

**QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
ALGEBRA VA GEOMETRIYA KAFEDRASI**

MATEMATIKA FANIDAN

MA'RUZALAR MATNI

Bilim sohasi: 100000 - Gumanitar soha

Ta'lim sohasi: 110000 - Pedagogika

Ta'lim yo'nalishi: 5110700 – Informatika o'qitish metodikasi

QARSHI 2019

1-MA'RUZA

Vektorlar. Vektorlar ustida amallar. Vektorning koordinatalari va nuqtaning koordinatalari

Reja:

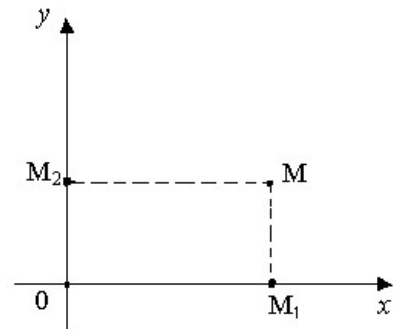
1. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi
2. Fazodagi nuqtaning koordinatalari.
3. Skalyar va vektor kattaliklar
4. Vektor tushunchasi
5. Vektorlar ustida chiziqli amallar
6. Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi
7. Vektorning o'qqa proeksiyasi va uning xossalari
8. Vektorni koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari bo'yicha yoyish

1. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi

Ma'lumki, to'g'ri chiziqli nuqtalarining o'rni bitta son ya'ni uning koordinatasi bilan to'la aniqlanadi. Tekislik nuqtalarining o'rni bir juft sonlar bilan aniqlanishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik tekislikda 0 nuqtada kesishuvchi, bir xil o'lchov birligiga ega va o'zaro perpendikulyar Ox , Oy o'qlar berilgan bo'lsin (ular tekislikda dekart sistemasini tashkil etadi). Ox va Oy o'qlar joylashgan tekislik koordinatalar tekisligi deb aytiladi va Oxy kabi belgilanadi (1-rasm).

M nuqta shu Oxy tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

M nuqtadan Ox va Oy o'qlariga perpendikulyar o'tkazib, ularning asoslarini M_1 va M_2 lar orqali belgilaymiz. M_1 nuqtaning Ox o'qdagi koordinatasi x M nuqtaning **abssissasi**, M_2 nuqtaning Oy o'qdagi koordinatasi y M nuqtaning **ordinatasi** deb aytiladi. x , y lar M nuqtaning koordinatalari (dekart koordinatalari) deb aytiladi.

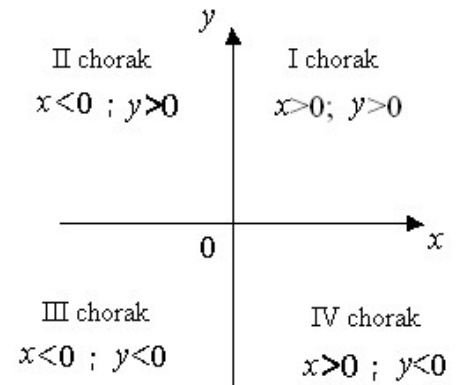


1-rasm.

Shunday qilib, Oxy koordinata tekisligining istalgan M nuqtasiga yagona tartiblangan sonlar jufti (x,y) —uning koordinatalari mos keladi.

Aksincha, har qanday (x,y) juftlik Oxy tekislikdagi yagona M nuqtani aniqlaydi. Demak, tartiblangan (x,y) sonlar jufti bilan Oxy koordinata tekisligining nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Ox o'q **abssissalar** o'qi, Oy o'q esa **ordinatalar** o'qi, ular birgalikda **koordinata o'qlari** deyiladi. O'qlarning kesishish nuqtasi 0 **koordinatalar boshi** deyiladi. Koordinata o'qlari koordinata tekisligini **choraklar** deb ataluvchi to'rtta



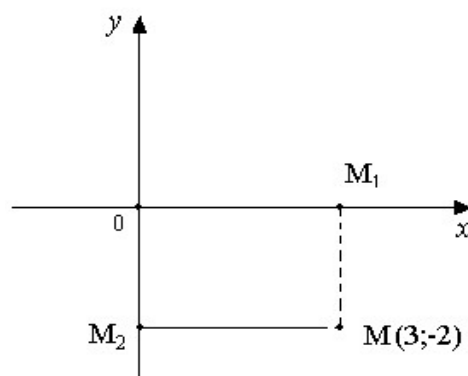
2-rasm.

qismlarga ajratadi (2-rasm). x abssissaga va y ordinataga ega bo'lgan M nuqtani $M(x,y)$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.

1-misol. Tekislikda $M(3; -2)$ nuqta yasalsin (3-rasm).

Yechish. Absissalar o'qi Ox da koordinatasi 3 ga teng M_1 nuqtani hamda ordinatalar o'qi Oy da koordinatasi -2 ga teng bo'lgan M_2 nuqtalarni olamiz. M_1 nuqtadan Ox o'qqa perpendikulyar, M_2 nuqtadan Oy o'qqa perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz.

To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M izlanayotgan nuqta bo'ladi.



3-rasm.

2-misol. Berilgan M nuqtaga ko'ra uning koordinatalari topilsin.

Yechish. M nuqtadan Ox va Oy o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazib, ularning asoslarini mos ravishda M_1 va M_2 lar orqali belgilaymiz. M_1 nuqtaning Ox dagi koordinatasi x M nuqtaning absissasi, M_2 nuqtaning Oy o'qdagi koordinatasi M nuqtaning ordinatasi bo'ladi.

2. Fazodagi nuqtaning koordinatalari.

Fazodagi nuqtaning holati uchta son yordamida aniqlanishini ko'rsatamiz.

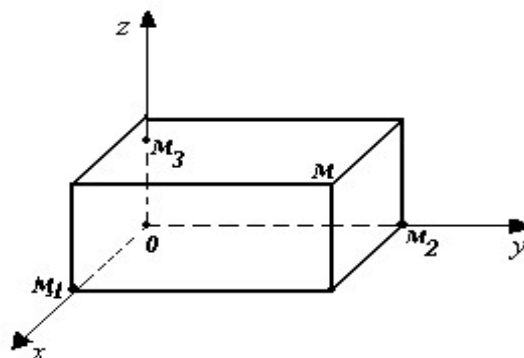
Fazoda bir xil o'lchov (masshtab) birligiga ega O nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikulyar uchta Ox , Oy , Oz o'qlarni olamiz. Bu o'qlarni **koordinata o'qlari** deb atab ularni kesishish nuqtasini **koordinatalar bosh** deb ataymiz. Bu o'qlar joylashgan fazoni $Oxyz$ orqali belgilaymiz.

Koordinata o'qlari Ox , Oy , Oz fazoda Dekartning to'g'ri

burchakli koordinatalar sistemasini tashkil etadi. M $Oxyz$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

Undan koordinata o'qlariga perpendikulyar uchta tekislik o'tkazamiz.

Tekisliklarning Ox , Oy va Oz o'qlar bilan kesishish nuqtalari M_1, M_2 va M_3 lar M nuqtaning mos o'qlardagi **proeksiyalari** deyiladi (1-rasm). M_1 nuqta Ox o'qda x koordinataga, M_2 nuqta Oy o'qda y koordinataga va M_3 nuqta Oz o'qda z koordinataga ega bo'lsin. x , y va z sonlar M nuqtaning fazodagi **to'g'ri burchakli (yoki dekart) koordinatalari** deyiladi va $M(x, y, z)$



4-rasm.

ko'rinishda yoziladi. Bunda x M nuqtaning **absissasi**, y **ordinatasi**, z esa **applikatasi** deyiladi.

Shunday qilib, fazoning ixtiyoriy nuqtasi yagona tartiblangan sonlar uchligi shu nuqtaning koordinatalari x , y va z larni aniqlaydi.

Aksincha $Oxyz$ fazodagi M nuqtaning holati uning uchta dekart koordinatalari yordamida to'liq aniqlanadi. Shunday qilib tartiblangan sonlar uchligi (x, y, z) bilan $Oxyz$ fazoning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

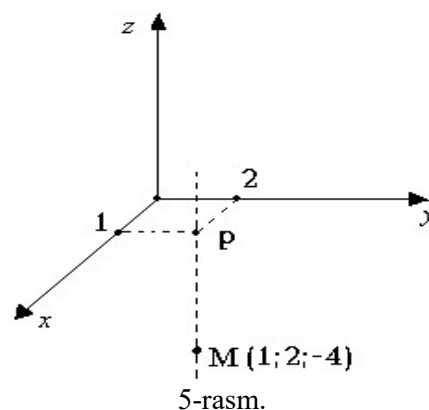
Agar har ikkita koordinata o'qlari orqali tekisliklar o'tkazsak, o'zaro perpendikulyar bo'lgan **koordinata tekisliklari** deb ataluvchi uchta Oxy , Oyz , va Oxz tekisliklar hosil bo'ladi. Bu tekisliklar butun $Oxyz$ fazoni **oktantlar** deb ataluvchi 8 ta qismga ajratadi.

Shunday qilib, sonlar o'qining nuqtasi bitta haqiqiy son x yordamida, tekislik nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rni ikkita tartiblangan sonlar juftligi (x, y) yordamida, fazo nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan holati uchta tartiblangan sonlar uchligi (x, y, z) yordamida to'liq aniqlanar ekan. Nuqtaning holatini sonlar yordamida aniqlash usuli **koordinatalar usuli** deb ataladi.

Bu usulning asoschisi fransuz matematigi va filosofi Rene Dekartdir (1596-1650). U geometrik masalalarni algebra usullaridan foydalanib yechishni taklif etish bilan birga Oliy matematikaning maxsus bo'limi, **analitik geometriyani** yuzaga kelishiga sababchi bo'ldi.

3-misol. $M(1;2;-4)$ nuqta yasalsin.

Yechish. Ox o'qda koordinatasi 1 ga teng nuqtani olib undan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Shuningdek Oy o'qda koordinatasi 2 ga teng nuqtani olib undan Ox ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini P orqali belgilaymiz. P orqali Oz o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazib undan pastga tomon 4 birlikka teng kesma ajratamiz. Ana shu kesmaning oxiri $M(1; 2; -4)$ nuqtani aniqlaydi(5-rasm).



5-rasm.

3.Skalyar va vektor kattaliklar

O'zining son qiymati bilan to'liq aniqlanadigan miqdorlar **skalyar** kattaliklar deyiladi.

Uzunlik, yuza, hajm va harorat skalyar kattalikga misol bo'la oladi. Shunday kattaliklar ham uchraydiki, ularni faqatgina son qiymati orqali to'liq aniqlab bo'lmaydi. Masalan: Qarshi shahridan 70km/soat tezlik bilan chiqqan avtomobil bir soatdan keyin qayerda bo'ladi? degan savolga birgina 70 km/soat yordamida javob berib bo'lmaydi. Agarda masalaning shartiga yo'nalish tayinlansa, uni hal etish mumkin. Ya'ni Qarshi shahridan 70 km/soat tezlik bilan Qarshi-Samarqand yo'nalishi bo'yicha harakatlanayotgan avtomobil bir soatdan keyin qayerda bo'ladi? deyilsa, bu savolga to'liq javob berish mumkin.

Son qiymatidan tashqari ma'lum yo'nalishga ega bo'lgan kattaliklar **vektor kattaliklar** deyiladi.

Harakat tezligi, tezlanish, kuch, magnit va elektr maydonining kuchlanganligi kabi kattaliklar vektor kattalikga misol bo'ladi.

4. Vektor tushunchasi

Vektor kattalik (miqdor) lar vektor ko'rinishida tasvirlanadi.

1-ta'rif. Yo'nalgan kesma **vektor** deyiladi.

Boshlanish (bosh) nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo'lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ kabi yozish qabul qilingan. Ba'zan vektorni bitta harf bilan $\vec{a}$ (yoki $\vec{a}$) kabi belgilanadi. A va B nuqtalar orasidagi masofa $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi deyiladi.

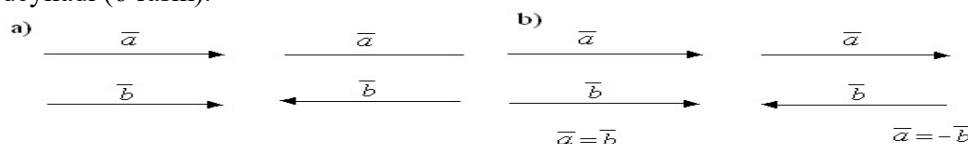
$\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini uning **moduli** ham deb yuritiladi va $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi oxiri bilan ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi.

Demak, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ –nol vektor. Nol vektorning moduli 0 ga teng bo'lib, uning yo'nalishi aniq emas.

$\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor- $\vec{a}$ kabi belgilanadi. Uzunligi 1 ga teng vektor birlik vektor deyiladi va $\vec{a}$ vektorga mos (u bilan bir o'qda yotgan hamda bir xil yo'nalishga ega) birlik vektor $\vec{a}^0$ kabi belgilanadi.

2-ta'rif. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar **kollinear** vektorlar deyiladi (6-rasm).



6-rasm.

3-ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar **komplanar vektorlar** deb aytiladi.

4-ta'rif. Kollinear $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalgan hamda bir xil uzunlikka ega bo'lsa, teng deyiladi ($\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi) (6-rasm).

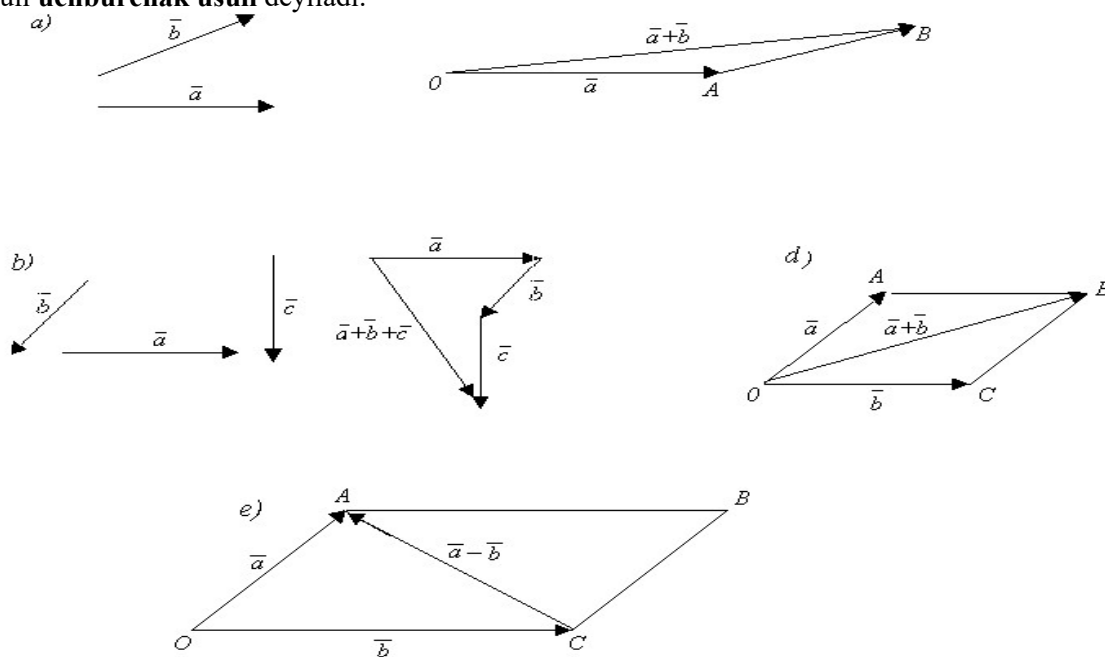
Ta'rifga binoan berilgan vektorni o'z-o'ziga parallel ko'chirish natijasida unga teng vektor hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda, vektorni uzunligi va yo'nalishini o'zgartirmagan holda uni fazoning bir nuqtasidan boshqa bir nuqtasiga ko'chirish mumkin ekan. Bunday vektorlar **erkin** vektorlar deyiladi. Biz faqatgina erkin vektorlar bilan ish ko'ramiz.

5. Vektorlar ustida chiziqli amallar

Matematikada vektor tushunchasi son tushunchasiga nisbatan murakkab tushuncha. Sonlar ustida bajariladigan barcha amallarni vektorlar ustida bajarib bo'lmaydi. Masalan ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish kabi amallarni vektorlar ustida bajarish mumkin emas.

Vektorlar ustida **chiziqli amallar** deb, vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorlarni songa ko'paytirish amallariga aytiladi.

1. **Vektorlarni qo'shish.** Noldan farqli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni olamiz. Ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\vec{OA} = \vec{a}$ vektorni yasaymiz, so'ngra A nuqtaga $\vec{AB} = \vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorning boshini ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\vec{OB}$ vektorga aytiladi. (7-rasm). Vektorlarni bunday qo'shish usuli **uchburchak usuli** deyiladi.



7-rasm

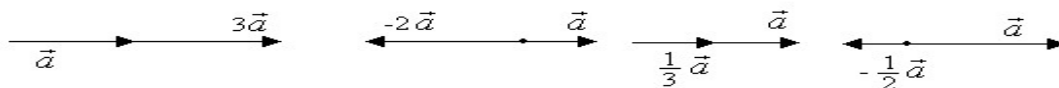
Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorni oxiriga ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorni boshini qo'yib, so'ngra ikkinchi qo'shiluvchi vektorning oxiriga uchinchi $\vec{c}$ qo'shiluvchi vektorning boshini qo'yib birinchi $\vec{a}$ vektorning boshi bilan uchinchi $\vec{c}$ vektorning oxirini tutashtirish natijasida hosil bo'lgan vektorga aytiladi (7^b-rasm).

Vektorlarni bu xilda qo'shish qo'shiluvchilar soni har qanday bo'lganda ham yaroqlidir.

Endi vektorlarni qo'shishning boshqa bir usuli bilan tanishamiz. $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OC} = \vec{b}$ vektorlarni yig'indisini topish uchun bu vektorlarni umumiy nuqtada joylashtirib OABC parallelogramm yasaymiz. Parallelogrammning O uchidan o'tkazilgan diagonal $\vec{OB}$ vektor, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni yig'indisini ifodalaydi. Vektorlarni bunday qo'shish usuli **parallelogramm** qoidasi deb ataladi (7^d-rasm).

2. **Vektorlarni ayirish.** $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni ayirmasi $\vec{a} - \vec{b}$ deb $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorni beradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi. Demak $\vec{a} - \vec{b}$ ayirmani topish uchun $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorni yig'indisini topish lozim ekan. $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OC} = \vec{b}$ vektorlarni ayirmasini topish uchun bu vektorlarni umumiy nuqtada joylashtirib, yasalgan OABC parallelogrammning C uchidan o'tkazilgan diagonal $\vec{CA}$ vektorni topish lozim. Ayirma vektorda yo'nalish «ayriluvchidan» dan «kamayuvchi» ga qarab yo'naladi (7^e-rasm).

3. **Vektorni songa ko'paytirish.** Noldan farqli $\vec{a}$ vektorning $m \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|m| \cdot |\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, $m > 0$, bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan, $m < 0$ bo'lganda esa unga qarama-qarshi yo'nalgan hamda $m \vec{a}$ bilan belgilanadigan vektorga aytiladi (8-rasm).



8- rasm.

Izoh. 1. Istalgan $\vec{a}$ vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ bilan unga mos $\vec{a}^0$ birlik vektorni ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin, ya'ni $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$.

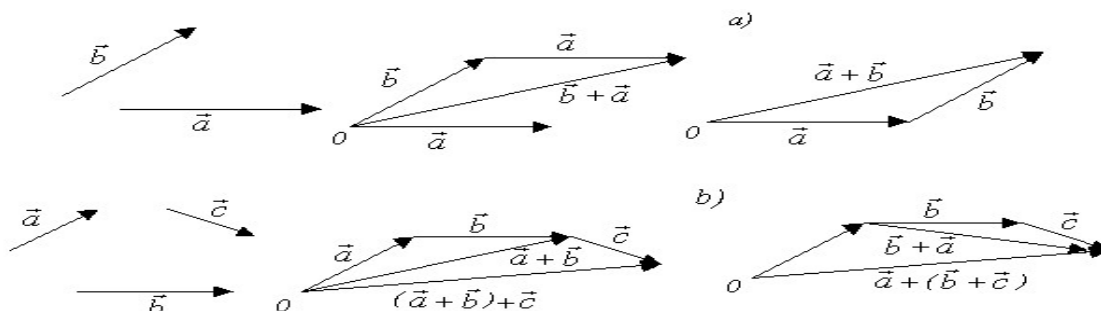
2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) kollinear vektorlar uchun shunday yagona λ son mavjud bo'lib $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, $\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^0$ vektorlarni kollinearligidan $\vec{a}^0 = \pm \vec{b}^0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $\vec{a} = \pm |\vec{a}| \vec{b}^0 = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$ yoki $\pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \lambda$ belgilashni kiritsak $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorni songa ko'paytirish natijasida vektor hosil bo'lar ekan.

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (9^a -chizma);
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (9^b -chizma);
3. $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.
4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
5. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
6. $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$;
7. $(m+n) \cdot \vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, m va n haqiqiy sonlar;
8. $(m \cdot n) \cdot \vec{a} = m \cdot (n\vec{a}) = n(m\vec{a})$.



9-rasm.

6. Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi

Fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Fazoda ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OB} = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.

5-tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust tushishi uchun burilishi lozim bo'lgan φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) burchakka aytiladi.

$\vec{a}$ vektor bilan ℓ o'q orasidagi burchak deganda $\vec{a}$ vektor bilan ℓ o'qda joylashgan va u bilan bir xil yo'nalgan $\vec{\ell}^0$ birlik vektor orasidagi burchak tushiniladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $(\vec{a} \wedge \vec{b})$ kabi belgilanadi.

7. Vektorning o'qqa proeksiyasi va uning xossalari

Fazoda ℓ o'q va $\vec{AB}$ vektor berilgan bo'lsin. A va B nuqtalardan bu o'qqa perpendikulyar tushirib perpendikulyarning asoslarini mos ravishda A_1 va B_1 orqali belgilaymiz. $\vec{A_1B_1}$ vektor $\vec{AB}$

vektorning ℓ o'qdagi **tashkil etuvchisi** yoki **komponenti** deb ataladi (9-rasm). ℓ_1 va ℓ_2 sonlar A_1 va B_1 nuqtalarning ℓ o'qdagi koordinatalari bo'lsin.

6-ta'rif. $\ell_2 - \ell_1$ ayirma $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi deb ataladi.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi $pr_\ell \overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi deb vektorning boshi A va oxiri B nuqtalarning ℓ o'qdagi proeksiyalari A_1 va B_1 nuqtalar orasidagi masafoga aytilar ekan. Bu masofa vektor bilan o'qning yo'nalishi mos tushganda «+» ishora bilan aks holda «-» ishora bilan olinadi. Proeksiyani ta'rifidan $\overrightarrow{AB}$ vektor o'qqa perpendikulyar bo'lganda uning o'qqa proeksiyasi nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. (10-rasm)

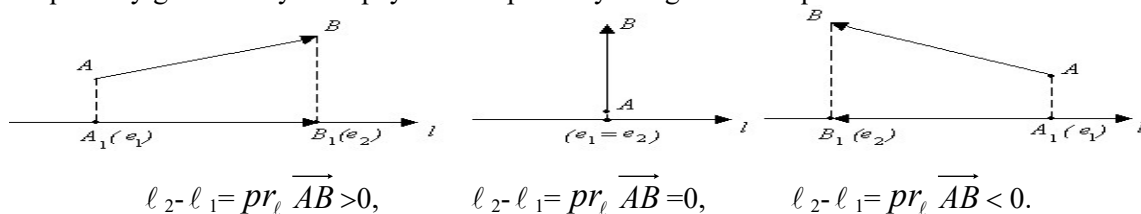
Proeksiyaning asosiy xossalari keltiramiz:

1. $\vec{a}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi $\vec{a}$ vektor uzunligini bu vektor bilan o'q orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni $pr_\ell \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$. Bu 10^a-chizmadan ko'rinib turibdi.
2. Ikki vektor yig'indisining o'qqa proeksiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qqa proeksiyalari yig'indisiga teng, yani $pr_\ell (\vec{a} + \vec{b}) = pr_\ell \vec{a} + pr_\ell \vec{b}$.

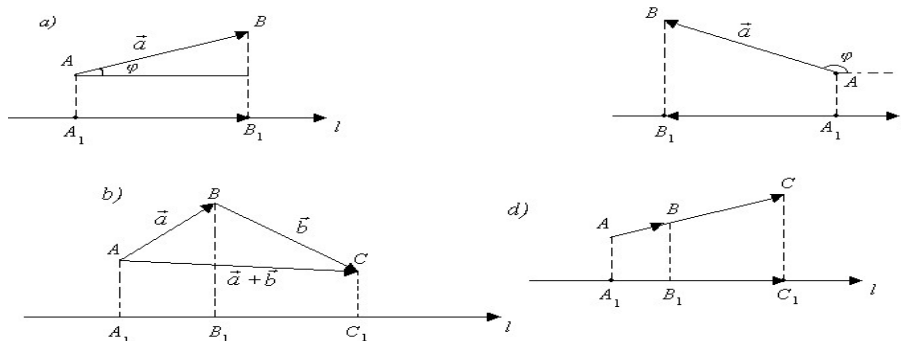
Bu 10^b-chizmadan ko'rinib turibdi.

3. Vektor $\vec{a}$ ni λ songa ko'paytirganda uning o'qqa proeksiyasi ham shu songa ko'payadi, ya'ni $pr_\ell (\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot pr_\ell \vec{a}$ (10^d-rasm).

Boshqacha aytganda skalyar ko'paytuvchini proeksiya belgisidan chiqarish mumkin ekan.



10-rasm



11-rasm.

Endi $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qdagi tashkil etuvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorni proeksiya orqali ifodalaymiz. O'x ℓ^0 vektor ℓ o'qqa mos birlik vektor bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{A_1B_1} = pr_\ell \overrightarrow{AB} \cdot \ell^0 \quad (1.1)$$

bo'lishi ravshan.

Izoh. Vektorning boshqa vektor yo'nalishiga proeksiyasi ham xuddi vektorning o'qqa proeksiyasi kabi aniqlanadi.

8. Vektorni koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari bo'yicha yoyish

Oxyz fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik. O'qlarning har birida boshi koordinatalar boshida bo'lib yo'nalishi o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushadigan birlik vektorlarni olamiz va ularni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar orqali belgilaymiz. Bu yerdagi $\vec{i}$ 0x o'qqa mos, $\vec{j}$ 0y o'qqa

mos va $\vec{k}$ 0z o'qqa mos birlik vektorlar. Demak $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar o'zaro perpendikulyar va nokomplanar.

7-ta'rif. Uchta $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar sistemasi dekartning to'g'ri burchakli bazisi yoki ortlar deb ataladi.

$\vec{a}$ fazodagi ixtiyoriy vektor bo'lsin. Shu vektorni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar orqali ifodalash mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa u ifodani qanday topish mumkin? degan savollarga javob topishga harakat qilamiz.

$\vec{a}$ vektorni o'z-o'ziga parallel ko'chirib uning boshini koordinatalar boshiga joylashtiramiz. $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning oxiri M nuqtadan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o'tkazamiz.

Natijada diagonallaridan biri $\overrightarrow{OM}$ vektordan iborat parallelepipedga ega bo'lamiz. 12-rasmdan

vektorlarni qo'shish qoidasiga binoan $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}$ ga ega bo'lamiz. $\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_3}$ bo'lgani uchun $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$ (1.2) bo'ladi. $\overrightarrow{OM_1}$,

$\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_3}$ vektorlar mos ravishda $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorni 0x, 0y va 0z o'qlardagi tashkil etuvchilari bo'lganligi uchun ular (1.1) formulaga ko'ra

$$\overrightarrow{OM_1} = pr_{0x} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = pr_{0y} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = pr_{0z} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} \quad (1.3)$$

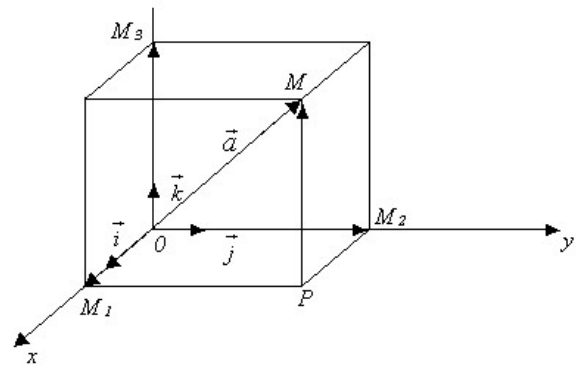
bo'ladi.

$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning 0x, 0y, 0z o'qlardagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y, a_z lar orqali belgilasak (1.2) va (1.3) formulalarga asoslanib

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (1.4)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib fazodagi istalgan $\vec{a}$ vektorni yagona usul bilan dekart bazisi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orqali (1.4) ko'rinishda ifodalash mumkin ekan. (1.4) $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalar o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali yoyilmasidir. Bu yoyilmani har xil qo'llanmalarda har xil nomlar bilan yuritiladi.



12- rasm

Masalan uni vektorni ortlar, dekart bazisi, vektorni proeksiyalari va koordinatalari orqali yoyilmasi deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik vektorning oxiri M nuqta x, y, z koordinatalarga ega bo'lsin. U holda $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari $a_x = x, a_y = y, a_z = z$ bo'lib (1.4) yoyilma $\vec{a}$

$$= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1.5)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini uning koordinatalari deb ham ataladi. O'qlardagi proeksiyalari a_x, a_y, a_z ga teng $\vec{a}$ vektorni $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ ko'rinishda yozamiz.

a_x - $\vec{a}$ vektorning abssissasi, a_y - ordinatasi, a_z - applikatasi deb ataladi.

Shunday qilib boshi koordinatalar boshida bo'lgan $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektor bilan uni oxiri M nuqta bir xil koordinatalarga ega bo'lar ekan.

$\overrightarrow{OM}$ vektor M nuqtaning **radius-vektori** deyiladi.

Izoh: Bundan buyon vektor berilgan yoki vektor topilsin deyilganda vektorning koordinatalari berilganligini yoki vektorni koordinatalarini topish lozimligini tushuniladi.

9. Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar

Agar vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari (vektorning koordinatalari) malum bo'lsa, u holda bu vektorlar ustidagi qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirishi amallarini ularning proeksiyalari ustidagi arifmetik amallar bilan almashtirish mumkin.

Vektorlar $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ yoyilmalari yordamida berilgan bo'lsin. U holda $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$, $\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$, ya'ni vektorlarni qo'shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi), vektorni songa ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

2-ma'ruza

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi.

Reja.

1. Skalyar ko'paytma.
2. Skalyar ko'paytma xossalari.
3. Ikkita vektor orasidagi burchak.
4. Vektorning uzunligi.

Vektorning uzunligi

Fazoda vektor $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ yoyilmasi yordamida berilgan bo'lib uning uzunligi $|\vec{a}|$ ni topish talab etilsin. Qaralayotgan holda (12-rasm) $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektor qirralari shu vektorning koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_3}$ dan iborat parallelepipedning diagonallaridan biri ekanligi aytilgan edi. To'g'ri burchakli parallelepiped diagonalining kvadrati uning qirralari kvadratlarning yig'indisiga teng bo'lishi ma'lum. Shunga ko'ra

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2, \quad \text{yoki} \quad |\overrightarrow{OM_1}| = |a_x|, \quad |\overrightarrow{OM_2}| = |a_y| \quad \text{va} \\ |\overrightarrow{OM_3}| = |a_z| \quad \text{bo'lgani uchun} \quad |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \quad \text{bundan vektorni uzunligini topish formulasi} \\ |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.1) \quad \text{ni hosil qilamiz.}$$

1-misol. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorni uzunligi topilsin?

Yechish. Misolda $a_x=6$, $a_y=3$, $a_z=-2$ bo'lgani uchun (2.1) formulaga binoan $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$ bo'ladi.

Izoh. $\vec{a}$ vektor Oxy tekislikda qaralsa bu holda vektorning applikasi nolga teng bo'lganligi sababli vektor $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ yoyilmaga ega hamda uning uzunligi $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ kabi topiladi.

$\vec{i}$, $\vec{j}$ birlik vektorlari tekislikda Dekart bazisini tashkil etadi. a_x – absissaga va a_y - ordinataga ega bo'lgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$ yoki $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ kabi yoziladi.

1. Skalyar ko'paytma

1-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning **skalyar ko'paytmasi** deb, bu vektorlar uzunliklarini ular orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan songa (skalyarga) aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Demak, ta'rifga binoan $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$. (2.2)

$|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = p r_b \vec{a}$, $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = p r_a \vec{b}$ bo'lgani uchun (2.2) formulani

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot p r_b \vec{a} \text{ yoki } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot p r_a \vec{b}. \quad (2.3)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu formulalardan foydalanib vektorning boshqa vektor yo'nalishiga proektsiyasini ham aniqlash mumkin. Masalan

$$p r_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \quad (2.4)$$

formula orqali $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektor yo'nalishiga proektsiyasi topiladi. Agarda $\vec{b}$ vektor birlik vektor bo'lsa $|\vec{b}| = 1$ bo'lib $p r_b \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ bo'ladi, ya'ni vektorning birlik vektori yo'nalishiga proektsiyasi ularning skalyar ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

Skalyar ko'paytma tushinchasidan foydalanib to'g'ri chiziqli harakatda $\vec{F}$ kuchni jismni $\vec{S}$ masofaga siljitishda bajargan ishi A ni $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ ko'rinishida yozish mumkin.

2. Skalyar ko'paytmaning xossalari

1. Skalyar ko'paytma o'rin almashtirish xossasiga ega ya'ni $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Bu xossaning to'g'riligi skalyar ko'paytma ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. Skalyar ko'paytuvchini skalyar ko'paytma belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$. Bu xossaning to'g'riligi (1.5) formuladan hamda proektsiyaning xossasidan kelib chiqadi:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot p r_b (\lambda \vec{a}) = |\vec{b}| \cdot \lambda \cdot p r_b \vec{a} = \lambda (|\vec{b}| \cdot p r_b \vec{a}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3. Skalyar ko'paytma vektorlarni qo'shishiga nisbatan taqsimot xossasiga ega, yani $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Bu (7.5) formuladan hamda proektsiyaning xossasidan kelib chiqadi:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot p r_a (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (p r_a \vec{b} + p r_a \vec{c}) = \vec{a} \cdot p r_a \vec{b} + \vec{a} \cdot p r_a \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4. Ikkita noldan farqli vektorning skalyar ko'paytmasi nol bo'lishi uchun vektorlarni perpendikulyar bo'lishi zarur va yetarli.

$$\textbf{Isboti.} \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsin. U holda } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

kelib chiqadi. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsa, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ bo'lib undan $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ bo'lganligi sababli $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ va $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, ya'ni vektorlarning perpendikulyarligi kelib chiqadi.

Bu xossaga ko'ra $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ (2.2) bo'ladi.

Endi vektorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasini topamiz:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2.$$

Vektorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasi vektorning **skalyar kvadrati**

deyiladi va $\vec{a}^2$ kabi yoziladi. Shunday qilib vektorning skalyar kvadrati uning modulini kvadratiga teng ekan.

Bunga asosan $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$ bo'ladi.

2-misol $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ va $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi topilsin.

Yechish.

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{a} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2.$$

3-misol. $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ vektor berilgan. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ bo'lib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 60° bo'lsa $\vec{c}$ vektorning uzunligi topilsin.

Yechish. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ formuladan $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$ kelib chiqadi.

Bunga asosan:

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{9 \cdot |\vec{a}|^2 - 12 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 4^2} = \sqrt{9 \cdot 25 - 12 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} + 64} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

3. Skalyar ko'paytmani vektorlarning koordinalari orqali ifodalash

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{va} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

vektorlar berilgan bo'lsin. Skalyar ko'paytmani xossalari hamda (2.2) va (2.3) formulalarga asosan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &\quad + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Shunday qilib, koordinalari yordamida berilgan ikki vektorlarning skalyar ko'paytmasi nomdosh koordinalar ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.5)$$

4-misol. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ va $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi topilsin.

Yechish. Misolda $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = -1$, $b_x = -3$, $b_y = 4$, $b_z = 2$ bo'lganligi sababli (2.4) formulaga binoan $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = 4$ bo'ladi.

5-misol. $\vec{F} = \{3; 2; 4\}$ kuch ta'sirida moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. $\vec{F}$ kuchning shu moddiy nuqtani $M_1(2; -5; 4)$ holatdan $M_2(7; -1; 3)$ holatga ko'chirishda bajargan ishini toping.

Yechish. $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{7 - 2; -1 + 5; 3 - 4\} = \{5; 4; -1\}$ ekani ayon.

(2.4) formulaga binoan $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 19$ ga ega bo'lamiz.

4. Ikki vektor orasidagi burchak

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ dan $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) =$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
 ni topamiz.

Agar vektorlar $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ yoyilmari yordamida berilgan bo'lsa, u holda (2.4) dan hamda vektorni uzunligini topish formulasi (2.1) dan foydalanib vektorlar orasidagi burchakning kosinusini topish uchun

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (2.6)$$

formulani hosil qilamiz.

6-misol. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. (2.6) formulaga asosan

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 45^\circ$ bo'ladi.

7-misol. Uchlari A(2;-1;3), B(1;1;1) va C(0;0;5) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning burchaklari topilsin.

Yechish. Boshi va oxiri berilgan vektorni koordinatalarini topish formulasiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\vec{AB} = \{1-2; 1+1; 1-3\} = \{-1; 2; -2\}, \quad \vec{AC} = \{0-2; 0+1; 5-3\} = \{-2; 1; 2\}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB} = \{1; -2; 2\}, \\ \vec{BC} = \{0-1; 0-1; 5-1\} = \{-1; -1; 4\}.$$

Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi (2.6) ga asosan:

$$\cos \angle A = \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \frac{1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = 0,$$

bundan $\angle A = 90^\circ$,

$$\cos \angle B = \cos(\vec{BA} \wedge \vec{BC}) = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{9}{3 \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

bundan $\angle B = 45^\circ$.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ dan $\angle C = 45^\circ$ kelib chiqadi.

Demak qaralayotgan uchburchak teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak ekan.

5. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti

Skalyar ko'paytmani 4-xossasiga ko'ra $\vec{a}$ va $\vec{b}$ (nolmas) vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchun $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli edi. Bundan (2.5) formulaga asosan $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ (2.6) ikki vektorning perpendikulyarlik shartini hosil qilamiz. Shunday qilib ikkita noldan farqli vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi uchun ularni nomdosh koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

1-izoh. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi son bo'lganligi sababli uch va undan ortiq vektorlarning skalyar ko'paytmalari haqida so'z bo'lishi mumkin emas.

2-izoh. Oxy tekislikdagi vektor uchun $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$ vektor Oxyz fazoda $\vec{a} = \{a_x, a_y, 0\}$ kabi tasvirlanganligi sababli chiqarilgan formulalarda vektorning applikasi nolga teng. ($a_z = 0$, $b_z = 0$) deb olinsa o'sha formulaning tekislikdagi vektorlar uchun xususiy ko'rinishi hosil bo'ladi.

Savollar:

1. Skalyar ko'paytmaga ta'rif bering.
2. Skalyar ko'paytma xossalari ayting va tushuntiring.
3. Ikkita vektor orasidagi burchakni hisoblash formulasini ayting.
4. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari qanday xossaga ega

3-ma'ruza

Determinantlar nazariyasi elementlari. Ikkinchi tartibli determinant.

Uchunchi tartibli determinant. Yuqori tartibli determinantlar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli determinantlar
2. Uchunchi tartibli determinantlar
3. Minor va algabraik to'ldiruvchi
4. Determinantning asosiy xossalari

5. n-tartibli determinant haqida tushuncha

1. Ikkinchi tartibli determinantlar

a, b, c, d sonlar berilgan bo'lsin.

Bu sonlardan tuzilgan $ad - bc$ ifoda (son) **ikkinchi tartibli determinant** deb ataladi va

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi.

Determinantdagi sonlar turgan o'rnini bildirishi uchun quyidagicha yozamiz:
 $a = a_{11}, b = a_{12}, c = a_{21}, d = a_{22}$ sonlar bilan belgilaymiz:

Bu sonlardan tuzilgan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ifoda (son) ikkinchi tartibli determinant deb ataladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi.

Demak ta'rifga binoan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar determinantning **elementlari** deb ataladi.

Ikkinchi tartibli determinantlar ikkita gorizantal va ikkita vertikal qatorlarga ega. Gorizantal qatorlarni **satrlar**, vertikal qatorlarni **ustunlar** deb ataymiz. Satrlar yuqoridan pastga qarab, ustunlar esa chapdan o'ngga qarab sanaladi. Ikkinchi tartibli determinantda a_{11}, a_{12} birinchi satrni, a_{21}, a_{22}

ikkinchi satrni, a_{11} birinchi ustunni, a_{12} esa ikkinchi ustunni tashkil etadi. Shuningdek $a_{11} a_{22}$

ikkinchi tartibli determinantning **bosh diagonalini** $a_{11} a_{22}$ uning **yon (yordamchi) diagonalini** $a_{12} a_{21}$ tashkil etadi. Shunday qilib ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yon diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish lozim ekan.

2. Uchinchi tartibli determinantlar

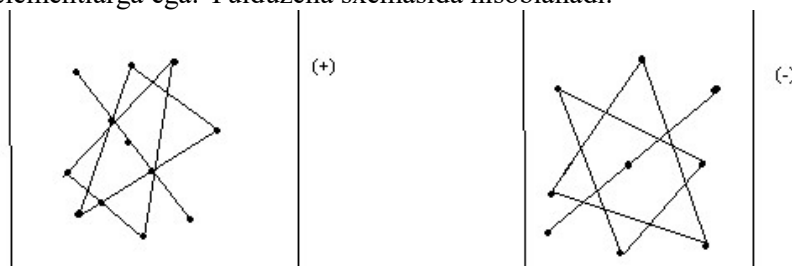
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

ifoda yordamida aniqlanadigan son **uchinchi tartibli determinant** deyiladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi. Bu yerdagi $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ sonlar ma'lum sonlar bo'lib ular determinantning elementlari deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr (gorizantal qator), uchta ustun (vertikal qator) va to'qqizta elementlarga ega. Yulduzcha sxemasida hisoblanadi:



3. Minor va algebraik to'ldiruvchi

Determinantni biror elementining **minori** deb, determinantdan bu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi. a_{ik} ($i,k=1,2,3$) elementning minori M_{ik} kabi belgilanadi. Uchinchi tartibli determinant elementlarining minorlari ikkinchi tartibli determinant bo'ladi. Masalan:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{determinant } a_{12} \text{ elementining minori } M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ son, } a_{23} \text{ elementining minori } M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

son bo'ladi. Chunki M_{12} ni topish uchun Δ determinantning birinchi satri va ikkinchi ustuni M_{23} ni topish uchun esa shu a_{23} element turgan determinantning ikkinchi satri va uchinchi ustuni o'chiriladi.

$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ ($i,k=1,2,3$) son a_{ik} elementning **algebraik to'ldiruvchisi** deb ataladi. Masalan Δ determinantning a_{32} elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \text{ bo'ladi.}$$

4. Determinantning asosiy xossalari

1. Determinantning satrlarini unga mos ustunlar bilan almashtirish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Determinantning ikkita satr(yoki ustun)larini o'rinlarini almashtirish natijasida determinantning ishorasi o'zgaradi xolos, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Bu yerda berilgan determinantning ikkinchi va uchinchi ustunlarini o'rinlari almashgan.

3. Ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant nolga tengdir.

4. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror λ songa ko'paytirish determinantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinantning bu xossasiga asoslanib 3-xossani biroz kuchaytirish mumkin. Ya'ni ikkita proporsional satr(yoki ustun)larga ega bo'lgan determinant nolga tengdir.

5. Biror satr (yoki ustun)elementlari nollardan iborat determinant nolga tengdir.

6. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib boshqa bir satr (yoki ustun) ning mos elementlariga qo'shish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & +m a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & +m a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & +m a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu yerda berilgan determinantning uchinchi ustun elementlari m songa ko'paytirilib ikkinchi ustunning mos elementlariga qo'shildi.

7. Determinantning biror satr(yoki ustun) elementlarini ularning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi determinantning o'ziga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant uchun

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, & \Delta &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}, \\ \Delta &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}, & \Delta &= a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}, \\ \Delta &= a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}, & \Delta &= a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33} \end{aligned}$$

tengliklar o'rinalidir.

Determinantning bunday yozilishi uning satr yoki ustun elementlari bo'yicha **yoyilmasi** deyiladi. Masalan, keltirilgan tengliklardan birinchisi Δ determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalasa, oxirgisi uni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalaydi.

Izoh. Determinantning qaysi qatorida nol ko'p bo'lsa, uni o'sha qator elementlari bo'yicha yoyish ma'quldir.

8. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini unga parallel boshqa bir satr (yoki ustun)ning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi nolga teng bo'ladi.

Bu holda ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant hosil bo'ladi.

Masalan, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

Bu yerda Δ determinantning birinchi satr elementlari ikkinchi satrning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shildi.

Keltirilgan barcha xossalarning ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar uchun to'g'riligiga bevosita determinantlarni hisoblash yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin.

5. n-tartibli determinant haqida tushincha

n -tartibli determinant deb n ta satr, n ta ustun va n^2 ta elementlarga ega bo'lgan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

kabi belgilanuvchi songa aytiladi

Yuqorida keltirilgan determinantning barcha xossalari istalgan tartibli determinantlar uchun ham o'rinalidir. Tartibi to'rt va undan yuqori bo'lgan determinantlarni determinantning 7-xossasidan foydalanib tartibini pasaytirish orqali hisoblanadi.

Masalan, to'rtinchi tartibli determinantni (2.2) formulaga o'xshash

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

Bu yerdagi uchinchi tartibli determinantlar mos ravishda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ elementlarning minori deyiladi. $a_{ik}(i,k=1,2,3,4)$ elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ik} orqali belgilasak (3) tenglikni

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \quad \text{ko'rinishida yozish mumkin.}$$

Bu formula to'rtinchi tartibli determinantni uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasidir. Bunaqa yoyilmani har bir satr va ustun elementlari uchun yozib to'rtinchi tartibli determinantni hisoblash uchun 8 ta formulalarni hosil qilishimiz mumkin.

4-ma'ruza

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi.

Reja:

1. Ikki vektorning vektorli ko'paytmasi
2. Vektor ko'paytmaning xossalari
3. Vektor ko'paytmani topish
4. Uch vektorning aralash ko'paytmasi
5. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi
6. Uch vektorning komplanarlik sharti

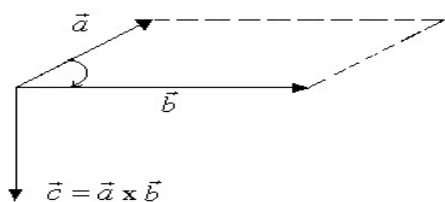
1. Ikki vektorning vektorli ko'paytmasi

1-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga **vektor ko'paytmasi** deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

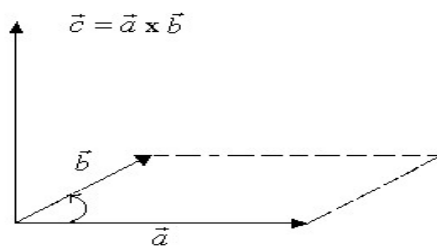
- a) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ko'paytuvchi vektorlarning har ikkalasiga perpendikulyar;
- b) $\vec{c}$ vektorning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilish masofasi soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda ko'rinadi;
- d) $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$. (5.1)

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ kabi belgilanadi (1-rasm).

a)



b)



1-rasm.

2. Vektor ko'paytmaning xossalari

1. Ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirish natijasida vektor ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Bu xossaning to'g'riligi vektor ko'paytmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. Sonli ko'paytuvchini vektor ko'paytma belgidan chiqarish mumkin, ya'ni $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, ($\lambda = \text{const}$).

3. Vektor ko'paytma qo'shishga nisbatan taqsimot xossasiga ega, ya'ni

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

4. Vektor ko'paytma ko'paytuvchi vektorlardan biri nol vektor bo'lganda yoki vektorlar kollinear bo'lgandagina nolga teng bo'ladi.

Bu xossadan istalgan vektorni o'zini-o'ziga vektor ko'paytmasi nol vektorga tengligi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ ekani kelib chiqadi. Jumladan dekart bazisi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ uchun $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ ga ega bo'lamiz.

1-misol $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (1\vec{a} + 3\vec{b})$ topilsin.

Yechish $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}, \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}, \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ekanini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (1\vec{a} + 3\vec{b}) = 12(\vec{a} \times \vec{a}) + 9(\vec{a} \times \vec{b}) - 8(\vec{b} \times \vec{a}) - 6(\vec{b} \times \vec{b}) = 12 \cdot 0 + 9(\vec{a} \times \vec{b}) + 8(\vec{a} \times \vec{b}) - 6 \cdot 0 = 17(\vec{a} \times \vec{b}).$$

2-misol. $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ tenglik isbotlanib, uning geometrik ma'nosi izohlansin.

Yechish. $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = 0 + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - 0 = 2(\vec{a} \times \vec{b}).$

$\vec{a} - \vec{b}$ va $\vec{a} + \vec{b}$ tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ bo'lgan parallelogramning diagonallarini ifodalaydi. $|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})|$ ifoda tomonlari berilgan parallelogramning diagonallaridan iborat parallelogramning yuzini, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ esa tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogramning yuzini ifodalaydi.

Shunday qilib isbotlangan tenglik, tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektordan iborat parallelogram yuzini ikkilangani tomonlari shu parallelogramning diagonallaridan iborat parallelogramning yuziga tengligini bildiradi.

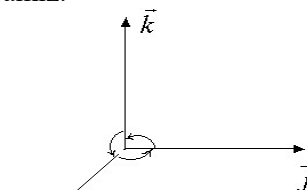
3. Vektor ko'paytmani topish

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ va $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Shu vektorlarning vektor ko'paytmasini ularning koordinatalaridan foydalanib topiladigan formula chiqaramiz.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorni vektor ko'paytmalarini hisoblaymiz. $\vec{i} \times \vec{j}$ vektor

ko'paytmani qaraymiz. Bu ko'paytmaning moduli $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

$\vec{i} \times \vec{j}$ vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u Oz o'qda joylashgan va u bilan bir xil yo'nalgan. Chunki uning uchidan qaragandan $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ ga qisqa burilish masofasi soat mili aylanishi yo'nalishiga teskari ko'rinadi.



2-rasm.

Demak, $\vec{i} \times \vec{j}$ vektor $\vec{k}$ vektorning o'ziga teng ekan, ya'ni $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Shuningdek $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ tengliklarga ega bo'lamiz. Ushbu tengliklardan hamda $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ dan va vektor ko'paytmaning xossalaridan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) \\ &+ a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = a_x b_x \cdot 0 + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + \\ &+ a_y b_y \cdot 0 + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} + a_z b_z \cdot 0 = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \end{aligned}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Demak $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasini

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

formula yordamida topilar ekan. Jumladan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi

$$S_p = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right| \quad (5.3)$$

formula yordamida va shu vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi esa

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right| \quad (5.4)$$

formula yordamida topiladi.

3-misol. $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.

Yechish. (5.2) formulaga asosan:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}.$$

4-misol. Tomonlari $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi topilsin.

Yechish (5.2) formulaga binoan:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-9+1)\vec{i} - (3-2)\vec{j} + (-1+6)\vec{k} =$$

$$-8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{90} = 3 \cdot \sqrt{10}$$

(5.3) ga asosan $S_p = 3 \cdot \sqrt{10}$ kv. birlik bo'ladi.

5-misol. Uchlari $A(3; 4; -1)$, $B(2; 0; 3)$ va $C(-3; 5; 4)$ nuqtalarga bo'lgan uchburchakning yuzi topilsin.

Yechish. $\overrightarrow{AB} = \{2-3; 0-4; 3+1\} = \{-1; -4; 4\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-3-3; 5-4; 4+1\} = \{-6; 1; 5\}$.

(5.2) formulaga ko'ra:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-20-4) - \vec{j}(-5+24) + \vec{k}(-1-24) = -24\vec{i} + 19\vec{j} - 25\vec{k}.$$

$$\vec{i} + 19\vec{j} - 25\vec{k}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-24)^2 + 19^2 + 25^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1562}. \text{ Demak, } S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{1562} \text{ kv. birlik}$$

6-misol. Uchlari $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 5)$ va $C(2; 4; 7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning A burchagini sinusi topilsin.

$$\text{Yechish: } S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \sin A \text{ tenglikdan}$$

$$\sin A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \quad (5.5)$$

formulaga ega bo'lamiz.

$$\vec{AB} = \{3-1; 4-2; 5-3\} = \{2; 2; 2\}, \quad \vec{AC} = \{2-1; 4-2; 7-3\} = \{1; 2; 4\},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21},$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}, \quad |\vec{AB} \times \vec{AC}| =$$

$$\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56} \quad \text{tengliklarga egamiz (5.5) formulaga ko'ra } \sin A = \frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}} =$$

$$\frac{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 7}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ bo'ladi.}$$

$BC^2 < AB^2 + AC^2$ bo'lganda A burchak o'tkir, $BC^2 > AB^2 + AC^2$ bo'lganda u o'tmas burchak bo'ladi.

4. Uch vektorning aralash ko'paytmasi

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ ni uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan son $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi.

$$\text{Vektorlar } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

yoyilmalari yordamida berilganda ularning aralash ko'paytmasi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ni topish uchun formula chiqaramiz.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

vektorni skalyar ko'paytmani topish formulasiga asoslanib $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ vektorga skalyar ko'paytiramiz. U holda

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z$$

kelib chiqadi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

determinantning uchinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekanini ko'rish qiyin emas. Demak

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Shunday qilib, uch vektorning aralash ko'paytmasi uchinchi tartibli determinantga teng bo'lib uning birinchi satrini birinchi ko'paytuvchi vektorning koordinatalari, ikkinchi va uchinchi satrlarini ikkinchi va uchinchi ko'paytuvchi vektorlarning koordinatalari tashkil etadi.

7-misol. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

vektorlarning aralash ko'paytmasi topilsin.

Yechish. (8.6) formulaga asosan:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(25+3) - 4(15+2) + 2(9-10) = 14.$$

5. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi

Boshlari bitta nuqtada bo'lgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nokomplanar vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlarni qirra deb parallelepiped yasaymiz. Uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzi Q ga teng bo'lgan $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektorni yasaymiz. Skalyar ko'paytmani ta'rifi binoan:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}) = Q |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}).$$

$$(\vec{d} \wedge \vec{c}) < \frac{\pi}{2} \text{ deb faraz qilamiz. U holda parallelepipedning balandligini } h \text{ orqali}$$

belgilasak $h = |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{d} \wedge \vec{c})$ kelib chiqadi. Shunday qilib aralash ko'paytma $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = Q \cdot h$ bo'ladi.

Parallelepipedning hajmini V deb belgilasak u asosining yuzi Q bilan balandligi h ning ko'paytmasiga teng, ya'ni $V = Q \cdot h$ bo'ladi.

Shunday qilib bu holda uch vektorning aralash ko'paytmasi qirralari shu vektorlardan iborat parallelepipedning hajmiga teng, ya'ni $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = V$ bo'lar ekan.

$$\text{Agar } (\vec{d} \wedge \vec{c}) > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa, } \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}) < 0, |\vec{c}| \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}) = -h \text{ bo'lib } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$$

bo'ladi. Har ikkala holni birlashtirib $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ yoki $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

formulaga ega bo'lamiz.

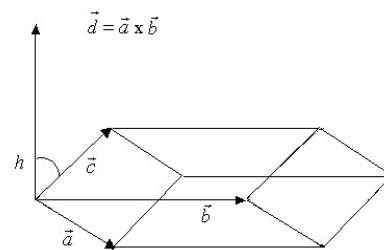
Shunday qilib, uch vektorni aralash ko'paytmasini absolyut qiymati shu vektorlarni qirra deb ulardan yasalgan parallelepipedning hajmiga teng ekan.

Bu aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosidir.

Demak qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan iborat parallelepipedning hajmi

$$V_{par} = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| \quad (5.7)$$

formula yordamida topiladi.



3-rasm.

Endi qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan iborat uchburchakli piramidaning hajmini topamiz.

Bu holda piramidaning hajmi qirralari, xuddi shunday parallelepipedning hajmining oltidan biriga teng ekan elementar geometriyadan malum.

Shunday qilib

$$V_{pir} = \frac{1}{6} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| \quad (5.8)$$

piramidani hajmini topish formulasini hosil qilamiz.

8-misol. Uchlari $A(0; 0; 0)$, $B(3;4;-1)$, $C(2;3;5)$, $D(6;0;-3)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchakli piramidaning hajmi topilsin.

Yechish: Qaralayotgan hol uchun (5.8) formula

$$V_{pir} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right| \text{ ko'rinishiga ega. } \overrightarrow{AB} = \{3;4;-1\}, \overrightarrow{AC} = \{2;3;5\},$$

$\overrightarrow{AD} = \{6;0;-3\}$ bo'lgani uchun

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9) - 4(-6-30) + 18 = 135 \quad \text{va} \quad V = \frac{1}{6} |135| = 22,5 \text{ kelib chiqadi.}$$

6.Uch vektorning komplanarlik sharti

Uchta komplanar noldan farqli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarni qaraymiz. Sodda uchun bu vektorlar bir tekistlikda yotadi deb faraz qilamiz. Bu vektorlarni aralash ko'paytmasi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ni tuzamiz.

$\vec{a} \times \vec{b}$ vektor ko'paytma $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u ular yotgan tekistlikka ham, jumladan $\vec{c}$ vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Perpendikulyar vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga tengligidan $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ kelib chiqadi. Demak komplanar vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng ekan. Tesqarisi ham urinli, yani aralash ko'paytmasi nolga teng vektorlar komplanar bo'ladi.

Hqiqatan, vektorlar nokomplanar bo'lsa vektorlarni qirra deb parallelepiped yasash mumkin bo'lib uning hajmi $V \neq 0$ bo'ladi. Ammo $V = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$ bo'lgani uchun $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0$ bo'ladi. Bu shartga zid.

Shunday qilib uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (noldan farqli) vektorlarning komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (5.9)$$

uch vektorning komplanarlik shartidir .

9-misol. $\vec{a}=\{3;4;5\}$, $\vec{b}=\{1;2;2\}$, $\vec{c}=\{9;14;16\}$
vektorning komplanarligi ko'rsatilsin .

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-4) = 0.$$

Komplanarlik sharti (5.9) bajarilganligi uchun vektorlar komplanar.

10-misol. $A(1;0;1)$, $B(1;4;6)$, $C(2;2;3)$ va $D(10;14;17)$ nuqtalar bitta tekislikda yotadimi?

Yechish. $\vec{AB}=\{4-1; 4-0; 6-1\}=\{3;4;5\}$, $\vec{AC}=\{2-1; 2-0; 3-1\}=\{1;2;2\}$, $\vec{AD}=\{10-1; 14-0; 17-1\}=\{9; 14; 16\}$

vektorlarni qaraymiz. Ularning aralash ko'paytmasini hisoblaymiz:

$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = 0.$$

Vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng, ular komplanar va A, B, C, D nuqtalar bir tekislikda yotadi.

Izoh. 1. Biz kerakli formulalarni faqatgina fazodagi vektorlar uchun chiqardik. Ammo keltirilgan formulalar tekislikdagi vektorlar uchun ham yaroqli . Formulalardagi vektorlarning uchinchi koordinata (applikata)lari nol deb olinsa formulalar tekislikdagi vektorlar uchun o'rinli bo'ladi. Masalan tekislikda vektorlar $\vec{a}=a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, $\vec{b}=b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ ($\vec{i}, \vec{j}$ -dekart bazisi) kabi

$$\text{yoyilmaga ega bo'lsa ularning vektor ko'paytmasi } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \text{ bo'ladi.}$$

5-ma'ruza

Matritsa va ular ustida amallar. Teskari matritsa. Matritsa rangi.

Reja:

1. Matritsa haqida tushincha
2. Matritsalarining tengligi
3. Matritsalarini qo'shish
4. Matritsani songa ko'paytirish
5. Matritsalarini ko'paytirish
6. Birlik matritsa
7. Teskari matritsa
8. Matritsaning rangi va uni hisoblash

1. Matritsa haqida tushincha

Ma'lum sonlardan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

kabi jadvallar **matritsa** deb ataladi. $a_{11}, a_{12}, \dots$ sonlar esa matritsaning **elementlari** deyiladi. Jadvalning gorizantal qatorlari matritsaning **satrlari**, vertikal qatorlari esa uning **ustunlari** deyiladi. Satrlari soni ustunlari soniga teng matritsa **kvadrat matritsa** deyiladi va satrlari yoki ustunlarining soni shu matritsaning tartibi deyiladi. Masalan (5.1) dagi birinchi matritsa ikkinchi tartibli, uchinchi matritsa esa uchinchi tartibli kvadrat matritsadir. Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lmagan matritsa **to'g'ri burchakli matritsa** deyiladi. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli matritsa **mxn o'lchamli matritsa**-deyiladi. Masalan (5.1) dagi ikkinchi matritsa 2x4 o'lchamli to'g'ri burchakli matritsa. Yagona satrga ega bo'lgan matritsa **satr-matritsa**, yagona ustunga ega bo'lgan matritsa

ustun-matritsa deb ataladi. Masalan $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ satr-matritsa, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ esa ustun-matritsadir.

Kvadrat matritsaning elementlaridan matritsa belgisini determinant belgisi bilan almashtirish natijasida hosil bo'lgan determinant shu **matritsaning determinanti** deyiladi. Matritsani qisqacha bitta A harf bilan belgilasak uning determinanti $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. Masalan $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ matritsaning determinanti } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

Determinanti noldan farqli kvadrat matritsa **xosmas**, determinanti nolga teng kvadrat matritsa **xos** matritsa deyiladi.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ matritsa xos matritsa, chunki } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0,$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ esa xosmas matritsa, chunki } |B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13 \neq 0.$$

2. Matritsalarining tengligi

Bir xil o'lchamli A va B matritsalarining barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lganda ular **teng** ($A=B$) deb ataladi.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ matritsalar } a_{11}=b_{11}, a_{12}=b_{12}, a_{13}=b_{13},$$

$a_{21}=b_{21}, a_{22}=b_{22}, a_{23}=b_{23}$ bo'lganda teng bo'ladi ($A=B$).

3. Matritsalarini qo'shish

Ikkita bir xil o'lchamli matritsaning **yig'indisi** deb ularning mos elementlarini qo'shish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ matritsaning}$$

yig'indisi deb

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi.

1-misol. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsalarining

yig'indisi topilsin.

Yechish.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3-1 \\ 1-1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarining yig'indisi uchun $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$ tengliklar o'rinli.

Barcha elementlari nollardan iborat matritsa **nol matritsa** deb ataladi va (0) yoki 0 kabi belgilanadi. Istalgan A matritsa uchun $A+0=A$ bo'ladi, bu yerdagi 0 matritsa A bilan bir xil o'lchamli nol matritsa.

4. Matritsani songa ko'paytirish

Matritsani **songa ko'paytmasi** deb matritsaning barcha elementlarini shu songa ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa } mA = Am = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Matritsani nolga ko'paytirish natijasida nol-matritsa hosil bo'ladi.

2-misol. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa 3 ga ko'paytirilsin.

Yechish.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Matritsalarini ko'paytirish

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ matritsaning } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

matritsaga **ko'paytmasi** deb elementlari quyidagicha aniqlanuvchi $C=AB$ matritsaga aytiladi

$AB=$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Matritsalarini bu xilda ko'paytirish **satrlarni ustunga** deb yuritiladi. Matritsalarini ko'paytirish qoidasi birinchi ko'payuvchining ustunlari soni ikkinchi ko'payuvchining satrlari soniga teng bo'lgan har qanday to'g'ri burchakli matritsalar uchun o'rinlidir.

3-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

matritsalarining ko'paytmasi topilsin.

Yechish. AB ko'paytma mavjud, chunki A matritsaning ustunlari 2 ga teng, B matritsaning satrlari soni ham 2 ga teng.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

B·A ko'paytma mavjud emas, chunki B matritsaning ustunlari soni 2 ga, A matritsaning satrlari soni esa 3 ga teng. Bu misol umumiy holda matritsalarini ko'paytirish o'rni almashtirish xossasiga ega emasligini ko'rsatadi, ya'ni umumiy holda $AB \neq BA$.

Matritsalarini ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

- 1) $(AB)C = A(BC)$; 2) $(A+B)C = AC + BC$; 3) $(mA)B = m(AB)$;
4) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Bu yerdagi A, B, C lar matritsalar bo'lib ular uchun yuqoridagi ko'paytirish va qo'shish amallari o'rinli, m-biror son.

6. Birlik matritsa

Bosh diagonalida turgan barcha elementlari 1 ga teng bo'lib qolgan elementlari 0 dan iborat kvadrat matritsa **birlik matritsa** deb ataladi va E orqali belgilanadi.

Masalan $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ikkinchi tartibli birlik matritsa,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ esa uchinchi tartibli birlik matritsadir.

Birlik matritsaning determinanti 1 ga teng, ya'ni $|E| = 1$.

Istalgan A kvadrat matritsani uning tartibiga mos birlik matritsaga ko'paytirish natijasida o'sha matritsaning o'zi hosil bo'ladi, ya'ni $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Ikkita sonlardan kamida bittasi nol bo'lgandagina ularning ko'paytmasi nol bo'lishi ma'lum. Matritsalarini ko'paytmasi bunaqa xossaga ega emas, ya'ni ikkita noldan farqli matritsalarining ko'paytmasi nol matritsa bo'lishi ham mumkin.

7. Teskari matritsa

A kvadrat matritsaga **teskari matritsa** deb $A \cdot B = B \cdot A = E$ shartni qanoatlantiruvchi B matritsaga aytiladi. A matritsaga teskari matritsa odatda A^{-1} kabi belgilanadi. A, B va E matritsalarining bir xil tartibli bo'lishi ro'vshan. Boshqacha aytganda ko'paytmasi E birlik matritsaga teng A va B kvadrat matritsalar o'zaro teskari matritsalar deyiladi.

1-teorema. A kvadrat matritsaga teskari A matritsa mavjud bo'lishi uchun A matritsaning xosmas matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Faraz qilaylik A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsin. U holda $A \cdot A^{-1} = E$, $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ bo'ladi. Bundan $|A| \neq 0$, ya'ni A matritsaning xosmasligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Osonlik uchun uchinchi tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

xosmas matritsani qaraymiz. Bu holda

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

matritsa A matritsaga teskari matritsa ekanligiga bevosita ularni ko'paytirish yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin. Ko'paytirish jarayonida determinantning 7- va 8- xossalariidan foydalaniladi. Bu yerda $A_{ik}(i,k=1,2,3)$ orqali a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi belgilangan.

8. Matritsaning rangi va uni hisoblash

To'g'ri burchakli yoki kvadrat A matritsa berilgan bo'lsin. Matritsaning k ta satr va o'shancha ustunlarini tanlab ularni kesishish joyida turgan elementlardan joylashish tartibini o'zgartirmagan holda k -tartibli determinant tuzamiz. Ana shu determinant A matritsaning k -tartibli **minori** deb ataladi. Matritsaning elementlarini uning birinchi tartibli minori deb hisoblash mumkin.

Masalan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

matritsa 4 ta uchinchi tartibli, 18 ta ikkinchi tartibli va 12 ta birinchi tartibli minorlarga ega.

Ushbu $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ determinant qaralayotgan matritsaning ikkinchi tartibli minorlardan biri

bo'lib u matritsaning birinchi va uchinchi satrlarini hamda uchinchi va to'rtinchi ustunlarini tanlash natijasida hosil bo'lgan.

Agar A matritsaning r -tartibli minorlari orasida kamida bitta noldan farqlisi mavjud bo'lib, undan yuqori tartibli qolgan barcha minorlari nolga teng bo'lsa, u holda butun r son A matritsaning rangi deyiladi va $\text{rang} A = r$ yoki $r(A) = r$ kabi yoziladi.

Boshqacha aytganda A matritsaning noldan farqli minorining eng yuqori tartibiga shu matritsaning rangi deb atalar ekan.

Nol matritsadan farqli istalgan matritsaning rangi natural son bo'ladi.

Matritsaning rangini topishda ko'p sonli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun matritsani rangini hisoblashda uni elementar almashtirish deb ataluvchi almashtirishdan foydalanish maqsadga muvofiq. Matritsani **elementar almashtirish** deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi.

- faqat nollardan iborat satr (ustun)larni o'chirish;
- ikkita satr (ikkita ustun)larni o'rinlarini almashtirish;
- bir satr(ustun)ning barcha elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr(ustun)ning mos elementlariga qo'shish;
- satr(ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish.

Agar B matritsa A matritsadan elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa A va B **ekvivalent** matritsalar deyiladi hamda $A \sim B$ kabi yoziladi.

2-teorema. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Teoremaning isboti determinantlarning xossalariidan kelib chiqadi.

3-teorema. Agar matritsaning rangi r ga teng bo'lsa u holda unda r ta chiziqli bog'lanmagan satrlar mavjud bo'lib qolgan barcha satrlar shu r ta satrlar orqali chizikli ifodalanadi, ya'ni ularning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

6-ma'ruza

Chiziqli tenglamalar sistemalarining umumiy nazariyasi

Reja:

- Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi
- Uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi
- Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi
- Uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

1. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (6.1)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x va y noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma'lum. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, lar sistema **koeffitsientlari**, b_1 va b_2 sonlar esa **ozod had** (son)lar deb ataladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish degan so'z, noma'lum sonlarning shunday qiymatlari to'plamini topish demakki, ularni sistema tenglamalarining har biriga mos noma'lumlarning o'rniga qo'yilganda ular ayniyatlarga aylanadi. Bunday sonlar to'plami sistemaning yechimi deyiladi. Kamida bitta yechimga ega bo'lgan sistema **birgalikdagi sistema** deb ataladi. Birgina yechimga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniq sistema** deb ataladi. Cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniqmas sistema** deb ataladi. Birorta ham yechimga ega bo'lmagan sistema **birgalikda bo'lmagan sistema** deyiladi.

Izoh. Keltirilgan ta'riflar istalgan sistema uchun o'rinlidir.

(6.1) sistema bizga o'rta maktab kursidan ma'lum. Uni yechishning o'riniga qo'yish, qo'shish va grafik usullari bilan tanishmiz.

Bu yerda (6.1) sistemani yechishning yana bir usuli ya'ni uni determinantlardan foydalanib yechish usuli bilan tanishamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchisini $-a_{12}$ ga ko'paytirib hadlab qo'shamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \quad (6.2)$$

Shuningdek sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi sini a_{11} ga ko'paytirib hadlab qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})y=b_2a_{22}-b_1a_{12} \quad (6.3)$$

hosil bo'ladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (6.4)$$

belgilashlarni kiritamiz.

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinant sistemaning *asosiy* determinanti deb ataladi. Δ_x determinant Δ dagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida, Δ_y esa Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

(6.4) dan foydalanib (6.2) va (6.3) formulalarni

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cdot x &= \Delta_x, \\ \Delta \cdot y &= \Delta_y \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Mumkin bo'lgan quyidagi hollarni qaraymiz.

I. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsin. U holda (6.5) ning har bir tenglamasini Δ ga bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (6.6)$$

berilgan sistemaning yechimini topish formulasiga ega bo'lamiz. (6.6) formulalar uning ixtirochisi Shvetsariyalik matematik Kramer(1704-1752)ning sharafiga Kramer formulalari deb ataladi.

II. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lsin.

Bu holda quyidagilardan biri bo'ladi.

1) $\Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lsin. U holda (6.5) $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$ ko'rinishini olib berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega, chunki istalgan son bu tenglamalarni qanoatlantiradi.

2) Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi masalan $\Delta_x \neq 0$ bo'lsin. U holda (6.5) ni birinchi tenglamasi $0 \cdot x = \Delta_x \neq 0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u yechimga ega emas. Demak, bu holda berilgan sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Xulosa. a) (6.1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$, ya'ni $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ yoki $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$

bo'lganda bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi Kramer formulalari (6.6) yordamida topiladi.

$$b) \Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \text{ ya'ni } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} \text{ bo'lganda}$$

(6.1) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas);

d) $\Delta = 0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli ya'ni

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmaydi (birgalikda emas).

(6.1) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. (6.1) sistemaning har bir tenglamasi to'g'ri chiziqli tenglamasini ifodalashi ayon.

$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaydi. Demak har ikkala to'g'ri chiziqli bitta nuqtada kesishadi. Ana shu kesishish nuqtasining koordinatalari (3.1) sistemasining yechimi bo'ladi.

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \text{ ya'ni } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi (sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega). $\Delta = 0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lganligi sababli ular kesishmaydi (sistema yechimga ega bo'lmaydi) ya'ni birgalikda emas.

2. Uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerdagi x, y va z noma'lumlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. Ozod sonlari nolga teng bu sistema bir jinsli sistema deyiladi. (6.7) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz.

$$\text{Faraz qilaylik } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsin. U holda sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z \end{cases}$$

ko'rinishida yozamiz. Bu sistema z ning har bir aniq qiymatida yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalariga ko'ra

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z$$

kabi topiladi. Determinantning xossalari (umumiy ko'paytuvchini determinant belgisidan chiqarish mumkinligi hamda ikkita ustunlarini o'rin almashtirganda determinantning faqatgina ishorasi o'zgarishi) dan foydalanib yechimni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot (-z) \quad (6.8)$$

ko'rinishda yozamiz.

$$\frac{-z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = K$$

deb belgilasak $z=K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ bo'lib uni (6.8) ga qo'ysak

$$x=K \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad y=-K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad z=K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (6.9)$$

qaralayotgan sistemaning yechimlari kelib chiqadi. (6.7) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Sistemaning har bir tenglamasi koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi. Tekisliklarning har ikkitasi koordinatalar boshidan o'tganligi sababli ular kesishadi. Ikki kesishuvchi tekisliklar to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Ana shu to'g'ri chiziq nuqtalarning koordinatalari sistemaning yechimi bo'ladi.

Xulosa. Bir jinsli (6.7) sistema yagona yechimga ega bo'lishi yoki yechimga ega bo'lmasligi mumkin emas. U har doim cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas sistema).

3.Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (6.10)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x, y va z noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ sistemaning koeffitsientlari, b_1, b_2 , va b_3 ozod sonlar. Barcha ozod sonlar nolga teng bo'lganda (6.10) sistema **bir jinsli** deyiladi.

(6.10) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan uchinchi tartibli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant (6.10) sistemaning **asosiy** determinanti deb ataladi. Berilgan sistemani yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{11} ga, ikkinchi tenglamasini a_{21} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{21} ga va uchinchi tenglamasini a_{31} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{31} ga ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shamiz.

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \quad (6.11)$$

Birinchi qavs ichidagi ifoda Δ determinantning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi bo'lganligi uchun determinantning 7-xossasiga ko'ra $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \Delta$ bo'ladi. (6.11) dagi ikkinchi va uchinchi qavs ichidagi ifodalar Δ determinantni ikkinchi va uchinchi ustun elementlarini boshqa bir ustunning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganligi uchun determinantning 8-xossasiga ko'ra ular nolga teng bo'ladi. Shunday qilib (6.11) tenglik

$$\Delta_x = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \quad (6.12)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

determinantni qaraymiz. E'tibor bersak bu determinant asosiy determinantdagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'lganligiga iqrar bo'lamiz. Bu determinantning b_1, b_2, b_3 , elementlarining algebraik to'ldiruvchilari mos ravishda Δ determinantning a_{11}, a_{21}, a_{31} elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga tengligini hisobga olsak $b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \Delta_x$ bo'lib (6.12) tenglik

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \quad (6.13)$$

ko'rinishini oladi.

Shunga o'xshash $\Delta \cdot y = \Delta_y$, $\Delta \cdot z = \Delta_z$ (6.14) tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Δ_y determinant sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga, Δ_z esa Δ dagi uchinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Mumkin bo'lgan qo'yidagi hollarni qaraymiz:

I. (3.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsin. U holda (6.13) va (6.14) tenglamalarni har birini Δ ga bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (6.15)$$

formulalarga ega bo'lamiz. (6.15) **Kramer formulalari** deb ataladi. Shunday qilib (6.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (6.15) yordamida topilar ekan.

II. (6.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lsin. U holda qo'yidagilardan biri sodir bo'ladi.

a) $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (6.10) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Haqiqatan, aniqlik uchun $\Delta_x \neq 0$ deb faraz qilsak bu holda $\Delta \cdot x = \Delta_x$ (6.13) tenglik $0x = \Delta_x \neq 0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u x ning hech bir qiymatida bajarilmaydi.

b) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsin. Bu holda (6.10) sistema yo yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

Izoh.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \end{cases} \text{ sistema } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ shartda aniqmas bo'ladi.}$$

Xulosa. a) Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi (6.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (6.15) yordamida topiladi.

b) $\Delta = 0$ bo'lib $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlardan aqalli birortasi noldan farqli bo'lganda (6.10) sistema yechimga ega emas.

d) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lganda (6.10) sistema yo yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega.

4. Uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

sistemani qaraymiz. $x=0, y=0, z=0$ sistemaning yechimi bo'lishi ko'rinib turibdi. Bu holda kamida bitta ustuni nolga teng bo'lganligi uchun $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lib (6.13) va (6.14) tengliklar $\Delta \cdot x = 0, \Delta \cdot y = 0, \Delta \cdot z = 0$ (6.17) ko'rinishga ega bo'ladi. Agar (6.16) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsa u yagona $x=0, y=0, z=0$ yechimga ega bo'ladi. Qaralayotgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ham ega bo'la oladimi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. (6.16) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan. Sistema noldan farqli yechimlarga ega, masalan $x \neq 0$ bo'lsin. U holda (6.17) ning birinchi tenglamasi $\Delta \cdot x = 0$ dan $\Delta = 0$ kelib chiqadi.

Teskarisi, ya'ni sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lganda sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishini ko'rsatish ham mumkin.

5. n noma‘lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

Umumiy holda n noma‘lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasi

[illegible]

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \dots, b_n$ ozod had (son) lar hamda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ koeffitsientlar ma'lum sonlar.

Yuqorida keltirilgan Kramer qoidasi noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan istalgan (6.18) ko'rinishdagi sistema uchun o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda u vagona vechimga ega bo'lib, vechim Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}, \quad (6.19)$$

yordamida topiladi. Bu yerdagi Δ determinant (6.18) sistemaning noma'lumlari oldidagi koeffitsientlaridan tuzilgan bo'lib, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ determinantlar undagi birinchi, ikkinchi va hokazo n -ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Shuni aytish joizki, sistemadagi noma'lum (tenglama)lar soni orta borgan sari uni Kramer usuli bilan yechish qiyinlasha boradi.

6. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali yozilishi va yechilishi

Osonlik uchun uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \quad (6.20)$$

ni qaraymiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

belgilashni kiritamiz. U holda matritsalarini ko'paytirish qoidasiga binoan

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Shuning uchun (6.20) sistemani matritsalarini tengligidan foydalanib

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishida yoki qisqacha $A \cdot X = B$ (6.21) matritsali tenglama ko'rinishda yozish mumkin. (6.20) sistema (6.21) yordamida berilgan bo'lib A xosmas matritsa bo'lsa uni quyidagicha yechiladi. (6.21) tenglamaning har ikkala tomonini chapdan A matritsaga teskari A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$; $(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$; $X = A^{-1} \cdot B$ bo'ladi.

$X=A^{-1} \cdot B$ (3) matritsali tenglama (6.21) ning yechimidir.

7-ma'ruza

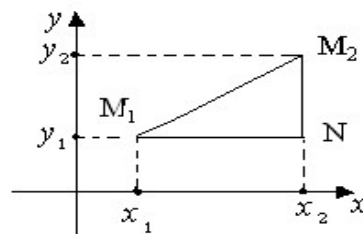
To'g'ri chiziq va uning turli tenglamalari. Qutb koordinatalar sistemasi

1. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofa

0xy tekisligining berilgan $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalari orasidagi masofani topish uchun formula chiqaramiz. M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasin (1-rasm).

M_1 nuqtadan 0x ga parallel, M_2 nuqtadan 0y ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib ularni kesishish nuqtasini N orqali belgilaymiz. M_1M_2N uchburchak to'g'ri burchakli bo'lganligi sababli Pifagor teoremasiga binoan $M_1M_2^2 = M_1N^2 + NM_2^2$ bo'ladi.

$M_1N = |x_2 - x_1|$, $NM_2 = |y_2 - y_1|$ ekanini hisobga olsak,



1- rasm.

$$M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ bo'ladi.}$$

Izlanayotgan masofani d orqali belgilasak, tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofani topish uchun $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (6.1) formulaga ega bo'lamiz.

Xususiylashtirish holda koordinatalar boshidan $M(x; y)$ nuqtagacha d masofa $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (6.2) formula yordamida topiladi.

(6.1) formula M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi.

2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

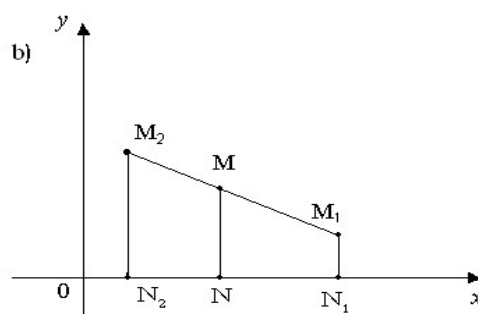
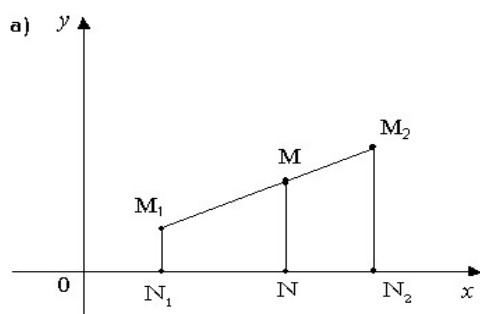
M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda > 0$ nisbatda bo'lish deganda shu kesmada $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$

munosabatni qanoatlantiruvchi M nuqtani topish tushuniladi.

0xy tekislikda $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilganda M_1M_2 kesmani $\lambda > 0$ nisbatda bo'luvchi $M(x; y)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun formula chiqaramiz. M_1 , M va M_2 nuqtalarning 0x o'qlardagi proeksiyalarini N_1, N va N_2 lar orqali belgilaymiz (3-rasm).

U holda ular 0x o'qda $N_1(x_1)$, $N(x)$, $N_2(x_2)$ koordinatalarga ega bo'ladilar.

Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi kesmalar proporsional bo'lishi elementar geometriyadan ma'lum.



3-rasm.

Shunga binoan, $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2} = \lambda$. Ammo $N_1N = |x - x_1|$, $NN_2 = |x_2 - x|$ bo'lgani uchun

$$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \lambda. \quad x - x_1 \text{ va } x_2 - x \text{ ayirma bir xil ishorali ekanligini hisobga olib} \quad |x - x_1| \text{ va } |x_2 - x|$$

modullarni $x-x_1$ va x_2-x ayirmalarga almashtirib $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$ tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikni yechib x ni aniqlaymiz: $x-x_1=\lambda x_2-\lambda x$; $x-\lambda x=x_1+\lambda x_2$; $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$; $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

Shunga o'xshash formulani y uchun ham hosil qilish mumkin.

Shunday qilib izlanayotgan M nuqtani x va y koordinatalarini topish uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (6.3)$$

formulalarni hosil qilamiz.

Xususiyl holda M_1M_2 kesmaning o'rtasini koordinatalarini topish talab etilganda $\lambda=1$ bo'lib (6.3) dan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (6.4)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

3. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak tushinchasi

Oxy tekislikda yotgan va M nuqtada kesishuvchi ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlarni qaraymiz.

1-ta'rif. ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb ℓ_1 ni ℓ_2 bilan ustma-ust tushishi uchun uni M nuqta atrofida soat mili aylanishiga teskari yo'nalishida burilishi lozim bo'lgan eng kichik burchakka aytiladi. (4^a-chizma).

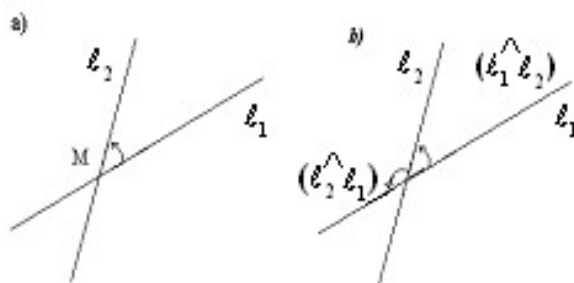
ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak $\ell_1 \wedge \ell_2$ kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifga ko'ra ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ℓ_2 va ℓ_1 to'g'ri chiziqlar orqasidagi burchakka teng emas. Ta'rifga binoan

$\ell_1 \wedge \ell_2 = \pi - (\ell_2 \wedge \ell_1)$ bo'ladi (4^b-chizma).

To'g'ri chiziqlar parallel bo'lganda yoki ustma-ust tushganda ular orasidagi burchak nolga teng hisoblanadi.

Keltirilgan ta'rif to'g'ri chiziqlardan biri o'q, masalan Ox o'q bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi.



4- rasm

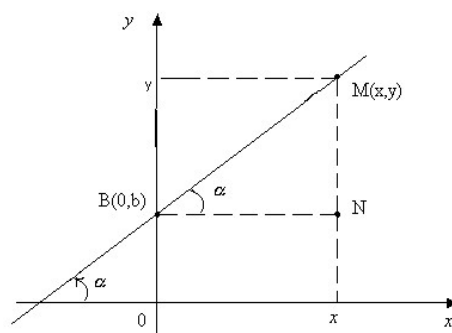
4. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

Oxy tekislikni hamda unda yotgan to'g'ri chiziqni qaraymiz. To'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan Oy o'q bilan $B(0;b)$ nuqtada kesishsin va Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil etsin. (5-rasm.) Shu to'g'ri chiziqning dekartning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tenglamasini topamiz, ya'ni x va y dekart koordinatalarini bog'lovchi shunday tenglamani topamizki to'g'ri chiziqning barcha nuqtalarini koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradi, to'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi.

Faraz qilaylik $M(x,y)$ nuqta to'g'ri chiziqning $B(0;b)$ nuqtasidan farqli istalgan nuqtasi bo'lsin. 5-rasmdagi $\triangle BNM$ dan $\frac{MN}{BN} = \operatorname{tg} \alpha$ yoki $MN = \operatorname{tg} \alpha \cdot BN$ tenglikka ega bo'lamiz.

$MN = y - b$, $BN = x$ ekanligini hisobga olsak $y - b = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$ yoki $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$ kelib chiqadi. $k = \operatorname{tg} \alpha$ deb belgilasak $y = kx + b$ (6.6) tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglama berilgan to'g'ri chiziqni tenglamasi. Chunki uni to'g'ri chiziqni istalgan $B(0;b)$ nuqtadan farqli $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari qanoatlantirishini ko'rdik. $B(0;b)$ nuqtaning koordinatalari ham uni qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. To'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.



5-rasm

$k = \operatorname{tg} \alpha$ son to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsienti** deb ataladi, chiziqning

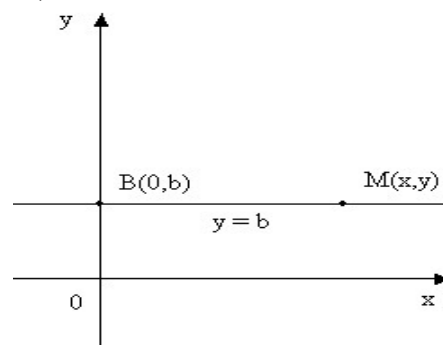
To'g'ri chiziqning (6.6) tenglamasi uning **burchak koeffitsientli** tenglamasi deyiladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $0x$ o'qqa parallel bo'lsin (6-rasm).

Bu holda $\alpha = 0$, $k = \operatorname{tg} 0 = 0$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziq tenglamasi $y=b$ (6.7)

ko'rinishiga ega bo'ladi. 6.7) $0x$ o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi. Xususiyl holda $y=0$ $0x$ o'qning tenglamasi.

To'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tsin. U holda $b=0$ bo'lib koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $y = kx$ (6.8) hosil bo'ladi.



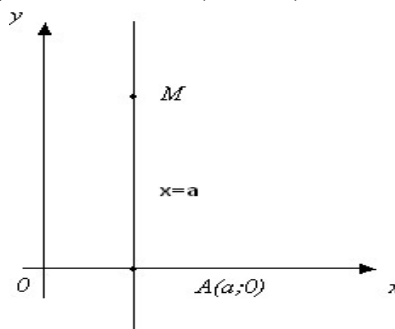
6-rasm

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $A(a;0)$ nuqtadan o'tib $0y$ o'qqa parallel bo'lsin (7-rasm)

Bu holda to'g'ri chiziq $0x$ o'q bilan 90° burchak tashkil etib $k = \operatorname{tg} 90^\circ$ mavjud bo'lmaganligi uchun uning tenglamasini (6.6) ko'rinishda yozib bo'lmaydi. To'g'ri chiziqning barcha nuqtalari a absissaga ega bo'lganligi uchun uning tenglamasi

$$x = a \quad (6.9)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, xususiyl holda $x=0$ $0y$ o'qning tenglamasi bo'ladi.



7-rasm

5. To'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi

Yuqorida to'g'ri chiziq tenglamasi dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali tenglama bo'lishini ko'rdik. Endi teskarisini isbotlaymiz.

1-teorema. Dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama to'g'ri chiziq tenglamasidir.

Isboti. Dekart koordinatalariga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \quad (6.10)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bunda A, B, C ma'lum sonlar bo'lib $A^2 + B^2 \neq 0$, ya'ni A bilan B bir vaqtga nolga teng emas.

a) $B \neq 0$ bo'lsin. U holda (6.10) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Buni (6.6) tenglama bilan taqqoslab u $0y$ o'qdan $-\frac{C}{A}$ ga

teng kesma ajratib $0x$ o'q bilan tangensi $-\frac{A}{B}$ ga teng bo'lgan α burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi ekaniga iqrar bo'lamiz.

Demak (6.10) tenglama ham to'g'ri chiziq tenglamasi ekan.

b) $B=0$ bo'lsin. U holda (6.10) tenglama

$$Ax + C = 0$$

ko'rinishiga ega bo'lib undan $x = -\frac{C}{A}$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $M\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$

nuqtadan o'tib $0y$ o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi.

2-ta'rif. $Ax + By + C = 0$ (6.10) ($A^2 + B^2 \neq 0$) tenglama **to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishidagi tenglamasi** deb ataladi.

Endi umumiy ko'rinishdagi tenglama bilan yanada batafsilroq tanishamiz.

1) $B=0$ bo'lsin. U holda tenglama

$$x = -\frac{C}{A}$$

ko'rinishga keltirilishini ko'rdik. Agar $C \neq 0$ bo'lsa to'g'ri chiziq $0y$ o'qqa parallel bo'ladi. $C=0$ bo'lsa tenglama $x=0$ ko'rinishga ega bo'lib bu holda to'g'ri chiziq $0y$ o'qda yotadi.

2) $A=0$ bo'lsin. U holda $B \neq 0$ va to'g'ri chiziq tenglamasi $y = -\frac{C}{B}$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu tenglama $0x$ o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasidir. $C=0$ bo'lganda bundan $y=0$ $0x$ o'qning tenglamasi hosil bo'ladi.

3) $C=0$ bo'lsin. U holda (6.10) tenglama $Ax+By=0$ yoki $y = -\frac{A}{B}x$ ko'rinishiga ega bo'ladi.

Oxirgi tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi ekanini bilamiz. Demak $C=0$ bo'lganda to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tar ekan.

Izoh. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy ko'rinishda berilganda tenglamadan y topilsa to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi hosil bo'ladi. Shuning uchun vaziyatga qarab to'g'ri chiziqning u yoki bu tenglamalaridan foydalanamiz.

6. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi

$Ax + By + C = 0$ va $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib ularning kesishish nuqtasini topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi har ikkala to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lganligi sababli uning koordinatalari har ikkala to'g'ri chiziq tenglamasini ham qanoatlantiradi, ya'ni

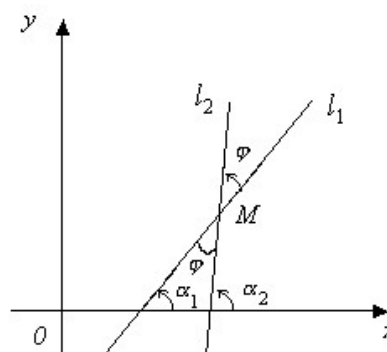
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

sistemaning yechimi bo'ladi.

7. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

M nuqtada kesishuvchi ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin. Shu to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchakning tangensini topamiz (8-rasm).

$\operatorname{tg} 90^\circ$ mavjud bo'lmaganligi uchun ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar emas deb faraz qilamiz. Ma'lumki uchburchakning tashqi burchagi (α_2) o'ziga qo'shni bo'lmagan ichki burchaklar (α_1, φ) ning yig'indisiga teng. Shunga ko'ra 8-rasmdan $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ ёки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ tenglikka ega bo'lamiz.



8-rasm

Bundan:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

α_1 va α_2 - $0x$ o'q bilan ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bo'lgani uchun $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$ bo'ladi.

Shuning uchun:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (6.12)$$

Demak, o'zaro perpendikulyar bo'lmagan ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning tangensi (6.12) formula yordamida topilar ekan.

9-misol. $y = -2x + 3$ va $y = 3x + 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Misolda $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ bo'lgani uchun

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - (-2)}{1 + (-2) \cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1, \quad \varphi = 135^\circ \text{ kelib chiqadi.}$$

Izoh. ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

formula yordamida topiladi.

Faraz qilaylik perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziqlar ℓ_1 va ℓ_2 umumiy ko'rinishdagi tenglamalari $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ yordamida berilgan bo'lib ular orasidagi φ burchakni tangensini topish talab etilsin. U holda to'g'ri chiziq tenglamalarini y ga nisbatan yechib

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \quad \text{va} \quad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamalariga ega bo'lamiz. (6.12) ga

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{va} \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

qiymatlarni qo'yib soddalashtirsak

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib umumiy tenglamalari yordamida berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (6.13)$$

formula yordamida topilar ekan.

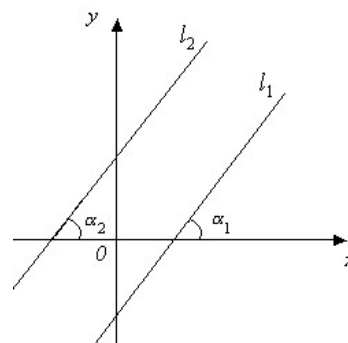
8. Ikki to'g'ri chiziqlar parallellik sharti

Faraz qilaylik to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsin. U holda to'g'ri chiziqlar Ox o'q bilan bir xil burchak tashkil etadi, ya'ni $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'ladi.

Demak $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ va $k_1 = k_2$ (6.14) bo'ladi

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'lib ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi. Ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlarni parallel sanab quyidagiga ega bo'lamiz.

Ikki to'g'ri chiziqning parallel bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsientlari teng bo'lishi zarur va yetarlidir. 9-rasm



9-rasm

9. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti

ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lganda (6.12) va (6.13) formulalar ma'noga ega bo'lmaydi. Shuning uchun bu holda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni kotangensini topamiz:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}.$$

Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar uchun $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ bo'lgani sababli

$$\frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0, \text{ bundan } 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \text{ yoki } k_1 \cdot k_2 = -1. \text{ Aksincha, } k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ bo'lsa to'g'ri}$$

chiziqlar perpendikulyar ekanini ko'rsatish mumkin.

Shunday qilib ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyar bo'lishi uchun $k_1 \cdot k_2 = -1$ (6.15) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Agar to'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishdagi $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ va $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ tenglamalari yordamida berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \quad \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1 \text{ yoki } A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (6.16)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

10. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti k ma'lum va to'g'ri chiziqni $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tishi aniq bo'lganda shu to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

$$y = kx + b \quad (6.6)$$

ni yozamiz. Bu yerdagi k ma'lum son b esa noma'lum. b ni to'g'ri chiziqni $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tish shartidan foydalanib topamiz. $M_1(x_1; y_1)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasi (6.6) ni qanoatlantiradi, ya'ni

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Bundan

$$b = y_1 - kx_1.$$

b ning topilgan qiymatini to'g'ri chiziq tenglamasi (6.6) ga qo'ysak

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

yoki

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad (6.17)$$

hosil bo'ladi. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deb aytiladi.

11. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1; y_1)$ nuqta hamda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq berilgan. Shu nuqtadan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etiladi. (6.17) formulaga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-y_1=k_1(x-x_1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi noma'lum k_1 ni to'g'ri chiziqlarni parallellik shartidan aniqlaymiz. Parallellik sharti (6.14) ga binoan $k_1=k$ bo'ladi.

Demak

$$y-y_1=k(x-x_1). \quad (6.18)$$

Bu berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

12. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi

Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan berilgan $y=kx+b$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etilsin (6.18) ga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-y_1=k_1(x-x_1)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan bu to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgani uchun (6.15) ga asosan $k \cdot k_1 = -1$ yoki $k_1 = -\frac{1}{k}$ bo'ladi.

$$\text{Demak} \quad y-y_1 = -\frac{1}{k}(x-x_1). \quad (16.19)$$

Bu tenglama berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

13. To'g'ri chiziqlar dastasi

1-ta'rif. Tekislikning M nuqtasidan o'tuvchi va shu tekislikda yotgan barcha to'g'ri chiziqlar to'plami to'g'ri chiziqlar **dastasi** deb ataladi.

Bunda M nuqta **dastaning markazi** deyiladi.

Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad (6.20)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi burchak koeffitsient k o'zgarsin. U holda k ning har bir aniq qiymatiga $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tuvchi aniq to'g'ri chiziq mos keladi. Aksincha absissalar o'qiga perpendikulyar $x=x_1$ to'g'ri chiziqdan farqli barcha to'g'ri chiziqlar aniq k burchak koeffitsientiga ega bo'lib u (6.20) tenglama yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib k burchak koeffitsient istalgan sonli qiymatni qabul qilganda (10.4) tenglama $x=x_1$ to'g'ri chiziqdan farqli markazi $M_1(x_1; y_1)$ nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasini tenglamasini ifodalaydi.

14. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab etilsin. Shartga ko'ra to'g'ri chiziq $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tganligi uchun uning tenglamasi (6.20) ga ko'ra

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi k noma'lum. Uni topish uchun to'g'ri chiziqning $M_2(x_2; y_2)$ nuqtadan o'tishi shartidan foydalanamiz. $M_2(x_2; y_2)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari shu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Bundan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

k ning ushbu topilgan qiymatini to'g'ri chiziq tenglamasi $y - y_1 = k(x - x_1)$ ga qo'ysak

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

yoki buni $(y_2 - y_1)$ ga bo'lsak

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (6.21)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Demak (6.21) berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir.

(6.21) da $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ deb faraz qilinadi, aks holda u ma'noga ega emas. Boshqacha aytganda to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmagan holni qaradik. Agar $x_1 = x_2$ bo'lsa to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel bo'lib, uning tenglamasi $x = x_1$ bo'ladi. Agar $y_1 = y_2$ bo'lsa, to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel bo'lib uning tenglamasi $y = y_1$ bo'ladi.

Izoh (6.21) tenglama to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham yaroqli.

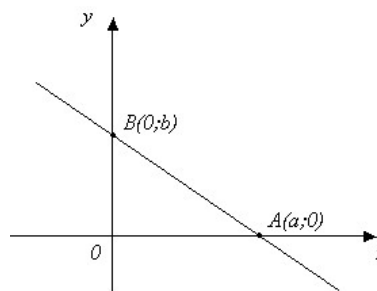
U holda (6.21) dagi qaysi kasrning maxraji nolga teng bo'lsa uning suratini ham nolga tenglashtirish kerak xolos.

15. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan u Ox o'qdan $OA=a$, Oy o'qdan $OB=b$ kesmalar ajratsin

U holda to'g'ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o'tishi ravshan. Shuning uchun ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (6.21) dan foydalanamiz: $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$ bo'lgani uchun $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$ yoki $\frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b}$, bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (6.22)$$



11-rasm

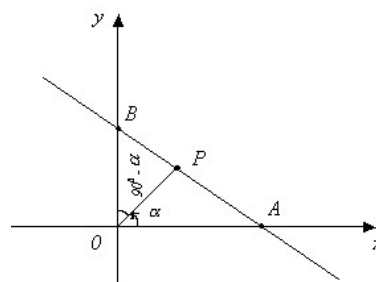
kelib chiqadi. Bu tenglama **to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb ataladi.

16. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tenglama orqali berilgan bo'lib u koordinatalar boshidan o'tmasin (13-rasm). To'g'ri chiziqqa OP perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini p , OP perpendikulyar bilan Ox o'q orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. p to'g'ri chiziqning **normali** deb ataladi.

Chizmadagi $\triangle AOP$ dan $\frac{OP}{OA} = \cos \alpha$;
 $OA = \frac{OP}{\cos \alpha} = \frac{p}{\cos \alpha}$; $a = \frac{p}{\cos \alpha}$, chunki
 $OA = a, OP = p$.

$\triangle OBP$ dan $\frac{OP}{OB} = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$; $OB =$
 $\frac{p}{\sin \alpha}$; $b = \frac{p}{\sin \alpha}$ chunki $OB = b, OP = p$.



13-rasm

a va b ning ushbu qiymatlarini to'g'ri chiziqning tenglamasiga qo'ysak $\frac{x}{\frac{p}{\cos \alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin \alpha}} = 1$

$$\text{yoki } x \cos \alpha + y \sin \alpha = p ; \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (6.23)$$

kelib chiqadi. (6.23)-to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasini o'ziga xos xususiyatlaridan biri undagi $p > 0$ va $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ bo'ladi.

17. To'g'ri chiziq tenglamasini normal ko'rinishiga keltirish

To'g'ri chiziq umumiy ko'rinishidagi tenglamasi $Ax + By + C = 0$ (6.10) yordamida berilgan bo'lsin. Shu tenglamani (6.23) ko'rinishdagi normal tenglamaga keltirish mumkinligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda (6.10) tenglamani shunday o'zgarmas son M ga ko'paytiramizki natijada

$$MAx + MB y + MC = 0 \quad (6.24)$$

to'g'ri chiziqning normal tenglamasi bo'lsin. Buni normal tenglama (6.23) bilan taqqoslab $M \cdot A = \cos \alpha$, $M \cdot B = \sin \alpha$, $M \cdot C = -p$ (β) ekaniga iqrar bo'lamiz. Oxirgi tenglamadan M , α , p noma'lumlarni aniqlash qiyin emas. U yerdagi birinchi ikkita tenglamani kvadratga ko'tarib hadlab qo'shsak

$$M^2 A^2 + M^2 B^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \quad M^2 (A^2 + B^2) = 1; \quad M^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}$$

bo'lib bundan
$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.25)$$

kelib chiqadi. M ni **normallovchi ko'paytuvchi** deb ataladi. (6.25) da ishora ozod had C ning ishorasiga qarama-qarshi olinadi. M ning topilgan qiymatini (β) ga qo'yib $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ va p larni aniqlash mumkin:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Shunday qilib koordinatalar boshidan $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofa

$$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.26)$$

formula yordamida topilar ekan.

18. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa

Aytaylik, $Q(x_0; y_0)$ nuqta hamda $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, Q nuqtadan to'g'ri chiziqqacha d masofani topish talab etilsin. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa deyilganda undan to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi. Oxy sistemani parallel ko'chirib koordinatalar boshini Q nuqtaga joylashtiramiz.

U holda

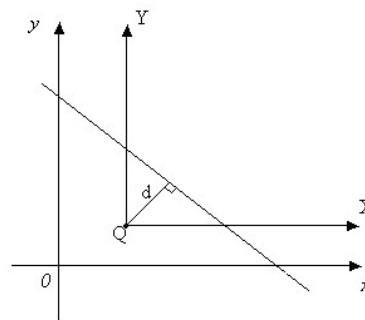
$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

bo'lib to'g'ri chiziq tenglamasi yangi QXY sistemaga nisbatan quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A(X+x_0)+B(Y+y_0)+C=0 \text{ yoki}$$

$$AX+BY+(Ax_0+By_0+C)=0. \quad Ax_0+By_0+C=C_0$$

deb belgilasak to'g'ri chiziq $AX+BY+C_0=0$ tenglamaga ega bo'ladi.



42-chizma

$Q(x_0; y_0)$ nuqta yangi sistemaning koordinatalar boshi bo'lganligi uchun undan to'g'ri chiziqqacha masofa (6.28) formula yordamida topiladi:

$$d = \frac{|C_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Bundan $C_0 = Ax_0 + By_0 + C$ ekanligini hisobga olib

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.29)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula **nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani topish** formulasi.

8-ma'ruza

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: Aylana. Ellips. Giperbola. Parabola.

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha

1-ta'rif. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (9.1) ko'rinishdagi tenglama **ikkinchi darajali algebraik tenglama** deb ataladi.

Bu yerdagi A, B, C, D, E, F ma'lum sonlar bo'lib ulardan A, B, C bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya'ni $A=B=C=0$ bo'lganda (9.1) tenglama

$$Dx + Ey + F = 0$$

ko'rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

2-ta'rif. Dekart koordinatalari x va y ra nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deb ataladi. (9.1) ikkinchi tartibli egri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziq'larga **aylana, ellips, giperbola** va **parabolalar** kiradi.

2. Aylana va uning kanonik tenglamasi

3-ta'rif. Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **aylana** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi $O_1(a; b)$ nuqtada bo'lib radiusi R ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (1^a-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x; y)$ desak aylananing ta'rifiga binoan:

$$MO_1 = R.$$

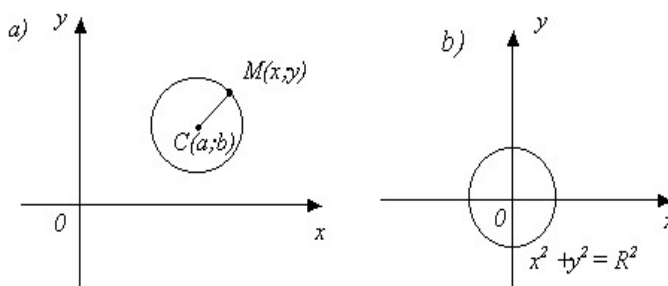
Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (9.2)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib aylananiing
stalgan $M(x,y)$ nuqtasining
koordinatalari (9.2) tenglamani
anoatlantirar ekan. Shuningdek
ylanaga tegishli bo'lmagan hech bir
uqtaning koordinatalari (9.2) tenglamani
anoatlantirmaydi. Demak (9.2) aylana
englamasi.



1-rasm

U aylananiing **kanonik** (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiyl holda aylananiing markazi $C_1(a,b)$ koordinatalar boshida bo'lsa $a=b=0$ bo'lib uning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (9.3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi (1^b-chizma).

Endi aylananiing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi (9.1) bilan taqqoslaymiz. (9.2) da qavslarni ochib ma'lum almashtirishlarni bajarsak u

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (9.4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (9.1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi koeffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi xy ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni $A=C$ va $B=0$.

(9.1) tenglamada $A=C$ va $B=0$ bo'lsa u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.

Soddalik uchun $A=C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (9.5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamani hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan $\frac{D^2}{4}$ va $\frac{E^2}{4}$ ni ham qo'shamiz ham ayirimiz.

U holda

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} + F = 0$$

yoki

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \quad (9.6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

1) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$ (yoki $D^2 + E^2 > 4F$). Bu holda (9.6) tenglamani (9.2) bilan

taqqoslab u va unga teng kuchli (9.5) tenglama ham markazi $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtada, radiusi

$R = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

2) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F = 0$. Bu holda (9.6) tenglama

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F < 0$. Bu holda (9.6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa manfiy emas.

Xulosa. (9.1) tenglama $A=C$, $B=0$, $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$

bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalay ekan.

3. Ellips va uning kanonik tenglamasi

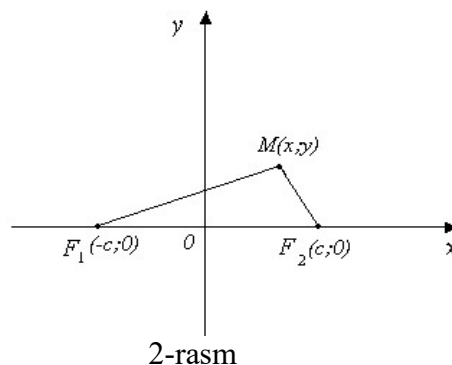
4-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni ellipsning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini $2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini Ox o'qini ellipsning fokuslari F_1 va F_2 orqali o'tkazib F_1 dan F_2 tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (2-rasm).

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra M nuqtadan ellipsning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas son $2a$ ga teng, ya'ni

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra



$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \text{yoki} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlaymiz:

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$$4cx = 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad cx = a^2 - a \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$a^2 - cx = a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Buni yana ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]; \quad a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2];$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2; \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (9.7)$$

hosil bo'ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak ΔF_1MF_2 dan (2-rasm) $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$; $2a > 2c$; $a > c$; $a^2 - c^2 > 0$ ($a > 0$, $c > 0$) bo'ladi.

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ deb belgilab uni (9.7) ga qo'yamiz. U holda}$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

yoki buni $a^2 b^2$ ga bo'lsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.8)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (9.8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (9.8) ellipsning tenglamasi. U ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar boshi **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning **simmetriya o'qlari** bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning **fokal o'qi** deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari** deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B(0;b)$ nuqtalar ellipsning uchlari.

a va b sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va ε orqali belgilanadi. Ellips uchun $0 < \varepsilon < 1$ bo'ladi, chunki $c < a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

$$\text{Haqiqatan, } a^2 - c^2 = b^2 \text{ tenglikni } a^2 \text{ ga bo'lsak } 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ yoki } \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$$

bo'ladi. Bundan ekssentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning kichik yarim o'qi uning katta yarim o'qidan shunchalik kam farq qilishini ko'ramiz.

$b=a$ bo'lganda ellips tenglamasi $x^2 + y^2 = a^2$ ko'rinishiga ega bo'lib ellips aylanaga aylanadi. Bu holda $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$, bo'lgani uchun $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$ bo'ladi.

Demak aylana ekssentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

Endi ellipsni shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I-chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (9.8)ni y ga nisbatan yechsak

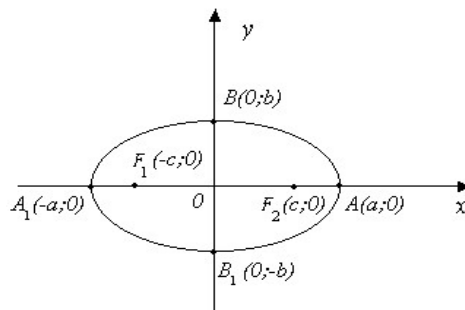
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \quad y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2); \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

bo'ladi, bunda $0 < x < a$, chunki $x > a$ bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi. x 0 dan a gacha o'sganda y b dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I-chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan $B(0;b)$ va $A(a;0)$ nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (3-rasm).

Ellipsning kanonik tenglamasida x ni $-x$ ga va y ni $-y$ ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asoslanib uning shakli 3-rasm ko'rsatilgandek ekanligiga iqrar bo'lamiz.



3-rasm

3-misol. Kichik yarim o'qi $b=4$ va ekssentrisiteti $\varepsilon=0,6$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi yezilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$; $c = 0,6a$, $a^2 - c^2 = b^2$

tenglikka c va b ning qiymatlarini qo'yib a ni aniqlaymiz.

$$a^2 - (0,6a)^2 = 4^2; a^2(1 - 0,36) = 16; 0,64a^2 = 16; a^2 = \frac{16}{0,64} = 25.$$

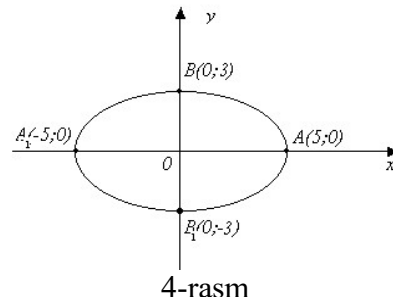
Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ko'rinishda bo'lar ekan.

4-misol. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ tenglamaga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziqlarning turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $9x^2 + 25y^2 = 225$ ko'rinishda yozib buni 225 ga bo'lsak

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama yarim o'qlari $a=5$, $b=3$ bo'lgan ellipsni tenglamasi ekan (4-rasm)



4-rasm

5-misol. $4x^2 - 16x + 9y^2 - 54y + 61 = 0$ egri chiziq chizilsin.

Yechish. Tenglamani $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 = 0$;

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 16 - 81 + 61 = 0; 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 36$$

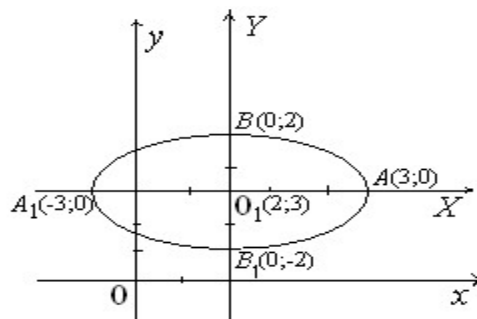
ko'rinishda yozib buni 36 ga bo'lsak $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ yoki

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1 \text{ tenglama hosil bo'ladi. } x-2=X; y-3=Y \text{ almashtirish olsak}$$

$$\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1 \text{ kelib chiqadi.}$$

Bu ellipsning O_1XY sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar Oxy "eski" sistemani $O_1(2,3)$ nuqtaga parallel kuchirilsa ya'ni O_1XY sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan (5-rasm)



5-rasm

4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi

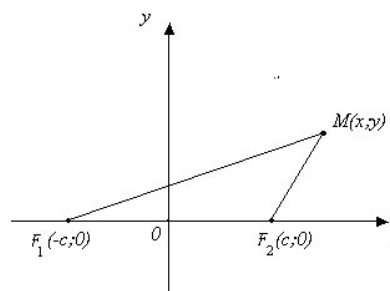
5-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **giperbola** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni giperbolaning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning ayirmasini $\pm 2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya'ni Ox o'qni F_1, F_2 fokuslaridan o'tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (6-rasm).

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

Ta'rifga binoan giperbolaning M nuqtasidan uning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas son $\pm 2a$ ga teng, ya'ni



6-rasm

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (9.9)$$

kelib chiqadi.

Ellips tenglamasini chiqarishda bajarilgan amallarga o'xshash amallarni bajarib $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ (9.10)

tenglamaga ega bo'lamiz. Ma'lumki uchburchakning ikki tomonini ayirmasi uchinchi tomonidan kichik. Shunga ko'ra ΔF_1MF_2 dan

$F_1M - F_2M < F_1F_2$; $2a < 2c$; $a < c$; $a^2 - c^2 < 0$ ($a > 0, c > 0$) hosil bo'ladi. Shuning uchun $a^2 - c^2 = -b^2$ yoki $c^2 - a^2 = b^2$ deb belgilab olamiz. U holda (9.10) formula

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad \text{yoki} \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni a^2b^2 ga bo'lib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (9.11) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi.

(9.11) giperbolaning **kanonik** tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida x va y juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Ya'ni qaralayotgan holda koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari ham bo'ladi.

Giperbolaning simmetriya o'qlarini kesishish nuqtasi **giperbolaning markazi** deb ataladi.

Giperbolaning fokuslari joylashgan simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Endi giperbolaning shaklini chizishga harakat qilamiz. Oldin uning shaklini I-chorakda chizamiz.

Giperbolaning kanonik tenglamasi (9.11) dan

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1; \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}; \quad y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}; \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

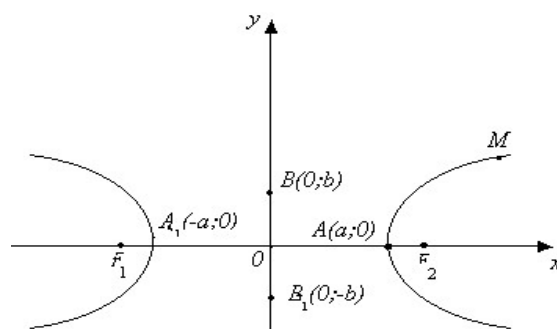
kelib chiqadi, chunki I-chorakda $y \geq 0$. Bunda $x \geq a$, aks holda u ma'noga ega bo'lmaydi (ildiz ostida manfiy son bo'ladi). x a dan $+\infty$ gacha o'zgarganda y 0 dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Demak giperbolaning I-chorakdagi qismi 7-rasm tasvirlangan AM yoydan iborat bo'ladi.

Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligini hisobga olsak uning shakli 7-rasmda tasvirlangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

Giperbolaning fokal o'q bilan kesishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga $y=0$ ni qo'ysak $x=\pm a$ kelib chiqadi. Demak $A_1(-a;0)$ va $A(a;0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari bo'ladi.

Giperbolaning tenglamasi (9.11) ga $x=0$ ni qo'ysak

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1; y = \pm\sqrt{-b^2} \text{ bo'ladi.}$$



7-rasm

Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi). Demak giperbola Oy o'q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi **haqiqiy o'qi** unga perpendikulyar o'qi **mavhum o'qi** deb ataladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum yarim o'qlari** deyiladi.

Giperbolaning M nuqtasi u bo'ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan $y = -\frac{b}{a}x$ va $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Ya'ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari $y = -\frac{b}{a}x$ va $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlardan biriga yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari Ox va Oy o'qlarga parallel va mos ravishda $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

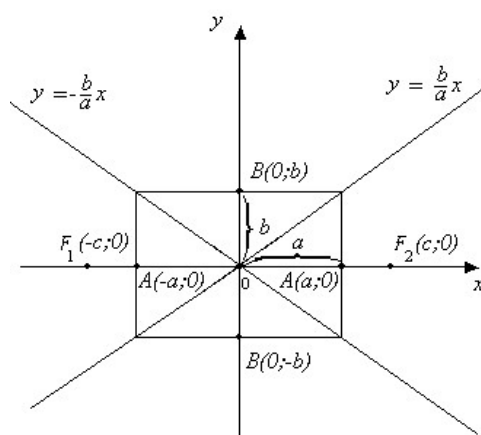
To'rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi(8-rasm).

$\frac{c}{a}$ nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va ε orqali belgilanadi. Giperbola uchun $c > a$ bo'lganligi sababli $\varepsilon > 1$ bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan, $c^2 - a^2 = b^2$ tenglamani har ikkala tomonini a^2 ga bo'lsak $\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\varepsilon^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ kelib chiqadi. ε

kichrayganda $\frac{b}{a}$ nisbat ham kichrayadi. Ammo $\frac{b}{a}$ nisbat giperbolaning asosiy to'rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi. ε qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ nisbat ham ya'ni giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsientlari ham shunchalik kichik bo'ladi va giperbola Ox o'qqa yaqinroq joylashadi.

Bu holda giperbolani asosiy to'rtburchagi Ox o'q bo'ylab cho'zilgan bo'ladi.



Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola **teng tomonli** yoki **teng yonli** deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo'lib uning ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$ bo'ladi.

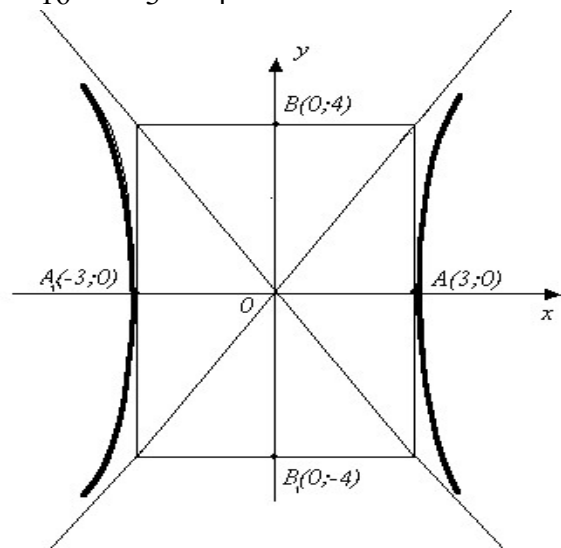
6-misol. $16x^2 - 9y^2 = 144$ egri chiziq chizilsin.

Yechish. Uni har ikkala tomonini 144 ga bo'lsak

$$\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o'qlari $a=3$ va $b=4$ bo'lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari koordinata o'qlariga parallel hamda asosi 6 balandligi 8 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz.

Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz. Giperbolaning uchlari $A_1(-3;0)$ va $A(3;0)$ nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo'ladi (9-rasm).



9-rasm

7-misol. $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Koordinata o'qlarini $\alpha = \frac{\pi}{4}$ burchakka burib "yangi" OXY sistemani hosil qilamiz. Bu holda «yangi» koordinatalardan «eski» koordinatalarga o'tish formulasi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$ ko'rinishda bo'ladi. x va y ning ushbu qiymatlarini $y = \frac{k}{x}$

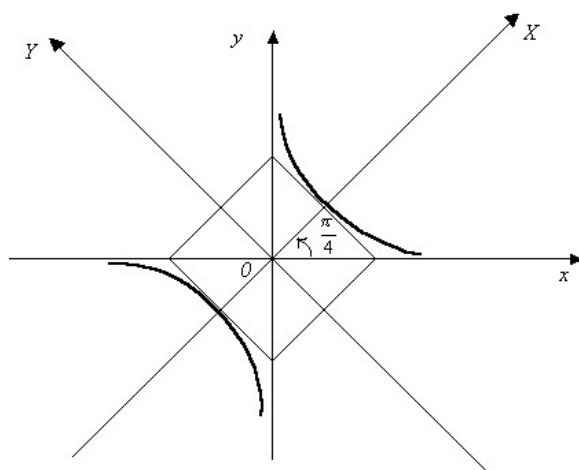
tenglamaga qo'ysak $\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)(X - Y) = k$ yoki

$X^2 - Y^2 = 2k$ hosil bo'ladi. Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasi. $k > 0$ bo'lganda giperbolaning haqiqiy o'qi OX bilan, $k < 0$ bo'lganda OY o'q bilan ustma-ust tushadi.

$k > 0$ bo'lgan hol uchun giperbola 10-rasm tasvirlangan.

Ox, Oy “eski” o’qlar OXY “yangi” sistemani koordinata burchaklarini bissektoralari bo’lgani uchun ular teng tomonli giperbolani asimptotalari bo’ladi. Shunday qilib $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi asimptotalari Ox va Oy o’qlardan iborat tengtomonli giperbola bo’lar ekan.

Shuningdek $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-chiziqli funksiyaning grafigi ham asimptotalari koordinata o’qlariga parallel tengtomonli giperbola ekanligini ko’rsatish mumkin.



10-rasm

5. Parabola va uning kanonik tenglamasi

6-ta’rif. Berilgan nuqtadan hamda berilgan to’g’ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o’rniga **parabola** deb ataladi.

Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ataymiz. Berilgan to’g’ri chiziqni parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

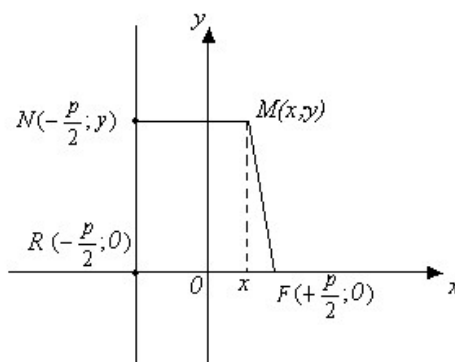
Fokusdan direktrisagacha masofani p orqali belgilaymiz va uni parabolaning **parametri** deb ataymiz.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Absissalar o’qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o’tkazib yo’nalishini direktrisadan fokusga tomon yo’naltiramiz.

Koordinatalar boshini fokusdan direktrisagacha masofa FR ning qoq o’rtasiga joylashtiramiz (11-rasm).

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan fokus $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ koordinatalarga, direktrisa $x = -\frac{p}{2}$ tenglamaga ega bo’ladi.

Faraz qilaylik $M(x; y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. Parabolaning ta’rifiga binoan



11-rasm

M nuqtadan direktrisagacha MN masofa undan fokusgacha MF masofaga teng: $MN=MF$.

11-rasmdan $MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2}$ va $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2}$ ekani ravshan.

$$\text{Demak, } x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko’tarib ixchamlasak

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \quad \text{yoki} \quad y^2 = 2px \quad (9.12)$$

hosil bo’ladi.

Shunday qilib parabolaning istalgan $M(x, y)$ nuqtasining koordinatalari (9.12) tenglamani qanoatlantiradi. Parabolada yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko’rsatish mumkin. Demak (9.12) parabolaning tenglamasi

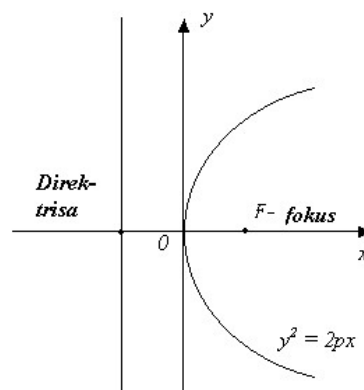
ekan. U parabolaning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. p parabolaning parametri deb yuritiladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko'ra parabolani shaklini chizamiz (9.12) tenglamada y ni $-y$ ga almashtirilsa tenglama o'zgarmaydi. Bu abssissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qidan iborat ekanligini bildiradi. (9.12) tenglamaning chap tomoni manfiy bo'lmaganligi uchun uning o'ng tomoni ya'ni x ning ham manfiy bo'lmashligi kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'qning o'ng tomonida joylashadi. $x=0$ da $y=0$. Demak parabola koordinatalar boshidan o'tadi.

x cheksiz o'sganda y ning absolyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (9.12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 12-rasmda tasvirlangan.

Parabolaning simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning **uchi** deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.



12-rasm

8-misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasi yozilsin va fokusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (9.12) bilan taqqoslab $2p=8$, $p=4$ ekanini ko'ramiz. Direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga, fokus $(-\frac{p}{2}, 0)$ koordinatalarga ega bo'lishini hisobga olsak direktrisaning tenglamasi $x=-2$ va fokus $F(2;0)$ bo'ladi.

Izoh. Fokal o'qi Oy o'qdan iborat parabolaning tenglamasi

$$x^2=2py \quad (9.13)$$

ko'rinishga ega bo'ladi

9-misol. $y=3x^2-12x+16$ parabolaning tenglamasi kanonik holga keltirilsin va uning uchi topilsin.

Yechish. Tenglamani

$$y=3(x^2-4x)+16, y=3(x^2-4x+4-4)+16; y=3(x-2)^2+4; y-4=3(x-2)^2$$

ko'rinishga keltirib $x-2=X$, $y-4=Y$ deb belgilasak parabolaning tenglamasi

$$Y=3X^2$$

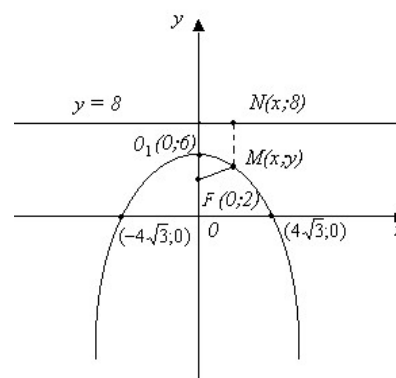
kanonik ko'rinishga keladi. $x-2=X$, $y-4=Y$ almashtirish bilan "eski" Oxy sistemani $O_1(2;4)$ nuqtaga parallel ko'chirdik. "Yangi" O_1XY sistemaga nisbatan parabolaning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'ladi. "Yangi" sistemani koordinatalar boshini koordinatalari parabola uchining koordinatalari bo'ladi, ya'ni $x_0=2$, $y_0=4$.

10-misol. $F(0,4)$ nuqtadan hamda $y=8$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni, egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. $M(x,y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga binoan undan $y=8$ to'g'ri chiziqqacha $MN = \sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2}$ masofa va undan $F(0,2)$ nuqtagacha

$$MF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

masofa o'zaro teng ya'ni,



13-rasm

$$\sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \quad (13\text{-rasm}).$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak $(8-y)^2 = x^2 + (y-4)^2$ yoki qavslarni ochsak.

$$64 - 16y + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \quad \text{yoki} \quad 64 - 16y = x^2 - 8y + 16$$

hosil bo'ladi. Tenglamani soddalashtirish

$$-16y + 8y = x^2 + 16 - 64, \quad -8y = x^2 - 48$$

yoki -8 ga bo'lsak

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + 6$$

tenglamaga ega bo'lamiz. U Oy o'qqa simmetrik parabolaning tenglamasi.

Endi parabolaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Parabola tenglamasiga $x=0$ qiymatni qo'ysak $y=6$ kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'q bilan $O_1(0,6)$ nuqtada kesishar ekan. Shuningdek parabolaga tenglamasiga $y=0$ qiymatini qo'ysak

$$-\frac{1}{8}x^2 + 6 = 0; \quad -x^2 + 48 = 0; \quad x^2 = 48; \quad x = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

hosil bo'ladi. Demak parabola Ox o'q bilan $(-4\sqrt{3}, 0)$ va $(4\sqrt{3}, 0)$ nuqtalarda kesishar ekan.

Agar parabola tenglamasini $y - 6 = -\frac{1}{8}x^2$ yoki $x^2 = -8(y-6)$ ko'rinishda yozib $x=X$, $y-6=Y$ almashtirish olsak uning tenglamasi $X^2 = -8Y$ kanonik shaklni oladi.

Izoh. Aylana, ellips, giperbola va parabola umumiy tenglamalari yordamida berilganda koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlarini burish yordamida umumiy tenglamani "yangi" sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

9-ma'ruza

Tekislik va uning tenglamalari. Fazoda to'g'ri chiziq va uning tenglamalari.

Reja:

1. sirt tenglamasi
2. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi
3. Tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi
4. Tekislikni uning tenglamasiga ko'ra yasash
5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi
6. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi
7. Tekislikning normal tenglamasi
8. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari
10. Nuqtadan tekislikgacha masofa

1. sirt tenglamasi

$F(x,y,z)=0$ (9.1) tenglama ham $Oxyz$ fazodagi koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiruvchi sirtni aniqlaydi. (9.1) tenglama ana shu sirtning tenglamasi deb aytiladi, x,y,z esa dekart koordinatalari deyiladi.

Istalgan $F(x,y)=0$ tenglama har doim egri chiziqni va $F(x,y,z)=0$ tenglama har doim sirtni aniqlaydi deb o'ylash noto'g'ri. Eng oddiy sirt bu fazoda tekislikdir.

2. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$Oxyz$ fazoni hamda unda berilgan T tekislikni qaraymiz.

1-ta'rif. Tekislikka perpendikulyar vektor tekislikning **normal** vektori deb ataladi.

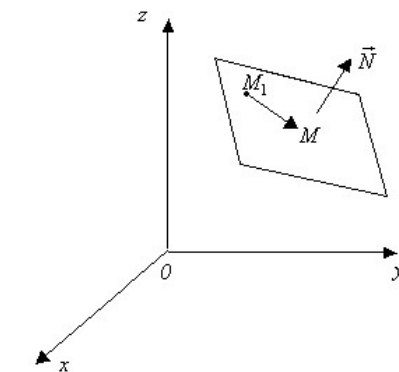
Tekislikning bitta $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasi hamda normal vektori $\vec{N} = \{A; B; C\}$ berilganda

uning tenglamasini keltirib chiqaramiz (1-rasm). Faraz qilaylik

$M(x,y,z)$ Q tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$\vec{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$ vektorni

qaraymiz. Bu vektor T tekislikda yotadi. $\vec{N}$ vektor T tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun u shu tekislikda yotgan $\vec{M_1M}$ vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyar bo'lishi uchun ularni skalyar ko'paytmasi $\vec{M_1M} \cdot \vec{N} = 0$ bo'lishi muqarrar edi. Koordinatalari



1-rasm.

yordamida berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytmasini topish formulasi ga ko'ra

$$\vec{M_1M} \cdot \vec{N} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$\text{yoki } A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (9.2)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib T tekislikning ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtasining koordinatalari (9.2) tenglamani qanoatlantirar ekan. T tekislikda yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu holda $\vec{M_1M}$ va $\vec{N}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lmaganligi uchun ularning skalyar ko'paytmasi noldan farqli, ya'ni $\vec{M_1M} \cdot \vec{N} \neq 0$ bo'ladi.

Demak (9.2) tenglama Q tekislikning tenglamasi (9.2) tenglama berilgan nuqtadan o'tuvchi **tekislik tenglamasi** deb ataladi.

Shunday qilib, har qanday tekislikka dekart koordinatalari x, y, z larga nisbatan birinchi darajali tenglama mos kelishini ko'rsatdik.

2–ta‘rif. Fazoning M nuqtasidan o‘tuvchi tekisliklar to‘plami **tekisliklar bog‘lami** deb ataladi. M nuqta **bog‘lamning markazi** deyiladi.

A, B, C koeffitsientlar har xil qiymatlarni qabul qilganda (9.2) tenglama markazi $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada bo‘lgan tekisliklar bog‘lamining tenglamasini ifodalaydi.

3. Tekislikning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi

Biz yuqorida tekislik tenglamasi dekart koordinatalari x, y va z ga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglama ekanini ko‘rdik. Endi aksini ya‘ni x, y va z ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama tekislik tenglamasi ekanini ko‘rsatamiz.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (9.3)$$

tenglamaga ega bo‘laylik. Bu yerdagi A, B, C, D ma‘lum sonlar bo‘lib ulardan A, B, C koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda biz tenglama emas balki $D=0$ ayniyatga ega bo‘lamiz.

$C \neq 0$ deb faraz qilib (9.3) tenglamani

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0 \quad (9.4)$$

ko‘rinishda yozamiz. Bu tenglamani (9.2) tenglama bilan taqqoslab u $M_1\left(0; 0; -\frac{D}{C}\right)$

nuqtadan o‘tib $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normal vektorga ega tekislik tenglamasi ekanini ko‘ramiz.

(9.3) tenglama **tekislikning umumiy tenglamasi** deb ataladi.

Endi tekislikning umumiy tenglamasining xususiy hollari bilan tanishib chiqamiz.

1. Ozod had $D=0$ bo‘lsin. Bu holda tekislik tenglamasi $Ax + By + Cz = 0$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. $x=0, y=0, z=0$ bu tenglamani qanoatlantirgani uchun tekislik koordinatalar boshi $O(0; 0; 0)$ nuqtadan o‘tadi. Demak tekislik tenglamasining ozod hadi nolga teng bo‘lganda tekislik koordinatalar boshidan o‘tar ekan.

2. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi koeffitsientlardan biri, masalan $C=0$ bo‘lsin. Bu holda tenglama $Ax + By + D = 0$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. $C = pr_{oz} \vec{N} = 0$ dan $\vec{N}$ normal vektorning Oz o‘qqa perpendikulyarligi va tekislikning Oz o‘qqa parallelligi kelib chiqadi. Agar $Ax + By + D = 0$ tenglamani Oxy tekislikda qarasak u to‘g‘ri chiziqlarning umumiy tenglamasini ifoda etadi. Biz qaraydigan holda Oz o‘qqa parallel tekislik Oxy tekislikni ana shu to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesib o‘tadi.

Shunga o‘xshash $Ax + Cz + D = 0$ tekislik Oy o‘qqa parallel, $By + Cz + D = 0$ tekislik esa Ox o‘qqa parallel ekanligini ko‘rsatish mumkin: agar tekislik tenglamasida dekart koordinatalari x, y, z lardan qaysi biri qatnashmasa tekislik o‘sha koordinataga mos o‘qqa parallel bo‘ladi.

3. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi koeffitsientlardan biri va ozod had nolga teng, masalan $C=D=0$ bo‘lsin. Bu holda $Ax + By = 0$ tenglama 1–bandga asosan koordinatalar boshidan o‘tadi va 2–bandga ko‘ra u Oz o‘qqa parallel bo‘lishi lozim. Demak $Ax + By = 0$ tekislik Oz o‘q orqali o‘tadi.

Shuningdek $By + Cz = 0$ va $Ax + Cz = 0$ tenglamalarga Ox va Oy o‘qlar orqali o‘tuvchi tekisliklar mos keladi.

4. Tenglamada dekart koordinatalari koeffitsientlaridan ikkitasi nolga teng bo‘lsin. Masalan, $A=B=0$. Bu holda $Cz + D = 0$ tekislik 3–banddagi mulohazaga ko‘ra ham Ox o‘qqa, ham Oy o‘qqa parallel bo‘ladi. Demak u Oxy tekislikka parallel bo‘ladi. Shuningdek $Ax + D = 0$ va $By + D = 0$ tekisliklar Oyz va Oxz koordinata tekisliklariga parallel tekisliklarning tenglamalaridir.

5. Tenglamada ikkita dekart koordinatalarining koeffitsientlari hamda ozod had nolga teng bo‘lsin. Masalan, $A=B=D=0$. U holda tenglama $Cz = 0$ yoki $z=0$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. 4–banddagi mulohazalarga ko‘ra u Oxy tekislikka parallel. 1–bandga asosan u koordinatalar boshidan o‘tadi. Demak $z=0$ – Oxy tekislikning tenglamasi. Shuningdek $y=0$ – Oxz tekislikning tenglamasi, $x=0$ – Oyz tekislikning tenglamasidir.

4. Tekislikni uning tenglamasiga ko‘ra yasash

Tekislikning ma'lum tenglamasiga ko'ra uni yasash qiyin emas. Buning uchun tekislikning bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta ixtiyoriy nuqtasini bilish kifoya. Tekislikning nuqtasini uning $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasidagi koordinatalardan ixtiyoriy ikkitasiga ma'lum qiymatlar tayinlab uchinchi koordinatani shu tenglamadan aniqlash orqali topiladi.

Agar tekislik koordinata o'qlariga parallel bo'lmasa tekislikni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topgan ma'qul.

1-misol. Oz o'qqa parallel hamda $A_1(2;3;-1)$ va $B_1(-1;2;4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

Yechish. Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasi

$$Ax+By+D=0 \quad (*)$$

ko'rinishga ega ekanligini ko'rdik (Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasida z koordinata ishtirok etmaydi).

Agar tekislik biror nuqtadan o'tsa bu nuqtaning koordinatalari o'sha tekislik tenglamasini qanoatlantiradi. Tekislik tenglamasi (*) ga A_1 va B_1 nuqtalarning koordinatalarini qo'yib

$$\begin{cases} 2A + 3B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini yechimini topish formulasidan foydalanib yechamiz.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot k; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k; \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot k; \quad A = k; \quad B = -3k; \quad D = 7k.$$

A, B va C ning topilgan qiymatlarini (*) ga qo'ysak $kx-3ky+7k=0$ yoki k

ga qisqartirilsa $x-3y+7=0$ tekislik tenglamasi

kelib chiqadi. Tekislik Oxy tekislikni $x-3y+7=0$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi (3-rasm).

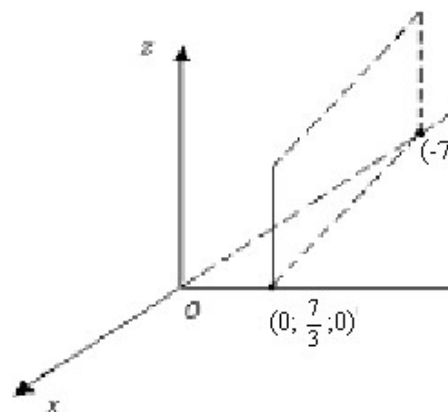
Shuning uchun tekislikni chizishdan oldin to'g'ri chiziqni chizamiz. Tenglamaga $x=0$ qiymatni

qo'ysak $-3y+7=0$, $y=\frac{7}{3}$ va $y=0$ qiymatni

qo'ysak $x=-7$ kelib chiqadi. Demak to'g'ri chiziq

Oxy tekislikning $\left(0; \frac{7}{3}\right)$ va $(-7;0)$ nuqtalaridan

o'tar ekan.



3-rasm

5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Tekislik tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ da A, B, C, D koeffitsientlaridan hech biri nolga teng bo'lmasin.

Ozod had D ni tenglamaning o'ng tomoniga o'tkazsak

$$Ax+By+Cz=-D$$

bo'ladi. Bu tenglamani har ikkala tomonini $-D$ ga bo'lsak

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

hosil bo'ladi.

$$-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$$

belgilashni kiritsak tekislik tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (9.5)$$

ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu tenglama **tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb ataladi. Bu yerdagi a, b, c lar tekislikning $0x, 0y, 0z$ o'qlardan ajratgan kesmalari.

6. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lib ular orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini topish talab etilsin. $M(x, y, z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M} &= (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}, \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \text{ va} \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k} \end{aligned}$$

vektorlar shu tekislikda yotadi, ya'ni ular komplanar bo'ladi. Uch vektorning komplanarlik sharti $(\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$ ga binoan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama **uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi**.

7. Tekislikning normal tenglamasi

$Oxyz$ fazoda koordinatalar boshidan o'tmovchi T tekislik berilgan bo'lsin. Koordinatalar boshidan tekislikka OP perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini p orqali va perpendikulyarning $0x, 0y, 0z$ o'qlar bilan tashkil etgan burchaklarini mos ravishda α, β, γ lar orqali belgilaymiz. U holda tekislik tenglamasini

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (9.7)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'ladi. (9.7) tekislikni **normal** tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamaning o'ziga xos xususiyatlaridan biri $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ va $p > 0$.

Agar tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umumiy ko'rinishdagi tenglamasi yordamida berilsa bu tenglikni normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ga ko'paytirish natijasida tekislikning normal tenglamasiga keltiriladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi ozod hadning ishorasiga qarama – qarshisi olinadi.

$$\text{Demak: } \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z - \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

tekislikning normal tenglasini va

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9.8)$$

koordinatalar boshidan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikgacha masofani ifodalaydi.

7-misol. $5x + 7y - 34z + 5 = 0$ tekislik tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin.

Yechish. Ozod had $5 > 0$ bo'lgani uchun normallovchi ko'paytuvchi N oldida minus ishora olinadi. Misolda $A=5, B=7, C=-34$ bo'lgani sababli $N = -\frac{1}{\sqrt{5^2 + 7^2 + (-34)^2}}; N = -\frac{1}{\sqrt{1230}}$

. Berilgan tenglamani bunga ko'paytirsak

$$-\frac{5}{\sqrt{1230}}x - \frac{7}{\sqrt{1230}}y + \frac{34}{\sqrt{1230}}z - \frac{5}{\sqrt{1230}} = 0$$

tekislikning normal tenglamasi kelib chiqadi.

8–misol. Koordinatalar boshidan $10x+15y-6z-380=0$ tekislikkacha masofa topilsin va shu perpendikulyarning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarning kosinuslari topilsin.

Yechish. Ozod son $-380 < 0$ bo'lganligi uchun normallovchi ko'paytuvchi oldida plus ishora

$$\text{olinadi: } N = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 15^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{361}} = \frac{1}{19}.$$

$$(9.8) \text{ formulaga binoan koordinatalar boshidan tekislikgacha masofa } P = \frac{|-380|}{19} = \frac{380}{19} = 20$$

bo'ladi. Endi burchak kosinuslarini topamiz:

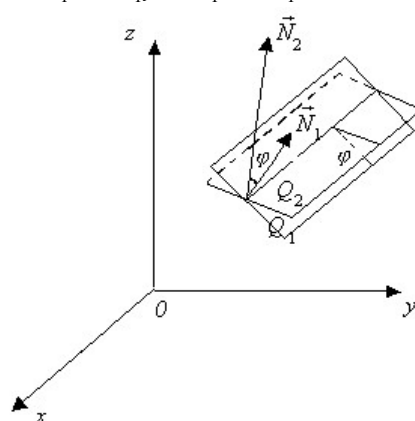
$$\cos \alpha = \frac{A}{N} = \frac{10}{19}, \quad \cos \beta = \frac{B}{N} = \frac{15}{19}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{N} = -\frac{6}{19}.$$

8. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Kesishuvchi Q_1 va Q_2 tekisliklar mos ravishda $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(Q_1 tekislik) va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (Q_2 tekislik)

tenglamalari yordamida berilgan bo'lsin. Ikki tekislik orasidagi burchak deganda tekisliklar tashkil etgan ikki yoqli burchaklardan biri tushuniladi. Q_1 va Q_2 tekisliklarning normal vektorlari $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ orasidagi burchak ana shu burchaklardan birini ifodalaganligi uchun tekisliklar orasidagi burchakni topish ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topishga keladi (6-rasm).



6-rasm

$$\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k} \quad \text{va} \quad \vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$$

vektorlar orasidagi burchak

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (9.9)$$

formula yordamida topilishini bilamiz. Ana sha formula Q_1 va Q_2 tekisliklar orasidagi burchakni topish formulasi bo'lib xizmat qiladi.

9–misol. $5x-3y+4z-4=0$ va $3x-4y-2z+5=0$ tekisliklar orasidagi o'tkir burchak topilsin.

Yechish. Bu yerda $A_1=5, B_1=-3, C_1=4; A_2=3, B_2=-4, C_2=-2$ bo'lgani uchun (9.9) formulaga binoan:

$$\cos \varphi = \left| \frac{5 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) + 4 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{15 + 12 - 8}{\sqrt{50} \sqrt{29}} \right|;$$

$$\cos \varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}}; \cos \varphi = 0,4990; \varphi = 60^\circ 04'.$$

Tekisliklar orasidagi o'tkir burchakni topish talab etilganligi sababli (12.9) formulaning o'ng tomonidagi ifodani absolyut qiymatini oldik.

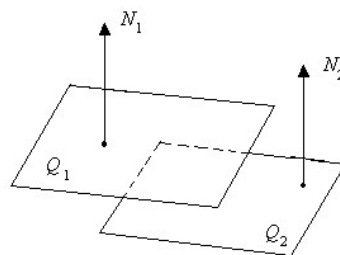
1. Tekisliklarning parallellik sharti. Q_1 va Q_2 tekisliklar faqatgina ularning normal vektorlari $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ va $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ parallel (kollinear) bo'lganligida parallel bo'ladi (63-chizma).

Shuning uchun ikki vektorning parallellik shartidan

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (9.10)$$

ga ega bo'lamiz. Bu tekisliklarning ham parallellik shartidir. Demak ikki tekisliklarning mavjud koordinatalari oldidagi koeffitsientlari proporsional bo'lganda va faqat shu holdagina ular **parallel** bo'lar ekan.

Endi berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan



7-rasm

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \quad (**)$$

tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasini topamiz. Buning uchun $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozamiz. Uning

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (***)$$

ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. Bu tekislik berilgan (**) tekislikka parallel bo'lishi uchun

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

shart bajarilishi kerak. Demak

$$A = A_1, B = B_1, C = C_1$$

deb olishimiz mumkin. Ushbu qiymatlarni tekislik tenglamasi (***)ga qo'yib $A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0$ (9.11) tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama berilgan **tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi**.

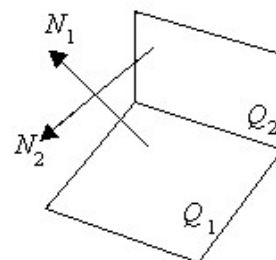
2. Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti. Ikki tekislik ularning normal vektorlari $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ o'zaro perpendikulyar bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi (8-rasm).

Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (9.12)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu ikki tekislikning perpendikulyarlik shartidir.

Endi berilgan ikkita $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi va $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini topamiz.



8-rasm

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tuvchi istalgan tekislik tenglamasini yozamiz. U

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (9.13)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Shartga binoan $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqta ham shu tekislikda yotganligi uchun uning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0. \quad (9.14)$$

Ikkinchi tomondan (12.13) tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0 \quad (9.15)$$

perpendikulyarlik sharti bajariladi. (9.14) va (9.15) ni birlashtirib

$$\begin{cases} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0 \end{cases} \quad (9.16)$$

sistemaga ega bo'lamiz. (9.16) dan A, B va C koeffitsientlardan istalgan ikkitasini uchinchi orqali ifodalab ularni topilgan qiymatlarini (9.13) tenglamaga qo'yib tenglamani uchinchi koeffitsientga qisqartirilsa izlanayotgan tenglama kelib chiqadi.

9.Uch tekislikning kesishish nuqtasi

Berilgan uchta $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ va $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasi.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

sistemani yechib topiladi. Sistemaning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'ladi va berilgan uchta tekislik bir nuqtada kesishadi. $\Delta=0$ bo'lganda tekisliklar bir nuqtada kesismaydi.

10.Nuqtadan tekislikgacha masofa

Nuqtadan tekislikgacha masofa deganda shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi.

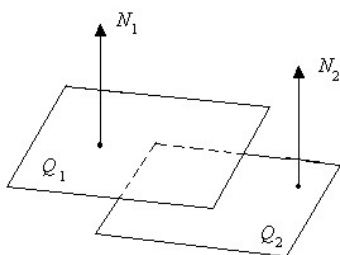
Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasi yordamida berilgan Q tekislikgacha d masofa formula yordamida topiladi.

$$\overrightarrow{MM_1} = (x_1 - x)\vec{i} + (y_1 - y)\vec{j} + (z_1 - z)\vec{k}, \quad \vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

$$\varphi = \left(\overrightarrow{MM_1}, \vec{N} \right) = 0 \quad \cos \varphi = 1$$

bo'lgani uchun

$$\frac{\overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{N}}{|\overrightarrow{MM_1}| |\vec{N}|} = 1 \text{ yoki } d = |\overrightarrow{MM_1}| = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax + By + Cz)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Tekislik tenglamasidan $-D = Ax + By + Cz$ hisobga olib ushbu

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9.17)$$

formula yordamida topiladi.

10-ma'ruza

Ikkinchi tartibli sirtlar: Silindrik sirtlar. Konus sirtlar. Aylanma sirtlar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli sirt va uning umumiy tenglamasi.

2. Silindrik sirtlar

3. Aylanish sirtlari

4. Konussimon sirtlar

5. Sfera

6. Ellipsoid

7. Bir pallali giperboloid

8. Ikki pallali giperboloid

9. Elliptik paraboloid

10. Giperbolik paraboloid

Dekart koordinatalari x, y va z ga nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + ax + by + cz + d = 0 \quad (10.1)$$

bilan aniqlanadigan sirt **ikkinchi tartibli sirt** deb ataladi.

Bu yerda $A, B, C, D, E, F, a, b, c, d$ koeffitsientlar ma'lum sonlar bo'lib A, B, C, D, E, F sonlardan kamida bittasi noldan farqli. Aks holda (10.1) tenglama $ax + by + cz + d = 0$ ko'rinishdagi tekislik tenglamasiga aylanadi.

(10.1) tenglama ikkinchi tartibli **sirtning umumiy tenglamasi** deb ataladi va u koeffitsientlarning qiymatlariga bog'liq ravishda turli sirtlarni aniqlaydi.

Izoh. (10.1) ko'rinishdagi har qanday tenglama ham qandaydir sirtni ifodalaydi deb o'ylash noto'g'ri.

2. Silindrik sirtlar

Berilgan egri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqlarning bu egri chiziq bo'ylab va berilgan yo'nalish(o'zi)ga parallel harakatidan hosil bo'lgan sirt **silindrik (silindrsimon) sirt** deb ataladi. Bunda egri siziq bilan uni kesuvchi to'g'ri chiziq bir tekislikda yotmaydi deb faraz qilinadi.

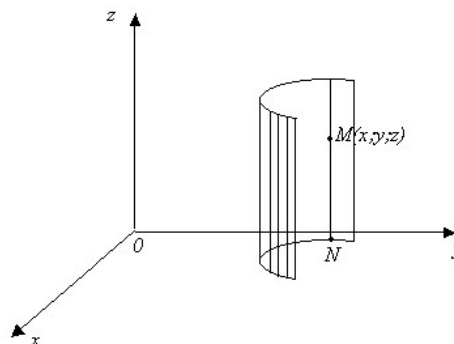
Harakatlanuvchi to'g'ri chiziq silindrik sirtning **yasovchisi**, berilgan egri chiziq uning **yo'naltiruvchisi** deb ataladi (1-rasm).

Biz kelgusida yo'naltiruvchisi koordinata tekisliklaridan birida yotgan va yasovchisi shu tekislikka perpendikulyar o'qqa parallel silindrik sirtlarni qaraymiz.

Oxy koordinata tekisligida yotgan $F(x,y)=0$ tenglamaga ega L egri chiziqni qaraymiz. Yasovchisi Oz o'qqa parallel va yo'naltiruvchisi shu L egri chiziqdan iborat silindrik sirtni yasaymiz (1-rasm).

Egri chiziqlarning Oxy tekislikdagi tenglamasi $F(x,y)=0$ $Oxyz$ fazoda shu sirtning ham tenglamasi ekanligini ko'rsatamiz. $M(x,y,z)$ yasalgan silindrik sirtning aniq nuqtasi bo'lsin.

$M(x,y,z)$ nuqtadan o'tuvchi va yasovchi bilan L yo'naltiruvchining kesishish nuqtasini N orqali belgilasak, u $N(x,y;0)$ koordinatalarga ega bo'ladi. N nuqta L egri chiziqda yetganligi uchun uning x,y koordinatalari egri chiziq tenglamasi



1-rasm

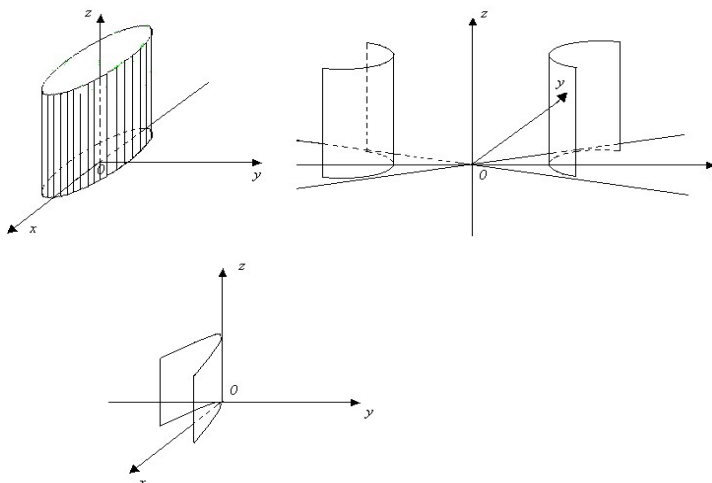
$F(x,y)=0$ ni qanoatlantiradi. Demak bu tenglamani $M(x,y,z)$ nuqtaning koordinatalari ham qanoatlantiradi, chunki tenglamada z qatnashmaydi.

Shunday qilib yasalgan silindrik sirtning istalgan M nuqtasining koordinatalari $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantiradi. Sirtida yotmagan birorta ham nuqtaning koordinatalari bu

tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bunday nuqtalarning Oxy tekisligidagi proeksiyalari L egri chiziqda yotmaydi.

Demak $F(x,y)=0$ tenglamaga ega yo'naltiruvchiga va Oz o'qqa parallel yasovchiga ega silindrik sirtning ham tenglamasi $F(x,y)=0$ bo'lar ekan.

Shunga o'xshash y qatnashmagan $F(x,z)=0$ va x qatnashmagan $F(y,z)=0$ tenglamalar $Oxyz$ fazoda yasovchisi Oy va Ox o'qlarga parallel silindrik sirtlarini tenglamalarini ifodalaydi.



2-rasm

$Ax+By+C=0$ tenglama Oxy tekislikda qaralsa u to'g'ri chiziq tenglamasi ekanini bilamiz. Ana shu tenglama $Oxyz$ fazoda qaralsa u Oxy tekislikni $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tuvchi va Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Shunga o'xshash Oxy tekisligidagi $x^2+y^2=a^2$ aylana, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbola va $y^2=2px$ parabola tenglamalarini $Oxyz$ fazoda qarasak ular Oxy tekislikni shu chiziqlar bo'ylab kesib o'tuvchi va yasovchisi Oz o'qqa parallel doiraviy, elliptik, giperbolik va parabolik silindr deb ataluvchi sirtlarni ifodalaydi (2-rasm).

3. Aylanish sirtlari

Fazoda to'g'ri chiziq, shu to'g'ri chiziq bo'ylab kesishuvchi ikkita tekisliklarni tenglamalari bilan berilishini ko'rdik. Shuningdek fazodagi egri chiziqni ham shu egri chiziq bo'ylab kesishadigan ikkita sirtlarning tenglamalari yordamida aniqlash mumkin. Masalan $z=3$ tekislik bilan $x^2+y^2+z^2=5^2$ sferani kesishishi natijasida hosil bo'luvchi aylanani tenglamasi

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

sistema yordamida berilishi mumkin.

Ikkinchi tomondan shu aylaning tenglamasini $z=3$ tekislik bilan $x^2+y^2=16$ doiraviy silindrning kesishish chizig'i deb

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

ko'rinishida yozish ham mumkin. Aylananing bu ikki tenglamasi teng kuchli. Bu holda aylananing markazi $O_1(0;0;3)$ nuqtada bo'lib radiusi 4 ga teng bo'ladi va aylana $z=3$ tekislikda yotadi.

Endi aylanish sirti deb ataluvchi sirtlarni o'rganishga kirishamiz.

Oyz tekislikda yotuvchi L egri chiziq

$$\begin{cases} X = 0, \\ F(Y, Z) = 0 \end{cases} \quad (10.2)$$

tenglama yordamida berilgan bo'lsin.

Shu egri chiziqni Oz o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan sirtni qaraymiz*.

Bu sirt **aylanish** sirti deb ataladi. Uning tenglamasini topamiz. $M(x,y,z)$ nuqta shu aylanish sirtining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M nuqtadan Oz o'qqa perpendikulyar tekislik o'tkazib uning Oz o'q bilan kesishish nuqtasini K , L chiziq bilan kesishish nuqtasini N orqali

belgilaymiz. KM va KN kesmalar bitta aylananing radiuslari bo'lganligi uchun ular teng, ya'ni $KM=KN$ (3-rasm).

L egri chiziq nuqtalarining koordinatalarini sirtning nuqtalarini koordinatalari x, y, z lardan farqlash maqsadida X, Y, Z lar orqali belgiladik.

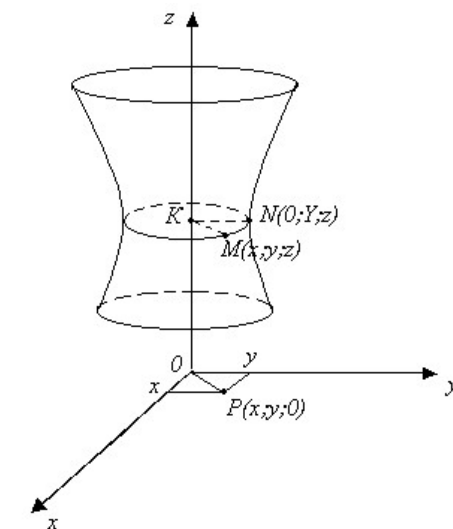
Ammo KN kesmaning uzunligi $N(0;Y;Z)$ nuqtaning ordinatasi Y ning absolyut qiymatiga teng, ya'ni $KM=|Y|$ va $KM=OP=\sqrt{x^2+y^2}$.

Shunday qilib $|Y|=\sqrt{x^2+y^2}$ yoki

$Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Bundan tashqari N nuqtaning applikatasi Z , M nuqtaning applikatasi z ga teng, chunki ular Oxy tekislikka parallel tekislikda yotadi.

$N(0;Y;Z)$ nuqta L egri chiziqda yotganligi uchun uning Y, Z koordinatalari egri chiziq tenglamasi $F(Y;Z)=0$ ni qanoatlantiradi. Bu tenglamaga $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$Z=z$ qiymatlarni qo'yib



3-rasm

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0 \quad (10.3)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib aylanish sirtining ixtiyoriy M nuqtasini koordinatalari (10.3) tenglamani qanoatlantiradi. Sirtga yotmagan birorta ham nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish ham mumkin. Demak (10.3) tenglama (10.2) tenglama bilan berilgan L egri chiziqni Oz o'q atrofida aylantirish natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtining tenglamasi. Boshqacha aytganda Oyz tekislikdagi $F(y,z)=0$ tenglama bilan berilgan L egri chiziqni Oz o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtining tenglamasini topish uchun egri chiziq tenglamasidagi y ni $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ ga almashtirib undagi aylanishi o'qiga mos z ni o'zgarishsiz qoldirish kerak ekan.

1-misol.

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

ellipsning Oz va Oy o'qlar atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtlarining tenglamalari topilsin.

Yechish. Ellipsning Oz o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning tenglamasini ellips tenglamasidagi y ni $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ ga almashtirib, z koordinatani esa o'zgarishsiz qoldirib hosil qilamiz, ya'ni

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Agar berilgan ellips tenglamasida y ni o'zgarishsiz qoldirib z ni $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ ga almashtirsak ellipsni Oy o'q atrofida aylanish sirtining tenglamasi kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hosil bo'lgan sirtlar **aylanish ellipsoidlari** deyiladi.

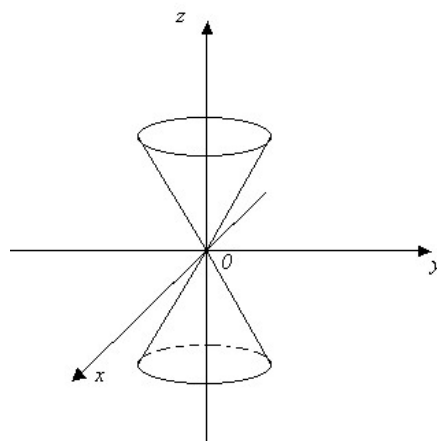
4. Konussimon sirtlar

Konussimon sirt deb, konusning uchi deb ataladigan berilgan nuqtadan o'tuvchi va konusning yo'naltiruvchisi deb ataladigan berilgan egri chiziqni kesuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirtga aytiladi. Bunda berilgan nuqta, berilgan egri chiziq tekisligida yotmaydi.

Konussimon sirtni tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlar uning **yasovchilari** deyiladi.

Masalan, $x^2+y^2-z^2=0$ tenglama yordamida aniqlanadigan sirt uchi koordinatalar boshida bo'lgan ikkinchi tartibli doiraviy konusidir (4-rasm).

Endi ikkinchi tartibli sirtlarning ba'zi-birlari bilan tanishib chiqamiz.



4-rasm

5. Sfera

Fazoning berilgan nuqtasidan barobar uzoqlikda joylashgan nuqtalarining geometrik o'rniga sfera deb ataladi. Berilgan nuqta **sferaning markazi**, undan sferagacha masofa **sferaning radiusi** deb ataladi.

Endi markazi $O_1(a;b;c)$ nuqtada bo'lib R radiusga ega sferaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y,z)$ nuqta sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda ta'rifga binoan $O_1M=R$.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra $O_1M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ ekanini hisobga olsak $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$ yoki kvadratga ko'tarsak

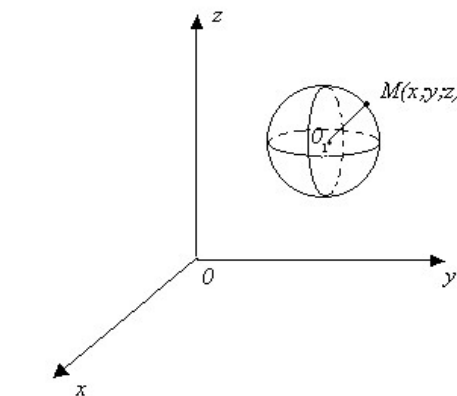
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (10.4)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib sferaning ixtiyoriy M nuqtasining koordinatalari (10.4) tenglamani qanoatlantiradi. Sferada yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish qiyin emas. Demak (10.4) tenglama sferaning tenglamasi. U **sferaning kanonik tenglamasi** deb ataladi.

Sferaning markazi koordinatalar boshida bo'lganda $a=b=c=0$ bo'lib uning tenglamasi

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (10.5)$$

ko'rinishiga ega bo'ladi.



5-rasm

6. Ellipsoid

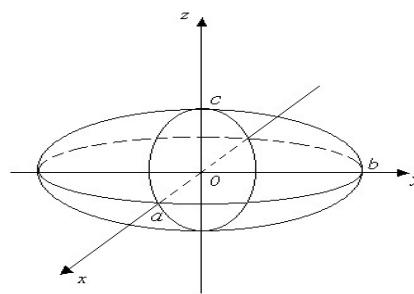
Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (10.6)$$

ko'rinishda bo'lgan ikkinchi tartibli sirt ellipsoid deb ataladi. a, b, c musbat sonlar ellipsoidning **yarim o'qlari** deb ataladi. Ellipsoidning koordinata o'qlari bilan kesishishi nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Ellipsoid oltita uchga ega.

Ellipsoid tenglamasida x, y, z koordinatalar juft darajalari bilan qatnashadilar. Demak ellipsoid koordinata tekisliklari Oxy , Oxz , Oyz ga nisbatan simmetrik.

Ellipsoidni shaklini aniqlash maqsadida uni koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesamiz.



6-rasm

Ellipsoid Oxy tekislikka parallel $z=h$ ($|h| < c$) tekislik bilan kesilsa kesimda ellips hosil bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun tekislik bilan ellipsoid tenglamalarini birgalikda, ya'ni

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Bundan z ni yo'qotsak Oxy tekisligidagi proeksiyasi ellipsdan iborat silindrik sirt tenglamasi hosil bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad \text{yoki} \quad 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad \text{ga bo'lsak} \quad \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \quad \text{kelib chiqadi.}$$

$$a_1 = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad (10.7) \quad \text{belgilashlarni kiritsak oxirgi tenglamadan}$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

kelib chiqadi. Bu Oxy tekislikka parallel $z=h$ tekislikdagi markazi $O_1(0;0;h)$ nuqtada va yarim o'qlari a_1 va b_1 bo'lgan ellips tenglamasi. (14.7) formulalardan ko'rinib turibdiki $|h|$ ortaborsa a_1 bilan b_1 kichraya boradi. $|h|=c$ bo'lganda $a_1=b_1=0$ bo'lib kesim nuqtaga aylanadi. $|h|>c$ bo'lganda $z=h$ tekislik ellipsoid bilan kesishmaydi. $h=0$ bo'lganda Oxy tekislikda yotgan eng katta a va b yarim o'qlarga ega ellips hosil bo'ladi.

Shunga o'xshash ellipsoidni Oyz tekislikka parallel $x=h$ ($|h| < a$) Oxz tekislikka parallel $y=h$ ($|h| < b$) tekisliklar bilan kesilganda ham kesimda ellips hosil bo'lishiga ishonish mumkin.

O'tkazilgan mulohazalarga asosan ellipsoidning shaklini 6-rasm tasvirlangan sirt kabi tasavvur etamiz. Ichi bo'sh qovun ellipsoidga misol bo'ladi.

7. Bir pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega bo'lgan ikkinchi tartibli sirt **bir pallali (kavakli) giperboloid** deb ataladi. Musbat a, b, c sonlar bir pallali giperboloidning **yarim o'qlari** deyiladi.

Ellipsoiddagi singari koordinata tekisliklari bir pallali giperboloidning ham simmetriya tekisliklari bo'ladi. Bir pallali giperboloidning shaklini aniqlaymiz.

Bir pallali giperboloid Oxy tekislik ($z=0$ tekislik) bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

$ABCD$ giperbola hosil bo'ladi (7-rasm).

Shunga o'xshash uni $x=0$ tekislik bilan kesilsa kesimda Oyz tekislikda yotgan

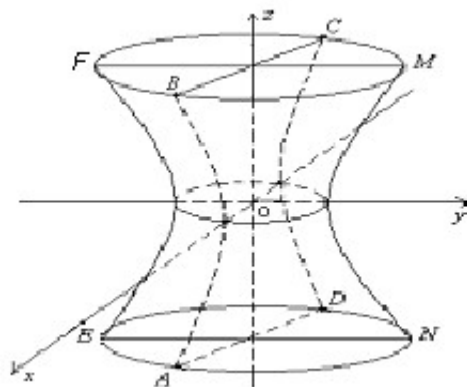
$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

$EFMN$ giperbola hosil bo'ladi (7-rasm).

Xuddi shuningdek bir pallali giperboloidni Oyz va Oxz tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesilganda ham kesimda giperbola hosil bo'lishini ko'rish mumkin.

Endi bir pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel tekislik bilan kesib kesimni kuzatamiz.

Bir pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel $z=h$ tekislik bilan kesilsa



7-rasm

kesimda $\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \end{cases}$ yoki $\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2(1 + \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{c^2(1 + \frac{h^2}{c^2})} = 1 \end{cases}$

ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari

$$\bar{a} = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{va} \quad \bar{b} = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad |h| \quad \text{ortganda ortadi. } h=0 \text{ bo'lganda } Oxy \text{ tekisligida}$$

yotgan va eng kichik a, b yarim o'qlarga ega ellips hosil bo'ladi.

Shunday qilib o'tkazilgan mulohazalar bir pallali giperboloidni Oxy tekislikdan (ikkala tomonga) cheksiz uzoqlashgan sari kengayib boradigan cheksiz quvr sifatida tasvirlash imkonini beradi. Giperboloid 76-chizmada tasvirlangan.

8. Ikki pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (10.8)$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega bo'lgan sirt **ikki pallali (kavakli) giperboloid** deb ataladi. Tenglamada x, y, z koordinatalar juft darajalari bilan ishtirok etganligi sababli koordinata tekisliklari ikki pallali giperboloidning simmetriya tekisliklari bo'ladi. (7-rasm)

Ikki pallali giperboloidni Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

giperbolalar hosil bo'ladi. Agar ikki pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel $z=h$ ($|h| > c$) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{cases} \quad (14.9) \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari $\bar{a} = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ va $\bar{b} = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$, $|h|$

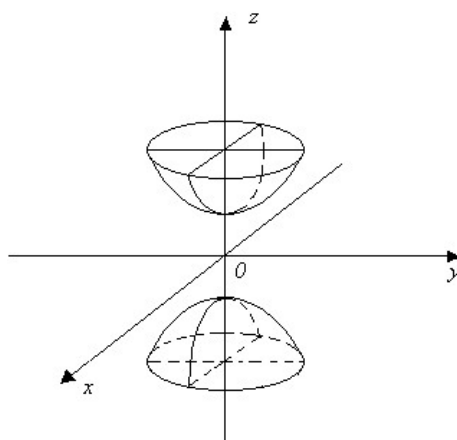
ortganda ortadi $h = \pm c$ bo'lganda (14.9) kesim tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ko'rinishga ega bo'lib

bu tenglamani faqatgina $x=0, y=0$ qiymatlar qanoatlantiradi xolos. Demak bu holda tekislik bilan ikki pallali giperboloidning kesishish chizig'i ellips $c_1(0;0;c)$ va $c_2(0;0;-c)$ nuqtalarga aylanar ekan. $|h| < c$ bo'lganda (14.9) dan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikning chap tomonidagi ifoda nomanfiy ekanini hisobga olsak tengsizlik hech qachon bajarilmasligini ko'ramiz. Demak, bu holda $z=h$ tekislik bilan (10.8) ikki pallali giperboloid kesishmas ekan.

O'tkazilgan mulohazalarga asoslanib ikki pallali giperboloidni 8-rasm ko'rsatilgan sirt kabi tasvirlaymiz.



8-rasm

9. Elliptik paraboloid

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (10.10)$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega ikkinchi tartibli sirt **elliptik paraboloid** deb ataladi.

Bu yerdagi p va q bir xil ishorali ma'lum sonlar. Kelgusida aniqlik uchun $p > 0, q > 0$ deb olamiz.

Elliptik paraboloidning shaklini aniqlaymiz. Elliptik paraboloidni Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesilsa kesimda shu tekisliklarda yotgan

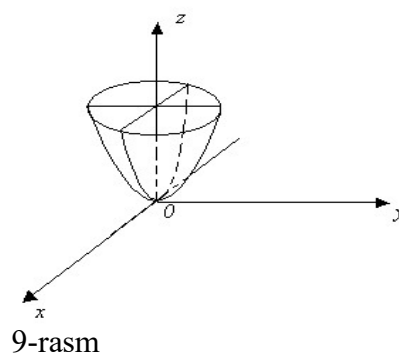
$$z = \frac{x^2}{2p} \quad \text{va} \quad z = \frac{y^2}{2q}$$

parabolalar hosil bo'ladi. Uni Oxy tekislikka parallel $z=h$ ($h > 0$) tekislik bilan kesilsa kesimda

$z=h$ tekislikda yotgan $\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1$ ellips hosil bo'ladi.

Bu ellipsning yarim o'qlari $\bar{a} = \sqrt{2ph}$ va $\bar{b} = \sqrt{2qh}$, h ortsa ortadi.

Shunday qilib o'tkazilgan mulohazalar elliptik paraboloidni Oxy tekislikdan Oz o'q yo'nalishda cheksiz uzoqlashgan sari kengayib boradigan «qozon» sifatida tasvirlash imkononi beradi. $O(0;0;0)$ nuqta elliptik paraboloidning uchi, p va q sonlar uning **parametrlari** deyiladi. $p=q$ bo'lganda aylanma paraboloid hosil bo'ladi. Elliptik paraboloid 9-rasmda tasvirlangan.



10. Giperbolik paraboloid

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (10.11)$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega ikkinchi tartibli sirt **giperbolik paraboloid** deb ataladi. Bu yerdagi p va q bir xil ishorali ma'lum sonlar. Aniqlik uchun kelgusida $p>0$, $q>0$ deb olamiz.

Giperbolik paraboloidni Oxz tekislik bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan $2pz=x^2$ parabola hosil bo'ladi. Bu sirtni Oxz tekislikka parallel $y=h$ tekislik bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan

$$x^2 = 2p \left(z + \frac{h^2}{2q} \right)$$

parabola hosil bo'ladi. Bu parabolaning uchi $\left(0, 0, -\frac{h^2}{2q} \right)$ nuqtada bo'lib uning simmetriya o'qi Oz bo'ylab yo'nalgan.

Berilgan paraboloidni Oyz ($x=0$) koordinata tekisligi bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan va uchi koordinatalar boshida bo'lib Oz simmetriya o'qiga ega, pastga yo'nalgan $z = -\frac{y^2}{2q}$ parabola hosil bo'ladi.

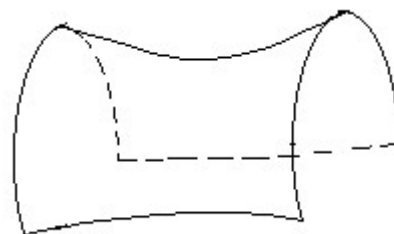
Agar paraboloidni Oyz tekislikka parallel $x=h$ tekislik bilan kesilsa kesim ham parabola bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Paraboloid Oxy tekislikka parallel $z=h$ tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$$

giperbola hosil bo'ladi.

O'tkazilgan mulohazalar giperbolik paraboloidni egarsimon sirt ko'rinishida tasvirlash imkonini beradi. Koordinatalar boshi giperbolik paraboloidni **uchi**, p va q sonlar esa uning **parametrlari** deb ataladi. Giperbolik paraboloid 10-rasm tasvirlangan.



10-rasm

2-misol. Markazi koordinatalar boshida bo'lib radiusi 4 ga teng sferaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish. Sferaning kanonik tenglamasi (10.5) ra $R=4$ qiymatni qo'ysak

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

tenglama hosil bo'ladi.

3-мисол. Markaziy $O_1(-2;3;1)$ nuqtada bo'lib radiusi $R=6$ bo'lgan sferaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish. Sferani tenglamasi (10.4) ga $a=-2$, $b=3$, $c=1$, $R=6$ qiymatlarni qo'ysak uning kanonik tenglamasi

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$$

kelib chiqadi.

4-misol. Markazi $O_1(3;-2;-1)$ nuqtada bo'lib radiusi $R=5$ bo'lgan sferaning umumiy tenglamasi topilsin.

Yechish. Sferaning kanonik tenglamasi (10.4) ga $a=3$; $b=-2$, $c=-1$; $R=5$ qiymatlarni qo'ysak

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=5^2$$

yoki qavslarni ochib ixchamlasak sferaning umumiy tenglamasi

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z-11=0$$

hosil bo'ladi.

5-misol. $x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+25=0$ sferaning markazini koordinatalari va radiusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani (10.4) ko'rinishda yozamiz. Buning uchun avvalo bir xil koordinatalar qatnashgan hadlarni guruhlaymiz, ya'ni tenglamani

$(x^2-6x)+(y^2+8y)+(z^2+10z)+25=0$ ko'rinishda yozamiz. Qavs ichidagi ifodalarni to'la kvadrat shaklida yozish maqsadida ularga to'la kvadrat bo'lish uchun kerakli bir xil sonlarni ham qo'shamiz ham ayiramiz.

$$(x^2-6x+9-9)+(y^2+8y+16-16)+(z^2+10z+25-25)+25=0;$$

$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+(z+5)^2-25+25=0, \quad (x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=25.$$

Hosil bo'lgan tenglamani sferaning kanonik tenglamasi (10.4) bilan taqqoslasak, $a=3$, $b=-4$, $c=-5$, $R^2=25$ ekaniga iqrор bo'lamiz. Shunday qilib $O_1(3,-4,-5)$ nuqta sferaning markazi bo'lib uning radiusi $R=5$ ekan.

6-misol. $x^2+y^2-4y=0$ tenglama qanaqa sirtни ifodalaydi.

Yechish. Tenglamani $x^2+y^2-4y+4-4=0$, $(x-0)^2+(y-2)^2=2^2$ ko'rinishda yozsak u Oxy tekisligidagi aylanani ifodalashi kelib chiqadi. Fazoda bu tenglama yo'naltiruvchisi shu aylanadan iborat yasovchisi Oz o'qqa parallel doiraviy silindrni ifodalaydi.

$$\text{7-misol. } \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-7)^2 = 16, \\ z = 6 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi qanaqa egri chiziqni ifodalaydi?

Yechish. Sistemani birinchi tenglamasi markazi $O_1(0,0,7)$ nuqtada va radiusi $R=4$ bo'lgan sferani tenglamasi, ikkinchisi esa Oxy tekislikka parallel va $(0,0,6)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Ular albatta $z=6$ tekislikda yotuvchi aylana bo'ylab kesishadi.

Shunday qilib berilgan tenglamalar sistemasi ana shu aylananing tenglamasi ekan.

Endi shu aylananing tenglamasini boshqacha shaklda yozamiz. Berilgan sistemaning birinchi tenglamasiga $z=6$ qiymatini qo'yib sistemadan z ni yo'qotamiz.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (6-7)^2 = 16, \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 16, \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 15, \\ z = 6. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani birinchi tenglamasi Oz o'qqa ega doiraviy silindrni ifodalaydi, ikkinchisi esa Oxy tekislikka parallel tekislik. Bu yerdagi sistemaning birinchi tenglamasi $x^2+y^2=15$ Oxy tekislikdagi aylanani ifodalaydi. Bu aylana doiraviy silindr bilan $z=6$ tekislikning kesishishi oqibatida hosil bo'lgan aylananing Oxy tekislikdagi proeksiyasidir.

8-misol. $x^2+y^2=R^2$ aylanani Ox o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish sirti-sferaning tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan aylanani Ox o'q atrofida aylanishi natijasi hosil bo'lgan sirt tenglamasini topish uchun aylananing tenglamasida aylanish o'qiga mos x koordinatani

o'zgarishsiz qoldirib ikkinchi o'zgaruvchi y o'rniga $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$ ifoda qo'yiladi. U holda aylanish sirti tenglamasi

$$x^2 + (\pm \sqrt{y^2 + z^2})^2 = R^2 \text{ yoki } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglama sferaning tenglamasi ekanligi ma'lum

9-misol. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kesishish chiziqlari, ularning uchlari hamda yarim o'qlari topilsin.

Yechish. Oxy tekislik $z=0$ tenglamaga ega. Ellipsoid tenglamasiga $z=0$ qiymatni qo'ysak ellipsoid bilan Oxy tekislikning kesishish chizig'i

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

ellipsning tenglamasiga ega bo'lamiz. Ellipsoidning uchlari ellips uchlarini ham aniqlaydi. Ellipsoidning Oxy tekislikda yotuvchi uchlari $A_1(-5,0,0)$, $A(5;0;0)$, $B_1(0,-4,0)$ $B(0;4;0)$ koordinatalarga ega.

Shuningdek berilgan ellipsoidni Oxz ($y=0$) tekislik bilan kesganda kesimda

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

ellips hosil bo'lib uning uchlari $A_1(-5;0;0)$; $A(5;0;0)$, $C_1(0;0;-2)$ va $C(0;0;2)$ nuqtalarda joylashgan.

Ellipsoidni Oyz ($x=0$) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

ellips hosil bo'lib uning uchlari $B_1(0;-4;0)$ $B(0;4;0)$ $C_1(0;0;-2)$ va $C(0;0;2)$ nuqtalardan iborat bo'ladi.

Ellipsoidning berilgan tenglamasini uning kanonik tenglamasi (10.6) bilan taqqoslasak $a^2=25$; $a=5$, $b^2=16$, $b=4$, $c^2=4$, $c=2$ ellipsoidning yarim o'qlari hosil bo'ladi.

yoki tenglamani 400 ga bo'lsak $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} + \frac{(z-0)^2}{4} = 1$

tenglamaga ega bo'lamiz. $x-1=X$, $y+1=Y$, $z=Z$ almashtirish olsak

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} + \frac{Z^2}{4} = 1$$

ellipsoidning kanonik tenglamasi kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsoidni ifodalab "eski" sistemani $O_1(1,-1;0)$ nuqtaga parallel ko'chirilsa uning tenglamasi "yangi" O_1XY sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan.

11-ma'ruza

To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari. Haqiqiy sonlar to'plami Kompleks sonlar va ular ustida amallar.

TO'PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

- *To'plamlar va ularga doir tushunchalar.*
- *To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari.*

To'plamlar va ularga doir tushunchalar. To'plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarning asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884 yillarda olmon matematigi **Georg Kantor** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. **To'plam** matematikaning poydevorida yotgan boshlang'ich tushunchalardan biri bo'lgani uchun u ta'rifsiz qabul etiladi. To'plam deyilganda biror bir xususiyati bo'yicha umumiylikga ega bo'lgan obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to'plami, $[0,1]$ kesmadagi nuqtalar to'plami, natural sonlar to'plami, firma xodimlari to'plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to'plami va hokazo. Matematikada to'plamlar $A, B, C, D, \dots$ kabi bosh harflar bilan belgilanadi. $A, B, C, D, \dots$ to'plamlarga kiruvchi obyektlar ularning **elementlari** deyiladi va odatda mos ravishda kichik $a, b, c, d, \dots$ kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda « a element A to'plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a \in A$ ($a \notin A$) kabi yoziladi.

1-TA'RIF: Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam **bo'sh to'plam** deyiladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi.

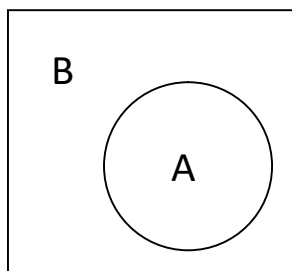
Masalan, $\{ \sin x = 2 \text{ tenglamaning yechimlari} \} = \emptyset$, $\{ \text{perimetri } 0 \text{ bo'lgan kvadratlar} \} = \emptyset$, $\{ \text{kvadrati manfiy bo'lgan haqiqiy sonlar} \} = \emptyset$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to'plamlar nazariyasida $\emptyset$ to'plam shunga o'xshash vazifani bajaradi.

2-TA'RIF: Agar A to'plamga tegishli har bir a element boshqa bir B to'plamga ham tegishli bo'lsa ($a \in A \Rightarrow a \in B$), u holda A to'plam B **to'plamining qismi** deyiladi va $A \subset B$ (yoki $B \supset A$) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to'plamini ifodalasa, unda $A \subset B$ bo'ladi.

1-



Masalan, korxonada ishlab chiqarilayotgan oliy navli mahsulotlar to'plamini A , barcha mahsulotlar to'plamini esa B deb olsak, unda $A \subset B$ bo'ladi.

Ta'rifdan ixtiyoriy A to'plam uchun $A \subset A$ va $\emptyset \subset A$ tasdiqlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli to'plamlar uchun $\subset$ belgisi sonlar uchun $\leq$ belgiga o'xshash ma'noga egadir.

3-TA'RIF: Agarda A va B to'plamlar uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ shartlar bir paytda bajarilsa, bu to'plamlar **teng** deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{-1; 1\}$ va $B = \{x^2 - 1 = 0 \text{ tenglama ildizlari}\}$,

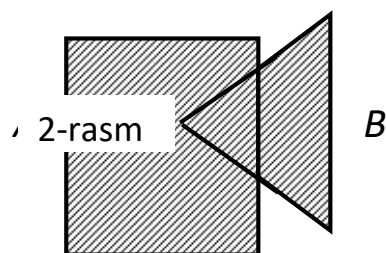
$C = \{\text{badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar}\}$ va $D = \{\text{alfavitdagi harflar}\}$ to'plamlari uchun $A=B$, $C=D$ bo'ladi.

1.1. To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Algebrada a va b sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lib, ular $a+b=b+a$ va $ab=ba$ (kommutativlik, ya'ni o'rin almashtirish), $a+(b+c)=(a+b)+c$ va $a(bc)=(ab)c$ (assotsiativlik, ya'ni guruhlash), $a(b+c)=ab+ac$ (distributivlik, ya'ni taqsimot) qonunlariga bo'ysunadilar. Bulardan tashqari har qanday a soni uchun $a+0=a$ va $a \cdot 0=0$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

Endi to'plamlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

4-TA'RIF: A va B to'plamlarning *birlashmasi* (*yig'indisi*) deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamidan iborat bo'lsa, unda ularning birlashmasi $A \cup B$ quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi:



Shunday qilib $A \cup B$ to'plam yoki A to'plamga, yoki B to'plamga, yoki A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir.

Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B = \{2, 4, 6, 8\}$ bo'lsa $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$,

$C = \{\text{I navli mahsulotlar}\}$ va $D = \{\text{II navli mahsulotlar}\}$ bo'lsa, unda

$C \cup D = \{\text{I yoki II navli mahsulotlar}\}$ to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni birlashtirish amali, sonlarni qo'shish amali singari,

$$A \cup B = B \cup A \quad (\text{kommutativlik}),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\text{assosiativlik})$$

qonunlarga bo'ysunadi. Bulardan tashqari $A \cup \emptyset = A$ va, sonlardan farqli ravishda, $A \cup A = A$, $B \subset A$ bo'lsa $A \cup B = A$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi. Bu tasdiqlarning barchasi to'plamlar tengligi ta'rifidan foydalanib isbotlanadi. Misol sifatida, oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ yoki } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cup B) \subset A;$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subset (A \cup B)$$

Demak, $(A \cup B) \subset A$, $A \subset (A \cup B)$ va, ta'rifga asosan, $A \cup B = A$.

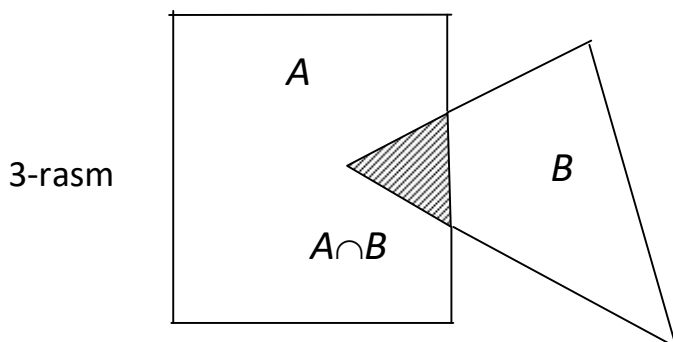
Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlarning yig'indisi

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlar to'plami sifatida aniqlanadi.

5 -TA'RIF: A va B to'plamlarning *kesishmasi* (ko'paytmasi) deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning $A \cap B$ kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:



Shunday qilib $A \cap B$ to'plam A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo'ladi. Shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo'lmasa, ya'ni kesishmasa, unda $A \cap B = \emptyset$ bo'ladi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo'lsa $A \cap B = \{2,4\}$,

$C=\{\text{Tekshirilgan mahsulotlar}\}$ va $D=\{\text{Sifatli mahsulotlar}\}$ bo'lsa, unda

$C \cap D = \{\text{Tekshirishda sifatli deb topilgan mahsulotlar}\}$ to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni kesishmasi amali quyidagi qonunlarga bo'ysunadi:

$$A \cap B = B \cap A \quad (\text{kommutativlik}),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{assotsiativlik}),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{distributivlik})$$

Shu bilan birga $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ va $B \subset A$ bo'lsa $A \cap B = B$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

Bu tasdiqlarning o'rinli ekanligiga yuqorida ko'rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlarning kesishmasi

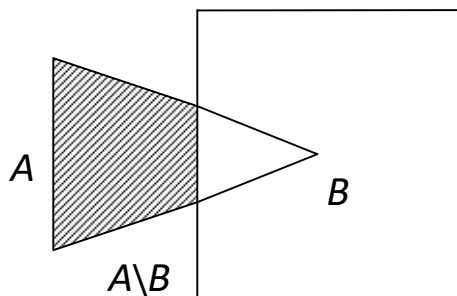
$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$$

kabi belgilanadi va barcha A_k ($k=1,2, \dots, n$) to'plamlarga tegishli bo'lgan umumiy elementlardan tuzilgan to'plam kabi aniqlanadi.

6-TA'RIF: A va B to'plamlarning *ayirmasi* deb A to'plamga tegishli, ammo B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi.

Agar A uchburchakdagi, B esa kvadratdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning $A \setminus B$ ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi :

4-rasm



Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B = \{1, 3, 7, 9\}$ bo'lsa, unda $A \setminus B = \{2, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{7, 9\}$;

$C = \{\text{Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar}\}$ va $D = \{\text{Sifatli mahsulotlar}\}$ bo'lsa,

$C \setminus D = \{\text{Korxonada ishlab chiqarilgan sifatsiz mahsulotlar}\}$.

Demak, $A \setminus B$ to'plam A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan hosil bo'ladi. To'plamlar ayirmasi uchun

$$A \setminus A = \emptyset, \quad A \setminus \emptyset = A, \quad \emptyset \setminus A = \emptyset$$

va $A \subset B$ bo'lsa $A \setminus B = \emptyset$ munosabatlar o'rinlidir.

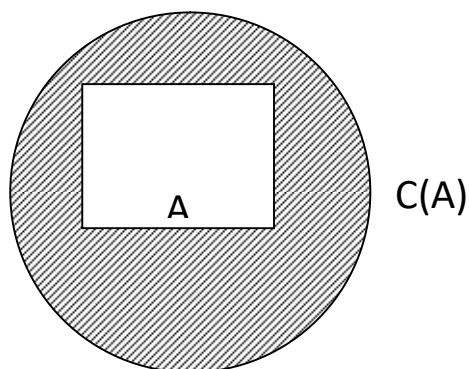
7-TA'RIF: Agar ko'rilayotgan barcha to'plamlarni biror Ω to'plamning qism to'plamlari kabi qarash mumkin bo'lsa, unda Ω *universal to'plam* deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog'liq barcha to'plamlar uchun $\Omega = (-\infty, \infty)$, insonlardan iborat to'plamlar uchun $\Omega = \{\text{Barcha odamlar}\}$ universal to'plam bo'ladi.

8-TA'RIF: Agar A to'plam Ω universal to'plamning qismi bo'lsa, unda $\Omega \setminus A$ to'plam A to'plamning to'ldiruvchisi deb ataladi va $C(A)$ kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada Ω universal to'plam doiradagi, A to'plam esa uning ichida joylashgan to'ri to'rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo'lsa, uning to'ldiruvchisi $C(A)$ 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi:

5-rasm



Demak, $C(A)$ to'plam A to'plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo'ladi, ya'ni $x \in A \Rightarrow x \notin C(A)$, $x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$.

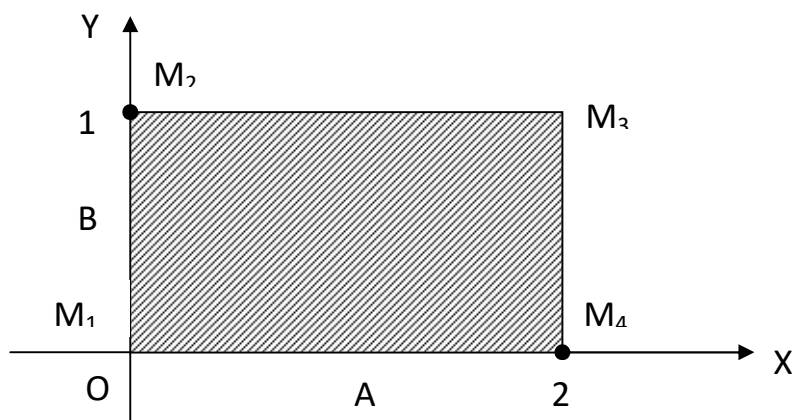
Masalan, $\Omega = \{\text{Barcha korxonalar}\}$, $A = \{\text{Rejani bajargan korxonalar}\}$ bo'lsa, unda $C(A) = \{\text{Rejani bajarmagan korxonalar}\}$ to'plami bo'ladi;

$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – natural sonlar to'plami, $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ – juft sonlar to'plami, $B = \{5, 6, 7, \dots, n, \dots\}$ – 4dan katta natural sonlar to'plami bo'lsa, unda

$C(A) = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$ – toq sonlar, $C(B) = \{1, 2, 3, 4\}$ – 5dan kichik natural sonlar to'plamlarini ifodalaydi.

9-TA'RIF: A va B to'plamlarning *Dekart ko'paytmasi* deb $A \times B$ kabi belgilanadigan va (x, y) ($x \in A, y \in B$) ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to'plamga aytiladi.

Masalan, $A = [0, 2]$ va $B = [0, 1]$ bo'lsa, $A \times B$ to'plam tekislikdagi (x, y) ($x \in A = [0, 2]$, $y \in B = [0, 1]$) nuqtalardan, ya'ni uchlari $M_1(0, 0)$, $M_2(0, 1)$, $M_3(2, 1)$ va $M_4(2, 0)$ nuqtalarda joylashgan to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'ladi (6-rasmga qarang):



6-rasm

Agar $C = \{\text{Tajribali ishchilar}\}$ va $D = \{\text{Yosh ishchilar}\}$ bo'lsa, unda $C \times D$ tajribali va yosh ishchidan iborat bo'lgan turli "ustoz-shogird" juftliklaridan iborat to'plamni ifodalaydi.

Umuman olganda to'plamlarning Dekart ko'paytmasi uchun $A \times B \neq B \times A$, ya'ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. Masalan, $A = [0, 2]$ va $B = [0, 1]$ to'plamlar uchun $A \times B$ asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni, $B \times A$ esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni ifodalaydi va bunda $A \times B \neq B \times A$ bo'ladi.

XULOSA

To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Hozirgi zamon matematikasining poydevorini to'plamlar nazariyasi tashkil etadi. To'plamlar nazariyasining asoschisi Kantor bo'lib hisoblanadi. To'plamlar ustida ularning birlashmasi (yig'indisi), kesishmasi (ko'paytmasi) va ayirmasi kabi algebraik amallar aniqlanadi. Bu amallar kommutativlik, assosiativlik va distributivlik kabi asosiy algebraik qonunlarga bo'ysunadi. Bulardan tashqari to'plamlar uchun Dekart ko'paytmasi amali ham kiritilgan

Tayanch iboralar

To'plam * To'plam elementi * Bo'sh to'plam * To'plam qismi * To'plamlar tengligi * To'plamlar birlashmasi * To'plamlar kesishmasi * To'plamlar ayirmasi * Universal to'plam * To'plam to'ldiruvchisi * Dekart ko'paytma .

Takrorlash uchun savollar

1. To'plamlar nazariyasining ahamiyati nimadan iborat?
2. To'plamlar nazariyasiga kim asos solgan?
3. To'plam deganda nima tushuniladi?
4. To'plam elementi qanday aniqlanadi?
5. To'plamlarga misollar keltiring.

6. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?
7. To‘plam qismi qanday ta’riflanadi?
8. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
9. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
10. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
11. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?
12. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
13. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
14. Universal to‘plam nima?
15. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
16. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
17. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun kommutativlik qonuni o‘rinlimi?

CHEKLI VA CHEKSIZ TO‘PLAMLAR

- *Chekli to‘plamlar.*
- *Cheksiz to‘plamlar.*
- *Sanoqli to‘plamlar.*
- *Sanoqsiz to‘plamlar.*

Chekli to‘plamlar. To‘plamlar nazariyasida barcha to‘plamlar chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Bu to‘plamlarni ta’riflash uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

1-TA’RIF: Agar A va B to‘plamlar berilgan bo‘lib, har bir $a \in A$ elementga biror f qonun-qoida asosida bitta va faqat bitta $b \in B$ element mos qo‘yilgan bo‘lsa ($a \rightarrow b$), A to‘plam B to‘plamga **aks ettirilgan** deyiladi va $f: A \rightarrow B$ kabi ifodalanadi.

Masalan, $f(x) = \sin x$ akslantirishda $X = (-\infty, \infty)$ haqiqiy sonlar to‘plami $Y = [-1, 1]$ kesmaga ($f: X \rightarrow Y$), $g(x) = x^3$ akslantirishda esa $X = (-\infty, \infty)$ to‘plamni o‘ziga ($g: X \rightarrow X$) akslantiriladi.

2-TA’RIF: Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirish berilgan bo‘lsa, Y to‘plamning $y = f(x)$ elementi X to‘plamning x elementining **tasviri**, x esa y elementning **asli** deyiladi.

3-TA’RIF: Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda har bir $y \in Y$ tasvirga uning faqat bitta $x \in X$ asli mos kelsa (buni $x \leftrightarrow y$ kabi ifodalaymiz), bu akslantirish X va Y to‘plamlar orasidagi **o‘zaro bir qiymatli moslik** deyiladi.

Masalan, $f(x) = \sin x: X = (-\infty, \infty) \rightarrow Y = [-1, 1]$ akslantirish o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘lmaydi, chunki $y = \sin x, y \in [-1, 1]$, tenglama $X = (-\infty, \infty)$ haqiqiy sonlar to‘plamida cheksiz ko‘p yechimga egadir. $g(x) = x^3: X \rightarrow X$ akslantirish esa o‘zaro bir qiymatli moslikdir, chunki $y = x^3$ tenglama $X = (-\infty, \infty)$ haqiqiy sonlar to‘plamida faqat bitta yechimga egadir.

4-TA’RIF: Agar A to‘plamning elementlari bilan natural sonlar to‘plami N ning dastlabki biror m ta elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lsa, unda A **chekli to‘plam** deyiladi.

Masalan, $A = \{\text{Yer yuzidagi barcha odamlar}\}$, $B = \{\text{Kitobdagi varaqlar}\}$, $C = \{\text{Zavoddagi stanoklar}\}$, $D = \{\text{Aksioner jamiyatdagi a’zolar}\}$ kabi to‘plamlar chekli bo‘ladi.

Ba’zi hollarda chekli to‘plamdagi elementlar sonini aniq ko‘rsatib bo‘ladi, ba’zi hollarda esa bu sonni aniq ko‘rsatib bo‘lmaydi. Masalan, $A = \{\text{O‘zbekistondagi viloyatlar}\}$ to‘plami chekli va uning elementlari soni $m(A) = 12$ deb ko‘rsatish mumkin. Ammo $B = \{\text{Yer yuzidagi barcha daraxtlar}\}$ to‘plami ham chekli bo‘lsada, undagi elementlar soni $m(B)$ ni aniq ko‘rsata olmaymiz.

Umumiy holda chekli A to‘plamning elementlar soni $m(A) = m$ bo‘lsa, , bu to‘plamni $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ko‘rinishda yozish mumkin.

1-TEOREMA: Agarda chekli A va B to‘plamlarning elementlari soni mos ravishda $m(A)$ va $m(B)$ bo‘lsa, unda ularning birlashmasi $A \cup B$ va kesishmasi $A \cap B$ elementlarining soni o‘zaro

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

tenglik bilan bog‘langan.

Isbot: Faqat A yoki B to‘plamga tegishli elementlar sonini m_A yoki m_B deb belgilaymiz. Faqat A to‘plamga tegishli elementlar undagi barcha elementlar orasidan uning B to‘plamga kiradigan elementlarini chiqarib tashlashdan hosil bo‘ladi va shu sababli $m_A = m(A) - m(A \cap B)$ tenglikni yoza olamiz. Xuddi shunday $m_B = m(B) - m(A \cap B)$ bo‘ladi. $A \cup B$ to‘plamdagi elementlar faqat A to‘plamga, faqat B to‘plamga va ularning ikkalasiga ham, ya‘ni $A \cap B$ to‘plamga tegishli elementlardan tashkil topadi. Demak

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= m_A + m_B + m(A \cap B) = [m(A) - m(A \cap B)] + [m(B) - m(A \cap B)] + m(A \cap B) = \\ &= m(A) + m(B) - m(A \cap B). \end{aligned}$$

Masala: Korxonada ishlab chiqarilgan 300 dona mahsulot sifati tekshirildi. Bunda mahsulot oliy navli, I navli, II navli yoki sifatsiz bo‘lishi mumkin deb hisoblanadi. Tekshiruv natijalaridan 270 dona mahsulot sifatli va 150 dona mahsulot oliy navli emasligi ma‘lum. I va II navli mahsulotlarning umumiy sonini toping.

Yechish: Tekshiruvda sifatli deb topilgan mahsulotlar to‘plamini A, oliy navli bo‘lmagan mahsulotlar to‘plamini B kabi belgilaymiz. Masala shartiga asosan $m(A) = 270$ va $m(B) = 150$ ekanligi ma‘lum. To‘plamlar birlashmasi ta‘rifiga asosan $A \cup B$ korxonada ishlab chiqarilgan barcha mahsulotlar to‘plamini ifodalaydi shu sababli $m(A \cup B) = 300$ bo‘ladi. To‘plamlar kesishmasi ta‘rifiga asosan $A \cap B$ tekshiruv natijasida sifatli va oliy navli bo‘lmagan, ya‘ni I yoki II navli deb baholangan mahsulotlar to‘plamini ifodalaydi. Unda, yuqorida isbotlangan formuladan foydalanib, masala javobini quyidagicha topamiz:

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= m(A) + m(B) - m(A \cap B) \Rightarrow m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = \\ &= 270 + 150 - 300 = 120. \end{aligned}$$

Demak, I va II navli mahsulotlarning umumiy soni 120 dona ekan.

Cheksiz to‘plamlar. Endi cheksiz to‘plam tushunchasini kiritamiz va u bilan bog‘liq tasdiqlar bilan tanishamiz.

5-TA’RIF: Chekli bo‘lmagan A to‘plam *cheksiz to‘plam* deyiladi.

Masalan, natural sonlar to‘plami $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $Q = \{\text{Ratsional sonlar}\}$, $A = \{[0; 1] \text{ kesmadagi nuqtalar}\}$, $B = \{\sin x = a \mid |a| \leq 1\}$ tenglama ildizlari va $D = \{\text{Tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar}\}$ kabi to‘plamlar cheksiz bo‘ladi.

A va B chekli to‘plamlarni ularning elementlari soni $m(A)$ va $m(B)$ bo‘yicha $m(A) > m(B)$, $m(A) = m(B)$, $m(A) < m(B)$ munosabatlarning biri bilan o‘zaro taqqoslash mumkin. Bunda chekli to‘plamlarni ikki xil usulda taqqoslash mumkin.

1 – u s u l: A i q B to‘plamdagi elementlar soni $m(A)$ va $m(B)$ bevosita sanash orqali topiladi va so‘ngra ular o‘zaro taqqoslanadi.

2 – u s u l: Har bir $a \in A$ elementga bitta va faqat bitta $b \in B$ elementini mos qo‘yamiz. Agar bu mos qo‘yishda A to‘plamdagi elementlar ortib qolsa (ya‘ni bir qancha $a \in A$ elementlarga B to‘plamda ularga mos qo‘yiladigan elementlar yetmay qolsa), unda $m(A) > m(B)$ va aksincha, B to‘plamning elementlari ortib qolsa, $m(A) < m(B)$ bo‘ladi. Uchinchi holda A to‘plamda ham, B to‘plamda ham elementlar ortib qolmaydi va bunda $m(A) = m(B)$ bo‘ladi.

Masalan, $A = \{\text{Viloyatdagi firmalar}\}$, $B = \{\text{Viloyatdagi auditorlar}\}$ to‘plamlarni ulardagi firmalar va auditorlar sonini sanamasdan, 2- usulda taqqoslaymiz. Buning uchun har bitta firmaga bittadan auditorni jo‘natamiz. Agar bir qism firmalarga jo‘natish uchun auditorlar yetmay qolsa, unda $m(A) > m(B)$; hamma firmalarga auditorlar jo‘natilib, ularning bir qismi ortib qolgan bo‘lsa, unda $m(A) < m(B)$; hamma firmalarga auditorlar jo‘natilib, boshqa auditor qolmagan bo‘lsa, unda $m(A) = m(B)$ bo‘ladi.

Har qanday chekli A to'plamning elementlar soni har qanday cheksiz B to'plamdagi elementlar sonidan kichik ekanligi tushunarli. Endi A va B cheksiz to'plamlar bo'lsin. Bu holda ularni elementlari soni bo'yicha o'zaro taqqoslash masalasi paydo bo'ladi. Bunda A va B cheksiz to'plamlar bo'lgani uchun bu masalani 1-usul bilan hal qilib bo'lmaydi. Ammo 2-usul bilan cheksiz to'plamlarni o'zaro taqqoslash mumkin. Buning uchun to'plamlarning ekvivalentligi tushunchasidan foydalanamiz.

6-TA'RIF: Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatib bo'lsa, bu to'plamlar *ekvivalent* deyiladi va $A \sim B$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A = \{\text{toq sonlar}\}$, $B = \{\text{juft sonlar}\}$ bo'lsin. Unda $A \ni 2n-1 \Leftrightarrow 2n \in B$, ya'ni $1 \Leftrightarrow 2$, $3 \Leftrightarrow 4$, $5 \Leftrightarrow 6$, $\dots$, $2n-1 \Leftrightarrow 2n$, $\dots$ ko'rinishda A va B to'plam elementlari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin va shu sababli $A \sim B$ bo'ladi. Demak A va B to'plamlar ekvivalent, ya'ni $A \sim B$ bo'lsa, ularni elementlar soni bo'yicha bir xil deb qarash mumkin.

2-TEOREMA: Agarda $A \sim B$, $B \sim C$ bo'lsa, unda $A \sim C$ bo'ladi.

Isbot: $A \sim B$ bo'lgani uchun $A \ni a \Leftrightarrow b \in B$ va $B \sim C$ bo'lgani uchun $B \ni b \Leftrightarrow c \in C$. Unda $A \ni a \Leftrightarrow c \in C$ desak, A va C to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi, ya'ni $A \sim C$ bo'ladi.

7-TA'RIF: Agar $A \sim B$ bo'lsa, ular *teng quvvatli* to'plamlar deb ataladi.

Chekli A va B to'plamlarning quvvati ulardagi elementlar soni $m(A)$ va $m(B)$ kabi aniqlanadi. Shu sababli chekli A va B to'plamlar ekvivalent, ya'ni teng quvvatli, bo'lishi uchun ularning elementlari soni $m(A) = m(B)$ shartni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

Sanoqli to'plamlar. Cheksiz to'plamlar ichida eng «kichigi» natural sonlar to'plami

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

bo'lib hisoblanadi.

8-TA'RIF: Natural sonlar to'plami N va unga ekvivalent barcha cheksiz to'plamlar *sanoqli to'plam* deyiladi.

Agarda A sanoqli to'plam bo'lsa, uning elementlarini natural sonlar yordamida belgilab (nomerlab) chiqish mumkin, ya'ni $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ deb yozish mumkin.

Endi sanoqli to'plamlarga misollar keltiramiz.

1) $Z = \{\text{butun sonlar}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ sanoqli to'plam bo'ladi. Bunga $Z \ni n \Leftrightarrow 2n+1 \in N$, agar $n \geq 0$ bo'lsa va $Z \ni n \Leftrightarrow 2|n| \in N$, agar $n < 0$ bo'lsa, ya'ni nomanfiy butun sonlarga toq natural sonlarni, manfiy butun sonlarga esa juft natural sonlarni mos qo'yish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Bunda $N \subset Z$ bo'lsada $N \sim Z$ ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

2) $A = \{\text{juft sonlar}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\} \sim N$. Bunga $A \ni 2n \Leftrightarrow n \in N$ o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish orqali ishonch hosil etish mumkin.

Sanoqli to'plamlar quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin:

I. Har qanday sanoqli to'plamning qism to'plami chekli yoki sanoqli bo'ladi.

II. Sanoqli va chekli to'plam birlashmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

III. Chekli yoki sanoqli sondagi sanoqli to'plamlar birlashmasi sanoqlidir.

IV. Barcha sanoqli to'plamlar o'zaro ekvivalent bo'ladi.

Oxirgi tasdiqdan barcha sanoqli to'plamlar bir xil quvvatga ega ekanligi kelib chiqadi.

3-TEOREMA: Ratsional sonlar to'plami Q sanoqli.

Isbot: Q^+ va Q^- orqali mos ravishda musbat va manfiy ratsional sonlar to'plamini belgilab, $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ deb yozish mumkin. Bunda $Q^+ \ni r \Leftrightarrow -r \in Q^-$ deb, $Q^+ \sim Q^-$ ekanligini ko'ramiz. Shu sababli, II va III xossalarga asosan, Q^+ to'plamni sanoqli ekanligini ko'rsatish kifoya. Har qanday $r \in Q^+$ ratsional sonni $r = p/q$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda p va q – natural sonlar bo'lib, ularni o'zaro tub deb hisoblash mumkin. $r = p/q$ sonning balandligi deb $h = |p| + q$ songa aytiladi. Balandligi $h = m \geq 2$ bo'lgan ratsional sonlar cheklita va ularni balandligi oshib borishi bo'yicha birin- ketin nomerlab chiqish mumkin. Masalan, balandligi $h = 2$ bo'lgan bitta ratsional sonni $r_1 = 1/1 = 1$, $h = 3$ bo'lgan ikkita ratsional sonlarni $r_2 = 1/2$ va $r_3 = 2/1 = 2$, $h = 4$ bo'lgan ratsional sonlarni $r_4 = 1/3$ va $r_5 = 3/1 = 3$ kabi nomerlaymiz. Demak, har bir musbat ratsional sonni r_n , $n \in N$, kabi belgilab chiqish mumkin va shu sababli $Q^+ \sim N$ bo'ladi.

2.4. Sanoqsiz to'plamlar. Har qanday cheksiz to'plam sanoqli bo'lavermaydi.

9-TA'RIF: Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam **sanoqsiz to'plam** deb aytiladi.

Ushbu teorema sanoqsiz to'plamlar mavjudligini ko'rsatadi.

4-TEOREMA: $[0,1]$ kesma tegishli barcha nuqtalar (haqiqiy sonlar) to'plami sanoqsizdir.

Teoremani isbotsiz qabul etamiz.

10-TA'RIF: $[0,1]$ kesma va unga ekvivalent barcha to'plamlar **kontinuum** quvvatli deyiladi.

Ixtiyoriy a, b ($b > a$) haqiqiy sonlar uchun $[a, b] \sim [0,1]$, ya'ni ixtiyoriy kesmadagi nuqtalar (haqiqiy sonlar) kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'ladi. Bunga $y = a + (b-a)x$ ($y \in [a, b], x \in [0,1]$) o'zaro bir qiymatli akslantirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Natija: Ixtiyoriy ikkita $[a, b]$ va $[c, d]$ kesmalar ekvivalent, ya'ni $[a, b] \sim [c, d]$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, yuqorida ko'rsatilganga asosan, $[a, b] \sim [0,1]$ va $[c, d] \sim [0,1]$. Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, $[a, b] \sim [c, d]$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda ixtiyoriy chekli yoki cheksiz oralik $(a, b) \sim [0,1]$, ya'ni kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'lishini isbotlash mumkin. Jumladan, barcha haqiqiy sonlar to'plami $R = (-\infty, \infty)$ kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'ladi.

Har qanday chekli to'plamning quvvati sanoqli to'plam quvvatidan kichik, o'z navbatida sanoqli to'plam quvvati kontinuum quvvatidan kichikdir. Unda quvvati kontinuumdan katta to'plamni mavjud yoki mavjud emasligini aniqlash masalasi paydo bo'ladi. Bu masala o'z yechimini quyidagi teorema orqali topadi.

5-TEOREMA: A to'plam quvvati $m(A)$ bo'lsin. U holda A to'plamning barcha qism to'plamlaridan iborat B to'plam quvvati $m(B) > m(A)$ bo'ladi.

Bu teoremadan quvvati eng katta bo'lgan cheksiz to'plam mavjud emasligi kelib chiqadi. Jumladan, quvvati kontinuumdan katta bo'lgan sanoqsiz to'plamlar mavjud.

Agar A va B cheksiz to'plamlar quvvati $m(A)$ va $m(B)$ bo'lsa, bu yerda yoki $m(A) = m(B)$ yoki $m(A) < m(B)$ yoki $m(A) > m(B)$ munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi. Bunda $m(A) = m(B)$ tenglik $A \sim B$ ekanligini bildiradi. $m(A) > m(B)$ yozuv A to'plamning biror qismi B to'plamga ekvivalent, ammo B to'plamda A to'plamga ekvivalent qism yo'qligini bildiradi.

XULOSA

To'plamlar ularga tegishli elementlarga qarab chekli va cheksiz to'plamlarga ajratiladi. Chekli to'plamlar quvvati ularga tegishli elementlar soni orqali o'zaro taqqoslanadi. Cheksiz to'plamlarni taqqoslash uchun ularning ekvivalentligi tushunchasi kiritiladi. Ekvivalent to'plamlar teng quvvatli hisoblanadi. Natural sonlar to'plamiga ekvivalent to'plamlar sanoqli deb ataladi. $[0,1]$ kesmadagi nuqtalar to'plami sanoqli emas va bunday to'plamlar sanoqsiz deyiladi. $[0,1]$ kesma ekvivalent to'plamlar kontinuum quvvatli deb olinadi. Chekli to'plamlar uchun ham, cheksiz to'plamlar uchun ham quvvati eng katta bo'lgan to'plam mavjud emas.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday to'plamlar chekli deyiladi?
2. Chekli to'plamlarga misollar keltiring.
3. Qachon to'plam cheksiz deyiladi?
4. Cheksiz to'plamlarga misollar keltiring.
5. To'plamlarni aks ettirish nima?
6. O'zaro bir qiymatli moslik deb nimaga aytiladi?
7. Qachon to'plamlar ekvivalent deyiladi?
8. Qaysi shartda chekli to'plamlar ekvivalent bo'ladi?
9. To'plam quvvati deganda nima tushuniladi?
10. Sanoqli to'plam qanday ta'riflanadi?
11. Sanoqli to'plamlarga misollar keltiring.
12. Sanoqli to'plamlar qanday xossalarga ega?
13. Sanoqsiz to'plam qanday ta'riflanadi?
14. Sanoqsiz to'plamlarga misollar keltiring.

15. Qachon to'plam kontinuum quvvali deyiladi?
16. Kontinuum quvvali to'plamlarga misollar keltiring.
17. Eng katta quvvatli cheksiz to'plam mavjudmi?

2-ma'ruza. Sonli to'plamlar, kompleks sonlar to'plami, kompleks sonning moduli, xossalari va geometrik talqini..

Reja:

1. Asosiy ta'riflar.
2. Kompleks sonning geometrik tasviri.
3. Kompleks sonning trigonometrik shakli.

Tayanch iboralar: mavhum birlik, kompleks son, qo'shma va qarama-qarshi kompleks sonlar, kompleks sonning moduli va argumenti, argumentning bosh qiymati, sof mavhum son.

Asosiy ta'riflar

Haqiqiy sonlar bilan ish ko'rilganda noldan farqli har qanday haqiqiy sonni kvadrati musbat bo'ladi deyilgan edi. Ammo kvadrati manfiy bo'lgan sonlar bilan ham ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday sonlar tabiiyki haqiqiy son bo'lmaydi.

1-ta'rif. Kvadrati -1 ga teng ifodani **mavhum birlik** deb ataladi va u i orqali belgilanadi.

Shunday qilib, $i^2 = -1$ yoki $i = \sqrt{-1}$.

Mavhum birlikning ta'rifidan $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i$ va hokazo umuman k butun son uchun $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ ekannligi kelib chiqadi.

2-ta'rif. z kompleks son deb

$$z = a + bi$$

ko'rinishdagi ifodaga aytiladi, bunda a va b haqiqiy sonlar.

a va b ni z kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari deyiladi va

$$\text{Rez} = a, \quad \text{Im} z = b$$

kabi belgilanadi.

Xususiy holda, agar $a=0$ bo'lsa u holda $z=0+ib=bi$ bo'lib u **sof mavhum** son deyiladi. Agar $b=0$ bo'lsa $z=a+i0=a$ haqiqiy son hosil bo'ladi. Demak, haqiqiy va sof mavhum sonlar kompleks sonning xususiy holi.

3-ta'rif. Ikkita $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sonlar $a_1 = a_2$ $b_1 = b_2$ bo'lgandagina teng ($z_1 = z_2$) deyiladi.

Demak haqiqiy qismlari o'zaro va mavhum qismlari o'zaro teng bo'lgan kompleks sonlar teng bo'lar ekan.

4-ta'rif. Ham haqiqiy qismi ham mavhum qismi noldan iborat kompleks son nolga teng deyiladi.

Demak, $a=0$, $b=0$ bo'lgandagina $z=0$ va aksincha $z=a+ib=0$ dan $a=0$, $b=0$ kelib chiqadi.

5-ta'rif. Faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiluvchi ikkita $z = a + ib$ va $\bar{z} = a - ib$ kompleks sonlar o'zaro **qo'shma** kompleks sonlar deyiladi.

6-ta'rif. Haqiqiy va mavhum qismlarining ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita

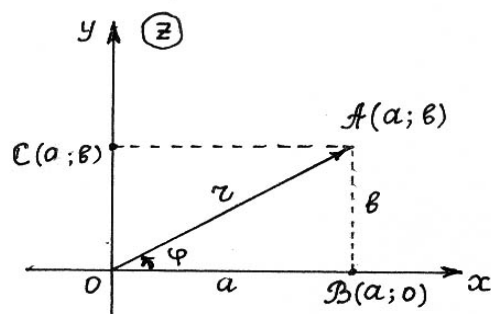
$$z_1 = a + ib \quad \text{va} \quad z_2 = -a - ib = -z_1$$

kompleks sonlar **qarama – qarshi** kompleks sonlar deyiladi.

. Kompleks sonning geometrik tasviri

Har qanday $z = a + ib$ kompleks sonni Oxy tekislikda koordinatalari a va b bo'lgan $A(a, b)$ nuqta shaklida tasvirlash mumkin. Aksincha, Oxy tekislikdagi har qanday $A(a, b)$ nuqtaga $z = a + ib$ kompleks son mos keladi.

Kompleks sonlar tasvirlanadigan tekislik z kompleks o'zgaruvchining tekisligi deyiladi va tekislikka doiracha ichiga z qo'yiladi. (134-chizma)



134-chizma

Shunday qilib kompleks sonning geometrik tasviri z tekislikning nuqtasidan iborat ekan. Bunda $0x$ o'qda yotuvchi nuqtalar $z=a$ haqiqiy sonlarni ($b=0$), $0y$ o'qda yotuvchi nuqtalar esa $z=bi$ sof mavhum sonlarni tasvirlaydi ($a=0$). Shuning uchun kompleks sonlarni z kompleks o'zgaruvchining tekisligi z da tasvirlanganda $0x$ o'q **haqiqiy o'q**, $0y$ o'q **mavhum o'q** deb ataladi. Umuman aytganda, kompleks sonlar to'plami bilan z tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud.

$A(a, b)$ nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtirib $\overrightarrow{OA}$ vektorni hosil qilamiz. Ba'zi hollarda $z=a+ib$ kompleks sonni $\overrightarrow{OA}$ vektor ko'rinishda tasvirlash ma'qul bo'ladi. Bu ham kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi.

Shunday qilib, kompleks sonning geometrik tasviri z tekislikdagi nuqtadan yoki vektordan iborat ekan.

Kompleks sonning trigonometrik shakli

Koordinatalar boshini qutb, $0x$ o'qning musbat yo'nalishini qutb o'qi deb z kompleks tekislikda qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. φ va r $A(a, b)$ nuqtaning qutb koordinatalari bo'lsin.

A nuqtaning qutb radiusi r , ya'ni A nuqtadan qutbgacha bo'lgan masofa $z=a+bi$ kompleks sonning **moduli** deyiladi va $|z|$ kabi belgilanadi.

Pifagor teoremasiga binoan chizmadagi to'g'ri burchakli OAB uchburchakdan $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ kelib chiqadi. Masalan, $z_1 = -3 + 4i$ sonning moduli $r_1 = |z_1| = |-3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ga teng. Noldan farqli har qanday kompleks sonning moduli musbat haqiqiy sonidir.

A nuqtaning qutb burchagi φ ni z kompleks sonning **argumenti** deyiladi va $\text{Arg}z$ kabi belgilanadi. Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi k$ qo'shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k -butun son. Argumentning hamma qiymatlari orasida $0 \leq \varphi < 2\pi$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat **bosh qiymat** deyiladi va $\varphi = \text{arg}z$ kabi belgilanadi.

Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ ni hisobga olib $z = a + bi = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$ yoki

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2.1)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda $z = a + bi$ kompleks sonning **trigonometrik shakldagi yozuvi** deb ataladi.

Qutb burchagi $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$ kabi topilishi ma'lum.

Shunday qilib, z kompleks sonning moduli deb uni tasvirlovchi vektorning uzunligiga, argumenti deb shu vektorning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagiga aytilar ekan.

$\varphi = \arctg \frac{b}{a}$ argumentni hisoblashda z kompleks sonning koordinatalar tekisligining

qaysi choragida yotishini hisobga olish kerak, chunki $\arctg \frac{b}{a}$ qiymatga φ argumentning ikkita qiymatlari mos keladi. Shuning uchun

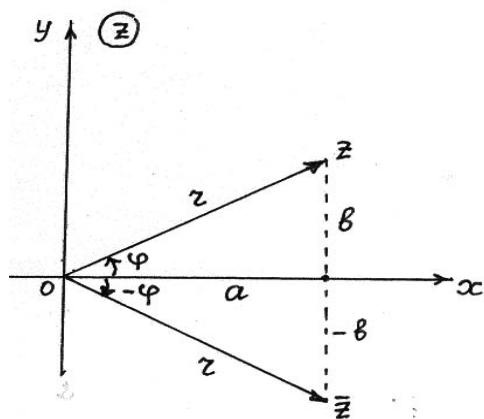
$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{agar } a > 0, b > 0 \text{ bo'lsa,} \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}, & \text{agar } a < 0, b \text{ istalgan son bo'lsa,} \\ 2\pi + \arctg \frac{b}{a}, & \text{agar } a > 0, b < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

tenglikdan foydalanish kerak. Masalan,

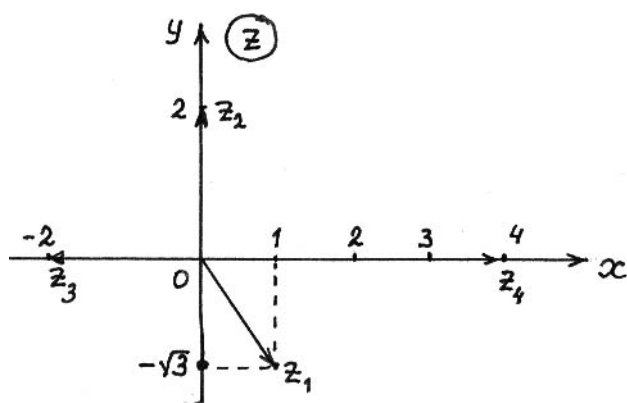
$$\begin{aligned} \arg(1+i) &= \arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ chunki } a=1>0, b=1>0, & \arg(-1+i) &= \\ &= \pi + \arctg(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \text{ chunki } a=-1<0, b=1>0, & \arg(-1-i) &= \pi + \arctg 1 = \frac{5\pi}{4}, \text{ chunki } a=- \\ &1<0, b=-1<0, & \arg(1-i) &= 2\pi + \arctg(-1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}, \text{ chunki } a=1>0, b=-1<0. \end{aligned}$$

Kompleks sonning $z=a+bi$ ko'rinishdagi yozuvi kompleks sonning **algebraik** shakli deyiladi.

Kompleks son vektor shaklida tasvirlanganda haqiqiy songa Ox o'qda yotuvchi vektor, sof mavhum songa Oy o'qda yotuvchi vektor mos keladi.



1-chizma.



2-chizma.

1-misol. $z_1=1-\sqrt{3} \cdot i$, $z_2=2i$, $z_3=-2$, $z_4=4$ kompleks sonlar trigonometrik shaklda yozilsin.

Yechish. 1) $z_1=1-\sqrt{3} \cdot i$ son uchun $a=1$, $b=-\sqrt{3}$, $r=\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}, \quad \varphi = 2\pi - \arctg \sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Shunday qilib, $z_1=1-\sqrt{3} \cdot i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$.

2) $z_2=2i$ -sof mavhum son. $a=0$, $b=2$, $r=\sqrt{0^2 + 2^2} = 2$,

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z_2 = 2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

3) $z = -2$ - manfiy haqiqiy son. Shuning uchun (2.2) formulaning ikkinchi tenglamasiga binoan $z_3 = -2 = |-2|(\cos \pi + i \sin \pi)$ bo'ladi.

4) $z_4 = 4$ - musbat haqiqiy son bo'lgani uchun (2.2) formulaning birinchi tenglamasiga binoan $z_4 = 4 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$ bo'ladi.

12-ma'ruza

Funksiya tushunchasi. Funksiyaning berilish usullari. Funksiyalarning eng sodda klassifikatsiyasi. Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti.

Reja:

1. Funksiya tushunchasi
2. Funksiyaning chegaralanganligi.
3. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar.
4. Monoton funksiyalar.
5. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.

Funksiya tushunchasi

Funksiya ta'rifi, berilish usullari. Biz E to'plamni F to'plamga akslantirish
 $f: E \rightarrow F$

ni o'rgangan edik.

Endi $E = F$, $F = R$ deb olamiz. Unda har bir haqiqiy x songa biror haqiqiy y sonni mos qo'yuvchi

$$f: F \rightarrow R \quad (x \xrightarrow{f} y)$$

akslantirishga kelimiz. Bu esa funksiya tushunchasiga olib keladi.

Funksiya tushunchasi o'quvchiga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Shuni e'tiborga olib funksiya haqidagi dastlabki ma'lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdik.

Aytaylik, $X \subset R$, $Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x \in X$, $y \in Y$.

1-ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda **funksiya berilgan (aniqlangan)** deyiladi va

$$f: x \rightarrow y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi. Bunda X - **funksiyaning aniqlanish to'plami (cohasi)**, Y - **funksiyaning o'zgarish to'plami (cohasi)** deyiladi. x - **erkli o'zgaruvchi** yoki **funksiya argumenti**, y esa **erksiz o'zgaruvchi** yoki **funksiya** deyiladi.

Misollar. 1. $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ bo'lib, f qoida

$$f: x \rightarrow y = x^2 + 1$$

bo'lsin. Bu holda har bir $x \in X$ ga bitta $x^2 + 1 \in Y$ mos qo'yilib,

$$y = x^2 + 1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

2. Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu **Dirixle funksiyasi** deyilib, u $D(x)$ kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiya uchta: X to'plam, Y to'plam va har bir $x \in X$ ga bitta $y \in Y$ ni mos qo'yuvchi f qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0 \in X$ nuqtaga mos keluvchi y_0 miqdor $y = f(x)$ **funksiyaning** $x = x_0$ **nuqtadagi xususiy qiymati** deyiladi va $f(x_0) = y_0$ kabi belgilanadi.

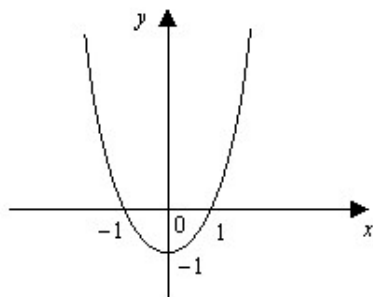
Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi $(x, f(x))$ nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) \in Y\}$$

to'plam $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi. Masalan,

$$y = x^2 - 1 \quad (x \in X = [-2, 2])$$

funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan.



1-chizma.

Funksiya ta'rifidagi f qoida turlicha bo'lishi mumkin.

a) Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu **funksiyaning anali-tik usulda berilishi** deyiladi. Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, uning aniqlanish to'plami

$$X = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

bo'ladi.

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo'lsin:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

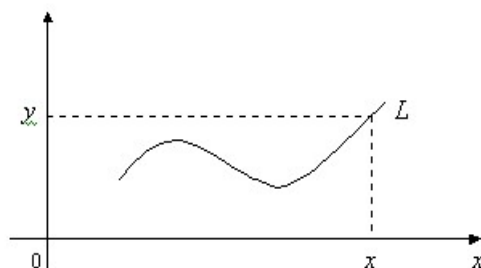
Bu funksiyaning aniqlanish to'plami $X = R \setminus \{0\}$ bo'lib, qiymatlar to'plami esa $Y = \{-1, 1\}$ bo'ladi. Odatda bu funksiya $y = \text{sign} x$ kabi belgilanadi.

b) Ba'zi hollarda $x \in X$, $y \in Y$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 vaqtda havo harorati T_1 , t_2 vaqtda havo harorati T_2 va h.k. bo'lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

t - vaqt	t_1	t_2	t_3	...	t_n
T - harorat	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Bu jadval t vaqt bilan havo harorati T orasidagi bog'lanish-ni ifodalaydi, bunda t - argument, T esa t ning funksiyasi bo'ladi.

v) x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2-chizma).



2-chizma.

Masalan, 2-chizmada tasvirlangan L egri chiziq beril-gan bo'lsin. Aytaylik, $[a, b]$ segmentdagi har bir nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyar L chiziqni faqat bitta nuqtada kessin. $\forall x \in [a, b]$ nuqtadan perpendikulyar chiqarib, uning L chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan x nuqta-ga kesishish nuqtasining ordinatasi y ni mos qo'yamiz. Natijada har bir $x \in [a, b]$ ga bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x bilan y orasidagi bog'lanishni beril-gan L egri chiziq bajaradi.

Aytaylik, $f_1(x)$ funksiya $X_1 \subset R$ to'plamda, $f_2(x)$ funksiya esa $X_2 \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar

$$1) X_1 = X_2$$

$$2) \forall x \in X_1 \text{ da } f_1(x) = f_2(x)$$

bo'lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funksiyalar o'zaro teng deyiladi va $f_1(x) = f_2(x)$ kabi belgilanadi.

2⁰. Funksiyaning chegaralanganligi. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda **yuqoridan chegaralangan** deyiladi. Agar shunday o'zgarmas m soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \geq m$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda **quyidan chegaralangan** deyiladi.

3-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda **chegaralangan** deyiladi.

1-misol. Ushbu $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ funksiyaning qaraylik. Bu funksiya R da chegaralangan bo'ladi.

$$\blacktriangleleft \text{Ravshanki, } \forall x \in R \text{ da } f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} > 0.$$

Demak, berilgan funksiya R da quyidan chegaralangan.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya uchun

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leq 1 + \frac{x^2}{1+x^4}$$

bo'ladi. Endi

$$0 \leq (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow 2x^2 \leq x^4 + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz: $f(x) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Bu esa $f(x)$ funksiyaning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, berilgan funksiya R da chegaralangan. ►

4-ta'rif. Agar har qanday $M > 0$ son olinganda ham shunday $x_0 \in X$ nuqta topilsaki,

$$f(x_0) > M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralanmagan deyiladi.

3^o. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas T ($T \neq 0$) son mavjud bo'lsaki, $\forall x \in X$ uchun

$$1) \quad x - T \in X, \quad x + T \in X$$

$$2) \quad f(x + T) = f(x)$$

bo'lsa, $f(x)$ **davriy funksiya** deyiladi, T son esa $f(x)$ **funksiyaning davri** deyiladi.

Masalan, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ funksiyalar davriy funksiyalar bo'lib, ularning davri 2π ga, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

a) Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ($T \neq 0$) bo'lsa, u holda

$$T_n = nT \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

b) Agar T_1 va T_2 sonlar $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $T_1 + T_2 \neq 0$ hamda $T_1 - T_2$ ($T_1 \neq T_2$) sonlar ham $f(x)$ funksiya-ning davri bo'ladi.

v) Agar $f(x)$ hamda $g(x)$ lar davriy funksiyalar bo'lib, ularning har birining davri T ($T \neq 0$) bo'lsa, u holda

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham davriy funksiyalar bo'lib, T son ularning ham davri bo'ladi.

2-misol. Ixtiyoriy T ($T \neq 0$) ratsional son Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son бўлса,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son бўлса} \end{cases}$$

ning davri bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Aytaylik, T ($T \neq 0$) ratsional son bo'lsin. Ravshanki, $\forall x \in R$ irratsional son uchun $x + T$ irratsional son, $\forall x \in R$ ratsional son uchun $x + T$ ratsional son bo'ladi. Demak,

$$D(x + T) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son бўлса,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son бўлса} \end{cases}$$

Shunday qilib, $\forall x \in R$, T - ratsional son bo'lganda

$$D(x+T)=D(x)$$

bo'ladi. ►

Ma'lumki, $\forall x \in X$ ($X \subset R$) uchun $-x \in X$ bo'lsa, X to'plam O nuqtaga nisbatan **simmetrik to'plam** deyiladi.

Aytaylik, O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik bajaril-sa, $f(x)$ **juft funksiya** deyiladi. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ **toq funksiya** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2+1$ juft funksiya, $f(x)=x^3+x$ esa toq funksiya bo'ladi. Ushbu $f(x)=x^2-x$ funksiya juft ham emas, toq ham emas.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham juft bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x), f(x)-g(x)$$

funksiyalar toq bo'ladi,

$$f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar esa juft bo'ladi.

Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa kordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

4⁰. Monoton funksiyalar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

7-ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ **funksiya X to'plamda o'suvchi** deyiladi. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ **funksiya X to'plamda qat'iy o'suvchi** deyiladi.

8-ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ **funksiya X to'plamda kamayuvchi** deyiladi. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ **funksiya X to'plamda qat'iy kamayuvchi** deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan **monoton funksiyalar** deyiladi.

3-misol. Ushbu $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ funksiyaning $X=[1, +\infty)$ to'p-lamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

◀ $[1, +\infty)$ da ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1+x_1x_2^2-x_2-x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=$$

$$= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 (x_2 - x_1)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0, \quad 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo'lishini e'tiborga olib,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

ya'ni, $f(x_1) > f(x_2)$ ekanini topamiz. Demak,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \blacktriangleright$$

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda o'suvchi (kamayuvchi)

bo'lib, $C = \text{const}$ bo'lsin. U holda

a) $f(x) + C$ funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

b) $C > 0$ bo'lganda $C \cdot f(x)$ o'suvchi, $C < 0$ bo'lganda $C \cdot f(x)$ kamayuvchi bo'ladi.

v) $f(x) + g(x)$ funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

5⁰. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar. $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam

$$Y_f = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

bo'lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko'ra Y_f , to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamdagi bitta x mos qo'yilgan bo'lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan **teskari funksiya** deyiladi va $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y = \frac{1}{2}x + 1$ funksiya nisbatan teskari funksiya $x = 2y - 1$ bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan $y = f(x)$ da x argument, y esa x ning funksiyasi, teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiya da y argument, x esa y ning funksiyasi bo'lishi ko'rinadi.

Qulaylik uchun teskari funksiya argumenti ham x , uning funksiyasi y bilan belgilanadi: $y = g(x)$.

$y = f(x)$ ga nisbatan teskari $g(x)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektisasi atrofi-da 180° ga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

Aytaylik, Y_f to'plamda $u = F(y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga Y_f to'plamda bitta y :

$$f: x \rightarrow y \quad (y = f(x)),$$

va Y_f to'plamdagi bunday y songa bitta u :

$$F: y \rightarrow u \quad (u = F(y))$$

son mos qo'yiladi. Demak, X to'plamdan olingan har bir x songa bitta u son mos qo'yilib, yangi funksiya hosil bo'ladi: $u = F(f(x))$. Odatda bunday funksiyalar **murakkab funksiya** deyiladi.

13-ma'ruza

Funksiyalarning limitlari. Ba'zi bir ajoyib limitlar. Funksiyalarning uzluksizligi.

Reja:

1. To'plamning limit nuqtasi.
2. Funksiya limiti ta'riflari.
3. Funksiya limiti ta'riflarining ekvivalentligi.
4. Funksiyaning o'ng va chap limitlari.
5. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.
- 6.

1^o. To'plamning limit nuqtasi. Aytaylik, biror $X \subset R$ to'plam va $x_0 \in R$ nuqta berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \neq x_0 : |x - x_0| < \varepsilon$$

bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning **limit nuqtasi** deyiladi.

Misollar. 1. $X = [0, 1]$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2. $X = (0, 1)$ to'plamning har bir nuqtasi va $x = 0$, $x = 1$ nuqtalar shu to'plamning limit nuqtalari bo'ladi.

3. $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ to'plamning limit nuqtasi $x_0 = 0$ bo'ladi.

4. $X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

2-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon^+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad (U_\varepsilon^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

o'ng atrofida (chap atrofida) X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning **o'ng (chap) limit nuqtasi** deyiladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$U_c(+\infty) = \{x \in R \mid x > c\}$$

to'plamda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, " $+\infty$ " X to'plamning limit «nuqta»si deyiladi.

Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$U_c(-\infty) = \{x \in R \mid x < c\}$$

to'plamda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, " $-\infty$ " X to'plamning limit «nuqta»si deyiladi.

Keltirilgan ta'rif va misollardan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin ekan.

1-teorema. Agar $x_0 \in R$ nuqta $X \subset R$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning har qanday

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'ladi.

◀Aytaylik, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Teorema tasdig'ining teskarisini faraz qilaylik: x_0 nuqtaning biror $U_{\delta_0}(x_0)$ atrofida X to'plamning chekli sondagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalarigina bo'lsin. U holda

$$\min \{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|, \delta_0\} = \delta$$

deb olinsa, x_0 nuqtaning $U_{\delta}(x_0)$ atrofida X to'plamning x_0 dan farqli bitta ham nuqtasi bo'lmaydi. Bu esa x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lishiga ziddir. ►

2-teorema. Agar x_0 nuqta $X \subset R$ to'plamning limit nuqta-si bo'lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ topila-diki,

1) $\forall n \in N$ da $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$;

2) $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$

bo'ladi.

◀Aytaylik, $x_0 \in R$ nuqta $X \subset R$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Unda 1-ta'rifga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in X, x_n \neq x_0 : |x_n - x_0| < \varepsilon$$

bo'ladi. Jumladan,

$$\varepsilon = 1 \text{ uchun } \exists x_1 \in X, x_1 \neq x_0 : |x_1 - x_0| < 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ uchun } \exists x_2 \in X, x_2 \neq x_0 : |x_2 - x_0| < \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{ uchun } \exists x_3 \in X, x_3 \neq x_0 : |x_3 - x_0| < \frac{1}{3},$$

$$\dots$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \text{ uchun } \exists x_n \in X, x_n \neq x_0 : |x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

$$\dots$$

bo'ladi.

Natijada qaralayotgan teoremaning 1) shartini qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik hosil bo'lib, uning uchun $\forall n \in N$ da $|x_n - x_0| < 1/n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Keyingi munosa-batdan esa $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$ kelib chiqadi. ►

Shuni ta'kidlash lozimki, 2-teoremaning shartlarini qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar ko'plab topiladi.

2⁰. Funksiya limiti ta'riflari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plam-ning limit nuqtasi bo'lsin. x_0 nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in X, x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlikni olib, funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz.

3-ta'rif. (Geyne). Agar $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in X, x_n \neq x_0$) bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow b$ bo'lsa, b ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $x \rightarrow x_0$ da $f(x) \rightarrow b$ yoki

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

Eslatma. Agar $n \rightarrow \infty$ da

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, \quad x_n \neq x_0) \quad \text{va} \quad y_n \rightarrow x_0 \quad (y_n \in X, \quad y_n \neq x_0)$$

bo'ladigan turli $\{x_n\}, \{y_n\}$ ketma-ketliklar uchun $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow b_1$, $f(y_n) \rightarrow b_2$ bo'lib, $b_1 \neq b_2$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ da limitga ega emas deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

funksiyaning $x_0 = 4$ nuqtadagi limiti topilsin.

◀ Quyidagi $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4 \quad (x_n \neq 4, \quad n = 1, 2, \dots)$$

ketma-ketlikni olaylik. Unda

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$$

bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow 2$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = 2. \blacktriangleright$$

2-misol. Ushbu

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud bo'lmashligi ko'rsa-tilsin.

◀ Ravshanki, $n \rightarrow \infty$ da

$$x'_n = \frac{2}{(4n-1)\pi} \rightarrow 0, \quad x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0$$

bo'ladi.

Bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x'_n) = \frac{4n-1}{2} \pi = -1, \quad f(x''_n) = \frac{4n+1}{2} \pi = 1$$

bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da

$$f(x'_n) \rightarrow -1, \quad f(x''_n) \rightarrow 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada limitga ega emas. ▶

4-ta'rif. (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}): |f(x) - b| < \varepsilon$
 bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

3-misol. $f(x) = C = \text{const}$ ($C \in R$) bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi limiti 2 ga teng ekani ko'rsatilsin.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\delta = \varepsilon$ deb olsak, u holda $|x - 1| < \delta$ ($x \neq 1$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x da

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$. ▶

5-misol. Faraz qilaylik, $X = R \setminus \{0\}$ da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bo'ladi.

◀ Ma'lumki, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ uchun

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan, funksiylarning juftligini hisobga olib, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ da

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tengsizliklardan esa

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall \varepsilon > 0$ ni olib, $\delta = \min\{\varepsilon; 1\}$ deyilsa, unda $\forall x, |x| < \delta, x \neq 0$ uchun

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \blacktriangleright$$

6-misol. Ushbu

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad x \in R, \quad x_0 = 0$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ $a > 1$ bo'lgan holni qaraylik. Bu holda $f(x)$ funksiya qat'iy o'suvchi bo'ladi:

$$\forall x_1, x_2 \in R, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2): \quad a^{x_1} < a^{x_2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ma'lumki, $n \rightarrow \infty$ da

$$a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, \quad a^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

bo'lib, ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan

$$\exists n_1 \in N, \quad \forall n > n_1: \quad a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in N, \quad \forall n > n_2: \quad a^{-\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon$$

bo'ladi. Endi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, $\delta = \frac{1}{n_0}$ deyilsa, unda

$$\forall x, \quad |x - 0| < \delta \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n_0}$$

bo'lganda

$$a^{\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

$0 < a < 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ bo'lishini isbotlash o'quvchiga havola etiladi. ▶

5-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun $f(x) > \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti $+\infty$ deb ataladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (x \neq 0)$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 = +\infty$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

6-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki, $\forall x \in X$, $x > \delta$ uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning $x_0 = +\infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

7-misol. Aytaylik, $X = (0, +\infty)$, $x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $\forall \varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ravshanki, $\forall x > 0$ uchun

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demak, $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ deyilsa, unda $\forall x > \delta$ uchun $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$

bo'ladi. ▶

8-misol. Faraz qilaylik,

$$f(x) = \frac{x^m}{a^x}, \quad a > 1, \quad m \in N, \quad X = R$$

bo'lsin. Unda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$$

bo'lishini isbotlaymiz.

◀ $\varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ma'lumki, $n \rightarrow \infty$ da

$$\frac{(n+1)^m}{a^n} \rightarrow 0$$

bo'ladi. Unda

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : \frac{(n+1)^m}{a^n} < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar $C = n_0$ deyilsa, unda $\forall x > C$ uchun

$$\left| \frac{x^m}{a^x} - 0 \right| = \frac{x^m}{a^x} < \frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}} < \varepsilon$$

bo'ladi ($[x] \geq n_0 = C$). Demak, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$. ▶

9-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

munosabat isbotlansin.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ sonni olamiz. Ma'lumki, $n \rightarrow \infty$ da

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \rightarrow e.$$

Limit ta'rifiga binoan,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 :$$

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi $C = n_0$ desak, unda $\forall x > C$ uchun

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon$$

bo'lib,

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \blacktriangleright$$

3⁰. Funksiya limiti ta'riflarining ekvivalentligi.

3-teorema. Funksiya limitining Koshi hamda Geyne ta'riflari ekvivalent ta'riflardir.

◀Koshi ta'rifiga ko'ra b soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo'lsin:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

Unda

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$$

bo'lganda

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (1)$$

bo'ladi. x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi. Unda 2-teoremaga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik topiladiki, $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \neq x_0$, $n=1,2,\dots$) bo'ladi. Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan

$$\delta > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |x_n - x_0| < \delta, \quad (2)$$

bo'ladi. (1) va (2) munosabatlardan $\forall n > n_0$ uchun

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa b sonini Geyne ta'rifi bo'yicha $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti ekanini bildiradi.

Endi b soni Geyne ta'rifi bo'yicha $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo'lsin.

Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti Geyne ta'rifi bo'yicha b ga teng bo'lsa ham, Koshi ta'rifi bo'yicha limiti bo'lmasin. Unda biror $\varepsilon_0 > 0$ uchun ixtiyoriy $\delta > 0$ son olinganda ham $0 < |x - x_0| < \delta$ ni qanoatlantiruvchi biror x' da

$$|f(x') - b| \geq \varepsilon_0$$

bo'ladi.

Nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligi $\{\delta_n\}$ ni olaylik:

$$n \rightarrow \infty \text{ da } \delta_n \rightarrow 0 \quad (\delta_n > 0, \quad n=1,2,\dots).$$

U holda

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n \Rightarrow |f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0 \quad (3)$$

bo'ladi. Ammo $\delta_n \rightarrow 0$, da $x_n \rightarrow x_0$, demak, Geyne ta'rifiga asosan

$$f(x_n) \rightarrow b$$

bo'ladi. Bu (3) ga ziddir. Demak, b soni Koshi ta'rifi bo'yicha ham, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo'ladi. ►

4⁰. Funksiyaning o'ng va chap limitlari. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan, x_0 nuqta X ning chap limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0 - \gamma, x_0) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

7-ta'rif. Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, b son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan, x_0 nuqta X ning o'ng limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0, x_0 + \gamma) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

8-ta'rif. Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, b son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiyaning 0 nuqtadagi o'ng limiti 1, chap limiti -1 bo'ladi.

5⁰. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketlik singari qator xossalarga ega.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in R$ nuqta X ning limit nuqtasi bo'lsin.

1-xossa. Agar $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi.

◀Bu xossaning isboti limit ta'riflarining ekvivalentligi hamda ketma-ketlik limitining yagonaligidan kelib chiqadi.►

2-xossa. Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b, \quad (b - \text{chekli son})$$

bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ ($\delta > 0$) atrofi topiladiki, bu atrofda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \text{ da } |f(x) - b| < \varepsilon$$

ya'ni $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida chegaralangan-ligi kelib chiqadi. ►

3-xossa. Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

bo'lib, $b < p$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi topiladiki, bu atrofda

$$f(x) < p$$

bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Funksiyaning limiti ta'rifga ko'ra $\varepsilon = p - b > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$$\forall x \in X, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \text{ uchun}$$

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < b + \varepsilon = p$$

bo'ladi. Bu esa $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) < p$ bo'lishini bildiradi. ►

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plam-da berilgan bo'lib, $x_0 \in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

4-xossa. Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$$

bo'lib, $\forall x \in X$ da $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $b_1 \leq b_2$, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$$

bo'lsin.

Funksiya limitining Geyne ta'rifga ko'ra x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, \quad x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlik uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow b_1, \quad g(x_n) \rightarrow b_2 \quad (1)$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\forall n \in N$ da

$$f(x_n) \leq g(x_n) \quad (2)$$

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossaligidan foydalanib, (1) va (2) munosabatlardan $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_n)$, ya'ni $b_1 \leq b_2$ bo'lishini topamiz. ►

5-xossa. Faraz qilaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2, \quad (b_1, b_2 \in R)$$

limitlar mavjud bo'lsin. U holda

$$\text{a) } \forall c \in R \quad \text{da} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{g) } \text{Agar } b_2 \neq 0 \text{ bo'lsa, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

bo'ladi.

14-ma'ruza

Funksiyalarning hosilalari. Funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va bo'linmasining hosilasi. Murakkab, teskari va parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyaning hosilasi.

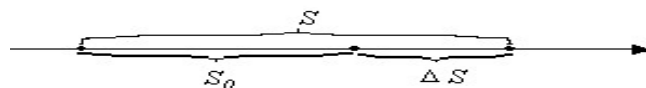
Reja:

1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar.
2. Hosilaning ta'rifi va uning geometrik va mexanik ma'nolari.
3. Hosilaning biologik ma'nosi.
4. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi.
5. Funktsiyaning differensiallanuvchiligi.
6. Differensiallashning asosiy qoidalari.
7. Murakkab funktsiyaning hosilasi.
8. Teskari funktsiya va uning hosilasi.

Tayanch iboralar: o'rtacha tezlik, oniy tezlik, o'rtacha zichlik, zichlik, urinma, burchak, koeffitsient, hosila, differensiallash, hosilaning mexanik, geometrik, biologik, iqtisodiy ma'nolari, teskari funktsiya.

14.1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar.

1. Tezlik haqidagi masala. Faraz qilaylik moddiy nuqta to'g'ri chiziqli bo'ylab $s = f(t)$ qonun bo'yicha bir tomonlama harakatlanayotgan bo'lsin, bunda t -vaqt, s t vaqt ichida nuqtaning bosib o'tgan yo'li. Vaqtning t_0 momentini qaraymiz. Bu momentda nuqta $s_0 = f(t_0)$ yo'lini o'tadi. Moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish masalasini qoyamiz. Buning uchun vaqtning boshqa $t_0 + \Delta t$ momentini qaraymiz. Bunga $s = f(t_0 + \Delta t)$ o'tilgan yo'l mos keladi. U holda $\Delta t = t - t_0$ vaqt ichida moddiy nuqta $\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ masofani o'tadi (1-chizma).



1-chizma

$v_{o'rt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat nuqta harakatining Δt vaqt oralig'idagi **o'rtacha tezligini** beradi.

O'rtacha tezlikning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti t_0 momentdagi **oniy tezlik** deb ataladi va u v_0 orqali belgilanadi.

Demak, $v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ yoki $v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Shunday qilib moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad (14.1)$$

limitni hisoblashga keltirildi.

2. Sterjenning zichligi haqidagi masala. Uzunligi ℓ ga teng ingichka to'g'ri chiziqli bir jinsli bo'lmagan sterjenni qaraymiz. Shu sterjenning istalgan nuqtasida zichlikni aniqlaymiz. Sterjen Ox o'q bo'ylab joylashgan va uning uchlaridan biri koordinatalar boshida yotadi deb faraz qilamiz. U holda sterjenning har bir nuqtasiga ma'lum x koordinata mos keladi.

Koordinatalari 0 va x bo'lgan sterjen nuqtalari orasidagi qismining massasini m orqali belgilaymiz. U holda m massa x ning funktsiyasi bo'lishi ravshan: $m = f(x)$.

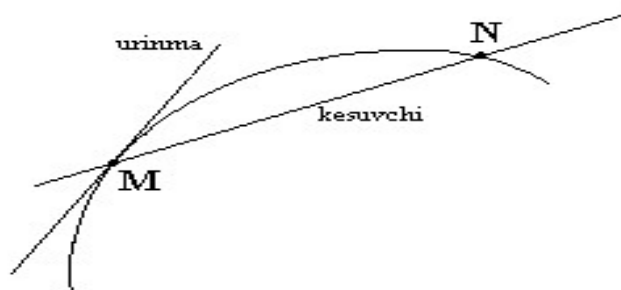
Sterjenning aniq qo'zg'olmas x_0 nuqtasini hamda o'zgaruvchi $x_0 + \Delta x$ nuqtasini qaraymiz. Sterjenni qaralayotgan qismining uzunligi Δx ga, massasi $\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ga teng bo'ladi. $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ nisbat sterjenning x_0 va $x_0 + \Delta x$ oraliqdagi **o'rtacha zichligi** deb ataladi.

O'rtacha zichlikning sterjenning uzunligi Δx nolga intilgandagi limiti sterjenning x_0 nuqtadagi **zichligi** deb ataladi va u δ orqali belgilanadi. Demak,

$$\delta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (14.2)$$

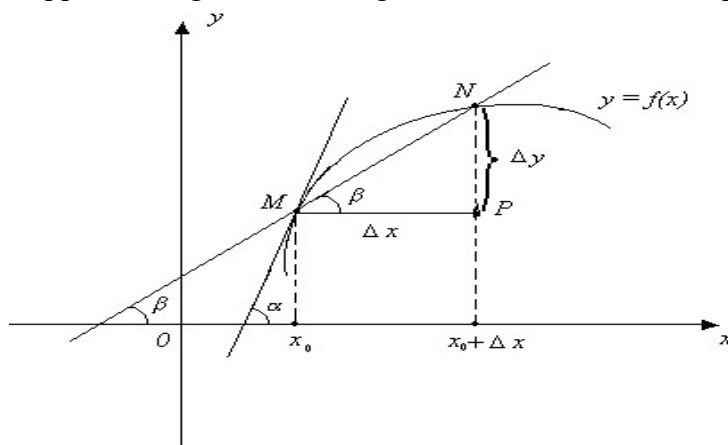
3. Egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsienti. Oldin egri chiziqqa urinma tushunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. Egri chiziqning berilgan M va ixtiyoriy N nuqtasini orqali o'tadigan kesuvchi to'g'ri chiziqning N nuqta egri chiziq boylab M nuqtaga intilgandagi limit holati shu egri chiziqqa M nuqtasida o'tkazilgan **urinma** deb ataladi (1-chizma).



1-chizma

Uzluksiz egri chiziq $y = f(x)$ tenglama yordamida berilgan bo'lib uning $M(x_0, y_0)$ nuqtasida egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topish talab etilsin.



2-chizma

Egri chiziqda $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nuqtani olib MN kesuvchini o'tkazamiz. Bu kesuvchini Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni β orqali belgilaymiz. Urinmaning Ox o'q bilan tashkil etgan burchakni α desak 2-chizmadagi $\triangle MNP$ dan

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ekani ko'rinib turibdi. N nuqta egri chiziq boylab M nuqtaga intilganda $\Delta x \rightarrow 0$ va $\beta \rightarrow \alpha$.

Demak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ va $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Shunday qilib, urinmaning burchak koeffitsientini k orqali belgilasak uni topish

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (14.3)$$

ko'rinishdagi limitni topishga keltirildi.

Biz qaragan masalalarning barchasida ularning fizik mohiyatidan qat'iy nazar bir xil ya'ni funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topishga keltirildi. Shuning uchun bu kabi nisbatlarni o'rganish va ularning limitlarini hisoblashni bilish maqsadga muvofiq.

14.2. Hosilaning ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nolari.

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. $(a; b)$ intervalga tegishli x_0 va $x_0 + \Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ni hisoblab $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

2-ta'rif. Funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilgandagi limiti (agar u mavjud bo'lsa) $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi **hosilasi** deb ataladi.

Funksiyaning hosilasi $y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ belgilardan biri bilan belgilanadi.

$$\text{Shunday qilib, } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Hosilani topish jarayoni funksiyaning **differensiallash** deb ataladi.

Endi yuqorida qaralgan misollarga qaytamiz. Hosila tushunchasidan foydalanib (14.1) tenglikni

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, to'g'ri chiziqli bir tomonlama harakatda oniy tezlik yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng ekan. Bu hosilaning **mexanik ma'nosi**dir.

(14.2) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$\delta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m'(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak to'g'ri chiziqli sterjenning x nuqtadagi zichligi m massadan x uzunlik bo'yicha hosila ekan.

Shunga o'xshash (14.3) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Demak, $f'(x_0)$ hosila geometrik nuqtai nazardan $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng ekan. Bu hosilaning **geometrik ma'nosi**.

Biz yuqorida hosilaning mexanik va geometrik ma'nolari bilan tanishdik. Endi uning biologik va iqtisodiy ma'nolari bilan tanishamiz.

14.3. Hosilaning biologik ma'nosi.

Ko'paygan mikroorganizmlar soni y va ko'payish vaqti t orasidagi bog'lanish

$$y = p(t)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Vaqtning aniq t momentiga mikroorganizmlarning aniq $p(t)$ soni va vaqtning boshqa $t + \Delta t$ momentiga mikroorganizmlarning aniq $p(t + \Delta t)$ soni mos keladi. $\Delta y = p(t + \Delta t) - p(t)$ ifoda Δt vaqt oralig'ida mikroorganizmlarni o'zgarish sonini beradi.

$\frac{\Delta p}{\Delta t}$ nisbat ko'payishning o'rtacha tezligi yoki boshqacha aytganda ko'payishning o'rtacha

samaradorligi $y' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = p'(t)$ vaqtning t momentidagi mikroorganizm ko'payishining samaradorligini anglatadi. Bu **hosilaning biologik ma'nosi**.

14.4. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi.

Sarflangan xarajatlar miqdori x va olinadigan mahsulot miqdori u orasidagi moslikni aniqlovchi

$$y = f(x)$$

funksiyani olaylik.

U holda sarflangan xarajatni aniq x miqdoriga olingan mahsulotning $f(x)$ miqdori va sarflangan xarajatning boshqa bir $x + \Delta x$ miqdoriga olingan mahsulotning $f(x + \Delta x)$ miqdori mos keladi. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ayirma xarajat Δx ga oshganda olingan qo'shimcha mahsulotning miqdorini beradi.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat sarflangan Δx xarajat miqdoriga mos olingan mahsulot miqdorining

o'rtacha o'zgarish tezligidir. $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ifoda xarajatlarning

ma'lum miqdoridagi olingan mahsulot hajmining o'zgarish tezligini (xarajat birligida olingan mahsulot hajmini) anglatadi. Bu **hosilaning iqtisodiy ma'nosi**dir.

14.5. Funksiyaning differensiallanuvchiligi.

3-ta'rif. Agar $y = f(t)$ funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu **nuqtada differensiallanuvchi** deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $y = f(t)$ funksiya $(a; b)$ intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u shu **intervalda differensiallanuvchi** deb ataladi.

Funksiyaning uzluksizligi va differensiallanuvchiligi orasidagi bog'lanishni ko'rsatadigan teoremani isbotlaymiz.

14.1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli limit mavjud. Buni limitning xossasidan foydalanib

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

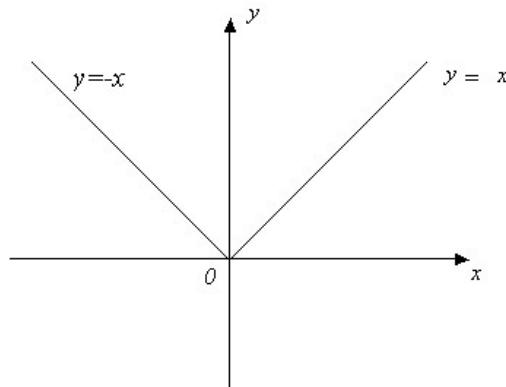
ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\Delta x \rightarrow 0$ da α -cheksiz kichik funksiya. Bundan $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0)\Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$.

Demak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ va $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shunday qilib funksiyaning chekli hosilaga ega ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqar ekan.

Teskari da'vo, umuman aytganda, to'g'ri emas, chunonchi nuqtada uzluksiz, biroq bu nuqtada hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar ham mavjud.

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya butun sonlar o'qida, jumladan $x_0=0$ nuqtada ham uzluksiz (100-chizma), chunki $f(0) = |0| = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ va $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.



3-chizma

Bu funksiyaning $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emasligini ko'rsatamiz.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| \quad \text{va} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\text{Shunga o'xshash} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1. \text{ Shunday qilib } \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ nisbat}$$

$x=0$ nuqtada har xil bir tomonlama limitlarga ega. Bu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $x_0=0$ nuqtada limitga emasligini, ya'ni $f'(0)$ hosilaning mavjud emasligini ko'rsatadi.

Demak, funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega ekanligi (differensiallanuvchiligi) kelib chiqmas ekan.

14.6. Differensiallashning asosiy qoidalari.

14.2-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va mahraji noldan farqli bo'lganda bo'linmasi ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, hosilalar

$$\text{a) } (u \pm v)' = u' \pm v', \quad \text{b) } (uv)' = u'v + uv', \quad \text{d) } \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ formulalar yordamida topiladi.}$$

Isbot. (Bo'linma uchun). $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bo'lsin, bu yerda $v(x) \neq 0$ Δy orttirmani tuzamiz:

$$\begin{aligned} \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)v(x_0)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \\ &= \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]v(x_0) - u(x_0)[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{\Delta u v(x_0) - u(x_0) \Delta v}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)}. \end{aligned}$$

Shartga ko'ra $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0)$ va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x_0 + \Delta x) = v(x_0)$ (differensiallanuvchi funksiya uzluksiz).

$$\text{Demak, } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) - u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Shunday qilib, $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. a) va b) formulalar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema qo'shiluvchilar va ko'paytuvchilar soni chekli bo'lganda ham to'g'ri bo'ladi. Masalan, $(u + v - w)' = u' + v' - w'$, yoki $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ tenglik o'rinli.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $(Cu)' = Cu'$ yoki $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$, bunda C -o'zgarmas son.

Haqiqatan, $y = Cu(x)$ bo'lsa, $\Delta y = Cu(x_0 + \Delta x) - Cu(x_0)$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cu(x_0 + \Delta x) - Cu(x_0)}{\Delta x}$ bo'lib $y' = (Cu)' = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} = Cu'(x)$ bo'ladi.

14.7. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasi bilan tanishamiz. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ murakkab funksiyaning qaraymiz.

14.3-teorema. $y = f(u)$ va $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Murakkab $f(u)$ funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti u bo'yicha hosilasi y'_u ning oraliq argumentning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi $u'(x)$ ga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Isboti. $u = \varphi(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada, $y = f(u)$ funksiya esa bu nuqtaga mos $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$ chekli limit

mavjud. Bundan $\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha$ yoki $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u$ kelib chiqadi, bu yerdagi $\alpha, \Delta u \rightarrow 0$ da cheksiz kichik funksiya. So'nggi tenglikni har ikkala tomonini Δx ga bo'lsak

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ hosil bo'ladi. Bunda } \Delta x \rightarrow 0 \text{ da limitga o'tib}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0 \text{ ekanini hisobga olsak isbotlanishi lozim}$$

bo'lgan $y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$ yoki $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ kelib chiqadi. Biz bu yerda differensiallanuvchi $u(x)$ funksiya uzluksiz va $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta u \rightarrow 0$ ni hisobga oldik.

14.8. Teskari funksiya va uning hosilasi.

$[a; b]$ kesmada aniqlangan o'suvchi yoki kamayuvchi $y = f(x)$ funksiyaning qaraymiz. $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsin. Aniqlik uchun $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchi deb faraz qilamiz. $[a; b]$ kesmaga tegishli ikkita har xil x_1 va x_2 nuqtani olamiz. O'suvchi funksiyaning ta'rifidan agar $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa, $y_1 < y_2$ bo'ladi.

Demak, argumentning ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlarga funksiyaning ikkita har xil y_1 va y_2 qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to'g'ri, ya'ni $y_1 < y_2$ bo'lib, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa, o'suvchi funksiya ta'rifidan $x_1 < x_2$ bo'lishi kelib chiqadi.

Boshqacha aytganda x ning qiymatlari $[a; b]$ kesma bilan u ning qiymatlari $[c; d]$ kesma orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. u ni argument, x ni esa funksiya sifatida qarab x ni u ning funksiyasi sifatida hosil qilamiz:

$$x = \varphi(y).$$

Bu funksiya berilgan $y = f(x)$ funksiyaga **teskari funksiya** deyiladi. Kamayuvchi funksiya uchun ham shunga o'xshash mulohaza yuritish mumkin. Shuni aytish lozimki, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari sohasi $[c; d]$ unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi va aksincha. $x = \varphi(y)$ funksiya uchun $y = f(x)$ funksiya teskari funksiya bo'lgani uchun $x = \varphi(y)$ va $y = f(x)$ funksiyalar **o'zaro teskari funksiyalar** deb ataladi.

$y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $y = f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechib topiladi. O'zaro teskari funksiyalarning grafigi Oxu tekisligidagi bitta egri chiziqni ifodalaydi.

5-misol. $y = x^3$ funksiyaga teskari funksiya topilsin.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan va o'suvchi. Tenglikni x ga nisbatan yechsak berilgan funksiyaga teskari $x = \sqrt[3]{y}$ funksiya hosil bo'ladi.

Har qanday funksiya ham teskari funksiyaga ega bo'lavermaydi. Masalan $y = x^2$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalda teksari funksiyaga ega emas, chunki u ning har bir musbat qiymatiga x ning ikkita $x = -\sqrt{y}$ va $x = \sqrt{y}$ qiymatlari mos keladi. Agar $y = x^2$ funksiyani $(-\infty, 0]$ intervalda qaralsa funksiya $x = -\sqrt{y}$ teskari funksiyaga ega, chunki u ning har bir musbat qiymatiga x ning yagona $y = x^2$ tenglikni qanoatlantiradigan qiymati mos keladi.

Shuningdek $y = x^2$ funksiyani $[0, +\infty)$ oraliqda qarasak unga teskari $x = \sqrt{y}$ funksiya mavjud bo'ladi.

Izoh. $y = f(x)$ funksiyaga teskari $x = \varphi(y)$ funksiyaning argumentini odatdagidek x bilan, funksiyani esa y bilan belgilasak va $y = f(x)$ hamda $y = \varphi(x)$ funksiyalarni grafigini bitta koordinatalar sistemasida chizsak grafik birinchi koordinatalar burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

14.4-teorema. Agar o'suvchi (kamayuvchi) $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, shu bilan birga $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsa, u holda unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiya $[c; d]([d; c])$ kesmada aniqlangan monoton va uzluksiz bo'ladi.

Endi $x = \varphi(y)$ teskari funksiyani hosilasini bilgan holda $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini topish imkonini beradigan teoremani isbotlaymiz.

14.5-teorema. Agar $x = \varphi(y)$ funksiya biror intervalda monoton bo'lib shu intervalning y nuqtasida noldan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo'lsa, bu nuqtaga mos x nuqtada teskari $y = f(x)$ funksiya ham hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan $x = \varphi(y)$ funksiya monoton va differensiallanuvchi bo'lgani uchun u uzluksiz hamda unga teskari monoton va uzluksiz $y = f(x)$ funksiya mavjud. x ga

$\Delta x \neq 0$ orttirma bersak $y = f(x)$ funksiya Δy orttirma oladi va uzluksizligini nazarga olsak $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$. Natijada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Bu formulani $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib, teskari funksiyaning hosilasi shu funksiya hosilasiga teskari miqdorga teng ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalardan bir nechtasini ayting.
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi?
3. Urinmaning burchak koeffitsienti nimaga teng?
4. Funksiyaning nuqtadagi hosilasini ta'riflang.
5. Funksiyaning geometrik va mexanik ma'nolarini ayting.
6. Funksiyaning biologik va iqtisodiy ma'nolarini ayting.
7. Funksiya qachon differensiallanuvchi deyiladi?
8. Funksiyaning intervalda differensiallanuvchiligini ta'riflang.
9. Differensiallanuvchi funksiya uzluksiz bo'ladimi?
10. Uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo'ladimi?
11. Differensiallashning asosiy qoidalarini ayting.
12. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
13. Berilgan funksiya teskari funksiya deb nimaga aytiladi?
14. Teskari funksiya qanday topiladi?
15. Qanaqa funksiyalarga teskari funksiya mavjud bo'ladi?
16. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?