнинг тадбиқлари..... 3

Рахмонов Уктам Содикович

Об интегральных формулах в матричных шарах, ассоциированных с классическими областями второго и третьего типов и их приложения..... 21

Rakhmonov Uktam Sodikovich

On integral formulas in matrix balls associated with classical domains of the second and third types and their applications 39

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works 42

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМий ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ**

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ТЕХНИКА УНИВЕРСИТЕТИ

РАҲМОНОВ ЎКТАМ СОДИҚОВИЧ

**ИККИНЧИ ВА УЧИНЧИ ТИП КЛАССИК СОҲАЛАР БИЛАН
БОҒЛАНГАН МАТРИЦАВИЙ ШАРЛАРДА ИНТЕГРАЛ
ФОРМУЛАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ**

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2020 йил

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doktor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM212 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Тошкент давлат техника университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz>) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (<http://www.ziynet.uz>) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:

Худойбергенов Гулмирза

физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар:

Ғаниходжаев Расул Набиевич

физика-математика фанлари доктори, профессор

Курбанов Бухарбай Турғунбаевич

физика-математика фанлари номзоди, доцент

Етакчи ташкилот:

Урганч давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___» _____ соат ___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2020 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2020 йил «___» _____ даги ___ рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Н.К.Мамадалиев

Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.(PhD)

Р.Н.Ғаниходжаев

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида комплекс анализ бўйича олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда классик соҳаларда матрица аргументли голоморф функцияларнинг хоссаларининг тадқиқ қилишга келтирилади. Кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида интеграл формулалар кучли конструктив аппаратдир ва муҳим тадбиқларга эга. Матрицавий шарларнинг автоморфизмларини топиш, қаралаётган соҳалар учун Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядроларини ҳисоблаб, шу ядролар асосида интеграл формулаларни топиш ва голоморф давом эттириш масалаларини тадқиқ этиш функциялар назариясида муҳим аҳамият касб этади ва замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда интеграл формулаларни ҳамда уларнинг тадбиқларини топиш кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Кейинги йилларда матрицавий соҳалардаги комплекс анализнинг математик физика (майдонлар назарияси), электр занжирлар назарияси ва бошқаларга тадбиқлари муносабати билан комплекс анализнинг бу йўналишига бўлган эътибор янада кучайди. Бунинг исботи сифатида дунёдаги етакчи олимларнинг кўплаб илмий ишларини мисол келтириш мумкин. Бу борада классик соҳалар билан боғланган иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларнинг автоморфизмларини топиш, Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядроларини, шу ядроларга мос интеграл формулаларни аниқлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадқиқига эга бўлган кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, кўп ўзгарувчили комплекс анализда умумлашган интеграл формулалар топиш ва классик теоремаларнинг умумлашмаларини исботлашга доир масалаларга алоҳида эътибор қаратилди. Олинган интеграл формулалардан фойдаланган ҳолда шу соҳаларда голоморф функцияларни қаторга ёйиш ҳамда классик теоремаларнинг умумлашмаларини олиш каби масалаларни ўрганишга эришилди. “Функционал анализ, математик анализ ва кўп ўзгарувчили комплекс анализ фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди¹. Қарорнинг ижросини таъминлашда комплекс анализ, алгебра масалаларини ҳал этишда кўп ўзгарувчили локал чегирмалар ва интеграл формулалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 17 февралдаги

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

«Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-Қарори ва 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чоратадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устивор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Классик соҳаларда голоморф функцияларнинг хоссаларини тадқиқ қилиш ўтган асрнинг ўттизинчи йилларида ривожланди. Бу кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида интеграллар назарияси усулларида фойдаланила бошлангани билан боғлиқ. 1935 йилда Э.Картан келтирилмайдиган, бир жинсли, чегараланган, симметрик бўлган олтига соҳа мавжудлигини исботлади. Матрицавий соҳаларни биринчи бўлиб Э.Картан ва К.Зигельлар томонидан ўрганилди. Жумладан, улар классик соҳалар автоморфизмларини кўринишларини тасвирлашган. Э.Картан томонидан таснифланган классик соҳалар учун Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядролари Хуа Ло-Кен томонидан топилган ва ушбу ядролар асосида интеграл формулалар муваффақиятли амалга оширилган. Классик соҳаларда Хуа Ло-Кен кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида гармоник анализни қурган (1944-1957 йилларда) ва уларнинг натижалари Хуа Ло-Кеннинг монографиясида келтирилган.

Ушбу ядроларни топиш учун ҳар бир классик соҳа учун автоморфизмлар ҳисобланган. И. И. Пятецкий-Шапиро ва К. Зигель классик соҳаларнинг барча геометрик кўринишларининг хусусиятларини ўрганишди. К. Зигель ва И. И. Пятецкий-Шапироларнинг китоблари классик соҳаларга оид масалаларга бағишланган. Шунингдек, В. С. Владимиров, А. Г. Сергеев ва С. Г. Гиндикинларнинг ишларини ҳам таъкидлаш керак. А.М.Кытманов, Г. Худойберганов, С. Косбергенов, Б. А. Шаимкулов, Б. Отемуратов, С. Г. Мысливец, Т. Н. Никитина, Б. Курбанов, Додак, Х. Зоя ва бошқалар ўзларининг ишларида матрицавий соҳаларда голоморф функцияларнинг хоссаларини ўрганишни давом эттиришдилар.

Кўп ўлчовли комплекс фазода интеграл формулалар назарияси ва уларнинг татбиқлари бўйича А.М.Кытманов, Н.Тарханов, А.Аронов, Ш.Даутов, Г.Хенкин, М.Аграновский, А.Б.Шлапунов, Б.Шаимкулов, Б.Пренов, А.Кацунова ва бошқа олимлар тадқиқотлар олиб боришмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий - тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлар режасидаги ОТ-Ф1-116 “Аналитик давом эттириш масалалари ва функциялар назариясининг геометрик муаммолари” (2007-2011 йиллар), Ф-4-31 “Плюрипотенциаллар назарияси ва кўп ўлчовли анализда интеграл формулалар” (2012-2016 йиллар) фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларда автоморфизмларни топиш, иккинчи ва учинчи тип шарларда топилган автоморфизм ёрдамида Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядроларини ҳисоблаб, шу ядролар асосида интеграл формулалар топиш, учинчи тип матрицавий шарда Морера теоремасини исботлаш, учинчи тип матрицавий шарда голоморф давом эттириш масаласини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларда автоморфизмларни топиш;

иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларда Бергман интеграл формуласини исботлаш;

иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларда Коши-Сеге интеграл формуласини исботлаш;

учинчи тип матрицавий шарда Пуассон ядросини ҳисоблаш ва интеграл формуласини ҳисоблаш;

учинчи тип матрицавий шарда чегаравий Морера теоремасини исботлаш;

учинчи тип матрицавий шарда голоморф давом эттириш масаласини ечиш.

Тадқиқот объекти иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарлар, Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядролари, чегаравий Морера теоремаси.

Тадқиқот предмети иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми, матрица аргументли голоморф функциялардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида кўп комплекс ўзгарувчили функция назариясининг интеграл формулалари ва матрица аргументли голоморф функциялар назарияси усулларида фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларда голоморф автоморфизмлар топилган;

иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларда Бергман ва Коши-Сеге интеграл формулалари топилган;

учинчи тип матрицавий шарда Пуассон ядроси ҳисобланган ва шу ядро учун интеграл формула топилган;

учинчи тип матрицавий шарда чегаравий Морера теоремаси исботланган;

учинчи тип матрицавий шарда голоморф давом эттириш масаласи ечилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари куйидагилардан иборатки:

матрицавий шарларда Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон интеграл формулалари ҳамда чегаравий Морера теоремаси исбот қилинган;

Карлеман формуласи ёрдамида учинчи тип матрицавий шарда голоморф давом эттириш масаласи ечилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги кўп комплекс ўзгарувчили голоморф функциялар назариясида интеграл формулалар усулларида фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундаки, олинган натижалардан иккинчи ва учинчи тип классик соҳаларда матрица аргументли функцияларни голоморф давом эттиришда ҳамда интеграл формулаларнинг чегаравий хоссаларига доир масалаларни ечишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти шундаки, матрицавий соҳа чегарасининг бир қисмида берилган матрица аргументли функцияни голоморф давом эттириш имкониятини беради, хусусан учинчи тип матрицавий шарнинг остовида матрица аргументли функциянинг қийматини билган ҳолда Карлеман формуласи ёрдамида голоморф функцияларни тиклаш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Иккинчи ва учинчи тип классик соҳалар билан боғланган матрицавий шарларда интеграл формулаларга оид олинган натижалар асосида:

иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарлар учун олинган интеграл формулалар 11-01-00852-а рақамли “Комплекс анализда кўп ўлчамли чегирмалар, уларнинг статистик физика ва айирмали ва дифференциал тенгламалар назариясида тадбиқлари” номли хорижий лойиҳада фойдаланилган (Сибир федераль университетининг 2020 йил 9 апрелдаги №6051-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясидаги Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон интеграл формулаларини матрица аргументли функциялар учун аналогларини олиш имконини берган;

учинчи тип матрицавий шар учун олинган Карлеман формуласи ва чегаравий Морера теоремаси 18-51-41011 рақамли “Кўп ўлчамли комплекс анализ” номли хорижий лойиҳада фойдаланилган (Сибир федераль университетининг 2020 йил 9 апрелдаги №6051-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши учинчи тип матрицавий шарда голоморф давом эттириш масалаларига тадбиқ этиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 8 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан

Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та, жумладан 4 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 76 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар рўйхати ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Дастлабки тушунчалар ва масалаларнинг қўйилиши”** деб номланувчи биринчи бобда диссертациянинг асосий натижаларини баён қилишда зарур бўладиган бошланғич маълумотлар, асосий таърифлар ва теоремалар келтирилган.

1.1-параграфда классик соҳалар, улардаги голоморф функцияларнинг асосий хоссалари ва турли олимлар томонидан классик соҳаларда олиб борилган илмий изланишлари ҳамда тадбиқлари баён қилинган.

$\mathbb{C}^{m^2}$ комплекс фазони оламыз. Бу фазонинг Z нуқталарини $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^m$ кўринишида ифодалаш қулай. $\mathbb{C}^{m^2}$ фазонинг нуқталарини бу кўринишда тасвирлаб олгандан сўнг, уни $\mathbb{C}[m \times m]$ орқали белгилаймиз. n та $\mathbb{C}[m \times m]$ фазоларнинг тўғри кўпайтмасини $\mathbb{C}^n[m \times m]$ деймиз:

$$\mathbb{C}^n[m \times m] = \underbrace{\mathbb{C}[m \times m] \times \cdots \times \mathbb{C}[m \times m]}_n.$$

Биз $D \subset \mathbb{C}^N$ классик соҳа (Картан таснифи бўйича) деганда, кўп комплекс ўзгарувчи функциялар назариясида келтирилмайдиган, бир жинсли, чегараланган, симметрик соҳани тушунамиз. Қуйида классик соҳаларнинг тўртта типини келтирамыз:

1. Ушбу

$$K_1 = \{Z \in \mathbb{C}[m \times n] : I^{(m)} - ZZ^* > 0\}$$

соҳага биринчи тип классик соҳа дейилади. Бу ерда Z - $[m \times n]$ тўғри тўртбурчак матрица бўлиб, $I^{(m)} - ZZ^* > 0$ тенгсизлик $I^{(m)} - ZZ^*$ - Эрмит матрицасини мусбат аниқланганлигини, яъни унинг барча хос сонларининг

мусбат эканлигини англатади ҳамда $Z^* = \bar{Z}'$ - матрица, $\bar{Z}'$ матрица Z матрицанинг қўшмаси ва транспонирланганидир.

2. Ушбу

$$K_2 = \{Z \in \mathbb{C}[m \times n]: I^{(m)} - ZZ^* > 0, Z' = Z\}$$

соҳага иккинчи тип классик соҳа дейилади.

3. Ушбу

$$K_3 = \{Z \in \mathbb{C}[m \times n]: I^{(m)} + ZZ^* > 0, Z' = -Z\}$$

соҳага учинчи тип классик соҳа дейилади.

4. Ушбу

$$K_4 = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: |zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, |zz'| < 1\}$$

соҳага тўртинчи тип классик соҳа дейилади.

Бу тўртта тип классик соҳаларнинг комплекс ўлчовлари мос равишда

$$mn, \frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, n$$

тенг бўлади. Классик соҳалар тўлиқ доиравий, қаварик соҳалар бўлади.

K - соҳа юқорида келтирилган соҳаларнинг бири бўлиб, унинг остови (Шилов чегараси) ни S билан белгилайлик.

1. Ушбу

$$S_1 = \{Z \in \mathbb{C}[m \times n]: I^{(m)} = ZZ^*\}$$

унитар матрицалардан иборат тўпламга биринчи тип классик соҳанинг остови дейилади.

2. Ушбу

$$S_2 = \{Z \in \mathbb{C}[m \times n]: I^{(m)} = ZZ^*, Z' = Z\}$$

симметрик унитар матрицалардан иборат тўпламга иккинчи тип классик соҳанинг остови дейилади.

3. Учунчи тип классик соҳанинг S_3 остови Z матрица тартибининг жуфт ва тоқлигига кўра аниқланади. Агар n - жуфт бўлса, у ҳолда S_3 барча кососимметрик унитар матрицалардан иборат бўлади. Агар n - тоқ бўлса, у ҳолда S_3 остов $Z = UFU'$ кўринишдаги матрицалардан тузилган бўлиб, бу ерда U - ихтиёрий унитар матрица ва F матрица қуйидагича аниқланади:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} 0.$$

4. Тўртинчи тип классик соҳанинг S_4 остови $e^{i\varphi}x$ кўринишдаги векторлардан тузилган бўлиб, $x \in \mathbb{R}^n$, $xx' = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ шартларни қаноатлантиради.

Классик соҳаларнинг S_1, S_2, S_3, S_4 остовларининг хақиқий ўлчовлари мос равишда $m(2n-m), \frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)/2 + (1+(-1)^n)(n-1)}{2}, n$ га тенг.

Маълумки классик соҳаларда $C(W, A)$ Коши-Сеге (бу ядро Бохнер-Хуа Ло-кен ядроси деб ҳам номланади) ва $P(W, A)$ Пуассон ядролари қуйидаги кўринишларда бўлади:

K_1 ($m \leq n$) соҳада

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(m)} - AW^*))^n}, \quad A \in K_1, \quad W \in S_1;$$

K_2 соҳада

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(n)} - A\bar{W}))^{\frac{n+1}{2}}}, \quad A \in K_2, \quad W \in S_2;$$

K_3 соҳада n жуфт бўлган ҳолда

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(n)} + A\bar{W}))^{\frac{n-1}{2}}}, \quad A \in K_3, \quad W \in S_3;$$

K_3 соҳада n тоқ бўлган ҳолда

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(n)} + A\bar{W}))^{\frac{n}{2}}}, \quad A \in K_3, \quad W \in S_3;$$

K_4 соҳада

$$C(w, a) = \frac{1}{((x - e^{-i\varphi}a)(x - e^{-i\varphi}\bar{a}))^{\frac{n}{2}}}, \quad a \in K_4, \quad w = e^{i\varphi}x \in S_4.$$

Барча соҳалар учун (тўртта классик соҳалар) инвариант Пуассон ва Коши-Сеге ядролари

$$P(W, A) = \frac{C(W, A)C(A, W)}{C(A, A)}$$

муносабат орқали боғланган.

Классик соҳаларда Хуа Ло-кен кўрсатганидек, Бергман метрикасига нисбатан Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи функциялар учун Пуассон интегралли Дирихле масаласининг ечими бўлади, яъни D классик соҳада инвариант Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи, шу соҳанинг остови S да ҳар бир узлуксиз f функциянинг Пуассон интеграллини $F \in C(\bar{D})$ функциягача давом қилдирилади.

Элементлари $\mathbb{C}$ комплекс сонлардан иборат бўлган, m тартибли Z_j квадрат матрицадан тузилган $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ - вектор берилган бўлсин. Бу Z векторни $\mathbb{C}^n [m \times m] \cong \mathbb{C}^{nm^2}$ фазонинг элементи деб қараш мумкин.

Ушбу

$$\langle Z, W \rangle = Z_1 W_1^* + \dots + Z_n W_n^*,$$

ифодада матрицавий «скаляр» кўпайтма дейилади.

Ушбу

$$B_{m,n} = \{Z : I - \langle Z, Z \rangle > 0\},$$

соҳа $\mathbb{C}^n[m \times m]$ фазодаги матрицавий шар дейилади, бу ерда I - тартиби m га тенг бўлган бирлик матрица.

Бу соҳанинг остови

$$X_{m,n} = \{Z : I = \langle Z, Z \rangle\},$$

кўринишда бўлади.

Равшанки, бу остовнинг ҳақиқий ўлчови $m^2(2n-1)$ ва $m > 1$ бўлганда матрицавий шар чегарасининг ўлчови билан устма-уст тушмайди.

Хусусий ҳолда, $n=1$ бўлганда, бу шар $\mathbb{C}[m \times m]$ фазодаги $B_{m,1}$ матрицавий доира, унинг остови эса $X_{m,1}$ барча унитар матрицалар тўплами бўлади.

Агар $m=1$ бўлса, у ҳолда бу шар $\mathbb{C}^n$ фазодаги $B_{1,n}$ бирлик шарни, унинг $X_{1,n}$ остови эса бирлик сферани аниқлайди.

Агар $m=n=1$ бўлса, у ҳолда бу шар $\mathbb{C}$ комплекс текисликдаги $B_{1,1}$ бирлик доирани, $X_{1,1}$ эса бирлик айланани аниқлайди.

Айтайлик, D —чегараланган, каварик, тўлиқ доиравий соҳа бўлиб, унинг S Шилов чегараси силлиқ (C^1 синфда) кўпхиллик бўлсин.

Бу D соҳадаги

$$\sup_{0 < r < 1} \int_S |F(r\zeta)|^p d\mu < +\infty,$$

шартни қаноатлантирувчи барча голоморф функциялар синфини $H^p(D)$ ($p > 0$)- Харди синфи деб атаймиз, бу ерда $r\zeta = (r\zeta_1, \dots, r\zeta_n)$ бўлиб, $d\mu$ - бурилишларга нисбатан инвариант бўлган S кўпхилликдаги нормаланган Лебег ўлчови.

Теорема 1. *Ихтиёрий $f \in H^1(B_{m,n})$ функциялар учун қуйидаги*

$$f(Z) = \int_{X_{m,n}} \frac{f(W) d\sigma(W)}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle)}, \quad Z \in B_{m,n},$$

Коши-Сеге-Хуа Ло-кен формуласи ўринли, бу ерда $d\sigma$ - $X_{m,n}$ остовдаги нормаланган Лебег ўлчови.

Изоҳ. 1) Агар $m=1$ бўлса, $\mathbb{C}^n$ фазодаги бирлик шар учун Лере интеграл формуласи ҳосил бўлади.

2) Агар $n=1$ бўлса, у ҳолда $\mathbb{C}[m \times m]$ даги матрицавий доира (Э.Картан таснифи бўйича биринчи тип классик соҳа) учун Хуа Ло-кен интеграл формуласи ҳосил бўлади.

3) Агар $n=m=1$ бўлса, у ҳолда $\mathbb{C}$ комплекс текисликдаги бирлик доира учун Коши интеграл формуласи ҳосил бўлади.

$B_{m,n}^{(1)}$, $B_{m,n}^{(2)}$ ва $B_{m,n}^{(3)}$ - биринчи, иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларни мос равишда қуйидагича аниқлаймиз:

$$B_{m,n}^{(1)} = \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0\},$$

$$B_{m,n}^{(2)} = \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0, \quad \forall Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}$$

ва

$$B_{m,n}^{(3)} = \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I + \langle Z, Z \rangle > 0, \quad \forall Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}.$$

Бу $B_{m,n}^{(k)}$ - матрицавий шарларнинг остовларини (Шилов чегарасини) $X_{m,n}^{(k)}$, $k=1,2,3$ билан белгилаймиз, яъни

$$X_{m,n}^{(1)} = \{Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : \langle Z, Z \rangle = I\},$$

$$X_{m,n}^{(2)} = \{Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : \langle Z, Z \rangle = I, \quad Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\},$$

$$X_{m,n}^{(3)} = \{Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I + \langle Z, Z \rangle = 0, \quad Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}.$$

Шуни таъкидлаймизки, $B_{1,1}^{(1)}$, $B_{1,1}^{(2)}$ ва $B_{2,1}^{(3)}$ соҳалар $\mathbb{C}$ комплекс текисликдаги бирлик доираларни, $X_{1,1}^{(1)}$, $X_{1,1}^{(2)}$ ва $X_{2,1}^{(3)}$ лар эса бирлик айланаларни аниқлайди.

Агар $n=1$, $m>1$ бўлса, у ҳолда $B_{m,1}^{(k)}$, $k=1,2,3$ - соҳалар мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи тип классик соҳаларни (Э.Картан таснифи бўйича), уларнинг $X_{m,1}^{(1)}$, $X_{m,1}^{(2)}$ ва $X_{m,1}^{(3)}$ - остовлари эса мос равишда унитар, симметрик унитар ва кососимметрик унитар матрицалар тўпламини беради.

1.2 параграфда баъзи бошланғич тушунчалар, Бергман интеграл формуласини ҳосил қилиш учун зарур таърифлар ҳамда диссертация мавзуси доирасидаги тадқиқотлар бошлангунга қадар шу соҳада тадқиқ этилган ишлар ва олинган натижалар шарҳи батафсил келтириб ўтилган.

Диссертациянинг иккинчи боби **“Иккинчи тип матрицавий шарда интеграл формулалар”** деб номланиб, у иккинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми ҳамда Бергман ва Коши-Сеге ядролари ёрдамида иккинчи тип матрицавий шарда голоморф функциялар учун интеграл формулаларни ўрганишга бағишланган.

2.1 параграфда иккинчи тип матрицавий шарнинг хоссалари ўрганилган.

2.2 параграфда иккинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми тадқиқ қилинган. Айтайлик, $B_{m,n}^{(2)}$ иккинчи тип матрицавий шар ва $X_{m,n}^{(2)}$ унинг остови бўлсин. Маълумки, $B_{m,1}^{(2)}$ соҳанинг $P \in B_{m,1}^{(2)}$ нуқтани 0 га ўтказувчи автоморфизми

$$W = R(Z - P)(I - \bar{P}Z)^{-1}\bar{R}^{-1},$$

кўринишда бўлади, бу ерда $R - m$ - тартибли квадрат матрица бўлиб,

$$\bar{R}(I - \bar{P}P')R' = I$$

шартни қаноатлантиради.

Бизнинг мақсадимиз, иккинчи тип матрицавий шар учун автоморфизмни топиш. Изланаётган автоморфизмни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$W_k = \left(A_{00} + \sum_{j=1}^n Z_j A_{j0} \right)^{-1} \left(A_{0k} + \sum_{j=1}^n Z_j A_{jk} \right), \quad k=1, \dots, n. \quad (1)$$

Юқоридаги (1) акслантириш иккинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми бўлиши учун A_{ij} коэффициентларни топиш зарур.

Қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n0} & A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I^{(m)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I^{(m)} \end{pmatrix},$$

бу ерда A ва H матрицалар $n+1$ тартибли квадрат блок матрица бўлиб, A_{ij} матрицалар эса m - тартибли квадрат матрицалар.

Қуйидаги тасдиқ ўринли

Теорема 2. (1) акслантириш $B_{m,n}^{(2)}$ иккинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми бўлиши учун A_{ij} , $i, j=0, 1, 2, \dots, n$, коэффициентлар қуйидаги шартларни

$$A H A^* = H, \quad A_{sk} A'_{j0} = A_{j0} A'_{jk}, \quad s=0, \dots, n, \quad j=0, \dots, n. \quad (2)$$

қаноатлантириши зарур ва етарли.

Энди $P = (P_1, \dots, P_n) \in B_{m,n}^{(2)}$ нукта берилган бўлсин. Бу P нуктани 0 нуктага акслантирувчи қуйидаги φ_P акслантиришни қараймиз:

$$\varphi_P : W_k = R^{-1} \left(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle \right)^{-1} \sum_{s=1}^n (Z_s - P_s) G_{sk}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

бу ерда R, G_{sk} - ихтиёрий матрицалар.

Бу акслантириш учун қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3. (3) кўринишдаги акслантириш $B_{m,n}^{(2)}$ иккинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми бўлиши учун R, G -матрицалар қуйидаги шартларни

$$R^* (I^{(m)} - \langle P, P \rangle) R = I^{(m)}, \quad G^* (I^{(mn)} - P' P) G = I^{(mn)},$$

қаноатлантириши зарур ва етарли, бу ерда G – блок матрица.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида иккинчи тип матрицавий шарнинг голоморф автоморфизми ёрдамида бу шарда Бергман интеграл формуласи ўринли бўлиши исботланган.

Ушбу

$$J_R \varphi_P = \frac{\det^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}} (I^{(m)} - \langle W, W \rangle)}{\det^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}} (I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle)} = \left(\frac{\det(I^{(m)} - \langle W, W \rangle)}{\det(I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle)} \right)^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\det(I^{(m)} - \langle P, P \rangle)}{|\det(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle)|^2} \right)^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}. \quad (4)$$

микдор φ_P акслантиришнинг Якобианидир, яъни қуйидаги тасдиқ ўринли:

Тасдиқ 1. φ_P автоморфизмнинг J_R ҳақиқий Якобиани (4) формула ёрдамида ҳисобланади.

Энди ν ўлчов $B_{m,n}^{(2)}$ шардаги ва σ ўлчов эса $X_{m,n}^{(2)}$ остовдаги нормаланган Лебег ўлчовлари, яъни

$$\int_{B_{m,n}^{(2)}} d\nu(Z) = 1 \quad \text{ва} \quad \int_{X_{m,n}^{(2)}} d\sigma(Z) = 1$$

бўлсин.

$B_{m,n}^{(2)}$ иккинчи тип матрицавий шар учун Бергман ядроси қуйидагича аниқланади:

$$K(Z, W) = \frac{1}{\det^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle)}, \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}.$$

Бу ядро $n=1$ бўлганда иккинчи классик соҳадаги Бергман ядроси билан устма-уст тушади.

$B_{m,n}^{(2)}$ иккинчи тип матрицавий шарда голоморф бўлиб, $d\nu$ Лебег ўлчови бўйича квадрати билан интегралланувчи функциялар синфини $\mathcal{L}^2(B_{m,n}^{(2)})$ (Гильберт фазоси) билан белгилаймиз, яъни $f \in \mathcal{O}(B_{m,n}^{(2)})$ бўлиб, $\int_{B_{m,n}^{(2)}} |f(\zeta)|^2 d\nu(\zeta) < +\infty$ бўлса, уни $f \in \mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(2)})$ деб оламиз.

$B_{m,n}^{(2)}$ иккинчи тип матрицавий шарнинг $X_{m,n}^{(2)}$ остовида $d\mu$ нормаланган Хара ўлчови бўйича квадрати билан интегралланувчи функциялар синфини $\mathcal{L}^2(X_{m,n}^{(2)}, d\mu)$ билан белгилаймиз.

2.3 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

Теорема 4. *Ихтиёрий $f \in \mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(2)})$ функция учун қуйидаги формула ўринли*

$$f(Z) = \int_{B_{m,n}^{(2)}} f(W) K(Z, W) d\nu(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}.$$

Бу интеграл формула $\mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(2)})$ фазода $\mathcal{L}^2(B_{m,n}^{(2)})$ фазонинг ортогонал проектори бўлади.

2.4 параграфда иккинчи тип матрицавий шар учун Коши – Сеге ядроси топилган ва бу ядрога мос келувчи интеграл формула ёзилган.

Иккинчи тип матрицавий шардаги Коши – Сеге ядроси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$C(Z, W) = \det^{\frac{(m+1)n}{2}}(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle), \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}, \quad W \in X_{m,n}^{(2)}.$$

Теорема 5. *Ихтиёрий $f \in H^1(B_{m,n}^{(2)})$ функция учун қуйидаги формула ўринли*

$$f(Z) = \int_{X_{m,n}^{(2)}} f(W)C(Z,W)d\sigma(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}, \quad W \in X_{m,n}^{(2)}.$$

Диссертациянинг учинчи боби «Учинчи тип матрицавий шарда интеграл формулалар ва голоморф давом эттиришлар масаласи» деб номланган бўлиб, иккинчи бобда қаралган масалаларнинг аналоглари косоcимметрик матрицалар учун (учинчи тип классик соҳа билан боғланган учинчи тип матрицавий шарда) қаралган, шунингдек, чегаравий Морера теоремаси исботланган ҳамда чегаранинг бир қисмида берилган функцияни давом эттириш масаласи ўрганилган ва Карлеман формуласи келтирилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида учинчи тип матрицавий шарнинг голоморф автоморфизми топилган.

$B_{m,n}^{(3)}$ - учинчи тип матрицавий шарни қараймиз:

$$B_{m,n}^{(3)} = \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n[m \times m]: I + \langle Z, Z \rangle > 0, Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Учинчи тип матрицавий шарнинг $X_{m,n}^{(3)}$ остови (Шилов чегараси) қуйидагича бўлади:

$$X_{m,n}^{(3)} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m]: I + \langle Z, Z \rangle = 0, Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Маълумки, $B_{m,1}^{(3)}$ - учинчи тип классик соҳанинг $P \in B_{m,1}^{(3)}$ нуқтасини 0 нуқтага ўтказувчи автоморфизм қуйидаги кўринишга эга:

$$W = Q(Z - P)(I + \overline{P}Z)^{-1}\overline{Q}^{-1},$$

бу ерда $Q - [m \times m]$ - матрица бўлиб,

$$\overline{Q}(I + \overline{P}P')Q' = I$$

шартни қаноатлантиради.

Учинчи тип классик соҳанинг голоморф автоморфизмларининг тўла группаси қуйидаги кўринишда тузилади:

$$W = (AZ + B)(-\overline{B}Z + \overline{A})^{-1},$$

бу ерда $A, B - [m \times m]$ матрицалар

$$A'B = -B'A, \quad A^*A - B^*B = I,$$

шартларни қаноатлантиради.

Айтайлик, A_{ij} m -тартибли квадрат матрицалардан тузилган $n+1$ тартибли

$$A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & \cdots & A_{0n-1} & A_{0n} \\ A_{01} & A_{11} & \cdots & A_{1n-1} & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\bar{A}_{0n-1} & -\bar{A}_{1n-1} & \cdots & \bar{A}_{n-1n-1} & \bar{A}_{n-1n} \\ -\bar{A}_{0n} & -\bar{A}_{1n} & \cdots & \bar{A}_{nn-1} & \bar{A}_{nn} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}$$

квадрат блок матрицалар берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$A'HA=H. \quad (5)$$

(5) муносабатдан

$$A_{00}\bar{A}_{00} - \sum_{s=1}^n \bar{A}_{0s}A_{0s} = I, \quad (6)$$

$$A_{j0}\bar{A}_{ks} = -\sum_{s=1}^n \bar{A}_{ks}A_{js}, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

шартлар келиб чиқади.

У ҳолда (1) ва (6) муносабатлардан қуйидаги тасдиқни ҳосил қиламиз:

Тасдиқ 2. (1) акслантириши $B_{m,n}^{(3)}$ учинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми бўлиши учун A_{ij} , $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, коэффициентлар (6) шартларни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Бизга $P = (P_1, \dots, P_n) \in B_{m,n}^{(3)}$ нукта берилган бўлсин. Бу P нуктани 0 нуктага акслантирувчи қуйидаги φ_P акслантиришни қараймиз:

$$\varphi_P : W_k = \bar{Q}^{-1} \left(I^{(m)} + \langle Z, P \rangle \right)^{-1} \sum_{s=1}^n (Z_s - P_s) Q_{sk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

бу ерда, Q - ихтиёрий матрица.

Бу акслантириш учун қуйидаги теорема ўринли

Теорема 6. (7) кўринишдаги акслантириш $B_{m,n}^{(3)}$ учинчи тип матрицавий шарнинг автоморфизми бўлиши учун Q матрица

$$\bar{Q}(I^{(mn)} + P'\bar{P})Q' = I^{(mn)}$$

шартларни қаноатлантириши зарур ва етарли, бу ерда Q – блок матрица.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида учинчи тип матрицавий шарнинг голоморф автоморфизми ёрдамида бу шарда Бергман интеграл формуласи ўринли бўлиши исботланган.

Тасдиқ 3. Учинчи тип матрицавий шар $W = \varphi_P(Z)$ автоморфизмининг J_R ҳақиқий Якобиани

$$J_R \varphi_P(Z) = \left(\frac{\det(I^{(m)} + \langle P, P \rangle)}{|\det(I^{(m)} + \langle Z, P \rangle)|^2} \right)^{\frac{(m-1)(n+1)}{2}}$$

формула билан ҳисобланади.

Таъриф 1. Ушбу $B \times B$ соҳада аниқланган

$$K(Z, W) = \frac{1}{\det^{\frac{(m-1)(n+1)}{2}} (I + \langle Z, W \rangle)}$$

функция $B_{m,n}^{(3)}$ учинчи тип матрицавий шарнинг Бергман ядроси деб аталади.

3.2-параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

Теорема 7. Ихтиёрий $f \in H^2(B_{m,n}^{(3)})$ функция учун қуйидаги формула ўринли

$$f(Z) = \int_{B_{m,n}^{(3)}} f(W) K(Z, W) d\nu(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}.$$

Бу интеграл формула $H^2(B_{m,n}^{(3)})$ фазода $L^2(B_{m,n}^{(3)})$ фазонинг ортогонал проектори бўлади.

3.3-параграфда Кораньи формуласидан фойдаланган ҳолда Коши-Сеге ядролари ёрдамида Пуассон ядроси аниқланган ва учинчи тип матрицавий шар учун Пуассон интеграл формуласи исботланган.

Кораньи формуласига кўра, учинчи тип матрицавий шар учун $P(Z, W)$ Пуассон ядроси қуйидаги кўринишда бўлади (m жуфт бўлганда):

$$P(Z, W) = \frac{C(Z, W)C(W, Z)}{C(Z, Z)} = \left[\frac{\det(I^{(m)} + \langle Z, Z \rangle)}{|\det(I^{(m)} + \langle Z, W \rangle)|^2} \right]^{\frac{(m-1)n}{2}}, \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}, W \in X_{m,n}^{(3)}, \quad (8)$$

бу ерда $C(Z, W)$ – учинчи тип матрицавий шар учун Коши –Сеге ядроси (m жуфт бўлганда).

m тоқ бўлганда:

$$P(Z, W) = \frac{C(Z, W)C(W, Z)}{C(Z, Z)} = \left[\frac{\det(I^{(m)} + \langle Z, Z \rangle)}{|\det(I^{(m)} + \langle Z, W \rangle)|^2} \right]^{\frac{mn}{2}}, \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}, W \in X_{m,n}^{(3)}, \quad (9)$$

бу ерда $C(Z, W)$ – учинчи тип матрицавий шар учун Коши –Сеге ядроси (m тоқ бўлганда).

Хусусан, $n=1$ бўлганда (8) ва (9) формуладаги ядролар учинчи тип классик соҳадаги Пуассон ядролари билан устма-уст тушади.

Теорема 8. Ихтиёрий $f \in \mathcal{O}(B_{m,n}^{(3)}) \cap C(\overline{B_{m,n}^{(3)}})$ функция учун қуйидаги интеграл формула ўринли

$$f(Z) = \int_{X_{m,n}^{(3)}} f(W) P(Z, W) d\sigma(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}, W \in X_{m,n}^{(3)},$$

бу ерда $d\sigma(W)$ ўлчов $X_{m,n}^{(3)}$ остовдаги инвариант Хаара ўлчовидир.

3.4-параграфда учинчи тип матрицавий шар учун чегаравий Морера теоремаси исботланган.

$\Lambda^0 \in X_{m,n}^{(3)}$ ($\Lambda^0 = (\Lambda_1^0, \dots, \Lambda_n^0)$) нуқтани фиксирлаймиз ва $B_{m,n}^{(3)}$ соҳада қуйидаги сиқилган бирлик аналитик Δ дискни қараймиз:

$$\Delta = \left\{ W \in C^{m^2 n} : W_j = t \Lambda_j^0, j = 1, \dots, n, |t| < 1 \right\}. \quad (10)$$

Бу сиқилган Δ дискнинг $\partial\Delta = T = \{|t| = 1\}$ чегараси $X_{m,n}^{(3)}$ остовда ётган айланага ўтади. Агар ψ - $B_{m,n}^{(3)}$ соҳанинг ихтиёрий голоморф автоморфизми бўлса, у ҳолда (10) кўринишдаги тўпلام бу автоморфизм ёрдамида чегараси $X_{m,n}^{(3)}$ остовда бўлган бирор аналитик дискка ўтади.

Теорема 9. Агар $f \in C(X_{m,n}^{(3)})$ функция $B_{m,n}^{(3)}$ соҳадаги барча ψ автоморфизмлар учун

$$\int_T f(\psi(t\Lambda^0)) dt = 0 \quad (17)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда f функция $B_{m,n}^{(3)}$ соҳадан $C(\bar{B}_{m,n}^{(3)})$ синфдаги F функцияга голоморф давом қилади.

3.5-параграфда Пуассон ядросининг хоссасидан фойдаланган ҳолда учинчи тип матрицавий шардаги голоморф функциянинг қийматини тиклаш учун Карлеман формуласи топилган.

Қуйидаги белгилашларни оламиз:

$$M_{0,U} = \{W \in M : W = \lambda U, \lambda = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, U \in X_1^+.$$

$$M'_0 = \{U \in X_1^+ : m_1(M_{0,U}) > 0\},$$

бу ерда m_1 ўлчов бирлик айланадаги бир ўлчовли нормаланган Лебег ўлчови. Бир ўлчовли Карлеман функциясини киритамиз:

$$g_0(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{0,U}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \quad h_0 = \exp g_0.$$

Теорема 10. Ихтиёрий $f \in H^1(B_{m,n}^{(3)})$ функция ва 0 нуқта учун қуйидаги Карлеман формуласи ўринли:

$$f(0) = \frac{1}{\int_{M'_0} d\sigma_1} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(W) \left[\frac{h_0(W)}{h_0(0)} \right]^j d\sigma(W).$$

Учинчи тип матрицавий шарнинг $P \in B_{m,n}^{(3)}$ нуқтани 0 нуқтага ўтказувчи $\varphi_P(Z)$ – автоморфизми берилган бўлсин.

Қуйидаги белгилашларни оламиз:

$$\sigma_P(K) = \sigma_1(\varphi_P^{-1}(K)), \quad K \in X_P^+, \quad M_{P,U} = \{W \in M : W = \varphi_P^{-1}(\lambda \varphi_P^{-1}(U)), |\lambda| = 1\},$$

$$U \in X_P^+ = \varphi_P(X_1^+), \quad M'_P = \{U \in X_P^+ : m_1(M_{P,U}) > 0\},$$

$$g_P(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{P,U}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \quad h_P = \exp g_P.$$

Теорема 11. *т жуфт бўлганда ихтиёрий $f \in H^1(B_{m,n}^{(3)})$ функция ва ихтиёрий $P \in B_{m,n}^{(3)}$ нуқта учун қуйидаги Карлеман формуласи ўринли:*

$$f(P) = \frac{1}{\int_{M'_P} d\sigma_P} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(W) \left[\frac{h_p(W)}{h_p(P)} \right]^j C(P, W) d\sigma(W).$$

Теорема 12. *т тоқ бўлганда ихтиёрий $f \in H^1(B_{m,n}^{(3)})$ функция ва ихтиёрий $P \in B_{m,n}^{(3)}$ нуқта учун қуйидаги Карлеман формуласи ўринли:*

$$f(P) = \frac{m+1}{\mu_P(\tilde{M}'_A)} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(W) \left[\frac{h_p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}}{h_p(P)} \right]^j C(P, W) d\sigma(W),$$

бу ерда $C(P, W)$ – учинчи тип матрицавий шар учун Коши-Сеге ядроси. $m+1$ -

тартибли $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ – матрица учун

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi' & W_1 \end{pmatrix} : W_1 \in M_{P,U}, \xi \in E \right\},$$

тўплагани тайинлаймиз, бу ерда, E вектор k – элементи

$$\xi\xi' = 1, \xi W_1 = 0, W_1 \bar{W}_1 + \xi\xi' = I^{(m)},$$

шартларни қаноатлантирувчи вектордир.

ХУЛОСА

Диссертация иши матрицавий шарларда интеграл формулалар ва уларнинг тадбиқларига бағишланган тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларнинг автоморфизмлари топилган;

2. Иккинчи ва учинчи тип матрицавий шарларда Бергман ва Коши-Сеге ядролари топилган ва уларга мос интеграл формулалар олинган;

3. Учинчи тип матрицавий шарда Пуассон ядроси топилган ва унга мос интеграл формула исботланган;

4. Учинчи тип матрицавий шар учун чегаравий Морера теоремаси исботланган;

5. Учинчи тип матрицавий шар чегарасининг бир қисмида голоморф давом эттириш масаласи кўрилган ва Карлеман формуласи исботланган.

Олинган натижалар кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида интеграл формулаларни тадқиқ қилиш масалаларига қўлланилади.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

РАХМОНОВ УКТАМ СОДИКОВИЧ

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ В МАТРИЧНЫХ ШАРАХ,
АССОЦИИРОВАННЫХ С КЛАССИЧЕСКИМИ ОБЛАСТЯМИ
ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ТИПОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

01.01.01 – Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2020 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM212.

Диссертация выполнена в Ташкентском государственном техническом университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (<http://www.ziyonet.uz/>).

Научный руководитель:	Гулмирза Худайбергенов доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Ганиходжаев Расул Набиевич доктор физико-математических наук, профессор
	Курбанов Бухарбай Тургунбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Ургенчский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _____ 2020 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2020 года.
(протокол рассылки №___ от «___» _____ 2020 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор,
академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н.(PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые на мировом уровне в комплексном анализе, сводится к изучению свойств голоморфных функций матричного аргумента в классических областях. В многомерном комплексном анализе интегральные представления являются мощным конструктивным аппаратом и имеет важные применения. Нахождение автоморфизмов матричных шаров, вычисление ядер Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона для рассматриваемых областей, нахождение интегральных формул для рассматриваемых областей и исследование голоморфного продолжения играет важную роль и считается одним из актуальных направлений современной математики.

В настоящее время в мире вычисление интегральных формул и их применение считается одним из актуальных задач теории функций многих комплексных переменных. Последнее время в связи с применением комплексного анализа матричных областей в математической физике (в теории полей), в теории электрических цепей и других еще больше возрос интерес к этому направлению комплексного анализа. В качестве доказательства этого можно привести многие научные работы ведущих ученых мира. При этом нахождение автоморфизмов для матричных шаров второго и третьего типа ассоциированных с классическими областями, определение ядер Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона и получение интегральных формул считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое применение, таких как теория функций комплексных переменных. В том числе, уделено особое внимание задачам нахождения обобщенных интегральных формул и доказательству аналогов классических теорем в многомерном комплексном анализе. В таких задачах как изучение с помощью найденных интегральных формул в этих областях разложены в ряд голоморфные функции, а также получение обобщений классических теорем достигнуты весомые результаты. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям предметов «Функциональный анализ, математический анализ и комплексный анализ многих переменных» установлено основной задачей и направлением деятельности². Развитие теории локальных вычетов многих переменных и теории интегральных формул играет важную роль в решении задач комплексного анализа, алгебры, для реализации указанного постановления.

² Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан»

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Изучение свойств голоморфных функций в классических областях получило развитие в тридцатых годах прошлого века. Это связано с тем, что в теории функций многих комплексных переменных начинают использоваться методы теории интегралов. В 1935 году Э. Картан доказал, что существует только шесть возможных типов неприводимых, однородных, ограниченных, симметрических областей. Матричные области впервые изучены в работах Э.Картана, К.Зигеля. В частности, ими были описаны автоморфизмы классических областей. Для классических областей, классифицированных Картаном, были найдены Хуа Ло-Кеном ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона, на основе этих ядер были успешно реализованы интегральные формулы. В классических областях Хуа Ло-Кеном построен гармонический анализ функции многих комплексных переменных (1944-1957 гг.), результаты приведены в монографии Хуа Ло-Кена.

Чтобы найти эти ядра, для каждой классической области были вычислены автоморфизмы. И. И. Пятецкий-Шапиро и К. Зигель изучали геометрические свойства всех проявлений классических областей. Вопросам связанным с классическими областями посвящены книги К.Зигеля и И.И.Пятецкого-Шапиро. Следует также отметить работы В.С.Владимирова, А.Г.Сергеева, С.Г.Гиндикина. В работах А.М.Кытманова, Г.Худайбергана, С.Косбергенова, Б.А.Шаимкулова, Б.Отемуратова, С.Г.Мысливец, Т.Н.Никитиной, Б.Курбанова, Додака, Х.Зоя и др. были изучены свойства голоморфных функций в матричных областях.

Теория интегральных формул в многомерном комплексном пространстве и их приложения исследуется в работах А.М.Кытманова, Н.Тарханова, А.Аронова, Ш.Даутова, Г.Хенкина, М.Аграновского,

А.Шлапунова, Б.Шаимкулова, Б.Пренова, А.Кацуновой и многих других ученых.

Связь темы диссертации с научно- исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялось диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планами научных исследований по грантам ОТ-Ф1-116 «Задачи аналитического продолжения и вопросы геометрической теории функций» (2007-2011 гг.), Ф-4-31 «Теория плюрипотенциала и интегральные формулы многомерного анализа» (2012-2016 гг.) Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является нахождение голоморфных автоморфизмов матричного шара второго и третьего типов, нахождение ядер Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона для матричных шаров второго и третьего типов и получение интегральных формул для таких шаров, нахождение интегральных формул с помощью этих ядер, доказательство граничной теоремы Морера для матричного шара третьего типа, исследование задачи голоморфного продолжения в матричном шаре третьего типа.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

нахождение автоморфизмов для матричного шара второго и третьего типов;

доказательство интегральной формулы Бергмана в матричных шарах второго и третьего типов ;

доказательство интегральной формулы Коши-Сеге в матричных шарах второго и третьего типов ;

вычисление ядра Пуассона и интегральной формулы в матричном шаре третьего типа;

доказательство граничной теоремы Морера для матричного шара третьего типа;

решение задачи голоморфной продолжимости для матричного шара третьего типа.

Объект исследования. Матричные шары второго и третьего типа, ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона, граничная теорема Морера.

Предмет исследования. Автоморфизмы для матричного шара второго и третьего типов, голоморфные функции от матриц.

Методика исследования. В диссертационной работе использованы методы интегральных представлений голоморфных функций в многомерном комплексном анализе и теории голоморфных функции от матриц.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найлены автоморфизмы для матричного шара второго и третьего типа;

в матричных шарах второго и третьего типов найдены интегральные формулы Бергмана и Коши-Сеге;

вычислено ядро Пуассона и для этого ядра получена интегральная формула Пуассона в матричном шаре третьего типа;

для матричного шара третьего типа доказана граничная теорема Морера;

решена задача голоморфного продолжения в матричном шаре третьего типа.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

в матричных шарах доказана интегральные формулы Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона и граничная теорема Морера.

используя формулу Карлемана, решена задача голоморфные продолжение в матричной шаре третьего типа.

Достоверность результатов исследования. При исследовании поставленных задач использованы методы интегральных формул в теории функций многих комплексных переменных и все доказательства основаны на строгих математических рассуждениях.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные результаты можно использовать при голоморфном продолжении функций от матриц в классических областях второго и третьего типов и при решении задач, связанных с граничными свойствами интегральных представлений.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что она дает возможность голоморфного продолжения функции от матриц с части границы матричной области, в частности, по найденной формуле Карлемана можно восстанавливать значения голоморфной функции в матричном шаре третьего типа, зная лишь значения этой функции на остоле шара.

Внедрение результатов исследования. На основе результатов полученных интегральных формул в матричных шарах, ассоциированных с классическими областями второго и третьего типов:

интегральные формулы, полученные для матричного шара второго и третьего типов использованы в зарубежном проекте 11-01-00852-а «Многомерные вычеты в комплексном анализе, их применения в статической физике и теориях разностных и дифференциальных уравнений» (Справка №6051 Сибирского федерального университета от 9 апреля 2020 года). Применение научных результатов дало возможность получить аналоги интегральных формул Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона для функций от матриц в теории функций многих комплексных переменных;

формула Карлемана, полученная для матричного шара третьего типа и граничная теорема Морера были использованы в зарубежном проекте 18-51-41011 «Многомерный комплексный анализ» (Справка №6051 Сибирского федерального университета от 9 апреля 2020 года). Применение этих научных результатов дало возможность применить задачу голоморфного продолжимости в матричной шаре третьего типа.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 8 научно-практических конференциях, в том числе на 3 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ из них 7 в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций доктора философии, в том числе из них 4 опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях, а также результаты вошли в монографию.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общее число страниц диссертационной работы – 76.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Предварительные сведения и постановка задач”** приведены необходимые предварительные сведения, необходимые обозначения, основные определения и важные теоремы и еще известные результаты, используемые в дальнейшем.

В параграфе 1.1 приведены классические области, их основные свойства, исследованные разными учеными и применения.

Рассмотрим пространство m^2 комплексных переменных, обозначаемое $\mathbb{C}^{m^2}$. В некоторых вопросах точки Z этого пространства удобно представлять в виде квадратных $[m \times m]$ - матриц, т.е. в виде $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^m$.

При таком представлении точек пространство $\mathbb{C}^{m^2}$ будем обозначать $\mathbb{C}[m \times m]$. Прямое произведение $\underbrace{\mathbb{C}[m \times m] \times \dots \times \mathbb{C}[m \times m]}_n$ n экземпляров

$\mathbb{C}[m \times m]$ обозначим $\mathbb{C}^n[m \times m]$.

Под классической областью (по классификации Э. Картана) $D \subset \mathbb{C}^N$ мы будем понимать неприводимую ограниченную симметрическую область многих комплексных переменных одного из следующих четырех типов:

1. Область K_1 , образованная матрицами Z вида $m \times n$ (элементы матриц – комплексные числа), удовлетворяющими условию

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0.$$

Здесь $I^{(m)}$, как обычно, единичная матрица порядка m , $Z^* = \bar{Z}'$ – матрица, комплексно сопряженная к транспонированной матрице Z' .

2. Область K_2 , образованная симметрическими (квадратными) матрицами Z порядка n , удовлетворяющими условию

$$I^{(n)} - Z\bar{Z} > 0.$$

3. Область K_3 , образованная кососимметрическими матрицами Z порядка n , удовлетворяющими условию

$$I^{(n)} + Z\bar{Z} > 0.$$

4. Область K_4 , образованная n -мерными комплексными векторами $z = (z_1, \dots, z_n)$, удовлетворяющими условиям

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1.$$

Комплексная размерность N этих четырех типов областей равна, соответственно, mn , $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$, n . Данные области являются полными круговыми выпуклыми областями. В данном параграфе область D означает область одного из вышеприведенных типов.

Пусть S – граница Шилова для области D .

1. S_1 образована матрицами U вида $m \times n$, удовлетворяющими условию

$$UU^* = I^{(m)}.$$

В частности, при $m = n$ многообразие S_1 совпадает с множеством всех унитарных матриц $U(n)$.

2. S_2 состоит из всех симметрических унитарных матриц порядка n .

3. S_3 определяется различным образом в зависимости от четности и нечетности n . Если n – четное, то S_3 состоит из всех кососимметрических унитарных матриц порядка n . Если n – нечетное, то S_3 состоит из матриц вида UFU' , где U – произвольная унитарная матрица, а

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} 0.$$

4. S_4 состоит из векторов вида $e^{i\varphi}x$, где x – вещественный n -мерный вектор, удовлетворяющий условию $xx' = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Многообразия S_1, S_2, S_3, S_4 имеют вещественную размерность $m(2n-m)$, $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2} + (1+(-1)^n)(n-1)$ и n соответственно.

Напомним также вид ядер Коши-Сеге (часто эти ядра называют ядрами Бохнера-Хуа Ло-кена) $C(W, A)$ и Пуассона $P(W, A)$ в классических областях: в области первого типа K_1 ($m \leq n$)

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(m)} - AW^*))^n}, \quad A \in K_1, \quad W \in S_1,$$

в области второго типа K_2

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(n)} - A\bar{W}))^{\frac{n+1}{2}}}, \quad A \in K_2, \quad W \in S_2,$$

в области третьего типа K_3 для четного n

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(n)} + A\bar{W}))^{\frac{n-1}{2}}}, \quad A \in K_3, \quad W \in S_3,$$

для нечетного n

$$C(W, A) = \frac{1}{(\det(I^{(n)} + A\bar{W}))^{\frac{n}{2}}}, \quad A \in D_3, \quad W \in S_3,$$

в области четвертого типа K_4

$$C(w, a) = \frac{1}{((x - e^{-i\varphi}a)(x - e^{-i\varphi}\bar{a}))^{\frac{n}{2}}}, \quad a \in K_4, \quad w = e^{i\varphi}x \in S_4.$$

Во всех этих случаях инвариантное ядро Пуассона и ядро Коши-Сеге связаны соотношением

$$P(W, A) = \frac{C(W, A)C(A, W)}{C(A, A)}.$$

Как показано Хуа Ло-кеном, а также, интеграл Пуассона решает задачу Дирихле для функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа относительно метрики Бергмана, т.е. каждая непрерывная функция f на остоле S продолжается интегралом Пуассона до функции $F \in C(\bar{D})$, удовлетворяющей в D инвариантному уравнению Лапласа.

Пусть $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ - вектор, составленный из квадратных матриц Z_j порядка m , рассматриваемых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Можно считать, что Z - элемент пространства $\mathbb{C}^n[m \times m] \cong \mathbb{C}^{nm^2}$.

Матричное «скалярное» произведение:

$$\langle Z, W \rangle = Z_1 W_1^* + \dots + Z_n W_n^*,$$

где W_j^* есть матрица, сопряженная и транспонированная для матрицы W_j .

Область $B_{m,n}$ пространства $\mathbb{C}^n[m \times m]$:

$$B_{m,n} = \{Z : I - \langle Z, Z \rangle > 0\},$$

где I , как обычно, единичная матрица порядка m , матричный шар.

Остов этой области есть многообразие вида:

$$X_{m,n} = \{Z : \langle Z, Z \rangle = I\}.$$

Очевидно, действительная размерность остова равна $m^2(2n-1)$ и при $m > 1$ не совпадает с размерностью границы матричного шара.

В частности, при $n=1 \Rightarrow B_{m,1}$ - матричный круг из $\mathbb{C}[m \times m]$, а $X_{m,1}$ - множество всех унитарных матриц.

При $m=1 \Rightarrow B_{1,n}$ - шар из $\mathbb{C}^n$, а $X_{1,n}$ - единичная сфера.

При $m=n=1 \Rightarrow B_{1,1}$ - единичный круг из $\mathbb{C}$, а $X_{1,1}$ - единичная окружность.

Пусть D – ограниченная выпуклая полная круговая область с границей Шилова S , которая является гладким (класса C^1) многообразием.

Определим класс $H^p(D)$ ($p > 0$) как класс всех функций F , голоморфных в D , для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_S |F(r\zeta)|^p d\mu < +\infty,$$

здесь $r\zeta = (r\zeta_1, \dots, r\zeta_n)$, а $d\mu$ – нормированная мера Лебега на многообразии S , инвариантная относительно поворотов.

Теорема 1. Для всякой функции $f \in H^1(B_{m,n})$ справедлива формула Коши-Сеге-Хуа Ло-кена

$$f(Z) = \int_{X_{m,n}} \frac{f(W) d\sigma(W)}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle)}, \quad Z \in B_{m,n},$$

где $d\sigma$ - нормированная мера Лебега на остоле $X_{m,n}$.

Замечания. 1) При $m=1$ получаем интегральную формулу Лере для единичного шара из $\mathbb{C}^n$.

2) При $n=1$ получаем интегральную формулу Хуа Ло-кена для матричного круга из $\mathbb{C}[m \times m]$ (классическая область первого типа по классификации Э. Картана).

3) При $n=m=1$ получаем интегральную формулу Коши для единичного круга из $\mathbb{C}$.

Определим матричные шары $B_{m,n}^{(1)}$, $B_{m,n}^{(2)}$ и $B_{m,n}^{(3)}$ первого, второго и третьего типов, соответственно:

$$\begin{aligned} B_{m,n}^{(1)} &= \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0\}, \\ B_{m,n}^{(2)} &= \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0, \quad \forall Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\} \text{ и} \\ B_{m,n}^{(3)} &= \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I + \langle Z, Z \rangle > 0, \quad \forall Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Остовы (границы Шилова) матричных шаров $B_{m,n}^{(k)}$, обозначим через $X_{m,n}^{(k)}$, $k = 2, 3$, т.е.,

$$\begin{aligned} X_{m,n}^{(1)} &= \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \langle Z, Z \rangle = I\}, \\ X_{m,n}^{(2)} &= \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \langle Z, Z \rangle = I, \quad Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}, \\ X_{m,n}^{(3)} &= \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I + \langle Z, Z \rangle = 0, \quad Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $B_{1,1}^{(1)}$, $B_{1,1}^{(2)}$ и $B_{2,1}^{(3)}$ - единичные круги, а $X_{1,1}^{(1)}$, $X_{1,1}^{(2)}$ и $X_{2,1}^{(3)}$ - единичные окружности в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Если $n=1, m>1$, то $B_{m,1}^{(k)}$, $k=1,2,3$ - классические области первого, второго и третьего типов (по классификации Э.Картана), а остовы $X_{m,1}^{(1)}$, $X_{m,1}^{(2)}$ и $X_{m,1}^{(3)}$ - унитарные, симметрические унитарные и кососимметрические унитарные матрицы, соответственно.

В параграфе 1.2 приведены некоторые понятия, связанные с ядром Бергмана и интегральным представлением Бергмана, необходимые определения и понятия для исследования интегрального представления и ранее известные факты.

Вторая глава диссертации, названная «**Интегральные формулы в матричном шаре второго типа**», целью данной главы является исследование матричного шара второго типа относительно его автоморфизмов, а также интегральные представления голоморфных функций с помощью ядер Бергмана, Коши-Сеге.

В параграфе 2.2 второй главы исследованы автоморфизмы матричного шара второго типа.

Пусть $B_{m,n}^{(2)}$ матричный шар второго типа и $X_{m,n}^{(2)}$ его остов. Известно, что автоморфизм $B_{m,1}^{(2)}$, переводящий точку $P \in B_{m,1}^{(2)}$ в точку 0 имеет вид

$$W = R(Z - P)(I - \bar{P}Z)^{-1}\bar{R}^{-1},$$

где $R [m \times m]$ - матрица такая, что

$$\bar{R}(I - \bar{P}P')R' = I.$$

Наша цель найти автоморфизмы для матричного шара второго типа. Искомый автоморфизм ищем в виде

$$W_k = \left(A_{00} + \sum_{j=1}^n Z_j A_{j0}\right)^{-1} \left(A_{0k} + \sum_{j=1}^n Z_j A_{jk}\right), k=1, \dots, n. \quad (1)$$

Надо найти коэффициенты A_{ij} так, чтобы отображение (1) было автоморфизмом матричного шара второго типа.

Введем следующие обозначение

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n0} & A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I^{(m)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I^{(m)} \end{pmatrix}$$

блочные квадратные матрицы порядка $n+1$, а A_{ij} - квадратные матрицы порядка m .

Имеет место следующее утверждение

Теорема 2. *Отображение (1) является автоморфизмом матричного*

шара $B_{m,n}^{(2)}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты A_{ij} , $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям

$$A_n A_n^* = H, A_{sk} A'_{j0} = A_{j0} A'_{jk}, s = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n. \quad (2)$$

Пусть теперь точка $P = (P_1, \dots, P_n) \in B_{m,n}^{(2)}$. Рассмотрим отображение

$$W_k = R^{-1} \left(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle \right)^{-1} \sum_{s=1}^n (Z_s - P_s) G_{sk}, \quad (3)$$

$k = 1, 2, \dots, n$, переводящее точку P в 0, где R, G_{sk} произвольные матрицы.

Теорема 3. Для того, чтобы отображение вида (3) являлось автоморфизмом матричного шара второго типа, необходимо и достаточно, чтобы матрицы R, G удовлетворяли соотношениям

$$R^* (I^{(m)} - \langle P, P \rangle) R = I^{(m)}, G^* (I^{(mn)} - P'P) G = I^{(mn)},$$

где G – блочная матрица.

В третьем параграфе второй главы доказана справедливость интегральной формулы Бергмана для матричного шара второго типа с помощью голоморфных автоморфизмов данного шара.

$$\begin{aligned} J_R \varphi_P &= \frac{\det^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}} (I^{(m)} - \langle W, W \rangle)}{\det^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}} (I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle)} = \left(\frac{\det(I^{(m)} - \langle W, W \rangle)}{\det(I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle)} \right)^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}} = \\ &= \left(\frac{\det(I^{(m)} - \langle P, P \rangle)}{|\det(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle)|^2} \right)^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тем самым мы получаем следующее утверждение.

Предложение 1. Вещественный Якобиан J_R автоморфизма φ_P вычисляется по формуле (4).

Рассмотрим нормированные меры Лебега ν в шаре $B_{m,n}^{(2)}$ и σ на остовете $X_{m,n}^{(2)}$, т.е.

$$\int_{B_{m,n}^{(2)}} d\nu(Z) = 1 \text{ и } \int_{X_{m,n}^{(2)}} d\sigma(Z) = 1.$$

Ядро Бергмана определим следующим образом на $B_{m,n}^{(2)}$:

$$K(Z, W) = \frac{1}{\det^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}} (I^{(m)} - \langle Z, W \rangle)}, \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}.$$

Это ядро при $n=1$ совпадает с ядром Бергмана для классической области второго типа.

Гильбертово пространство $\mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(2)})$, состоящее из голоморфных функций в $B_{m,n}^{(2)}$, интегрируемых с квадратом по обычной мере Лебега $d\nu$, т.е. $f \in \mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(2)})$, если f – голоморфна в $B_{m,n}^{(2)}$ и

$$\int_{B_{m,n}^{(2)}} |f(\zeta)|^2 d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Пусть $L^2(X_{m,n}^{(2)}, d\mu)$ обозначает пространство скалярных функций f , интегрируемых с квадратом по нормированной мере Хаара $d\mu$ на остоле $X_{m,n}^{(2)}$ матричного шара $B_{m,n}^{(2)}$.

Основным результатом параграфа 2.3 второй главы является следующая теорема.

Теорема 4. Для всякой функции $f \in \mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(2)})$ справедлива формула

$$f(Z) = \int_{B_{m,n}^{(2)}} f(W) K(Z, W) d\nu(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}.$$

Интеграл в этой формуле задает ортогональный проектор из пространства $L^2(B_{m,n}^{(2)})$ в пространство $\mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(2)})$.

В параграфе 2.4 во второй главе найдено ядро Коши – Сеге для матричного шара второго типа и выписана соответствующая интегральная формула.

Ядро Коши – Сеге для матричного шара второго типа имеет вид:

$$C(Z, W) = \det^{\frac{(m+1)n}{2}} (I^{(m)} - \langle Z, W \rangle), \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}, \quad W \in X_{m,n}^{(2)}.$$

Теорема 5. Для всякой функции $f \in H^1(B_{m,n}^{(2)})$ справедлива формула

$$f(Z) = \int_{X_{m,n}^{(2)}} f(W) C(Z, W) d\sigma(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(2)}, \quad W \in X_{m,n}^{(2)}.$$

В третьей главе диссертации, названной «**Интегральные формулы и задачи голоморфного продолжения в матричном шаре третьего типа**», рассматриваются задачи, аналогичные с рассмотренными во второй главе, для классических областей третьего типа, а также изучаются достаточные условия голоморфной продолжимости с границы в виде граничной теоремы Морера и формулы Карлемана.

В первом параграфе третьей главы найдены голоморфные автоморфизмы для матричного шара третьего типа.

Рассмотрим *матричный шар* $B_{m,n}^{(3)}$ (третьего типа):

$$B_{m,n}^{(3)} = \{(Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n[m \times m]: I + \langle Z, Z \rangle > 0, Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Остов (граница Шилова) матричного шара $B_{m,n}^{(3)}$ обозначим через $X_{m,n}^{(3)}$, т.е.

$$X_{m,n}^{(3)} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m]: I + \langle Z, Z \rangle = 0, Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Известно, что автоморфизм $B_{m,1}^{(3)}$, переводящий точку $P \in B_{m,1}^{(3)}$ в точку 0 имеет вид

$$W = Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1},$$

где $Q \in [m \times m]$ - матрица такая, что

$$\bar{Q}(I + \bar{P}P')Q' = I.$$

Полная группа голоморфных автоморфизмов для классической области третьего типа состоит из следующих преобразований:

$$W = (AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})^{-1},$$

где $A, B \in [m \times m]$ матрицы, удовлетворяющих соотношениям

$$A'B = -B'A, A^*A - B^*B = I.$$

Пусть

$$H = \begin{bmatrix} -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & \cdots & A_{0n-1} & A_{0n} \\ A_{01} & A_{11} & \cdots & A_{1n-1} & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\bar{A}_{0n-1} & -\bar{A}_{1n-1} & \cdots & \bar{A}_{n-1n-1} & \bar{A}_{n-1n} \\ -\bar{A}_{0n} & -\bar{A}_{1n} & \cdots & \bar{A}_{nn-1} & \bar{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

блочные квадратные матрицы порядка $n+1$, а A_{ij} - квадратные матрицы порядка m , удовлетворяющие соотношению

$$A'HA = H. \quad (5)$$

Соотношение (5) выполняется тогда и только тогда, когда

$$A_{00}\bar{A}_{00} - \sum_{s=1}^n \bar{A}_{0s}A_{0s} = I, \quad (6)$$

$$A_{j0}\bar{A}_{ks} = -\sum_{s=1}^n \bar{A}_{ks}A_{js}, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда из (1) и (6) получаем следующее предложение:

Предложение 2. *Отображение (1) является автоморфизмом матричного шара $B_{m,n}^{(3)}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты A_{ij} , $i, j = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям (6).*

Пусть точка $P = (P_1, \dots, P_n) \in B_{m,n}^{(3)}$. Подберем матрицы Q_{sk} , $s, k = 0, 1, \dots, n$, порядка m так, чтобы отображение вида

$$W_k = \bar{Q}^{-1} \left(I^{(m)} + \langle Z, P \rangle \right)^{-1} \sum_{s=1}^n (Z_s - P_s) Q_{sk}, \quad (7)$$

$k = 1, 2, \dots, n$, переводящие точки P в начало координат, являлся автоморфизмом матричного шара $B_{m,n}^{(3)}$, где матрица Q должна удовлетворять соотношению

$$\bar{Q}(I^{(mn)} + P'\bar{P})Q' = I^{(mn)}. \quad (8)$$

Теорема 6. Для любой точки $P \in B_{m,n}^{(3)}$ существует автоморфизм шара вида (7) переводящий точку P в начало координат. При этом матрицы Q_{sk} , $s, k = 0, 1, \dots, n$, определяются из соотношений (8).

Во втором параграфе третьей главы доказана справедливость интегральных формул Бергмана и Коши - Сеге для матричного шара третьего типа с помощью голоморфных автоморфизмов.

Автоморфизм матричного шара $B_{m,n}^{(3)}$ переводящее точку P в 0 имеет вид:

$$W_k = \bar{Q}^{-1} \left(I^{(m)} + \langle Z, P \rangle \right)^{-1} \sum_{s=1}^n (Z_s - P_s) G_{sk}, \quad (11)$$

где матрицы Q и G_{sk} удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{Q} \left(I^{(m)} + \langle P, P \rangle \right) Q' &= I^{(m)} \\ G'(I^{(mn)} - P^* P) \bar{G} &= I^{(mn)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь G – блочная матрица порядка mn .

Предложение 3. Вещественный Якобиан J_R автоморфизма $W = \varphi_p(Z)$ вычисляется по формуле

$$J_R \varphi_p(Z) = \left(\frac{\det(I^{(m)} + \langle P, P \rangle)}{|\det(I^{(m)} + \langle Z, P \rangle)|^2} \right)^{\frac{(m-1)(n+1)}{2}}.$$

Определение 1. Функция

$$K(Z, W) = \frac{1}{\det^{\frac{(m-1)(n+1)}{2}} (I + \langle Z, W \rangle)}$$

определенная в $B \times B$ называется ядром Бергмана матричного шара $B_{m,n}^{(3)}$.

Основным результатом параграфа 3.2 является следующая теорема.

Теорема 7. Для всякой функции $f \in H^2(B_{m,n}^{(2)})$ справедлива формула

$$f(Z) = \int_{B_{m,n}^{(3)}} f(W) K(Z, W) d\nu(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}.$$

Интеграл в этой формуле задает ортогональный проектор из пространства $L^2(B_{m,n}^{(3)})$ в пространство $\mathcal{O}^2(B_{m,n}^{(3)})$.

В параграфе 3.3 третьей главы определено ядро Пуассона с помощью ядра Коши – Сеге с использованием формулы Кораньи и доказана интегральная формула Пуассона для матричного шара третьего типа.

Ядро Пуассона $P(Z, W)$, в силу формулы Кораньи, имеет следующий вид (для четного m):

$$P(Z, W) = \frac{C(Z, W)C(W, Z)}{C(Z, Z)} = \left[\frac{\det(I^{(m)} + \langle Z, Z \rangle)}{|\det(I^{(m)} + \langle Z, W \rangle)|^2} \right]^{\frac{(m-1)n}{2}}, \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}, \quad W \in X_{m,n}^{(3)}, \quad (14)$$

где $C(Z, W)$ – ядро Коши –Сеге для матричного шара третьего типа (для четного m).

Для нечетного m :

$$P(Z, W) = \frac{C(Z, W)C(W, Z)}{C(Z, Z)} = \left[\frac{\det(I^{(m)} + \langle Z, Z \rangle)}{|\det(I^{(m)} + \langle Z, W \rangle)|^2} \right]^{\frac{mn}{2}}, \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}, \quad W \in X_{m,n}^{(3)}, \quad (15)$$

где $C(Z, W)$ – ядро Коши –Сеге для матричного шара третьего типа (для нечетного m).

При $n=1$ ядра (14) и (15) совпадают с ядром Пуассона для классической области третьего типа.

Теорема 8. Для любой функции $f \in \mathcal{O}(B_{m,n}^{(3)}) \cap C(\overline{B_{m,n}^{(3)}})$ (т.е. f голоморфна в $B_{m,n}^{(3)}$ и непрерывна на $\overline{B_{m,n}^{(3)}}$) справедлива интегральная формула

$$f(Z) = \int_{X_{m,n}^{(3)}} f(W)P(Z, W)d\sigma(W), \quad Z \in B_{m,n}^{(3)}, \quad W \in X_{m,n}^{(3)},$$

где $d\sigma(W)$ – инвариантная мера Хаара на $X_{m,n}^{(3)}$.

В параграфе 3.4 доказан граничный вариант теоремы Мореры для матричного шара третьего типа.

Зафиксируем точку $\Lambda^0 \in X_{m,n}^{(3)}$ ($\Lambda^0 = (\Lambda_1^0, \dots, \Lambda_n^0)$) и рассмотрим следующее вложение единичного диска Δ в область $B_{m,n}^{(3)}$

$$\left\{ W \in C^{m^2n} : W_j = t\Lambda_j^0, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| < 1 \right\}. \quad (16)$$

Граница T диска Δ при этом вложении перейдет в окружность, лежащую на $X_{m,n}^{(3)}$. Если ψ — произвольный (голоморфный) автоморфизм области $B_{m,n}^{(3)}$, то множество вида (16) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на $X_{m,n}^{(3)}$.

Теорема 9. Если функция $f \in C(X_{m,n}^{(3)})$ удовлетворяет условию

$$\int_T f(\psi(t\Lambda^0))dt = 0 \quad (17)$$

для всех автоморфизмов ψ области $B_{m,n}^{(3)}$, то функция f голоморфно продолжается в $B_{m,n}^{(3)}$ до функции F класса $C(\overline{B_{m,n}^{(3)}})$.

В параграфе 3.5 найдены формулы Карлемана, восстанавливающие значение голоморфной функции в матричном шаре третьего типа используя свойства ядра Пуассона.

Обозначим

$$M_{0,U} = \{W \in M : W = \lambda U, \lambda = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, U \in X_1^+.$$

$$M'_0 = \{U \in X_1^+ : m_1(M_{0,U}) > 0\},$$

здесь m_1 – одномерная нормированную мера Лебега на единичной окружности. Введем одномерную функцию Карлемана:

$$g_0(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{0,U}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \quad h_0 = \exp g_0.$$

Теорема 10. Для точки 0 и всякой функции $f \in H^1(B_{m,n}^{(3)})$ справедлива формула Карлемана

$$f(0) = \frac{1}{\int_{M'_0} d\sigma_1} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(W) \left[\frac{h_0(W)}{h_0(0)} \right]^j d\sigma(W).$$

Пусть, как и прежде $\varphi_P(Z)$ – автоморфизм матричного шара $B_{m,n}^{(3)}$, переводящий точку $P \in B_{m,n}^{(3)}$ в 0. Обозначим

$$\sigma_P(K) = \sigma_1(\varphi_P^{-1}(K)), \quad K \in X_P^+,$$

$$M_{P,U} = \{W \in M : W = \varphi_P^{-1}(\lambda \varphi_P^{-1}(U)), |\lambda| = 1\},$$

$$U \in X_P^+ = \varphi_P(X_1^+), \quad M'_P = \{U \in X_P^+ : m_1(M_{P,U}) > 0\},$$

$$g_P(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{P,U}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \quad h_P = \exp g_P.$$

Теорема 11. Для всякой функции $f \in H^1(B_{m,n}^{(3)})$ при четном t и всякой точки $P \in B_{m,n}^{(3)}$ справедлива формула Карлемана

$$f(P) = \frac{1}{\int_{M'_P} d\sigma_P} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(W) \left[\frac{h_P(W)}{h_P(P)} \right]^j C(P, W) d\sigma(W).$$

Теорема 12. Для всякой функции $f \in H^1(B_{m,n}^{(3)})$ при нечетном t и всякой точки $P \in B_{m,n}^{(3)}$ справедлива формула Карлемана

$$f(P) = \frac{m+1}{\mu_P(\tilde{M}'_A)} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(W) \left[\frac{h_P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}}{h_P(P)} \right]^j C(P, W) d\sigma(W),$$

где $C(P, W)$ – ядро Коши-Сеге для матричного шара третьего типа.

Положим $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ – матрица порядка $m+1$,

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi' & W_1 \end{pmatrix} : W_1 \in M_{P,U}, \xi \in E \right\},$$

E состоит из k - векторов, удовлетворяющих условиям

$$\xi\xi' = 1, \xi W_1 = 0, W_1 \bar{W}_1 + \xi\xi' = I^{(m)}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена интегральным представлениям в матричных шарах и их приложениям. Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Найдены автоморфизмы для матричного шара второго и третьего типов.
2. В матричных шарах второго и третьего типов найдены ядра Бергмана и Коши-Сеге и получены соответствующие интегральные формулы.
3. Для матричного шара третьего типа найдено ядро Пуассона и получена интегральная формула Пуассона.
4. Для матричного шара третьего типа доказана граничная теорема Морера.
5. Рассмотрена задача голоморфного продолжения с части границы матричного шара третьего типа и доказана формула Карлемана.

Полученные результаты применяются в многомерном комплексном анализе и в теории интегральных представлений.

RAKHMONOV UKTAM SODIKOVICH

**ON INTEGRAL FORMULAS IN MATRIX BALLS ASSOCIATED
WITH CLASSICAL DOMAINS OF THE SECOND AND THIRD TYPES
AND THEIR APPLICATIONS**

01.01.01-Mathematical analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent - 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM212.

Dissertation has been prepared at Tashkent state technical university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) and the “ZiyoNet” Information and educational portal (<http://www.ziynet.uz/>).

Scientific supervisor:	Khudayberganov Gulmirza Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
Official opponents:	Ganixodjaev Rasul Nabievich Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
	Kurbanov Buxarbay Turgunbaevich Candidate of physical and mathematical sciences, docent
Leading organization:	Urganch State University

Defense will take place “____” _____ 2020 at ____ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+998 71) 246 53 21, fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No.____). (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on “____” _____ 2020 year.
(Mailing report No.____ on “____” _____ 2020 year).

A.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., Academician

N.K.Mamadaliyev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganixodjaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work are to find a holomorphic automorphism of the matrix ball of the second and third types, to find kernels of Bergman, Cauchy-Szego and Poisson for matrix balls of the second and third types and obtain the integral formulas for these balls, to prove the boundary Morera formula for matrix ball of the third type, to prove the Carleman formula, restoring the value of the function in the region by its values on part of boundary.

The object of the research work is matrix balls in the space of symmetric and skew-symmetric matrices, Bergman, Cauchy-Szego, and Poisson kernels.

Scientific novelty of the research work is as follows:

automorphisms for the matrix ball of the second and third types are found;

in matrix balls of the second and third types, Bergman and Cauchy-Szego kernels are found and corresponding integral formulas are obtained for these kernels;

an integral Poisson formula in a matrix ball of the third type is obtained;

boundary Morera's theorem is proved for a matrix ball of the third type;

the Carleman formula is found in a matrix ball of the third type.

Implementation of the research results. Based on the results of the obtained integral formulas in matrix balls associated with classical domains of the second and third types:

the integral formulas obtained for the matrix ball of the second and third types are used in the foreign project No. 11-01-00852-a "Multidimensional deductions in complex analysis, their applications in static physics and theories of difference and differential equations" (Reference No. 6051 of April 9, 2020, Siberian Federal University, Russia). The application of scientific results made it possible to obtain analogues of the Bergman, Cauchy-Szego and Poisson integral formulas for matrix functions in the theory of functions several complex variables;

the Carleman formula obtained for a matrix ball of the third type and boundary Morera's theorem were used in the foreign project No. 18-51-41011 "Multidimensional complex analysis" (Reference No. 6051 of April 9, 2020, Siberian Federal University, Russia). The application of these scientific results made it possible to apply the holomorphic continuability problem in a matrix ball of the third type.

The structure and volume of the thesis. The thesis consist of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 76 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Худайберганов Г., Хидиров Б.Б., Рахмонов У.С. Автоморфизмы матричных шаров // Вестник НУУЗ. 2010, №4, с.205-209. (01.00.00; №8).
2. Худайберганов Г., Рахмонов У.С. Ядра Бергмана и Коши-Сеге для матричного шара третьего типа // Узбекский математический журнал. 2012, № 2. с. 152-157. (01.00.00; №6)
3. Рахмонов У.С. Ядро Пуассона для матричного шара третьего типа // Узбекский математический журнал. 2012, № 3. с. 123-125. (01.00.00; №6).
4. Khudayberganov G., Rakhmonov U.S. The Bergman and Cauchy–Szego kernels for matrix ball of the second type // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2014, 7 (3), pp. 305–310. (№59. Scopus IF=0.470).
5. Khudayberganov G., Rakhmonov U.S., Matyakubov Z.K. Integral formulas for some matrix domains // American Mathematical Society. Contemporary Mathematics Volume 662, 2016, <http://dx.doi.org/10.1090/conm/662/13320>, pp. 89-95. (№40. Research Gate IF=4.54).
6. Khudayberganov G., Rakhmonov U.S., Otemuratov B. Boundary Morera theorem for the matrix ball of the third type // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2018, 11 (1), pp. 40-45. (№59. Scopus IF=0.470).
7. Khudayberganov G., Rakhmonov U.S. Carleman Formula for Matrix Ball of the Third Type // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Volume 264, Springer Nature Switzerland AG, 2018, pp. 101-108. (№3. Scopus IF=0.310).

II бўлим (2 часть; part 2)

8. Рахмонов У.С. Ядра Бергмана в матричном шаре третьего типа // *Научной конференции “Проблемы современной математики”. Кариш, 2011 г., 22-23 апреля, с. 213-214.*
9. Рахмонов У.С. Об интегральной формуле для матричного шара третьего типа // *Республиканской конференции “Современные проблемы комплексного и функционального анализа”. Нукус, 2012 г., 11-12 мая, с. 170-172.*
10. Худайберганов Г., Рахмонов У.С. Граничная теорема Морера для матричного шара третьего типа // *Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и*

информационных технологий-Аль-Хорезми 2012», (НУУЗ. им. М.Улугбека), том №1. с. 138-140.

11. Рахмонов У.С. Формула Карлемана для матричного шара третьего типа // *Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики и информационных технологий- Аль-Хорезми 2014», Самарканд, 15-17-сентября, 2014 г. 249-251.*
12. Рахмонов У.С., Рузметов К. Объем матричного шара третьего типа // *Republic scientific conference with participation of foreign scientists "Modern problems of dynamical systems and their applications", May 1-3, 2017, Tashkent. p. 41.*
13. Khudayberganov G., Rakhmonov U.S. Morera boundary theorem for matrix ball of the third type / / *Second USA-Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical Physics, August 8-12, 2017, Urgench, pp. 102-103.*
14. Rakhmonov U.S., Kurambayev Kh. On the Carleman formula for a matrix ball of the third type // *International Conference Complex Analysis and its Applications, June 2–9, 2018, Gelendzhik (Krasnodar), p. 90.*
15. Rakhmonov U.S. Ruzmetov K. About volumes of matrix balls second and third type // *Republic scientific conference "Actual problems and applications of analysis". October 4-5, 2019, Karshi. pp. 9-11.*

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«ЎзМУ хабарлари» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 26.06.2020 йил