В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

Рузиев Менглибай Холтожибаевич

ЧЕГАРАЛАНМАГАН СОҲАЛАРДА СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЛОКАЛ ВА НОЛОКАЛ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2020 йил

УДК: 517.956.6

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РУЗИЕВ МЕНГЛИБАЙ ХОЛТОЖИБАЕВИЧ

ЧЕГАРАЛАНМАГАН СОҲАЛАРДА СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЛОКАЛ ВА НОЛОКАЛ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2020 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.3.DSc/FM80 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида(www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Псху Арсен Владимирович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Дурдиев Дурдимурод Қаландарович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Зикиров Обиджан Салижанович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Фарғона давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___» _______соат___ _ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улугбек тумани, Мирзо Улугбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (99871) 262-75-44, факс: (99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (__________ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улугбек тумани, Мирзо Улугбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (99871) 262-75-44).

Диссертация автореферати 2020 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2020 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

Ў.А. Розиқов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.Қ.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

А. Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этиш муҳим эканлигини билдиради. Аралаш типдаги тенгламалар газлар динамикаси ва аэродинамик масалаларни ечишда кенг тадбиқга эга. Ҳозирги вақтда дунёнинг кўп илмий мактабларида нолокал чегаравий масалаларни, шу жумладан чегаравий шартларда каср тартибли интеграллаш ва дифференциаллаш оператори иштирок этган масалаларни ечиш йуналишлари кенг ривожланмоқда.

Нолокал чегаравий масалалар назариясига бўлган эътибор хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг математик физика, химия ва бошқа фанларнинг турли хил масалаларини ечишда муҳим тадбиқларини топганлигидир. Бу масалалар нефт ховзаларини математик моделлаштиришда, ер ости сувларини фильтрлашда, мураккаб тузилишга эга объектларда иссиқлик ва масса алмашинишида, симлардаги электр тебранишларида, ғовак муҳит билан ўралган каналларда суюқлик ҳаракати ва бошқа ҳодисаларда катта аҳамиятга эга.

Ҳозирги вақтда Ўзбекистонда илмий ва амалий тадбиқларга эга бўлган фундаментал фанларга бўлган эътибор янада кучайтирилмоқда. Кўпгина муаммоларни ечиш жараёнида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг махсус синфини ташкил этувчи сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этиш, уларни ечишнинг самарали усулларини топиш муҳим вазифалардан бири саналади. Математик фанларнинг устувор йўналишлари бўйича, асосан, математик физика ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, ҳамда амалий математика ва математик моделлаштириш бўйича ҳалкаро стандартлар даражасидаги илмий ишлар олиб бориш Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади[1]. Қарор ижросини таъминлаш мақсадида аралаш типдаги тенгламалар назариясини ривожлантириш, улар учун коррект локал ва нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисидаги» Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789 «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909 «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682 «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги №292 «Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори.

амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2019 йил 9 июлдаги №ПҚ-4387 "Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги , 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон "Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив –ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2]

Аралаш типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалалар бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан: Technical University Bergakademie Freiberg (Германия), Vilnius University (Литва), Universita degli Studi di Torino (Италия), University of Deusto, University of Santiago de Compastela (Испания), Institut de Mathematiques, Universite de Bordeaux (Франция), University of California, University of Maryland (США), Кабардин-Балкар давлат университети, Бошқирдстон давлат университети, Шимолий-Шарқий федерал университети, Самара давлат иқтисодиёт университети, Самара давлат университети, Самара архитектура-қурилиш университети, Қозон федерал университети, Орел давлат университети, Тбилиси давлат университети, Москва давлат университети, Россия Фанлар Академияси Математика институти, Новосибирск давлат университети, Беларусь давлат университети, Россия Фанлар академиясининг Кабардин-Балкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти ва Математика ва математик моделлаштириш институти (Қозоғистон) олиб борилмоқда.

Аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва улар билан боғлиқ бўлган чегаравий масалалар тадқиқоти бўйича дунёда қатор натижалар олинган, жумладан: аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечиш назарияси ишлаб чиқилган (Турин университети, Италия); эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун максимум принципи исботланган (Москва давлат университети, Россия Фанлар академиясининг

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, www.inderscience.com.jhome; Boundary value problems, www.link.springer.com.journal; Journal of Ellipric and Parabolic Equations, www.springer.com.journal; Journal of Partial Differential Equations, www.global-sci.org.jpde; Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625, манбалар асосида ишлаб чиқилган.

В.А.Стеклов номидаги Математика институти); аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганилган(Уппсала университети, Швеция; Россия Фанлар академиясининг Кабардин-Балкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти, Москва давлат университети, Новосибирск давлат университети, Самара давлат университети, Орел, Қозон, Самара давлат университетлари); аралаш ва аралаш-таркибли тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечиш усули ишлаб чиқилган (Россия Фанлар академияси Сибирь бўлими Математика институти, Россия Фанлар академиясининг Кабардин-Балкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти); параболо-гиперболик ва эллиптик-гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш усуллари топилган (Россия Фанлар академияси Сибирь бўлими Математика институти, Россия Фанлар академиясининг Кабардин-Балкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти; Математика ва математик моделлаштириш институти, Қозоғистон);
каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар назариясига оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган.

Ҳозирги вақтда дунёнинг кўпгина жойларида устивор йуналишларда бир қатор илмий тадқиқодлар олиб борилмоқда, жумладан, реал жараёнларни аниқроқ акс эттирадиган математик моделларни яратиш ва уларни ифодаловчи масалаларни ечиш; чегаравий масалаларни аналитик ечиш усулларини қуриш; сонли моделларнинг турғун алгоритмларини тузиш каби илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Аралаш типдаги тенгламалар учун дастлабки фундаментал тадқиқодлар Ф.Трикоми томонидан бажарилган. Кейинчалик бу ишлардан кейин швед олими С.Геллерстедт қаралаётган соҳанинг гиперболик қисмида изланаётган ечимнинг қийматлари тенгламанинг ички характеристикаларида берилган шартлар билан қўйилган чегаравий масалани тадқиқ қилган. С. Геллерстедт масаласи газ динамикаси соҳасида муҳим тадбиқларга эга. Аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий шартларда дастлабки силжишли масалалар В.И. Жегалов ва А.М.Нахушев ишларида батафсил ўрганилган. Бу изланишлардан кейин силжишли масалалар чекли ва чексиз соҳаларда кўпчилик олимлар томонидан тадқиқ қилинган. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси А.В.Бицадзе ва А.А.Самарский ишларидан кейин кенг ривожланишларга эга бўлди. Улар томонидан тенг ўлчовли эллиптик тенгламалар учун янги масалалар баён этилган ва тадқиқ қилинган.

Кейинчалик аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назарияси С.П.Пулкин, В.Ф.Волкодавов, М.С.Салахитдинов, Т.Ж.Жўраев, В.Н.Врагов, М.М. Смирнов, Т.Ш.Кальменов, М.Проттер, М.М.Мередов, Е.И.Моисеев, А.П. Солдатов, К.Б.Сабитов, О.А.Репин, А.Н.Зарубин, А.А.Полосин, А.В.Псху, М.А. Садыбеков, М.Мирсабуров, А.К.Ўринов, Б.И.Исломов, А.Хасанов, А.С.Бердышев ва уларнинг шогирдлари томонидан ривожлантирилган. Бузиладиган эллиптик тенгламалар ва аралаш типдаги тенгламалар учун чекли ва чексиз соҳаларда локал ва нолокал чегаравий масалалар М.Х.Абрегов, С.К.Кумыкова, А.М.Нахушев, И.Е.Солодовников, М.А.Усанеташвили, С.Геллерстедт ишларида ўрганилган. Кичик ҳадли сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар ва бузилиш чизиғига эга бўлган тенгламалар учун чекли соҳаларда чегаравий масалаларни ечишга В.И.Евсин, Х.М.Наджафов, М.Мирсабуров, О.А.Репин ва уларнинг шогирдларининг бир қатор илмий ишлари бағишланган.

Кейинги йилларда бизнинг республикамизда ва хорижий давлатларда кичик ҳадли сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назарияси фаоллик билан ўрганилмоқда. Эллиптик қисми юқори ярим текисликдан, гиперболик қисми эса қаралаётган тенгламанинг характеристикалари ва абсцисса ўқининг кесмаси билан чегараланган аралаш чегараланмаган соҳада кичик ҳосилалар олдида сингуляр коэффициентга эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласи Р.С.Хайруллин ишларида ўрганилди. Кичик ҳадли ҳосила олдида сингуляр коэффициентли аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун эллиптик қисми вертикал ярим полосадан, гиперболик қисми эса характеристик учбурчак ва бузилиш чизиғининг кесмасидан иборат соҳада М.Сайго томонидан киритилган умумлашган каср тартибли операторлар ёрдамида бузилиш чизиғининг кесмасида изланаётган функция кийматини ва тенгламанинг характеристикасида изланаётган функция кийматини боғлайдиган шартлар асосидаги чегаравий масалалар О.А.Репин томонидан батафсил ўрганилган. Сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун гиперболик қисми вертикал ярим полосадан, эллиптик қисми эса тўғри тўртбурчакдан иборат бўлган соҳада нолокал чегаравий масалалар А.А.Абашкин ишларида атрофлича тадқиқ қилинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ФА-Ф1-Ф002 рақамли «Типи бузилувчи тенгламалар ва аралаш типдаги тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларнинг ечилиши ва спектрал хоссалари ва улар билан боғлиқ махсус функцияларни тадқиқ қилиш» , Ф4-ФА-Ф010 рақамли «Хусусий ҳосилали ва сингуляр махсуслиги бўлган дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ва эркин чегарали чизиқли бўлмаган масалалар» ва ОТ-Ф4-88 рақамли “Иккинчи ва юқори тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларнинг тадқиқлари” мавзусидаги фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади сингуляр коэффициентли аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун коррект қўйилган локал ва нолокал чегаравий масалаларни топиш ва уларнинг бир қийматли ечилишини исботлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун бузилиш чизиғининг кесмасида ва чегаравий характеристика қисмида берилган шартлар билан масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исбот қилиш;

сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун чегаравий характеристиканинг қисмида силжишли чегаравий масалани ўрганиш;

эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун ички характеристикаларда силжишли чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш;

аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун бузилиш чизиғида ва параллел характеристикаларда Франкл ва Бицадзе-Самарский шартли чегаравий масаланинг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

эллиптик қисми текисликнинг чорагидан ва вертикал ярим полосадан иборат аралаш чегараланмаган соҳаларда сингуляр коэффициентли аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш.

Тадқиқотнинг объекти кичик хадли сингуляр коэффициентли аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида ўзгарувчиларни ажратиш ва сингуляр интеграл тенгламалар усулларидан ҳамда экстремум принципидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Чегараланмаган соҳада сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун бузилиш чизиғида ва чегаравий характеристиканинг бўлагида берилган шартлар билан қўйилган чегаравий масаланинг бир қийматли ечимга эга эканлиги исботланган;

Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун чегараланмаган соҳада чегаравий характеристиканинг бўлагида силжишли чегаравий шарт берилган масаланинг ягона ечими мавжудлиги исботланган;

Эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун ички характеристикаларда силжишли шарт берилган масаланинг бир қийматли ечимга эга эканлиги исботланган;

Аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун параллел характеристикаларда ва бузилиш чизиғида Бицадзе-Самарский ва Франкл шартлари берилган чегаравий масала ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари исботланган;

Эллиптик қисми текисликнинг биринчи чорагидан иборат чегараланмаган соҳада сингуляр коэффициентли аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган;

Аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун ўнг ярим текисликда Франкл масаласининг бир қийматли ечимга эга эканлиги исботланган;

Сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун эллиптик қисми ярим полосадан иборат чегараланмаган соҳада локал ва нолокал чегаравий масалалар ечимлари мавжуд ва ягоналиги исботланган;

Тадқиқотнинг амалий натижалари сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечиш учун характеристик бўлмаган қисмида Фредголм бўлмаган оператор иштирок этган ва битта яккаланган нуқтада биринчи тартибли махсуслиги бўлган сингуляр интеграл тенгламани регуляризация қилиш алгоритми ишлаб чиқилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Олинган натижаларнинг ишончлилиги математикада қабул қилинган анализ усуллари ва аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назарияси қўлланилганлиги, теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботлангани билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ушбу ишда олинган илмий натижалардан сингуляр коэффициентли аралаш эллиптик-гиперболик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Диссертация ишида олинган натижаларнинг амалий аҳамияти илмий натижаларни аралаш типдаги тенгламалар орқали ифодаланадиган физик, техник ва биологик жараёнларни ўрганишда тадбиқ этилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Чегараланмаган соҳаларда сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалалар бўйича олинган натижалар қуйидаги илмий тадқиқот лойиҳаларида жорий қилинган:

Чегараланмаган соҳаларда сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишга қўлланилган усул ва мунособатлар “ Эктремал жараёнларнинг математик моделларининг аралаш типдаги нолокал дифференциал тенгламалари” (№ 0213-2014-0002, 2016-2018 йиллар, РФА Кабардин-Балкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти, Россия) бўйича илмий тадқиқот ишларини бажаришда бузиладиган аралаш типдаги тенгламалар синфи учун локал ва нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ қилишда қўлланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши аралаш типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалаларни самарали тадқик қилиш имконини берган;

Сингуляр коэффициентли эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун коррект қўйилган локал ва нолокал чегаравий масалаларни ечиш усуллари асосида олинган натижалар АААА-Б19-219021990010 - 4 рақамли “Тебранишлар системаси назариясида каср ҳисобнинг тадбиқи” (Россия, Витус Беринг номли Камчатка давлат университетининг 01-04\253, 13.12.2020 маълумотномаси) хорижий лойиҳада фойдаланилган. Илмий натижалардан фойдаланиш эллиптик-гиперболик тенгламалар учун янги чегаравий масалаларни ечишга хизмат қилган;

Диссертацияда олинган назарий натижалар Қозоғистон Республикаси фан ва таълим вазирлиги (2018-2020 йй) Хўжа Ахмад Ясави номли Халқаро қозок-турк университети АР05133873 рақамли “Гравиметрияда тадбиқ қилинадиган каср тартибли эллиптик операторларнинг математик модели учун чизиқли бўлмаган тескари масалаларни ечишнинг сонли усуллари ва параллел алгоритмлари” лойиҳаси бўйича илмий тадқиқот ишларини бажаришда фойдаланилган. Хусусан, эллиптик соҳада Дирихле масаласи ечимидан фойдаланиб, аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечиш усуллари ва мунособатлари каср даражали эллиптик оператордан иборат биринчи тартибли эволюция тенгламаси учун тўғри масалаларни тадқиқ қилишда қўлланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши эллиптик типдаги тенгламалар учун янги коррект чегаравий масалаларни ечиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 27 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 19 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 48 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 21 та илмий мақола, жумладан, 13 таси хорижий журналларда, 8 таси республика журналларида чоп қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 158 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотларнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун силжишли чегаравий масалалар”** деб номланувчи биринчи бобида сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар ечилган. Аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун чегаравий ва ички характеристикаларда силжишли масалалар тадқиқ қилинган.

Бу бобнинг биринчи параграфида диссертация асосий натижаларини олиш учун зарур бўлган баъзи бир маълум маълумотлар келтирилган.

Иккинчи параграфда сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун қаралаётган соҳанинг гиперболик қисмида характеристика бўлагида ва бузилиш чизиғининг кесмасида берилган шартли чегаравий масала ўрганилган. Тадқиқ қилинаётган масала ечимининг ягоналиги экстремум принципи ёрдамида исботланган. Масала ечимининг мавжудлигини исботлаш жараёнида сингуляр интеграл тенгламалар, Винер-Хопф ва Фредгольм интеграл тенгламалар назарияси қўлланилган.

$D = D^{+} \cup D^{-} \cup I$ $z = x + iy$ комплекс текисликнинг соҳаси, бу ерда D^{+} соҳа $y > 0$ ярим текисликдан иборат, D^{-} соҳа эса $y < 0$ ярим текисликнинг чекли соҳаси бўлиб ,

$$(signy)|y|^{m} u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

тенгламанинг $A(-1,0)$, $B(1,0)$ нуқталардан чиқувчи AC ва BC характеристикалари ва $y = 0$ тўғри чизиғининг AB кесмаси билан чегараланган, $I = \{(x, y) : -1 < x < 1,\ y = 0\}$ оралиқдан иборат бўлсин. (1) тенгламада m, α_0, β_0 лар ҳақиқий сонлар бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантиради $m > 0,\ -m/2 < \beta_0 < 1,\ |\alpha_0| < (m+2)/2$.

$\alpha_0 0 \beta_0$ параметрик текисликда қуйидаги тўғри чизиқлар билан чегараланган

$$A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad A_0B_0 : \beta_0 = 1,$$

$A_0B_0C_0$ учбурчакни қараймиз ва $T(\alpha_0, \beta_0)$ нуқтанинг бу учбурчакда жойлашиш ўрнига кўра (1) тенглама учун чегаравий масалаларни қараймиз ва тадқиқ қиламиз.

$T(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta A_0B_0C_0$ бўлсин.

Қуйидагича белгилашлар киритамиз: $I_1=\{(x,y):-\infty<x<-1,\ y=0\}$, $I_2=\{(x,y):1<x<\infty,\ y=0\}$, $C_0(C_1)$ - $AC(BC)$ характеристиканинг $E(c,0)$ нуқтадан чиқувчи характеристика билан кесишиш нуқтаси, бу ерда $c\in I$ - ихтиёрий фиксирланган сон.

$p(x)\in C^1[-1,c]$- диффеоморфизм $[-1,c]$ кесмани $[c,1]$ кесмага акслантиради, шу билан бирга $p'(x)<0,\ p(-1)=1,\quad p(c)=c$. Ушбу $p(x)=\delta-kx$ чизиқли функцияни мисол сифатида келтирамиз, бу ерда $k=(1-c)/(1+c)$, $\delta=2c/(1+c)$.

TF **масала.** D соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$, функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar D)$, бу ерда $\bar D=\bar D^-\cup D^+\cup\bar I_1\cup\bar I_2$,
   ($\bar I_1=(-\infty,-1],\ \bar I_2=[1,\infty)$);
2) $C^2(D^+)$ синфга тегишли ва D^+ соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради;
3) D^- соҳада R_1 синфга тегишли умумлашган ечимдан иборат;
4) ушбу тенгликлар бажарилади
$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0\ ,\ y\geq0,\ R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2};\qquad(2)$$
5) ушбу чегаравий шартларни
$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x)\ ,\ \ x\in\bar I_i,\ i=1,2,\qquad(3)$$
$$u(x,y)\big|_{AC_0}=\psi(x),\quad -1\leq x\leq(c-1)/2,\qquad(4)$$
$$u(p(x),0)=\mu u(x,0)+f(x)\ ,\ -1\leq x\leq c\qquad(5)$$
ва уланиш шартини
$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y,\quad x\in I/\{c\},\qquad(6)$$
қаноатлантиради, бу лимитлар $x=\pm1,\ x=c$ нуқталарда $1-\alpha-\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2))$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1,2$- берилган функциялар , шу билан бирга $f(x)\in C[-1,c]\cap C^{(1,\delta_1)}(-1,c)$, $\delta_1\in(0,1]$, $f(-1)=0$, $f(c)=0$, $\psi(x)\in C[-1,(c-1)/2]\cap C^{(1,\delta_2)}(-1,(c-1)/2)$, $\delta_2\in(0,1]$, $\psi(-1)=0$, $\mu-$ ўзгармас сон, $\varphi_i(x)$ функцияларни $x=-1$, $x=1$ нуқталар атрофида $\varphi_1(x)=(1+x)\tilde\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)=(1-x)\tilde\varphi_2(x)$ кўринишларда ифодалаймиз ва $[-N,-1]$, $[1,N]$, $N>1$ ихтиёрий кесмаларда Гёльдер шартини ва барча етарлича катта $|x|$ ларда $|\varphi_i(x)|\leq M|x|^{-\delta}$ тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда δ,M - мусбат ўзгармас сонлар.

D^- соҳада (1) тенглама учун ушбу $\lim\limits_{y\to-0}u(x,y)=\tau(x)$, $x\in\bar I$, $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y=\nu(x)$, $x\in I$, бошланғич шартларни қаноатлантирувчи шакли ўзгарган Коши масаласининг ечими ушбу

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)(1+t)^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt+$$
$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)(1+t)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt, \qquad (7)$$

Дарбу формуласи билан ифодаланади, бу ерда $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)2^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$,

$\gamma_2=-\dfrac{\Gamma(2-\alpha-\beta)2^{\alpha+\beta-1}}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$, $\Gamma(z)$ – Эйлернинг гамма функцияси.

Агар $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар $(-1,1)$ оралиқда узлуксиз функциялар бўлса, (7) кўринишдаги ифодани $y<0$ да (1) тенгламанинг умумлашган ечими деб атаймиз. Умумлашган ечим бирор силлиқликка эга бўлиши учун $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар бирор аниқликда силлиқликка эга бўлиши зарур.

R_1 **синф.** Агар $\tau(t)$ функция $-1\le t<1$ да $\alpha_1>1-\beta$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирса, $\nu(t)$ функция эса $-1\le t<1$ да $\alpha_2>\alpha$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирса, $y<0$ да (1) тенгламанинг (7) умумлашган ечими R_1 синфга тегишли бўлади.

Бу параграфнинг асосий натижалари қуйидагича:

1.1-теорема. Ушбу $\varphi_i(x)\equiv 0$, $i=1,2$, $\psi(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$, $0<\mu<1$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда *TF* масаласи фақат тривиал ечимга эга бўлади.

1.2-теорема. $p(x)=\delta-kx$, $\delta=2c/(1+c)$, $k=(1-c)/(1+c)$ бўлсин. Сўнгра $\alpha_0\le 0$ ёки $\alpha_0>0$ ва $\beta_0>\dfrac{2-m}{4}$, $\mu\in(0,1)$ бўлсин. У ҳолда *TF* масаланинг ечими мавжуд.

Учинчи параграфда сингуляр коэффициентли Геллерстед тенгламаси

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\beta_o}{y}u_y=0 \qquad (8)$$

учун юқорида кўрсатилган D соҳада силжишли масала ўрганилади. (8) тенгламада m,β_0 лар $m>0, -m/2<\beta_0<1$ шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлардир.

A **масала.** Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$, бу ерда $\bar{D}=\bar{D}^-\cup D^+\cup\bar{I}_1\cup\bar{I}_2$;
2) $u(x,y)$ функция $C^2(D^+)$ синфга тегишли ва бу соҳада (8) тенгламани қаноатлантиради;
3) $u(x,y)$ функция D^- соҳада R_1 синфга тегишли умумлашган ечим;
4) ушбу тенгликлар бажарилади

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ y\ge 0,\quad R^2=x^2+4y^{m+2}/(m+2)^2; \qquad (9)$$

5) $u(x,y)$ функция ушбу чегаравий шартларни

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x),\quad \forall x\in\bar{I}_i,\ i=1,2, \qquad (10)$$

$$u[\theta_0(x)]+\mu u[\theta_1(p(x))]=\psi(x) \quad , \quad -1\le x\le c, \tag{11}$$
$$u(p(x),0)=\rho u(x,0)+f(x), \quad -1\le x\le c \tag{12}$$

ва уланиш шартини

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y, \qquad x\in I\setminus\{c\}, \tag{13}$$

қаноатлантиради, бу лимитлар $x=\pm1, x=c$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta=(m+2\beta_0)/(2(m+2))$, $\psi(x), f(x), \varphi_i(x)$ лар эса берилган функциялар, $\theta_0(x_0)$ ва $\theta_1(x_0)$ лар мос равишда AC ва BC характеристикаларнинг $(x_0,0), x_0\in I$ нуқтадан чиқувчи характеристика билан кесишиш нуқтасининг аффикслари бўлиб,

$$\theta_0(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)}, \qquad \theta_1(x_0)=\frac{1+x_0}{2}-i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

кўринишларга эга.

Қуйидаги теорема ўринли:

1.3-теорема. Ушбу $p(x)=\delta-kx$, $\delta=2c/(1+c)$, $k=(1-c)/(1+c)$, $\varphi_i(x)\equiv0$, $i=1,2$, $\psi(x)\equiv0$, $f(x)\equiv0$, $0<\rho<1$, $\mu\ge0$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда A масаласи фақат тривиал ечимга эга бўлади.

1.4-теорема. Ушбу $p(x)=\delta-kx$, где $k=(1-c)/(1+c)$, $\delta=2c/(1+c)$, $k^{1/2-\alpha}\rho+k^{\alpha-1/2}\mu<1$, $0\le\mu\le1$, $0<\rho<1$, $\alpha=\dfrac{1-\beta_0}{2(m+2)}$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда A масаласининг ечими мавжуд.

Тўртинчи параграфда EC_0 ва EC_1 ички характеристикаларда силжишли шартли ва $y=0$ бузилиш чизиғининг AB кесмасида локал силжишли шартли янги чегаравий масала тадқиқ қилинган. Юқорида кўрсатилган D соҳада (8) тенгламани қараймиз.

GN **масала.** D соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar D)$, бу ерда $\bar D=\bar D^-\cup D^+\cup\bar I_1\cup\bar I_2$;
2) $u(x,y)$ функция $C^2(D^+)$ синфга тегишли ва бу соҳада (8) тенгламани қаноатлантиради;
3) $u(x,y)$ функция D^- соҳада R_1 тегишли умумлашган ечимдан иборат ;
4) ушбу тенгликлар бажарилади
$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0 \ , \ y\ge0, \ R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2};$$
5) ушбу чегаравий шартларни
$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x), \quad x\in\bar I_i, \quad i=1,2,$$
$$u[\theta_1^*(x)]+\mu u[\theta_0^*(p(x))]=\psi(x), \quad -1\le x\le c,$$
$$u(p(x),0)=\rho u(x,0)+f(x), \quad -1\le x\le c$$

ва уланиш шартини $\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y$, $x\in I\setminus\{c\}$, қаноатлантиради, шу билан бирга $x=\pm1, x=c$ да бу лимитлар $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta=(m+2\beta_0)/(2(m+2))$, $\psi(x), f(x), \varphi_i(x)$ лар берилган функциялар, μ,ρ лар ўзгармас мусбат сонлар, $\theta_1^*(x)$ ва $\theta_0^*(p(x))$ эса мос равишда EC_0 ва EC_1 характеристикаларнинг $(x_0,0)$ ва $(p(x_0),0)$, $x_0\in(-1,c)$ нуқталардан чиқувчи характеристикалар билан кесишиш нуқталарининг координаталари бўлиб, улар қуйидаги кўринишга эга $\theta_1^*(x_0)=\left(\dfrac{c+x_0}{2};-\left(\dfrac{(m+2)(c-x_0)}{4}\right)^{2/(m+2)}\right)$,

$$\theta_0^*(p(x_0))=\left(\frac{c+p(x_0)}{2};-\left(\frac{(m+2)(p(x_0)-c)}{4}\right)^{2/(m+2)}\right).$$

Тўртинчи параграфнинг асосий натижаси қуйидагича:

1.5-теорема. 1.3 теореманинг шартлари бажарилган бўлсин. У ҳолда GN масаласи фақат тривиал ечимга эга.

1.6-теорема. Ушбу $p(x)=\delta-kx$, $k^{\frac{1}{2}-3\alpha}\rho+k^{3\alpha-\frac{1}{2}}\mu<1$, $0\le\mu<1$, $0<\rho<1$, $\beta_0>(1-m)/3$, бу ерда $\delta=2c/(1+c)$, $k=(1-c)/(1+c)$, $\alpha=\dfrac{1-\beta_0}{2(m+2)}$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда GN масаласининг ечими мавжуд.

Ушбу бобнинг бешинчи параграфида (8) тенглама учун β параметрнинг $\beta_0=-m/2$ қийматида силжишли масала ечилади.

Ушбу тенгламани

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}-\frac{m}{2y}u_y=0\,,m>0 \qquad (14)$$

1 – бобнинг 1.2 параграфида кўрсатилган D соҳада қараймиз.

A_1 **масала.** D соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$, бу ерда $\bar{D}=\bar{D}^-\cup D^+\cup\bar{I}_1\cup\bar{I}_2$;
2) $u(x,y)$ функция $C^2(D^+)$ синфга тегишли ва бу соҳада (14) тенгламани қаноатлантиради;
3) $u(x,y)$ функция D^- соҳада R_1 синфга тегишли умумлашган ечимдан иборат;
4) ушбу тенгликлар бажарилади
$\lim\limits_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ y\ge 0,\quad R^2=x^2+4y^{m+2}/(m+2)^2$;
5) $u(x,y)$ функция ушбу чегаравий шартларни

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x),\quad \forall x\in\bar{I}_i,\ i=1,2\,,$$

$$u[\theta_0(x)]+\mu u[\theta_1(p(x))]=\psi(x)\quad ,\quad -1\le x\le c\,,$$

$$u(p(x),0)-u(x,0)=u(c,0)+f(x),\quad -1\le x\le c\,,$$

ва қуйидаги уланиш шартини

$\lim\limits_{y\to+0} y^{-m/2}u_y = \lim\limits_{y\to-0}(-y)^{-m/2}u_y$, $\quad x\in I\setminus\{c\}$ қаноатлантиради, шу билан бирга, бу лимитлар $x=\pm1, x=c$да бирдан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, $\psi(x), f(x), \varphi_i(x)$ лар берилган функциялар, μ - мусбат ўзгармас сон.

Бу параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремаларда келтирилган.

1.7-теорема. Ушбу шартлар $\varphi_i(x)\equiv 0,\ i=1,2,\quad \psi(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0,\ \mu\geq 0$ ўринли бўлсин. У ҳолда A_1 масаласи фақат тривиал ечимга эга бўлади.

1.8-теорема. Ушбу шартлар $p(x)=\delta-kx$, $0\leq\mu<k^{\frac{1}{4}}(1-k^{\frac{1}{4}})$ бажарилган бўлсин, бу ерда $k=(1-c)/(1+c), \delta=2c/(1+c)$. У ҳолда A_1 масаласининг ечими мавжуд.

Диссертациянинг **"Аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун нолокал чегаравий масалалар"** номли иккинчи бобида EC_0 характеристика чегаравий шартдан озод қилинган ва бу етишмайдиган Геллерстедт шарти параболик бузилиш чизиғининг кесмасида локал силжишли ички чегаравий шарт билан алмаштирилган шартлар асосидаги масала ечилган. Чегараланмаган соҳада сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун Бицадзе-Самарский масаласи типидаги чегаравий масалалар тадқиқ қилинган.

Ушбу бобнинг 2.1 параграфида сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун бузилиш чизиғида ва ички характеристикада берилган шартлар билан масала ечилган.

Биринчи бобнинг 1.2 параграфида кўрсатилган D соҳада (1) тенгламани қараймиз. $[c,1]$кесмани $[-1,c]$кесмага акслантирувчи $q(x)\in C^1[c,1]$ диффеоморфизмни қараймиз, шу билан бирга $q'(x)<0$, $q(c)=c$, $q(1)=-1$. Бундай функцияларга мисол сифатида ушбу $q(x)=p-kx$ чизиқли функцияни олиш мумкин, бу ерда, $k=\dfrac{1+c}{1-c}$, $p=\dfrac{2c}{1-c}$, $p-k=-1$, $p-kc=c$.

B **масала**. D соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$, бу ерда $\bar{D}=\bar{D}^-\cup D^+\cup\bar{I}_1\cup\bar{I}_2$;
2) $u(x,y)\in C^2(D^+)$ ва бу соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради;
3) $u(x,y)$ функция D^-соҳада R_1 синфга тегишли умумлашган ечимдан иборат;
4) ушбу
   $\lim\limits_{R\to\infty}u(x,y)=0$, $\quad y\geq 0$, $\quad R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$ тенгликлар бажарилади;
5) қуйидаги чегаравий шартларни
   $u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x), \quad x\in\bar{I}_i,\ i=1,2,$
   $u(x,y)\big|_{EC_1}=\psi(x),\ c\leq x\leq(c+1)/2,$

$u(q(x),0)=\mu u(x,0)+f(x)$, $c\le x\le 1$

ва уланиш шартини

$\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y$, $x\in I\setminus\{c\}$ қаноатлантиради, шу билан бирга, бу лимитлар $x=\pm1$, $x=c$ бўлганда $1-\alpha-\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2))$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(x)$ - берилган функциялар, шу билан бирга $f(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\delta_1}(c,1)$, $\delta_1\in(0,1]$, $f(c)=0$, $f(1)=0$, $\psi(x)\in C^1[c,(c+1)/2]\cap C^{1,\delta_0}(c,(c+1)/2)$, $\psi(c)=0$, $\mu-const$, $\varphi_i(x)$ функцияларни $x=-1$, $x=1$ нуқталар атрофида $\varphi_1(x)=(1+x)\tilde{\varphi}_1(x)$, $\varphi_2(x)=(1-x)\tilde{\varphi}_2(x)$ кўринишида ифодалаймиз ва улар ихтиёрий $[-N,-1]$, $[1,N]$, $N>1$ кесмаларда Гёльдер шартини қаноатлантиради ва барча етарлича катта $|x|$ лар учун $|\varphi_i(x)|\le M|x|^{-\delta}$ тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда $\delta, M-$ мусбат ўзгармаслар.

Қуйидаги теорема ўринли.

2.1-теорема. Ушбу $\varphi_i(x)\equiv0$, $i=1,2$, $\psi(x)\equiv0$, $f(x)\equiv0$, $0<\mu<1$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда B масаласи фақат тривиал ечимга эга бўлади.

2.2-теорема. Ушбу $q(x)=p-kx$, $0<\mu<1$, $\beta_0>\dfrac{2-m}{4}$ шартлар бажарилган бўлсин, бу ерда $p=\dfrac{2c}{1-c}$, $k=\dfrac{1+c}{1-c}$. У ҳолда B масаласининг ечими мавжуд.

Ушбу бобнинг 2.2 параграфида (8) тенглама учун биринчи бобнинг 1.2 параграфида кўрсатилган чегараланмаган D соҳада бузилиш чизиғида ва параллел характеристикаларда Бицадзе-Самарский ва Франкл шартлари билан берилган масала ечилган.

FBS **(Франкл, Бицадзе-Самарский) масала.** D соҳада биринчи бобнинг 1.3. параграфида келтирилган A масаланинг 1) - 4) хоссаларидан иборат, (10), (13) шартларни ва қуйидаги чегаравий шартларни

$(1+x)^{\beta}D_{-1,x}^{1-\beta}u[\theta(x)]=\mu(x)(x-c)^{\beta}D_{c,x}^{1-\beta}u[\theta^*(x)]+\psi(x),\quad c<x<1,$

$u(q(x),0)=\mu_0u(x,0)+f(x),\quad c\le x\le1,$ қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин, бу ерда $f(x)$, $\psi(x)$ – берилган функциялар, шу билан бирга, $f(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\alpha_1}(c,1)$, $f(c)=0$, $f(1)=0$, $\mu(x)$, $\psi(x)\in C^1[c,1]\cap C^{1,\delta_0}(c,1)$, $\mu_0=const$, $D_{-1,x}^{1-\beta}$ ва $D_{c,x}^{1-\beta}$ лар Риман-Лиувилл маъносидаги каср дифференциал операторлари, $\beta=(m+2\beta_0)/(2(m+2))$, $\theta(x_0)$ $\left(\theta^*(x_0)\right)$ лар эса C_0C (EC_1) характеристикаларнинг $(x_0,0)$, (бу ерда $x_0\in(c,1)$) нуқтадан чиқувчи характеристика билан кесишиш нуқталари бўлиб, улар

$$\theta(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)^{2/(m+2)},\ \theta^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(x_0-c)\right)^{2/(m+2)}$$

кўринишга эга.

Бу параграфнинг асосий натижаларини келтирамиз.

2.3-теорема . Ушбу $\varphi_i(x)\equiv 0,\ i=1,2,\ \psi(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0,\ 0<\mu_0<1,$ $\mu(x)\leqslant 0$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда FBS масаласи фақат тривиал ечимга эга бўлади.

2.4-теорема. Ушбу $q(x)=p-kx,\ \ \mu(x)\le 0\ ,\ 0<\mu_0<1,$ $\mu_0 k^{\frac{1}{2}-3\alpha}(1+2\sin(\beta\pi)\omega(c))<1,\ \ \beta_0>-\dfrac{m-1}{3},$ бу ерда $p=2c/(1-c),$ $k=(1+c)/(1-c),\ \ \omega(c)=1/(1-\mu(c))\ ,\ \beta=\dfrac{m+2\beta_0}{2(m+2)},\alpha=\dfrac{1-\beta_0}{2(m+2)}$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда FBS масаласининг ечими мавжуд.

Иккинчи бобнинг 2.3 параграфи (1) тенглама учун унинг параметрлари $m>0$, $1<\beta_0<(m+4)/2$, $|\alpha_0|<(m+2)/2$ шартларни қаноатлантирган ҳолда Бицадзе – Самарский масаласи типидаги масалани ўрганишга бағишланган.

$\alpha_0 0\beta_0$ параметрик текисликда $A_0D_0:\beta_0-\alpha_0=\dfrac{m+4}{2},$ $B_0D_0:\beta_0+\alpha_0=\dfrac{m+4}{2},\ A_0B_0:\beta_0=1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган $A_0B_0D_0$ учбурчакни қараймиз ва бу учбурчакда $T(\alpha_0,\beta_0)$ нуқтанинг жойлашиш ўрнига кўра (1) тенглама учун коррект масала ифодалаймиз ва уни тадқиқ қиламиз.

$P(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta A_0B_0D_0$ бўлсин.

BC **масала.** D соҳада (1) тенгламанинг чексизликда нулга айланувчи ва қуйидаги чегаравий шартларни

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0-1}u(x,y)=\phi_i(x),\quad \forall x\in\bar{I}_i,\quad i=1,2,$$

$$D^{\bar{\alpha}}_{-1,x}u[\theta_0(x)]=a(x)\tau(x)+b(x),\quad -1<x<1,$$

ва ушбу уланиш шартини

$$\lim_{y\to+0} y^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{\beta_0-1}u(x,y))=\lim_{y\to-0}(-y)^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}((-y)^{\beta_0-1}u(x,y)),\ x\in I\,,$$

қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)=\lim\limits_{y\to 0}|y|^{\beta_0-1}u(x,y)$.

Бу лимитлар $x=\pm 1$ да $1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\bar{\alpha}=(m+2(2-\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)),\ \bar{\beta}=(m+2(2-\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)),\ a(x)$, $b(x)$, $\phi_i(x),\ i=1,2$ – берилган функциялар, шу билан бирга $b(x)\in C[-1,1]\cap C^3(-1,1),\ b(-1)=0,\ b(1)=0,\ \phi_i(x),\ i=1,2$ лар узлуксиз функциялар бўлиб, $x=-1$, $x=1$ нуқталар атрофида нулга айланади ва барча етарлича катта $|x|$ лар учун ушбу $|\phi_i(x)|\le M|x|^{-\delta_1}$ тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда $\delta_1,\,M$ – мусбат ўзгармас сонлар, $D^{\bar{\alpha}}_{-1,x}$ – Риман-Лиувилл маъносидаги каср дифференциал оператори, AC

характеристиканинг $(x_0, 0)$, (бу ерда $x_0 \in (-1,1)$) нуқтадан чиқувчи характеристика билан кесишиш нуқтаси эса

$$\theta_0(x_0) = \left(\frac{x_0 - 1}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1) \right)^{\frac{2}{m+2}} \right)$$ дан иборат.

Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремада ифодаланган.

2.5-теорема. Ушбу $-\frac{m+2}{2} < \alpha_0 \le 0$, ёки $0 < \alpha_0 < \frac{m+2}{2}$, $\beta_0 < \frac{m+6}{4}$, $a(x) \in C[-1,1] \cap C^3(-1,1)$, $a(1) \le 0$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда BC масаласи бир қийматли ечилади.

Теореманинг исботи интеграл тенгламалар усули билан олиб борилади.

Диссертациянинг “**Эллиптик қисми текисликнинг биринчи чорагидан иборат соҳаларда аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар”** номли учинчи боби эллиптик қисми текисликнинг биринчи чорагидан иборат соҳада аралаш типдаги тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг ечимга эга бўлиш масалаларини тадқиқ этишга бағишланган. Интеграл тенгламалар усули ёрдамида аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун ўнг ярим текисликда Франкл масаласининг бир қийматли ечимга эга эканлиги исботланган.

Ушбу бобнинг 3.1 параграфида $D = D^+ \cup D^- \cup I$, бу ерда, $D^+ -$ текисликнинг очиқ биринчи квадранти, D^- эса

$$(signy)u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0 \tag{15}$$

тенгламанинг $O(0,0)$, $B(1,0)$ нуқталардан чиқувчи OC ва BC характеристикалари билан ва $y = 0$ тўғри чизиғининг OB кесмаси билан чегараланган, $I = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}$ кўринишга эга бўлган соҳада (15) тенглама учун нолокал чегаравий масала ўрганилган. (15) тенгламада β_0 ихтиёрий ҳақиқий сон бўлиб, $0 < \beta_0 < 1$ шартни қаноатлантиради.

Ушбу белгилашларни киритамиз: $I_0 = \{(x, y): 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x, y): 1 < x < \infty, y = 0\}$, C_0 ва C_1 лар мос равишда OC ва BC характеристикаларнинг $E(c,0)$, нуқтадан чиқувчи характеристика билан кесишиш нуқталари, бу ерда $c \in I$ $-$ ихтиёрий фиксирланган сон.

$p(x) \in C^1[0,c]$ диффеоморфизм $[0,c]$ кесманинг барча нуқталарини $[c,1]$ кесманинг барча нуқталарига акслантирсин, шу билан бирга $p'(x) < 0$, $p(0) = 1$, $p(c) = c$ бўлсин. Мисол сифатида $p(x) = 1 - kx$ чизиқли функцияни келтирамиз, бу ерда $k = (1-c)/c$ га тенг мусбат хақиқий сон.

S **масала.** Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $u(x, y)$ функция топилсин:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D})$, бу ерда $\bar{D} = \bar{D}^- \cup D^+ \cup \bar{I}_0 \cup \bar{I}_1$;

2) $u(x, y) \in C^2(D^+)$ функция D^+ соҳада (15) тенгламани қаноатлантиради;

3) $u(x, y)$ функция D^- соҳада R_1 синфга тегишли умумлашган ечимдан иборат;

4) $\lim\limits_{R\to\infty} u(x,y)=0$, $R^2=x^2+y^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$

5) $u(x,y)$ функция ушбу чегаравий шартларни

$u(0,y)=\varphi(y)$, $y\ge 0$,

$u(x,0)=\tau_1(x)$, $x\in \bar{I}_1$,

$u(x,y)\big|_{OC_0}=\psi(x)$, $0\le x\le c/2$,

$u(p(x),0)=\mu u(x,0)+f(x)$, $0\le x\le c$

ва уланиш шартини

$\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y$, $x\in I\setminus\{c\}$, қаноатлантиради, бу лимитлар $x=0$, $x=1$, $x=c$ нуқталарда $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta=\beta_0/2$, $f(x)\in C^{0,\alpha_1}[0,c]$, $f(0)=0$, $f(c)=0$, $\psi(x)\in C^1[0,c/2]\cap C^{1,\delta_1}(0,c/2)$, $\psi(0)=0$, $\mu-const$, $\tau_1(x)\in C(\bar{I}_1)$, шу билан бирга $\tau_1(x)$ функция $x=1$ нуқта атрофида $\tau_1(x)=(1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x)\in C(\bar{I}_1)$ кўринишда ифодаланади ва у ихтиёрий $[1,N]$, $N>1$ кесмада Гёльдер шартини қаноатлантиради, $\tau_1(x)\in L(I_1)$ ва барча етарлича катта x ларда $|\tau_1(x)|\le M/x^{\delta}$ тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда M,δ – мусбат ўзгармас сонлар, $\varphi(y)\in C[0,\infty)$, $y^{\beta_0/2}\varphi(y)\in L(0,\infty)$, $\varphi(y)$ ихтиёрий $[0,N]$, $N>0$ кесмада Гёльдер шартини қаноатлантиради, $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$.

Ушбу параграфнинг асосий натижаларини келтирамиз.

3.1-теорема. Ушбу $\varphi(y)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $\tau_1(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$, $0<\mu<1$ шартлар бажарилсин. У ҳолда S масаласи фақат тривиал ечимга эга бўлади.

3.2-теорема. $p(x)=1-kx$, $k^{\frac{1}{2}-\alpha}\mu\sin(\alpha\pi)<1$, $0<\mu<1$ шартлар бажарилсин, бу ерда $\alpha=\dfrac{1-\beta_0}{4}$, $k=(1-c)/c$. У ҳолда S масаласининг ечими мавжуд.

Параграф 3.2 да (8) тенглама учун ўнг ярим текисликда Франкл чегаравий масаласи тадқиқ қилинган.

D – ўнг ярим текислик, $D^+(D^-)$ – текисликнинг биринчи (тўртинчи) чораги бўлсин.

F **масала.** D соҳада қуйидаги хоссаларга эга бўлган $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)$ функция $D\setminus(\bar{J}_0\cup\Gamma)$ соҳада (8) тенгламанинг ечимидан иборат,

бу ерда $\bar{J}_0=\{(x,y):0\le x<\infty, y=0\}$, $\Gamma: x-\dfrac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=0$;

2) $u(x,y)\in C(D\cup\{x=0\})$ ва u_x хусусий ҳосила $D\cup\{x=0\}$ да узлуксиз, u_y хусусий ҳосила эса $D\cup\{x=0\}\setminus\{y=0\}$ да узлуксиз, u_{xx} ва u_{yy} функциялар $D^+\cup D^-$ соҳада ўзлуксиз ва J_0 бузилиш чизиғида қуйидаги уланиш шарти

$\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y=\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y$, $x\in J_0$, ўринли, шу билан бирга, бу лимитлар $x=0$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=O(x^{-2\beta-\varepsilon})$, $y=0$, $x\to\infty$ ($\varepsilon>0$);

4) $u(x,y)$ функция ушбу чегаравий шартларни

$$u(0,y)-u(0,-y)=f(y),\quad -\infty<y<\infty,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad -\infty<y<\infty,$$

қаноатлантиради, бу ерда $f(y)$ – берилган функция.

Қуйидаги теорема ўринли:

3.3-теорема. Агар $f(y)$ тоқ функция бўлиб, $(-\infty,\infty)$ оралиқда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ва $(-\infty,\infty)$ оралиқда иккинчи тартибли ҳосилалар Гёльдер шартини қаноатлантирса ва $y\to\infty$ да $f(y)=O(y^{-(m+2\beta_0)/2})$, $f'(y)=O(y^{-1-(m+2\beta_0)/2})$, $f''(y)=O(y^{-2-(m+2\beta_0)/2})$ ўринли бўлса, у ҳолда F масаласи бир қийматли ечилади.

Бу теорема интеграл тенгламалар усули ёрдамида исбот қилинган.

Диссертациянинг **“Эллиптик қисми ярим полосадан иборат бўлган соҳада аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун чегаравий масалалар”** номли тўртинчи бобида аралаш типдаги тенгламаларнинг бир синфи учун чегаравий масалалар қўйилади ва тадқиқ қилинади.

Тўртинчи бобнинг 4.1 параграфида (8) тенглама учун қаралаётган соҳанинг эллиптик қисмида Дирихле масаласининг ечимидан фойдаланиб, чегаравий масалалар тадқиқ этилади.

D соҳа D^+ ва D^- соҳаларнинг бирлашмасидан иборат бўлсин. Бунда улардан биринчиси D^+ соҳа $0\le x\le 1$, $y\ge 0$, эллиптик ярим полосани ўз ичига олади, иккинчиси D^- соҳа эса OBC характеристик учбурчакдан иборат, бу ерда OC ва BC лар (8) тенгламанинг $O(0,0)$ ва $B(1,0)$ нуқталардан чиқувчи ва $C\left(\frac{1}{2},-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$ нуқтада кесишувчи характеристикалари.

Ушбу масалани ўрганамиз.

T **масала.** Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar D)\cap C^2(D^+\cup D^-)$ ва $D^+\cup D^-$ соҳада (8) тенгламани қаноатлантиради;
2) $\lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=0$, $x\in[0,1]$;
3) $u(x,y)$ функция қуйидаги чегаравий шартларни

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(1,y)=\varphi_2(y),\quad y\ge 0,$$

$$u|_{OC}=\psi(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}$$

ва ушбу уланиш шартини

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y,\ x\in(0,1),$$

қаноатлантиради. Бу лимитлар $x=0$, $x=1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\bar D=\bar D^-\cup D^+\cup\bar I_0\cup\bar I_1$, $\bar I_0=\{(x,y):x=0,y\ge 0\}$, $\bar I_1=\{(x,y):x=1,y\ge 0\}$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ ва $\psi(x)$ – берилган функциялар.

Қуйидаги лемма ўринли:

4.1-лемма. Агар $u(x,y)$ функция D^- соҳада (8) тенгламанинг ечими бўлиб, $u(x,y)|_{OC}\equiv 0$ бўлганида $\tau(x)=u(x,0)$ функция $x=x_0$, $0<x_0<1$ нуқтада энг катта мусбат(энг кичик манфий) қийматига эришса, у ҳолда $\lim\limits_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\dfrac{\partial u(x_0,y)}{\partial y}>0$ ($\lim\limits_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\dfrac{\partial u(x_0,y)}{\partial y}<0$) бўлади.

Бу леммадан фойдаланиб қуйидаги теорема исбот қилинади.

4.1-теорема. Ушбу $\varphi_1(y)\equiv 0$, $\varphi_2(y)\equiv 0$, $y\ge 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $x\in[0,\frac{1}{2}]$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда T масаласи фақат тривиал ечимга эга бўлади.

4.2-теорема. Ушбу $\varphi_i(y)\in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi_i(y)\in L(0,\infty)$, $i=1,2$, $\psi(x)\in C\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^{(3,\delta)}\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\varphi_1(0)=\psi(0)$, $\varphi_2(0)=0$ шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда T масаласининг ечими мавжуд.

Ушбу бобнинг 4.2 параграфида 4.1 параграфда баён қилинган D соҳани эллиптик қисмида N масаласи типидаги ечимидан фойдаланган ҳолда T масаласини тадқиқ килинади. Масала ечимининг ягоналиги 4.1 параграфдаги каби исботланади. Ўрганилаётган T масаласи ечимининг мавжудлигини исбот қилиш учун D^+ соҳада N масаласи типидаги ёрдамчи масала ечимидан фойдаланамиз.

Ушбу бобнинг 4.3 параграфида эса 4.1 параграфда кўрсатилган D соҳада (8) тенглама учун иккита нолокал чегаравий шартли масала қўйилган ва тадқиқ қилинган. Қуйидаги масалани ўрганамиз.

G **масала.** Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D^+\cup I_o\cup I_1\cup D^-)\cap C^2(D^+\cup D^-)$ функция $D^+\cup D^-$ соҳада (8) тенгламани қаноатлантиради,

$$\lim_{y\to\infty}u(x,y)=0\ ,\ x\in[0,1];$$

2) $u(x,y)$ функция ушбу чегаравий шартларни

$$u(0,y)-u(1,y)=\varphi_1(y),\ y\ge 0,$$
$$u_x(0,y)-u_x(1,y)=\varphi_2(y),\ y>0,$$
$$u(x,y)|_{OC}=\psi(x),\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

ва уланиш шартини $\lim\limits_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y$, $x\in(0,1)$, қаноатлантиради, бу ерда $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ ва $\psi(x)-$ берилган функциялар, $\psi(x)\in C^2\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\varphi_1(y)\in C^1(0,\infty)$,

$\varphi_2(y)\in C^1(0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{2}}\varphi_i(y)\in L_i(0,\infty)$, $i=1,2$, $\varphi_1(\infty)=\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)=\psi(0)$.

Экстремум принципи ёрдамида ва интеграл тенгламалар усули билан G масаласи ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари исботланади.

ХУЛОСА

Диссертация иши турли чегараланмаган соҳаларда кичик ҳосилали сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалаларни ечилишига бағишланган.

Диссертация ишида олинган натижалар бўйича қуйидагича хулоса қилиш мумкин:

1. Чегараланмаган соҳада сингуляр коэффицентли аралаш типдаги тенгламанинг типи ўзгариш кесмасининг қисмларида Франкл шартининг ўхшаши ва чегаравий характеристиканинг бўлагида етишмайдиган Трикоми шарти берилган янги чегаравий масала тадқиқ қилинган. Қўйилган масала ечимининг ягоналигини исботлашнинг модификацияланган усули ишлаб чиқилган. Ўрганилаётган масала ечимининг мавжудлигини исботлашда биринчи марта Винер-Хопф сингуляр интеграл тенгламалар назарияси қўлланилган.
2. Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун бузилиш чизиғининг қисмларида Франкл шарти ўхшаши ва чегаравий характеристикаларда етишмайдиган силжишли шартлар берилган чегаравий масала тадқиқ қилинган. Винер-Хопф тенгламасини бир қийматли ечилиши қўйилган масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқадиган иккинчи тур Фредгольм тенгламасига бир қийматли келтирилишини таъминлайдиган ҳосил бўлган Винер-Хопф интеграл тенгламасининг индекси нулга тенглиги исботланган.
3. Аралаш эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун бузилиш чизиғида ва параллел характеристикаларда Бицадзе-Самарский ва Франкл шарти билан янги чегаравий масала ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари исботланган.
4. Экстремум принципи ва интеграл тенгламалар методи билан эллиптик қисми ярим полосадан ёки текисликнинг биринчи чорагидан иборат чегараланмаган соҳаларда умумлашган Трикоми тенгламаси учун локал ва нолокал чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган. Олинган натижалар аралаш типдаги турли тенгламалар учун янги масалаларни ўрганишда ҳамда бундай тенгламаларга келтириладиган амалий масалаларни ечишда асос бўлиб хизмат қилади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

РУЗИЕВ МЕНГЛИБАЙ ХОЛТОЖИБАЕВИЧ

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

г. Ташкент – 2020 год

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.3.DSc/FM80

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Псху Арсен Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор
	Дурдиев Дурдимурод Каландарович доктор физико-математических наук, профессор
	Зикиров Обиджан Салижанович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ферганский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» _________ 2020 г. в _______ часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81.Тел.: (99871) 262-75-44, факс: (99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер __). (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (99871)262-75-44).

Автореферат диссертации разослан «___» _________ 2020 г.
(протокол рассылки № ___ от «___» _________ 2020 г.).

У.А.Розиков
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.Азамов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Множество научно-практических исследований, проводимых в мировом масштабе подтверждает необходимость исследования локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Уравнения смешанного типа находят приложение в газовой динамике, аэродинамике и так далее. В настоящее время во многих мировых научных школах бурно развивается направление нелокальных краевых задач, в том числе задач с операторами дробного интегро-дифференцирования в граничных условиях.

Такое внимание к теории нелокальных краевых задач не случайно, так как дифференциальные уравнения с частными производными нашли важные применения в различных задачах математической физики, химии и т.п. Они имеют большое значение при математическом моделировании нефтяных пластов, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющем сложное строение, электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале, окруженной пористой средой, и других явлениях.

В Узбекистане особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое применение. В решении стоящих проблем особое внимание уделяется исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, нахождению эффективных методов их решения. Научные исследования на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, а именно в области дифференциальных уравнений в частных производных и математической физике, а также по прикладной математике и математическому моделированию являются основными задачами и направлениями деятельности Института математики [1].

Тема и задачи исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постанавлениях № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года « О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», №ПП-4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Научные исследования локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: в Technical University Bergakademie Freiberg (Германия), Vilnius University (Литва), Universita degli Studi di Torino (Италия), University of Deusto, University of Santiago de Compastela (Испания), Institut de Mathematiques, Universite de Bordeaux (Франция), University of California, University of Maryland (США), Кабардино-Балкарском государственном университете, Башкирском государственном университете, Северо-Восточном федеральном университете, Самарском государственном экономическом университете, Самарском государственном университете, Самарском архитектурно-строительном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Орловском государственном университете, Тбилисском государственном университете, Московском государственном университете, Математическом институте Российской академии наук, Новосибирском государственном университете, Белорусском государственном университете, Институте прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Институте математики и математического моделирования (Казахстан) .

В мире получен ряд результатов по исследованию дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа и связанных с ними краевых задач, в частности: разработана теория решения краевых задач для уравнения смешанного типа (Туринский университет, Италия); доказан принцип максимума для эллиптико-гиперболического уравнения (Московский государственный университет, Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук); изучены краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа (Университет Уппсала, Швеция; Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Московский, Новосибирский, Орловский, Казанский, Самарский государственные университеты); разработан способ решения краевых задач

---

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, www.inderscience.com.jhome; Boundary value problems, www.link.springer.com.journal; Journal of Ellipric and Parabolic Equations, www.springer.com.journal; Journal of Partial Differential Equations, www.global-sci.org.jpde; Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625, также были использованы и другие источники .

для уравнений смешанного и смешанно-составного типов (Математический институт Сибирского отделения Российской академии наук, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук); найдены способы исследования краевых задач для эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического уравнений (Математический институт Сибирского отделения Российской академии наук, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Институт математики и математического моделирования Казахстана); по уравнениям в частных производных дробного порядка в мире получен ряд результатов.

В настоящее время в мире также осуществляется ряд научных исследований по таким приоритетным направлениям, как создание математических моделей, более адекватно отражающих реальные процессы, и решение полученных граничных задач; построение аналитических решений граничных задач; создание устойчивых алгоритмов числовых моделей.

Степень изученности проблемы. Первые фундаментальные исследования для модельного уравнения смешанного типа были выполнены Ф.Трикоми. После работ Трикоми для обобщенного уравнения Трикоми С.Геллерстедт исследовал краевые задачи, при постановке которых в гиперболической части рассматриваемой области значения искомого решения задаются на двух внутренних характеристиках уравнения. Задача Геллерстедта имеет важные приложения в области околозвуковой газовой динамики. Впервые задачи со смещением в граничных условиях для уравнений смешанного типа были изучены в работах В.И. Жегалова и А.М.Нахушева. После этих работ многими авторами исследовались задачи со смещением в конечных и бесконечных областях. Теория дифференциальных уравнений в частных производных получила большое развитие в работе А.В.Бицадзе и А.А. Самарского. Они сформулировали и исследовали новую задачу для равномерно- эллиптического уравнения.

В дальнейшем теория краевых задач для уравнений смешанного типа развивалась в работах С.П.Пулкина, В.Ф.Волкодавова, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, В.Н.Врагова, М.М. Смирнова, Т.Ш.Кальменова, М.Проттера, М.М.Мередова, Е.И.Моисеева, А.П. Солдатова, К.Б.Сабитова, О.А.Репина, А.Н.Зарубина, А.А.Полосина, А.В.Псху, М.А. Садыбекова, М.Мирсабурова, А.К.Уринова, Б.И.Исломова, А.Хасанова, А.С.Бердышева и их учеников.
Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения и уравнений смешанного типа без младших членов в конечных и бесконечных областях исследованы в работах М.Х.Абрегова, С.К.Кумыковой, А.М.Нахушева, И.Е.Солодовникова, М.А.Усанеташвили, С.Геллерстедта. Изучению краевых задач в конечной области для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами при младших членах посвящены работы В.И.Евсина, Х.М.Наджафова, М.Мирсабурова, О.А.Репина и их учеников.

В последние годы как в нашей республике, так и за рубежом началась интенсивная разработка теории краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами при младших членах. Р.С. Хайруллиным изучена задача Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами при младших производных в неограниченной смешанной области, эллиптическая часть которой совпадает со всей верхней полуплоскостью, а гиперболическая часть представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками рассматриваемого уравнения и отрезком оси абсцисс. О.А.Репиным для уравнения смешаного эллиптико-гиперболического типа с сингулярным коэффициентом при младшей производной в области, эллиптическая часть которой есть бесконечная вертикальная полуполоса, а гиперболическая – характеристический треугольник, исследована краевая задача, в которой с помощью обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования в смысле М.Сайго задается линейная комбинация, связывающая след нормальной производной на линии перехода и ее же след на характеристике уравнения. А.А.Абашкин изучил нелокальную задачу в области, гиперболическая часть которой – вертикальная полуполоса, а эллиптическая –прямоугольник, для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ФА-Ф1-Ф002 «Исследования разрешимости и спектральных свойств краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа и связанных с ними специальных функций», Ф4-ФА-Ф010 «Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с сингулярными особенностями и нелинейные задачи со свободной границей», ОТ-Ф4-88 «Исследования прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков» Института Математики АН РУз.

Целью исследования является нахождение корректно поставленных локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами и доказательство их однозначной разрешимости .

Задачи исследования состоят в следующем:

доказательство существования и единственности решения задачи с условиями, заданными на куске граничной характеристики и на линии вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами;

изучение краевых задач со смещением на кусках граничных характеристик для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом;

исследование краевой задачи со смещением во внутренних характеристиках для уравнений эллиптико-гиперболического типа;

доказательство существования и единственности решения краевой задачи с условиями Франкля и Бицадзе- Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа;

исследование локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярным коэффициентом в неограниченных смешанных областях, эллиптическая часть которых четверть плоскости и вертикальная полуполоса.

Объектом исследования являются уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами при младших членах.

Предметом исследования являются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.

Методы исследования. В диссертации использованы методы разделения переменных, сингулярных интегральных уравнений и принципы экстремума.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана однозначная разрешимость краевых задач с условиями, заданными на куске граничной характеристики и на линии вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области;

доказана существование единственного решения задачи со смещением на кусках граничных характеристик для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в неограниченной области;

доказана однозначная разрешимость задачи со смещением во внутренних характеристиках для уравнений эллиптико-гиперболического типа;

доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи с условиями Франкля и Бицадзе-Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа;

доказана однозначная разрешимость краевой задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области, эллиптическая часть которой первая четверть плоскости;

доказана однозначная разрешимость задачи Франкля для одного класса уравнений смешанного типа в правой полуплоскости;

доказаны существование и единственность решений локальных и нелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области, эллиптическая часть которой полуполоса.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

Для решения краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом предложен алгоритм регуляризации сингулярного интегрального уравнения с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, имеющего изолированную особенность первого порядка в одной точке.

Достоверность результатов исследования. Достоверность полученных результатов обоснована принятыми в математике методами анализа, общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа, строгими и полными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования:

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярными особенностями при младшей производной.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется применением их в изучении физических, технических, биологических процессов, описываемых при помощи уравнений смешанного типа.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченных областях были внедрены на практике в следующих научно-исследовательских проектах:

Разработанные в настоящей диссертации методы и подходы к решению краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченных областях были применены в исследованиях локальных и нелокальных краевых задач для класса вырождающихся уравнений смешанного типа при выполнении научно-исследовательских работ по теме “Нелокальные дифференциальные уравнения смешанного типа математических моделей экстремальных процессов” (№ 0213-2014-0002, 2016-2018 гг., Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Россия). Применение научных результатов позволяет развивать исследования локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа.

Полученные в диссертации результаты, основанные на методах исследования решений корректно поставленных локальных и нелокальных краевых задач для уравнений эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами, были использованы в зарубежном гранте № АААА-Б19-219021990010-4 «Применение дробного исчисления в теории колебательных систем» (Россия, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, справка № 01-04\253, от 13.12. 2020). Использование научных результатов послужило решению новых краевых задач для эллиптико-гиперболических уравнений.

При выполнении научно-исследовательских работ по проекту AP05133873 «Численные методы и параллельные алгоритмы решения нелинейных обратных задач для математических моделей с дробными степенями эллиптических операторов с приложениями в гравиметрии» Министерства образования и науки Республики Казахстан (2018-2020гг.) учеными Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави были использованы полученные в диссертации теоретические научные результаты. В частности, при исследовании прямых задач для эволюционного уравнения первого порядка с дробной степенью эллиптического оператора были применены разработанные в диссертации методы и подходы к решению краевых задач для уравнений смешанного типа, использующих решение задачи Дирихле в эллиптической области. Применение этих результатов позволило исследовать новые корректные краевые задачи для эллиптических уравнений.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 27 научно-практических конференциях, в том числе на 19 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 48 научных работ, в том числе 21 научная статья: 13 в зарубежных и 8 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 158 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Краевые задачи со смещением для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами»,** изучена краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Исследованы задачи со смещением на граничных и внутренних характеристиках.

В первом параграфе этой главы приводятся некоторые известные факты, которые понадобятся при доказательстве основных результатов диссертации.

Во втором параграфе для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами исследуется краевая задача с данными на куске характеристики в гиперболической части рассматриваемой области и на частях линии параболического вырождения. Единственность решения исследуемой задачи доказывается с помощью принципа экстремума. При доказательстве существования решения задачи применяются теория сингулярных интегральных уравнений, уравнения Винера-Хопфа и интегральные уравнения Фредгольма.

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ - область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+- полуплоскость $y > 0$, D^-- конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

исходящими из точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = \{(x, y): -1 < x < 1,\ y = 0\}$. В уравнении (1) предполагается, что m, α_0, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям: $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$, $|\alpha_0| < (m+2)/2$.

На плоскости параметров $\alpha_0 0 \beta_0$ рассматривается треугольник $A_0B_0C_0$, ограниченный прямыми

$$A_0C_0: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad B_0C_0: \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad A_0B_0: \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от места нахождения точки $T(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Пусть $T(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta A_0B_0C_0$.

Введем обозначения: $I_1 = \{(x,y): -\infty < x < -1,\ y = 0\}$,
$I_2 = \{(x,y): 1 < x < \infty,\ y = 0\}$, $C_0(C_1)$ - точки пересечения характеристики $AC(BC)$ с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$ - произвольно фиксированное число.

Пусть $p(x) \in C^1[-1,c]$ - диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$.

Задача TF **.** Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, которая

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$, где $\bar{D} = \bar{D}^- \cup D^+ \cup \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2$,
(здесь $\bar{I}_1 = (-\infty,-1]$, $\bar{I}_2 = [1,\infty)$);
2) принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;
3) является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;
4) выполняются равенства
$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0\ ,\ y \ge 0,\ R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}; \tag{2}$$
5) удовлетворяет краевым условиям
$$u(x,y)\big|_{y=0} = \varphi_i(x)\ ,\ \ x \in \bar{I}_i,\ i = 1,2, \tag{3}$$
$$u(x,y)\big|_{AC_0} = \psi(x),\quad -1 \le x \le (c-1)/2, \tag{4}$$
$$u(p(x),0) = \mu u(x,0) + f(x)\ ,\ -1 \le x \le c \tag{5}$$
и условию сопряжения
$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y,\quad x \in I/\{c\}, \tag{6}$$
причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha = (m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta = (m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2))$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1,2$- заданные функции, причем $f(x) \in C[-1,c] \cap C^{(1,\delta_1)}(-1,c)$, $\delta_1 \in (0,1]$, $f(-1) = 0$, $f(c) = 0$, $\psi(x) \in C[-1,(c-1)/2] \cap C^{(1,\delta_2)}(-1,(c-1)/2)$, $\delta_2 \in (0,1]$, $\psi(-1) = 0$, $\mu - const$, функции $\varphi_i(x)$ в окрестности точек $x = -1$, $x = 1$ представимы в виде $\varphi_1(x) = (1+x)\tilde{\varphi}_1(x)$, $\varphi_2(x) = (1-x)\tilde{\varphi}_2(x)$ и удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках $[-N,-1]$, $[1,N]$, $N > 1$, и для всех достаточно больших $|x|$ – неравенству $|\varphi_i(x)| \le M|x|^{-\delta}$,

где δ, M - положительные постоянные.

Решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в области D^-, удовлетворяющее начальным условиям $\lim_{y\to-0} u(x,y) = \tau(x)$**,** $x \in \bar{I}$**,** $\lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y = \nu(x)$**,** $x \in I$**,** задается формулой Дарбу

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)(1+t)^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt+$$

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)(1+t)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt, \qquad (7)$$

где $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)2^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$, $\gamma_2=-\dfrac{\Gamma(2-\alpha-\beta)2^{\alpha+\beta-1}}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$, $\Gamma(z)$ –гамма функция Эйлера.

Выражение вида (7) будем называть обобщенным решением уравнения (1) при $y<0$, если $\tau(x)$ и $\nu(x)$ непрерывны в интервале $(-1,1)$. Для того, чтобы обобщенное решение обладало той или иной гладкостью, необходимо, чтобы функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ имели определенную гладкость.

Класс R_1. Обобщенное решение (7) уравнения (1) при $y<0$ принадлежит классу R_1, если функция $\tau(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_1>1-\beta$ при $-1\le t<1$, а функция $\nu(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_2>\alpha$ при $-1\le t<1$.

Основными результатами данного параграфа являются:

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия $\varphi_i(x)\equiv 0$, $i=1,2$, $\psi(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$, $0<\mu<1$. Тогда задача TF имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 1.2. Пусть $p(x)=\delta-kx$, $\delta=2c/(1+c), k=(1-c)/(1+c)$.

Пусть далее $\alpha_0\le 0$ или $\alpha_0>0$ и $\beta_0>\dfrac{2-m}{4}$, $\mu\in(0,1)$. Тогда решение задачи TF существует.

В третьем параграфе изучается задача со смещением для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

$$(sign y)|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\beta_o}{y}u_y=0 \qquad (8)$$

в области D, указанной выше. В уравнении (8) предполагается, что m,β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m>0, -m/2<\beta_0<1$.

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$, где $\bar{D}=\bar{D}^-\cup D^+\cup\bar{I}_1\cup\bar{I}_2$;

2) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (8) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ y\ge 0,\quad R^2=x^2+4y^{m+2}/(m+2)^2; \qquad (9)$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x),\quad \forall x\in\bar{I}_i,\ i=1,2, \tag{10}$$

$$u[\theta_0(x)]+\mu u[\theta_1(p(x))]=\psi(x)\quad,\quad -1\le x\le c, \tag{11}$$

$$u(p(x),0)=\rho u(x,0)+f(x),\ \ -1\le x\le c \tag{12}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y,\qquad x\in I\setminus\{c\}, \tag{13}$$

причем при $x=\pm1,\ x=c$ эти пределы могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/(2(m+2))$, $\psi(x), f(x),\varphi_i(x)$ - заданные функции, $\theta_0(x_0)$ и $\theta_1(x_0)$ – соответственно аффиксы точек пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точки $(x_0,0), x_0\in I$,

$$\theta_0(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},\quad \theta_1(x_0)=\frac{1+x_0}{2}-i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)}.$$

Доказана следующая:

Теорема1.3. Пусть выполнены условия $p(x)=\delta-kx$, $\delta=2c/(1+c)$, $k=(1-c)/(1+c)$, $\varphi_i(x)\equiv0,\ \ i=1,2,\ \ \psi(x)\equiv0,\ \ f(x)\equiv0,\ \ 0<\rho<1,\ \ \mu\ge0$. Тогда задача A имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия $p(x)=\delta-kx$, где $k=(1-c)/(1+c)$, $\delta=2c/(1+c)$, $k^{1/2-\alpha}\rho+k^{\alpha-1/2}\mu<1,\ 0\le\mu\le1,\ 0<\rho<1,$ $\alpha=\dfrac{1-\beta_0}{2(m+2)}$. Тогда решение задачи A существует.

В четвертом параграфе исследуется новая краевая задача с условиями локального смещения на отрезке AB линии вырождения $y=0$ и со смещениями во внутренних характеристиках EC_0 и EC_1.

Рассмотрим уравнение (8) в области D, указанной выше.

Задача GN**.** Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, которая

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$, где $\bar{D}=\bar{D}^-\cup D^+\cup\bar{I}_1\cup\bar{I}_2$;

2) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (8) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0\ \ ,\ y\ge0,\ \ R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2};$$

5) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x),\quad x\in\bar{I}_i,\quad i=1,2,$$

$$u[\theta_1^*(x)]+\mu u[\theta_0^*(p(x))]=\psi(x),\quad -1\le x\le c,$$

$$u(p(x),0)=\rho u(x,0)+f(x),\quad -1\le x\le c$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y,\ x\in I\setminus\{c\},$$

причем при $x=\pm 1, x=c$ эти пределы могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/(2(m+2))$, $\psi(x), f(x), \varphi_i(x)$ - заданные функции, μ,ρ - постоянные положительные числа, $\theta_1^*(x)$ и $\theta_0^*(p(x))$ - точки пересечения характеристик EC_0 и EC_1 соответственно с характеристиками, исходящими из точек $(x_0,0)$ и $(p(x_0),0)$, $x_0\in(-1,c)$,

$$\theta_1^*(x_0)=\left(\frac{c+x_0}{2};-\left(\frac{(m+2)(c-x_0)}{4}\right)^{2/(m+2)}\right),$$

$$\theta_0^*(p(x_0))=\left(\frac{c+p(x_0)}{2};-\left(\frac{(m+2)(p(x_0)-c)}{4}\right)^{2/(m+2)}\right).$$

Основным результатам четвертого параграфа являются следующие:

Теорема 1.5. Пусть выполнены условия теоремы 1.3. Тогда задача GN имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 1.6. Пусть $p(x)=\delta-kx$, $k^{\frac{1}{2}-3\alpha}\rho+k^{3\alpha-\frac{1}{2}}\mu<1,\ 0\le\mu<1,$

$0<\rho<1$, $\beta_0>(1-m)/3$, где $\delta=2c/(1+c)$, $k=(1-c)/(1+c)$, $\alpha=\dfrac{1-\beta_0}{2(m+2)}$.

Тогда решение задачи GN существует.

В пятом параграфе этой главы решается задача со смещениями для уравнения (8) в случае $\beta_0=-m/2$.

Рассмотрим уравнение

$$(sign y)|y|^m u_{xx}+u_{yy}-\frac{m}{2y}u_y=0,\ m>0 \tag{14}$$

в области D, указанной в параграфе 1.2 главы 1.

Задача A_1. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, которая:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$, где $\bar{D}=\bar{D}^-\cup D^+\cup\bar{I}_1\cup\bar{I}_2$;

2) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (14) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) выполняются равенства

$\lim\limits_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ y\ge 0,\quad R^2=x^2+4y^{m+2}/(m+2)^2$;

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x),\quad \forall x\in\bar{I}_i,\ i=1,2,$$

$$u[\theta_0(x)]+\mu u[\theta_1(p(x))]=\psi(x)\quad,\quad -1\le x\le c,$$

$$u(p(x),0)-u(x,0)=u(c,0)+f(x),\quad -1\le x\le c,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}y^{-m/2}u_y=\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}u_y,\quad x\in I\setminus\{c\},$$

причем при $x=\pm 1,\ x=c$ эти пределы могут иметь особенности порядка ниже единицы, а $\psi(x), f(x), \varphi_i(x)$ - заданные функции, μ- постоянное положительное число.

Основными результатами данного параграфа являются:

Теорема 1.7. Пусть $\varphi_i(x)\equiv 0,\ i=1,2,\ \psi(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0,\ \mu\geq 0$. Тогда задача A_1 имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 1.8. Пусть $p(x)=\delta-kx$, где $k=(1-c)/(1+c), \delta=2c/(1+c)$, $0\leq\mu<k^{\frac{1}{4}}(1-k^{\frac{1}{4}})$. Тогда решение задачи A_1 существует.

Во второй главе диссертации, названной **«Нелокальные краевые задачи для одного класса уравнений смешанного типа»,** решается задача, в которой характеристика EC_0 освобождена от краевого условия и это недостающее условие Геллерстедта заменено внутренне-краевым условием локального смещения на отрезке линии параболического вырождения. Исследуются краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области.

В § 2.1. решается задача с условиями, заданными на внутренней характеристике и на линии вырождения, для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение (1) в области D, указанной в параграфе 1.2 главы 1. Рассмотрим диффеоморфизм $q(x)\in C^1[c,1]$, переводящий отрезок $[c,1]$ в отрезок $[-1,c]$, причем $q'(x)<0$, $q(c)=c$, $q(1)=-1$. Примером такой функции является $q(x)=p-kx$, где $k=\dfrac{1+c}{1-c}$, $p=\dfrac{2c}{1-c}$, $p-k=-1$, $p-kc=c$.

Задача B**.** Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1)$u(x,y)\in C(\overline{D})$, где $\overline{D}=\overline{D}^-\cup D^+\cup\overline{I}_1\cup\overline{I}_2$;

2) $u(x,y)\in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) выполнено $\lim\limits_{R\to\infty}u(x,y)=0$, $y\geq 0$, $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

5)удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_i(x),\quad x\in\overline{I}_i,\ i=1,2,$$

$$u(x,y)\big|_{EC_1}=\psi(x),\ c\leq x\leq(c+1)/2,$$

$$u(q(x),0)=\mu u(x,0)+f(x)\ ,\ c\leq x\leq 1$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y,\ x\in I\setminus\{c\},$$

причем эти пределы при $x=\pm 1,\ x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$,

$\beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0)) / (2(m + 2))$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(x)$ - заданные функции, причем $f(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\delta_1}(c,1)$, $\delta_1 \in (0,1]$, $f(c) = 0$, $f(1) = 0$, $\psi(x) \in C^1[c,(c+1)/2] \cap C^{1,\delta_0}(c,(c+1)/2)$, $\psi(c) = 0$, $\mu - const$, функции $\varphi_i(x)$ в окрестности точек $x = -1$, $x = 1$ представимы в виде $\varphi_1(x) = (1 + x)\tilde{\varphi}_1(x)$, $\varphi_2(x) = (1 - x)\tilde{\varphi}_2(x)$ и они удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках $[-N,-1]$, $[1,N]$, $N > 1$ и для всех достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)| \le M|x|^{-\delta}$, где δ, M – положительные постоянные.

Имеет место следующая

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1,2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$. Тогда задача B имеет только тривиальное решение.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия $q(x) = p - kx$, $0 < \mu < 1$, $\beta_0 > \frac{2-m}{4}$, где $p = \frac{2c}{1-c}$, $k = \frac{1+c}{1-c}$. Тогда решение задачи B существует.

В § 2.2. решена задача с условием Франкля и Бицадзе-Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнения (8) в неограниченной области D, указанная в параграфе 1.2 главы 1.

Задача FBS **(Франкля, Бицадзе-Самарского).** Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами 1) - 4) задачи A, удовлетворяющую условиям (10), (13) и следующим краевым условиям

$$(1+x)^{\beta} D^{1-\beta}_{-1,x} u[\theta(x)] = \mu(x)(x-c)^{\beta} D^{1-\beta}_{c,x} u[\theta^*(x)] + \psi(x), \quad c < x < 1,$$

$$u(q(x),0) = \mu_0 u(x,0) + f(x), \quad c \le x \le 1,$$

где $f(x)$, $\psi(x)$, заданные функции, причем $f(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\alpha_1}(c,1)$, $f(c) = 0$, $f(1) = 0$, $\mu(x)$, $\psi(x) \in C^1[c,1] \cap C^{1,\delta_0}(c,1)$, $\mu_0 = const$, $D^{1-\beta}_{-1,x}$ и $D^{1-\beta}_{c,x}$ - операторы дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, $\beta = (m + 2\beta_0) / (2(m+2))$, $\theta(x_0)$ $\left(\theta^*(x_0)\right)$ – точки пересечения характеристик C_0C (EC_1) с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, где $x_0 \in (c,1)$:

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)^{2/(m+2)}, \quad \theta^*(x_0) = \frac{x_0 + c}{2} - i\left(\frac{m+2}{4}(x_0-c)\right)^{2/(m+2)}.$$

Приведем формулировку основных результатов этого параграфа.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1,2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \leqslant 0$. Тогда задача FBS имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия $q(x) = p - kx$, $\mu(x) \le 0$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu_0 k^{\frac{1}{2} - 3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c)) < 1$, $\beta_0 > -\frac{m-1}{3}$, где $p = 2c/(1-c)$,

$k=(1+c)/(1-c), \qquad \omega(c)=1/(1-\mu(c))$, $\beta=\dfrac{m+2\beta_0}{2(m+2)}, \alpha=\dfrac{1-\beta_0}{2(m+2)}$. Тогда решение задачи FBS существует.

Параграф 2.3 главы 2 посвящен изучению задачу типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения (1) в случае, когда параметры этого уравнения удовлетворяют условиям

$m>0$, $1<\beta_0<(m+4)/2$, $|\alpha_0|<(m+2)/2$.

На плоскости параметров $\alpha_0 0\beta_0$ рассмотрим треугольник $A_0B_0D_0$, ограниченный прямыми:

$A_0D_0:\beta_0-\alpha_0=\dfrac{m+4}{2}$, $B_0D_0:\beta_0+\alpha_0=\dfrac{m+4}{2}$, $A_0B_0:\beta_0=1$ и в зависимости от места нахождения точки $T(\alpha_0,\beta_0)$ в этом треугольнике сформулируем и исследуем задачу для уравнения (1).

Пусть $P(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta A_0B_0D_0$.

Задача BC**.** Требуется найти в области D регулярное решение уравнения (1), обращающееся в нуль на бесконечности и удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0-1}u(x,y)=\phi_i(x), \quad \forall x\in \bar{I}_i, \quad i=1,2,$$

$$D^{\bar{\alpha}}_{-1,x}u[\theta_0(x)]=a(x)\tau(x)+b(x), \quad -1<x<1,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{\beta_0-1}u(x,y))=\lim_{y\to-0}(-y)^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}((-y)^{\beta_0-1}u(x,y)), \, x\in I,$$

где $\tau(x)=\lim\limits_{y\to0}|y|^{\beta_0-1}u(x,y)$, причем пределы при $x=\pm1$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}$, где

$\bar{\alpha}=(m+2(2-\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$, $\bar{\beta}=(m+2(2-\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2))$, $a(x)$, $b(x)$, $\phi_i(x)$, $i=1,2$ – заданные функции, причем $b(x)\in C[-1,1]\cap C^3(-1,1)$, $b(-1)=0$, $b(1)=0$, непрерывные функции $\phi_i(x)$, $i=1,2$ соответственно в окрестности точек $x=-1$, $x=1$ обращаются в нуль и для всех достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\phi_i(x)|\le M|x|^{-\delta_1}$, где δ_1, M – положительные постоянные, $D^{\bar{\alpha}}_{-1,x}$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, а точкой пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, $x_0\in(-1,1)$, является

$$\theta_0(x_0)=\left(\frac{x_0-1}{2};-\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right).$$

Основной результат этого параграфа сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия $-\frac{m+2}{2} < \alpha_0 \le 0$, либо $0 < \alpha_0 < \frac{m+2}{2}$, $\beta_0 < \frac{m+6}{4}$, и $a(x) \in C[-1,1] \cap C^3(-1,1)$, $a(1) \le 0$. Тогда задача BC однозначно разрешима.

Доказательство теоремы проводится методом интегральных уравнений.

Третья глава диссертации, названная **«Краевые задачи для уравнений смешанного типа в областях, эллиптическая часть которых первая четверть плоскости»,** посвящена исследованию вопросов разрешимости нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа в области, эллиптической частью которой является первая четверть плоскости. Методами интегральных уравнений доказывается однозначная разрешимость задачи Франкля для одного класса уравнений смешанного типа в правой полуплоскости.

В § 3.1 изучена нелокальная задача для уравнения

$$(signy)u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0 \tag{15}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где D^+– первый открытый квадрант плоскости, D^- – конечная область четвертого квадранта плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (15), выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$, и отрезком OB прямой $y=0$, $I = \{(x,y): 0 < x < 1, y = 0\}$. В уравнении (15) β_0 – некоторое действительное число, удовлетворяющее условию $0 < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $I_0 = \{(x,y): 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x,y): 1 < x < \infty, y = 0\}$, C_0 и C_1 – соответственно точки пересечения характеристик OC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$ – произвольное фиксированное число.

Пусть $p(x) \in C^1[0,c]$- диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0,c]$ в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(0) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = 1 - kx$, где $k = (1-c)/c$.

Задача S**.** Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$, где $\bar{D} = \bar{D}^- \cup D^+ \cup \bar{I}_0 \cup \bar{I}_1$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (15) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) $\lim\limits_{R\to\infty} u(x,y) = 0$, $R^2 = x^2 + y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$,

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi(y),\ y \ge 0,$$

$$u(x,0) = \tau_1(x),\ x \in \bar{I}_1,$$

$$u(x,y)\big|_{OC_0} = \psi(x),\ 0 \le x \le c/2,$$

$$u(p(x),0) = \mu u(x,0) + f(x),\ \ 0 \le x \le c$$

и условию сопряжения

$\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y = \lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y$, $x\in I\setminus\{c\}$,

причем эти пределы при $x=0$, $x=1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=\beta_0/2$, $f(x)\in C^{0,\alpha_1}[0,c]$, $f(0)=0$, $f(c)=0$, $\psi(x)\in C^1[0,c/2]\cap C^{1,\delta_1}(0,c/2)$, $\psi(0)=0$, $\mu - const$, $\tau_1(x)\in C(\bar{I}_1)$, причем функция $\tau_1(x)$ в окрестности точки $x=1$ представима в виде $\tau_1(x)=(1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x)\in C(\bar{I}_1)$ и она удовлетворяет условию Гёльдера на любом отрезке $[1,N]$, $N>1$, $\tau_1(x)\in L(I_1)$ и при всех достаточно больших значениях x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)|\le M/x^{\delta}$, где M,δ – положительные постоянные числа, $\varphi(y)\in C[0,\infty)$, $y^{\beta_0/2}\varphi(y)\in L(0,\infty)$, $\varphi(y)$ – удовлетворяет условию Гёльдера на любом отрезке $[0,N]$, $N>0$, $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$.

Приведем формулировку основных результатов этого параграфа.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия $\varphi(y)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $\tau_1(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$, $0<\mu<1$. Тогда задача S имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия $p(x)=1-kx$, $k^{\frac{1}{2}-\alpha}\mu\sin(\alpha\pi)<1$, где $\alpha=\dfrac{1-\beta_0}{4}$, $k=(1-c)/c$, $0<\mu<1$. Тогда решение задачи S существует.

В § 3.2 исследована краевая задача Франкля для уравнения (8) в правой полуплоскости.

Пусть D – правая полуплоскость, $D^+(D^-)$ – первая (четвертая) четверть плоскости.

Задача F**.** Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ является решением уравнения (8) в области $D\setminus(\bar{J}_0\cup\Gamma)$,

где $\bar{J}_0=\{(x,y):0\le x<\infty, y=0\}$, $\Gamma: x-\dfrac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=0$;

2) $u(x,y)\in C(D\cup\{x=0\})$ и частное производное u_x непрерывно в $D\cup\{x=0\}$, а частное производное u_y непрерывно в $D\cup\{x=0\}\setminus\{y=0\}$, функции u_{xx} и u_{yy} непрерывны в области $D^+\cup D^-$ и на линии вырождения J_0 имеют место следующие условия сопряжения

$\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y = \lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y$, $x\in J_0$,

причём эти пределы при $x=0$ могут иметь особенность порядка ниже $1-2\beta$;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=O(x^{-2\beta-\varepsilon})$ при $y=0$, $x\to\infty$ ($\varepsilon>0$);

4) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,y)-u(0,-y)=f(y),\ -\infty<y<\infty,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ -\infty<y<\infty,$$

где $f(y)$ – заданная функция.

Имеет место следующая

Теорема 3.3. Если $f(y)$ - нечетная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в промежутке $(-\infty,\infty)$, и вторая производная удовлетворяет условию Гёльдера в $(-\infty,\infty)$, а при $y\to\infty$ $f(y)=O(y^{-(m+2\beta_0)/2})$, $f'(y)=O(y^{-1-(m+2\beta_0)/2})$, $f''(y)=O(y^{-2-(m+2\beta_0)/2})$, то задача F однозначно разрешима.

Доказательство теоремы 3.3 устанавлено методом интегральных уравнений.

В четвертой главе диссертации, названной **«Краевые задачи для одного класса уравнений смешанного типа в области, эллиптическая часть которой полуполоса»,** ставятся и исследуются краевые задачи для одного класса уравнений смешанного типа.

В § 4.1 изучена смешанная краевая задача, используя решение задачи Дирихле в эллиптической части рассматриваемой области для уравнения (8).

Пусть область D является суммой областей D^+ и D^-, первая из которых представляет собой эллиптическую полуполосу $0\le x\le 1$, $y\ge 0$, а вторая – характеристический треугольник OBC, где OC и BC – две пересекающиеся в точке $C\left(\frac{1}{2},-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$ характеристики уравнения (8), исходящие соответственно из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$.

Задача T**.** Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^2(D^+\cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (8) в $D^+\cup D^-$;

2) $\lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=0$ равномерно по $x\in[0,1]$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(1,y)=\varphi_2(y),\quad y\ge 0,$$

$$u\big|_{OC}=\psi(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y,\ x\in(0,1),$$

причем эти пределы при $x=0$, $x=1$ могут иметь особенность порядка ниже $1-2\beta$, где $\bar{D}=\bar{D}^-\cup D^+\cup\bar{I}_0\cup\bar{I}_1$, $\bar{I}_0=\{(x,y):x=0,y\ge 0\}$, $\bar{I}_1=\{(x,y):x=1,y\ge 0\}$, а $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ и $\psi(x)$ – заданные функции.

Имеет место следующая

Лемма 4.1. Если функция $u(x,y)$ – решение уравнения (8) в области D^-, такое, что $\tau(x)=u(x,0)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке $x=x_0$, $0<x_0<1$, при этом $u(x,y)\big|_{OC}\equiv 0$, то $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\dfrac{\partial u(x_0,y)}{\partial y}>0$ ($\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\dfrac{\partial u(x_0,y)}{\partial y}<0$).

С помощью этой леммы доказана следующая

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия $\varphi_1(y) \equiv 0$, $\varphi_2(y) \equiv 0$, $y \geq 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда задача T имеет лишь тривиальное решение.

Справедлива следующая

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия: $\varphi_i(y) \in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i(y) \in L(0,\infty)$, $i = 1,2$, а функция $\psi(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^{(3,\delta)}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\varphi_2(0) = 0$. Тогда решение задачи T существует.

В § 4.2 в области D, приведенной в параграфе 4.1 главы 4, исследуем задачу T, используя в эллиптической части решение задачи типа задачи N.

Единственность решения задачи доказывается, как и в параграфе 4.1.

Для доказательства существования решения задачи T в области D^+ решим вспомогательную задачу типа задачи N.

В § 4.3 в области D, приведенной в параграфе 4.1, поставлена и исследована задача с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения (8).

Задача G **.** Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами :

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D^+ \cup I_o \cup I_1 \cup D^-) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ удовлетворяет уравнению (8) в $D^+ \cup D^-$, $\lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ равномерно по $x \in [0,1]$;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) - u(1,y) = \varphi_1(y), \; y \geq 0,$$
$$u_x(0,y) - u_x(1,y) = \varphi_2(y), \; y > 0,$$
$$u(x,y)\big|_{OC} = \psi(x), \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y, \; x \in (0,1),$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ и $\psi(x)$ – заданные функции, такие, что

$$\psi(x) \in C^2\left[0, \frac{1}{2}\right], \; \varphi_1(y) \in C^1(0,\infty), \; \varphi_2(y) \in C^1(0,\infty), \; y^{\frac{3m+2\beta_0}{2}} \varphi_i(y) \in L_i(0,\infty), \; i = 1,2,$$
$$\varphi_1(\infty) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \; \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \psi(0).$$

С помощью принципа экстремума и методом интегральных уравнений доказаны теоремы единственности и существования решения задачи G.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами при младших производных в различных неограниченных областях.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. В неограниченной области впервые исследована новая краевая задача с недостающим условием Трикоми на части граничной характеристики и аналогом условия Франкля на частях отрезка изменения типа уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Разработан модифицированный метод доказательства единственности решения поставленных задач. При доказательстве существования решения изучаемой задачи впервые применяется теория сингулярных интегральных уравнений Винера-Хопфа.
2. Исследована новая краевая задача с недостающим условием смещения на граничных характеристиках и аналогом условия Франкля на частях линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. Доказано, что индекс полученных интегральных уравнений Винера-Хопфа равен нулю, что обеспечивает однозначную редукцию уравнения Винера –Хопфа к интегралным уравнениям Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения сформулированных задач.
3. Доказаны теоремы существования и единственности решения новой краевой задачи с условиями Франкля и Бицадзе-Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа.
4. С помощью принципа экстремума и методом интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость локальных и нелокальных краевых задач для обобщенного уравнения Трикоми в неограниченных областях, эллиптическая часть которых полуполоса или первая четверть плоскости. Полученные результаты могут послужить основой для изучения новых краевых задач для различных уравнений смешанного типа, а также при решении прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

RUZIEV MENGLIBAY KHOLTOJIBAYEVICH

LOCAL AND NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED TYPE EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS IN UNBOUNDED DOMAINS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2020

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.3.DSc/FM80

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Salakhitdinov Makhmud Salakhitdinovich** doctor of physical and mathematical sciences, academician
Official opponents:	**Pskhu Arsen Vladimirovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Durdiev Durdimurod Kalandarovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Zikirov Obidjan Salijanovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**Ferghana State University**

Defense will take place «____» __________ 2020 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: 100170, Uzbekistan, Tashkent city, Mirzo Ulugbek area, Mirzo Ulugbek str.,81, Ph.: (99871) 262-75-44, fax: (99871) 262-73-57, e-mail: kengash @mathinst.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № _____) (Address: 100170, Uzbekistan, Tashkent city, Mirzo Ulugbek area, Mirzo Ulugbek str., 81. Ph.: (99871) 262-75-44).

Abstract of dissertation sent out on « ___ » _________ 2020.
(mailing report №__ on « ___ » ____________ 2020).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.Q.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, PhD. senior researcher

A.Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. The theory of degenerate elliptic equations and mixed type equations with singular coefficients is currently, thanks to important applications in solving many applied problems, one of the main sections of the modern theory of partial differential equations. In particular, mathematical models of various processes in gas dynamics, aerodynamics are directly linked with such equations.

The aim of the research work is to formulate correct local and nonlocal boundary value problems for equations of mixed elliptic-hyperbolic type with singular coefficients and to prove their unigue solvability.

The tasks of research work:

to prove the existence and uniqueness of a solution of the problem with the conditions given on a piece of the boundary characteristic and on the line of degeneracy for an equation of mixed type with singular coefficients;

to study boundary value problems with shift on pieces of boundary characteristics for the Gellerstedt equation with a singular coefficient;

to study the boundary value problem with a shift in the internal characteristics for equations of elliptic-hyperbolic type;

to prove the existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem with the conditions of Frankl and Bitsadze-Samarskiy on the line of degeneracy and on parallel characteristics for one class of equations of mixed type;

to study local and nonlocal boundary value problems for equations of mixed elliptic-hyperbolic type with a singular coefficient in unbounded mixed domains, the elliptic part of which is a quarter of the plane and a vertical half-strip;

The object of the research work are equations of mixed elliptic-hyperbolic type with singular coefficients of lower terms.

Scientific novelty of the research work is as follows:

The unique solvability of boundary value problems with the conditions given on a piece of the boundary characteristic and on the line of degeneracy for a mixed type equation with singular coefficients in an unbounded domain is proved;

the existence of a unique solution of a boundary value problem with shift on pieces of boundary characteristics for the Gellerstedt equation with a singular coefficient is proved in an unbounded domain;

the unique solvability of the problem with shift in the internal characteristics for equations of elliptic-hyperbolic type is proved;

theorems on the existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem with the Frankl and Bitsadze-Samarskiy conditions on the line of degeneracy and on parallel characteristics for one class of mixed type equations are proved;

the unique solvability of boundary-value problem for equations of mixed elliptic-hyperbolic type with a singular coefficient in an unbounded domain, the elliptic part of which is the first quarter of the plane;

the unique solvability of the Frankl problem for a class of mixed type equations in the right half-plane is proved;

the existence and uniqueness of solution for local and nonlocal boundary value problems are proved for an equation of mixed type with a singular coefficient in an unbounded domain, the elliptic part of which is a half-strip.

The outline of the thesis. The dissertation is devoted to the study of the solvability of local and nonlocal boundary value problems for mixed type equations with singular coefficients of lower derivatives in various unbounded domains. In conclusion, we can make the following remarks on results of the investigation:

1. In an unbounded domain, a new boundary value problem with the missing Tricomi condition on a part of the boundary characteristic and an analogue of the Frankl condition on parts of the interval of a change in the type of an equation of mixed type with singular coefficients is studied for the first time. A modified method for proving the uniqueness of the solution to the problems posed is developed. In proving the existence of a solution to the problem under study, the theory of Wiener-Hopf singular integral equations is used for the first time.

2. A new boundary value problem with the missing displacement condition on the boundary characteristics and an analogue of the Frankl condition on the parts of the degeneration line for the Gellerstedt equation with a singular coefficient is investigated. It is proved that the index of the obtained Wiener-Hopf integral equations is equal to zero, which provides a unique reduction of the Wiener-Hopf equation to Fredholm integral equations of the second kind, whose unique solvability follows from the uniqueness of the solution of the formulated problems.

3. Existence and uniqueness theorems for the solution of a new boundary value problem with the Frankl and Bitsadze-Samarskii conditions on the degeneration line and on parallel characteristics for equations of mixed elliptic-hyperbolic type are proved.

4. Using the extremum principle and the method of integral equations, the unique solvability of local and nonlocal boundary value problems for the generalized Tricomi equation in unbounded domains is proved, the elliptical part of which is a half-strip or the first quarter of the plane. The results obtained can serve as a basis for studying new grass problems for various equations of mixed type, as well as for solving applied problems that lead to such equations.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Салахитдинов М.С., Рузиев М.Х. Задача Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2005. – № 2. – С. 77 – 83. (01.00.00, № 6).
2. Рузиев М.Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой – полуполоса // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки". – 2009. – № 1(18). – С. 33 – 40.(3. Scopus).
3. Рузиев М.Х. Задача Франкля в полуплоскости для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Доклады АН РУз. –Ташкент, 2009. – № 5. – С. 12 – 15. (01.00.00, № 7).
4. Ruziev M.Kh. A nonlocal problem for a mixed-type equation with a singular coefficient in an unbounded domain. // Russian Mathematics. – 2010. V. 54. Issue 11. pp. 36-43. (3. Scopus. IF=0.225).
5. Mirsaburov M., Ruziev M.Kh. A boundary value problem for a class of mixed-type equations in an unbounded domain. // Differential Equations. 2011. V. 47. Issue 1. pp. 111 -118. (3. Scopus. IF=0.66).
6. Рузиев М.Х. О разрешимости одной задачи для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2011. – № 3. – С. 154 – 160. (01.00.00, № 6).
7. Ruziev M.Kh. On the boundary-value problem for a class of equations of mixed type in an unbounded domain. Mathematical Notes. – 2012. V.92. Issue 1-2. pp. 70-78.(3. Scopus. IF=0.6).
8. Ruziev M.Kh. Problems with shifts for mixed elliptic-hyperbolic equations. // Russian Mathematics. – 2012. V.56. Issue 1. pp. 66-75. (3. Scopus. IF=0.225).
9. Ruziev M.Kh. A Problem with the Frankl and Bitsadze-Samarskii condition on the line of degeneracy and on parallel characteristics for a mixed-type equation. // Russian Mathematics. – 2012. V.56. Issue 8. pp. 35-43. (3. Scopus. IF=0.225).
10. Ruziev M.Kh. Problem with shifts in interior characteristics for equations of mixed elliptic-hyperbolic type with a singular coefficient // Differential Equations. 2013. V. 49. Issue 8. pp. 986-995.(3. Scopus. IF=0.66).
11. Рузиев М.Х. Задача с условиями, заданными на внутренней характеристике и на линии вырождения, для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2013. – № 2. – С. 86 – 94. (01.00.00, № 6).

12. Рузиев М.Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки”. – 2014. – № 3(36). – С. 44 – 54, (3. Scopus).
13. Рузиев М.Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2016. – № 2. – С. 100 – 108. (01.00.00, № 6).
14. Салахитдинов М.С., Рузиев М.Х. О краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2017. – № 1. – С. 124 – 128. (01.00.00, № 6).
15. Рузиев М.Х. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2017. – № 2. – С.130 – 133. (01.00.00, № 6).
16. Ruziev M.Kh. A problem wits shifts on piece of boundary characteristic for Gellerstedt equation with singular coefficient in an unbounded domain // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2019. – No.1. – pp. 27 –42. (01.00.00, № 17).
17. Ruziev M.Kh. A problem with conditions given on inner characteristics and on the line of degeneracy for a mixed-type equation with singular coefficients // Boundary Value Problems. – 2013. – 210. Doi:10.1186/1687-2770-2013-210. (3. Scopus, IF=1.637).
18. Ruziev M.Kh. Generalized Frankl-Rassias problem for a class of mixed type equations in an infinite domain // Journal of Partial Differential Equations. – 2014. – vol. 27. – No.2. – pp. 176 – 188.
19. Ruziev M, Reissig M. Tricomi type equations with terms of lower order**.** **//** International Journal Dynamical Systems and Differential Equations. – 2016. – Vol. 6. – No.1. – pp. 1 – 15. (3. Scopus, IF=0.15).
20. Ruziev M.Kh. A boundary value problem for the degenerated elliptic equation with singular coefficient and spectral parameter // Journal of Partial Differential Equations. – 2018. – v. 31. – No.3. – pp. 214 – 223.
21. Ruziev M.Kh. A boundary value problem for the Holmgren equation with singular coefficient and spectral parameter // Journal of Elliptic and Parabolic Equations. – 2019. V.5. Issue 2. pp. 269–280. (3. Scopus).

II бўлим (II часть; II Part)

22. Рузиев М.Х. О задаче Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тезисы докладов конференции. 29 января – 2 февраля 2007. – Самара, 2007. С. 99 – 100.
23. Рузиев М.Х. О задаче с нелокальными краевыми условиями для вырождающегося эллиптического уравнения с сингулярным

коэффициентом и спектральным параметром //Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции. 24-28 июня 2008. – Стерлитамак, 2008. С. 151- 153.

24. Рузиев М.Х. О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л.Соболева. 5-12 октября 2008. – Новосибирск, 2008. С. 198.
25. Рузиев М.Х. О задаче с условиями Геллерстедта и Франкля для уравнения смешанного типа в неограниченной области //Дифференциальные уравнения и их приложения: Тезисы докладов конференции. 29 июня -2 июля 2009. – Самара, 2009. С. 52 – 53.
26. Ruziev M.Kh. A problem with Frankle condition on the line of degeneration for a mixed type equation. // Algebraic structures in partial differential equations related to complex and Clifford analysis: Based on the selected lectures of the 17^{th} International Conference on Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications. – Ho Chi Minh City University of Education Press, 2010. pp. 209 – 223.
27. Ruziev M.Kh. On a problem with two non-local boundary conditions for mixed type equation with singular coefficient in a domain, elliptic part of which is half-band // Abstract Book 18^{th} International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications. 13-17 August 2010. – University of Macau, 2010. pp. 28-30.
28. Ruziev M.Kh. A boundary-value problem for a class of mixed type equations in an infinite domain // Abstracts "The 1st International Conference on Mathematics and its Applications": 15-16 Oktober 2010,– Dongguk University, Gyeongju, Republic of Korea, 2010. pp. 50-53.
29. Рузиев М.Х. О задаче с условиями Геллерстедта и Франкля для уравнения смешанного типа в неограниченной области //Математические моделирование и краевые задачи: Труды Восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. 15-17 сентября 2011. – Самара, 2011. Часть 3. С. 158 - 160.
30. Рузиев М.Х. Задача со смещениями для одного класса уравнений смешанного типа// Дифференциальные уравнения и их приложения: Тезисы докладов конференции. 26 - 30 июня 2011. – Самара, 2011. С.96-97.
31. Рузиев М.Х. О задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области //Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ. 21-23 ноября 2013. – Ташкент, 2013. С. 87-89.
32. Рузиев М.Х. О разрешимости краевой задачи для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области

//Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. 21-23 мая 2013. – Самара, 2013.С.78 – 80.

33. Ruziev M.Kh. A boundary value problem for a mixed type equation with singular coefficient // The 10th International ISAAC(The International Society for Analysis, its Applications and Computation): August 3-8 2015. – University of Macau, 2015. pp.161-162.
34. Ruziev M.Kh. A problem with two nonlocal boundary conditions for a mixed type equation with singular coefficient //24th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications: August 22-26, 2016. – Jaipur, India, 2016. p. 207.
35. Рузиев М.Х. О задаче типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами //Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных: Тез. докл. межд. научн. конф. 16-18 июня 2016. – Москва, 2016. С. 41.
36. Рузиев М.Х. О краевой задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в неограниченной области //Актуальные проблемы прикладной математики и информатики: Тез. докл. Межд .научн. конф. 17-22 октября 2016. – Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, 2016. С. 272-274.
37. Рузиев М.Х. Краевая задача типа задачи Бицадзе – Самарского для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса //Математическое моделирование и краевые задачи: Тез. докл. Десятой Всероссийск. науч. конф. с международным участием. 24-28 мая 2016. – Самара, 2016. С. 76-77.
38. Рузиев М.Х. Краевая задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами //Актуальные вопросы анализа: Тез. докл. Респ. Науч. конф. 22-23 апреля 2016 года, – Карши, 2016. С. 168-169.
39. Рузиев М.Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области //International conference on nonlinear analysis and its applications: September 19-21 2016. Samarkand, 2016. pp. 61-62.
40. Рузиев М.Х. О задаче типа задачи Бицадзе – Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области //Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий: Тез. докл. межд. науч. конф. 9-10 ноября 2016. –Бухара, 2016. С. 136-137.
41. Рузиев М.Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом //Жизнь и творчество академика Ташмухаммеда Ниязовича Кары-Ниязова: Тез.

докл. конф. с участием зарубежных ученых. 7-8 сентября 2017. – Ташкент, 2017. С. 88-89.

42. Рузиев М.Х. О нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой полуполоса //Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: Тез. докл. Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 15-17 декабря 2017. – Ташкент, 2017. С. 68.
43. Рузиев М.Х. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса //Математика в современном мире: Тез. докл. Межд. конференции, посвящ. 60-летию Института математики им.С.Л.Соболева . 14-19 августа 2017. – Новосибирск, Россия. С. 244.
44. Рузиев М.Х. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: Сборник тезисов докладов Международной научной конференции. 12-16 марта 2018. –Башкортостан, Южный Урал, 2018. С. 71.
45. Рузиев М.Х. О нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области //Традиционная международная научная апрельская конференция: Тезисы докладов. – Алматы, 2018. С. 86-87.
46. Рузиев М.Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами //Новые результаты математики и их приложения: Тезисы докладов республиканской научной конференции. 14-15 мая 2018. – Самарканд, 2018. С. 88-90.
47. Рузиев М.Х. О краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.// Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Тезисы докладов Узбекско-Российской научной конференции. 24-26 октября 2019 .– Ташкент, 2019. С. 126-127.
48. Рузиев М.Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики. Тезисы докладов Международной научной конференции. 12-13 март 2020.–Фергана, 2020. С. 129-130.