ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.30/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

НАМАНГАН МУҲАНДИСЛИК - ҚУРИЛИШ ИНСТИТУТИ

ЖУРАЕВ АБДУЛЛА ХАТАМОВИЧ

УЧИНЧИ ВА БЕШИНЧИ ТАРТИБЛИ КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02– Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Фарғона–2020

УДК: 517.953.5

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ
PhD.30/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

НАМАНГАН МУҲАНДИСЛИК - ҚУРИЛИШ ИНСТИТУТИ

ЖУРАЕВ АБДУЛЛА ХАТАМОВИЧ

УЧИНЧИ ВА БЕШИНЧИ ТАРТИБЛИ КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02– Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Фарғона–2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM217 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Наманган муҳандислик-қурилиш институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.fdu.uz) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Апаков Юсупжон Пулатович** физика-математика фанлари доктори, доцент
Расмий оппонентлар:	**Аманов Джумаклич** физика-математика фанлари доктори, доцент
	Газиев Кобилжон Солижонович физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Фарғона давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___» __________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19 уй. Тел.: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Диссертация билан Фарғона давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (_____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19 уй. Тел.: (+99873) 244-44-94).

Диссертация автореферати 2020 йил «___» _______________ куни тарқатилди.
(2020 йил «___» _______________ даги ___________ рақамли реестр баённомаси).

А.К. Уринов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

И.У.Ҳайдаров
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий
котиби, ф.-м.ф.н.

Ш.Т. Каримов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Замонавий илм-фаннинг ривожланиши XX асрнинг ўрталарига келиб физик моделларга аниқлик киритишни талаб қилди. Амалиёт талабларидан келиб чиқиб, юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, хусусан, ўзига хос жиҳатлари билан алоҳида ўринга эга бўлган тоқ тартибли тенгламалар назариясига эътибор кучайди. Чекли амплитудага эга бўлган дисперсион муҳитдаги кичик тўлқинни тадқиқ қилишда модел сифатида Кортевега-де Фриз тенгламасидан фойдаланилади. Қисқа тўлқинлар назариясини ўрганишда эса транстовушли тенглама, яъни учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенглама мухим ахамиятга эга. Плазмадаги тўлқин жараёнларида ва дисперсион муҳитдаги урилувчи кучсиз тўлқинлар назариясини ўрганишда бешинчи тартибли каррали характеристикали тенглама математик модел сифатида хизмат қилади. Шу муносабат билан учинчи ва бешинчи тартибли тенгламалар билан боғлиқ тадқиқотларни ривожлантириш математик физика тенгламалари ичида муҳим аҳамият касб этади.

Мамлакатимиз олимлари томонидан учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламаларни ўрганишда салмоқли натижаларга эришилди. Хусусан, Л.Каттабрига томонидан қурилган хосмас интеграллар билан ифодаланувчи фундаментал ечим ёрдамида чегаравий масалалар ечилди.

Ҳозирги кунда мамлакатимиз олимлари олдига фундаментал фанларнинг амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътиборни қаратиш муҳим вазифа сифатида қўйилган. Шунингдек, математик фанларнинг устивор йўналишлари бўйича, айниқса, алгебра ва функционал анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар назарияси, геометрия ва топология, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, амалий математика ва математик моделлаштириш бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий тадқиқот ишларини олиб бориш Математика институтининг асосий вазифаси ва йўналишлари этиб белгиланган[1]. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, хусусан, учинчи ва бешинчи тартибли каррали характеристикали тенгламалар назариясини ривожлантириш қарор ижросини таъминлашда муҳим аҳамият касб этади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сонли “Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сонли “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб

----

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги № 292 «Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида» ги қарори.

қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сонли “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика ва фан технологиялари ривожланишининг устувор йуналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика и информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенглама билан боғлиқ тадқиқотлар H.Block, E.Del Vicchio ларнинг мос равишда 1912 ва 1915 йилларда эълон қилинган фундаментал ишларидан бошланган. L. Cattabriga томонидан 1961 йилда бу тенглама учун каррали хосмас интеграллар орқали ифодаланувчи фундаментал ечим қурилди, унинг хусусиятлари ўрганилди. Бу изланишлар Италиянинг Турин университетидан Л.Родино ва М.Марселлолар ҳамда Москва давлат университетидан А.А.Дезинлар томонидан функционал анализ усулларини қўллаган ҳолда давом эттирилди. Т.Д.Джураев, С.Абдиназаров ва уларнинг ўқувчилари томонидан L.Cattabriga қурган фундаментал ечим ёрдамида потенциаллар назариясидан фойдаланиб, чегаравий масалалар ечдилар. Т.Д.Джураев ва Ю.П.Апаковлар томонидан 2007 йилда бузулувчи гипергеометрик функция орқали ифодаланган янги фундаментал ечим қурилди, хусусиятлари ўрганилди ва у чегаравий масалалар ечишга қўлланилди ҳамда чегаравий масалаларни Фурье усулида ечиш алгоритми ишлаб чиқилди.

Татбиқий нуқтаи назардан, учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламани ўрганишнинг мухимлиги Воронеж университетидан В.Н.Диесперов, О.С.Рыжов и Ю.В.Засоринларнинг ишларида асосланган. Туркиялик A.Ashyraliev, N.Aggez, F.Hazenci ва Алжирлик N.Bendjazia, A.Guezane-Lakoud, R.Khaldiлар изланишларида эса сонли усулда ечим топиш билан шуғулланилган. Бешинчи тартибли каррали характеристикали тенгламалар эса плазмадаги тўлқин жараёнларининг математик модели сифатида хизмат қилади. Ю.В.Засорин, Н.В.Дерендяев, В.В.Новиков, В.А.Вахрушевларнинг ишларида бешинчи тартибли тенгламага қўйилган масаланинг ечиш асослари ишлаб чиқилган. Р.Булаф, Ф.Кодри ва Р.Додд, Дж.Эйлбек, Дж.Гиббон, Х.Мориссларнинг монографияларида бешинчи тартибли тенглама тадқиқининг муҳимлиги асосланган. А.К.Уринов, А.Т.Абдуқодиров ишида бешинчи тартибли дифференциал тенгламаларни каноник кўринишга келтириш масаласи ўрганилган.

Мазкур диссертация иши учинчи ва бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламаларга коррект чегаравий масалалар қўйиш ва ечишга бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Наманган мухандислик-қурилиш институтининг илмий - тадқиқот ишлари режасининг «Дифференциал тенгламага классик ва ноклассик масалалар ва уларнинг татбиқлари» номли банди доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади чекли ва чексиз соҳаларда вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган каррали характеристикали учинчи ва бешинчи тартибли тенгламаларга чегаравий масалалар қўйиш ва уларни текшириш ҳамда бешинчи тартибли тенгламага қўйилган масалани Фурье усулида ечиш алгоритмини ишлаб чиқишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

кичик ҳадларга эга бўлган учинчи тартибли каррали характеристикали тенгламага қўйилган чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш;

берилган функциялар учун қўйилган масалалар корректлигини таъминловчи етарли шартларни аниқлаш;

тенглама кичик ҳадларининг қўйилган масаланинг корректлигига таъсирини аниқлаш;

учинчи тартибли каррали характеристикали бир жинсли бўлмаган тенгламага қўйилган чегаравий масалага Грин функцияси қуриш ва уни чегаравий масала ечишга қўллаш;

бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламага қўйилган чегаравий масалаларни Фурье усулида ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш.

Тадқиқотнинг объекти учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган тенглама ҳамда бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети учинчи тартибли каррали характеристикали кичик хадларга эга бўлган тенгламага ҳамда бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган модел тенгламага қўйилган чегаравий масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, дифференциал тенгламалар, математик физика ва чизиқли алгебра усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган тенглама учун тўғри тўртбурчакда иккинчи чегаравий масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги тенгламанинг коэффициентлари ва берилган функцияларга қўйилган шартлар асосида исботланган;

учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган тенгламанинг кичик ҳадини тўғри тўртбурчакда қўйилган иккинчи чегаравий масаланинг корректлигига таъсири аниқланган ва бир жинсли масаланинг тривиал бўлмаган ечимлари қурилган;

учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган тенглама учун тўғри тўртбурчакда учинчи чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши тенглама ва чегаравий шартлар коэффициентлари ҳамда берилган функцияларга қўйилган шартлар асосида исботланган;

учинчи тартибли каррали характеристикали бир жинсли бўлмаган тенгламага тўғри тўртбурчакда қўйилган биринчи чегаравий масала ечимининг ягоналиги исботланган, масалага мос Грин функцияси қурилган ва масала ечимининг формуласи Грин функцияси ёрдамида ёзилган;

бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламага қўйилган коррект чегаравий масалаларни Фурье усулида ечиш алгоритми ишлаб чиқилган ва уни тўғри тўртбурчакда ва ярим полосада масала ечишга қўлланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қурилган ечимлар формулаларидан физик жараёнларнинг сифат кўрсаткичларини аниқлашда ва сонли хисоблашларда фойдаланиш мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг усулларидан фойдаланиб, дедуктив хулосалар қабул қилинганлиги ҳамда теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти уларнинг юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясини янада ривожлантиришда фойдаланилиши мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни учинчи ва бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламалар орқали ифодаланувчи физик жараён ва ҳодисаларнинг моделларига татбиқ этиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертацияда олинган илмий натижалар қуйидаги лойиҳаларда амалиётга жорий қилинган:

учинчи тартибли вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламага қўйилган масаланинг Грин функцияси қуриш ёрдамида ечиш усулидан «Юқори тартибли юкланган тенгламалар учун чегаравий масалалар» мавзусидаги №245612-2015, (2015-2019) рақамли хорижий лойиҳада янги чегаравий масалаларни ечишда фойдаланилган (Е.А.Букетов номидаги Қарағанда давлат университетининг 2020 йил 13 февралдаги 02-07/733-сонли маълумотномаси). Илмий натижани қўллаш қўйилган масала ечимини ошкор ёзишга имкон берган;

бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламага қўйилган чегаравий масалани ечишда таклиф этилган Фурье усули алгоритмидан «Тебраниш системаларида касрли ҳисобнинг татбиқи» мавзусидаги №АААА-Б19-219021990010-4 рақамли хорижий лойиҳада юқори тартибли тенгламага қўйилган масалани ечишда фойдаланилган (ФГБОУ ВО Витус Беренг номидаги Камчатка давлат университетининг 2020 йил 19 февралдаги № 90-01-рақамли маълумотномаси). Илмий натижани қўллаш юқори тартибли каррали характеристикали тенгламага қўйилган янги масаланинг ечимини ошкор ҳолда қуришга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 19 та халқаро ва 8 та республика илмий ва илмий – амалий анжуманларда муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 34 та илмий иш чоп этилган, улардан 7 таси илмий мақола бўлиб, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этишга тавсия қилинган нашрларда, шундан 1 таси хорижий ва 6 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 103 бет.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Учинчи тартибли каррали характеристикали тенгламага чегаравий масалалар»** деб номланган биринчи бобида учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадлар ва вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламага тўғри тўртбурчакда қўйилган биринчи, иккинчи ва учинчи чегаравий масалалар тадқиқ қилинган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида $D=\{(x,y):0<x,y<1\}$ тўғри тўртбурчакда

$$u_{xxx}-u_{yy}+au_x+cu=0 \tag{1}$$

тенглама учун биринчи ва иккинчи чегаравий масалалар ўрганилган, бу ерда a ва c - берилган мусбат сонлар.

A_1 **масала.** D соҳада (1) тенгламанинг $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$ синфга тегишли ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u_y(x,0)=0,\qquad u_y(x,1)=0,\quad 0\le x\le 1,$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u(1,y)=\varphi_2(y), \qquad u_x(1,y)=\varphi_3(y), \quad 0\le y\le 1,$$

бунда $\varphi_i(y)$, $i=\overline{1,3}$ – етарлича силлиқ берилган функциялар.

Энергия интеграли усули билан қуйидаги теорема исботланган.

1-теорема . Агар A_1 масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Ўзгарувчиларни ажратиш усули билан A_1 масаланинг ечими қуйидаги қатор кўринишида ҳосил қилинган

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}e^{-2\alpha_n x}+C_{2n}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x+C_{3n}e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x\right]\cos\pi ny. \tag{2}$$

2-теорема. Агар $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$ ва $\varphi_i^{(k)}(0)=\varphi_i^{(k)}(1)=0,\ i=1,2,3,\ \ k=\overline{1,3}$ бўлса, A_1 масаланинг ечими мавжуд ва у (2) кўринишга эга бўлади.

A_2 **масала.** D соҳада (1) тенгламанинг $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$ синфга тегишли ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(x,0)=0, \quad u(x,1)=0, \quad 0\le x\le 1,$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u(1,y)=\varphi_2(y), \qquad u_x(1,y)=\varphi_3(y), \quad 0\le y\le 1,$$

бунда $\varphi_i(y)$, $i=\overline{1,3}$ - етарлича силлиқ берилган функциялар.

A_2 масала A_1 масала каби ечилади.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида $c<0$ бўлганда иккинчи чегаравий масала ўрганилган. Агар 1-теоремада c коэффициент манфий бўлса, у ҳолда иккинчи чегаравий масала нокоррект бўлади, яъни ечимнинг ягоналиги бузилади. Бунда иккинчи чегаравий масала бир жинсли шартлар билан нолдан фарқли ечимга эга бўлади.

D соҳада қуйидаги масалани

$$u_{xxx}-u_{yy}+au_x+cu=0, \qquad c<0,$$

$$u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,1)=0, \quad 0\le x\le 1, \tag{3}$$

$$u(0,y)=0, \quad u(1,y)=0, \qquad u_x(1,y)=0, \quad 0\le y\le 1,$$

қарайлик. (3) масаланинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$u(x,y)=X(x)Y(y).$$

У ҳолда $X(x)$ ва $Y(y)$ учун қуйидаги масалаларни оламиз:

$$\begin{cases} X''' + aX' + \eta X = 0, \\ X(0) = 0, \ \ X(1) = 0, \ \ X'(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} Y'' + \mu Y = 0, \\ Y'(0) = 0, \ Y'(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

(4)-(5) масалаларнинг хос функциялари мос равишда

$$X_k(x) = e^{2\alpha_k x} - e^{-\alpha_k x}\left(\cos\beta_k x - M\ \sin\beta_k x\right), \quad Y_n(y) = \cos\pi n y$$

кўринишда бўлади. Бу ерда

$$M = \frac{\cos\beta_k - e^{3\alpha_k}}{\sin\beta_k}.$$

$c = \eta - \mu$ муносабатдан $c_{nk} = -m_k^3 - a m_k - n^2\pi^2$ ёки

$$c_{nk} = -\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right)^2 - a}\right)^3 + \frac{2a}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right)^2 - a} + n^2\pi^2\right), \quad n, k = 1, 2, 3, \cdots,$$

бунга мос ечим эса

$$u_{kn}(x, y) = X_k(x)Y_n(y) = \left[e^{2\alpha_k x} - e^{-\alpha_k x}\left(\cos\beta_k x - M\ \sin\beta_k x\right)\right]\cos\pi n y$$

кўринишга эга бўлади. Бу функция иккинчи чегаравий масаланинг бир жинсли шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечими бўлади.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида (1) тенглама учун учинчи чегаравий масала ўрганилган.

B **масала.** D соҳада (1) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}\left(\overline{D}\right)$ синфга тегишли ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$\begin{cases} \alpha u(x,0) + \beta u_y(x,0) = 0, \\ \gamma u(x,1) + \delta u_y(x,1) = 0, \end{cases} \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1,$$

бунда $\varphi_i(y), \ i = \overline{1,3}$ - етарлича силлиқ берилган функциялар ва қуйидаги мувофиқлик шартларини бажаради

$$\alpha\varphi_i^{(j)}(0) + \beta\varphi_i^{(j+1)}(0) = 0, \ \ \gamma\varphi_i^{(j)}(1) + \delta\varphi_i^{(j+1)}(1) = 0, \ i = 1,3, \ \ j = 0,2. \tag{6}$$

Бундан ташқари $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - ўзгармас сонлар бўлиб, $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0, \gamma^2 + \delta^2 \ne 0$ шартларни қаноатлантиради.

3-теорема. Агар B масаланинг ечими мавжуд бўлиб, $\alpha\beta \le 0, \delta\gamma \ge 0$ шартлар бажарилса, у ягонадир.

B масаланинг ечимини $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ кўринишда қидирамиз. У ҳолда $Y(y)$ функцияни топиш учун Штурм – Лиувилл типидаги қуйидаги масалага келамиз: μ параметрнинг шундай қийматини топингки,

$$Y'' + \mu Y = 0, \quad \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, \quad \gamma Y(1) + \delta Y'(1) = 0$$

масала нолдан фарқли ечимга эга бўлсин.

Бу масалани ечиб, $\sqrt{\mu_n} = \pi n + \varepsilon_n$, бунда $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, ёки $\mu_n = O\left(n^2\right)$, $n \to \infty$, хос қийматлар ва уларга мос бўлган

$$Y_n(y) = \alpha \sin\sqrt{\mu_n}\, y - \beta\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\, y \tag{7}$$

хос функциялар топилган ва (7) функциялар системаси $[0,1]$ кесмада ортогонал эканлиги кўрсатилган.

B масаланинг ечими қуйидаги қатор кўринишида қурилган:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}e^{-2\alpha_n x} + C_{2n}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x + C_{3n}e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x\right]Y_n(y). \tag{8}$$

4-теорема. Агар $\varphi_i(y) \in C^4[0,1]$, $i = \overline{1,3}$ ва (6) мувофиқлик шартлари бажарилса, B масаланинг ечими мавжуд ва у (8) кўринишга эга бўлади.

Диссертациянинг **«Учинчи тартибли каррали характеристикали тенглама учун Грин функцияси қуриш ва уни масала ечишда қўллаш»** деб аталувчи иккинчи бобида чегаравий масалалар фундаментал ечимдан фойдаланиб, Грин функцияси қуриш усули ёрдамида ечилган.

Диссертациянинг бу бобида тўғри тўртбурчакда биринчи ва иккинчи чегаравий масалалар Грин функцияси қуриш усули билан ечилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфи D соҳада

$$L(u) = u_{xxx} - u_{yy} = g(x,y) \tag{9}$$

тенглама учун масаланинг қўйилиши ва унинг ечими ягоналигини исботлашга бағишланган.

B_1 **масала.** D соҳада (9) тенгламанинг $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$ синфга тегишли ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u(x,1) = \varphi_2(x), \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$u_{xx}(0,y) = \psi_1(y), \quad u_x(1,y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(1,y) = \psi_3(y), \quad 0 \le y \le 1,$$

бунда

$$\varphi_i(x)\in C^2[0,1], i=1,2,\ \ \psi_j(y)\in C[0,1],\ \ j=\overline{1,3},\ \ g(x,y)\in C^{0,2}_{x,y}\left(\overline{D}\right),$$

бундан ташқари, қуйидаги мувофиқлик шартлари бажарилади:

$$\begin{gathered}\varphi_1'(1)=\psi_2(0),\quad \varphi_2'(1)=\psi_2(1),\quad \varphi_1''(0)=\psi_1(0),\quad \varphi_1''(1)=\psi_3(0),\\ \varphi_2''(1)=\psi_3(1),\quad \varphi_2''(0)=\psi_1(1),\qquad g(x,0)=g(x,1)=0.\end{gathered} \tag{10}$$

5-теорема. Агар B_1 масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида Грин фунциясини қуриш учун қуйидаги ёрдамчи масала кўрилган.

B_{11} **масала.** D соҳада (9) тенгламанинг қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,1)=0,\qquad\qquad 0\le x\le 1,$$

$$u_{xx}(0,y)=u_x(1,y)=u_{xx}(1,y)=0,\qquad 0\le y\le 1.$$

Қўйилган B_{11} масаланинг ечимини

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\sin k\pi y$$

кўринишда қидирамиз, у ҳолда $X_k(x)$ функция учун қуйидаги масалага келамиз:

$$\begin{cases} L[X_k]\equiv X_k'''(x)+\lambda_k^3X_k(x)=g_k(x),\\ X_k''(0)=X_k'(1)=X_k''(1)=0.\end{cases} \tag{11}$$

(11) масаланинг ечими

$$X_k(x)=\int_0^1 G_k(x,\xi)\,g_k(\xi)d\xi$$

кўринишда бўлади, бунда

$$g_k(x)=2\int_0^1 g(x,y)\sin k\pi y\,dy\ ,$$

$G_k(x,\xi)$ - (11) масаланинг Грин функциясидан иборат.

У ҳолда B_{11} масаланинг ечими қуйидаги кўринишни олади:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\pi ky\int_0^1 G_k(x,\xi)g_k(\xi)\,d\xi=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}G_k(x,\xi)\sin\pi ky\ g_k(\xi)\,d\xi.$$

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида қурилган ечимнинг баҳоси топилган ва B_1 масаланинг ечими ошкор ҳолда ёзилган:

$$
\begin{aligned}
2u(x,y) &= \int_0^1 G(x,y,1,\eta)\psi_3(\eta)\,d\eta - \int_0^1 G(x,y,0,\eta)\psi_1(\eta)\,d\eta - \\
&- \int_0^1 G_\xi(x,y,1,\eta)\psi_2(\eta)\,d\eta + \int_0^1 G_\eta(x,y,\xi,1)\varphi_2(\xi)\,d\xi - \\
&- \int_0^1 G_\eta(x,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi - \iint_D G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

бунда

$$G(x,\xi,y,\eta) = 2\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\sin\pi k\eta\cdot\sin\pi ky\,.$$

Қуйидаги теорема исботланган:

6-теорема. Агар $\varphi_i(x)\in C^2[0,1]$, $i=1,2$, $\psi_j(y)\in C[0,1]$, $j=\overline{1,3}$, $g(x,y)\in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D})$ ва (10) мувофиқлик шартлари бажарилса, B_1 масаланинг ечими мавжуд ва у (12) кўринишда бўлади.

B_2 **масала.** D соҳада (9) тенгламанинг $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$ синфга тегишли ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u_y(x,0)=\varphi_3(x),\;\; u_y(x,1)=\varphi_4(x),$$

$$u_{xx}(0,y)=\psi_1(y),\;\; u_x(1,y)=\psi_2(y),\;\; u_{xx}(1,y)=\psi_3(y),$$

бунда

$$\varphi_i(x)\in C^2[0,1], i=3,4,\;\; \psi_j(y)\in C[0,1],\;\; j=\overline{1,3},\;\; g(x,y)\in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D}),$$

бундан ташқари, қуйидаги мувофиқлик шартлари бажарилади:

$$\varphi_1'(0)=\psi_1(0),\;\; \varphi_1(1)=\psi_2(0),\;\; \varphi_1'(0)=\psi_3(0),\;\; \varphi_1'(1)=\psi_3(0),$$

$$\varphi_2'(0)=\psi_1(1),\;\; \varphi_2(1)=\psi_2(1),\;\; \varphi_2'(0)=\psi_1(1),\;\; g'(x,0)=g'(x,1)=0.$$

B_2 масала B_1 масала каби ечилади.

Диссертациянинг **«Бешинчи тартибли каррали характеристикали тенглама учун чегаравий масалалар»** деб номланган учинчи боби бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламага чегаравий масалалар қўйиш ва тадқиқ қилишга бағишланган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида тўғри тўртбурчакда биринчи ва иккинчи чегаравий масалалар ўрганилган.

$D=\{(x,y):0<x,y<1\}$ соҳада бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган қуйидаги тенгламани қараймиз:

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,. \qquad (13)$$

A_{31} **масала.** D соҳада (13) тенгламанинг $C^{5,2}_{x,y}(D)\cap C^{4,1}_{x,y}(\overline{D})$ синфга тегишли ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин:

$$u(x,0)=0,\ \ u(x,1)=0\,, \qquad (14)$$

$$\begin{cases} u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\\ u(1,y)=\varphi_3(y),\ u_x(1,y)=\varphi_4(y),\ \ u_{xx}(1,y)=\varphi_5(y),\end{cases}$$

бунда $\varphi_i(y),\ \ i=\overline{1,5}$ – етарлича силлиқ берилган функциялар.

7-теорема. Агар A_{31} масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

A_{31} масаланинг ечими қуйидаги кўринишда қурилган:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\sin\pi n y, \qquad (15)$$

Бунда

$$X_n(x)=C_{1n}e^{\lambda_n x}+e^{\lambda_n\alpha_2 x}(C_{2n}\cos\lambda_n\beta_2 x+C_{3n}\sin\lambda_n\beta_2 x)+$$
$$+e^{-\lambda_n\alpha_1 x}(C_{4n}\cos\lambda_n\beta_1 x+C_{5n}\sin\lambda_n\beta_1 x).$$

8-теорема. Агар $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$ ва $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0,\ \ \varphi_i''(0)=\varphi_i''(1)=0,$ $i=\overline{1,5}$ шартлар бажарилса, A_{31} масаланинг ечими мавжуд ва у (15) қатор кўринишида бўлади.

A_{32} **масала.** D соҳада (13) тенгламанинг қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин:

$$u_y(x,0)=0,\ \ u_y(x,1)=0\,,$$

$$\begin{cases} u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\\ u(1,y)=\varphi_3(y),\ u_x(1,y)=\varphi_4(y),\ \ u_{xx}(1,y)=\varphi_5(y),\end{cases}$$

бунда

$$\varphi_i(y)\in C^4[0,1],\quad \varphi_i'(0)=\varphi_i'(1)=\varphi_i'''(0)=\varphi_i'''(1)=0,\qquad i=\overline{1,5}\,.$$

A_{32} масала A_{31} масала каби тадқиқ қилинган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида (13) тенглама учун ушбу $D^{+}=\{(x,y):0<x<\infty,\ 0<y<1\}$, $D^{-}=\{(x,y):-\infty<x<0,\ 0<y<1\}$ соҳаларда иккинчи чегаравий масала ўрганилган.

$u(x,y)$ функцияни (13) тенгламанинг регуляр ечими дейилади, агарда у (12) тенгламани D (бунда D : ёки D^{+}, ёки D^{-}) соҳада қаноатлантирса ва $C^{5,2}_{x,y}(D)\cap C^{4,1}_{x,y}(D\cap\Gamma)$ синфга тегишли ҳамда чексизликда чегараланган тўртинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, бунда $\Gamma=\{x=0\}\cup\{y=0\}\cup\{y=1\}$.

B_{31} **масала.** D^{+} соҳада (13) тенгламанинг (14) ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\qquad u'_x(0,y)=\varphi_2(y), \tag{16}$$

$$\lim_{x\to+\infty}u(x,y)=\lim_{x\to+\infty}u_x(x,y)=\lim_{x\to+\infty}u_{xx}(x,y)=0, \tag{17}$$

бунда $\varphi_i(y)$, $i=1,2$ – етарлича силлиқ берилган функциялар.

B_{32} **масала.** D^{-} соҳада (13) тенгламанинг (14) ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y),\quad u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), \tag{18}$$

$$\lim_{x\to-\infty}u(x,y)=\lim_{x\to-\infty}u_x(x,y)=0, \tag{19}$$

бунда $\varphi_i(y)$, $i=\overline{1,3}$ – етарлича силлиқ берилган функциялар.

9-теорема. Агар B_{31} (B_{32}) масала ечимга эга бўлса, у ягонадир.

10-теорема. Агар $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$ ва $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0$, $\varphi''_i(0)=\varphi''_i(1)=0$, $i=1,2$ $(i=1,2,3)$ бўлса, B_{31} (B_{32}) масаланинг ечими мавжуд.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида (13) тенглама учун D^{+} ва D^{-} соҳаларда учинчи чегаравий масала ўрганилган.

B_{33} **масала.** D^{+} соҳада (13) тенгламанинг (16), (17) ва

$$\begin{cases}\alpha\,u(x,0)+\beta\,u_y(x,0)=0,\\ \gamma\,u(x,1)+\delta\,u_y(x,1)=0,\end{cases}\qquad 0<x<\infty \tag{20}$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бунда $\varphi_i(y)$, $i=1,2$ - етарлича силлиқ берилган функциялар.

B_{34} **масала.** D^{-} соҳада (13) тенгламанинг (18), (19) ва (20) шартларни $-\infty<x<0$ да қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу ерда $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - ўзгармас сонлар бўлиб, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ шартларни қаноатлантиради.

Қуйидаги теоремаларнинг ўринли эканлиги исботланган:

11-теорема. Агар $B_{33}\,(B_{34})$ масала ечимга эга бўлса ва $\alpha\beta \leq 0$, $\delta\gamma \geq 0$ шартлар бажарилса, у ягонадир.

12-теорема. Агар $\varphi_i(y) \in C^4[0,1]$ ва қуйидаги мувофиқлик шартлари $\alpha\varphi_i(0) + \beta\varphi_i'(0) = 0$, $\gamma\varphi_i(1) + \delta\varphi_i'(1) = 0$, $\alpha\varphi_i''(0) + \beta\varphi_i'''(0) = 0$, $\gamma\varphi_i''(1) + \delta\varphi_i'''(1) = 0$, $i = 1, 2$ $(i = 1, 2, 3)$ бажарилса, у ҳолда B_{33} (B_{34}) масаланинг ечими мавжуд.

ХУЛОСА

Диссертация иши учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган ҳамда бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган модел тенгламаларга коррект чегаравий масалалар қўйиш ва уларни тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилар:

1. Учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган тенглама учун тўғри тўртбурчакда иккинчи чегаравий масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги тенгламанинг коэффициентлари ва берилган функцияларга қўйилган шартлар асосида исботланган;

2. Учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган тенгламанинг кичик ҳадини тўғри тўртбурчакда қўйилган иккинчи чегаравий масаланинг корректлигига таъсири аниқланган ва бир жинсли масаланинг тривиал бўлмаган ечимлари қурилган;

3. Учинчи тартибли каррали характеристикали кичик ҳадларга эга бўлган тенглама учун тўғри тўртбурчакда учинчи чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши тенглама ва чегаравий шартлар коэффициентлари ҳамда берилган функцияларга қўйилган шартлар асосида исботланган;

4. Учинчи тартибли каррали характеристикали бир жинсли бўлмаган тенгламага тўғри тўртбурчакда қўйилган биринчи чегаравий масала ечимининг ягоналиги исботланган, масалага мос Грин функцияси қурилган ва масала ечимининг формуласи Грин функцияси ёрдамида ёзилган;

5. Бешинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламага қўйилган коррект чегаравий масалаларни Фурье усулида ечиш алгоритми ишлаб чиқилган ва уни тўғри тўртбурчакда ва ярим полосада масала ечишга қўлланган..

Қўйилган масалалар ечимларининг ягоналиги энергия интеграли усули ёрдамида, мавжудлиги эса ўзгарувчиларни ажратиш ва Грин функциясини қуриш ёрдамида исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.30/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НАМАНГАНСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

ЖУРАЕВ АБДУЛЛА ХАТАМОВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Фергана-2020

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM 217.

Диссертация выполнена в Наманганском инженерно-строительном институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Апаков Юсупжон Пулатович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Аманов Джумаклич** доктор физико-математических наук, доцент
	Газиев Кобилжон Солижонович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» __________ 2020 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19. Тел.: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за № _____). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19. Тел.: (+99873) 244-44-94).

Автореферат диссертации разослан «___» ________________ 2020 года.
(протокол рассылки № ________ от «___» ________________ 2020 года).

А.К. Уринов
Председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

И.У. Хайдаров
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

Ш.Т.Каримов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению
ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Развитие современной науки требовало в середине XX столетия уточнения физических моделей. Исходя из потребности практики, повысилось внимание к теории уравнений высокого порядка, среди этих уравнений именно благодаря своим специфическим характеристикам, особое место занимают уравнения нечетного порядка. Для изучения волн малой, но конечной амплитуды в дисперсионных средах в качестве модельного уравнения часто используют уравнение Кортевега - де Фриза. К теории коротких волн относится теория трансзвуковых течений, вязким трансзвуковым уравнением, т.е. уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени. Уравнения пятого порядка с кратными характеристиками возникают в математических моделях волновых процессов в плазме и слабых ударных волн в диспергирующих диссипативных средах. Поэтому изучение уравнений третьего и пятого порядков является один из важных задач современной теории уравнений математической физики.

Учёными нашей страны получены весомые результаты в исследованиях уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих первую и вторую производную по времени. Используя фундаментальное решение, построенное L.Cattabriga, исследованы краевые задачи.

В настоящее время в нашей стране перед наукой ставится задача сближение фундаментальных исследований к практике. Проведение на уровне международных стандартов научных исследований по алгебре и функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и математической физике, прикладной математике и математическому моделированию, теории вероятностей и математической статистике обозначено основной задачей и направлением в деятельности института математики[1]. Развитие исследований по уравнениям с частными производными, в частности, развитие теории краевых задач для уравнений третьего и пятого порядка с кратными характеристиками играют важную роль в реализации указанного постановления.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан, ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 г. «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в

----

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследование приоритетным направлениям развития наук и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика»

Степень изученности проблемы. Первые результаты по изучению уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, построению фундаментальных решений, теории потенциалов и их свойств, исследованию краевых задач получены в работах H.Block, E.Del Vecchio, опубликованных соответственно 1912, 1915 годах. Далее в 1961 году L.Cattabriga для уравнения с кратными характеристиками построил фундаментальное решение, выраженное двойным несобственным интегралом и изучил их свойства. В работах Л.Родино, М.Марселло и А.А.Дезина уравнения с кратными характеристиками третьего порядка исследованы методами функционального анализа. В работах Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова и их учеников исследовались краевые задачи методом потенциалов с применением фундаментального решения, построенного L.Cattabriga. Т.Д.Джураевым и Ю.П.Апаковым в 2007 году было построенно новое фундаментальное решение, выраженное через вырожденную гипергеометрическую функцию. Было изученно свойства этого фундаментального решения и применено к решению краевых задач, а также разработан алгоритм метода Фурье для решения краевых задач.

С точки зрения приложения, важность исследований уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени, была обоснована в Воронежском университете в работах В.Н.Диесперова, О.С.Рыжова и Ю.В.Засорина. A.Ashyraliev, N.Aggez, F.Hazenci (Турция), а в работах N.Bendjazia, A.Guezane-Lakoud, R.Khaldi (Алжир) занимались нахождением численного решения. Уравнения пятого порядка с кратными характеристиками возникают в математических моделях в плазме волновых процессов. В работах Ю.В.Засорина, Н.В.Дерендяева, В.В.Новикова и В.А.Вахрушева разработаны основы решения краевых задач для уравнений пятого порядка. В монографиях Р.Булаф, Ф.Кодри и Р.Додд, Дж.Эйлбек, Дж.Гиббон, Х.Морисса была обоснована важность исследования уравнения пятого порядка. В работе А.К.Уринова, А.Т.Абдукодирова расмотрен вопрос о приведении в канонический вид уравнения пятого порядка.

Настоящая диссертация посвящена постановке и исследованию краевых задач для уравнений третьего и пятого порядков с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно исследовательских работ «Классические и неклассические задачи дифференциальных уравнений и их применения» Наманганского инженерно-строительного института.

Целью исследования являются постановка и исследование краевых задач для уравнений третьего и пятого порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, в конечных и бесконечных областях, а также разработка алгоритма решения методом Фурье краевых задач, поставленные для уравнения пятого порядка.

Задачи исследования:

исследование краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками имеющие младшие члены;

определение достаточных условий на заданные функции, обеспечивающие корректность поставленных краевых задач;

определить влияние младших членов на корректность поставленных краевых задач;

построение функции Грина и ее применение для решения краевых задач для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержание вторую производную по времени;

разработка алгоритма решения краевых задач методом Фурье для уравнения пятого порядка, содержащего вторую производную по времени.

Объектом исследования являются уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены, и уравнения пятого порядка, содержащие вторую производную по времени.

Предметом исследования являются краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены, а также для модельного уравнения пятого порядка с кратными характеристиками, содержащие вторую производную по времени.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, дифференциальных уравнений, математической физики и линейной алгебры.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

единственность и существование решения второй краевой задачи в прямоугольнике для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеюшее младшие члены, доказана при определенных условиях на коэффициенты уравнения и заданные функции;

установлено влияние младшего члена на корректность второй краевой задачи в прямоугольнике для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющее младшие члены и построены нетривиальные решения однородной задачи;

однозначная разрещимость третьей краевой задачи в прямоугольнике для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющее младшие члены, доказана при определенных условиях на коэффициенты уравнения и краевые условия, а также на заданные функции;

доказана единственность решения первой краевой задачи, поставленной в прямоугольнике для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, построена функция Грина и выписана формула решения задачи через функцию Грина;

разработан алгоритм решения краевых задач методом Фурье для уравнения пятого порядка, содержащего вторую производную по времени, и применен для решения краевых задач в прямоугольнике и в полуполосе.

Практические результаты исследования состоят из возможности применения найденных формул решений при исследовании качественных свойств физических процессов и в численных вычислениях.

Достоверность результатов исследования обоснована принятыми математическими дедуктивными выводами с использованием методов математического анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также строгими и полными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории уравнений в частных производных высокого порядка. Практическое значение исследования определяется применением полученных научных результатов в изучении физических процессов, описываемых при помощи уравнений третьего и пятого порядков с кратными характеристиками.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты по построению и применению функции Грина к решению краевых задач для уравнения третьего порядка, содержащую вторую производную по времени, были использованы в зарубежном гранте «Краевые задачи для нагруженного уравнения высокого порядка» №245612-2015 (2015-2019 гг.) Карагандинского государственного университета имени академика Е.А.Букетова, справка № 02-07/733 от 13 февраля 2020 года. Применение этих научных результатов способствовало построению явных решений поставленных задач;

предложенный алгоритм метода Фурье решения корректных краевых задач для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками, содержащую вторую производную по времени, использованы при решении аналогичных краевых задач в зарубежном гранте «Применение дробного исчисления в теории колебательных систем» № АААА-Б19-219021990010-4, ФГБОУ ВО Камчатского государственного университета имени Витуса Беренга. Используя результаты, построены явные решения новых краевых задач для уравнений высокого порядка с кратными характеристиками.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 19 международных и 8 республиканских научных и научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 34 научных работ, из них 7 научных статей, в том числе опубликованы 1 в зарубежном и в 6 республиканских журналах, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соисканий ученой степени доктора философии (PhD).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 103 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен степень изученности проблемы, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками»,** посвящена постановке и исследованию краевых задач в прямоугольнике для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющие младшие члены и вторую производную по времени.

В первом параграфе исследованы вторая краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

$$u_{xxx} - u_{yy} + au_x + cu = 0\,, \tag{1}$$

в прямоугольнике $D = \{(x, y): 0 < x, y < 1\}$, где $a > 0$, $c > 0$ - заданные числа.

Задача A_1. Найти функцию $u(x, y) \in C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1,$$

здесь $\varphi_i(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $i = 1, 2, 3$.

Методом интегралов энергия доказана следующая теорема:

Теорема 1. Если задача A_1 имеет решение, то оно единственно.

Используя метода разделение переменных, решение задачи A_1 построено в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}e^{-2\alpha_n x} + C_{2n}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x + C_{3n}e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x\right]\cos\pi ny. \tag{2}$$

Теорема 2. Если $\varphi_i(y) \in C^4[0,1]$ и $\varphi_i^{(k)}(0) = \varphi_i^{(k)}(1) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 3$, то решение задачи A_1 существует и предоставляется рядом (2).

Задача A_2. Найти функцию $u(x, y) \in C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,1)=0,\quad 0\le x\le 1,$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u(1,y)=\varphi_2(y),\quad u_x(1,y)=\varphi_3(y),\quad 0\le y\le 1,$$

здесь $\varphi_i(y)$, $i=\overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции.

Задачи A_2 исследуется аналогично.

Во втором параграфе первой главы изучена некорректность второй краевой задачи при условии $c<0$. Если в теореме 1 коэффициент c будет отрицательным, то вторая краевая задачи будет некорректной, то есть нарушается единственность решения. При этом краевая задача с однородными краевыми условиями будет иметь отличное от нуля решение.

Рассмотрим в области D следующую задачу:

$$u_{xxx}-u_{yy}+au_x+cu=0,\quad c<0,$$

$$u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,1)=0,\quad 0\le x\le 1, \tag{3}$$

$$u(0,y)=0,\quad u(1,y)=0,\quad u_x(1,y)=0,\quad 0\le y\le 1.$$

Ищем решение задачи (3) в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$.

Тогда для $X(x)$ и $Y(y)$ получим задачи:

$$\begin{cases} X'''+aX'+\eta X=0, \\ X(0)=0,\ X(1)=0,\ X'(1)=0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} Y''+\mu Y=0, \\ Y'(0)=0,\ Y'(1)=0. \end{cases} \tag{5}$$

Собственными функциями задач (4) и (5) будут соответственно функции:

$$X_k(x)=e^{2\alpha_k x}-e^{-\alpha_k x}\left(\cos\beta_k x-M\sin\beta_k x\right),\quad Y_n(y)=\cos\pi ny,$$

где

$$M=\frac{\cos\beta_k-e^{3\alpha_k}}{\sin\beta_k}.$$

Поскольку $c=\eta-\mu$, то $c_{nk}=-m_k^3-am_k-n^2\pi^2$ или

$$c_{nk}=-\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)^2-a}\right)^3+\frac{2a}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)^2-a}+n^2\pi^2\right),\quad n,k=1,2,3,\cdots.$$

Таким образом, функция представимая в виде

$$u_{kn}(x,y)=X_k(x)Y_n(y)=\left[e^{2\alpha_k x}-e^{-\alpha_k x}\left(\cos\beta_k x-M\sin\beta_k x\right)\right]\cos\pi ny,$$

является нетривиальным решением второй краевой задачи с однородными краевыми условиями.

В третьем параграфе первой главы изучается третья краевая задача для уравнения (1).

Задача B. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C_{x,y}^{3,2}(D)\cap C_{x,y}^{2,1}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{cases}\alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0,\\ \gamma u(x,1)+\delta u_y(x,1)=0,\end{cases}\qquad 0\le x\le 1,$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u(1,y)=\varphi_2(y),\quad u_x(1,y)=\varphi_3(y),\quad 0\le y\le 1,$$

где $\varphi_i(y)$, $i=\overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции и выполняется следующие условия согласования:

$$\alpha\varphi_i^{(j)}(0)+\beta\varphi_i^{(j+1)}(0)=0,\ \ \gamma\varphi_i^{(j)}(1)+\delta\varphi_i^{(j+1)}(1)=0,\ i=1,2,3;\ \ j=0,2\,. \qquad (6)$$

Здесь $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - постоянные числа, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0$.

Теорема 3. Если задача B имеет решение и $\alpha\beta\le 0,\ \delta\gamma\ge 0,$ то оно единственно.

Решение задачи B ищем в виде $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$.

Тогда для нахождения функции $Y(y)$ приходим к задаче типа Штурма – Лиувилля: найти значение параметра μ при которых существует нетривиальные решения задачи:

$$Y''+\mu Y=0,\ \ \alpha Y(0)+\beta Y'(0)=0,\ \ \gamma Y(1)+\delta Y'(1)=0.$$

Решая эту задачу, находим собственные значения в виде $\sqrt{\mu_n}=\pi n+\varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, или $\mu_n=O\left(n^2\right),\ n\to\infty$. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$Y_n(y)=\alpha\sin\sqrt{\mu_n}\,y-\beta\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\,y\,. \qquad (7)$$

Доказано, что система функций (7) ортогональна в сегменте $[0,1]$.

Решение задачи B найдено в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}e^{-2\alpha_n x}+C_{2n}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x+C_{3n}e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x\right]Y_n(y). \qquad (8)$$

Теорема 4. Если $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$, $i=\overline{1,3}$ и выполняются условия (6), то решение задачи B существует и представляется в виде (8).

Во второй главе диссертации, названной **«Построение и применение функции Грина для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками»,** краевые задачи исследуются с использованием фундаментального решения и построением функции Грина.

В первом параграфе этой главе диссертации построены функции Грина для первой и второй краевых задач в прямоугольной области.

В первом параграфе второй главы в области D для уравнения

$$L(u) = u_{xxx} - u_{yy} = g(x,y), \tag{9}$$

поставлена и исследована следующая задача.

Задача B_1. Найти регулярное решение уравнения (9) в области D из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \;\; u(x,1) = \varphi_2(x), \;\; 0 \le x \le 1,$$

$$u_{xx}(0,y) = \psi_1(y), \;\; u_x(1,y) = \psi_2(y), \;\; u_{xx}(1,y) = \psi_3(y), \;\; 0 \le y \le 1,$$

где

$$\varphi_i(x) \in C^2[0,1], i = 1,2, \;\; \psi_j(y) \in C[0,1], \;\; j = \overline{1,3}, \;\; g(x,y) \in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D}),$$

кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{gathered} \varphi_1'(1) = \psi_2(0), \quad \varphi_2'(1) = \psi_2(1), \quad \varphi_1''(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1''(1) = \psi_3(0), \\ \varphi_2''(1) = \psi_3(1), \quad \varphi_2''(0) = \psi_1(1), \quad g(x,0) = g(x,1) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Теорема 5. Если задача B_1 имеет решение, то оно единственно.

Во втором параграфе второй главы рассмотрено следующая вспомогательная задача.

Задача B_{11}. Найти регулярное решение в области D уравнения (9), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$u_{xx}(0,y) = u_x(1,y) = u_{xx}(1,y) = 0, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sin k\pi y.$$

Тогда для функции $X_k(x)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} L[X_k] \equiv X_k'''(x) + \lambda_k^3 X_k(x) = g_k(x), \\ X_k''(0) = X_k'(1) = X_k''(1) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Решение задачи **(**11) имеет вид

$$X_k(x) = \int_0^1 G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi,$$

где $g_k(x) = 2\int_0^1 g(x,y)\sin k\pi y dy$, $G_k(x,\xi)$ -функция Грина задачи (11).

Тогда решение задачи B_{11} принимает вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\pi ky\int_0^1 G_k(x,\xi)g_k(\xi)d\xi=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}G_k(x,\xi)\sin\pi kg_k(\xi)d\xi.$$

В третьем параграфе второй главы получены оценки построенного решения задачи B_{11} и решение выписано в явном виде

$$2u(x,y)=\int_0^1 G(x,y,1,\eta)\psi_3(\eta)d\eta-\int_0^1 G(x,y,0,\eta)\psi_1(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^1 G_\xi(x,y,1,\eta)\psi_2(\eta)d\eta+\int_0^1 G_\eta(x,y,\xi,1)\varphi_2(\xi)d\xi- \tag{12}$$
$$-\int_0^1 G_\eta(x,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi-\iint_D G(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

где

$$G(x,\xi,y,\eta)=2\sum_{k=1}^{\infty}G_k(x,\xi)\sin\pi k\eta\cdot\sin\pi ky.$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 6. Пусть $\varphi_i(x)\in C^2[0,1]$, $i=1,2$, $\psi_j(y)\in C[0,1]$, $j=\overline{1,3}$, $g(x,y)\in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, а также выполняются условия согласования (10), тогда решение задачи B_1 существует и представляется в виде (12).

Задача B_2. Найти регулярное решение уравнения (9) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D)\cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=\varphi_3(x),\ \ u_y(x,1)=\varphi_4(x),$$
$$u_{xx}(0,y)=\psi_1(y),\ \ u_x(1,y)=\psi_2(y),\ \ u_{xx}(1,y)=\psi_3(y),$$

где $\varphi_i(x)\in C^2[0,1], i=3,4$, $\psi_j(y)\in C[0,1]$, $j=\overline{1,3}$, $g(x,y)\in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi_1'(0)=\psi_1(0),\quad \varphi_1(1)=\psi_2(0),\quad \varphi_1'(0)=\psi_3(0),\quad \varphi_1'(1)=\psi_3(0),$$
$$\varphi_2'(0)=\psi_1(1),\quad \varphi_2(1)=\psi_2(1),\quad \varphi_2'(0)=\psi_1(1),\quad g'(x,0)=g'(x,1)=0.$$

Задача B_2 исследуется также, как и задача B_1.

Третья главы диссертации, названной **«Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками»,** посвящена постановке и исследованию краевых задач для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени.

В первом параграфе третьей главы исследованы первая и вторая краевые задачи для уравнения пятого порядка в прямоугольной области.

В области $D=\{(x,y):0<x,y<1\}$ рассмотрим уравнение пятого порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,. \tag{13}$$

Задача A_{31}. Найти регулярное решение уравнения (13) в области D из класса $C^{5,2}_{x,y}(D)\cap C^{4,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0)=0,\quad u(x,1)=0\,, \tag{14}$$

$$\begin{cases} u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y), \\ u(1,y)=\varphi_3(y),\; u_x(1,y)=\varphi_4(y),\quad u_{xx}(1,y)=\varphi_5(y), \end{cases}$$

где $\varphi_i(y),\quad i=\overline{1,5}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 7. Если задача A_{31} имеет решение, то оно единственно.

Решение задачи A_{31} построено в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\sin \pi n y, \tag{15}$$

где

$$X_n(x)=C_{1n}e^{\lambda_n x}+e^{\lambda_n\alpha_2 x}(C_{2n}\cos\lambda_n\beta_2 x+C_{3n}\sin\lambda_n\beta_2 x)+$$
$$+e^{-\lambda_n\alpha_1 x}(C_{4n}\cos\lambda_n\beta_1 x+C_{5n}\sin\lambda_n\beta_1 x).$$

Теорема 8. Если $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$ и $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0,\quad \varphi_i''(0)=\varphi_i''(1)=0,$ $i=\overline{1,5}$, то решение задачи A_{31} существует и представляется рядом (15).

Задача A_{32}. Найти регулярное решение уравнения (13) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,1)=0\,,$$

$$\begin{cases} u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y), \\ u(1,y)=\varphi_3(y),\; u_x(1,y)=\varphi_4(y),\quad u_{xx}(1,y)=\varphi_5(y), \end{cases}$$

где $\varphi_i(y)\in C^4[0,1],\ \varphi_i'(0)=\varphi_i'(1)=\varphi_i'''(0)=\varphi_i'''(1)=0,\ \ i=\overline{1,5}$.

Задача A_{32} исследуются также, как и задача A_{31}.

Во втором параграфе третьей главы исследована первая краевая задача для уравнения (12) в полубесконечных областях $D^+=\{(x,y):0<x<\infty,\,0<y<1\}$, $D^-=\{(x,y):-\infty<x<0,\,0<y<1\}$.

Будим говорить, что $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (13), если оно удовлетворяет уравнению (13) в области D (где D, либо D^+, либо D^-), принадлежит классу $C^{5,2}_{x,y}(D)\cap C^{4,1}_{x,y}(D\cap\Gamma)$, где $\Gamma=\{x=0\}\cup\{y=0\}\cup\{y=1\}$, и ограничено на бесконечности вместе с производными до 4-го порядка включительно.

Задача B_{31}**.** Найти регулярное решение уравнения (13) в области D^+, удовлетворяющее краевым условиям (14) и

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \qquad u'_x(0,y)=\varphi_2(y), \tag{16}$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,y)=\lim_{x\to+\infty} u_x(x,y)=\lim_{x\to+\infty} u_{xx}(x,y)=0\,, \tag{17}$$

где $\varphi_i(y),\ \ i=1,2$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача B_{32}**.** Найти регулярное решение уравнения (13) в области D^-, удовлетворяющее краевым условиям (14) и

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y),\quad u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), \tag{18}$$

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,y)=\lim_{x\to-\infty} u_x(x,y)=0\ , \tag{19}$$

где $\varphi_i(y),\ \ i=\overline{1,3}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 9. Если задачи B_{31} (B_{32}) имеет решение, то они единственно.

Теорема 10. Если $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$ и $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0$, $\varphi''_i(0)=\varphi''_i(1)=0$, $i=1,2$ $(i=1,2,3)$, то решение задачи B_{31} (B_{32}) существует.

В третьем параграфе третьей главы изучается третья краевая задача в полубесконечных областях D^+ и D^- для уравнения (13).

Задача B_{33}**.** Найти регулярное решение уравнения (13) в области D^+, удовлетворяющее краевым условиям (16), (17) и

$$\begin{cases}\alpha\, u(x,0)+\beta\, u_y(x,0)=0,\\ \gamma\, u(x,1)+\delta\, u_y(x,1)=0,\end{cases} \qquad 0<x<\infty, \tag{20}$$

где $\varphi_i(y)$, $(i=1,2)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Задача B_{34}**.** Найти регулярное решение уравнения (13) в области D^-, удовлетворяющее краевым условиям (18), (19) и (20) при $-\infty<x<0$.

Здесь $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - постоянные числа, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0.$

Доказаны справедливость следующих теорем:

Теорема 11. Если задача $B_{33}\,(B_{34})$ имеет решение и $\alpha\beta\le 0,\ \delta\gamma\ge 0,$ то оно единственно.

Теорема 12. Если $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$ и выполняются следующие условия согласования: $\alpha\,\varphi_i(0)+\beta\,\varphi'_i(0)=0,\ \ \gamma\,\varphi_i(1)+\delta\,\varphi'_i(1)=0,\ \ \alpha\,\varphi''_i(0)+\beta\,\varphi'''_i(0)=0,$ $\gamma\,\varphi''_i(1)+\delta\,\varphi'''_i(1)=0,\quad i=1,2\quad (i=1,2,3),$ то решение задачи B_{33} (B_{34}) существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена постановке и исследованию корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками и с младшими членами, а также для модельного уравнения пятого порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени.

Основные результаты исследования состоит в следующем:

1. Единственность и существование решения второй краевой задачи в прямоугольнике для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеюшее младшие члены, доказана при определенных условиях на коэффициенты уравнения и заданные функции.

2. Установлено влияние младшего члена на корректность второй краевой задачи в прямоугольнике для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющее младшие члены и построены нетривиальные решения однородной задачи.

3. Однозначная разрещимость третьей краевой задачи в прямоугольнике для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющее младшие члены, доказана при определенных условиях на коэффициенты уравнения и краевые условия, а также на заданные функции.

4. Доказана единственность решения первой краевой задачи, поставленной в прямоугольнике для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, построена функция Грина и выписана формула решения задачи через функцию Грина.

5. Разработан алгоритм решения краевых задач методом Фурье для уравнения пятого порядка, содержащего вторую производную по времени, и применен для решения краевых задач в прямоугольнике и в полуполосе.

Единственности решения поставленных задач доказана применением метода интегралов энергии. Решение поставленных задач построено методом разделение переменных и построением функции Грина.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES PhD.30/30.12.2019.FM.05.04 AT FERGANA STATE UNIVERSITY

NAMANGAN ENGINEERING - CONSTRUCTION INSTITUTE

ZHURAEV ABDULLA KHATAMOVICH

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE THIRD AND FIFTH ORDER EQUATIONS WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

01.01.02-Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Fergana-2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM217.

Dissertation has been prepared at Namangan Engineering - Construction Institute.

The abstract of the dissertation is published in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of the Scientific Council (www.fdu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Apakov Yusupjon Pulatovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Official opponents:	**Amanov D.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent
	Gaziev K. S. Candidate of Physical and Mathematical Sciences,Docent
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place "____" __________ 2020 at ____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873) 244-44-02, fax: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered № ____). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873) 244-44-94).

Abstract of dissertation sent out on "___" _________ 2020 year.
(Mailing report No. _____ on "___" ____________ 2020 year).

A.K.Urinov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.Ph.M.S., Professor

I.U.Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.Ph.M.S.

Sh.T.Karimov
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F-M.S, Docent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work – to prove the correctness of the boundary value problem of the third order equations with the second derivative of time in the finite and infinite domain, as well as to develop the algorithm for solving the problem of the fifth order equations by Fourier method and to prove the correctness of the problem.

The object of the research work – third order equations with the small order derivatives and the fifth order equations with multiple characteristic second derivative of time.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the uniqueness and existence of the solution of the second boundary value problem in rectangle for the third order equation with lower order derivatives were determined by the coefficients of the equation and the given functions;

the effect on correctness of lower order derivatives of multiple third order equations with lower derivatives to the correctness of the second boundary value problem in rectangle was determined and non-trivial solutions of homogeneous problems were constructed;

boundary conditions and one-solution coefficients of third value boundary problems in rectangle to the multiple third order equations with lower order derivatives were determined and certain conditions imposed on the given functions;

imposed the uniqueness of the solution of the first boundary value problem in a rectangle to a non-homogeneous multiple third order equation, the Green function is constructed, and the formula for solving the problem is written using the Green function;

an algorithm by Fourier method for solving the boundary value problem for the fifth order equation with the multipal characteristic second derivative of time was developed and applied to the solution in quadratic and infinite semi-strips.

Implementation of the research results. Scientific results obtained in the thesis were used in the following research projects:

The results on the construction and application of the Green's function to the solution of boundary value problems for a third-order equation containing a second time derivative were used in foreign grants "Boundary-value problems for a loaded high-order equation" No.245612-2015 for 2015-2019, (Karaganda State University named after Academician EA Buketov, certificate No.02-07/733 dated February 13, 2020). Implementation of the scientific result allowed solving the problem in an integral equation.

Fourier method algorithm is proposed for solving correct boundary value problems for fifth-order equation with multiple characteristics containing the second time derivative and used to solve similar boundary value problems in foreign grants "Application of fractional calculus in the theory of oscillatory systems" No.AAAA-B19-219021990010-4, FSBEI HE "Kamchatka State University named after Vitus Bereng". In particular, using the above results, explicit solutions of new boundary value problems for higher order equations with multiple characteristics were constructed.

Structure and volume of dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 103 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙҲАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области // Узбекский математический журнал. 2009, №4, -С.21-28. (01.00.00, № 6).
2. Жураев А.Х. Краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в неограниченной области // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2009, №6. - С14-18. (01.00.00, № 7).
3. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области // Узбекский математический журнал. 2011, №2, - С.40-47. (01.00.00, № 6).
4. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011, №3, - С.36-42. (01.00.00, № 6).
5. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Вторая краевая задача для уравнения третьего порядка с младшими членами // Узбекский математический журнал . 2011, №4, - С. 84-87. (01.00.00, № 6).
6. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Об одной задаче для вязкого трансзвукового уравнения в полуограниченной области // Бюллетень института математики. 2018, №6, - С.1-4. (01.00.00, № 17).
7. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Третья краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. Киев, 2018 т.70. №9.- С.1274-1281. (Имеется перевод: Yu. P. Apakov and A, Kh. Zhuraev. Third boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics // Ukrainian Mathematical Journal, Springer,-Vol. 70, № 9, February, 2019.- pp.1467-1476.) (11. Springer. If=0.345)

II бўлим (2 часть; part 2)

8. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. №1. -С.22-27.
9. Жураев А.Х. Краевая задача для неоднородная уравнения третьего порядка с кратными характеристиками //Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий. Ал-Хорезмий-2012», 19 -22 декабрь, 2012.- Ташкент.НУУз. -Т. 1. - С.65-68.
10. Жураев А.Х. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Новосибирск. 2007, 28-май-2 июня. -С.65-66.
11. Жураев А.Х. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума, Нальчик, Эльбрус, 12-17 май 2008. -С.158-159.
12. Жураев А.Х. Краевая задача для третьего порядка, содержащего первую и вторую производную по времени // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий». Ташкент, НУУз, 8-май 2008. -С. 91-94.
13. Жураев А.Х. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения функциональные пространства теория приближений». Новосибирск, 5-12 октября 2008. -С.137.
14. Zhuraev A.Kh. Boundary value problem for equation the fifth order with multiple characteristics in an unlimited area // Межд. науч. конф. «Of the third congress of the world mathematical socitty of Turkic countries» Almaty, June30 uly 4, 2009, -p. 227.
15. Жураев А.Х. Краевая задача для уравнения третьего порядка с младшими членами // Тезисы Международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики». Москва, 2009. 16-18 июня. - С.172-173.
16. Жураев А.Х. Краевая задача для уравнения пятого порядка в бесконечной области // Труды межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий. - Ал-Хорезми- 2009», 18-21 сентября 2009. - Ташкент, 2009. - С. 58-59.
17. Жураев А.Х., Жамалов Б. И. Спектральная задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы Республиканской научно-практической конференции «Фундаментальные науки-основа подготовки высококвалифицированных кадров», 25-26 ноября. -Ташкент, 2009. - С. 28-32.

18. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Об одной краевой задаче для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики», 23-30 июня 2010. Нальчик НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2010. - С. 29-31.
19. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы второго Международного Российско - Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», 23-27 мая 2011. -Нальчик, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. - С. 72-75.
20. Жураев А.Х. Спектральная задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы второго Международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», 28.05.12-1.06.12. – Эльбрус. -2012. - С. 109-111.
21. Жураев А.Х. Краевая задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Тезисы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий. Ал-Хорезмий 2012», 19 -22 декабрь, 2012. -Ташкент. -Т. № 1. - С.27-28.
22. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области // Материалы республиканской научно- практической конференции «Новые теоремы молодых математиков-2013», Т. -№ 2. 15-16 апрель, Наманган-2013. - С.22-25.
23. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Об одной краевой задаче для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в полуполосе // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», 21-23 ноября 2013. Ташкент. - С. 134-135.
24. Жураев А.Х., Жамалов Б.И. Об одной спектральной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Неклассические уравнение математический физики и их приложения», 23-25 октября 2014. Ташкент. - С.51-52.
25. Жураев А.Х. Краевая задача для модельного уравнения пятого порядка в бесконечной области // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. «Современные методы математической физики и их приложения», 15-17 апреля 2015. Ташкент. -С.163-164.
26. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Краевая задача одного уравнения пятого порядка с кратными характеристиками // Материалы VII Ферганской

конференции «Предельной теоремы теории вероятностей и их приложения». - Наманган, 11-12 мая 2015. - С.178.
27. Жураев А.Х. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Тезисы докладов Республиканской научно – практической конференции «Актуальные проблемы математики», 17 мая 2016. -Андижан. -С.124-127.
28. Жураев А.Х. Краевая задача для уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти А. В. Бицадзе. 16-18 июня 2016. - Москва. -С. 105.
29. Жураев А.Х., Жамалов Б.И. Краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области // Сборник материалов республиканской научно - практической конференции «Перспективы реформ, проводимых в системе высшего образования Республики Узбекистан». 15 марта 2017. -Ташкент. -С. 291-292.
30. Жураев А.Х. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». Нальчик. -Эльбрус. 22-26 мая 2018. -С. 97.
31. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О разрешимости одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». Россия, Стерлитамак. 25-29 июня 2018. - С.51-53.
32. Жураев А.Х. О разрешимости одной краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области // Тезисы докладов Международной конференции «Обратные и некорректные задачи». -Самарканд, 2-4 октября 2019. - С.80-81.
33. Жураев А.Х. О разрешимости одной краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Управление, оптимизация и динамические системы - CODS - 2019». - Андижан, 17-19 октября 2019. -С.91.
34. Жураев А.Х. Об одной краевой задаче для уравнения пятого порядка в конечной области // Тезисы докладов Узбекско - Российской научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». -Ташкент, 24-26 октября 2019. -С.56-58.

Автореферат Фарғона давлат университети «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» илмий – методик журнал тахририятида таҳрирдан ўтказилди.