

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA–MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIKA KAFEDRASI

Karimov Islom Ilg'or o'g'lining
5130100 – matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

**«BOG'LAMLI SIKLGA EGA BO'LMAGAN GRAF:
DARAXTNING XOSSALARINI AMALIY O'RGANISH»**
mavzusidagi
BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Rahbar: _____ J. S. Mamatov

BMI «Matematika» kafedrasining 2017 yil _____ №____ sonli
yig'ilishida ko'rib chiqildi va himoyaga tavsiya etiladi.

Kafedra mudiri _____ H. Norjigitov, f.–m.f.n., dotsent

Fizika-matematika fakulteti dekani tomonidan himoya qilishga ruxsat etiladi.

Fakultet dekani _____ Sh. Ashirov, p.f.n., dotsent

Guliston – 2017

	MUNDARIJA	
	Kirish	3
	I bob. Graf va uning asosiy xossalari.....	
1.1§.	Asosiy tushunchalar.....	6
1.2§.	Graflar ustida amallar.....	13
1.3§.	Bog'lamlilik.....	20
	II bob. Daraxtlar va tarmoqlar, ularning xossalari.....	27
2.1§.	Daraxtlar. Keli teoremasi.....	27
2.2§.	Tarmoqlar. Ford algoritmi.....	34
	Xulosa.....	47
	Foydalanilgan adabiyotlar.....	48

KIRISH

Bitiruv malakaviy ishning dolzarbligi. Ushbu bitiruv malakaviy ish graflar ustida bajariladigan amallar va ushbu amallar natijasida hosil bo'ladigan qiymatlarni o'rganishga bag'ishlangan.

Graflar nazariyasini va uning sonli xarakteristikalarini o'rganish dinamik sistemalarni optimal boshqaruv masalasini hal etishga olib keladi. Bunda qidirish va qochish masalalari ustida ish olib boriladi. Ushbu masalani o'yinlar nazariyasi deb ataladi. O'yinlar nazariyasi bugungi kunda matematikaning eng qiziqarli, dolzarb yo'nalishlaridan biri deyish mumkin. Umuman o'yin tushunchasiga kelsak, u chekli o'yin, diskret o'yin va dinamik o'yin kabi turlarga bo'linadi. Dinamik o'yinlar o'z navbatida graflar ustida yoki Evklid fazosida qaralishi mumkin. Bunda esa masalaning holatiga qarab, zarur bo'lgan sonni (qiymatni) topish zarurati tug'iladi. Topilgan qiymat amaliy jihatdan fan va texnikaning ko'plab sohalariga tadbqiq etiladi. Shu hisobdan dinamik o'yinlarning juda ko'plab masalalarini hal etishda graflar va uning sonli xarakteristikalaridan salmoqli darajada foydalanilib kelinmoqda.

Shu nuqtai nazardan graflar nazariyasi va uning sonli xarakteristikalarini o'rganish masalasi fanning dolzarb masalalaridan biri bo'lib qolmoqda.

Bitiruv malakaviy ishning tadqiqot maqsadi. Hozirgi kunda hayotimizga kompyuter texnologiyalari shu qadar jadal bilan kirib kelmoqda–ki taraqqiyotning hech bir sohasini kompyuter texnologiyasiz tasavvur etish qiyin bo'lib qoldi. Bu esa albatta, yangi dasturlar va unga zarur bo'lgan matematik algoritmlarga bo'lgan ehtiyojni keskin oshirib yubormoqda. Aynan optimal boshqaruv masalalari, ushbu talabga bo'lgan ehtiyojni qondirish uchun zarur. Buning uchun esa graflar ustida amallar bajarib, zarur bo'lgan qiymatlarni hisoblab, uning matematik modelini tuzish masalasini hal etish zarurdir. Shu sababli, ushbu bitiruv malakaviy ishi graflar nazariyasi va uning sonli xarakteristikalarini o'rganishni o'z oldigi maqsad qilib qo'ygan.

Bitiruv malakaviy ishning tadqiqot ob'ekti. Graf: daraxtlar ustida sodda amallar bajarish va kerakli qiymatni topish.

Bitiruv malakaviy ishning tadqiqot muammosi. Graf: daraxt uchun asosiy teorema “Keli teoremasi”ning isboti.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiy farazi. O'ylaymizki, graflar ustida amallar bajarish, zarur bo'lgan natijaga erishish usullarini topishga va amaliyotga tadbqiq etish usullarini ko'paytiradi.

Bitiruv malakaviy ishning vazifalari. Graflar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish amallarini bajarish. Hamda, graf daraxt bo'lishi uchun zarur shartlarni o'rganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning yangiligi. Ushbu bitiruv malakaviy ishda grafning uchlari soni berilgan bo'lsa, undagi daraxtlar sonini topish formulasi topilgan va o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning ahamiyati. G_1 graf (m,n) -graf bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinli: $n = n_1 + n_2 + 1$, $k + 1 = m_1 + m_2$ va $n_i = m_i - 1$ ($i = 1,2$) bo'lishi ko'rsatilgan.

Bitiruv malakaviy ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ish kirish, beshta paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning birinchi paragrafi graflar nazariyasining paydo bo'lishi tarixi, grafning ta'rifi, turlari, hamda grafning uchlari va qirralari sonini ifodalovchi teorema va formulalar keltirilgan. Ikkinchi paragrafda graflar ustida sodda amallar: qo'shish, ko'paytirish, grafning biror uchini yoki qirrasini olib tashlash hamda unga biror qirra va uchni qo'shish amallari bajarilish usullari ko'rsatilgan. Uchinchi paragrafda graflarning bog'lamlilik komponentalari: zanjir, marshrut, tsikl, oddiy tsikllar haqida tushunchalar berilgan. To'rtinchi paragrafda daraxt o'rganilgan: $G(m,n)$ -graf uchun daraxtlar xaqidagi asosiy teorema va bu teoremadan kelib chiqadigan natijalar keltirilgan. Beshinchi

paragrafda tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishilgan. *Ford algoritmining* jadvallar bilan ish ko'riladigan jarayon dastlabki, umumiy (takrorlanuvchi) va yakuniy qadamlardan iborat bo'lib, ular batafsil keltirilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati 18 nomdagi adabiyotlarni o'z ichiga oladi.

I bob. Graf va uning asosiy xossalari

1.1§. Asosiy tushunchalar.

Graflar nazariyasining asosiy masalasi berilgan nuqtalar va ularni tutashtiruvchi chiziqlarning xossalariidan tashkil topadi. Bunday talqinda chiziqlarnig to'g'ri chiziq yoki kesma, yoylardan yoki egri chiziqlardan iborat bo'lishi hamda bu chiziqlar qaerda joylashishi, uzun yoki qisqa bo'lishi muhim emas. Shunisi muhimki bu chiziqlar berilgan ikki nuqtani tutashtiradi.

1736 – yilda L.Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonisberg ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va echilishi graflar nazariyasining paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

Kyonisberg shaxridagi Pregel daryosi ustiga qurilgan ettita ko'prik o'sha vaqtda shaxarni to'rtta qismga ajratgan. Shaxarning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib ettita ko'rikdan faqat bir martadan o'tib, yana o'sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonisberg ko'priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut (hozirgi vaqtda graflar nazariyasida bu marshrut Eyler tsikli nomi bilan yuritiladi) mavjudligi shartlari ham topildi. L.Eyler tomonidan e'lon qilingan tarixiy ilmiy ish yuz yildan kshproq vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo'yicha yagona ilmiy ish bo'lib keldi.

XIX asrning o'rtalarida graflar nazariyasi bilan bog'liq tadqiqotlar G.Kirxgof (1824–1887, olmon fizigi) va A.Keli (1821–1895, ingliz matematigi) ishlaarida paydo bo'ldi.

“Graf” iborasi D.Kyonig (1884–1944, venger matematigi) tomonidan 1936–yilda graflar nazariyasiga bag'ishlangan dastlabki darsliklarda uchraydi.

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilar quyidagilar: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar; yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirishva hakazo.

Avvalo grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini keltiramiz. Ixtiyoriy nuqtalarning qandaydir usulda bog'lanishidan tashkil topgan V to'plamni qaraymiz. Ushbu V to'plamni uchlar to'plami va uning $v \in V$ – elementlarini esa uchlar deb ataymiz. V to'plamning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan (v_1, v_2) ko'rinishidagi barcha juftliklar to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekrat ko'paytmasini) $V \times V$ deb belgilaymiz.

Graf deb shunday (V, U) juftlikga aytiladiki, bu erda $V \neq \emptyset$ va $U \subset (V \times V)$ ko'rinishidagi juftliklar bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

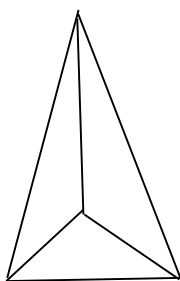
Grafni lotin alifbosining G harfi bilan belgilaymiz.

Grafga ta'rif berishda boshqacha yondoshuvdan ham foydalanish mumkin.

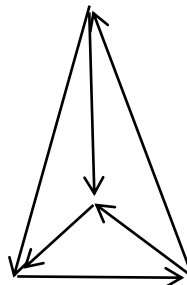
$G = G(V)$ graf deb bir qancha V uchlar to'plamining birlashmasiga yoki $E = (a, b)$ ($a, b \in V$) (1.1) qaysi uchlar bog'langanligini ko'rsatuvchi juftliklarga aytiladi.

Mos ravishda grafning geometrik tasvirida aniq har bir (1.1) juftlik grafning qirrasi deyiladi, a va b uchlar esa E qirraning oxirlari deyiladi. Qirraning (1.1) ta'rifida uning oxirgi ikki uchining joylashish tartibi e'toborga olinishi ham, olinmasligi ham mumkin. Agar bunday tartib mavjud bo'lmasa, ya'ni $E = (a, b) = (b, a)$ deyish mumkin bo'lsa, u holda E ni yo'naltirilmagan qirra deb ataladi. Agar bunday tartib mavjud bo'lsa, u holda qirra yo'naltirilgan qirra deyiladi. Yo'naltirilgan $E = (a, b)$ qirrada a boshlang'ich uch, b oxirgi uch deb hisoblanadi. Shuningdek E qirrani a uchdan chiquvchi va b uchga boruvchi qirra deyiladi. Qirra yo'naltirilgan bo'lgan holda ham, yo'naltirilmagan holda ham $E = (a, b)$ qirra a va b uchlarga intsidient deb ataladi.

Grafni yo'naltirilmagan deyiladi, agar uning barcha qirralari yo'naltirilmagan bo'lsa (1.1.a–rasm), yo'naltirilgan deyiladi agar barcha qirralari yo'naltirilgan bo'lsa (1.1.b– rasm).



1.1.a–rasm



1.1.b–rasm.

Ham yo'naltirilgan, ham yo'naltirilmagan qirralarga ega bo'lgan graf **aralash** graf deyiladi. Misol sifatida, shaxarning xaritasini graf sifatida olsak, unda ko'chalarni qirra deb, chorrahalarni esa uchlar sifatida olish mumkin. Bunda faqat bir tomonlama harakat mavjud ko'chalarni yo'nalishga ega qirra deb olsak, u holda ikki tomonlama harakat mavjud ko'chalarni hech qanday yo'nalish orqali belgilab bo'lmaydi.

Hech bir qirraga intsidient bo'lmagan uch yakkalangan uch deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra bor bo'lsa, u holda bunday uchlar qo'shni uchlar deyiladi, aks holda esa qo'shni bo'lmagan uchlar deyiladi.

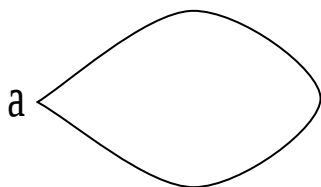
Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan grafni nol graf deyiladi va 0 orqali belgilanadi.

Ikkita chetki ya'ni boshlang'ich va oxirgi qirralari ustma-ust tushga qirra sirtmoq deyiladi va uni $L = (a, a)$ kabi yoziladi (1.2–rasm).

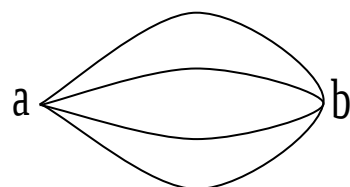
Agar grafning ikiita uchi o'zaro bir necha qirralar orqali tutashgan bo'lsa bunday qirralarni parallel yoki karrali qirralar deyiladi (1.3–rasm).

Bunda agar graf yo'naltirilgan bo'lsa, hr bir qirra uchun yo'nalish aniqlanadi. Misol sifatida, jamoaviy musobaqani olish mumkin. Bunda jamoalar

mos ravishda grafning uchlari hisoblanadi. Ikkita A va B jamoalar har safar bir-biri bilan o'ynaganda ular qirra orqali tutashtiriladi. Agar A jamoa B ni yutsa u holda yo'nalish A dan B tomon yoki, aksincha yo'naltiriladi. Durang natija esa yo'naltirilmagan qirrani ifodalaydi.



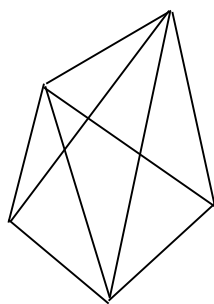
1.2–rasm



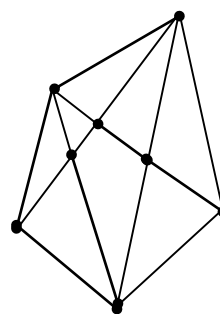
1.3–rasm

Istalgan ikkita uchi qo'shni bo'lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz, yo'naltirilmagan graf to'la graf deyiladi (1.4-rasm). Uchlari soni m ga teng to'la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $N_m = \frac{m(m-1)}{2}$ ta bo'ladi.

Grafni tekislikda tasvirlaganda qirralarning barcha kesishish nuqtalari uchlardan iborat bo'lsa bunday graf tekis graf deyiladi (1.5–rasm).



1.4–rasm



1.5–rasm

Ba'zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya'ni uchlari soni m va qirralar soni n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m, n) graf deb ataymiz.

Agar G va G' graflarning uchlari to'plamlari, V va V' to'plamlar orasida uchlarning qo'shnilik munosabatini saqlaydigan o'zaro bir qiymatli moslik

o'rnatilgan bo'lsa, u holda G va G' graflar **izomorf** graflar deb ataladi (1.4–rasm). Barcha izomorf graflar bir xil hossalarga ega bo'ladi.

Bog'lamli yo'naltirilmagan tsiklga ega bo'lmagan graf daraxt deyiladi. Hususiy holda daraxt sirtmoq va karrali qirralarga ega bo'lmaydi.

Teorema 1.1. Daraxtda ixtiyoriy ikki uch yagona zanjir bilan bog'langan bo'ladi.

Lokal darajalar. Agar grafni uni tashkil etuvchi qirralari soni sanoqli bo'lsa, **chekli graf**, aksincha bo'lsa, **cheksiz graf** deb ataymiz.

G – yo'naltirilmagan graf bo'lsin. Bitta a uchga intsidient bo'lgan qirralar soni uning *lokal darajasi* deyiladi va uni $\rho(a)$ (1.2) kabi belgilaymiz. Biror uchning lokal darajasi hisoblanish jarayonida shu uchga intsidient bo'lgan sirtmoq uchun noaniqlik vujudga keladi. Ya'ni, sirtmoqni qanday hisobga qo'shish kerak; bitta qirra sifatidami yoki ikkita. Ushbu holatda qaralayotgan masalaga bog'liq ravishda qanday hisoblash qulaylik tug'dirsa, shunday hisoblagan ma'quldir. Shunga ko'ra, har bir holatda sirtmoqni qanday tartibda hisoblanganligi ko'rastilishi zarur.

Lokal daraja uchun bir necha sodda formulalar keltiramiz. G grafdagi a va b uchlarni tutashtiruvchi qirralar sonini $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ kabi belgilaymiz. Agar grafda karrali qirralar bo'lmasa, u holda quyidagicha hollar bo'lishi mumkin:

$$\begin{aligned}\rho(a, b) &= 0 \\ \rho(a, b) &= 1\end{aligned}$$

Ko'rinib turibdiki, har bir (1.1.2) lokal darajada a uch uchun quyidagi yig'indi mavjud:

$$\rho(a) = \sum_{b \in V} \rho(a, b) \quad (1.3)$$

G grafdagi qirralar sonini v deb belgilaymiz. Har bir qirra a va b uch bo'yicha ikkita lokal darajada ishtirok etadi, bundan esa quyidagiga ega bo'lamiz:

$$2v = \sum_{a \in V} \rho(a) \quad (1.4)$$

yoki (1.3) ga ko'ra esa

$$2v = \sum_{a,b \in V} \rho(a,b) \quad (1.5)$$

(1.4) formuladan ko'rinib turibdiki, chap tomon har doim juft son bo'ladi.

Yuqoridagi formulalardan ko'rish mumkinki, yo'naltirilmagan grafda barcha uchlarning lokal darajalar yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo'ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra o'zi intsidient bo'lgan uchlarda ikki marta qatnashadi. Shunga ko'ra XVIII asrdayoq L.Eyler tomonidan quyidagicha tasdiq isbotlangan.

Lemma–1. Ixtiyoriy yo'naltirilmagan grafda barcha uchlarning darajalari yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng.

Teorema 1.2. Chekli grafda toq darajali uchlarning soni juft sonda bo'ladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil n –darajaga ega bo'lsa, u holda bunday graf n – darajali **regulyar graf** deb ataladi: $\rho(a) = n$.

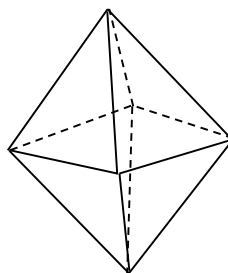
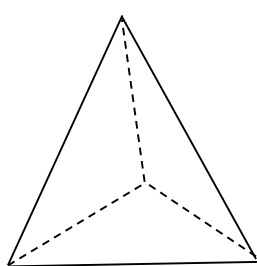
Regulyar graflarga misol sifatida beshta muntazam ko'pyoqlar: tetraedr, kub, oktaedr, dodokaedr va ikosaedrlarni keltirish mumkin. Ma'lumki, regulyar grafning har bir uchidan bir hil sondagi qirralar chiqadi, demak (1.4) formulaga ko'ra $2v = \sum \rho(a) = nu$ bo'ladi, bu erda u – uchlarning soni. $v = \frac{nu}{2} = \frac{1}{2}nu$. Demak, n – darajali u ta uchga ega regulyar grafda $\frac{1}{2}nu$ ta qirra bo'ladi. Bunda agar, n

toq bo'lsa, u juft sonda ishtirok etadi. Chunki, a va b uchlarni tutashtiruvchi bitta qirra ham a uchda ham b uchda hisoblanadi.

Masalan. Tetraedrni olaylik. Unda lokal darajasi 3(toq)ga teng, undagi uchlar soni

4 ga teng. U holda qirralar soni $v = \frac{nv}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Oktaedrda lokal darajasi 4 ga,

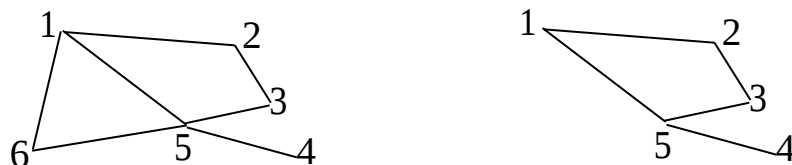
uchlar soni 6 ga teng. U holda qirralar soni $v = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ ga teng bo'ladi.



1.2§. Graflar ustida amallar.

Graflar ustida turli amallar bajarish mumkin, masalan, graflarni birlashtirish, biriktirish, ko'paytirish, graflarni qismlarga ajratish va hakazo.

Eng sodda amallardan biri siftida grafdan **uchni olib tashlash** amalini ko'rsatsa bo'ladi. Bu amalni qo'llash berilgan grafning uchlar to'plamidan birorta elementni lib tashlashni anglatadi. Natijada uchlari soni berilgan graf uchlari sonidan bittaga kam yangi graf hosil bo'ladi. Albatta bu amalni uchlari soni ikkitadan kam bo'lmagan graflar uchungina qo'llash mumkin bo'ladi. Shu bilan birga birorta uchni olib tashlash bilan birga shu uchga intsident bo'lgan qirralarni ham olib tashlash nazarda tutiladi (2.1–rasm).



2.1–rasm.

Yuqoridagi misolda 6–uchni olib tashlash yordamida berilgan grafdan yangi graf hosil qilindi.

Yana bir sodda misollardan biri bu grafdan **qirrani olib tashlash** amalini ham kiritish mumkin. Bu amalga ko'ra berilgan grafning qirralari to'plamidan bitta element olib tashlanadi. Berilgan grafdan qirrani olish tashlash jarayonida shu qirranga intsident bo'lgan uchlarni olib tashlash ham, olib tashlamaslik ham mumkin. Bunda masalaning mohiyatiga e'tibor qaratiladi (2.2–rasm).



2.2–rasm.

Yuqoridagi misolda (1,6) qirrani olib tashlash yordamida berilgan grafdan qirralar soni bittaga kam bo'lgan yangi graf hosil qilindi.

Graflar ustida uchni olib tashlash va qirrani olib tashlash amallarini qo'llash orqali quyidagicha natijaga erishiladi.

$G = (V, U)$ va $G' = (V', U')$ graflar berilgan bo'lsin. Agar $V' \subseteq V$ va G grafning barcha qirralari G' grafning ham qirralari, ya'ni $U' \subseteq U$ bo'lsa, u holda G' graf G grafning **qism grafi** deyiladi.

Agar G graf karrali qirralarga ega bo'lmasa, u holda uchlari G grafning barcha uchlaridan iborat bo'lgan shunday yagona $\overline{G}$ graf mavjudki, $\overline{G}$ grafdagi barcha juft uchlar faqat va faqat G grafda qo'shni bo'lmagandagina qo'shnidir. Bunday $\overline{G}$ graf berilgan G grafning **to'ldiruvchi grafi** deb ataladi.

Berilgan graf uchun to'ldiruvchi grafni qurish jarayonini ham graflar ustida amallar qatoriga kiritish mumkin. G graf uchun **to'ldiruvchi grafni qurish** amalini qo'llash natijasida $\overline{\overline{G}}$ graf hosil bo'ladi. Isbotlash mumkinki, $\overline{\overline{G}} = G$ munosabat o'rinli.

Graflar ustida yana shunday amallarni bajarish mumkinki, ular elementlari soni berilgan grafdagidan ko'proq bo'lgan boshqa graflarning hosil bo'lishiga olib keladi. Bunday amallar qatoriga **uchni qo'shish amali** yoki **qirrani qo'shish** amalini kiritish mumkin.

Grafda yangi uchni qo'shish turlicha usul bilan amalga oshirilishi mumkin. Masalan, yangi v uchni berilgan grafga qo'shish shu grafning v_1 va v_2 uchlariga intsidient bo'lgan qandaydir u qirrasiga qo'shish orqali quyidagicha ikki bosqichda bajarilishi mumkin:

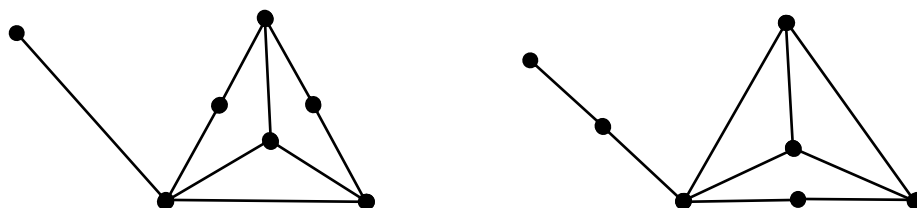
1) u qirra berilgan grafdan olib tashlanadi;

2) hosil bo'lgan grafga ikkita yangi qirralar: v va v_1 uchlarga intsidient u_1 qirra hamda v va v_2 uchlarga intsidient u_2 qirra qo'shiladi.

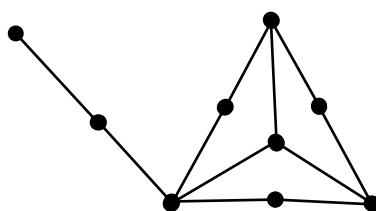
Bu jarayon grafda qirraga darajasi 2 bo'lgan yangi uchni qo'shish yoki qirrani ikkiga bo'lish amali deb ataladi.

Ta'rif: Agar G graf $\bar{G}$ grafdan qirrani ikkiga bo'lish amalini chekli marta qo'llash vositasida hosil qilingan bo'lsa, u holda G graf $\bar{G}$ grafning bo'linish grafi deyiladi.

Bo'linish graflari izomorf bo'lgan graflar gomeomorf graflar deb ataladi. Quyida 2.3–rasmدا tasvirlangan graflar izomorf emas, lekin ular gomeomorf, chunki bu graflarning har biri 2.4–rasmدا tasvirlangan bo'linish grafiga ega.



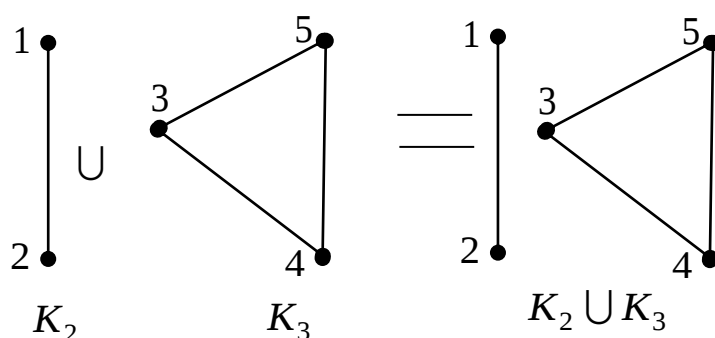
2.3–rasm.



2.4–rasm.

Graflar ustida mallar qatoriga **graflarni birlashtirish**, **graflarni biriktirish**, **graflarni ko'paytirish** amallarini kiritish mumkin.

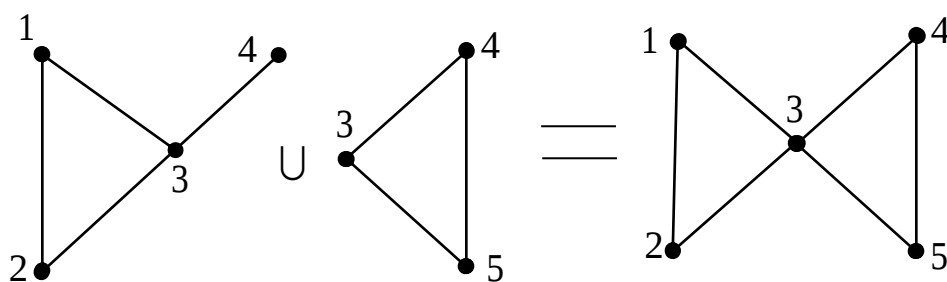
Graflarni birlashtirish. $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. Uchlari to'plami $V = V_1 \cup V_2$ va qirralari kortegi $U = U_1 \cup U_2$ kabi aniqlangan $G = (U, V)$ graf G_1 va G_2 graflarning **birlashmasi** deb ataladi va $G = G_1 \cup G_2$ ko'rinishda belgilanadi. 2.5–rasmda uchlari to'plami kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birlashmasi amali tasvirlangan.



2.5–rasm.

Ta'rif: Agar birlashtirilayotgan graflarning uchlari to'plami kesishmasa, u holda bu graflarning birlashmasi **dizyunkt birlashma** birlashma deyiladi.

Uchlari to'plamlari kesishadigan graflarning birlashmasi amali 2.6–rasmda tasvirlangan.

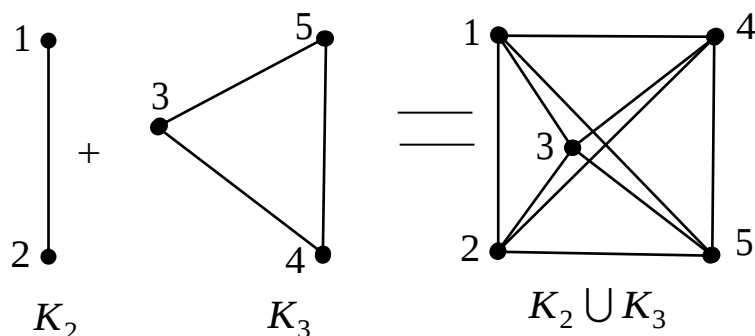


2.6–rasm.

2.5–rasmda tasvirlangan birlashma dizyunkt, 2.6–rasmda tasvirlangan birlashma esa – dizyunkt emas.

Graflarni biriktirish. $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. G_1 va G_2 graflar birlashtirilshi hamda G_1 grafning har bir uchi G_2 grafning har bir uchi bilan qirra vositasida tutashtirilishi natijasida hosil bo'lgan $G = (U, V)$ graf G_1 va G_2 graflarning birikmasi deb ataladi va $G = G_1 + G_2$ ko'rinishda belgilanadi.

2.7–rasmda uchlari to'plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birikmasi amali tasvirlangan. Agar uchlari to'plamlari kesishmasi bo'sh bo'lmagan graflarni biriktirish zarur bo'lsa, u holda hal qilinayotgan masala hossalarni e'tiborga olish kerak bo'ladi.



2.7–rasm.

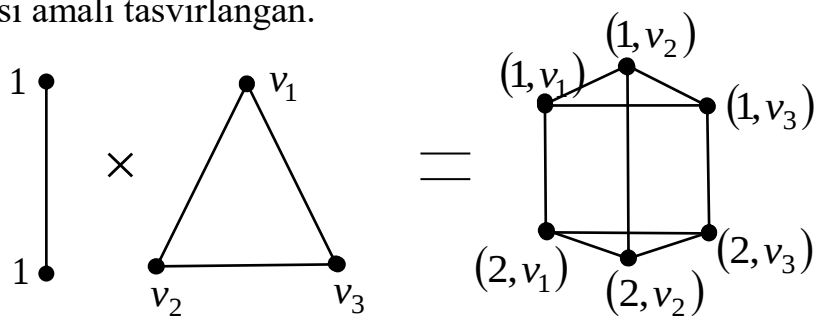
Graflarni ko'paytirish. $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. Uchlari to'plami $V = V_1 \times V_2$ bo'lgan $G = (V, U)$ grafning qirralari kortejini quyidagicha aniqlaymiz: agar $v'_1 = v'_2$ va $(v'_2 = v''_2) \in U_2$ yoki $v'_2 = v''_2$ va $(v'_1 = v''_1) \in U_1$ bo'lsa, u holda $(v', v'') \in U$ bo'ladi, bu erda $v'_1, v''_1 \in V_1$, $v'_2, v''_2 \in V_2$, $v' = (v'_1, v'_2) \in V$ va $v'' = (v''_1, v''_2) \in V$. Shunday usul bilan qurilgan $G = (V, U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning ko'paytmasi** deb ataladi va $G = G_1 \times G_2$ kabi belgilanadi.

Graflarning ko'paytmasi ta'rifiga asosan berilgan $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ ko'paytmasi hisoblangan G grafdagi:

- uchlar (v_1, v_2) yoki (v_2, v_1) ko'rinishidagi juftliklardan iboratdir, bu erda $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$;
- $v' = (v'_1, v'_2) \in V$ va $v'' = (v''_1, v''_2) \in V$ uchlar faqat va faqat shu holda qo'shni bo'ladiki, bu uchlarni tashkil qiluvchi elementlarning har biri unga mos element bilan ustma-ust tushgan holda boshqa elementlar o'z grafida qo'shni bo'lishsa, bu erda $v'_1, v''_1 \in V_1, v'_2, v''_2 \in V_2$;

– $|V_1| = m_1, |V_2| = m_2, |U_1| = n_1, |U_2| = n_2$ munosabatlardan $|V| = m_1 m_2$ va $|U| = m_1 n_2 + m_2 n_1$ bo'lishi kelib chiqadi.

2.8–rasmda uchlari to'plami kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning ko'paytmasi amali tasvirlangan.



2.8–rasm.

Yuqorida ko'rib o'tildiki, Dekart ko'paytmalar bilan bog'liq tuzilmalar ustida bajariladigan amallar boshqalardan o'ziga xosligi bilan ajralib turadi. Bu o'ziga xoslik graflarni ko'paytirish amalida namoyon bo'ladi. Aniqrog'i, graflar ko'paytmasida qatnashgan birorta grafning qirralar korteji bo'sh bo'lsada, ko'paytirish amalini qo'llash natijasida hosil bo'lgan grafning qirralar korteji bo'sh bo'lmasligi ham mumkin. Haqiqatan ham, yuqorida keltirilgan graflarning

ko'paytmasi ta'rifidan kelib chiqadiki, agar $G = (V, U)$ graf $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflarning ko'paytmasi, ya'ni $G = G_1 \times G_2$ bo'lsa, u holda $V = V_1 \times V_2$ bo'ladi va U kortej elementlari bilan $(V_1 \times U_2) \cup (U_1 \times V_2)$ birlashma elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Shuning uchun, agar, masalan, $U_1 = \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ bo'lsa, u holda $(V_1 \times U_2) \cup (U_1 \times V_2) = V_1 \times U_2 \neq \emptyset$ bo'ladi, chunki grafning tarifiga ko'ra $V \neq \emptyset$. Demak, $U \neq \emptyset$, ya'ni G_1 bo'sh graf bo'lsada, $G = G_1 \times G_2$ bo'sh bo'lmagan grafdir.

Graflarni ko'paytirish amalini takror qo'llash usuli bilan graflar nazariyasining muhim sinfini tashkil etuvchi n o'lchovli kublarni aniqlash mumkin. n o'lchovli kub (Q_n) uchlari soni ikkiga teng bo'lgan to'la graf K_2 yordamida quyidagi rekkurent formula bilan aniqlanadi:

$$Q_1 = K_2 \cdot Q_n = K_2 \times Q_{n-1}.$$

1.3§. Bog'lamlilik

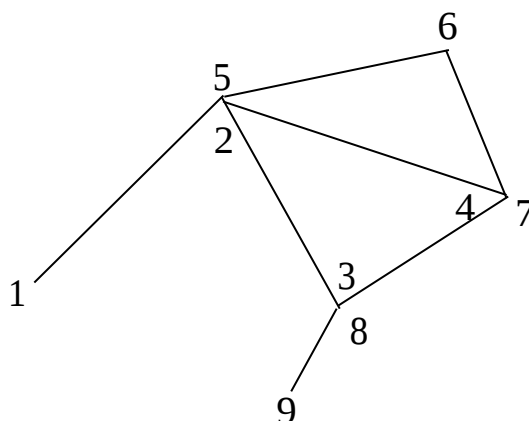
Uchlar to'plami V va qirralar to'plami U bo'lgan yo'naltirilmagan $G = (V, U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu G grafdagi ikkita qo'shni E_i va E_{i-1} qirralari umumiy uchga ega

$$S = (\dots, E_0, E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, \dots), \quad (3.1)$$

ko'rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketlikka **marshrut** deb ataladi. Ikkita qo'shni qirraning umumiy uchga egaligidan uni quyiddagicha ham yozish mumkin:

$$S = (\dots, E_0 = (a_0, a_1), E_1 = (a_1, a_2), \dots, E_n = (a_n, a_{n+1})), \quad (3.2)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, marshrutda bitta E qirra bir necha marta ishtirok etishi mumkin (3.1–rasm).



3.1– rasm.

Agar (3.1) marshrutda E_0 qirradan oldin hech qanday qirra mavjud bo'lmasa u holda, a_0 uch S marshrutning **boshlang'ich uchi**, agar E_{n-1} qirradan keyin hech bir qirra mavjud bo'lmasa u holda, a_n uch **oxirgi** uchi deyiladi. Ikkita qo'shni E_i va E_{i-1} qirralarga tegishli bo'lgan ixtiyoriy a_i uch **ichki uch** deyiladi. Ko'rinib turibdiki marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin, shu bilan birga ichki uch ham boshlang'ich yoki oxirgi uch sifatida ishtirok etishi mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

– boshlang'ich uchga ega bo'lib, oxirgi uchga ega bo'lmasligi, yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo'lib, boshlang'ich uchga ega bo'lmasligi mumkin.

Bunday marshrut **bir tomonlama cheksiz marshrut** deyiladi;

– boshlang'ich uchga ham, oxirgi uchga ham ega bo'lmasligi mumkin.

Bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deyiladi.

– Birorta ham qirraga ega bo'lmasligi mumkin. Bunday marshrut **trivial marshrut** deyiladi.

– Faqatgina yagona qirradan iborat marshrut bo'lishi mumkin. Bunday marshrut **nol marshrut** yoki **notrivial marshrut** deyiladi.

Agar S marshrut a_0 boshlang'ich uchga va a_n oxirgi uchga ega bo'lsa, u holda uni

$$S = S(a_0, a_n) \quad (3.3)$$

kabi yoziladi. (3.3) kabi belgilangan marshrutning uzunligi n deb a_0 va a_n uchlarni tutashtiruvchi qirralar soniga aytiladi. (3.1–rasm) keltirilgan marshrutning uzunligi 7 ga teng. Marshrutning ikkita a_i va a_j uchlaridan tuzilgan marshrut S marshrutning **qismi** deyiladi. Marshrutning oxirgi va boshlang'ich uchlari ustma–ust tushsa, ya'ni, $a_0 = a_n$ bunday marshrut **tsiklik marshrut** deyiladi.

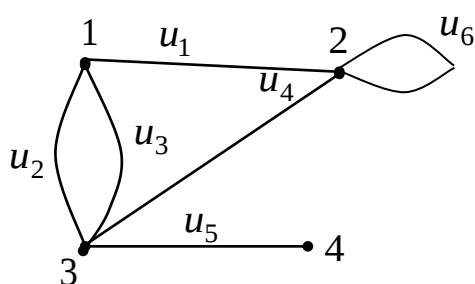
Agar marshrutda qirralar faqat bir martadan ishtirok etsa, **zanjir** deyiladi. Tsiklik marshrutda qirralar faqat bir martadan ishtirok etsa, **tsikl** deyiladi. Bu ikki holda ham uchlar bir necha marta takror ishtirok etishi mumkin. Agar zanjirning chetki uchlaridan boshqa barcha uchlari turlicha bo'lsa, ya'ni hech bir uch takrorlanmasa, u holda uni **yopiq zanjir** deb ataladi. Marshrutning oxirgi va boshlang'ich uchlari ustma–ust tushsa, ya'ni, $a_0 = a_n$ bo'lib, unda ishtirok etgan qirralar va uchlar bir martadan ishtirok etsa u holda uni **oddiy tsikl** deb ataladi. Berilgan $(a_0, a_1, \dots, a_s)$ zanjir uchun $a_0 = a_s$ bo'lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar tsikl tashkil etishi ravshan.

Yuqoridagi tushunchalarda graf G yoyo'naltirilmagan deb faraz qildik. Yo'naltirilgan graflar uchun ham marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Bu holda (3.2) dagi barcha qirralar yo'naltirilgan qirralar bo'ladi, unda esa yo'nalishlari qirralarga mos holda yo'naltirilgan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalari kiritiladi.

Yo'naltirilgan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o'xshash **yo'l** tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang'ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan yo'naltirilgan zanjir **kontur** deb ataladi.

Ushbu 3.2-rasmda keltirilgan graf uchun $(3, u_4, 2, u_1, 1, u_1, 2, u_6, 2, u_4, 3, u_5, 4)$ ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo'nalgan marshrutdir, bunda 3-boshlang'ich, 4-esa oxirgi uch. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6 ga teng bo'lib, u zanjir bo'la olmaydi, chunki 1 belgili uch ikki marta (birmarta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta oxirgi uch sifatida) ishtirok etmoqda.

$(3, 2, 1, 3)$ zanjirning oxirgi qirrasi sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysi biri olinishiga bog'liqsiz ravishda u yopiq zanjir va tsikldir.



3.2-rasm.

Yuqorida keltirilgan tushunchalar uchun quyidigicha teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bu graf tsiklga ega.

Isboti. Agarda graf sirtmoqlar yoki karali qirralardan iborat bo'lsa, teoremaning isboti ravshan. Shu sababli teorema isbotini graf karrali qirralar va sirtmoqlar bo'lmagan holda keltiramiz.

Faraz qilaylik, $v \in V$ berilgan $G = (V, U)$ grafning ixtiyoriy uchi bo'lsin. Qaralayotgan v uchga qo'shni v_1 uchni va bu uchga v dan farqli boshqa qo'shni v_2 uchni v_2 uchga esa v_1 dan farqli boshqa v_3 uchni va hakozo, v_i uchga v_{i-1} dan farqli boshqa qo'shni v_{i+1} uchni va hakozo, tanlab,

$$((v, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}), \dots)$$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartiga ko'ra yuqoridagi ketma-ketlikni tuzish va talab etilgan hossaga ega v_{i+1} uchni har doim topish mumkin.

Grafning uchlar to'plami V chekli to'plam bo'lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so'ng albatta oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majburmiz. Agar biror v_k uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan birinchi uch bo'lsa, ketma-ketlikka qirralar qo'shish jarayonini to'xtatamiz., chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining v_k uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan tsikldir. Teorema isbot bo'ldi.

G graf yo'naltirilmagan graf bo'lsin. Agar oxirlari a va b uchlardan iborat (3.1) ko'rinishdagi marshrut marshrut mavjud bo'lsa, u holda ikkita a va b uchlar bog'langan deyiladi. Agar S marshrut qandaydir a_i uchdan bir martadan ko'p o'tsa, u holda uning tsiklik qismini o'chirib tashlash orqali, a va b uchlarni bog'lovchi qirralardan iborat yangi S' marshrut hosil qilinadi. Bundan kelib chiqadiki, marshrut bilan bog'langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham

bog'langan bo'ladi. Agar grafda uning ixtiyoriy ikki uchi bog'langan bo'lsa, bu holda uni **bog'lamli graf** deb ataladi.

Agar ixtiyoriy G grafda a uch b uch bilan, b uch esa c uch bilan bog'langan bo'lsa, u holda ko'rinib turibdiki, a uch c uch bilan bog'langan bo'ladi. $G = (V, U)$ grafning uchlar to'plami uchun juft–jufti bilan kesishmaydigan quyidagicha $V = \bigcup_i V_i$ (3.4) yig'indi mavjud. Bunda har bir V_i qism to'plamdagi uchlar o'zaro bog'langan, turli V_i qism to'plamdagi uchlar o'zaro bog'lanmagan bo'ladi. Mos ravishda (3.4) yig'indidan G grafning $G(V_i)$ qism graflari kesishmaydigan quyidagicha $G = \bigcup_i G(V_i)$ (3.5) to'g'ri yig'indisi tuziladi. Bu qism graflar grafning bog'lamlilik komponentalari deyiladi. Yuqorida keltirilgan tasdiqlardan quyidagicha teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema 3.2. Har bir yo'naltirilmagan graf o'zining bog'lamlilik komponentalarining (3.5) to'g'ri yig'indisiga ajraladi va bu ajralish yagona bo'ladi.

Teorema 3.3. Agar chekli G grafda ikkita uchlar toq lokal darajaga ega bo'lsa, u holda ular bog'langan bo'ladi.

Masofa. G yo'naltirilmagan bog'lamli graf bo'lsin. Ixtiyoriy a va b uchlari bog'langan bo'lsa, u holda oxirlari a va b bo'lgan $S = (a, b)$ bo'lgan oddiy zanjir mavjud bo'ladi. Ushbu oddiy zanjirlarning uzunliklari manfiy bo'lmagan butun sonlardan iborat bo'ladi. Mos ravishda a va b uchlar orasida *eng qisqa* uzunlikka ega zanjir mavjud bo'ladi. Ushbu eng qisqa uzunlik a va b orasidagi **masofa** deyiladi va $d(a, b)$ kabi belgilanadi. Ta'rif bo'yicha bu masofalar uchun $d(a, a) = 0$ tenglik bajariladi. Oson ko'rish mumkinki, bu aniqlangan masofa funktsiyasi metrika aksirmalarini qanoatlantiradi:

1. $d(a, a) \geq 0$.

2. $d(a, b) = 0$ tenglik shunda va faqat shunda bajariladiki, qachonki,

$$a = b.$$

3. $d(a, b) = d(b, a)$.

4. Uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi: $d(a, b)d(b, c) \geq d(a, c)$.

Chekli graflar uchun uning ikki uchi orasidagi eng uzun masofani ifodalovchi chegaralangan **diametr** tushunchasini kiritish mumkin:

$$d(G) = \max_{a, b \in V} d(a, b) \quad (3.6)$$

Mos ravishda eng uzun masofaga ega ikki uchni bog'lovchi oddiy zanjirni **diametrial oddiy zanjir** deb ataymiz.

Qandaydir fiksirlangan c uchni olamiz va undan G ning uchigacha bo'lgan eng uzun masofani

$$r(c) = \max_{x \in V} d(c, x) \quad (3.7)$$

kabi belgilaymiz. Agar (2.1.7) qiymat c_0 uchda

$$r_0 = r(c_0) = \min_{c \in V} r(c) \quad (3.8)$$

eng kichik qiymatga erishsa, u holda bu c_0 uchni G grafning **markazi** deb ataladi.

(3.8) qiymatni G grafning **radiusi** deb, c_0 uchdan eng uzun masofadagi qandaydir uchgacha bo'lgan ixtiyoriy eng qisqa oddiy zanjirni **radial oddiy zanjir** deb ataladi. Grafda markaz yagona bo'lmasligi mumkin. Faraz qilaylik, G – chekli, lokal darajasining yuqori chegarasi $\rho_0 \geq 2$ bo'lgan graf bo'lsin. Ixtiyoriy a_0 uchni olaylik va bu uch uchun $V = \bigcup_n A_n$ uchlar yoyilmasi mavjud bo'lsin. a_0

uchdan A_1 uchga ρ_0 dan ko'p bo'lmagan qirralar chiqadi. Har bir $a_1 \in A_1$ uchdan

A_2 uchga ρ_0 dan ko'p bo'lmagan qirralar chiqadi va hakazo. Bundan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$n < 1 + \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_0^3 + \dots + \rho_0^r \leq \frac{1}{\rho_0 - 1} (\rho_0^{r+1} - 1) \quad (3.9)$$

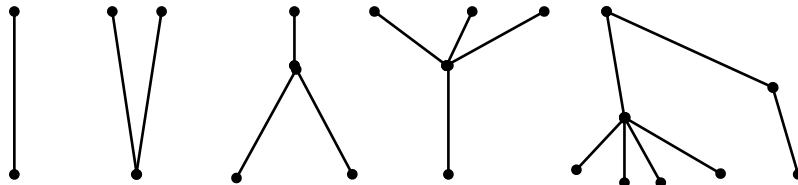
Bundag esa, quyidagicha tasdiq kelib chiqadi: biror x uch ikkita a va b uchlar orasidagi eng qisqa uchga tegishli bo'ladi shunda va faqat shundaki, qachonki $d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)$ tenglik o'rinli bo'lsa.

II bob. Daraxtlar va tarmoqlar, ularning xossalari

2.1§. Daraxtlar.

Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar. Siklga ega bo'lmagan oriyentirlanmagan bog'lamli graf daraxt, deb ataladi. Ta'rifga ko'ra, daraxt sirtmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega bo'lmagan orientirlanmagan graf *o'rmon (asiklik graf)* deb ataladi.

1-misol. 1-shaklda bog'lamli komponentali soni beshga teng bo'lgan graf tasvirlangan bo'lib, u o'rmondur. Bu grafdagi bog'lamli komponentalarning har biri daraxtdir.



4.1-shakl.

2-misol. 2-shaklda to'rtta uchga ega bir-biriga izomorf bolmagan barcha (ular bor-yo'g'i ikkita) daraxtlarning geometik ifodalanishi tasvirlangan.



4.2-shakl.

Beshta uchga ega bir-biriga izomorf bo'lmagan barcha daraxtlar uchta, oltita uchga ega bunday barcha daraxtlar esa oltita ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Daraxt tushunchasiga boshqacha ham ta'rif berish mumkin.

Umuman olganda, $G(m,n)$ -graf uchun daraxtlar xaqidagi asosiy teorema, deb ataluvchi quyidagi teorema o'rinlidir.

1-teorema. Uchlari soni m va qirralari soni n bo'lgan G graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:

- 1) G daraxtdir;*
- 2) G asiklikdir va $n=m-1$;*
- 3) G bog'lamlidir va $n=m-1$;*
- 4) G bog'lamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash amalini qo'llash natijasida bog'lamli bo'lmagan graf xosil bo'ldi, ya'ni G ning xar bir qirrasi ko'prikdir;*
- 5) G grafning o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta zanjir bilan tutashtirish amalini qo'llash natijasida faqat bir siklga ega bo'lgan graf xosil bo'ladi.*
- 6) G asiklik bo'lib, uning qo'shni bo'lmagan ikki uchini qirra bilan tutashtirish amalini qo'llash natijasida faqat bir siklga ega bo'lgan graf hosil bo'ladi.*

Isboti. Teoremaning 1) tasdig'idan uning 2) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf daraxt bo'lsin. Daraxtning ta'rifiga ko'ra, u asiklik bo'lishini ta'kidlab, m bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llaymiz.

Matematik induksiya usulini ba'zasi: agar $m=1$ bo'lsa, u holda G daraxt faqat bitta uchdan tashkil topgan bo'ladi. Tabiiyki, agar bitta uchga ega bo'lgan grafda sikl bo'lmasa, u holda unda birorta xam qirra yo'q, ya'ni $n=0$. Demak, bu holda tasdiq to'g'ridir.

Induksion o'tish: G daraxt uchun $k \geq 2$ va $m=k$ bo'lganda, 2) tasdiq o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. Endi uchlari soni $m=k+1$ va qirralari soni n bo'lgan daraxtni qaraymiz. Bu daraxtning ixtiyoriy qirrasini () bilan belgilab, undan bu qirrani olib tashlasak, v_1 uchdan v_2 uchgacha marshrut (aniqrog'i, zanjiri) mavjud bo'lmagan grafni xosil qilamiz, u holda G daraxtda sikl topilar edi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas.

Hosil bo'lgan graf ikkita G_1 va G_2 bog'lamli komponentalardan iborat bo'lib, bu komponentalarning har biri daraxtdir. Yana shuni ham e'tiborga olish kerakki, G_1

va G_2 daraxtlarning har biridagi qirralar soni uning uchlari sonidan bitta kam bo'lishini ta'kidlaymiz, ya'ni G_1 graf (m, n) -graf bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinlidir: $n = n_1 + n_2 + 1$, $k + 1 = m_1 + m_2$ va $n_i = m_i - 1$ ($i = 1, 2$). Bu tengliklardan

$$n = n_1 + n_2 + 1 = m_1 - 1 + m_2 - 1 + 1 = (m_1 + m_2) - 1 = (k + 1) - 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $m=k+1$ bo'lganda ham $n=m-1$ tenglik o'rinlidir. Bu esa, matematik induksiya usuliga ko'ra, kerkli tasdiqning isbotlanganligini anglatadi.

Endi daraxtlar haqidagi teoremaning 2) tasdig'ian uning 3) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf asiklik, ya'ni u siklga ega bo'lmagan graf va $n=m-1$ bo'lsin. G grafning bog'lamli bo'lishini isbotlash kerak.

Agar G graf bog'lamli bo'lmasa, u holda uni har bir bog'lamli komponentasi siklsiz graf G_i (ya'ni daraxt) bo'lgan qandaydir k ta ($k > 1$) graflar dizyunktiv birlashmasi sifatida $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$ tenglik bilan ifodalash mumkin. Har biri $\overline{1, k}$ uchun G_i graf daraxt bo'lgani uchun, yuqorida isbotlangan tasdiqqa ko'ra, agar unda m_i ta uch va n_i ta qirra bo'lsa, uholda G_i asiklikdir va $n_i = m_i - 1$ tenglik o'rinlidir. Tushunarliki, $m = \sum_{i=1}^k m_i$, $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

$$\text{Demak, } n = \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k (m_i - 1) = \sum_{i=1}^k m_i - k = m - k,$$

Ya'ni G graf chlarining umumiy soni undagi qirralar umumiy sonidan k ta ortiqdir. Bu esa $k > 1$ bo'lgani uchun, $n = m - 1$ tenglikka ziddir. Zarur tasdiq isbotlandi

Teoremaning 3) tasdig'idan uning 4) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G -bog'lamli graf va $n = m - 1$ bo'lsin. Avvalo, k ta bog'lamlilik komponentalariga ega karrali qirralri bo'lmagan sirtmoqsiz (m, n) – graf uchun

$$m - k \leq n \leq \frac{(m - k)(m - k + 1)}{2}$$

Munosabat o'rinli bo'lishini eslatamiz .

$n = m - 1$ bo'lgani sababli G bog'lamli grafdan istalgan qirra olib tashlansa, natijada m ta uch va $(m-2)$ ta qirralari bo'lgan graf hosil bo'ladiki, bunday graf $m - k \leq n$ shartga binoan bog'lamli bo'la olmaydi.

Daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 4) tasdig'idan uning 5) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G bog'lamli graf va uning har bir qirradi ko'prik bo'lsin deb faraz qilib, bu grafning o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi mumkinligini ko'rsatamiz. G bog'lamli graf bo'lgani uchun, uning istalgan ikki uchi hech bo'lmasa, bitta oddiy zanjir vositasida tutashtiriladi.

Agar qandaydir ikki uch bittadan ko'p, masalan, ikkita turli oddiy zanjir vositasida tutashtirilishi imkoniyati bo'lsa, u holda bu uchlarning biridan zanjirlarning birontasi bo'ylab harakatlanib ikkinchi uchga, keyin bu uchdan ikkinchi zanjir bo'ylab harakatlanib dastlabgi uchga qaytish imkoniyati bo'lar edi. Yani qaralayotgan grafda sikl topilar edi.

Tabiiyki, tarkibida sikl mavjud bo'lgan grafning siklga tegishli istalgan bitta qirrasini olib tashlash uning bog'lamliligi xossasini o'zgartirmaydi, ya'ni bu holda grafning siklga tegishli istalgan qirradi ko'prik bo'lmaydi. Bu esa qilingan farazga ziddir. Teoremaning 4) tasdig'idan uning 5) tasdig'i kelib chiqishi isbotlandi.

Endi teoremaning 5) tasdig'idan uning 6) tasdig'i kelib chiqishini ko'rsatamiz. Berilgan G grafning o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikki uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo'lsin. Teskarisini, ya'ni G graf asiklik emas, deb faraz qilamiz. Bu holda, G sikl topiladi va undagi ixtiyoriy siklga tegishli istalgan turli ikkita uchini kamida ikkita oddiy zanjir vositasida tushuntirish imkoniyati bor. Bu esa G grafning o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikki uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi shartiga ziddir.

G grafning qo'shni bo'lmagan v_1 va v_2 uchlarini qirra bilan tutashtirish amalini qo'llash natijasida faqat bitta siklga ega bo'lgan graf hosil bo'lishini

ko'rsatamiz. Shartga binoan, qaralayotgan v_1 va v_2 uchlarini faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin. Oddiy zanjir tarifiga ko'ra esa, bu zanjir tarkibida sikl yo'q. shuning uchun v_1 va v_2 uchlarni G grafning tarkibida bo'lmagan (v_1, v_2) qirra bilan tutashtirish, albatta, tarkibida sikl topildigan va bu sikl yagona bo'lgan grafni hosil qiladi. Teoremaning 5) tasdig'idan uning 6) tasdig'i kelib chiqishi ham isbotlanadi.

Nihoyat, 1-teoremaning 6) tasdig'idagi shartlar bajarilsa, G grafning daraxt bo'lishini, ya'ni teoremaning 1) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, asiklik G graf bog'lamli bo'lmasin. U holda bu grafning ixtiyoriy bog'lamli komponentasidagi ixtiyoriy uchni uning boshqa bog'lamli kompanentasidagi ixtiyoriy uch bilan qirra vositasida tutashtirish amalini qo'llash natijasida tarkibida sikl bo'lgan graf hosil bo'lmaydi. Bu esa 6) tasdiqning ikkinchi qismiga ziddir.

1-natija. Bittadan ko'p uchga ega bo'lgan istalgan daraxtda hech bo'lmasa, ikkita darajasi birga teng uchlar mavjud.

Isboti. Haqiqatdan ham, agar $v_1, v_2, \dots, v_m$ berilgan daraxtning uchlari bo'lsa, «*ko'rishishlar*» haqidagi lemmaga binoan $\sum_{i=1}^m \rho(v_i) = 2(m-1)$ tenglik o'rinlidir. Daraxtning ta'rifiga ko'ra, u bog'lamlidir, shuning uchun

$\rho(v_i) \geq 1$ ($i = \overline{1, m}$). Bundan yuqoridagi tenglik o'rinli bo'lishi uchun

$\rho(v_1), \rho(v_2), \dots, \rho(v_m)$ ketma-ketlikdagi hech bo'lmaganda, ikkita son birga teng bo'lishi kelib chiqadi.

2-natija. M ta uch va k ta bog'lamli komponentali o'rmondagi qirralar soni $(m-k)$ ga tengdir.

Isboti. 1-teorema isbotining 2) tasdiqdan 3) tasdiq kelib chiqishiga bag'ishlangan qismiga qarang.

2-teorema. Istalgan daraxtning markazi uning bitta uchidan yoki ikkita qo'shni uchlaridan iborat bo'ladi.

Isboti. Agar daraxt bitta uch yoki ikkita qo'shni uch va ularni tutashtiruvchi qirradan tashkil topgan bo'lsa, teorema tasdig'i to'g'riligi oydindir.

G daraxt tarkibida ikkitadan ko'p uch bor, deb faraz qilamiz. G daraxtdagi darajalari birga teng barcha uchkarni bu uchlarga insident barcha qirralar bilan birgalikda G daraxtdan olib tashlaymiz. Natijada uchlari va qirralari soni berilgan G daraxtdagi uchlar va qirralar sonidan kam bo'lgan qandaydir G' daraxtni hosil qilamiz. G' daraxtdagi har bir uch eksentritsiteti G daraxtdagi mos uch eksentritsitetidan bitta kam bo'lishi va bu daraxtlarning markazlari ustma-ust tushishi ravshandir.

Berilgan graf chekli bo'lgani uchun, yuqoridagi bayon etilgan jarayonni yetarlicha marta takrorlash natijasida bitta uch yoki ikkita qo'shni uch va ularni tutashtiruvchi qirradan tashkil topgan qandaydir daraxtni xosil qilamiz.

Uchlari soni ma'lum, o'zaro izomorf bo'magan va qandaydir shartlarni qanoatlantiruvchi daraxtlar sonini aniqlash masalasi daraxtlarni o'rganishda muxim masala hisoblanadi. Yuqorida 4,5 va 6ta uchlarga ega izomorf bo'lmagan daraxtlar, mos ravishda, 2,3 va 6 ta ekanligi ta'kidlangan edi.

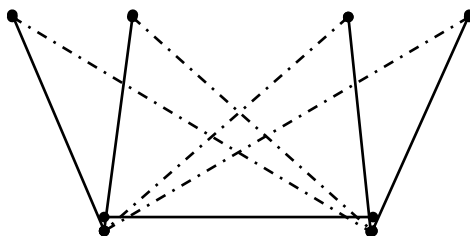
3-teorema. (Keli). Uchlari soni m bo'lgan belgilangan daraxtlar soni m^{m-2} ga teng.

Grafning siklomatik soni. Faraz qilaylik, G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan qandaydir bog'lamli graf bo'lsin. Bu grafdan uning biron sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash natijasida hosil bo'lgan graf bog'lamli graf bo'lishi ravshandir. Grafdan uning biron sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash amalini hosil bo'lgan graflarga, imkoni boricha, ketma-ket qo'llash natijasida G grafning barcha uchlarini bog'lovchi graf-daraxtni hosil qilish mumkin. Bunday daraxt G grafning sinch daraxti (sinchi, karkasi, qovurg'asi), deb ataladi.

Tabiiyki, bitta grafning bir necha sinch daraxtlari mavjud bo'lishi mumkin.

2-misol. 3-shaklda tasvirlangan graf sinchlaridan birining qirralari berilgan grafning boshqa qirralariga qaraganda qlinroq chiziqlar vositasida ifodalangan.

Endi G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan m ta uch, n ta qirra va k ta bog'lamli komponentalardan tashkil topgan graf bo'lsin.



4.3-shakl.

Agar yuqorida tavsiflangan usul yordamida G grafdan qirralarni ketma-ket olib tashlash amalini qo'llash natijasida uning har bir komponentasi bog'lamlilikini buzilmasa, u holda berilgan G grafning sinch o'rmoni deb ataluvchi grafni xosil qilishi mumkin.

Berilgan G grafdan uning sinch o'rmonini hosil qilish maqsadida olib tashlanishikera bo'lgan qirralar soni $\lambda = \lambda(G)$ bu qirralarni olib tashlash tartibiga bog'liq emasligi va $n - m + k$ bo'lishi ravshandir. Qaralayotgan G graf uchun $m - k \leq n$ tengsizlik o'rinli bo'lganligidan, $\lambda(G) \geq 0$ bo'ladi.

$\lambda(G)$ sonni G grafning siklomatik soni (siklik rangi), deb ataymiz.

Grafning siklomatik soni tushunchasi, qandaydir ma'noda, grafning bog'lamlilik darajasini ifodalovchi vositadir. Ravshanki, daraxt uchun $\lambda = 0$ bo'ladi.

Grafning o'rmon bo'lishi uchun uning siklomatik soni nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (2-natijaga qarang).

Grafning yagona siklga ega bo'lishi uchun uning siklomatik soni birga teng bo'lishi zarur va yetarli. Qirralari soni uchlari sonidan kichik bo'lmagan graf siklga egadir. Bu tasdiqlar ham 1-teoremaning natijasidir.

3-misol. 3-shaklda tasvirlangan graf (6,9)-graf bo'lib, uning bog'lamlilik komponentalari soni birga teng. Bu grafning siklomatik sonini aniqlasak, $\lambda = 9 - 6 + 1 = 4$ b'ladi. Olib tashlangan qirralar 3-shaklda shtrix chiziqlar bilan ifodalangan.

2.2§.Tarmoqlar. Ford algoritmi.

Tarmoq tushunchasi. Graflar nazariyasida hozirgacha ba'zi iboralar bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmaganligini qayd qilgan edik. Bu fikr graflar nazariyasining tarmoq va tarmoqqa oid tushunchalarri bilan ish ko'rganda yaqqol nomoyon bo'ladi. Ba'zan, (tarmoq) iborasining o'rniga (to'r) iborasini ham qo'llaydilar.

Berilgan $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ to'plam va har bir E_i elementi M dan olingan $R = \{E_0; E_1, E_2, \dots\}$ majmuani tarmoq, deb ataymiz va $M(E_0; E_1, E_2, \dots)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $E_i = (a_{v_1(i)}, a_{v_2(i)}, \dots)$. M to'plamning obyektlari tarmoq uchlari deb, E_0 majmuadagi obyektlar esa tarmoq qutblari, deb ataladi.

Yuqorida eslatilgan kitobda ta'kidlanishicha: « Adabiyotda tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar ham uchraydi, masalan, « Blok-sxema » tushunchasiga, « gippergraf » tushunchasi. Blok-sxema tushunchasi tarmoq tushunchasidan oldin paydo bo'lgan, gippergraf tushunchasi esa keyinroq».

Gippergraf tushunchasi – bu graf tushunchasining shunday umumlashmasiki, bunda qirralar nafaqat ikki elementli bo'lishi, ular uchlari to'plamining istlgan qism to'plamlari bo'lishi ham mumkin.

Graf tushunchasining turli umumlashmalarini ma'qullagan hamda bunday umumlashmalar turli masalalarni hal etishda zarur qurol sifatida ishlatilishini ta'kidlagan holda (10) kitobdagi tarmoq tushunchasining bir-biriga ekvivalent bo'lgan quyidagi ikki ta'rifni keltiramiz:

- 1) Har bir a yoyiga $\psi(a)$ manfiymas haqiqiy son mos qo'yilgan N orgraf tarmoq, deb ataladi;
- 2) Tarmoq deb shunday (D, ψ) juftlikka aytiladi, bunda $D=(U,V)$ – orgraf, ψ esa D orgrafning yoylari to'plamini manfiymas haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya.

Tarmoqdagi oqimlar. Graflar (orgraflar) bilan bog'liq ko'plab tushunchalarni osonlik bilan tarmoqlar uchun ko'chirish mumkin.

$T = (G, b)$ tarmoq berilgan bo'lsin, bu yerda, $G = (V, U)$ – bog'lamli graf (yoki orgraf, yo bo'lmasa, aralash graf), b esa G grafning yoylarini manfiymas $b_{ij}(v_1, v_j \in V)$ haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya. G grafda sirtmoq va karrali qirra yoki yoylar bo'lmasin deb faraz qilamiz. Ikkita v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi orientirlanmagan yoyni (qirrani) ikkita orientirlangan yoylarga almashtirish mumkin, deb hisoblaymiz. Shuning uchun bundan buyon G grafni orgraf, deb hisoblash mumkin.

Ta'kidlaymizki, (tarmoq) tushunchasi har bir yoyga bir nechta sonlarni mos qo'yish imkoniyatini beradi, graf (orgraf)da esa yoy faqatgina mos uchlarning tutashtirilgan yoki tutashtirilmaganligini aniqlaydi, xolos. Har bir (v_i, v_j) yoyga manfiymas b_{ij} sonni qo'yib, bu sonni yoyning o'tkazish qobilyati, deb ataymiz. Tarmoqning har bir $v \in V$ uchi uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz: v uchning chiqish yarimdarajasi $\vec{\rho}(v)$ - bu v uchdan chiquvchi barcha yoylar o'tkazish qobilyatlari yig'indisi, v uchning kirish yarimdarajasi $\tilde{\rho}(v)$ – bu v uchga kiruvchi barcha yoylar o'tkazish qobilyatlari yig'indisi.

<<ko'rishishlar>> haqidagi lemma bu yer quyidagicha ifodalanadi:
tarmoqning barcha uchlari chiqish yarimdarajalari yig'indisi ularning kirish yarimdarajalari yig'indisiga tengdir.

Grafning uchlari orasida kirish yarimdarajalari nolga teng bo'lganlari guruhini ajratamiz. Bu guruhga tegishli uchlarning har biri *manba*, deb ataladi.

Shunga o'xshash, orgrafning chiqish yarimdarajalari nolga teng bo'lgan uchlari guruhini ham ajratish mumkin. Bu guruhga tegishli ar bir uch o'pqqon, deb ataladi.

Faraz qilaylik, G orgraf faqat bitta v_s manbaga va faqat bitta v_t o'pqqonga ega bo'lsin. Bir necha manba yoki o'pqqonga ega bo'lgan tarmoqning orgrafiga yangi elementlar qo'shib olish yo'li bilan yuqoridagi xususiy holga osonlik bilan keltiriladi.

G orgrafning har bir (v_i, v_j) yoyiga manfiy mas x_{ij} sonlar mos qo'yilgan bo'lib, biron $p \geq 0$ uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

$$1) \sum_{(v_i, v_k) \in U} x_{ik} - \sum_{(v_k, v_j) \in U} x_{kj} = \begin{cases} -p, \text{ agar } k = s \text{ bo'lsa,} \\ \text{agar } k \neq s \text{ va } k \neq t \text{ bo'lsa,} \\ p, \text{ agar } k = t \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

$$2) \text{ } G \text{ orgrafda mavjud barcha } (v_i, v_j) \text{ yoylar uchun } 0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}.$$

Bu shartlar bajarilganda $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ to'plamga T tarmoqdagi v_s manbadan v_t o'pqqonga yo'nalgan oqim deb, p miqdorga esa, bu X oqimning miqdori, deb ataladi. 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi har bir x_{ij} songa

(v_i, v_j) yoy bo'ylab oqim yoki yoy oqimi deyiladi.

Yuqoridagi 1) shartga ko'ra, manba va o'pqqondan farqli istalgan uchga kiruvchi oqim shu uchdan chiquvchi oqimga tengdir, 2) shartga ko'ra esa, istalgan yoy bo'ylab oqim miqdori shu yoyning o'tkazish qobiliyatidan oshmaydi. 1) shartdan ko'rinib turibdiki, manbaga insident yoylar bo'yicha oqimlar yig'indisi o'pqqonga insident yoylar bo'yicha oqimlar yig'indisiga tengdir:

$$\sum_{(v_s, v_j) \in U} x_{sj} - \sum_{(v_i, v_t) \in U} x_{it} = p$$

1-misol. 1-shaklda manbasi v_0 va o'pqqoni v_5 bo'lgan $T = (G, b)$ tarmoq tasvirlangan bo'lib, uning yoylari yoniga mos o'tkazish qobiliyatlari yozilgan, bunda $G = (V, U)$,

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$$U = \left\{ (\overrightarrow{v_0, v_1}), (\overrightarrow{v_0, v_2}), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (\overrightarrow{v_2, v_3}), (\overrightarrow{v_2, v_3}), (\overrightarrow{v_2, v_4}), \right. \\ \left. (v_3, v_4), (\overrightarrow{v_3, v_5}), (\overrightarrow{v_4, v_5}) \right\}.$$

Bu tarmoq chun $b_{01} = 7, b_{02} = 3, b_{12} = 2, b_{13} = 5, b_{21} = 2, b_{23} = 4,$
 $b_{24} = 1, b_{31} = 5, b_{32} = 3, b_{34} = 2, b_{35} = 2, b_{43} = 2, b_{45} = 4$

ekanligi shakldan ko'rinib turibdi.

Tarmoqning har bir uchi uchun chiqish yarimdarajalari va kirish yarimdarajalarini aniqlaymiz: $\vec{\rho}(v_0) = 10, \vec{\rho}(v_1) = 7, \vec{\rho}(v_2) = 7, \vec{\rho}(v_3) = 12,$
 $\vec{\rho}(v_4) = 6, \vec{\rho}(v_5) = 0, \quad \tilde{\rho}(v_1) = 14, \tilde{\rho}(v_2) = 8, \tilde{\rho}(v_3) = 11, \tilde{\rho}(v_4) = 3,$
 $\tilde{\rho}(v_5) = 6.$

Berilgan T tarmoq orqali v_0 manbadan v_5 o'pqonda 4 kattalikka ega bo'lgan X oqimni quyidagi sonlar to'plami ilan ifodalash mumkin: $x_{01} = 2, x_{02} = 2,$
 $x_{12} = 0, x_{13} = 2, x_{21} = 0, x_{23} = 1, x_{24} = 1, x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{34} = 2,$
 $x_{35} = 1, x_{43} = 0, x_{45} = 3.$ Qaralayotgan X oqimning miqdori $p_1 = x_{01} +$
 $x_{02} = x_{35} + x_{45} = 4.$

Tarmoq bo'ylab o'tkazish mumkin bo'lgan oqimlar orasida miqdori eng katta (maksimal) oqimni topish amaliyot nuqtayi nazaridan katta ahamiyatga egadir. Bunday oqimlar *maksimal oqimlar*, deb ataladi. 1-misolda keltirilgan oqim maksimal oqim emas, chunki berilgan tarmoq uchun miqdori 5 bo'lgan oqim bor. Albatta, umumiy holda tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo'lishi mumkin.

Maksimal oqimni o'rganishda quyidagi tushunchalarni kiritish maqsadga muvofiqdir. *To'yingan yoy*- bu yoy bo'ylab oqim miqdori uning o'tkazish qobiliyatidan kichik.

2-misol. Birinchi misolda qaralgan tarmoq uchun aniqlangan X oqimda $x_{01} = 2 < b_{01} = 7$ va $x_{24} = 1 = b_{24}$ bo'lgani uchun (v_0, v_1) to'yinmagan, (v_2, v_4) esa to'yingan yoylardir.

Tarmoqdagi oqimlarni o'rganishda, *zanjir* tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Bu yerda zanjir deganda tarmoqdagi yo'nalishi e'tiborga olinmasdan bir-biriga ulangan yoylar ketma-ketligini tushunamiz. Biron zanjirga tegishli yoyning yo'nalishi zanjirdagi uchlar ketma-ketligini o'tish yo'nalishiga mos tushsa, bu yoy *to'g'ri* yoy deb, aks holda esa, uni *teskari* yoy deb ataymiz.

Tarmoqdagi oqimlarni tadqiq qilganda kesim tushunchasi ham muhim hisoblanadi. T tarmoqning G orgrafi uchlari to'plami V ni o'zaro kesishmaydigan hamda har biri bo'sh bo'lmagan ikkita R va $\bar{R}$ qism to'plamlarga ajratamiz, ya'ni $V = R \cup \bar{R}$, $R \cap \bar{R} = \emptyset$, $R \neq \emptyset$ va $\bar{R} \neq \emptyset$.

Boshlang'ich uchi R to'plamga, oxirgi uchi esa $\bar{R}$ to'plamga tegishli bo'lgan barcha yoylar to'plamini *kesim* deb ataymiz. Kesimni $(R, \bar{R})$ bilan belgilaymiz.

Agar $(R, \bar{R})$ kesim bo'lib, v_s manba R to'plamga, v_t o'pqn esa $\bar{R}$ to'plamga tegishli bo'lsa, u holda $(R, \bar{R})$ ga v_s manbani v_t o'pqondan ajratuvchi (yoki ayiruvchi kesim, deb ataladi.

Har bir kesimga qiymati kesimni tashkil etuvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisiga teng bo'lga va *kesimning o'tkazish qobiliyati* (yoki *miqdori*) deb ataluvchi $b(R, \bar{R})$ son mos qo'yilishi mumkin:

$$b(R, \bar{R}) = \sum_{v_i \in R, v_j \in \bar{R}} b_{ij}.$$

Barcha mumkin bo'lgan kesimlar ichida o'tkazish qobiliyati eng kichik bo'lganini *minimal kesim*, deb ataymiz.

Tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo'lishi mumkin ekanligini yuqorida ta'kidlagan edik. Xuddi shunga o'xshash, tarmoqda bir necha turli minimal kesimlar bo'lishi ham mumkin.

Ravshanki, agar tarmoq boshlang'ich uchi v_s manbada va oxirgi uchi v_t o'pqonda bo'lgan zanjirdangina iborat bo'lsa, bu tarmoq bo'ylab o'tkazish mumkin bo'lgan maksimal oqim qiymati shu zanjirni tashkil etuvchi yoylarning o'tkazish qobiliyatlarining minimal qiymati bilan chegaralangan bo'ladi. Shu tufayli, bu yerda, minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan yoy *tarmoqning (zanjirning) << tor joyi >>* deb atalishi joyizdir.

Tarmoqdagi v_s manbani v_t o'pqondan ajratuvchi $(R, \bar{R})$ kesim iborasi istalgan tarmoqda << *tor joyi* >> iborasining o'xshashi sifatida qaralishi mumkin.

Faraz qilaylik, $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in \nu\}$ –T tarmoqdagi qandaydir oqim bo'lsin. Bu tarmoqdagi v_s uchdan v_t uchga yo'nalgan biron μ *yo'l bo'ylab oqim* shu yo'l yoylaridagi oqimlarning eng kichik qiymati sifatida aniqlanadi:

$$\rho(\mu, X) = \min_{(v_i, v_j) \in \mu} x_{ij}.$$

Tabiiyki, tarmoqdagi X oqimning miqdori $\rho(X)$ uchun

$$\rho(X) = \sum_{\mu \in M} \rho(\mu, X)$$

Tenglik o'rinlidir, bu yerda, M-G-orgrafdagi v_s uchdan v_t uchga yo'nalgan barcha yo'llar to'plamidan iborat.

Kesimning ta'rifidan ko'rinib turibdiki, v_s uchdan v_t uchga olib boruvchi ixtiyoriy μ yo'l shu v_s va v_t uchlarni ajratuvchi har qanday $(R, \bar{R})$ kesimning hech bo'lmaganda bitta yoyini o'zida saqlaydi. Shuning uchun, agar ixtiyoriy $(R, \bar{R})$ kesimning barcha yoylarini tarmoqdan olib tashlasak, u holda G-orgrafda v_s uchdan v_t uchga boradigan bironta ham yo'l (va , demak, oqim ham) mavjud bo'lmaydi.

Demak, yuqorida aytilganlarni hisobga olib tarmoqdagi oqim miqdori $\rho(X)$ bilan ixtiyoriy $(R, \bar{R})$ kesimning o'tkazish qobiliyati $b(R, \bar{R})$ uzviy bog'langan, degan xulosaga kelish mumkin. Bu bog'lanish quyidagi teoremda o'zining aniq ifodasini topgan.

1-teorema. $T = (G, b)$ tarmoqdagi ixtiyoriy X oqim miqdori $\rho(X)$ shu tarmoqdagi v_s manba v_t o'pqonni ajratvchi har qanday $(R, \bar{R})$ kesimning o'tkazish qobiliyatidan oshmaydi, ya'ni $\rho(X) \leq b(R, \bar{R})$.

Isboti. $T = (G, b)$ tarmoqdagi X oqim ta'rifidan bevosita quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\rho(X) = \sum_{(v_s, v_j) \in U} x_{sj}, \quad 0 = \sum_{(v_i, v_k) \in U} x_{ik} - \sum_{(v_k, v_j) \in U} x_{kj}, \quad v_k \in R$$

Bu tengliklarning mos tomonlaridagi ifodalarni qo'shib va o'xshash hadlarni ixchamlab,

$$\rho(X) = \sum_{(v_i, v_j) \in (R, \bar{R})} x_{ij} - \sum_{v_j \in \bar{R}, v_i \in R} x_{ji}$$

Tenglikni olamiz. 2) shartni va

$$\sum_{v_j \in \bar{R}, v_i \in R} x_{ji} \geq 0$$

ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan

$$\rho(X) \leq \sum_{(v_i, v_j) \in (R, \bar{R})} b_{ij} = b(R, \bar{R})$$

munosabat kelib chiqadi.

2-teorema. Istalgan tarmoqda manbadan o'pqonga maksimal oqimning miqdori manbani o'pqondan ajratuvchi minimal kesimning o'tkazish qobiliyatiga teng.

Isboti. $T = (G, b)$ tarmoq $G = (V, U)$ orgraf, $v_s \in V$ manba, $v_t \in V$ o'pqn va berilgan tarmoqdagi maksimal oqimning miqdori bo'lsin.

Agar tarmoqda shunday $X^* = \{x_{ij}^* \mid (v_i, v_j) \in U\}$ oqim topilsaki, uning $p^* = p(X^*)$ miqdor biror $(R^*, \overline{R}^*)$ kesimning o'tkazish qobiliyatiga teng bo'lsa, 1-teoremadan shun X^* maksimal oqim, $(R^*, \overline{R}^*)$ esa minimal kesim bo'lishi kelib chiqadi. Demak, teorema isbotiga ega bo'lish uchun $p^* = b(R^*, \overline{R}^*)$ tenglik o'rinli bo'ladigan $(R^*, \overline{R}^*)$ kesimni qurish mumkinligini ko'rsatish yetarli.

Bunday kesimni qurish maqsadida tarkibida, albatta, v_s uch bor bo'lgan, lekin v_t uchni saqlamaydigan R^* to'plamni aniqlash zarur. Bu R^* to'plam v_s uchdan chiquvchi zanjir bilan tutashtirish mumkin bo'lgan uchlari to'plamidan iborat bo'ladi. V to'plamning qolgan uchlari $\overline{R}^*$ to'plamni tashkil etadi.

$X^* = \{x_{ij}^* \mid (v_i, v_j) \in U\}$ maksimal oqim bo'lsin, deb faraz qilmiz.

Shu oqimga mos $\overline{R}^*$ to'plamning elementlarini ketma-ket ravishda quyidagi qoida bo'yicha aniqlaymiz:

- $v_s \in R^*$;
- agar $v_t \in R^*$ va $x_{ij}^* < b_{ij}$ bo'lsa u holda $v_j \in R^*$;
- agar $v_t \in R^*$ va $x_{ij}^* > 0$ bo'lsa u holda $v_j \in R^*$.

Agar R^* to'plamni aniqlash jarayonida v_t uchni R^* to'plamga kiritish imkoniyati topilmasa, ya'ni $v_t \notin R^*$ bo'lsa, u holda izlanayotgan $(R^*, \overline{R}^*)$ kesimni qurish mumkin bo'ladi.

Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $v_t \in R^*$ bo'lsin. U holda R^* to'plamning aniqlanish qoidasiga asosan, shunday $\mu = (v_s, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}, v_t)$ zanjirni qurish

mumkinki, uning barcha to'g'ri yoylari oqimga to'yinmagan, teskari yoylarida esa oqim musbat bo'ladi. μ zanjirning barcha to'g'ri yoylari to'plamini $U_+(\mu)$, teskari yoylari to'plamini esa $U_-(\mu)$ deb belgilaymiz.

Quyidagi miqdorni qaraymiz: $\vec{\varepsilon} = \min_{(v_i, v_j) \in U_+(\mu)} (b_{ij} - x_{ij}^*),$

$\tilde{\varepsilon} = \min_{(v_i, v_j) \in U_-(\mu)} x_{ij}.$ Tushunarliki, $\varepsilon = \min(\vec{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}) > 0$ bo'ladi. Agar μ yo'lining barcha to'g'ri yoylarida oqim ε miqdorga oshirilib, uning barcha teskari yoylarida esa ε miqdorga kamaytirilsa, u holda tarmoqdagi oqim miqdori ε ga ortadi. Bu esa x^* oqimning maksimal oqimi ekanligiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik $v_t \in R^*$ ekanligini ko'rsatadi.

Endi yuqorida bayon qilingan qoidani ketma-ket qo'llab, hosil qilingan R^* to'plam uchun $\overline{R^*} = V \setminus R^*$ deb olsak, G orgrafning R^* to'plamga tegishli uchlarining biridan chiqib $\overline{R^*}$ to'plamga tegishli uchlarining biriga kiruvchi barcha yoylar to'plami $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni tashkil etadi.

R^* to'plamning aniqlanishiga asosan, barcha $(v_i, v_j) \in (R^*, \overline{R^*})$ yoylar oqimiga to'yingan $(x_{ij}^* = b_{ij}), \overline{R^*}$ to'plamga tegishli uchlardan chiqib, R^* to'plamga tegishli uchlarga kiruvchi barcha $(v_i, v_j) \in U$ yoylarda esa oqim nolga teng bo'ladi. Shuning uchun, 1-teoremaning isbotida hosil qilingan

$$\rho(X) = \sum_{(v_i, v_j) \in (R, \overline{R})} x_{ij} - \sum_{v_j \in \overline{R}, v_i \in R} x_{ji}$$

Formulaga ko'ra,

$$p^* = p(X^*) = \sum_{(v_i, v_j) \in (R^*, \overline{R^*})} x_{ij}^* = \sum_{(v_i, v_j) \in (R^*, \overline{R^*})} b_{ij} = b(R^*, \overline{R^*})$$

munosabatni olamiz. Demak, qurilgan $(R^*, \overline{R^*})$ kesim uchun $p^* = b(R^*, \overline{R^*})$ tenglik bajariladi. Bu yerdan yuqoridagi eslatilgan mulohazalarga ko'ra, teorema isbotiga ega bo'lamiz.

Ford algoritmi. $T = (G, b)$ tarmoqni qaraymiz, bu yerda, $G = (V, U)$ – orgraf, b esa G orgrafning yoylarini manfiyima $b_{ij} (v_i, v_j \in V)$ haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya.

G orgraf faqat bitta manbaga va faqat bitta o'pqonga ega bo'lin, deb faraz qilamiz. Maksimal oqim va minimal kesim haqidagi Ford-Falkerson teoremasining yuqoridagi keltirilgan isboti tarmoqdagi maksimal oqimni topish algoritmituzish nuqtayi nazaridan konstruktivdir.

T tarmoqning uchlariga, ya'ni V to'plam elementlariga $0, 1, 2, \dots, m$ raqamlarni mos qo'yib, tarmoqning manbayi 0 uch, o'pqoni esa m uch bo'lsin, deb hisoblaymiz. Bu tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishamiz. *Ford algoritmining* jadvallar bilan ish ko'riladigan jarayon dastlabki, umumiy (takrorlanuvchi) va yakuniy qadamlardan iborat bo'lib, u quyida keltirilgan'

Dastlabki qadam. O'lchamlari $(m + 1) \times (m + 1)$ bo'lgan jadvalni quyidagicha tuzamiz. Agar (i, j) yoyni o'tkazish qobiliyati b_{ij} noldan katta va unga simmetrik (j, i) yoyni o'tkazish qobiliyati b_{ji} nolga teng bo'lsa, u holda jadvalning (i, j) katagiga b_{ij} sonni, uning asosiy diogonaliga nisbatan simmetrik (j, i) katagiga esa, nolni yozamiz. Agar $b_{ij} = b_{ji} = 0$ bo'lsa, u holda jadvalning (i, j) va (j, i) kataklari bo'sh qoldiriladi.

Umumiy qadam. Tarmoqning manbayidan o'pqoniga o'tkazish xususiyati noldan katta bo'lgan yo'l izlaymiz. Buning uchun jadvalning tarmoqdagi 0 uchga mos keluvchi ustuniga (*) belgisini qo'yamiz. Jadvalning 0 uchga mos satridan $b_{0j} > 0 (j = \overline{1, m})$ elementlarni topib, bu elementlar joylashgan ustunlarni o'raqami bilan belgilaymiz.

Natijada tarmoqning musbat o'tkazish xususiyatiga ega bo'lgan barcha $(0, j)$ yoylari aniqlanadi. Bu yoylar manbadan o'pqonga boruvchi yo'lning dastlabki yoylaridir.

Belgiga ega ustunlar raqamlari bilan bir xil raqamli satrlarning har birini ketma-ket tekshirib chiqamiz. Tekshirish jarayonida har bir shunday satrda, masalan, jadvalning uchga mos satrida belgiga sga bo'lmagan ustunlardan $b_{ij} > 0$ elementlarni izlaymiz va shunday element topilsa bu element joylashgan ustunni tekshirayotgan satr raqami (ya'ni i) bilan belgilaymiz.

Shu tarzda davom ettirilsa, natijada manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish xususiyatli izlangan yo'lning navbatdagi yoylari bo'lib xizmat qilishi mumkin bo'lgan yoylar topilgan bo'ladi. Jadvaldgi belgiga esa ustunlar raqamlariga mos raqamli tarmoqning uchlariga to'g'ri keluvchi satrlarni tekshirish jarayonini quyidagi mumkin bo'lgan hollardan biri amalga oshguncha davom ettiramiz:

Jadvalning o'pqonga mos ustuni belgilanadi;

Jadvalning yangi ustunlarini(shu jumladan, o'pqonga mos ustunini ham) belgilash imkoniyati yo'q.

Agar a) hol ro'y bersa, u holda tarmoqda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish xususiyatiga ega bo'lgan biron μ yo'l bor. Bu yo'l quidagicha aniqlanadi.

Jadvalning o'pqonga mos m ustunining belgisi k bo'lsin deb faraz qilaylik.

Demak, μ yo'lda m uchdan oldingi uch k uchdir. Jadvalning k uchga mos satri va m uchga mos ustuni kesishgan (k,m) katagidagi b_{km} elementiga $(-)$ belgisi (b_{km}^-), shu katakka asosiy diogonalga nisbatan simmetrik hisoblangan (m,k) katakdagi b_{km} elementga esa $(+)$ belgisi (b_{mk}^+) qo'yamiz.

Endi jadvalning k uchga mos ustuni belgisi r raqami bo'lsin, deb faraz qilamiz. Jadvaldagi (b_{mk}^+) elementdan jadvalning k uchga mos ustuni bo'ylab harakatlanib, uning r uchga mos satriga o'tamiz va b_{rk} elementga $(-)$ belgi, asosiy diogonalga nisbatan simmetrik b_{kr} elementga esa $(+)$ belgi qo'yamiz. $(+)$ va $(-)$ belgilar qo'yish jarayonini manbaga mos 0 satrga kelib undagi mos elementga $(-)$

belgi, simmetrik elementga esa (+) belgi qo'yguncha davom ettiramiz. Umumiy qadamning 2-bandiga o'tamiz.

Agar b) hol bajarilsa, bu holda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish xususiyatiga ega bo'lgan boshqa yo'l yo'q. Shuning uchun umumiy qadamni bajarish jarayoni tugaydi.

Jadvalning belgilangan ustunlariga mos orgrafning uchlari minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan $(R^*, \bar{R}^*)$ kesim uchun R to'plamni tashkil etadi, orgrafning qolgan uchlari esa $\bar{R}$ to'plamga tegishlidir. $i \in R$ uchdan chiquvchi va $j \in \bar{R}$ uchga kiruvchi barcha (i, j) yoylar to'plami berilgan tarmoq uchun minimal kesimdir. Yakuniy qadamga o'tamiz.

2. topilgan μ yo'l o'tkazish xususiyatining θ qiymatini topamiz. Tabiiyki, θ son μ yo'lni tashkil etuvchi yoylar o'tkazish xususiyatlarining eng kichigiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\theta = \min_{(i,j) \in \mu} b_{ij}^-.$$

Umumiy qadamning 3-bandiga o'tamiz.

3. Topilgan μ yo'lga tegishli yoylarning va ularga simmetrik yoylarning qolgan o'tkazish xususiyatlarini aniqlaymiz. Buning uchun jadvalning $(-)$ belgisi bo'lgan b_{ij}^- elementlaridan θ sonni ayirib, $(+)$ belgili b_{ij}^+ elementlariga esa θ sonni qo'shib, natijalarni jadvalga mos o'rinlariga yozamiz. Jadvalning $(-)$ yoki $(+)$ belgisi bo'lmagan elementlari o'zgarmaydi. Jadvaldagi barcha belgilarni olib tashlaymiz. Natijada o'tkazish xususiyatlari o'zgargan tarmoqqa mos va dastlabki jadvalga o'xshash bo'lgan yangi jadvalni hosil qilamiz. Umumiy qadamning 1-bandiga o'tamiz.

Yakuniy qadam. Dastlabki jadvalning elementlaridan oxirgi qadamda hosil bo'lgan jadvalning mos elementlarini ayiramiz. Natijada musbat elementlari (i, j) yoyning mos x_{ij} oqim miqdorlariga teng bo'lgan, elementlariga asosiy diogonaliga nisbatan simmetrik joylashgan oxirgi jadvalni hosil qilamiz. Tarmoqdagi maksimal

oqim miqdori p oxirgi jadvalning manbaga mos satri yoki o'pqonga mos ustuni elementlari yig'indisiga, ya'ni

$$p = \sum_{j=1}^m x_{0j} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{im}.$$

Bu maksimal oqim qiymatini umumiy qadamni bajarish jarayonlarida aniqlangan barcha θ sonlarni qo'shib ham hosil qilish mumkin.

Xulosa.

Ushbu bitiruv malakaviy ish graflar nazariyasi va uning sonli xarakteristkalariga bag'ishlangan. Graflar nazariyasi fanga XIX asr oxirlarida kirib kelgan Graflar nazariyasining fan sifatida shakllanishiga L. Eyler tomonidan Kyonisberg ko'priklari g'aqidagi masala asoso bo'lib xizmat qildi. Muallif tomonidan bu masalani echish uchun yozilgan maqolasi dastlabki ilmiy manba hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishda graf tushunchasi, uning abstrakt ta'rifi, turlari, uning tashkil etuvchilari (qirralar va uchlar) ta'riflar yordamida bayon etilgan. Graflar ustida sodda amallar (graflarni qo'shish, ko'paytirish, uchni yoki qirrani qo'shish, olib tashlash) bajarilgan. Bajarilgan amallar aniq geometrik chizmalar yordamida ko'rsatilgan.

Graf: daraxt o'rganilgan: $G(m,n)$ -graf uchun daratlar xaqidagi asosiy teorema va bu teoremadan kelib chiqadigan natijalar keltirilgan. Shu bilan birga tarmoq va tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishilgan. *Ford algoritmining* jadvallar bilan ish ko'riladigan jarayon dastlabki, umumiy (takrorlanuvchi) va yakuniy qadamlardan ibort bo'lib, ular batafsil keltirilgan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishda keltirilgan koeffitsientlar yordamida graflarda qochish va qidirish masalalarini hal qilish usullarini topish nazariyasi paydo bo'ladi.

Shu sababli, bitiruv malakaviy ishda keltirilgan natijalar graflar nazariyasi hamda matematikaga qiziquvchilar uchun foydali deb hisoblaymiz.

Фойдаланилган адабиётлар.

1. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида” ги Қонуни (1997 йил 29 августда қабул қилинган)/.Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. –Т.: Ўзбекистон. 1997.
2. Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”/. Баркамол авлод –Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. – Т.:Ўзбекистон. 1997.
3. C o o k. W.J., C u n n i n g h a m., W. H., P u l l e y b l a n k. W.R., S c h r i j v e r. A. Combinatorial optimization. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1998, 355 p.
4. О. О р е. Теория графов. М.: Наука, 1980, 336 с.
5. Ф. Харрари. Теория графов. Москва – 1973.
6. А.А.Азамов. Основания теории дискретных игр. Тошкент –2011.
7. Н.Кристофидес. Алгоритмический подход., Моква –1978.
8. А.И. Благодатских. Введение в оптимальное управления. Москва – 2001.
9. Б.Н.Пшеничный., В.В. Остапенко. Дифференциальные игры. Киев – 1992.
10. Б.Б. Рихсиев. Дифференциальные игры с простыми движениями. Тошкент –1989.
11. Ж.С.Маматов., Х.Норжигитов. О длине полуэйлеровых циклов в графах. ЎзР ФА маърузалари. №2. 2012.6-8сс.
12. Ж.С.Маматов. Об оценке длины полуэйлеровых циклов в графах. Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». Тошкент. 2012. 177с.

13. A.Azamov. J.S. Mamatov. Semieulerian Cycles in Graphs and their Applications to Dynamical Searching Game.// Game theory and management. The sixth International Conference Game Theory and Management – GTM 2012/ pp 37-38.
14. Ж.С.Маматов. “Графларда яримэйлер цикллари баҳолаш”. Аниқ фанларни ўқитишнинг долхзарб муаммолари. Илмий-амалий анжуман материаллари. Гулистон –2013. 50бет.
15. Ҳ.Тўраев., И. Азизов. Математик мантиқ ва дискрет математика. Тошкент, 2011.
16. www.edu.uz.
17. www.ziyonet.uz.
18. www.mathnet.ru

Guliston davlat universiteti fizika-matematika fakulteti 4-kurs talabasi Karimov Islom Ilg'or o'g'li tomonidan 5130100–“Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr darajasini olish uchun “Bog'lamli siklga ega bo'lmagan graf: daraxtning xossalari amaliy o'rganish” mavzusida bajarilgan bitiruv malakaviy ishiga

TAQRIZ

Graflar nazariyasini va uning sonli xarakteristikalarini o'rganish dinamik sistemalarni optimal boshqaruv masalasini hal etishga olib keladi.

Masalalarning echimidan topilgan qiymat amaliy jihatdan fan va texnikaning ko'plab sohalariga tadbiq etiladi. Shu hisobdan dinamik o'yinlarning juda ko'plab masalalarini hal etishda graflar va uning sonli xarakteristikalaridan salmoqli darajada foydalanilib kelinmoqda. Shu nuqtai nazardan, talaba I. Karimov tomonidan bajarilgan ish dolzarb mazulardan hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob, beshta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat, hajmi qo'lyozma holda 49 betni tashkil etadi.

Bitiruv malakaviy ishning kirish qismida mazkur ishning dolzarbligi, maqsad va vazifalari, amaliy ahamiyati va tadqiqot ob'ektlari bayon qilingan.

Ishda grafning abstrakt ta'rifi, geometrik tasviri, graf turlari, hossalari o'rganilgan. Graflar ustida sodda amallar bajarilgan. Uchlari soni berilgan grafda daraxtlar sonini belgilovchi Keli teoremasi berilgan. Tarmoq tushunchasi hamda uni qurish uchun Ford algoritmi o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning xulosa qismida yaxlit ish yuzasidan olingan xulosa va takliflar bayon qilingan. Ushbularni hisobga olib, ishni saviyali darajada bajarilgan deyish mumkin.

Shu bilan bir qatorda ishni yozishda ayrim orfografik xatolar uchraydi va mavzuga oid amaliy misollar kamrok bayon etilgan. Ushbu keltirilgan kamchiliklar ishning qiymatini tushirmaydi.

Yuqorida keltirilgan takliflarni hamda ishni amaldagi Nizom talablariga to'liq javob berishini hisobga olib, I. Karimovning “Bog'lamli siklga ega bo'lmagan graf: daraxtning xossalari amaliy o'rganish” mavzusidagi bitiruv malakaviy ishini ijobiy baholayman.

SVXTXQTMO instituti Tabiiy va aniq

fanlar kafedrası mudiri:

k.o'q. O. Daminov.

