

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika –matematika fakulteti

“Amaliy matematika va axborot texnologiyalari” kafedrası

Hosilov Madiyor G`aybullo o`g`lining

Funksiyani yaqinlashishi

5480100-“Amaliy matematika va informatika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr
darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko‘rildi va himoya qilishga Ilmiy rahbar _____ Imomova Sh.M
ruxsat berildi” “_____” _____ 2014 y.

 Kafedra mudiri. Taqrizchi _____ Sh. Razzoqov
 _____ dots T.B.Boltayev “_____” _____ 2014 y.
«_____» _____ 2014y.

Himoya qilishga ruxsat berildi

Fakultet dekani _____ Sh.M.Mirzayev
 “_____” _____ 2014 y.

Buxoro-2014

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
I. BOB. FUNKSIYANI INTERPOLYASIYALASH.....	7
1.1. Masalani qo`yilishi	7
1.2. Lagranj va Nyutonning interpolyasiyon formulalari.....	8
1.3. Splayn yaqinlashtirish.....	11
II.BOB. FUNKSIYANI YAQINLASHTIRISH.....	21
2.1. Masalani qo`yilishi.....	21
2.2. Oraliqda algebraik ko`phadlar orqali o`rta kvadratik yaqinlashish.....	
Ortogonal ko`phadlar sistemasi.....	25
2.3. Eng ko`p qo`llaniladigan ortogonal ko`phadlar sistemalari	36
2.4. Trigonometrik ko`phadlar va Jadval bilan berilgan funksiyalarni o`rta.....	
kvadratik ma`noda yaqinlashtirish. Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi	
algebraik ko`phadlar	44
Xotima.....	65
Adabiyotlar.....	66

KIRISH.

Hozirgi kunda kompyuter texnologiyalari kirib bormagan soha deyarli uchramaydi. Kompyuter texnologiyalardan nafaqat hisoblash ishlarini olib borish uchun emas, balki, hayotga tadbiq qilinadigan elektron darsliklar, rasm va video tasmlarni qayta ishlovchi, katta hajmli ma'lumotlarni o'zida saqllovchi dasturlar yaratish uchun ham foydalaniladi. So'ngi yillarda kompyuter va uning dasturiy ta'minotiga bo'lgan talab va qiziqishlar ortib bormoqda. Bu esa o'z navbatida dasturchidan katta izlanish va mahoratni talab qiladi. Prezidentimiz I. A. Karimovning "Yoshlarimiz bizdan ko'ra kuchli bilimli dono va albatta baxtli bo'lishlari kerak", "O'zbekiston kelajagi yoshlar qo'lida" degan so'zlari va 2008 – yilning "Yoshlar yili" deb belgilaganlari, yoshlarga bo'lgan e'tiborni va katta ishonchni ko'rsatadi. Biz yoshlar o'z navbatida bunday ishonchni oqlashga va komillik sari intilishga harakat qilamiz.

Prezident I.A.Karimov tashabbusi bilan qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi qonun va kadrlar tayyorlash milliy dasturi ta'limning yangi milliy modelini yaratilishiga asos bo'ldi. Milliy modelning asosiy maqsadi ta'lim sohasini isloh qilish, mutaxassislar tayyorlashning yangi tizimini joriy etish va ta'lim sifatini hozirgi zamon talablari darajasiga ko'tarishdir. Ushbu maqsadni bitta qonun yoki farmonlar bilan amalga oshirib bo'lmaydi. U mashaqqatli mehnat va izlanishlarni talab qiladi.

Ta'lim sifatini oshirish bugungi kunning asosiy vazifalaridan biridir. Chunki bugungi kunda insoniyat rivojlanishi shunday bosqichga yetib bordiki, bu bosqichda inson aql-zakovati, bilimi va uning mutaxassis sifatidagi malakasi hal qiluvchi ro'l o'ynaydigan bo'lib qoldi.

Yangi axborot – kommunikatsion texnologiyalari hozirgi vaqtda eng dolzarb mavzulardan biri bo'lib kelmoqda, sababi har bir sohani o'rganish, izlanish va tajriba orttirish uchun turli usullardan foydalanish kerak bo'ladi. Shuning uchun

yangi axborot – kommunikatsion texnologiyalardan foydalanish maqsadga muvoffiqdir.

Hozirgi zamon mutaxasislari, faoliyat doiralari qanday bo'lishidan qat'iy nazar informatika bo'yicha keng ko'lamdagi bilimlarga, zamonaviy hisoblash texnikasi, informatsion aloqa va kommunikatsiya tizimlari, orgtexnika vositalari va ulardan foydalanish borasida yetarli malakalarga ega bo'lishi, hamda yangi informatsion texnika va texnologiya asoslarini uning ertangi kuni, rivoji to'g'risidagi bilimlarni o'zida mujassamlashtirgan bo'lishi kerak. Zamonviy hisoblash texnikasi va informatsion texnologiyalarning kun sayin rivojlanib, jamiyatning esa tobora informatsiyalashib borishi sababli, uzluksiz ta'lim tizimining o'rta va yuqori bosqichlariga informatika, ishlab chiqarish va boshqarish jarayonlarini kompyuterlashtirish bo'yicha bir qator o'quv fanlari kiritilgan.

Yigirmanchi asr o'rtalariga kelib tezkor mashina mexanizmlaridan foydalana boshlandi. Murakkab texnika va texnologiyalar o'ylab topildi. Ko'pgina masalalarni hal qilish jarayonida axborot hajmi behisob bir majmuaga aylandi, hamda bu axborotlarni yig'ish va uzatish vositalarini yaratish, ularni vaqtida qayta ishlab, boshqarish uchun zarur bo'lgan choralarni belgilab chiqish kerak bo'ladi. Ko'pchilik vazifalarni bajarishda boshqarish jarayonini takomillashtirish, axborot tizimini joriy etish, mutaxasislarni kompyuterda ishlashga o'rgatish muhim ahamiyatga ega.

Matematikaning hozirgi zamon fan va texnikasining xilma-xil sohalaridagi tatbiqlaridan, odatda, shunday tipik matematik masalalarga duch kelinadiki, ularni klassik usullar bilan yechish mumkin emas yoki yechish mumkin bo'lgan taqdirda ham yechim shunday murakkab ko'rinishda bo'linadiki, undan samarali foydalanishning iloji bo'lmaydi. Bunday tipik matematik masalalarga algebra (odatda, tartibi juda katta bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish, matritsalarining teskarisini topish, matritsalarining xos sonlarini topish, algebraik va trantsendent tenglamalar hamda bunday tenglamalar sistemasini

yechish) matematik analiz (sonli integrallash va differentsiallashtirish, funktsiyani yaqinlashtirish masalalari) hamda oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglamalarni yechish masalalari va boshqalar kiradi.

Mavzuning dolzarbligi. Aksariyat hisoblash usullari masalaning qo'yilishida qatnashadigan funktsiyalarni unga biror, muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funktsiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan.

Mavzuning o'rganilganlik darajasi: Funktsiyani yaqinlashishi masalasida ko'plab metodlar ko'rib chiqildi jumladan, funktsiyani interpolatsiyalashtirish masalasida Logranj va Nyuton interpolatsion formulalari. Funktsiyani yaqinlashtirish masalasida, Splayn yaqinlashtirish masalalari, oraliqda algebraik ko'phadlar orqali o'rta kvadratik yaqinlashish, ortogonal ko'phadlar sistemasi, eng ko'p qo'llaniladigan ortogonal ko'phadlar sistemalari: yakobi ko'phadlari. chebishevning birinchi va ikkinchi tur ko'phadlari. Lager ko'phadlari. Ermit ko'phadlari masalalari o'rganildi. Bu usullarning barchasi uchun Mathcad muhitida natijalar olindi

Malakaviy bitiruv ishining maqsadi. Funktsiyalarni unga biror, muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funktsiyalarga almashtirish.

Malakaviy bitiruv ishining vazifalari:

1. Funktsiyani yaqinlashtirishga oid adabiyotlar bilan tanishish.
- 2 Funktsiyani interpolatsiyalashtirish masalasida Logranj va Nyuton interpolatsion formulalarini o'rganish.
3. Funktsiyani yaqinlashish masalasida Splayn yaqinlashtirish, oraliqda algebraik ko'phadlar orqali o'rta kvadratik yaqinlashish, ortogonal ko'phadlar sistemasi, eng ko'p qo'llaniladigan ortogonal ko'phadlar sistemalari: yakobi ko'phadlari, chebishevning birinchi va ikkinchi tur ko'phadlari. Lager ko'phadlari. Ermit ko'phadlari masalalari o'rganish.
4. Ko'rilgan masalalarda funktsiyani yaqinlashishiga oid sonli usullarda misollar ko'rish.
5. barcha masalalarga oid dasturlarni Mathcad muhitida tuzish.

Malakaviy bitiruv ishining ob'ekti va predmeti: funksiyalarni interpolyasiyalash va yaqinlashtirish, Logranj va Nyuton interpolyasiya formulalari, Mathcad dasturlash tili.

Malakaviy bitiruv ishining usullari: Mavzuga oid adabiyotlarni o'rganish, tahlil qilish, aniqlikni solishtirish va tekshirish, tajriba sinovlar, olingan natijalarni algoritmlar asosida tekshirish va dasturini Mathcad muhitida tuzish.

I.BOB. FUNKSIYANI INTERPOLYASIYALASH.

1.1. Masalani qo'yilishi.

Aksariyat hisoblash metodlari masalani qo'yilishida qatnashadigan funksiyalarni unga biror, muayyan ma'noda yaqin va tuzulishi soddaroq bo'lgan funksiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan.

Biz funksiyalarni yaqinlashtirish masalasini eng sodda va juda keng qo'llaniladigan qismi – funksiyalarni interpolyasiyalash masalasini ko'rib chiqamiz.

Dastlab interpolyasiyalash deganda funksiyaning qiymatlarini argumentning jadvalda berilgan qiymatlari uchun topish tushunilar edi. Bu holda interpolyasiyalashni “satrlar orasidagilarni o'qiy bilish san'ati” deb ham ta'riflash mumkin. Hozirgi vaqtda interpolyasiyalash tushunchasi juda keng ma'noda tushuniladi. Interpolyasiya masalasini mohiyati quydagidan iborat. Faraz qilaylik, $[a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya berilgan yoki hech bo'lmaganda uning $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ qiymatlari ma'lum bo'lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo'lgan qandaydir funksiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, ko'phadlar sinfini olamiz. Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqda interpolyasiyalash masalasi shu funksiyaning berilgan sinfnining shunday $P(x)$ funksiyasi bilan taqribiy ravishda

$$f(x) \approx P(x)$$

almashtirishdan iboratki, $P(x)$ berilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = \overline{0, n})$$

Bu yerda ko'rsatilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalar interpolyasiya tugunlari yoki tugunlar deyiladi, $P(x)$ esa interpolyasiyalovchi funksiya deyiladi. Agar $\{P(x)\}$ sinfi

sifatida darajali ko'phadlar sinfi olinsa, u holda intarpolyasiyalash apparati hisoblash matematikasining ko'p sinfi sohalarida qo'llaniladi. Masalan, $f(x)$ davriy funksiya bo'lsa u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar intarpolyasiyalanadigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida ratsional funksiyalar sinfini olish ma'quldir.

Bu bobda, asosan, algebraik intarpolyasiyalashning har xil usullarini ko'rib chiqamiz va bunday yaqinlashtirishning aniqligini baholaymiz.

1.2. Lagranj va Nyutonning intarpolyatsion formulalari.

1. Lagranjning intarpolyatsion formulasi. Faraz qilamiz $a \leq x \leq b$ kesmada $x_k, k = 0, 1, \dots, n$ (tugun nuqtalar) berilgan nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari ma'lum bo'lsin. Funksiyani ko'phad bilan intarpolyasiyalash masalasi, berilgan $x_k, k = 0, 1, \dots, n$, tugun nuqtalarda qiymati $f(x)$ funksiya qiymatiga teng bo'lgan n - tartibli

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (1.2.1)$$

ko'phadni topishdan iborat.

Bu masala har qanday uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun yagona yechimga ega. Haqiqatdan ham, $a_0, a_1, \dots, a_n$ koeffisientlarni aniqlash uchun

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.2.2)$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga egamiz.

Bu sistemaning determinanti $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ nuqtalar turlicha bo'lganda noldan farqlidir.

$$L_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n \quad (1.2.3)$$

shartlarni qanoatlantiradigan $L_n(x)$ ko'phad $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ nuqtalar bo'yicha qurilgan $f(x)$ funksiyaning intarpolyatsion ko'phadi deb aytiladi. Lagranjning

interpolyatsion formulasi, $L_n(x)$ interpolyatsion ko'phadni $f(x)$ funksiyaning interpolyatsiyalash tugun nuqtalaridagi qiymatlari chiziqli kombinatsiyasi shaklida yozishga imkon beradi:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n C_k(x) f(x_k) \quad (1.2.4)$$

$C_k(x)$ koeffisientlarning oshkor ifodasini topamiz. Interpolyatsiyalashning (1.2.3) - shartidan tengliklarga ega bo'lamiz. Bu munosabatlar $C_k(x)$ funksiyalarga

$$C_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{agar } i \neq k \\ 1, & \text{agar } i = k, i = 0, 1, \dots, n, \end{cases}$$

shartlar qo'yilganda bajariladi. Bu shartlar, har bir $C_k(x)$, $k=0,1,\dots,n$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada eng kamida n -ta nolga ega demakdir. $L_n(x)$, n -tartibli ko'phad bo'lganligi uchun, $C_k(x)$ koeffisientlarni n - tartibli ko'phad ko'rinishida, ya'ni

$$C_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

ko'rinishda qidirish tabiiydir.

$$C_k(x_k) = 1$$

shartdan

$$\lambda_k^{-1} = (x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$$

ekanligini aniqlaymiz. Shunday qilib (1.2.4) - interpolyatsion ko'phadning koeffisientlari

$$C_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

formula bilan aniqlanadi. Shunday qilib, Lagranjning interpolyatsion ko'phadi

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} f(x_k) \quad (1.2.5)$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. Nyutonning interpolatsion formulasi. Interpolyatsion ko'phadning Nyuton formulasi ko'rinishi interpolatsion ko'phadni birta tugun nuqta va $f(x)$ funksiyaning ayirmali bo'linmalari orqali ifodalaydi. Bu ko'rinish

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

Taylor formulasining ayirmali o'xshatmasidan iboratdir. Eng avval ayirmali bo'linmalar to'g'risidagi ma'lumotlarni keltiramiz. Faraz qilamiz $x_k \in [a, b]$, $k=0, 1, \dots, n$ tugun nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari ma'lum bo'lsin. Birinchi tartibli ayirmali bo'linmalar deb,

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq j$$

nisbatlarga aytiladi.

Qo'shni nuqtalar bo'yicha tuzilgan birinchi tartibli ayirmali bo'linmalardan foydalanib, ikkinchi tartibli ayirmali bo'linmalarni tuzish mumkin:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \\ f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) &= \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \end{aligned}$$

Shunga o'xshash yuqori tartibli ayirmali bo'linmalar tuziladi. Masalan, agar $f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k})$, $f(x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1})$ k- tartibli ayirmali bo'linmalar ma'lum bo'lsa, k+1- tartibli ayirmali bo'linmalar

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) - f(x_j, \dots, x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}$$

kabi aniqlanadilar. k- tartibli ayirmali bo'linmalar $f(x)$ funksiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari orqali quyidagicha ifodalanadilar:

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{l \neq i \\ l=j}}^{j+k} (x_i - x_l)} \quad (1.2.6)$$

Nyutonning interpolatsion ko'phadi deb

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, x_{n-1}) \quad (1.2.7)$$

ko'phadga aytiladi. Bu ko'phadning Logranj ko'phadi bilan bir xil ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun Logranj ko'phadini

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{j=1}^n (L_j(x) - L_{j-1}(x)) \quad (1.2.8)$$

ko'rinishda yozamiz. (1.3)-interpolyatsiya shartidan $k=0,1,\dots, j-1, j=0,1,\dots,n$ uchun $L_{j-1}(x_k) = L_j(x_k) = f(x_k)$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan $L_j(x) - L_{j-1}(x)$, $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ nuqtalarda nolga aylanadigan algebraik ko'phad ekanligi ma'lum bo'ladi, ya'ni

$$L_j(x) - L_{j-1}(x) = A_j(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1}). \quad (1.2.9)$$

Bundagi A_j son koeffisientni

$$L_j(x) - L_{j-1}(x) = A_j(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1}).$$

Tenglikdan, $L_j(x_j) = f(x_j)$ ekanligini inobatga olib topsak

$$A_j = \frac{f(x_j) - L_{j-1}(x_j)}{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})} \quad (1.2.10)$$

bo'ladi. (1.2.10)- tenglikdagi $L_{j-1}(x_j)$ - ning (1.2.5) - ko'rinishdagi qiymatini, ya'ni

$$L_{j-1}(x_j) = \sum_{k=0}^{j-1} f(x_k) \frac{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{k-1})(x_j - x_{k+1})\dots(x_j - x_{j-1})}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_{j-1})}$$

ekanligini inobatga olib,

$$A_j = \sum_{k=0}^j \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_j)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Buni (1.2.6)- tenglik bilan taqqoslasak koeffisientning j - tartibli ayirmali bo'linma ekanligini ko'ramiz. Bundan va (1.2.8), (1.2.10) - dan

Nyutonning (1.2.7) interpolatsion ko`phadi hosil bo`lishini ko`ramiz. Lagranjning (1.2.5) va Nyutonning (1.2.7)- ko`phadlari aslida birta ko`phad ekanliklarini ta'kidlaymiz.

1.3. Splayn yaqinlashtirish.

Funksiyani interpolatsion ko`phad yordamida yaqinlashtirish, ko`phad yuqori tartibli bo`lganda hisoblash xatoliklarining yig`ilib borishi natijasida yomon yaqinlashadi. Shuning uchun oraliqni kichik oraliqlarga ajratib har birida yaqinlashtiruvchi ko`phad ko`rish ancha yaxshi natija berishi aniqlandi. Har bir bo`lakda ko`phaddan iborat va ma'lum tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo`lgan funksiya splayn deb aytiladi. Splayn yaqinlashtirish ko`phad bilan yaqinlashtirishdan afzalligi shundan iboratki u:

birinchidan: funksiyaga yaqinlashadi,

ikkinchidan: hisoblash jaryoni turg`undir.

1.Kubik splaynni qurish. Faraz qilamiz $[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiya berilgan bo`lsin.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

to`rni aniqlab, $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ kabi belgilaymiz. $f(x)$ funksiyaga va $\{x_i\}_{i=0}^N$ tugun nuqtalarga mos $S(x)$ splayn deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya aytiladi:

1) Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ segmentda $i = 1, 2, \dots, N$, $S(x)$ funksiya uchinchi darajali ko`phad;

2) $S(x)$ funksiya va uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari $[a, b]$ da uzluksiz;

3) $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Oxirgi shart interpolatsiyalash shartlari deb aytiladi, splayn esa interpolatsiyalaydigan splayn deb aytiladi. Yuqorida qayd etilgan splayn mavjud va yagonaligini isbot qilamiz. Quyida keltiriladigan isbot splaynni qurish usulini ham aniqlaydi. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ kesmada, $S(x) = S_i(x)$ -ni

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \quad (1.3.1)$$

ko`rinishda qidiramiz. Bu yerdagi  $a_i, b_i, c_i, d_i$  - koeffisientlar aniqlanishi lozim bo`lgan noma'lum koeffisientlar ma'nosini aniqlaymiz.

$$S'_i(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2$$

$$S''_i(x) = c_i + d_i(x - x_i), \quad S'''_i(x) = d_i$$

tengliklarga egamiz, shuning uchun

$$a_i = S_i(x_i), \quad b_i = S'_i(x_i), \quad c_i = S''_i(x_i), \quad d_i = S'''_i(x_i) \\ S(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

interpolyatsiya shartlaridan $a_i = S_i(x_i), i = 1, 2, \dots, N$ larni hosil qilamiz deb aniqlaymiz.

$s(x)$ ning uzluksizlik shartidan

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Bundan, ifodasini inobatga olib $i = 1, 2, \dots, N - 1$ uchun

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3$$

tengliklarni hosil qilamiz. $h_i = x_i - x_{i+1}$ deb belgilab, bu tenglamalarni

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N \quad (1.3.2)$$

ko`rinishlarda yozib olamiz. Birinchi tartibli hosilaning uzluksizligi

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1, c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i+1}, i = 2, 3, \dots, N \quad (1.3.3)$$

tenglamalarga olib keladi. Ikkinchi tartibli hosilaning uzluksizligidan

$$d_i h_i = c_i - c_{i+1}, i = 2, 3, \dots, N \quad (1.3.4)$$

tengliklar hosil bo`ladi. (1.3.2) - (1.3.4) tengliklarni birlashtirib

$b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N$ noma'lumlarga nisbatan $3N - 2$ ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Ikkita yetmaydigan tenglamani hosil qilish uchun $s(x)$ ga u yoki bu chegaraviy shartlar qo`yadilar. Masalan  $f''(a) = f''(b) = 0$  deb olish mumkin. Unda  $S''(a) = S''(b) = 0$  bo`lishini talab qilish tabiiydir. Bundan $S''_1(a) = 0, S''_N(x_N) = 0$,

ya'ni $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$ tenglamalar hosil bo`ladi. $c_1 - d_1 h_1 = 0$ shartdan

$i = 1, \quad c_0 = 0$ bo`lganda (1.3.4) - bilan bir xil bo`ladi. Shunday qilib, kubik splaynning koefitsientlarini aniqlash uchun quyidagi yopiq sistemaga kelamiz:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N, c_0 = c_N = 0 \quad (1.3.5)$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N \quad (1.3.6)$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N \quad (1.3.7)$$

Bu sistemaning yagona yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilamiz. (1.3.5) -

(1.3.7) sistemadan $b_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N - 1$ noma'lumlarni yo`qotib, faqat  $c_i$  - noma'lumlar qatnashadigan sistemani hosil qilamiz. Buning uchun (1.3.7)- tenglamalardan ikki qo`shnilarini qaraymiz:

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

birinchi tenglamadan ikkinchini ayirib

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

tenglikni hosil qilamiz. $b_i - b_{i-1}$ ayirma uchun topilgan ifodani (1.3.6)- ning o`ng tomoniga qo`yib,

$$h_i \cdot c_i - \frac{h_i^2}{2} \cdot d_i = \frac{1}{2} \cdot (h_i \cdot c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6} (h_i^2 \cdot d_i - h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

yoki

$$h_i \cdot c_i + h_{i-1} \cdot c_{i-1} - \frac{2}{3} \cdot h_i^2 \cdot d_i - \frac{1}{3} h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = 2 \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right) \quad (1.3.8)$$

tenglikni hosil qilamiz. (1.3.5)- tenglikdan

$$h_i^2 \cdot d_i = h_i(c_i - c_{i-1}), h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$$

tengliklarni hosil qilib, bularni (1.3.8)- ga qo`ysak

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = 6 \cdot \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right)$$

tenglik hosil bo`ladi. c_i koeffisientlarni aniqlash uchun

$$h_i \cdot c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \cdot c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) \quad (1.3.9)$$

$i = 1, 2, \dots, N - 1$, $c_0 = c_N = 0$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema matritsasining diagonal elementlari boshqa elementlarga nisbatan ancha katta bo`lganligi uchun uning yechimi mavjud va yagonadir. Bu sistema uch diagonalli bo`lganligi uchun progonka usulida yechish mumkin. Bu holda progonka metodi turg`undir.

Aniqlangan c_i bo`yicha  $b_i$  va  $d_i$  koeffisientlarni oshkor formulalar ko`rinishida yozish mumkin

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2} \cdot c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.3.10)$$

Shunday qilib, (1.3.1) - (1.3.3) va $s''(a) = s''(b) = 0$ chegaraviy shartlar bilan anilanadigan yagona splayn mavjudligi ko`rsatildi. Boshqa chegaraviy shartlar bilan ham masalani qarash mumkin ekanligini ta'kidlaymiz.

2. Kubik splayn bilan interpoliyatsilash jarayonining yaqinlashishi.

Bu yerda kubik interpoliyatsion splaynlarning tugun nuqtalar soni N cheksizga intilganda interpoliyatsiyalanuvchi funksiyaga intilishini ko`rsatamiz.

Interpoliyatsion splayn bilan $f(x)$ orasidagi farq $U(x) = f(x) - S(x)$ funktsiya silliqlik tartibiga va tugun nuqtalarning joylashishiga bog`liq. Sodda uchun nuqtalari tekis joylashgan to`rlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$\omega_h = \{x_i = a + i \cdot h, i = 0, 1, \dots, N\},$$

bu yerda $h = \frac{b-a}{N}$ Bu holda (1.3.9)- sistema ko`rinishi quyidagicha bo`ladi

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6 f_{\bar{x},i}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad c_0 = c_N = 0, \quad (1.3.11)$$

bunda

$$f_{\bar{x},i} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}.$$

$f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ oraliqda to'rtinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin deb talab qilamiz:

$$f(x) \in C^{(4)}[a,b]$$

bundan tashqari

$$f''(a) = f''(b) = 0$$

chegaraviy shartlari bajarilsin, xuddi shunday shartlar splayn uchun ham bajarilsin deb shart qo'yamiz.

$$\|g(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|, \quad M_4 = \|f^{(4)}(x)\|_{C[a,b]}$$

deb belgilaymiz.

Faraz qilamiz $s_h(x)$, $f(x)$ funksiyani $[a, b]$ oraliqda to'rtinchi tartibli interpolatsiyalaydigan splayn bo'lsin. Quyidagi teoremda $f(x)$ funksiya va uning $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarining interpolatsiya xatolari bahosi keltirilgan.

1-teorema. Agar

$$f(x) \in C^{(4)}[a,b]$$

bo'lsa,

$$\|f(x) - S_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 \cdot h^4 \quad (1.3.12)$$

$$\|f'(x) - S'_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 \cdot h^3 \quad (1.3.13)$$

$$\|f''(x) - S''_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 \cdot h^2 \quad (1.3.14)$$

baholar o'rinli bo'ladi. Bu tengsizliklardan, $h \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) $S_h^{(i)}(x)$ larning $f^{(i)}(x)$ -larga $i = 0, 1, 2$ intilishi kelib chiqadi. Bu teoremani isbot qilish uchun xatolikni baholovchi lemmani keltiramiz.

$$\|\varphi(x)\|_{C(\omega_h)} \leq \max_{x_i \in \omega_h} |\varphi(x_i)|$$

deb belgilaymiz.

1-lemma. $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$ uchun

$$\|f''(x) - S''_h(x)\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{3}{4} \cdot M_4 \cdot h^2. \quad (1.3.15)$$

Isbot. $S_h''(x_i) = c_i$ bo'lganligi uchun, bu yerda c_i (1.3.11)- sistemaning yechimi, $z_i = c_i - f''(x_i)$ xatolikning bahosini topish kifoya. $c_i = z_i - f''_i$ ni (1.3.1)-ga qo'yib

$$z_{i-1} + 4z_i + z_{i+1} = \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad z_0 = z_N = 0 \quad (1.3.16)$$

tenglamalarni hosil qilamiz, bu yerd

$$\psi_i = 6 \cdot f_{\bar{x}x,i} - (f''_{i+1} + 4f''_i + f''_{i-1}). \quad (1.3.17)$$

(1.3.16)- sistema yechimini ψ_i - o'ng tomonlar orqali baholaymiz. Buning uchun

(1.3.16)- Tenglamani $4z_i = -z_{i-1} - z_{i+1} + \psi_i$ ko'rinishida yozamiz. Bundan

$$\begin{aligned} 4|z_i| &= |-z_{i-1} - z_{i+1} + \psi_i| \leq |z_{i-1}| + |z_{i+1}| + |\psi_i| \leq \\ &\leq \max_{x_{i-1} \in \omega_h} |z_{i-1}| + \max_{x_{i+1} \in \omega_h} |z_{i+1}| + \max_{x_i \in \omega_h} |\psi_i| = 2\|z\|_{C(\omega_h)} + \|\psi_i\|_{C(\omega_h)} \end{aligned}$$

kelib chiqadi.

Bu tengsizlik barcha i -lar uchun o'rinli bo'lganligi uchun, u $|z_i|$ maksimumga

erishadigan $i = i_0$ uchun ham, ya'ni $x_i = x_{i_0}$ uchun ham o'rinli bo'ladi. Shuning uchun

$$4\|z\|_{C(\omega_h)} \leq 2\|z\|_{C(\omega_h)} + \|\psi\|_{C(\omega_h)}$$

ya'ni

$$\|f''(x) - S_h''(x)\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{1}{2}\|\psi\|_{C(\omega_h)} \quad (1.3.18)$$

bajariladi. Bundan (1.3.15)- bahoni hosil qilish uchun $\|\psi\|_{C(\omega_h)}$ baholash lozim.

Bunda $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1})$, ψ_i - lar (1.3.17)- tenglik yordamida aniqlangan. ψ_i -ni

$$\begin{aligned} \psi_i &= 6f_{\bar{x}x,i} - (f''_{i+1} + 4f''_i + f''_{i-1}) = 6(f_{\bar{x}x,i} - f''_i) - (f''_{i+1} - 2f''_i + f''_{i-1}) = \\ &= 6(f_{\bar{x}x,i} - f''_i) - h^2 f''_{\bar{x}x,i} \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

ko'rinishda yozamiz va Teylor formulalaridan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} f_{\bar{x}x,i} &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{h^2} f''(x_i) \cdot h^2 + \frac{1}{12h^2} \left[\frac{f^{(4)}(\xi_i) + f^{(4)}(\xi_i)}{2} \right] \cdot h^4 = \\ &= f''(x_i) + \frac{1}{12} f^{(4)}(\eta_i) \cdot h^2, \quad x_{i-1} < \eta_i < x_{i+1} \end{aligned}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Xuddi shunday usul bilan

$$f''_{xx,i} = \frac{f''_{i+1} - 2f''_i + f''_{i-1}}{h^2} = \frac{f^{(4)}_{\xi_i} + f^{(4)}_{\zeta_i}}{2} = f^{(4)}(\zeta_i), \zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

tenglikni hosil qilish mumkin. (1.3.19)- dan

$$\begin{aligned} \psi_i &= 6(f''_{xx,i} - f''_i) - h^2 \cdot f''_{xx,i} = 6\left[f''_i + \frac{1}{12} f^{(4)}_{\eta_i} \cdot h^2 - f''_i\right] - \\ &- h^2 f^{(4)}(\eta'_i) = \frac{1}{2} f^{(4)}(\eta_i) h^2 - h^2 f^{(4)}(\zeta_i) \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Bundan $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} |\psi_i| &\leq \frac{h^2}{2} |f^{(4)}(\eta_i)| + h^2 |f^{(4)}(\zeta_i)| \leq \\ &\leq \frac{h^2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| + h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = \frac{3}{2} M_4 h^2. \end{aligned}$$

bunda $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ kelib chiqadi. (1.3.18)- dan

$$\|\psi\|_{C(\omega_h)_4} = \frac{3}{4} M_4 \cdot h^2$$

ekanligi ma'lum bo'ladi. 1- lemma isbot bo'ldi.

Endi 1-teoremani isbot qilishga o'tamiz. Eng avval (1.3.14)- bahoni ko'rsatamiz kesmani qaraymiz. $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \dots, N$ Bu kesmada $f''(x) - S''(x)$ ga shunday birinchi darajali $P_1(x)$ ko'phadni qo'shib ayiramizki, $S''(x) - P_1(x)$ birinchi darajali ko'phad $f''(x)$ ni x_{i-1} va x_i nuqtalarda interpolyatsiyalasins. Unda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|f''(x) - S''_h(x) + P_1(x) - P_1(x)| \leq |f''(x) - S''_h(x) + P_1(x)| + |P_1(x)|. \quad (1.3.20)$$

chap tomondagi hadlarni alohida - alohida baholaymiz. $S''_h(x) - P_1(x)$ birinchi darajali ko'phad $f''(x)$ ni interpolyatsiyalovchi ekanligi uchun, interpolyatsiya xatoligini baholash formulasidan:

$$\begin{aligned} |f''(x) - S''_h(x) + P_1(x)| &\leq \frac{1}{2} \cdot \max_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} |f^{(4)}(\xi)| \cdot |x - x_{i-1}| \cdot |x - x_i| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \cdot \max_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} |x - x_{i-1}| \cdot |x - x_i| = \frac{1}{4} \cdot M_4 h^2 \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

$$P_1(x) = (f''(x_{i-1}) - S''(x_{i-1})) \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + (f''(x_i) - S''(x_i)) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

ko'rinishda bo'ladi. Shuning uchun

$$|P_1(x)| \leq \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |P_1(x)| = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left\{ |f''(x_{i-1}) - S''_h(x_{i-1})|, |f''(x_i) - S''_h(x_i)| \right\}$$

bundan lemmaga asosan

$$|P_1(x)| \leq \frac{3}{4} \cdot M_4 h^2 \quad (1.3.22)$$

baho hosil bo'ladi.

(1.3.20)- dan (1.3.21)- va (1.3.22)- larga asosan ixtieriy $x[x_{i-1}, x_i]$ uchun

$$|f''(x) - S_k''(x)| \leq M_4 h^2 \quad (1.3.23)$$

hosil bo'ladi. $i = 1, 2, \dots, N$ ixtiyoriy bo'lgani uchun (1.3.24)- baho o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi (1.3.23)- bahoni o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. $[x_{i-1}, x_i]$ kesmada $r(x) = f(x) - S_h(x)$ funksiyani qaraymiz. $r(x_{i-1}) = r(x_i) = 0$ bo'lgani uchun shunday $x_{i-1} < \xi < x_i$ nuqta topiladiki $r'(\xi) = 0$. Shu sababli

$$|r'(x)| = |r'(x) - r'(\xi)| = |r''(\xi) \cdot (x - \xi)| \leq |r''(\xi)| \cdot h$$

bo'ladi. Shunday qilib

$$|f'(x) - S_h'(x)| \leq |f''(\xi) - S_h''(\xi)| \cdot h$$

bo'ladi.

Agar (1.3.24)- ni inobatga olsak

$$|f'(x) - S_h'(x)| \leq M_4 \cdot h^3$$

bundan (1.3.23)- kelib chiqadi. (1.3.22)- bahoni isbot qilish kerak.

$$g(t) = f(t)S_h(x) - K(t - x_{i-1}) \cdot (t - x_i) \quad (1.3.24)$$

K doimiy son, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, K ni $g(x) = 0$ shartdan aniqlaymiz, ya'ni

$$K = \frac{f(x) - S_h(x)}{(x - x_{i-1})(x - x_i)}$$

$g(x) = g(x_{i-1}) = g(x_i) = 0$ ga egamiz. Shuning uchun $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ topiladiki

$$g''(x) = 0$$

$$g''(t) = f''(t) - S_h''(t) - 2K$$

bo'lgani uchun

$$f''(\xi) - S_h''(\xi) = 2K$$

ya'ni

$$f(x) - S_h(x) = \frac{f''(\xi) - S_h''(\xi)}{2} \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)$$

bo`ladi.

Bundan va (1.3.24)- dan

$$\left| f(x) - S_h(x) \right| \leq \frac{1}{2} \left\| f''(x) - S_h''(x) \right\|_{C(\omega_h)} \cdot \frac{h^2}{4} \leq \frac{M_4 \cdot h^4}{8}$$

baho hosil bo`ladi. Bundan (1.3.22)- baho kelib chiqadi.

Bu bobda funksiyani interpolyasiyalash masalasida Logranj va Nyuton interpolyasion formulalari, Splayn yaqinlashtirish masalalari o`rganildi. Bu usullarning barchasi uchun Mathcad muhitida grafik ko`rinishda natijalar olindi. Xatoliklar tahlil qilindi va yaxshi yaqinlashuvchi usullar aniqlandi. Bu usullar yordamida sonli usullar kursidan funksiyani yaqinlashish masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

II. FUNKSIYANI YAQINLASHTIRISH.

2.1. MASALANI QO`YILISHI.

Faraz qilaylik, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ yetarlicha siliq va hisoblash uchun qulay bo`lgan chiziqli erkli funksiyalar sistemasi bo`lsin. Bu fuksiyalardan tuzilgan

$$P_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \quad (2.1.1)$$

chiziqli kombinassiya ($c_0, c_1, \dots, c_n$ – doimiy sonlar) umumlashgan ko`phad deyiladi. Berilgan  $f(x)$  funksiyani interpolyatsiyalash yo`li bilan $P_m(x)$ orqali taqribiy ravishda almashtirish yo`li mavjud. Ammo shuni ham takidlab o`tish lozimki, qator masalalarda funksiyaning bunday taqribiy tasvirlanishi maqsadga muvofiq bo`lavermaydi. Birinchidan, tugunlar soni ko`p bo`lsa, u holda interpolyasion ko`phadlarning ham darajasi ortib boradi, lekin bu yaqinlashishning sifati har doim ham yaxshi bo`lmasligi mumkin. Ikkinchidan,  $f(x)$  funksiyaning tugun nuqtalardagi qiymati biror tajribadan aniqlangan bo`lishi ham mumkin, u holda tabiiy ravishda bu qiymatlar tajriba xatosiga ega bo`lib, u interpolyatsion ko`phadga ham tasir qiladi va shu bilan funksiyaning haqiqiy holatini ham buzib ko`rsatadi.

Qandaydir ma`noda bu kamchiliklardan holi bo`lgan o`rta kvadratik yaqinlashuvchi ko`phadlarni tuzish bilan shug`ullanish maqsadga muvofiqdir. Shunday qilib, biz funksiyalar uchun o`rta kvadratik ma`noda yaqinlashish masalasi qo`yilishining maqsadga muvofiq ekanligiga ishonch hosil qildik. Bu masala quydagidan iboratdir: $[a, b]$ oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun (2.1.1) ko`rinshdagi yaqinlashuvchi shunday ko`phad topilsinki,

$$\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \quad (2.1.2)$$

ifoda mumkin qadar eng kichik qiymatni qabul qilsin.

Agar (2.1.2) integral kichik qiymatni qabul qilsa, bu shuni bildiradiki, $[a, b]$ oraliqning ko`p qismida $f(x)$ va $P_m(x)$ bir-biriga yaqin. Shunga qaramasdan

ayrim nuqtalar atrofida yoki bu oraliqning ba'zi kichik qisimlarida $f(x) - P_m(x)$ ayirma nisbatan yetarlicha kata bo'lishi ham mumkin.

Quyidagi

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx} \quad (2.1.3)$$

miqdor $P_m(x)$ ning $f(x)$ dan o'rta kvadratik og'ishi deyiladi va $f(x)$ ni $P_m(x)$ bilan yaqinlashishda o'rta kvadratik ma'nodagi xatoni bildiradi.

Agar $f(x)$ ni o'rta kvadratik ma'noda $P_m(x)$ bilan yaqinlashtirishda qandaydir sababga ko'ra qaralayotgan oraliqning biror qismida uning boshqa qismiga nisbatan aniqroq yaqinlashtirish kerak bo'lsa, u holda ko'pincha quydagicha ish tutiladi: *vazn* deb ataluvchi maxsus ravishda tanlab olingan manfiy bo'lmagan $\rho(x)$ funksiya olinib, (2.1.2) o'rniga ushbu

$$\int_a^b \rho(x) [f(x) - P_m(x)]^2 dx$$

integralning eng kichik qiymatini qabul qilishi talab qilinadi. Bu yerda $\rho(x)$ shunday tanlangan bo'lishi kerakki, agar oraliqning biror nuqtasi atrofida yaqinlashish aniqligi boshqa nuqtalarga nisbatan yaxshiroq bo'lishi talab qilinsa, $\rho(x)$ shu nuqta atrofida kattaroq qiymatga ega bo'lishi kerak. Msalan $[-1,1]$ oraliqda $f(x)$ funksiyani $P_m(x)$ funksiya bilan yaqinlashtirishda aniqligining oraliqning chetki nuqtalari $x = \pm 1$ atrofida yuqori bo'lishini istasak, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ deb olish mumkin.

Agar $f(x)$ funksiyaning analitik ko'rinishi o'rniga, uning faqat $(n+1)$ ta $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlarigina malum bo'lsa, u holda (2.1.2) integral o'rniga ushbu

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \quad (2.1.4)$$

yig`indining mumkin qadar kichik qiymat qabul qilishligi talab qilinadi. Bu holda

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2}$$

miqdor ***o`rta kvadratik og`ish*** deyiladi. O`rta kvadratik yaqinlashtirish usuli ***eng kichik kvadratlar usuli*** ham deyiladi.

Agar bordiyu, $f(x_i)$ larning aniqligi bir xil bo`lmasa, masalan, har xil aniqlikka ega bo`lgan turli asboblarda yordamida hisoblangan bo`lsa, u holda biz aniqligi kata bo`lgan qiymatlarga ko`proq ishonch bilan kattaroq “vazn” berishimiz kerak. Buning uchun  $x_i$  nuqtadagi vazn deb ataluvchi maxsus tanlangan  $\rho_i > 0$  sonlarni olib, (2.1.4) yig`ndi o`rniga ushbu

$$\sum_{i=0}^n \rho_i [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \quad (2.1.5)$$

vazniy yig`ndini minimallashtirishimiz kerak. Bu vaznlar odatda ularning yig`ndisi birga teng bo`ladigan qilib tanlanadi:

$$\sum_{i=0}^n \rho_i = 1$$

Agar (2.1.3) bilan aniqlangan o`rta kvadratik og`ish δ kichik bo`lsa,  $[a, b]$  oraliqning aksaryat nuqtalarida  $|f(x) - P_m(x)|$  ayirma qiymati kichik bo`ladi. Lekin shunga qaramasdan ayrim kichik oraliqlarda bu miqdor katta bo`lishi ham mumkin. Aniqrog`i, faraz qilaylik, $[a, b]$ oralig`da  $|f(x) - P_m(x)|$  ning ekstremumlari soni chekli bo`lib, γ ixtiyoriy musbat son bo`lsin. Faraz qilaylik,  $s_1, s_2, \dots, s_k$  o`zaro kesishmaydigan $[a, b]$ dan olingan shunday oraliqchalar bo`lsinki,

$$|f(x) - P_m(x)| \geq \gamma$$

tengsizlik qanoatlantiradigan nuqtalar shu s_i larga tegishli bo`lib,  $\sigma$  shu oraliqchalar uzunliklar yig`ndisi bo`lsin. Agar  $\delta < \varepsilon$  bo`lsa, u holda

$$\varepsilon^2(b-a) > \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \geq \sum_{i=1}^k \int [f(x) - P_m(x)]^2 dx \geq \gamma^2 \sigma$$

bo`ladi. Bunda esa

$$\sigma < (b-a) \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2.$$

Demak, agar ε yetarlicha kichik bo`lsa,  $[a, b]$  oraliqning o`lchovi istalgancha kichik σ dan ortmaydigan nuqtalar to`plamidan tashqari boshqa ham nuqtalarda

$$|f(x_i) - P_m(x_i)| < \gamma$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi. Lekin ayrim hollarda yaqinlashtiruvchi ko`phadga og`irroq shart qo`yiladi, chunonchi,  $[a, b]$  oraliqning barcha nuqtalarida  $f(x)$  ning  $P_m(x)$  dan og`ishi berilgan miqdordan kichik bo`lishi talab qilinadi. Biz  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da uzliksiz va  $P_m(x)$  algebraik ko`phad bo`lgan holni ko`ramiz.

Faraz qilaylik, $H_n(P)$ darajasi n dan ortmaydigan

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

algebraik ko`phadlarning to`plami bo`lsin. Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz va  $P_n(x) \in H_n(P)$  bo`lsa, uholda $f(x)$ ning $P_n(x)$ dan $[a, b]$ oraliqda og`ishini, ya'ni

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$$

ni $E_n(f, P_n)$ orqali belgilaymiz. Bu miqdor $P_n(x)$ ko`phad koeffisientlari  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ning funksiyasi bo`lib, u manfiy emas hamda bu miqdor manfiy bo`lmagan aniq quyi chegaraga ega bo`ladi:

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n(P)} E_n(f, P_n).$$

Agar shunday $P_n^*(x)$ ko'phad mavjud bo'lib, $E_n(f, P_n^*) = E_n(f)$ tenglik bajarilsa, u holda $P_n^*(x)$ ko'phad eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad va $E_n(f)$ eng kichik og'ish yoki $f(x)$ ning n -darajali ko'phad bilan eng yaxshi yaqinlashishi deyiladi.

EHM larda funksiyalarni hisoblash uchun standart programalar tuzishda berilgan $f(x)$ uchun $E_n(f)$ berilgan ε dan kichik bo'ladigan $P_n^*(x)$ ko'phadni topish talab qilinadi.

2.2. Oraliqda algebraik ko'phadlar orqali o'rta kvadratik yaqinlashish.

Ortogonal ko'phadlar sistemasi va ularning asosiy xossalari

1. Oraliqda algebraik ko'phadlar orqali o'rta kvadratik yaqinlashish.

Agar chekli $[a, b]$ oraliqda $\rho(x) \geq 0$ bo'lib va undan olingan integral musbat bo'lsa, ya'ni

$$0 < \int_a^b \rho(x) dx < \infty \quad (2.2.1)$$

shart bajarilsa, u holda $p(x)$ $[a, b]$ oraliqda *vazn funksiyasi* deyiladi. Agar $[a, b]$ oraliq cheksiz bo'lsa, u holda bundan tashqari,

$$\int_a^b x^k \rho(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

integrallar absolyut yaqinlashuvchi bo'lishlari kerak.

Lemma. Agar $Q(x)$ $[a, b]$ oraliqda manfiy bo'lmagan n - darajali ko'phad bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\rho(x)$ vazn funksiyasi uchun

$$\int_a^b \rho(x) Q_n(x) dx > 0 \quad (2.2.2)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Avvalo lemmaning tasdig'i bevosita ko`rinib turgan ikki sodda holni ko`raylik, agar $\rho(x)$ chekli sondagi maxsus nuqtlarga ega bo`lsa, u holda  $[a, b]$  oraliqning bu nuqtalardan boshqa nuqtalarida  $\rho(x) \cdot Q_n(x)$  musbat va uzluksiz, shuning uchun ham (2.2.2) dagi integral musbat. Ikkinchidan  $[a, b]$  oraliqda  $Q_n(x)$  musbat bo`lsa, u holda m orqali uning bu oraliqdagi minimumni belgilab,

$$\int_a^b \rho(x) Q_n(x) dx > m \int_a^b \rho(x) dx > 0$$

tengsizlikka ega bo`lamiz va lemmaning tasdig'i bu hol uchun ham o`rinli bo`ladi. Umumiy holda, faraz qilaylik,  $Q_n(x)$  ko`phad $[a, b]$ oraliqda $x_1, x_2, \dots, x_s$ ildizlarga ega bo`lsin. U holda (2.2.1) shartga ko`ra $\rho(x)$ vazndan $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_s, b]$ oraliqlar bo`yicha olingan integralning kamida bittasi musbat bo`lishi kerak. Bunday oraliq uchun:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_i + \varepsilon}^{x_{i+1} - \varepsilon} \rho(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x) dx > 0. \quad (2.2.3)$$

Demak, yetarlicha kichik ε uchun $\rho(x)$ vazn $[x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon]$ oraliq bo`yicha musbat. Lekin bu oraliqda  $Q_n(x)$  ko`phad ildizga ega emas, shuning uchun ham $m(\varepsilon)$ orqali $Q_n(x)$ ning $[x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon]$ oraliqdagi minimumini belgilab olsak, quydagi tengsizliklarga ega bo`lamiz:

$$\int_a^b \rho(x) Q_n(x) dx > \int_{x_i + \varepsilon}^{x_{i+1} - \varepsilon} \rho(x) Q_n(x) dx > m(\varepsilon) \int_{x_i + \varepsilon}^{x_{i+1} - \varepsilon} \rho(x) dx > 0$$

vazndan $[a, b]$ oraliq bo`yicha olingan integral mavjud va  $x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon$  da  $\rho(x) > 0$  bo`lgani uchun (2.2.3) integral mavjuddir.

Agar oraliq cheksiz, ya'ni $[x_s, \infty)$ bo`lsa, u holda (2.2.3) o`rniga

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_s + \varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \rho(x) dx = \int_{x_i}^{\infty} \rho(x) dx > 0.$$

Limitni qaraymiz. Xuddi shunga o'xshash $(-\infty, x_1]$ oraliq uchun

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1 - \varepsilon} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{x_1} \rho(x) dx$$

limit qoraladi. Lema isbotlandi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oraliqda kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni

$$\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx$$

mavjud bo'lsin. Bunday funksiyalarning $L^2_\rho[a, b]$ fazoga tegishli deymiz. Bu funksiyaning

$$P_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

umumlashgan ko'phad bilan o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashish masalasini ko'ramiz, ya'ni $a_0, a_1, \dots, a_n$ koefitsientlarini shunday tanlashimiz kerakki,

$$\delta_n = \int_a^b \rho(x) [P_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_a^b \rho(x) [\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x)]^2 dx \quad (2.2.4)$$

ifoda eng kichik qiymatga ega bo'lsin. Bu yerda $\delta_n = \delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ funksiya $a_0, a_1, \dots, a_n$ larga nisbatan kvadratik ko'phad va $\delta_n \geq 0$ bo'lgani uchun uning minimumi mavjud, bu minimumni topish uchun barcha

$$\frac{\partial \delta_n}{\partial a_i} \quad (i = \overline{0, n})$$

xususiy hosilalarni topib, ularni nolga tenglashtiramiz. Natijada $a_0, a_1, \dots, a_n$ larni aniqlash uchun quydagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_n}{\partial a_0} = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \varphi_0(x) dx = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_n}{\partial a_1} = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \varphi_1(x) dx = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_n}{\partial a_n} = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \varphi_n(x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Agar $L^2_\rho[a, b]$ fazodan olingan ikki $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiya skalyar ko`paytmasini (φ, ψ) orqali belgilasak:

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \rho(x) \varphi(x) \psi(x) dx \quad (2.2.6)$$

U holda (2.2.5) sistemani quydagi ko`rinishda yozish mumkin:

[illegible]

Endi $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ chiziqli erkli funksiyalar sistemasi uchun (2.12) sistema yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sistemaning **Gram determinant** deb ataluvchi, (2.2.7) sistemaning ushbu determinant

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \quad (2.2.8)$$

ning noldan farqliligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, aksincha, ya'ni $\Gamma_n = 0$ bo'lsin. U holda (2.2.2) sistemaga mos keladigan bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_0) + ... + a_n(\varphi_n, \varphi_0) = 0, \\ a_0(\varphi_0, \varphi_1) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + ... + a_n(\varphi_n, \varphi_1) = 0, \\ \\ a_0(\varphi_0, \varphi_n) + a_1(\varphi_1, \varphi_n) + ... + a_n(\varphi_n, \varphi_n) = 0 \end{cases} \quad (2.2.9)$$

kamida bitta trivial bo'lmagan yechimga ega bo'lishi, ya'ni shunday $a_0, a_1, \dots, a_n$ sonlar topilishi kerakki, ularning kamida birortasi noldan farqli bo'lib, (2.2.9) sistemani qanoatlantirsin. (2.2.9) sistemani tenglamalarini mos ravishda $a_0, a_1, \dots, a_n$ larga ko'paytirsak va skalyar ko'paytmaning (2.2.6) ko'rinishini etiborga olgan holda natijalarni qo'shsak, quydagi hosil bo'ladi:

$$\int_a^b \rho(x)[a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)]^2 dx = 0.$$

Lemaga ko`ra esa bunday bo`lishi mumkin emas, chunki $\{\varphi_n(x)\}$ sistema chiziqli
 erkli bo`lib, $a_0, a_1, \dots, a_n$ larni kamida bittasi noldan farqliligi sababli
 $P(x) = [a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)]^2$ ko`phad aynan nolga teng emas.
 Demak, Gram determinant Γ_n noldan farqli va (2.2.2) sistema yagona yechimga
 ega.

2. Ortogonal ko'phadlar sistemasi. O'rta kvadratik yaqinlashish metodning noqulay tomoni shundan iboratki, yaqinlashuvchi umumlashgan ko'phadning koeffisientlarini topish uchun (2.2.2) sistemasini yechishga to'g'ri keladi, bu esa katta n lar uchun juda ko'p mehnat talab qiladi. Agar biz ixtiyoriy chiziqli erkli $\{\varphi_n(x)\}$ sistema o'rnida $\{\psi_n(x)\}$ ortogonal ko'phadlar sistemasini qarasak, u holda (2.4) sistema soddalashadi.

Agar

$$(P, Q) = \int_a^b \rho(x) P(x) Q(x) dx = 0$$

bo'lsa, $P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal, xususiyl holda $\rho(x) \equiv 1$ bo'lsa, $P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda ortogonal deyiladi.

Bu yerda ham ixtiyoriy chiziqli erkli ko'phadlar sistemasi $\{\psi_n(x)\}$ dan, xususiyl holda $\{x_n\}$ sistemadan $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal sistema tuzish mumkin.

$$\int_a^b \rho(x) \psi_k(x) \psi_l(x) dx = 0 \quad (2.2.10)$$

Teorema. O'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida ortogonal ko'phadlar sistemasi yagonadir, boshqacha aytganda, agar

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \dots$$

$$\chi_0(x), \chi_1(x), \dots, \chi_n(x), \dots$$

sistemalar $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal bo'lgan ikkita sistema bo'lsa, u holda albatta

$$\psi_n(x) = c_n \chi_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bo'lishi kerak.

Isbot. Avvalo har xil darajadagi va turli sistemadagi ko'phadlarning ortogonal, ya'ni

$$\int_a^b \rho(x) \Psi_k(x) \chi_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l)$$

ekanligini ko'ramiz. Aniqlik uchun $k > l$ deb olaylik. $\chi_l(x)$ ni yagona usul bilan

$$\chi_l(x) = \sum_{j=0}^l c_j \Psi_j(x)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bunda (3.1) ni hisobga olgan holda

$$\int_a^b \rho(x) \Psi_k(x) \chi_l(x) dx = \sum_{j=0}^l c_j \int_a^b \rho(x) \Psi_j(x) \Psi_k(x) dx = 0$$

ga ega bo`lamiz, chunki  $j \leq l < k$ . Endi  $\chi_l(x)$  ning  $\psi_j(x)$  orqali tasvirlanishida nomeri  $j < l$  bo`lgan barcha c_j koeffisientlarning nolga tengligini ko`rsatamiz.

Buning uchun

$$\int_a^b \rho(x) \Psi_i(x) \chi_l(x) dx$$

integralni qaraymiz, bu yerda $i < l$. Bir tomondan, isbotlaganimizga ko`ra bu integral nolga teng, ikkinchi tomondan esa

$$\int_a^b \rho(x) \Psi_i(x) \chi_l(x) dx = \sum_{j=0}^l c_j \int_a^b \rho(x) \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx = c_i \int_a^b \rho(x) \Psi_i^2(x) dx.$$

O`ng tomondagi integral noldan farqli, shuning uchun ham  $c_i = 0$ . Demak, barcha  $i < l$  uchun  $c_i = 0$ , ya`ni

$$\chi_l(x) = c_l \chi_l(x)$$

shu bilan teorema isbotlandi.

Agar ortogonal ko`phadlarga yana biror qo`shimcha talab qo`yilsa, masalan ko`phadning bosh koeffisienti birga teng bo`lishini yoki bosh koeffisienti musbat bo`lib, normasi

$$\|\psi(x)\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x) \psi_i^2(x) dx}$$

birga teng bo`lishi talab qilinsa, u holda ortogonal ko`phad yagona ravishda aniqlanadi.

O`zaro ortogonal va normalari birga teng bo`lgan ko`phadlar sistemasi *ortonormalar ko`phadlar sistemasi* deyiladi. Berilgan $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ ortogonal sistemaning har bir ko`phadining ularning normalariga bo`lsak,

$$P_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{\|\psi_0\|}, \quad P_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|}, \dots, P_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}, \dots$$

ortonorma sistema hosil bo`ladi. Yuqorida aytganimizga ko`ra, berilgan $[a, b]$ oraliq va $\rho(x)$ vazn uchun ortonorma ko`phadlar sistemasi yagonadir.

Endi o`rta kvadratik ma`noda $f(x)$ funksiyaga eng yaxshi yaqinlashuvchi $Q_n(x)$ ko`phadni ortonormal ko`phadlarning chiziqli kombinasiyasi shaklida izlaymiz:

$$Q_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x).$$

Bu ko`phadning koeffisientlari a_k lar (2.2.2) sistemadan topiladi. Lekin bizning holda

$$(P_i, P_j) = \delta_i^j$$

bo`lgani uchun

$$a_k = (f, P_k) = \int_a^b \rho(x) f(x) P_k(x) dx$$

bo`ladi va eng kichik og`ish esa

$$\begin{aligned}
\delta_i^j &= \int_a^b \rho(x) [f(x) - Q_n(x)]^2 dx = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \\
&- 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b \rho(x) f(x) P_k(x) dx + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n a_k a_l \int_a^b \rho(x) P_k(x) P_l(x) dx = \\
&= \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k^2 + \sum_{k=0}^n a_k^2,
\end{aligned}$$

ya'ni

$$\delta_i^2 = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n a_k^2$$

bilan xarakterlanadi.

**3.Ortogonal ko`phadlarning asosiy xossalari.** Ortogonal ko`phadlarni tez aniqlashga imkon beradigan rekurrent munosabatni keltirib chiqaramiz.

Teorema. Ortogonal ko`phadlar sistemasining ixtiyoriy uchta ketma-ket elementlari uchun quydagi rekurrent munosabat

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x) = (x - a_n) P_n(x) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(x) \quad (2.2.11)$$

o`rinlidir, bu yerda  $\mu_n P_n(x)$  ning bosh koeffisienti bo`lib, a_n qandaydir o`zgarmas son.

Isbot. $x \cdot P_n(x)$ ko`phadning darajasi  $(n + 1)$  ga teng bo`lgani uchun uni $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n+1}(x)$ larning chiziqli kombinasiyasi orqali yagona ko`rinishda ifodalash mumkin:

$$x P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x). \quad (2.2.12)$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $\rho(x)P_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, n-2$) ga ko'paytirib, $[a, b]$ oraliq bo'yicha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x)P_n(x)[xP_j(x)]dx = \sum_{i=0}^n \alpha_n \int_a^b \rho(x)P_j(x)P_i(x)dx + \\ + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \int_a^b \rho(x)P_j(x)P_{n+1}(x)dx.$$

Chap tomondagi integral nolga teng, chunki barcha $j \leq n-2$ lar uchun $xP_j(x)$ darajasi $n-1$ dan ortmaydigan ko'phaddir, shuning uchun ham uni $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$ larning chiziqli kombinatsiyasi yordamida ifodalash mumkin. O'ng tomonda esa $i = j$ bo'lgandagina faqat bitta integral birga, qolganlari nolga teng:

$$\alpha_j \int_a^b \rho(x)P_j^2(x)dx = 0.$$

Demak, barcha $j \leq n-2$ lar uchun $\alpha_j = 0$. Shunday qilib, (2.2.12) tenglikni quydagicha yozish mumkin:

$$xP_n(x) = \alpha_{n-1}P_{n-1}(x) + \dots + \alpha_n P_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}P_{n+1}(x). \quad (2.2.13)$$

Bu yerda $\alpha_n - 1$ ni aniqlash uchun (2.2.10) ni $\rho(x)P_{n-1}(x)$ ga ko'paytirib, $[a, b]$ bo'yicha integrallaymiz. Natijada

$$\alpha_{n-1} = \int_a^b \rho(x)P_{n-1}(x)P_n(x)dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \int_a^b \rho(x)[\mu_n x^n + \dots]P_n(x)dx = \\ = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \int_a^b \rho(x)P_j^2(x)dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

Buni (2.2.13) ga qo`ysa, (2.2.10) kelib chiqadi.

Shuni ham ta`kidlash kerakki,  $P_{-1}(x) = 0$  deb olsak, (2.2.10) formula barcha  $n \geq 0$  uchun o`rinli bo`ladi.

Kiristofol – Darbu ayniyati. Ortogonal ko`phadlar nazaryasida muhim ahamiyatga ega bo`lgan Kiristofol– Darbu ayniyatni chiqaramiz.

Teorema. Ortogonal ko`phadlar uchun ushbu Kiristofol– Darbu ayniyati o`rinlidir

$$\sum_{k=0}^n P_k(x)P_k(y) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \cdot \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (2.2.14)$$

Isbot. (2.2.10) tenglikni $P_n(y)$ ga ko`paytiramiz:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x)P_n(y) = (x - \alpha_n)P_n(x)P_n(y) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(x)P_n(y),$$

bunda x va y larning o`rinlarni almashtiramiz:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(y)P_n(x) = (y - \alpha_n)P_n(x)P_n(y) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(y)P_n(y)$$

va birinchi tenglikdan ikkinchisini ayiramiz:

$$(x - y)P_n(x)P_n(y) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} [P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)] - \\ - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} [P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)].$$

Bu tenglik barcha $n \geq 0$ lar uchun o`rinli bo`lganligi sababli, uni barcha $n, n - 1, \dots, 2, 1, 0$ nomerlar uchun qo`shib chiqsak, (2.2.14) tenglik kelib chiqadi.

3.Ortogonal ko`phadlar nollarning xossalari.

Ortogonal ko'phadlar hisoblash jarayonlari– interpolyasiya, taqribiy differensiyallash va taqribiy integrallashda keng qo'llaniladi. Bu esa, asosan, ortogonal ko'phadlarning nollari ajoyib xossalarga ega bo'lganligi tufaylidir.

Teorema. (a, b) oraliqda ortogonal $P_n(x)$ ko'phadning barcha ildizlari haqiqiy va har xil bo'lib, ular (a, b) intervalda yotadi.

Isbot. $P_n(x)$ ko'phadning toq karrali va (a, b) da yotuvchi ildizlarini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, bu ildizlarning soni m bo'lib, ular $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ bo'lsin. Teorema isbotlanishi uchun $m = n$ ekanligini ko'rsatish kifoyadir, chunki bundan $P_n(x)$ ning boshqa ildizlari mavjud emasligi va ularning tubligi kelib chiqadi. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $m < n$ bo'lsin.

Ushbu

$$q(x) = (x - x'_1) \dots (x - x'_m)$$

ko'phadni tuzamiz. Uning m darajasi n dan kichikligi sababli

$$\int_a^b \rho(x) P_n(x) q(x) dx = 0$$

bo'lishi kerak. Ammo bu tenglik bajarilmaydi, chunki $q(x)$ va $P_n(x)$ larning ishoralari bir xil nuqtalarda almashinadi va $q(x) P_n(x)$ ko'paytma $[a, b]$ da o'z ishorasini saqlaydi. Bundan tashqari $q(x) P_n(x)$ faqat chekli sondagi nuqtalardagina nolga aylanadi, shuning uchun ham yuqoridagi ifoda aynan nol emas. Demak, lemmaga ko'ra $\int_a^b \rho(x) P_n(x) q(x) dx$ noldan farqli bo'lishi kerak. Shunday qilib, qarama-qarshilik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2.3. Eng ko'p qo'llaniladigan ortogonal ko'phadlar sistemalari.

Quyida hisoblash matematikasida ko'p qo'llaniladigan ortogonal ko'phadlar sistemalarini keltiramiz. Biz bu sistemalarning berilgan vazn bo'yicha ortogonal

sistemani tashkil etishlarini isbotlashni, rekurrent munosabatlar keltirib chiqarishni, shuningdek, ularning normalarini topish bilan bog`liq bo`lgan hisoblashlarni ko`rib chiqamiz.

1. Yakobi ko`phadlari. Quydagi

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$$

ko`phadlar **Yakobi ko`phadi** deb ataladi. Bular $[-1, 1]$ oraliqda

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

vazn bilan ortogonal ko`phadlar sistemasini tashkil etadi. Ularning normalari:

$$\begin{aligned} \|P_n^{(\alpha, \beta)}\| &= \sqrt{\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx} = \\ &= \left[\frac{2^{\alpha+\beta+1} (\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+n+1)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ular quydagi rekurrent munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2) \times P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ = 2(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + (\beta^2 - \alpha^2) + \\ + (\alpha + \beta + 2n + 1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + 2(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2) P_n^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned}$$

**2. Lejandr ko`phadlari.** Yakobi ko`phadlarning $\alpha = \beta = 0$ va $\rho(x) \equiv 1$ bo`lgandagi xususiy holi *Lejandr kophadlari* deb ataladi va ular *rodrig formulasi*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

bilan aniqlanadi. Uning normasi

$$\|L_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

bo`lib, tegishli rekurrent munosabat esa

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \quad (2.3.1)$$

dan iborat.

Lejandr ko`phadlaridan foydalanib,  $f(x) \in L^2[-1,1]$  funksiya uchun o`rta kvadratik ma`noda eng yaxshi yaqinlashuvchi ko`phad qurish mumkin. Bu ko`phad

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(x)$$

bo`lib, bu yerda

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) L_k(x) dx. \quad (2.3.2)$$

Eng kichik og`ishning miqdori quydagiga teng:

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^1 [f(x) - Q_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{2}{k+1} a_k^2. \quad (2.3.3)$$

Lejandr ko`phadning dastlabki yettitasi quydagilardan iborat:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8}(65x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$L_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[-1, 1]$ oraliqda uzluksiz va chegaralangan $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Lejandir ko'phadlari bo'yicha Fur'e qatori $[-1, 1]$ oraliqda unga tekis yaqinlashadi.

3.Chebishevning birinchi tur ko'phadlari. Biz bilamizki Chebishevning birinchi tur ko'phadi

$$T_{n+1} = \cos(n \arccos x), |x| \leq 1$$

$[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Bu ko'phadning normasi

$$\|T_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

ga teng. Quyidagi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

rekurrent munosabat keltirib chiqarilgan edi. Chebishev birinchi tur ko'phadlarning dastlabki yettitasi quydagilar:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Endi $[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun Chebishevning birinchi tur ko`phadlari yordamida topilishi mumkin bo`lgan eng yaxshi yaqinlashuvchi

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$$

ko`phadlarning koeffisientlari quydagi formulalar bilan hisoblanishini eslaymiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) d\theta, \quad a_k = \frac{2}{k} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \cos k\theta d\theta \quad (k \geq 1);$$

Eng kichik og`ishning miqdori δ_n esa

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^1 [f(x) - Q_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{f^2(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2} [2a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2]$$

formula bilan ifodalanadi.

2-teorema. Agar $[-1, 1]$ oraliqda $f(x)$ funksiya birinchi tartibli uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo`lsa, u holda funksiyaning Chebishev birinchi tur ko`phadlari bo`yicha Fur`e qatori $[-1, 1]$ oraliqda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi.

**4. Chebishevning ikkinchi tur ko`phadlari.** *C*Hebishevning ikkinchi tur ko`phadi deb ataluvchi

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ko`phad $[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Uning normasi

$$\|U_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n^2(x) dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ga teng bo`lib, ular uchun rekurrent munosabat

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

dan iboratdir. Chebishev ikkinchi tur ko`phadlarning dastlabki yettitasi quydagilardir:

$$U_0(x) = 1,$$

$$U_1(x) = 2x,$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x,$$

$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.$$

$[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun Chebishevning ikkinchi tur ko`phadlari yordamida tuzilgan eng yaxshi yaqinlashuvchi

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k U_k(x)$$

ko`phadning koefitsientlari

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta) \sin\theta \sin(k+1)\theta d\theta$$

formula bilan hisoblanib, eng kichik og`ish miqdori esa

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \int_{-1}^1 [f(x) - Q_n(x)]^2 \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f^2(x) dx - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n a_k^2 \end{aligned}$$

formula bilan aniqlanadi.

3 – teorema. Agar $[-1, 1]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uchinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo`lsa, u holda  $f(x)$  ning Chebishev ikkinchi tur ko`phadlari bo`yicha Fur`e qatori o`sha oraliqda $f(x)$ ga tekis yaqinlashadi.

**5.Lager ko`phadlari.** Endi cheksiz oraliqda ortogonal bo`lgan ko`phadlarni ko`ramiz. *Lager ko`phadlari* deb ataluvchi

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x})$$

ko`phadlar $[0, \infty)$ oraliqda

$$\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x} \quad (x > 0, \alpha > -1)$$

vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Buning normasi

$$\|L_n^{(\alpha)}\| = \sqrt{\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx} = \sqrt{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}$$

ga teng bo`lib, ular uchun

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \alpha - 2n - 1)L_n^{(\alpha)}(x) + n(\alpha + n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0$$

rekurrent munosabat o`rinlidir. Lager ko`phadlarning birinchi 5 tasi $\alpha = 0$ bo`lganda quydagilardan iborat:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = -x + 1,$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 74.$$

Agar $f(x)$ funksiya $[0, \infty)$ oraliqda $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi bo`lsa, darajasi  $n$  dan ortmaydigan ko`phadlar orasida

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k L_n^{(\alpha)}(x)$$

ko`phad shu oraliqda o`rta kvadratik ma`noda eng yaxshi yaqinlashuvchi ko`phad bo`lib, bu yerda

$$a_k = \frac{1}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx.$$

quydagi teorema o`rinlidir.

4 – teorema. Agar $[0, \infty)$ oraliqda $f(x)$ bo`lakli silliq funksiya bo`lib,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} |f(x)| dx$$

integral mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Lager ko'phadlari bo'yicha Fur'e qatori $f(x)$ ning uzluksizlik nuqtalarida shu funksiyaning o'ziga, uning uzilish nuqtalarida esa $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ ga yaqinlashadi.

6. Ermit ko'phadlari. *Ermit ko'phadlari* deb ataluvchi

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

ko'phad $(-\infty, \infty)$ oraliqda $\rho(x) = e^{-x^2}$ vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Bu ko'phadning normasi

$$\|H_n\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx} = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

bo'lib, uning uchun

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

rekurrent munosabat o'rinlidir. Ermit ko'phadlarning birinchi 6 tasi quydagilardan iborat:

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

$$H_5(x) = 82x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Agar $f(x)$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda $\rho(x) = e^{-x^2}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lsa, u holda darajasi n dan ortmaydigan ko'phadlar orasida

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(x)$$

ko`phad  $(-\infty, \infty)$  oraliqda o`rta kvadratik ma`noda eng yaxshi yaqinlashuvchi ko`phad bo`lib, bu yerda

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$$

quydagi teorema o`rinlidir.

5 – teorema. Agar $f(x)$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda bo`lakli silliq bo`lib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} f^2(x) dx$$

integral mavjud bo`lsa, u holda  $f(x)$  funksiyaning Ermit ko`phadlari bo`yicha Fur`e qatori $f(x)$ ning uzluksizlik nuqtalarida shu funksiyaning o`ziga, uzilish nuqtalarida esa $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$ ga yaqinlashadi.

2.4. Trigonometrik ko`phadlar va jadval bilan berilgan funksiyalarni o`rta kvadratik ma`noda yaqinlashtirish. Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi algebraik ko`phadlar.

**1. Trigonometrik ko`phadlar bilan o`rta kvadratik ma`noda yaqinlashish.** Sonlar o`qning barcha nuqtalarida aniqlangan davriy funksiyalarni o`rta kvadratik ma`noda yaqinlashishda trigonometric ko`phadlardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Faraz qilaylik, davri  $2\pi$  bo`lgan uzluksiz $f(x)$ funksiya berilgan bo`lsin.

Yaqinlashuvchi ko`phad  $Q_n(x)$  ni quyidagi ko`rinishda olamiz:

$$Q_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.4.1)$$

agar a_k va b_k larni

$$\delta_n^2 = \int_0^{2\pi} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx$$

ning minimumga erishish shartidan topadigan bo'lsak, u holda ular uchun quydagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ (k = 0, 1, 2, \dots) \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

Bular analiz kursidan ma'lum bo'lib, $f(x)$ funksiyaning Fur'e koeffisientlaridir.

Eng kichik og'ishning miqdori esa quydagichadir:

$$\delta_n^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Xususiyl holda, agar $f(x)$ juft funksiya bo'lsa,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

va $f(x)$ toq funksiya bo'lsa,

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = \overline{1, n})$$

bo`ladi. (6.1) trigonometrik ko`phaddagi

$$u_0 = \frac{a_0}{2}, \quad u_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

hadlar odatda *garmoniklar* deyiladi. Agar (2.4.2) formulalarni (2.4.1) ga qo`yib  $n \rightarrow \infty$  da limitga o`tsa, $f(x)$ funksiya uchun uning Fur'e trigonometrik qatori

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.4.3)$$

kelib chiqadi. Funksiyani Fur'e trigonometrik ko`phad yoki Fur'e trigonometrik qatori shaklida ifodalash *garmonik analiz* deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[0, 2\pi]$ oraliqda kvadrati bilan integrallanuvchi bo`lsa, uning (2.4.3) Fur'e qatori har doim o`rta kvadratik ma'noda unga yaqinlashadi. Agar $f(x)$ ga ba'zi qo`shimcha shartlar qo`yilsa, u holda (2.4.3) qator unga tekis yaqinlashadi.

**2.Jadval bilan berilgan funksiyalarni o`rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish.** Darajali ko`phad bilan o`rta kvadratik yaqinlashtirish. Faraz qilaylik,  $y = f(x)$  funksiyaning  $x_0, x_1, \dots, x_n$  nuqtalardagi aniq yoki taqribiy  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  qiymatlari berilgan bo`lsin. Darajasi $k(k < n)$ dan ortmaydigan

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$$

ko`phadlar orasida shunday ko`phadni topishimiz kerakki,

$$\Delta_n^2 = \sum_{i=0}^n \rho_i [f(x_i) - Q_k(x_i)]^2$$

yig`ndi minimumga erishsin. Bu yerda ρ_i lar $\rho_i \geq 0$ va $\sum_{i=0}^n \rho_i = 1$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy sonlar. Ikkinchi $\Delta_n^2 = \Delta_n^2(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dan a_i larga nisbatan hosila olib, ularni nolga tenglashtirsak, u holda quydagi sistema hosil bo`ladi:

$$a_0 \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^j + a_1 \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+1} + \dots + a_k \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+k} =$$

$$\sum_{i=0}^n \rho_i f(x_i) x_i^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, k)$$

quyidagi

$$S_i = \sum_{j=0}^n \rho_j x_i^j, \quad t_j = \sum_{i=0}^n \rho_i f(x_i) x_i^j$$

belgilashlarni kiritib, bu sistemani ushbu ko`rinishda yozib olaylik:

[illegible]

bu sistema

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_0 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_0 & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{vmatrix} \quad (2.4.5)$$

determinantining noldan farqliligini va demak, (2.4.4) sistema yagona yechimga ega ekanligini ko`rsatamiz. Dastlab quydagi

$$Z_k(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x^k \end{vmatrix}$$

tenglik bilan aniqlangan k – darajali ko'phadning $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ to'plamda $\rho = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n\}$ vazn bo'yicha barcha $j < k$ lar uchun x^j bilan ortogonal ekanligini, ya'ni

$$\sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i^j = 0 \quad (j = \overline{0, k-1}) \quad (2.4.6)$$

tengliklar o'rinli ekanligini ko'rsataylik. Haqiqatan ham, $j < k$ uchun $Z_k(x_i)$ ni $\rho_i x_i^j$ ga ko'paytirib, barcha $i = 0, 1, \dots, n$ lar bo'yicha yig'ib chiqsak, quydagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i^j &= \sum_{i=0}^n \rho_i \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & x_i^j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x_i^{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x_i^{j+k} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & s_{j+k} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ikkinchi tomondan $Z_k(x_i)$ ni $\rho_i x_i^j$ ga ko'paytirib, qo'shib chiqsak,

$$\sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i^k = D_{k+1} \quad (2.4.7)$$

kelib chiqadi. Endi (2.21) va (2.4.6) tengliklar yordamida

$$N_k = \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k^2(x_i) = D_k D_{k+1} \quad (2.4.8)$$

tenglikning o`rinli ekanligini ko`rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k^2(x_i) &= \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x_i^k \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) \cdot x_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) \cdot x_i^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 0 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & D_k \end{vmatrix} = D_k D_{k+1}. \end{aligned}$$

N_k kvadratlar yig`ndisi bo`lgani uchun u faqat

$$Z_k(x_0) = Z_k(x_1) = \dots = Z_k(x_n) = 0$$

bo`lgan holdagina nolga aylanadi. Lekin $k < n$ bu hol uchun faqat $Z_k(x) \equiv 0$

bo`lgandagina  $N_k = 0$  bo`lishi mumkin.

Agar $k = 1$ bo`lsa, u holda (2.21) ga ko`ra

$$Z_1(x) = \begin{vmatrix} s_0 & 1 \\ s_1 & x \end{vmatrix} = s_0 \cdot x - s_1 = 1 \cdot x - s_1 \neq 0.$$

Demak, $N_k = D_1 D_2$. Bundan $D_1 = s_0 = 1 > 0$ ni hisobga olsak, $D_2 > 0$ kelib chiqadi.

Endi (2.4.8) da $k = 2$ deb olsak, $N_2 = D_1 D_2$ bo`ladi. Ammo (2.4.5) ga ko`ra $Z_2(x)$ da x^2 oldidagi koeffisient D_2 ga teng va isbotlanganga ko`ra $D_2 \neq 0$,

shuning uchun ham $N_2 > 0$; bundan esa $D_3 > 0$. Bu mulohazani davom ettirib, $D_{k+1} \neq 0$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, (2.4.4) sistema yagona yechimga ega, bu sistemani yechib izlanayotgan ko'phadning koeffisientlarini topamiz.

Trigonometrik ko'phadlar yordamida o'rta kvadratik yaqinlashtirish.

Faraz qilaylik, davri 2ρ ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $[0, 2\pi]$ oraliqning teng uzoqlikda joylashgan

$$x_j = \frac{2\pi}{n} j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

ta nuqtadagi $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$, qiymatlari berilgan bo'lsin. Trigonometrik ko'phad $T_k(x) = \sum_{m=0}^k [a_m \cos mx + b_m \sin mx]$ dagi a_m va b_m koeffisientlarni shunday tanlaylikki, $n > 2k$ bo'lganda

$$\delta_n^2 = \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_j) - T_k(x_j)]^2$$

ifoda eng kichik qiymatga erishsin.

Odatdagidek, δ_n^2 dan barcha a_l va b_l lar bo'yicha hosila olib, ularni nolga tenglashtirsak, quydagi tenglamalarsistemi hosil bo'ladi:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{m=0}^k \left[a_m \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \cos lx_j + b_m \sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j \cos lx_j \right] &= \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cos lx_j, \quad l = 0, 1, \dots, k, \\ \sum_{m=0}^k \left[a_m \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j + b_m \sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j \sin lx_j \right] &= \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \sin lx_j, \quad l = 0, 1, \dots, k. \end{aligned} \right. \quad (2.4.9)$$

Bu sistemaning koeffisientlarini sodalashtirish maqsadida barcha $l, m = 0, 1, \dots, k$ lar uchun quydagi tengliklarni isbotlaymiz:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j = 0, \quad (2.4.10)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ n, & \text{agar } m = 0 \text{ bo'lsa;} \end{cases} \quad (2.4.11)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j = 0, \quad (2.4.12)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \cos lx_j = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq l \text{ bo'lsa,} \\ \frac{n}{2}, & \text{agar } m = l \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ n, & \text{agar } m = l = 0 \text{ bo'lsa;} \end{cases} \quad (2.4.13)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j \sin lx_j = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq l \text{ bo'lsa,} \\ \frac{n}{2}, & \text{agar } m = l \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } m = l = 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases} \quad (2.4.14)$$

Haqiqatan ham (2.4.10) – (2.4.11) tengliklar $m = 0$ bo'lganda ko'rinib turibdi, $m \neq 0$ bo'lganda ularga ishonch hosil qilish uchun quydagi

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j + i \sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j = \sum_{j=0}^{n-1} e^{imx_j} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{im \frac{2\pi j}{n}} = \frac{1 - e^{2\pi im}}{1 - e^{2\pi i \frac{m}{n}}} = 0$$

tenglikda haqiqiy va mavhum qisimlarini nolga tenglashtirish kifoyadir. (2.4.12)

tenglikni ko'rsatish uchun uning chap tomonini quydagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [\sin(l+m)x_j + \sin(l-m)x_j] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sin(l+m)x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sin(l-m)x_j \end{aligned}$$

oxirgi yig'indilar (2.4.12) – (2.4.11) tengliklarga ko'ra nolga teng. Qolgan tengliklar ham shu yo'l bilan keltirib chiqariladi.

Isbot qilingan (2.26) – (2.30) tengliklardan foydalanib, a_m va b_m lar uchun quydagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j), \\ a_m = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cos mx_j, \\ b_m = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \sin mx_j. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

bu formulalar **Bessel formulalari** deyiladi.

Agar qarayotgan $f(x)$ funksiya juft bo'lsa, u holda $b_m = 0$ ($m = \overline{1, k}$) bo'lib, aksincha u toq bo'lsa, u holda $a_m = 0$ ($m = \overline{0, k}$) bo'ladi (bu yerda $f(0) = f(\pi)$ ekanligi nazarda tutiladi).

Bunday hollarda (2.4.15) dagi noldan farqli koeffisientlarni hisoblayotganda yig'ishni $[0, 2\pi]$ oraliqni yarmi bo'yicha bajarib so'ngra natijani ikkilantirish mumkindir.

3. Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi algebraik ko'phadlar. Endi $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun

$$E_n(x) = \inf \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \quad (2.4.16)$$

tenglikni ta'minlovchi $P_n^*(x)$ algebraik ko'phadning mavjudligini ko'rib o'tamiz. Bu yerda $H_n(P)$ darajasi n dan ortmaydigan algebraik ko'phadlar to'plami.

1-teorema. $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan, ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun eng yaxshi yaqinlashuvchi $P_n^*(x)$ algebraik ko'phad mavjud.

Isbot. Ixtiyoriy $f(x) \in C[a, b]$ uchun quydagicha aniqlangan

$$\|f(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

son norma tarifidagi har uch shartni qanoatlantiradi. Shuning uchun ham

$$|\|f_1\| - \|f_2\|| \leq \|f_1 - f_2\| \quad (2.4.17)$$

tengsizlik o'rinlidir. Endi ixtiyoriy $P_n \in H_n(P)$ va $f(x) \in C[a, b]$ uchun quydagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\|P_n\| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| = F_0(a_0, a_1, \dots, a_n), \quad (2.4.18)$$

$$\|f - P_n\| = \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| = F_0(a_0, a_1, \dots, a_n). \quad (2.4.19)$$

Agar $f(x)$ ni qat'iy belgilab, $P_n(x)$ ni $H_n(P)$ to'plam bo'yicha o'zgartirsak, $(n + 1)$ o'lchovli $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ fazoda aniqlangan F_0 va F_f funksiyalarga ega

bo`lamiz. Bu funksiyalar (2.4.17) tengsizlikka ko`ra $a_0, a_1, \dots, a_n$ koefitsientlarining uzluksiz funksiyalaridir. Haqiqatdan ham, berilgan ε uchun $\delta = \varepsilon / \max(\sum_{k=0}^n |a|^{(0)k}, \sum_{k=0}^n |b|^{(0)k})$ deb olsak, u holda $|a_i - a_i^{(0)}| < \delta (i = \overline{0, n})$ bo`lganda

$$\begin{aligned} & \left| F_0(a_0, a_1, \dots, a_n) - F_0(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) \right| \leq \\ & \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k^{(0)} x^k \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=0}^n |a_k - a_k^{(0)}| |x|^k < \varepsilon \end{aligned}$$

bo`ladi, ya`ni $F_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ uzluksiz ekan. (2.4.19) dan ko`rinadiki, xuddi shuningdek,  $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$  ham uzluksizdir.  $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$  manfiy emas. Uning aniq quyi chegarasini  $m$  orqali belgilaymiz. Teoremani isbotlash uchun  $F_f$  o`zining quyi chegarasiga erishadigan shunday $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ nuqta topilishini ko`rsatishimiz kerak. Haqiqatdan ham,  $n + 1$  o`lchovli yevklid fazosida $\sum_{k=0}^n a_k^2 = 1$ birlik sferada yotuvchi nuqtalar to`plamini olaylik. Bu to`plam chegaralangan yopiq to`plamdir. Demak, unda uzluksiz musbat  $F_0$  funksiya o`zining aniq quyi chegarasi μ ga erishishi kerak. Ko`rinib turibdiki, $\mu > 0$, aks holda shunday

$$(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) \left(\sum_{k=0}^n [a_k^{(0)}]^2 = 1 \right)$$

nuqta topilar ediki, unda

$$F_0(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) = \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^n a_k^{(0)} x^k \right| = 0$$

bo`lar edi, buning bo`lishi mumkin emas, chunki $1, x, \dots, x^n$ lar chiziqli erklidir. Quyidgi

$$r = \frac{m + 1 + \|f\|}{\mu}$$

Sonni olib, butun $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ fazoni ikki qismi: R_1 va R_2 ga ajratamiz;

$\sum_{k=0}^n a_k^2 \leq r^2$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha nuqtalarni R_1 ga kiritib, qolganlarini R_2 ga kiritamiz. $F_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ funksiyaning R_2 dagi qiymatlarini qaraylik. Faraz qilaylik, $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in R_2$, u holda

$$\sum_{k=0}^n b_k^2 = \rho^2 > r^2,$$

ya'ni

$$\sum_{k=0}^n b_k^2 = \rho^{-2} > 1$$

bo'lib, quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$F_f(b_0, b_1, \dots, b_n) = \|f(x) - P_n(x)\| \geq |||P_n(x)| - \|f(x)| =$$

$$= \left| |\rho| \left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{|\rho|} x^k \right\| - \|f\| \right| \geq |\rho| \left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{|\rho|} x^k \right\| -$$

$$-\|f\| \geq |\rho|\mu - \|f\| > r\mu - \|f\| = m + 1$$

(oxirgi tenglik r ning tanlanishiga ko'ra bajariladi). Demak R_2 qismda F_f ning quyi chegarasi $m + 1$ dan kichik emas va m soni F_f funksiya qiymatlarining R_1 dagi quyi chegarasi ekan. Lekin bu to'plam chegaralangan va yopiqdir. Bu to'plamda uzluksiz bo'gan $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ funksiya o'zining aniq quyi chegarasiga erishishi kerak. Agar bu nuqtani $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ orqali belgilab olsak, u holda

$$m = F_f(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*) = \left\| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k^* x^k \right\| = \|f(x) - P_n^*(x)\|$$

bo`ladi. Shunday qilib, eng yaqinlashuvchi  $P_n^*(x)$  ko`phad mavjud.

Endi ko`phadning uzliksiz funksiya uchun eng yaxshi yaqinlashuvchi ko`phad bo`lishining zaruriy va yetarli shartlarini keltiramiz.

Valle - Pussen teoremasi. Faraz qilaylik, $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} [a, b]$ oraliqning shunday $(n + 2)$ ta nuqtasi bo`lsinki, ular uchun

$$\text{sign}[(-1)^i(f(x_i) - P_n(x_i))] = \text{const} \quad (2.4.20)$$

bo`lsin, ya`ni x_i nuqtadan navbatdagi x_{i+1} nuqtaga o`tilganda  $f(x) - P_n(x)$  miqdor o`z ishorasini o`zgartirsin. U holda

$$E_n(f) \geq m = \min_{i=1, \dots, n+2} |f(x_i) - P_n(x_i)| \quad (2.4.21)$$

Isbot. Agar $m = 0$ bo`lsa, u holda teorema tasdig`ining o`rinliliigi ko`rinib turibdi. Endi $m > 0$ deb olib, teskarisini faraz qilamiz, ya`ni eng yaxshi yaqinlashuvchi  $P_n^*(x)$  ko`phad uchun

$$\|P_n^* - f\| = E_n(f) < m \quad (2.4.22)$$

bo`lsin. Quyidagi

$$\text{sign}[P_n(x_i) - P_n^*(x_i)] = \text{sign}[(P_n(x_i) - f(x_i)) - (P_n^*(x) - f(x_i))],$$

$$|P_n(x_i) - f(x_i)| > |P_n^*(x) - f(x_i)|$$

munosabatlardan $\text{sign}[P_n(x_i) - P_n^*(x_i)] = \text{sign}[(P_n(x_i) - f(x_i))]$ tenglik kelib chiqadi. Demak, n —darajali $P_n(x) - P_n^*(x)$ ko`phad o`z ishorasini $n + 1$ marta

almashtiradi, ya'ni $P_n(x) - P_n^*(x) \equiv 0$. Bu esa (2.38) faraz qilingan shartga qarqma-qarshi natijadir. Bu qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi.

Chebisev teoremasi. $P_n^*(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda uzluksiz $f(x)$ funksiyaning eng yaxshi tekisyaqinlashuvchi ko'phadi bo'lishi uchun bu oraliqda kamida $n + 2$ ta quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ nuqtalar mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir: $\varepsilon = 1$ yoki $\varepsilon = -1$ bo'lganda barcha $i = 1, 2, \dots, n + 2$ lar uchun

$$f(x_i) - P_n^*(x_i) = \varepsilon(-1)^i \|f - P_n^*\|$$

tengliklar o'rinli bo'lsin.

Teorema. Shartlarini qanoatlantiradigan $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ nuqtalar *Chebisev al'ternansining nuqtalari* deyiladi.

Isbot. Kifoyaligi. $L = \|f - P_n^*\|$ deb belgilaylik. (2.4.19) tengsizlikka ko'ra $L = m \leq E_n(f)$, lekin $E_n(f)$ ning tarifiga ko'ra $E_n(f) \leq \|f - P_n^*\| = L$ bo'lishi kerak. Demak, $E_n(f) = L$ va $P_n^*(x)$ eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad bo'ladi.

Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $P(x) = P_n^*(x)$ eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad mavjud bo'lsin. Bu ko'phad uchun $\|P - f\| = E_n(f)$ bo'lib, hech bo'lmaganda bitta shunday x_0 nuqta mavjudki, uning uchun $|P(x_0) - f(x_0)| = E_n(f)$. Bunday nuqta eng kata og'ish nuqtasi yoki qisqacha (E) -nuqta deyiladi. $P(x)$ ko'phadning grafigi $y = f(x) + E_n(f)$ va $y = f(x) - E_n(f)$ chiziqlar orasida yotadi hamda x_0 nuqtada $P(x)$ ning grafigi yo yuqori chiziqqa yoki pastki chiziqqa urinadi. Agar $P(x)$ ning grafigi biror nuqtada yuqori chiziqqa urinsa, bunday nuqta eng katta og'ish $(+)$ nuqtasi yoki qisqacha $(+)$ nuqta va ko'phadning grafigi pastki chiziqqa urinadigan har qanday nuqta $(-)$ nuqta deyiladi.

Ko`rinib turibdiki,  $(+)$  nuqta bilan bir vaqtda  $(-)$  nuqta ham mavjud bo`lishi kerak, chunki $(+)$ nuqta yoki $(-)$ nuqta mavjud bo`lmasa, u holda biror kichik musbat sonni  $P(x)$  dan ayirib yoki unga qo`shib, shunday ko`phad hosil qilish mumkinki, uning grafigi  $y = f(x)$  chiziq atrofidagi torroq yo`lakda joylashadi. Bu esa $P(x)$ ning eng yaxshi yaqinlashuvchi ko`phadligini inkor qiladi.

Endi $[a, b]$ oraliqni

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = b$$

nuqtalar bilan shunday kichik qisimlarga bo'lamizki, bu qisimlarning har birida $P(x) - f(x)$ ning tebranishi $\frac{1}{2} E_n(f)$ dan kichik bo'lsin. Hech bo'lmaganda bitta (E) nuqtaga ega bo'lgan har bir $(E) t_k \leq x \leq t_{k+1}$ qismini (E) segment deb ataymiz. Har bir (E) segmentda yo faqat $(+)$ nuqta yotadi va bu yerda $P(x) - f(x)$ musbat, bunday segmentni $(+)$ segment deyimiz yoki faqat $(-)$ nuqta yotadi va bu yerda $P(x) - f(x)$ manfiy, bunday segmentni $(-)$ segment deyimiz. (E) segmentlarni chapdan o'ngga qarab nomerlab chiqamiz

$$d_1, d_2, \dots, d_N,$$

keyin $P(x) - f(x)$ ayirma eng kamida necha marta o`z ishorasini almashtirishi mumkinligini aniqlash uchun (E) segmentlarni grupalarga quydagicha ajratamiz. Aniqlik uchun d_1 ni $(+)$ segment deb olamiz:

$$\begin{array}{ll}
 d_1, d_2, \dots, d_{k_1} & [(+)\textit{segmentlar}], \\
 d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_{k_2} & [(-)\textit{segmentlar}], \\
 \dots \dots \dots & \dots \dots \dots
 \end{array} \tag{2.4.23}$$

$$d_{k_{m-1}+1}, d_{k_{m-1}+2}, \dots, d_{k_m} \quad [(-1)^{m-1} \text{segmentlar}].$$

bu yerda m ta gruppaga ko'rsatildi, bularning har biri kamida bitta (E) segmentga ega. Agar $m \geq n + 2$ bo'lsa, u holda teoremaning tasdig'i kelib chiqadi.

Teskarisi $m < n + 2$ ni faraz qilaylik va bunday faraz $P(x)$ ning eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad bo'lishligiga zid ekanligini ko'rsatamiz. Ko'rinib turibdiki, d_{k_j} va $d_{k_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \dots, m - 1$) segmentlarda $P(x) - f(x)$ qarama-qarshi ishoraga ega, shuning uchun ham bu segmentlar umumiy chetki nuqtalarga ega emas va ular o'zaro (E) segment bo'lmagan segmentlar bilan ajralgan bo'lishi kerak. Shuning uchun ham z_j ($1, 2, \dots, m - 1$) nuqtalarni shunday tanlash mumkinki, ular, d_{k_j} dan o'ngda va $d_{k_{j+1}}$ dan chapda yotadi.

Quyidagi

$$v(x) = (z_1 - x)(z_2 - x) \dots (z_{m-1} - x)$$

$m - 1 (\leq n)$ – darajali ko'phadni tuzaylik. (2.4.23) segmentlarning birinchi gruppasida $v(x)$ hamda $P(x) - f(x)$ ayirma musbat, ikkinchi gruppada $v(x)$ hamda $P(x) - f(x)$ ayirma manfiy va hokazo. Barcha (E) segmentlarda $\text{sign } v(x) = \text{sign}(P(x) - f(x))$, (E) segment bo'lmagan barcha segmentlarda $|P(x) - f(x)| < E_n(f)$. Aytaylik, bu segmentlarda $|P(x) - f(x)| \leq E' < E_n(f)$ bo'lsin.

Endi $\max_{a \leq x \leq b} |v(x)| = \rho$ deb olib, λ musbat sonini shunday tanlab olamizki,

$$l_p < E_n(f) - E' \text{ va } \lambda \rho < \frac{1}{2} E_n(f)$$

tengsizliklar bajarilsin. Darajasi n dan ortmaydigan

$$Q(x) = P(x) - \lambda v(x)$$

ko`phadning  $f(x)$  dan og`ishi $E_n(f)$ dan kichik ekanligini ko`rsatamiz.

Haqiqatdan ham, har bir (E) segment bo`lmagan segmentlarda

$$|Q(x) - f(x)| \leq |P(x) - f(x)| + \lambda|v(x)| \leq E' + \lambda\rho <$$

$$< E' + (E_n(f) - E') = E_n(f)$$

Har bir (E) segmentda $\text{sign}(P(x) - f(x)) = \text{sign}v(x), v(x) \neq 0$ va

$$|P(x) - f(x)| > \frac{1}{2}E_n(f), |\lambda v(x)| < \frac{1}{2}E_n(f) \text{ bo`lgani uchun}$$

$$|Q(x) - f(x)| = |P(x) - \lambda v(x) - f(x)| =$$

$$= |P(x) - f(x) - \lambda v(x)| \leq E_n(f) - \lambda|v(x)| < E_n(f).$$

Shunday qilib, $P(x)$ eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko`phad emas ekan. Bu qarama-qarshilik  $m \geq n + 2$  ekanini va yana shu bilan teoremaning o`rinli ekanini isbotlaydi.

Yagonalik teoremasi. Uzluksiz funksiya uchun darajasi n dan ortmaydigan eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko`phadlar ikkita  $P_n(x)$  va  $Q_n(x)$  bo`lsin:

$$Q_n(x) \neq P_n(x), \|Q_n - f\| = \|P_n - f\| = E_n(f).$$

Bunda

$$\left\| f - \frac{P_n + Q_n}{2} \right\| \leq \left\| \frac{P_n - f}{2} \right\| + \left\| \frac{Q_n - f}{2} \right\| = E_n(f).$$

Demak, $\frac{1}{2}(P_n(x) + Q_n(x))$ ko`phad ham eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi

ko`phad ekan. Faraz qilaylik  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$  shu ko`phadga mos keluvchi

Chebichev al'ternansining nuqtalari bo`lsin. U holda

$$\left| \frac{1}{2}[P_n(x_i) + Q_n(x_i)] - f(x_i) \right| = E_n(f) \quad (i = 1, 2, \dots, n + 2)$$

yoki

$$|[P_n(x_i) - f(x_i)] + [Q_n(x_i) - f(x_i)]| = 2E_n(f) \quad (2.4.24)$$

lekin

$$|P_n(x_i) - f(x_i)| \leq E_n(f), |Q_n(x_i) - f(x_i)| \leq E_n(f). \quad (2.4.25)$$

(2.4.24) tenglik faqat

$$P_n(x_i) - f(x_i) = E_n(f),$$

$$Q_n(x_i) - f(x_i) = E_n(f)$$

boʻlgan holdagina bajariladi. Bundan, $n + 2$ nuqtada ikkita n –darajali $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ koʻphadlar qiymatlarining oʻzaro ustma – ust tushishlari kelib chiqadi, bu esa ularning aynan teng ekanliklarini bildiradi.

Lagranj interpolasyon formulasining qoldiq hadini minimallashtirish maqsadida interpolyasiya tugunlari sifatida $(n + 1)$ –tartibli $\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x)$ koʻphadning

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi(2k-1)}{2(n+1)} \quad (k = \overline{1, n+1})$$

ildizlarini olib, quyidagi

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$$

kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $P_n^*(x)$ koʻphad $f(x)$ funksiya uchun eng yaxshi, tekis yaqinlashuvchi koʻphad boʻlsin. Chebishev teoremasiga koʻra $f(x) - P_n^*(x)$ ayirma $(n + 1)$ ta $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ nuqtalarda nolga aylanadi. Shuning uchun ham

$P_n^*(x)$ ni tugunlari $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ lardan iborat bo'lgan interpoliyasion ko'phad qarash mumkin.

$$\det(A^{(n-k)} - \lambda E) = \det(B^{(n-k)} - \lambda E_{k-1}) \det(P^{(n-k)} - \lambda E_{n-k+1})$$

formulaga ko'ra interpoliyasiya xatosri uchun

$$f(x) - P_n^*(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!},$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n+1}), \quad \xi \in [a, b]$$

formula o'rinlidir. Faraz qilaylik,

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)| = \omega_{n+1}(x_0)$$

bo'lsin. U holda

$$E_n(f) = \|f - P_n^*\| \geq |f(x_0) - P_n^*(x_0)| =$$

$$= |f^{(n+1)}(\xi(x_0))| \frac{|\omega_n(x_0)|}{(n+1)!} \geq \min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \max_{a \leq x \leq b} \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}.$$

Ikkinchi tomondan, $\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}$ noldan eng kam og'uvchi ko'phad bo'lganligi uchun

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)| \geq \max_{a \leq x \leq b} |\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x)| \geq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Bundan quydagi bahoga ega bo'lamiz:

$$E_n(f) \geq \min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \quad (2.4.26)$$

Shunday qilib, agar $f^{(n+1)}(x)$ o'z ishorasini saqlasa va sekin o'zgarsa u holda eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phadning xatosi bilan Chebishev

ko'phadlarining nollari bo'yicha tuzilgan interpoliyasion ko'phad xatosi orasidagi faqat aytarli katta bo'lmaydi. Aytilganlarni qutidagi masalaga qo'llash mumkin.

Eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phadni boshqa ko'rinishda ham tasvirlash mumkin:

$$P_n^*(x) = Q_{n+1}(x) - a_{n+1}T_{n+1}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \quad (2.4.27)$$

Haqiqatan ham, o'ng tomondagi ifoda n –darajali ko'phaddir, chunki x^{n+1} oldidagi koeffisient nolga teng. (2.4.27) dan ko'ramizki, $|Q_{n+1}(x) - P_n^*(x)|$ maksimumga erishadigan ushbu

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi j}{n+1} \quad (j = \overline{0, n+1})$$

nuqtalar $[a, b]$ oralig'ida Chebishev al'ternansining nuqtalarni tashkil etadi.

Chebishevning $T_n(x)$ ko'phadlari yaqinlashuvchi ko'phadlar darajasini pasaytirish uchun ham qo'llaniladi. Buni quyidagi misolda ko'raylik. faraz qilaylik, $f(x) = \cos x$ ni $[-1, 1]$ oraliqda oltinchi darajali ko'phad bilan yaqinlashtirish talab qilinsin. Bu funksiyaning Teylor qatorida 6-darajali hadini saqlasa:

$$Q_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

u holda

$$\|f - Q_6\| < \frac{1}{8!} < 25 \cdot 10^{-6}$$

va

$$\|f - Q_6\| \geq |f(1) - Q_6(1)| > \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} > 24 \cdot 10^{-6}.$$

Endi yaqinlashuvchi ko`phad sifatida, $\cos x$ ning Teylar qatorida quyidagi

$$Q_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

Qismaniy yig`indi olib, bu yerda  $\tilde{T}_8(x) = 2^{-7}T_8(x)$  Chebishev ko`phadi yordamida x^8 ni yo`qotamiz, natijada oltinchi darajali ushbu

$$\begin{aligned} P_6(x) &= Q_8(x) - \frac{1}{8!}\tilde{T}_8(x) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^7 \cdot 8!}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4! \cdot 8!}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{5}{4! \cdot 8!}\right)x^4 - \left(\frac{1}{4!} - \frac{2}{4! \cdot 8!}\right)x^6 \end{aligned}$$

ko`phadga ega bo`lamiz. Shu bilan birga

$$\|f - P_6\| \leq \|f - Q_8\| + \frac{1}{8!}\|\tilde{T}_8\| < \frac{1}{10!} + \frac{1}{2^7 8!} < 47 \cdot 10^{-8}.$$

Shunday qilib, $P_6(x)$ ko`phad $f(x) = \cos x$ funksiya uchun oltinchi darajali Teylor qatoriga nisbatan 50 marta yaxshiroq yaqinlashishni beradi.

Bu bobda funktsiyani yaqinlashtirish masalasida Oraliqda algebraik ko`phadlar orqali o`rta kvadratik yaqinlashish, ortogonal ko`phadlar sistemasi, Eng ko`p qo`llaniladigan ortogonal ko`phadlar sistemalari: Yakobi ko`phadlari chebishevning birinchi va ikkinchi tur ko`phadlari. Lager ko`phadlari. Ermit ko`phadlari, Trigonometrik ko`phadlar bilan o`rta kvadratik ma`noda yaqinlashish, Jadval bilan berilgan funktsiyalarni o`rta kvadratik ma`noda yaqinlashtirish, Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi algebraik ko`phadlar masalalari o`rganildi.

XOTIMA

Aksariyat hisoblash usullari masalaning qo'yilishida qatnashadigan funksiyalarni unga biror, muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaraq bo'lgan funksiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan. Mazkur malakaviy bitiruv ishida shu masala hal etildi. Funksiyani interpolyasiyalash masalasida Logranj va Nyuton interpolyasion formulalari, Splayn yaqinlashtirish masalalari o'rganildi. Funksiyani yaqinlashtirish masalasida Oraliqda algebraik ko'phadlar orqali o'rta kvadratik yaqinlashish, Ortogonal ko'phadlar sistemasi, eng ko'p qo'llaniladigan ortogonal ko'phadlar sistemalari: Yakobi ko'phadlari. Chebishevning birinchi va ikkinchi tur ko'phadlari. Lager ko'phadlari. Ermit ko'phadlari, Trigonometrik ko'phadlar bilan o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashish, Jadval bilan berilgan funksiyalarni o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish, Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi algebraik ko'phadlar masalalari o'rganildi. Bu usullarning barchasi uchun Mathcad muhitida natijalar olindi.

ADABIYOTLAR

1. Karimov I. A. “Yuksak ma`naviyat –yengilmas kuch”: -T: Ma`naviyat, 2008y. -176b.
2. Исроилов М.И. «Ҳисоблаш методлари»: -Т:Ўқитувчи, 2000 й. 258-277 bet.
3. Самарский А.А. «Введение в численные методы»: –М: Наука, 1987 й.
4. Алоев Р.Д. “Сонли усуллар фанидан маърузалар матни”: I қисм, Бухоро Давлат Университети, 2005й.
5. Алоев Р.Д. “Сонли усуллар фанидан маърузалар матни”: II қисм, Бухоро Давлат Ууниверситети , 2005й.
6. Абдухамидов А., Худойназаров С. «Ҳисоблаш методлари»: -Т: Ўзбекистон, 1995 й.
7. В.Копченова, И.А.Марон. «Вычислительная математика в примерах и задачах»: -М: Наука, 1972 й.
8. Бахвалов Н.С. «Численные методы»: -М: Наука.1987 й.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. «Численные методы»: –М: Наука. 1989 й.
10. Б.П. Демидович, И.А. Марсен, Э.З. Шувалова “Численные методы анализа”: -М: Наука, 1970й. 12-78 bet.
11. Назарова Л.И, С.Б.Дарибазарон. “Лабораторные работы по численным методам для студентов специальности прикладная математика”. “ВСГТУ”. 2005й.
12. Ч.С. Березен, Н.П. Жидков “Методы вычислений”: –М: Наука, 1987й. 322-332 bet.
