ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ОТАЕВ ШОНАЗАР ҚОДИРОВИЧ

СОБОЛЕВ-ЛИУВИЛЛ ФАЗОЛАРИДА ГАРМОНИК БЎЛМАГАН СИСТЕМАЛАРНИНГ ТЎЛАЛИГИ ҲАҚИДА

01.01.02-Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

УДК 517.984.5

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии(PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ОТАЕВ ШОНАЗАР ҚОДИРОВИЧ

СОБОЛЕВ-ЛИУВИЛЛ ФАЗОЛАРИДА ГАРМОНИК БЎЛМАГАН СИСТЕМАЛАРНИНГ ТЎЛАЛИГИ ҲАҚИДА

01.01.02-Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Махкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.PhD/FM13 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://ik-fizmat.nuu.uz) ва “Ziyonet” таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Қосимов Шокирбой Ғоппорович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Ўразбоев Ғайрат Уразалиевич физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc03/30.12.2019/FM 01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «12» Ноябр соат 12⁰⁰ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-53-21, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail:nauka@nuu. uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (79 рақами билан рўйҳатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-02-24).

Диссертация автореферати 2020 йил «3» Ноябр куни тарқатилди.

(2020 йил «31» Октябр даги 1 рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик.

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д (PhD)

Ш.А.Алимов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик.

Кириш(фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб бориладиган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотлар, кўп ҳолларда, дифференциал операторларнинг хос функциялари системасининг базислигини ва эллиптик операторлар қатнашган аралаш чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилувчанлиги масаласини ўрганишга олиб келинади. Шунингдек, математик физика ва квант механикасининг кўплаб масалалари хос қиймат, хос ва эргашган функцияларни топиш, берилган функцияни дифференциал оператор хос ва эргашган функциялар системаси орқали Фурье қаторига ёйиш, хос ва эргашган функциялар системасининг тўлалиги ва базислигини аниқлаш, хос ва эргашган функциялар ва маълум берилган система орқали ёйилган қаторни текис яқинлашиши каби масалаларни ўз ичига олади. Бундай типдаги масалалар, масалан, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишда Фурье усулини асослашда юзага келади. Дифференциал операторларнинг спектрал масала хос векторлар системасининг тўлалиги ва базисилиги квант механикасининг кўпгина масалаларини ечишнинг асосий математик воситаси ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда банах фазоларида дифференциал ва псевдодифференциал операторларнинг хос ва эргашган функциялар системасининг тўлалиги ва базисилиги масаласи, Соболев синфларида умумлашган спектрал масала ортонормал хос векторлар системасининг тўлалиги ва гармоник бўлмаган каррали Фурье қаторининг текис яқинлашишини ўрганиш математик физиканинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Турли функционал фазоларида дифференциал оператор хос функциялар системасининг тўлалиги ва базислигини аниқлаш, нолокал чегаравий шартлар қатнашган каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун аралаш масаланинг ечилувчанлик масаласи, ва умуман гармоник бўлмаган системаларнинг базислигига бағишланган масалалар мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий аҳамиятга эга бўлган долзарб жиҳатларига алоҳида эътибор қаратилмоқда. Илм-фан олдига фундаментал тадқиқотларни амалиётга яқинлаштириш вазифаси қўйилган. Математик фанларнинг устувор йўналишлари бўйича алгебра ва функционал таҳлил, дифференциал тенгламалар ва математик физика, амалий математика ва математик моделлаштириш бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий изланишлар олиб бориш асосий вазифалардан биридир[1]. Хусусий ҳосилали тенгламаларни тадқиқ қилишнинг ривожланиши, хусусан, турли функционал фазоларда хос функциялар системасининг тўлалиги ва базислигини ўрганиш ва нолокал чегаравий шартлар қатнашган каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун аралаш масаланинг ечилувчанлик масаласи ушбу қарорни амалга оширишда муҳим рол ўйнайди.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари, Ўзбекистон Республикаси Президенти Ш.М. Мирзиёевнинг 2019 йил 24 май куни Ўзбекистон Миллий университетида таълим ва илм-фан соҳаси вакиллари билан бўлиб ўтган учрашувидаги маърузаси ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика ва фан технология ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Шуни таъкидлаш керакки, Бессел ва Гилберт системалари ва Рисс базислари тушунчалари Н. К. Бари томонидан киритилди. Кейинчалик чекли $(-a, a)$ интервалда функцияларни биортогонал $f \sim \sum_{n\in Z} e^{i\lambda_n x}$ қаторларга ёйиш масалалари дастлаб Р. Пэли ва Н. Винерлар ишларида қаралган ва бундай қаторлар гармоник бўлмаган Фурье қатори деб атала бошланди. Шундан кейин экспоненциал системаларнинг чекли оралиқда аппроксимация хоссаларини ва гармоник бўлмаган системаларни ўрганишга бағишланган назария ногармоник анализ деб аталиб, математиканинг алоҳида соҳаси сифатида ажралиб чиқди.

М.В. Келдишнинг ўз–ўзига қўшма бўлмаган чизиқли операторларнинг хос ва эргашган функцияларининг тўлалиги ҳақидаги ишларидан сўнг, Гилберт фазосида дифференциал операторларнинг хос ва эргашган функцияларнинг базислиги масаласи биринчи ўринга қўйилди. Шундан кейин В. А. Ильин томонидан осонгина текширилиши мумкин бўлган муайян чегаравий масалалар учун ихтиёрий тайинланган $p>1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи p ларда L_p фазода n–тартибли ўз–ўзига қўшма бўлмаган оддий дифференциал операторни хос ва эргашган функциялар системасини базис бўлишлигини зарурий ва етарлилик шарти аниқланди, шунингдек, коэффициентларига минимал шартлар талаб қўйган ҳолда иккинчи тартибли операторлар учун унинг хос ва эргашган функциялар системасининг Рисс базис бўлишлигини зарурий ва етарли шартини ўрнатди. Кейинчалик В.А. Ильин усули Ш.А. Алимов, Е.И. Моисеев, Р.Р. Ашуров, В.В. Тихомиров, И.С. Ломов, В.Д. Будаев, Л.В. Крицков ва бошқа муаллифлар ишларида кенгроқ операторлар синфига татбиқ этилди.

Сўнгги йилларда Е.И. Моисеев, Н.Ю. Капустин, Т.Ш. Кальменов, А.С. Бердышев, Б.Е. Кангужин, А.А. Шкаликов, А.М. Сарсенби ва бошқалар томонидан ўз–ўзига қўшма бўлмаган дифференциал (шу жумладан ҳусусий хосилали) операторлари илдиз функцияларининг базислиги масаласи ўрганилди. Абстракт банах фазолари бўлган ҳолда системаларнинг базислик хоссалари Ш.Ғ. Қосимов томонидан тадқиқ этилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон миллий университетиниг ОТ-Ф-130 “Математик физиканинг замонавий масалаларини ечишнинг янги усулларини ишлаб чиқиш” (2007-2011), Ф-4-02 “Дифференциал операторларнинг спектрал назарияси асосида математик физика ва оптимал бошқарув масалаларини ечишнинг янги усулларини ишлаб чиқиш” (2012-2016), ОТ-Ф-4-(36+32) “Математик физика ва оптимал бошқариш масалаларини ечишнинг янги усулларини ишлаб чиқиш. Тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич-чегаравий ва спектрал масалалар ва уларнинг тадбиқлари” (2017–2020 гг.) илмий лойиҳалари доирасида бажарилди.

Тадқиқотнинг мақсади банах фазоларида айрим гармоник бўлмаган системаларнинг базислигини исботлаш ва каррали гармоник бўлмаган Фурье қаторларининг текис яқинлашишини аниқлаш, ҳамда Соболев синфларида нолокал чегаравий шартлар қатнашган дифференциал операторлари билан боғлиқ каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун аралаш масалаларнинг бир қийматли ечилиши шартларини ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Соболев – Лиувилл ва Бесов синфларида айрим гармоник бўлмаган системаларнинг базислиги ва каррали гармоник бўлмаган Фурье қаторларининг текис яқинлашиши ҳақидаги теоремаларни исботлаш;

Соболев синфларида чегаравий шартда спектрал параметр қатнашган масала хос функциялари системасининг Рисс базислиги ҳамда умумлашган спектрал масала ортонормал хос функциялари системасининг тўлалиги ҳақидаги теоремани исботлаш;

Соболев синфларида нолокал чегаравий шартларга эга бўлган Штурм–Лиувилл операторининг хос функциялари системасининг тўлалиги ҳақидаги теоремани исботлаш ва нолокал чегаравий шартлар қатнашган Штурм–Лиувилл ва Лаплас оператори билан боғлиқ каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун аралаш масаланинг бир қийматли ечилишини кўрсатиш.

Соболев синфларида нолокал чегаравий шартларга эга бўлган икки ўлчовли Дирак операторининг ортонормал хос векторлари системасининг икки каррали тўлалиги ҳақидаги теоремасини исботлаш, шунингдек, вақтга чизиқли боғлиқ чегаравий шартларга эга бўлган бир ўлчовли Дирак тенгламаси учун хос функциялар ва хос қийматларни аниқлаш;

чекли электр дипол потенциали учун Клейн–Гордон тенгламасини ўрганиш ва асимтотик ечимларнинг мослашувчанлик усули билан тақрибий ечимни топиш.

Тадқиқот объекти гармоник бўлмаган функциялар системасининг тўлалиги ва базислиги, ҳамда дифференциал операторларнинг хос функциялар системасининг тўлалиги ва базислиги.

Тадқиқот предмети келтирилган спектрал ёйилмаларнинг ҳар хил функционал фазоларида яқинлашиши масаласи ва банах фазоларида ортогонал бўлмаган системаларнинг базислиги масаласидан иборат.

Тадқиқот усуллари. Диссертация ишида математик физика усуллари, функционал анализнинг умумий усуллари, банах фазоларининг интерполяцион назарияси ва чизиқли операторларнинг интерполяцион назарияси, комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси, чизиқли операторларнинг спектрал назариясидан фойдаланилди.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Соболев – Лиувилл ва Бесов синфларида айрим гармоник бўлмаган системаларнинг базислиги, ҳамда каррали гармоник бўлмаган Фурье қаторларининг текис яқинлашиши ҳақидаги теоремалар исботланди.

Соболев синфларида чегаравий шартда спектрал параметр қатнашган масала хос функциялари системасининг Рисс базислиги, ҳамда умумлашган спектрал масаланинг ортонормал хос функциялари системасининг тўлалиги ҳақидаги теоремалар исботланди;

Соболев синфларида нолокал чегаравий шартларга эга бўлган Штурм–Лиувилл операторининг хос функциялари системасининг тўлалиги ҳақидаги теорема исботланди ва нолокал чегаравий шартлар қатнашган Штурм–Лиувилл ва Лаплас оператори билан боғлиқ каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун аралаш масалаларнинг бир қийматли ечилиши кўрсатилди;

Соболев синфларида нолокал чегаравий шартларга эга бўлган икки ўлчовли Дирак операторининг ортонормал хос векторлари системасининг икки каррали тўлалиги ҳақидаги теоремаси исботланди ва вақтга чизиқли боғлиқ чегаравий шартларга эга бўлган бир ўлчовли Дирак тенгламаси учун хос функциялар ва хос қийматлар аниқланди;

чекли электр дипол потенциали учун Клейн–Гордон тенгламаси ўрганилди ва асимтотик ечимларнинг мослашувчанлик усули билан тақрибий ечим топилди.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Ушбу диссертация натижалари назарий характерга эга. Диссертацияда келтирилган натижалар ва усуллардан математик анализ, функционал анализ, математик физика ва дифференциал тенгламалари мутахассислари илмий тадқиқотларида фойдаланилади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал таҳлил, математик физика ва дифференциал тенгламалар усулларидан фойдаланган ҳолда математик асос ва далиллар қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган илмий натижалардан қаттиқ жисмлар физикасида, гидродинамикада, яқинлаштириш назариясида ва дифференциал операторларнинг спектрал назариясида математик физика ва квант механикасида турли масалаларни ечиш учун Фурье усулини асослаб беришда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотда олинган натижаларнинг амалий аҳамияти геофизик кузатишлар моделларига, газ динамикаси, математик биология, туташ муҳит механикаси, суюқлик ва газ механикаси, акустик тўлқин тарқалиши ва шу каби амалий масалаларда, шунингдек, математик моделлаштиришда қўллаш имконияти билан асослаб берилган.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши: Банах фазоларида айрим гармоник бўлмаган системаларнинг тўлалиги ва базислиги масалаларини тадқиқ этишда, ҳамда нолокал чегаравий шартлар қатнашган Лаплас оператори билан боғлиқ каср тартибли хусусий ҳосилали тенглама учун аралаш масаланинг ечилиши усуллари асосида:

гармоник бўлмаган системаларнинг тўлалиги ва базислиги масалаларини тадқиқ этиш MRU-OT-1/2017 рақамли “Ноклассик дифференциал ва оператор-дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий шартлар ва тескари масалалар” мавзусидаги фундаментал лойиҳасида аралаш турдаги учинчи ва тўртинчи тартибли тенгламалар учун ички чегаравий масалаларнинг тақрибий ечимларини қуришда фойдаланилган.(Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 8 январдаги 89-03-92-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши учинчи тартибли гиперболик типдаги тенглама учун интеграл шарт қатнашган аралаш масаланинг ечилиш имконини берган.

нолокал чегаравий шартлар қатнашган Лаплас оператори билан боғлиқ каср тартибли хусусий ҳосилали тенглама учун аралаш масаланинг ечилиши ОТ–Ф4–33 рақамли “Дифференциал тенгламалар билан тавсифланувчи таъқиб ҳолатларини бошқаришнинг янги усулларини ишлаб чиқиш ва уларнинг сонли талқини” мавзусидаги фундаментал лойиҳада дифференциал таъқиб ўйинлари назарияси ва иссиқлик ўтказувчанлик масаласини ечишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 8 январдаги 89-03-92-сонли маълумотномаси). Дифференциал таъқиб ўйинлари назарияси ва иссиқлик ўтказувчанлик масаласида доимий кўп қийматли акслантиришнинг инвариантлигида $\varepsilon-$ позициавий стратегияларни қуриш имконини берган.

Клейн–Гордон тенгламасининг чекли электр диполли потенциали учун тақрибий аналитик ечилишидан фойдаланиб (Acta Physica Sinica – Journal of Chinese Physics.Vol.54 №4 April.2005; Acta Physica Sinica – Journal of Chinese Physics.Vol.54 №7 July.2005 ; Acta Physica Sinica – Journal of Chinese Physics.Vol.56 №2 Fevruary.2007; International Journal of Modern Physics B, Vol. 22, No. 06, pp. 671-682 (2008); International Journal of Modern Physics B Vol. 20, No. 22, pp. (2006) 3233–3245) хорижий илмий журналларда (2+1) ўлчамли Буити-Леон–Пемпинелли системаси (БЛП) учун иккита ихтиёрий функцияли ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан янги типдаги ечим олинди ва (2+1) ўлчамли Боити–Леон- Мартина–Пемпинелли системаси учун иккита аниқ ечимлар оиласи олинди.

Ностационар чегаравий шартли Дирак тенгламасининг ечилишидан (Physica Scripta is an international scientific journal for experimental and theoretical physics Vol. 83, №3 16 February 2011) Шредингер тенгламаси учун тебранувчи ва айланувчи чегаравий шартларни ҳисобга олган ҳолда аниқ аналитик ечими олинган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий мазмуни 13 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий конференцияларида илмий маърузаларда баён этилган. Диссертация натижалари Ўзбекистон Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институтининг "Хусусий хосилали дифференциал тенгламалар назариясининг замонавий муаммолари" дифференциал тенгламалари бўйича умумшаҳар семинарида (Проф. Р. Ашуров раҳбари) ва Мирзо Улуғбек номидаги Миллий университетида "Математик физиканинг замонавий муаммолари" шаҳар илмий семинари йиғилишида (академик Ш.А. Алимов) маъруза этилди.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 31 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 12 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 9 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертация ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертация ҳажми 131 бет.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “Функционал фазолар ҳақидаги зарурий маълумотлар ва бу фазолардаги гармоник бўлмаган функциялар системасининг тўлалиги ҳақида” деб номланган биринчи бобида дастлабки зарурий маълумотлар, асосий таърифлар, теоремалар, ҳамда диссертация натижаларини баён қилишда фойдаланиладиган банах ва гилберт фазоларидаги айрим базисларнинг хоссалари келтирилган. Шунингдек, тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда Соболев-Лиувилл ва Бесов синфларидаги айрим гармоник бўлмаган системаларнинг базислиги ҳақидаги теоремалар исбот қилинган.

I бобнинг 1.1 va 1.2 параграфларида зарурий таърифлар ва маълумотлар, шунингдек, банах ва гильберт фазоларида базисларнинг баъзи хоссалари келтирилган.

Биринчи бобнинг 1.3 параграфида Соболев-Лиувилл ва Бесов синфларидаги айрим гармоник бўлмаган системаларнинг базислигига оид масалалар қаралган. Соболев-Лиувилл ва Бесов синфларида тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда айрим гармоник бўлмаган системаларнинг базислиги ҳақидаги теоремалар исботланди, шунингдек, Соболев ва Бесов синфларидаги баъзи гармоник бўлмаган системаларнинг Рисс базислиги ҳақидаги теоремалар исботланди.

1-таъриф. Агар $f(x)=f(x_1,...,x_N)$ функция ҳар бир x_j $(j=\overline{1,N})$ ўзгарувчи бўйича 2π–даврли функция ва

$$\|f\|_{L_p^s(T^N)}=\left\|\sum_{n\in Z^N}\left(1+|n|^2\right)^{\frac{s}{2}}\cdot f_n\cdot\exp(inx)\right\|_{L_p(T^N)}<\infty,$$

бу ерда $p\geq 1$, $f_n=(2\pi)^{-N}\int\limits_{T^N}f(x)\exp(-inx)dx$ – Фурье коэффициенти, $T^N=(-\pi,\pi]^N$ эса, N–ўлчамли тор бўлса, у ҳолда $f(x)=f(x_1,...,x_N)$ функция $T^N=(-\pi,\pi]^N$ торда 2π – даврли $L_p^s(T^N)$ Лиувилл синфига тегишли дейилади.

2-таъриф. Агар $\min\limits_{1\leq j\leq N}m_j\to\infty$ интилганда $S_m=\sum\limits_{|n_1|\leq m_1}\sum\limits_{|n_2|\leq m_2}...\sum\limits_{|n_N|\leq m_N}c_n\varphi_n$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлигининг чекли лимити мавжуд бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n\in Z^N}c_n\varphi_n$ қаторни тўғри тўртбурчаклар бўйича жамлаганда яқинлашувчи деб айтилади.

3-таъриф. Агарда ҳар бир $x\in E$ вектор ягона усулда E банах фазосининг нормаси бўйича яқинлашувчи $x=\sum\limits_{n\in Z^N}c_n\varphi_n$ қаторга ёйилса, у ҳолда $\varphi=\{\varphi_n\}_{n\in Z^N}$ элементлар системаси тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда E банах фазосининг базиси дейилади.

4-таъриф. Агарда $\sum\limits_{n\in Z^N}c_n\psi_n=0$ тенглик $\sum\limits_{n\in Z^N}|c_n|^2\cdot\|\psi_n\|^2>0$ бўлганда бажарилмаса, у ҳолда E банах фазосида $\psi=\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ векторлар кетма-кетлиги тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда ω – чизиқли эркли дейилади.

5-таъриф. Агарда шундай чизиқли чегараланган тескариланувчи оператор $L:H\to H$ мавжуд бўлиб, $\{L\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортономал базис бўлса, у ҳолда $\varphi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система H гильберт фазосида Рисс базиси дейилади.

1-теорема. $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot\left(1+|n|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)\,, n\in Z^N$, бу ерда $n\neq m$ учун $\lambda_n\neq\lambda_m$, функциялар системаси тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $\omega-$ чизиқли эркли бўлиб қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\sum\limits_{n\in Z^N}\left\|\sum\limits_{k\in Z^N}\left(\frac{1+|k|^2}{1+|n|^2}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{\sin\left(\lambda_{n_j}-k_j\right)\pi}{\left(\lambda_{n_j}-k_j\right)\pi}-\delta_{nk}\right)\cdot\exp(ikx)\right\|_{L_p\left(T^N\right)}<\infty$;

2) $\sum\limits_{n\in Z^N}\left\|\alpha_n(x)\right\|_{L_p^s\left(T^N\right)}<\infty$.

У ҳолда тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $\left\{\psi_n\right\}_{n\in Z^N}$ функциялар системаси $L_p^s\left(T^N\right)$ фазода базис бўлади, бу ерда $1<p<\infty$.

6-таъриф. Агар $f(x)\in L_p\left(T^N\right)$ функциянинг барча $|\alpha|=s$ тартибли $D^\alpha f$ (тақсимот назарияси маъносидаги) хусусий ҳосилалари $L_p\left(T^N\right)$ фазога тегишли, яъни $\|f\|_{W_p^s\left(T^N\right)}=\|f\|_{L_p\left(T^N\right)}+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left\|D^\alpha f\right\|_{L_p\left(T^N\right)}$ норма чекли бўлса, у ҳолда бу функция $W_p^s\left(T^N\right)$Соболев фазосига тегишли дейилади, бу ерда $1\le p<\infty$, $s=0, 1, 2, \ldots$.

2-теорема. $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot\left(1+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|\right)^{-1}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, бу ерда $n\neq m$ учун $\lambda_n\neq\lambda_m$, функциялар системаси тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $\omega-$ чизиқли эркли бўлиб қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\sum\limits_{n\in Z^N}\left|\lambda_n-n\right|<\infty$; 2) $\sum\limits_{n\in Z^N}\left\|\alpha_n(x)\right\|_{W_p^s\left(T^N\right)}<\infty$.

У ҳолда тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $\left\{\psi_n\right\}_{n\in Z^N}$ функциялар системаси $W_p^s\left(T^N\right)$ фазода базис бўлади, бу ерда $1<p<\infty$, $s=0,1, 2, \ldots$.

3-теорема. $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\cdot\left(1+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, бу ерда $n\neq m$ учун $\lambda_n\neq\lambda_m$, функциялар системаси тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $\omega-$ чизиқли эркли бўлиб қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$1)\quad k=\sqrt{\sup_n\frac{\theta^2+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left(\theta^2\left|\lambda_n^\alpha\right|^2+\left|\lambda_n^\alpha-n^\alpha\right|^2\right)}{1+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|^2}}<1,$$

бу ерда $\theta=\exp(MN\pi)-1,\ M=\sup\limits_j\sup\limits_{n_j}\left|\lambda_{n_j}-n_j\right|$; 2) $\sum\limits_{n\in Z^N}\left\|\alpha_n(x)\right\|^2_{W_2^s\left(T^N\right)}<\infty$.

У ҳолда $\left\{\psi_n(x)\right\}_{n\in Z^N}$ функциялар системаси $W_2^s\left(T^N\right)$ фазода базис бўлади.

Биринчи бобнинг 1.4-параграфида Соболев–Лиувилл ва Бесов синфларида каррали гармоник бўлмаган Фурье қаторларининг тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда текис яқинлашиш масаласи қаралган ва жамланиш усулига боғлиқ бўлмаган ҳолда Соболев ва Бесов синфларида каррали гармоник бўлмаган Фурье қаторларининг текис яқинлашиши ҳақидаги теоремалар исботланди.

7-таъриф. Агарда

$$\lim_{\substack{\min\limits_{1\le j\le N} m_j\to\infty}}\left\| f(x)-S_m(x)\right\|_{C(\bar{G})}=\lim_{\substack{\min\limits_{1\le j\le N} m_j\to\infty}}\left\| f(x)-\sum_{|n_1|\le m_1}\sum_{|n_2|\le m_2}\dots\sum_{|n_N|\le m_N} c_n\varphi_n(x)\right\|_{C(\bar{G})}=0$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n\in Z^N} c_n\varphi_n(x)$ қатор $\bar{G}$ тўпламда тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $f(x)$ функцияга текис яқинлашади деб айтамиз.

4-теорема. $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot\left(1+|n|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x),\ n\in Z^N$, бу ерда $n\neq m$ учун $\lambda_n\neq\lambda_m$, функциялар системаси тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $\omega-$ чизиқли эркли бўлиб қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$1)\ \sum_{n\in Z^N}\left\|\sum_{k\in Z^N}\left(\frac{1+|k|^2}{1+|n|^2}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\prod_{j=1}^{N}\frac{\sin\left(\lambda_{n_j}-k_j\right)\pi}{\left(\lambda_{n_j}-k_j\right)\pi}-\delta_{nk}\right)\cdot\exp(ikx)\right\|_{L_p\left(T^N\right)}<\infty;$$

$$2)\ \sum_{n\in Z^N}\left\|\alpha_n(x)\right\|_{L_p^s\left(T^N\right)}<\infty;\qquad 3)\quad s\cdot p>N\ ,\ 1<p<\infty.$$

У ҳолда $f\left(x\right)\in L_p^s\left(T^N\right)\bigcap C\left(T^N\right)$ функциянинг $\left\{\psi_n\right\}_{n\in Z^N}$ система бўйича каррали гармоник бўлмаган Фурье қатори T^N тўпламда тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $f\left(x\right)$ функцияга текис яқинлашади.

5-теорема. $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot\left(1+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|\right)^{-1}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, бу ерда $n\neq m$ учун $\lambda_n\neq\lambda_m$, функциялар системаси тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $\omega-$ чизиқли эркли бўлиб қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$1)\sum_{n\in Z^N}\left|\lambda_n-n\right|<\infty;\quad 2)\sum_{n\in Z^N}\left\|\alpha_n(x)\right\|_{W_p^s\left(T^N\right)}<\infty;\quad 3)\, s\cdot p>N\,,\ 1<p<\infty,$$

$s=0,1,2,\dots$.

У ҳолда $f\left(x\right)\in W_p^s\left(T^N\right)\bigcap C\left(T^N\right)$ функциянинг $\left\{\psi_n\right\}_{n\in Z^N}$ система бўйича каррали гармоник бўлмаган Фурье қатори T^N тўпламда тўғри тўртбурчаклар бўйича жамланганда $f\left(x\right)$ функцияга текис яқинлашади.

Биринчи бобнинг 1.5-параграфида чегаравий шартда спектрал параметр қатнашган масаланинг хос функциялари системасининг Соболев синфларида Рисс базислиги масаласи қаралган.

Қуйидаги кўринишдаги спектрал масалани қараймиз:

$$u''(x)+\lambda u(x)=0,\ u(0)=0,\ u'(0)-d\lambda u(1)=0,\ d>0. \tag{1}$$

$W_2^s(0,1)$ Соболев фазосида нормани қуйидагича киритамиз:

$$\|f\|^2_{W_2^s(0,1)}=\|f\|^2_{L_2(0,1)}+\left\|D^s f\right\|^2_{L_2(0,1)}.$$

6-теорема. (1) спектрал масаланинг

$$y_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(\pi n)^{2s}}}\sin\sqrt{\lambda_n}x,\quad n=1,2,3,\ldots$$

хос функциялар системаси $W_2^s(0,1)$ Соболев фазосида Рисс базиси бўлади.

Диссертациянинг “Хос функциялар системасининг тўлалиги ва базислиги ҳақида. Нолокал чегаравий шартлар билан каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун аралаш масаланинг бир қийматли ечилиши” деб номланган иккинчи бобида Соболев синфларида $Au=\lambda Su$ умумлашган спектрал масаланинг ортонормал хос векторлар системасининг тўлалиги, шунингдек нолокал чегаравий шартлар билан Штурма-Лиувилл и Лаплас оператор билан каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун аралаш масаланинг бир қийматли ечилиши масалалари қаралган.

2.1-параграфда Соболев синфларида $Au=\lambda Su$ умумлашган спектрал масала хос функциялари системасининг тўлалиги ва базислиги, ҳамда бу системалар бўйича Фурье қаторининг текис яқинлашиши масалалари ўрганилди.

Қуйидаги кўринишда тенгламани

$$y'(x)=\lambda y\left(\pi-x\right),\tag{2}$$

$$\alpha y(0)+\beta y(\pi)=0,\tag{3}$$

чегаравий шартлар билан қараймиз, бу ерда $|\alpha|+|\beta|\neq 0$, $y(x)\in C^1\left[0,\pi\right]$.

Бу спектрал масала қуйидаги спектрал масалага келтирилади.

$$-y''(x)=\mu y(x),\quad \mu=\lambda^2,\tag{4}$$

$$\begin{cases}\alpha y(0)+\beta y(\pi)=0,\\ \beta y'(0)+\alpha y'(\pi)=0.\end{cases}\tag{5}$$

$$\mu_n=\lambda_n^2=(2n+\varepsilon_n\varphi)^2,\ \varphi=\frac{1}{\pi}ar\cos s\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2},\ \varepsilon_n=\pm1,\ \varepsilon_{-n}=\varepsilon_n,\ n\in\mathbb{Z},$$

сонлар ва

$$y_n=\omega_n(\beta\cos\lambda_n x+\varepsilon_n \operatorname{sign}(\beta^2-\alpha^2)\alpha\sin\lambda_n x)\tag{6}$$

функциялар мос равишда (4)–(5) масаланинг хос сонлари ва хос функциялари бўлади, бу ерда $\omega_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{1+(2n)^{2s}}}$.

8-теорема. $|\alpha|\neq|\beta|,\ \alpha\neq0,\ \beta\neq0$ ҳақиқий сонлар ва $\rho=\sqrt{\theta^2+2(\frac{\theta}{\sqrt{2}}+(\varphi+1)^s-1)^2}\cdot\sigma(s)<1$ бўлсин , бу ерда $\sigma(0)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sigma(s)=1,\ s>0,$

$$\theta=\sqrt{2}\max_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi x}-1\right|,\ \lambda_n=2n+\varepsilon_n\cdot\varphi,\ \varphi=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2},\varepsilon_n=\varepsilon_{-n}=\pm1,\ n\in\mathbb{Z}.$$

У ҳолда (4)–(5) спектрал масаланинг

$$\bar{y}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta\cos\lambda_n x+\varepsilon_n \operatorname{sign}(\beta^2-\alpha^2)\alpha\sin\lambda_n x}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}\cdot\sqrt{1+|\lambda_n|^{2s}}},\quad n\in\mathbb{Z}$$

хос функциялари системаси $W_2^s(0,\pi)$ Соболев синфида тўла ортонормал система бўлади.

9-теорема. $|\alpha|\neq|\beta|,\ \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ ҳақиқий сонлар ва $\rho=\sqrt{\theta^2+2(\frac{\theta}{\sqrt{2}}+\varphi)^2}<1$ бўлсин, бу ерда $\sigma(0)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sigma(s)=1,\quad s>0,$ $\theta=\sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi x}-1\right|,\ \lambda_n=2n+\varepsilon_n\cdot\varphi,\ \varphi=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2},\varepsilon_n=\varepsilon_{-n}=\pm 1$, $n\in\mathbb{Z}$.

У ҳолда $f(x)\in W_2^s(0,\pi)\cap C[0,\pi]$ функциянинг (4)–(5) спектрал масала

$$y_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta\cos\lambda_n x+\varepsilon_n \operatorname{sign}(\beta^2-\alpha^2)\alpha\sin\lambda_n x}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}\cdot\sqrt{1+|\lambda_n|^{2s}}},\ n\in\mathbb{Z}$$

ортонормал хос функциялари бўйича Фурье қатори $[0,\pi]$ кесмада $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги кўринишдаги тенглама

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t)+f(x,t),\quad 0<\alpha\leq 2 \tag{7}$$

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t)=\varphi_k(x),\quad k=\overline{1,\ -[-\alpha]} \tag{8}$$

бошланғич шартлар ва

$$\alpha u(0,t)+\beta u(\pi,t)=0,\qquad \beta u'(0,t)+\alpha u'(\pi,t)=0, \tag{9}$$

чегаравий шартлар билан қаралган, бу ерда $f(x,t),\ \ \varphi_k(x),\ \ k=\overline{1,-[-\alpha]}$ – функциялар

$$-y''+q(x)y=\lambda y(x), \tag{10}$$

$$\begin{cases}\alpha y(0)+\beta y(\pi)=0,\\ \beta y'(0)+\alpha y'(\pi)=0.\end{cases} \tag{11}$$

спектрал масаланинг $\{y_n(x)\}_{n\in Z}$ хос функциялари системаси бўйича ёйилувчи функциялардир. Бу ерда D^{α} каср тартибли интеграл қуйидаги кўринишга эга: $\alpha<0$ бўлганда $D_{at}^{\alpha}u(x,t)=\frac{sign(t-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_a^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}}$, $\alpha=0$ бўлганда $D_{at}^{\alpha}u(x,t)=u(x,t)$ ва $p-1<\alpha\leq p,\ p\in\mathbb{N}$, $p-1<\alpha\leq p,\ p\in\mathbb{N}$ бўлганда каср тартибли ҳосила

$$D_{at}^{\alpha}u(x,t)=\frac{sign^p(t-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\frac{d^p}{dt^p}D_{at}^{\alpha-p}u(x,t)=\frac{sign^{p+1}(t-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^p}{dt^p}\int\limits_a^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-p+1}}$$

кўринишида бўлади. Бу ерда $q(x)$ функцияни $[0,\pi]$ кесмада етарлича силлиқ функция деб ҳисоблаймиз.

10-теорема. $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ |\alpha| \neq |\beta|$ ҳақиқий сонлар ва $\theta < 1$ бўлсин, бу ерда $\theta = \sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi x}-1\right|,\quad s_n = 2n+\varepsilon_n\cdot\varphi,\quad \varphi = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \pm 1\ \ n\in Z$. У ҳолда (10) –(11) спектрал масаланинг

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\beta\cos s_n x + \varepsilon_n \operatorname{sign}(\beta^2-\alpha^2)\alpha\sin s_n x}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} + O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\in Z$$

хос функциялар системаси $L_2(0,\pi)$ фазода тўла ортонормал система бўлади.

11-теорема. $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ |\alpha| \neq |\beta|$ ҳақиқий сонлар ва $\theta < 1$ бўлсин, бу ерда $\theta = \sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi x}-1\right|,\ s_n = 2n+\varepsilon_n\cdot\varphi,\ \varphi = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2},\ \varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \pm 1\ \ n\in Z$ ва (10)–(11) масаланинг ечими мавжуд бўлсин. У ҳолда бу ечим ягона бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида қуйидаги кўринишдаги тенглама

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t),\quad (x,t)\in\Pi\times(0,\infty),\quad 0<\alpha\le 2 \tag{12}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t) = \varphi_k(x),\quad k=\overline{1,\,-[-\alpha]}, \tag{13}$$

бошланғич шартлар ва

$$\begin{cases} \alpha_j u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=0} + \beta_j u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=\pi} = 0, 1\le j\le p, \\ \beta_j \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=0} + \alpha_j \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0, 1\le j\le p, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=0} = u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=\pi},\ p+1\le j\le q, \\ \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=0} = \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0,\ p+1\le j\le q, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=0} = 0,\quad q+1\le j\le N, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=\pi} = 0,\quad q+1\le j\le N, \\ 1\le p\le q\le N, \end{cases} \tag{14}$$

чегаравий шартлар билан қаралган, бу ерда $f(x,t),\ \ \varphi_k(x),\ \ k=\overline{1,\,-[-\alpha]}$ – функциялар

$$\Delta v(x) + \mu v(x) = 0, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \alpha_j\cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=0} + \beta_j\cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=\pi} = 0, 1\le j\le p, \\ \beta_j \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=0} + \alpha_j \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0, 1\le j\le p, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=0} = v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=\pi},\ p+1\le j\le q, \\ \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=0} = \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0,\ p+1\le j\le q, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=0} = 0,\quad q+1\le j\le N, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=\pi} = 0,\quad q+1\le j\le N, \\ 1\le p\le q\le N \end{cases} \tag{16}$$

спектрал масаланинг $\{v_n(x)\}_{n\in \mathbb{N}}$ хос функциялар системаси бўйича ёйилувчи функциялардир, бунда $(x,t)=(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\in \Pi\times(0,\infty)$, $\Pi=(0,\pi)\times...\times(0,\pi)$, $\alpha_j=const$, $\beta_j=const$, $|\alpha_j|\neq|\beta_j|$, $\alpha_j\neq 0,\ \beta_j\neq 0$.

$W_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ синфга тегишли ва

$$\begin{cases}\alpha_j\dfrac{\partial^{2k}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=0}+\beta_j\dfrac{\partial^{2k}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=\pi}=0, 1\le j\le p,\quad 0\le 2k<s-\dfrac{N}{2},\\ \beta_j\dfrac{\partial^{2k+1}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k+1}}|_{x_j=0}+\alpha_j\dfrac{\partial^{2k+1}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k+1}}|_{x_j=\pi}=0, 1\le j\le p,\ 0\le 2k+1<s-\dfrac{N}{2},\\ \dfrac{\partial^{k}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{k}}|_{x_j=0}=\dfrac{\partial^{k}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{k}}|_{x_j=\pi}=0,\quad p+1\le j\le q,\ 0\le k<s-\dfrac{N}{2},\\ \dfrac{\partial^{2k}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=0}=0,\quad q+1\le j\le N,\ 0\le 2k<s-\dfrac{N}{2},\\ \dfrac{\partial^{2k}v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=\pi}=0,\quad q+1\le j\le N,\ 0\le 2k<s-\dfrac{N}{2},\ 1\le p\le q\le N\end{cases}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи функциялар синфини $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ орқали белгилаймиз.

12-теорема. $\alpha_j\neq 0,\ \beta_j\neq 0,\ |\alpha_j|\neq|\beta_j|$, $1\le j\le p$ ҳақиқий сонлар ва $\rho=\max\limits_{1\le j\le p}\left(\sqrt{\theta_j^2+2(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1)^2}\cdot\sigma(s_j)\right)<1$ бўлсин, бу ерда $\sigma(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j)=1$, $s_j>0$, $\theta_j=\sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi_j x}-1\right|$, $\lambda_{m_j}=2m_j+\varepsilon_{m_j}\cdot\varphi_j$, $\varphi_j=\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $\varepsilon_{m_j}=\varepsilon_{-m_j}=\pm 1$, $m_j\in\mathbb{Z}$. У ҳолда (15)–(16) спектрал масаланинг

$$\left\{v_{m_1,...,m_N}(x_1,x_2,...,x_N)\right\}_{(m_1,...,m_p)\in\mathbb{Z}^p\times(m_{p+1},...,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}\times(m_{q+1},...,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}}=$$

$$=\left\{\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta_j\cos\lambda_{m_j}x+\varepsilon_{m_j}\cdot\operatorname{sign}(\beta_j^2-\alpha_j^2)\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\cdot\sqrt{1+\left|\lambda_{m_j}\right|^{2s_j}}}\right\}_{(m_1,...,m_p)\in\mathbb{Z}^p}\times$$

$$\times\left\{\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left|2m_j\right|^{2s_j}}}\cdot e^{i2m_jx_j}\right\}_{(m_{p+1},...,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}}\times\left\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left|m_j\right|^{2s_j}}}\cdot\sin(m_jx_j)\right\}_{(m_{q+1},...,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}}\tag{17}$$

хос функциялари системаси $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ Соболев фазосида тўла ортонормал система бўлади.

12-теоремага кўра (15)–(16) спектрал масаланинг (17) хос функциялари системаси $\overset{0}{H}{}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$ ва $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}$ (П) Соболев фазоларида Рисс базиси бўлади.

Шунга асосан қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\|u(x,t)\|^2_{C^{2,2,\dots,2}(\Pi)} \le c_8 \|u(x,t)\|^2_{H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)} \le$$

$$\le c_9 \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{[\alpha]+1} \left(\varphi_j\right)_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right] f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)\, d\tau \cdot \right|^2 \prod_{k=1}^{N} \left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty. \quad (18)$$

13-теорема. $\alpha_j \ne 0,\ \beta_j \ne 0,\ |\alpha_j| \ne |\beta_j|,\ 1 \le j \le p$ ҳақиқий сонлар ва

$$\rho = \max_{1\le j\le p} \left(\sqrt{\theta_j^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j+1)^{s_j} - 1\right)^2} \cdot \sigma(s_j) \right) < 1$$

бўлсин, бу ерда $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sigma(s_j) = 1,\quad s_j > 0,\quad \theta_j = \sqrt{2} \max\limits_{x\in[0,\pi]} \left| e^{i\varphi_j x} - 1 \right|,$

$\lambda_{m_j} = 2m_j + \varepsilon_{m_j} \cdot \varphi_j,\quad \varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2},\ \varepsilon_{m_j} = \varepsilon_{-m_j} = \pm 1,\ m_j \in \mathbb{Z},\quad s_j > 2 + \frac{N}{2},$ ва

$\varphi_i(x),\ i = \overline{1, -[-\alpha]}$ бошланғич функциялар ва тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x,t)$ функция ҳар бир $0 < t < T$ учун (18) шартни қаноатлантирсин .

У ҳолда (12)-(14) масаланинг $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q),\ s_1 = s_2 = \dots = s_N > 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ синфда регуляр ечими мавжуд, ягона ва бу ечим

$$u(x,t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{[2]+1} \varphi_{j,(m_1,\dots,m_N)} t^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha}) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}] f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)\, d\tau \right] v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N) \quad (19)$$

қатор кўринишида тасвирланади, бу ерда коэффициентлар қуйидагича аниқланади:

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha})^i}{\Gamma(\alpha i + \alpha - j + 1)},$$

$$E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\mu_{m_1,\dots,m_N})^{i-1} (t-\tau)^{\alpha(i-1)}}{\Gamma(\alpha \cdot i)},$$

$$f(x,t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} f_{m_1,\dots,m_N}(t) \cdot v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N),$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \varphi_{j,(m_1,\dots,m_N)} \cdot v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N),\ j = 1,2,\dots,n.$$

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида Соболев синфларида фазовий ўзгарувчили нолокал чегаравий шартлар эга Лаплас операторининг даражаси қатнашган ва вақтга боғлиқ юқори каср тартибли ҳосила қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг бир қийматли ечилиши ҳақидаги теорема исботланди.

“Соболев синфларида икки ўлчовли Дирак операторининг ортонормал хос векторлари системасининг тўлалиги ҳақида. Дирак ва Клейн тенгламалари учун аралаш масаланинг ечилувчанлиги” деб номланган диссертациянинг учинчи бобида Соболев синфларида икки ўлчовли Дирак операторининг ортонормал хос векторлари системасининг тўлалиги ҳамда Дирак ва Клейн тенгламалари учун аралаш масаланинг ечилувчанлиги ўрганилди.

2.3-параграфда

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\lambda\psi, \qquad \psi(x,y)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,y)\\ \psi_2(x,y)\end{pmatrix}$$

ёки ёйиб ёзилганда

$$-i\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=\lambda\psi_1, \quad -i\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\lambda\psi_2 \tag{20}$$

кўринишда бўлган икки ўлчовли Дирак операторининг ортонормал хос векторлари системасининг Соболев синфида тўлалиги кўрсатилди.

Фараз қилайлик, (20) системадаги $\psi(x,y)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,y)\\ \psi_2(x,y)\end{pmatrix}$ вектор функция $T^2=[0,a]\times[0,b]$ тўртбурчакда қаралаётган бўлсин, бунда $\psi_i(x,y)\in C^1([0,a]\times[0,b]), \quad i=1,2$.

(20) системани

$$\begin{cases}\alpha_1\psi_1(0,y)+\beta_1\psi_1(a,y)=0, & \beta_1\dfrac{\partial\psi_1(0,y)}{\partial x}+\alpha_1\dfrac{\partial\psi_1(a,y)}{\partial x}=0,\\ \gamma_1\psi_1(x,0)+\delta_1\psi_1(x,b)=0, & \delta_1\dfrac{\partial\psi_1(x,0)}{\partial y}+\gamma_1\dfrac{\partial\psi_1(x,b)}{\partial y}=0,\end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\alpha_2\psi_2(0,y)+\beta_2\psi_2(a,y)=0, & \beta_2\dfrac{\partial\psi_2(0,y)}{\partial x}+\alpha_2\dfrac{\partial\psi_2(a,y)}{\partial x}=0,\\ \gamma_2\psi_2(x,0)+\delta_2\psi_2(x,b)=0, & \delta_2\dfrac{\partial\psi_2(x,0)}{\partial y}+\gamma_2\dfrac{\partial\psi_2(x,b)}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{22}$$

чегаравий шартлар билан биргаликда қараймиз.

14-теорема. $\alpha_1=\beta_2, \alpha_2=\beta_1$ ва $\gamma_1=\delta_2,\ \gamma_2=\delta_1$ бўлсин. У ҳолда (20)– (22) икки ўлчовли Дирак операторининг нормалланган хос векторларидан иборат системаси Соболев синфида икки каррали ортонормал система бўлади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида вақтга боғлиқ чегаравий шартларга эга бўлган бир ўлчовли массасиз қуйидаги

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\alpha p+m\beta)\psi \quad (\hbar\text{=c=1}) \tag{23}$$

Дирак тенгламаси қаралган, бу ерда

$$\psi(t,x)=\begin{pmatrix}\psi_1(t,x)\\ \psi_2(t,x)\end{pmatrix}$$ лар $D=\{(t,x),\,0<t<T,\,0<x<L(t)\}$ соҳада икки компонентли спинорлар , ўнг чегара $L(t)$ вақт ўтиши билан ўзгариб туради ,

$$p=-i\frac{\partial}{\partial x},\ \text{и}\ \alpha=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \ \beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Паули матрицалари.

Чегаравий шартлар қуйидагича берилган.

$$\psi(t,0)=0,\quad \psi(t,L(t))=0,\quad 0\le t\le T\ . \tag{24}$$

Дирак тенгламасининг стационар ҳолатда

$$(\alpha\,p+mc^2\beta)\psi=E\psi$$

унинг хос функциялари қуйидаги функция кўринишда топилган

$$\psi_n(x)=A_n\begin{pmatrix}\sin(k_n x)\\ \dfrac{ck_n}{E_n+mc^2}\cos(k_n x)\end{pmatrix},$$

бу ерда A_n – нормалловчи доимий, $k_n=\dfrac{n\pi}{L},\ n=0,1,2,3,...,$

$$E_n=[k_n^2+(mc^2)^2]^{1/2}.$$

Биз бир ўлчовли Дирак тенгламасида массасиз ҳолатни қараш билан чегараланамиз, яъни $m=0,\ V=0$ бўлсин. (23) тенгламада $y=\dfrac{x}{L(t)}$ алмаштириш ёрдамида D соҳа чегараси ўзгармас $D_1=\{(t,x),0<x<T,0<y<1\}$ соҳага келтирилади.

У ҳолда чизиқли ўзгарувчан чегара учун (23) ечимларнинг тўлиқ тўплами қуйидаги шаклга эга бўлади:

$$\psi_{1n}(t,x)=M\exp[\frac{-i\lambda_n}{a}\ln\frac{at+b}{b}]\left((1-\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}-(1+\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}\right),$$

$$\psi_{2n}(t,x)=M\exp[\frac{-i\lambda_n}{a}\ln\frac{at+b}{b}]\left\{\frac{1}{i\lambda_n-a}\left((1-\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a+1}}+(1+\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a+1}}\right)-\right.$$
$$\left.-iay\left((1-\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}-(1+\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}\right)\right\}. \tag{25}$$

Дирак тенгламасининг вақтга боғлиқ чегаравий шартларга эга бўлган бир ўлчовли массасиз Дирак тенгламаси аниқ аналитик ечилди. Чегаравий шартнинг чизиқли вақтга боғлиқлиги ҳолати учун хос функциялар ва хос сонлар топилди.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида Клейн–Гордон тенгламасининг чекли электр диполли потенциали учун тақрибий аналитик ечими топилди.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация турли функционал фазоларда хос функциялар системасининг тўлалиги ва базислигини тадқиқ этиш, каср тартибли хусусий ҳосилали ва нолокал чегаравий шартли дифференциал тенглама билан боғлиқ аралаш масалаларнинг бир қийматли ечилишига бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1. Соболев–Лиувилл ва Бесов функционал фазоларида умумий $\exp(i\lambda_n x),\quad n\in Z,\quad \lambda_n\in C$ кўринишдаги гармоник бўлмаган системаларнинг базислиги (тўлалиги) учун етарли шартлар топилди;

2. Соболев–Лиувилл ва Бесов синфларидаги айрим гармоник бўлмаган системаларнинг базислигига оид теоремалар исботланди;

3. Соболев–Лиувилл ва Бесов синфларида каррали гармоник бўлмаган Фурье қаторларининг текис яқинлашиши ҳақидаги теоремалар исботланди;

4. Чегаравий шартда спектрал параметр қатнашган масаланинг хос функциялар системасининг Соболев синфларида Рисс базислиги ҳақидаги теорема исботланди;

5. Соболев синфларида умумлашган спектрал масала ортонормал хос функциялар системасининг тўлалиги ҳақидаги теорема исботланди;

6. Нолокал чегаравий шартларга эга бўлган Штурм–Лиувилл операторининг хос функциялар системасининг тўлалиги ҳақидаги теорема исботланди;

7. Нолокал чегаравий шартлар қатнашган Штурм–Лиувилл ва Лаплас операторлари билан боғлиқ каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун аралаш масаланинг бир қийматли ечилиши исботланди;

8. Соболев синфларида фазовий ўзгарувчи бўйича нолокал чегаравий шартлар эга Лаплас оператори даражаси қатнашган ва вақт бўйича каср тартибли ҳосила қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг бир қийматли ечилиши ҳақидаги теорема исботланди;

9. Соболев синфларида икки ўлчовли Дирак операторининг хос векторлар системасининг тўлалиги ҳақидаги теорема исботланди, шунингдек, Соболев синфларида нолокал чегаравий шартларга эга бўлган икки ўлчовли Дирак операторининг ортонормал хос векторлар системасининг икки каррали тўлалиги ҳақидаги теорема исботланди;

10. Вақтга боғлиқ чегаравий шартларга эга бўлган бир ўлчовли Дирак тенгламасининг аниқ аналитик ечими чегаравий ҳолатнинг вақтга чизиқли боғлиқлиги ҳоли учун топилди.

11. Чекли электр дипол потенциали учун Клейн–Гордон тенгламаси тадқиқ этилди ва унинг тақрибий ечими асимтотик ечимларнинг мослашган усули билан топилди. Континуум яқинидаги энергия ҳолатлари аналитик тарзда топилди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ОТАЕВ ШОНАЗАР КОДИРОВИЧ

О ПОЛНОТЕ И БАЗИСНОСТИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА-ЛИУВИЛЛЯ

01.01.02- дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2020

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссия при Кабинет Министров Республики Узбекистан за B2017.1.PhD/FM13.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Автореферат диссертация на трех языках (узбекский, русский и английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://ik-fizmat.nuu.uz и информационно-образовательном портале "Ziyonet" по адресу www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Касимов Шакирбай Гаппорович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор **Уразбаев Гайрат Уразалиевич** доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Самаркандский государственый университет**

Защита диссертации состоится « __ » __________ 2020 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc 03/30.12.2019/FM 01.01 при Национальном университете Узбекистана имена Мирзо Улугбека. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, дом 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознокомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №__). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, дом 4. Тел.: (+99871) 227-02-24).

Автореферат диссертации разослан « ___ » __________ 2020 года.

(протокол рассылки №____ от « ___ » __________2020 года).

А.Садуллаев
Председатель научного совета по
присуждению ученых степеней,
д. ф.-м.н., академик.

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф. ф.-м.н. (PhD)

Ш.А.Алимов
Председатель научного семинара при
научном совете по присуждению
ученых степеней, д. ф.-м.н., академик.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, в большинстве случаев приводятся к исследованию базисности системы собственных функций дифференциальных операторов и однозначной разрешимости смешанных краевых задач с операторами эллиптического типа. Большое число задач математической физики и квантовой механики включает в себя решение вопросов нахождения собственных значений, собственных и присоединенных функций, разложения заданной функции в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям, изучения полноты и базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов, равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям и по известным системам функций. Такого рода задачи возникают, например, при обосновании метода Фурье решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Полнота и базисности системы собственных векторов спектральной задачи дифференциальных операторов являются основным математическим аппаратом при решении многих задач квантовой механики.

В настоящее время в мире вопросы полноты и базисности системы дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, исследования равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье и полноты системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи в классах Соболева являются одними из актуальных вопросов математической физики. Исследование полноты и базисности системы функций дифференциального оператора в различных функциональных пространствах, вопросы разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка с нелокальными граничными условиями, вопросы базисности негармонических систем и т. д., и в целом это теория, посвященная негармоническим системам, является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам фундаментальных наук, имеющих прикладное значение. Перед наукой ставится задача сближения фундаментальных исследований к практике. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по алгебре и функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и математической физике, прикладной математике и математическому моделированию является одной из основных задач[2]. Развитие исследований уравнений в частных производных, в частности, развитие теории о полноте и

[2] Постановление Кабинета Министеров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

базисности системы собственных функций в различных функциональных пространствах и вопросов разрешимости краевых задач, связанных с частными производными дробного порядка с нелокальными краевыми условиями, играет важную роль в реализации указанного постановления.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Следует отметить, что понятия бесселевы и гильбертовы системы, базисы Рисса были введены Н.К.Бари. Позднее вопросы разложения функций в биортогональные на конечном интервале $(-a,a)$ ряды $f \sim \sum_{n\in Z} e^{i\lambda_n x}$ были рассмотрены в работе Р. Пэли и Н. Винера и такие ряды стали называть негармоническими рядами Фуре. После этого теория, посвященная изучению аппроксимационных свойств экспоненциальных систем в конечном интервале и негармонических систем, получила название негармонического анализа и стала отдельным разделом математики.

После работ М.В. Келдыша о полноте собственных и присоединенных функций несамосопряженных линейных операторов на первый план выдвинулась проблема базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. В.А. Ильиным установлено легко проверяемое для конкретных краевых задач необходимое и достаточное условие базисности в L_p при любом фиксированном $p>1$ систем собственных и присоединенных функций несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка n, а также для операторов второго порядка при минимальных требованиях на его коэффициенты необходимого и достаточного условия базисности Рисса системы его собственных и присоединенных функций. В дальнейшем метод В.А. Ильина был применен к широкому классу операторов в работах Ш.А. Алимова, Е.И. Моисеева, Р.Р. Ашурова, И.С. Ломова, В.Д. Будаева и других авторов.

Вопросы базисности корневых функций несамосопряженных дифференциальных операторов (в том числе с частными производными) в последние годы изучали Е.И. Моисеев, Н.Ю. Капустин, Т.Ш. Кальменов, А.С. Бердышев, Б.Е. Кангужин, А.А. Шкаликов, А.М. Сарсенби и другие. В случае абстрактного банахова пространства это понятие было исследовано в работах Ш.Г. Касимова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационное исследование проводились в рамках научно-исследовательских грантов Национального университета Узбекистана ОТ-Ф-130 «Разработка новых методов решения современных задач математической физики» (2007–2011 гг.), Ф-4-02 «Разработка новых методов решения задач математической физики и оптимального управления на основе спектральной теории дифференциальных операторов» (2012–2016 гг.), ОТ-Ф-4-(36+32) «Разработка новых методов решения задач математической физики и оптимального управления. Неклассические начально-краевые и спектральные задачи для уравнений с частными производными нечетного порядка и их приложения» (2017–2020 гг.).

Целью исследования является выяснение вопросов сходимости и базисности некоторых негармонических систем в банаховых пространствах, а также изучение условий однозначной разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева.

Задачи исследования:

доказать теоремы о базисности некоторых негармонических систем и о равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье в классах Соболева–Лиувилля и Бесова;

доказать теоремы о базисности Рисса системы собственных функций для задачи со спектральным параметром в граничном условии, а также о полноте системы ортонормированных собственных функций обобщенной спектральной задачи в классах Соболева;

доказать теорему о полноте системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями, а также исследовать однозначную разрешимость смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма–Лиувилля и Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева;

доказать теорему о полноте системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака в классах Соболева и определить точные аналитические собственные функции и собственные значения для одномерного уравнения Дирака с зависящими от времени граничным условиями в случае линейной зависимости от времени граничного положения;

исследовать уравнение Клейна–Гордона для конечного электрического дипольного потенциала и найти решение приближенно методом согласования асимптотических решений.

Объектом исследования являются полнота и базисность негармонических систем функций, а также полнота и базисность системы собственных функций дифференциального оператора.

Предметом исследования являются вопросы сходимости указанных спектральных разложений в различных функциональных пространствах и проблема базисности неортогональных систем в банаховых пространствах.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы математической физики, общие методы функционального анализа, теории интерполяции банаховых пространств и теории интерполяции линейных операторов, теории функций комплексных переменных, спектральной теории линейных операторов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказаны теоремы о базисности некоторых негармонических систем, а также о равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье в классах Соболева–Лиувилля и Бесова;

доказана теорема о базисности Рисса системы собственных функций для задачи со спектральным параметром в граничном условии, а также теорема о полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи в классах Соболева.

доказана теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями, а также исследована однозначная разрешимость смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма–Лиувилля и Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева;

доказана теорема о полноте системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака в классах Соболева и найдены точные аналитические собственные функции и собственные значения для одномерного безмассового уравнения Дирака с зависящими от времени граничными условиями в случае линейной зависимости от времени граничного положения;

исследовано уравнение Клейна–Гордона для конечного электрического дипольного потенциала и найдено его решение приближенно методом согласования асимптотических решений.

Практические результаты исследования. Результаты настоящей диссертации носят теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертационной работе, будут использованы в научных исследованиях специалистами по математическому анализу, функциональному анализу, математической физике и дифференциальным уравнениям.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов функционального анализа, математической физики и дифференциальных уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Работа имеет теоритический характер и результаты диссертации можно использовать в физике твердого тела, гидродинамике, теории приближений и спектральной теории дифференциальных операторов для обоснования метода Фуре для решения различных задач математической физики и квантовой механики.

Практическая значимость полученных в исследовании результатов обосновывается возможностью применения к моделям геофизических наблюдений, в газовой динамике, математической биологии, механике сплошной среды, распространении акустических волн и подобным прикладным задачам, а также при математическом моделировании.

Внедрение результатов исследования:

На основе разработанных методов выяснение вопросов полноты и базисности некоторых негармонических систем в банаховых пространствах, а также изучение условий однозначной разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева:

методы выяснения полноты и базисности некоторых негармонических систем использовались в научном проекте под номером MRU-OT-1/2017 и по теме «Нелокальные краевые и обратные задачи для неклассических дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений» и дали возможность доказать разрешимость смешанной задачи для уравнения гиперболического типа третьего порядка с интегральными условиями (Протокол № 89-03-92 от 8 января 2020 года Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан).

исследование условий однозначной разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Лапласа с нелокальными граничными условиями использовалось в научном проекте под номером ОТ-Ф4-33 и по теме «Разработка новых методов управления конфликтными ситуациями, характеризующимися дифференциальными уравнениями и их численной реализацией» и дали возможность построить ε-позиционные стратегии в теории дифференциальных игр преследования и об инвариантности постоянного многозначного отображения в задаче теплопроводности (Протокол № 89-03-92 от 8 января 2020 года Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан).

Приближенное аналитическое решение уравнения Клейна–Гордона для конечного электрического дипольного потенциала использовалось в зарубежных научных журналах (Acta Physica Sinica - Journal of Chinese Physics. Vol.54 №4 April.2005; Vol.54 №7 July.2005; Vol.56 №2 Fevruary.2007; International Journal of Modern Physics B, Vol. 22, No. 06, pp. 671-682 (2008);

Vol. 20, No. 22, pp. 3233-3245 (2006)) (2+1). О полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи $Au = \lambda Su$ в классах Соболева были использованы в зарубежном научном журнале (Rocky Mountain Journal of Mathematics. Volume 44, Number 6, (2014)) .

Используя результаты о разрешимости уравнения Дирака с нестационарными граничными условиями, получено точное аналитическое решение для уравнения Шредингера с учетом колебательных и вращающихся граничных условий.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации доложено в научных докладах на 12 международных и 6 республиканских научно-практических конференциях. Результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по дифференциальным уравнениям «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений в частных производных» Института Математики им. В.И. Романовского АН РУз. (руководитель проф. Р. Ашуров), на заседании городского научного семинара «Современные проблемы математической физики» при Национальном университете имени Мирзо Улугбека (руководитель академик Ш.А. Алимов).

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 31 научных работ, из них 12 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 3 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 9 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 131 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «Необходимые сведения о функциональных пространствах и о полноте системы негармонических функций в этих пространствах», приведены необходимые предварительные сведения, основные определения, теоремы и некоторые свойства базисов в банаховом и гильбертовом пространствах, которые будут использованы при изложении результатов диссертации, а также доказаны теоремы о базисности некоторых негармонических систем в классах Соболева–Лиувилля и Бесова при суммировании по прямоугольникам.

В параграфах 1.1 и 1.2 представлен краткий обзор выводов по теме диссертации, приведены стандартные обозначения, основные понятия теории базисов, а также приведены определения функциональных пространств и некоторые свойства базисов в этих пространствах

В параграфе 1.3 рассмотрен вопрос базисности некоторых негармонических систем в классах Соболева–Лиувилля и Бесова. Доказаны теоремы о базисности некоторых негармонических систем в классах Соболева–Лиувилля и Бесова при суммировании по прямоугольникам.

Пусть $T^N = (-\pi, \pi]^N$, где $N \geq 1$, – N-мерный тор.

Определение 1. Будем говорить, что 2π-периодическая по каждой из переменных x_j ($j=\overline{1, N}$) функция $f(x) = f(x_1,...,x_N)$ принадлежит 2π-периодическому классу Лиувилля $L_p^s\left(T^N\right)$, если

$$\|f\|_{L_p^s\left(T^N\right)} = \left\| \sum_{n\in Z^N} \left(1+|n|^2\right)^{\frac{s}{2}} \cdot f_n \cdot \exp(inx) \right\|_{L_p\left(T^N\right)} < \infty,$$

где $p \geq 1$, $f_n = (2\pi)^{-N} \int\limits_{T^N} f(x)\exp(-inx)dx$ – коэффициенты Фурье.

Определение 2. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n\in Z^N} c_n \varphi_n$ сходится по прямоугольникам, если существует предел частичных сумм

$$S_m = \sum_{|n_1|\leq m_1} \sum_{|n_2|\leq m_2} \dots \sum_{|n_N|\leq m_N} c_n\varphi_n \quad \text{при} \quad \min_{1\leq j\leq N} m_j \to \infty .$$

Определение 4. Систему элементов $\psi = \{\psi_n\}_{n\in Z^N}$ из банахова пространства E назовем ω-линейно независимой при суммировании по прямоугольникам, если равенство $\sum\limits_{n\in Z^N} c_n\psi_n = 0$ при суммировании по прямоугольникам невозможно при $\sum\limits_{n\in Z^N} |c_n|^2 \cdot \|\psi_n\|^2 > 0$.

Определение 5. Система 1 $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется базисом Рисса в гильбертовом пространстве H , если существует линейный ограниченный обратимый оператор $L: H \to H$ такой, что $\{L\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$–ортонормированный базис.

Теорема 1. Пусть $\psi_n(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{p}} \cdot \left(1+|n|^2\right)^{-\frac{s}{2}} \cdot \exp\left(i\lambda_n x\right) + \alpha_n(x)$, $n \in Z^N$, где $\lambda_n \neq \lambda_m$ при $n \neq m$, – ω-линейно независимая система функций при суммировании по прямоугольникам, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$1)\ \sum_{n\in Z^N} \left\| \sum_{k\in Z^N} \left(\frac{1+|k|^2}{1+|n|^2} \right)^{\frac{s}{2}} \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{\sin\left(\lambda_{n_j} - k_j\right)\pi}{\left(\lambda_{n_j} - k_j\right)\pi} - \delta_{nk} \right) \cdot \exp(ikx) \right\|_{L_p\left(T^N\right)} < \infty ;$$

2) $\sum_{n\in Z^N}\|\alpha_n(x)\|_{L_p^s(T^N)}<\infty$.

Тогда при суммировании по прямоугольникам система функций $\{\psi_n\}_{n\in Z^N}$ образует базис в $L_p^s\left(T^N\right)$, $1<p<\infty$.

Определение 6. Функция $f(x)\in L_p\left(T^N\right)$ принадлежит пространству $W_p^s\left(T^N\right)$, если все ее частные производные $D^\alpha f$ (в смысле теории распределений) порядка $|\alpha|=s$ принадлежат $L_p\left(T^N\right)$, т.е. конечна норма

$$\|f\|_{W_p^s(T^N)}=\|f\|_{L_p(T^N)}+\sum_{|\alpha|=s}\left\|D^\alpha f\right\|_{L_p(T^N)},$$

где $1\le p<\infty$, $s=0,1,2,\dots$.

Теорема 2. Пусть $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot\left(1+\sum_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|\right)^{-1}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, где $\lambda_n\ne\lambda_m$ при $n\ne m$, – ω-линейно независимая система функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$1)\ \sum_{n\in Z^N}|\lambda_n-n|<\infty;\qquad 2)\ \sum_{n\in Z^N}\|\alpha_n(x)\|_{W_p^s(T^N)}<\infty.$$

Тогда при суммировании по прямоугольникам система функций $\{\psi_n\}_{n\in Z^N}$ образует базис в $W_p^s\left(T^N\right)$, $1<p<\infty$, $s=0,1,2,\dots$.

Теорема 3. Пусть $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\cdot\left(1+\sum_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, где $\lambda_n\ne\lambda_m$ при $n\ne m$, – ω-линейно независимая система функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $k=\sqrt{\sup_n\frac{\theta^2+\sum_{|\alpha|=s}\left(\theta^2\left|\lambda_n^\alpha\right|^2+\left|\lambda_n^\alpha-n^\alpha\right|^2\right)}{1+\sum_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|^2}}<1$, где $\theta=\exp(MN\pi)-1$, $M=\sup_j\sup_{n_j}\left|\lambda_{n_j}-n_j\right|$; 2) $\sum_{n\in Z^N}\|\alpha_n(x)\|^2_{W_2^s(T^N)}<\infty$.

Тогда система функций $\{\psi_n(x)\}_{n\in Z^N}$ образует базис Рисса в пространстве $W_2^s\left(T^N\right)$.

В параграфе 1.4 рассмотрен вопрос о равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье в классах Соболева–Лиувилля и Бесова при суммировании по прямоугольникам и доказана теорема о равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье в классах Соболева и Бесова независимо от метода суммирования

Определение 7. Будем говорить, что ряд $\sum_{n\in Z^N}c_n\varphi_n(x)$ равномерно сходится на множестве G к функции $f(x)$ при суммировании по прямоугольникам, если

$$\lim_{\substack{\min\limits_{1\le j\le N} m_j\to\infty}}\|f(x)-S_m(x)\|_{C(\bar G)}=\lim_{\substack{\min\limits_{1\le j\le N} m_j\to\infty}}\left\|f(x)-\sum_{|n_1|\le m_1}\sum_{|n_2|\le m_2}\dots\sum_{|n_N|\le m_N}c_n\varphi_n(x)\right\|_{C(\bar G)}=0.$$

Теорема 4. Пусть $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot\left(1+|n|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, $n\in Z^N$, где $\lambda_n\ne\lambda_m$ при $n\ne m$, – ω-линейно независимая система функций при суммировании по прямоугольникам, удовлетворяющих следующим условиям:

$$1)\ \sum_{n\in Z^N}\left\|\sum_{k\in Z^N}\left(\frac{1+|k|^2}{1+|n|^2}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\prod_{j=1}^{N}\frac{\sin\left(\lambda_{n_j}-k_j\right)\pi}{\left(\lambda_{n_j}-k_j\right)\pi}-\delta_{nk}\right)\cdot\exp(ikx)\right\|_{L_p\left(T^N\right)}<\infty;$$

$$2)\ \sum_{n\in Z^N}\|\alpha_n(x)\|_{L_p^s\left(T^N\right)}<\infty;\qquad 3)\quad s\cdot p>N,\ 1<p<\infty.$$

Тогда кратный негармонический ряд Фурье функции $f(x)\in L_p^s\left(T^N\right)\cap C\left(T^N\right)$ по системе функций $\{\psi_n\}_{n\in Z^n}$ равномерно сходится на множестве T^N к функции $f(x)$ при суммировании по прямоугольникам.

Теорема 5. Пусть $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{p}}\cdot\left(1+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|\right)^{-1}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, где $\lambda_n\ne\lambda_m$ при $n\ne m$, – ω-линейно независимая система функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\sum\limits_{n\in Z^N}\left|\lambda_n-n\right|<\infty$; 2) $\sum\limits_{n\in Z^N}\|\alpha_n(x)\|_{W_p^s\left(T^N\right)}<\infty$; 3) $s\cdot p>N, 1<p<\infty,\ s=0,1,2,\dots,$.

Тогда кратный негармонический ряд Фурье функции $f(x)\in W_p^s\left(T^N\right)\cap C\left(T^N\right)$ по системе функций $\{\psi_n\}_{n\in Z^n}$ равномерно сходится на множестве T^N к функции $f(x)$ при суммировании по прямоугольникам.

Теорема 6. Пусть $\psi_n(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\cdot\left(1+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(i\lambda_n x\right)+\alpha_n(x)$, где $\lambda_n\ne\lambda_m$ при $n\ne m$, – ω-линейно независимая система функций, независимых от метода суммирования, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $k=\sqrt{\sup\limits_n\dfrac{\theta^2+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left(\theta^2\left|\lambda_n^\alpha\right|^2+\left|\lambda_n^\alpha-n^\alpha\right|^2\right)}{1+\sum\limits_{|\alpha|=s}\left|n^\alpha\right|^2}}<1$, где $\theta=\exp(MN\pi)-1, M=\sup\limits_j\sup\limits_{n_j}\left|\lambda_{n_j}-n_j\right|$;

$$2)\ \sum_{n\in Z^N}\|\alpha_n(x)\|^2_{W_2^s\left(T^N\right)}<\infty;\qquad\qquad 3)\ 2\cdot s>N.$$

Тогда кратный негармонический ряд Фурье функции $f(x)\in W_2^s\left(T^N\right)\cap C\left(T^N\right)$ по системе функций $\{\psi_n\}_{n\in Z^n}$ равномерно сходится на множестве T^N к функции $f(x)$ независимо от метода суммирования.

В параграфе 1.5 исследуется вопрось о базисности Рисса в классах Соболева системы собственных функций для задачи со спектральным параметром в граничном условии.

Рассмотрим спектральную задачу

$$u''(x)+\lambda u(x)=0,\, u(0)=0,\, u'(0)-d\lambda u(1)=0,\, d>0 \qquad (1)$$

Норма в пространстве Соболева $W_2^s(0,1)$ вводится так:

$$\| f\|^2_{W_2^s(0,1)}=\| f\|^2_{L_2(0,1)}+\left\|D^s f\right\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Теорема 7. Система собственных функций $y_n=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(\pi n)^{2s}}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$, $n=1,2,3,...$ спектральной задачи (1) образует базис Рисса в пространстве Соболева $W_2^s(0,1)$.

Во второй главе диссертации, озаглавленной «О полноте и базисности системы собственных функций. Разрешимость смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с нелокальными краевыми условиями», рассматривается вопрос о полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи $Au=\lambda Su$ в классах Соболева, а также вопросы разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка с операторами Штурма-Лиувилля и Лапласа с нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

В параграфе 2.1 исследуются полнота и базисность систем функций обобщенной спектральной задачи в классах Соболева, а также равномерная сходимость разложений по этим системам.

Рассмотрим уравнение вида

$$y'(x)=\lambda y\left(\pi-x\right), \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$\alpha y(0)+\beta y(\pi)=0\,, \qquad (3)$$

где $|\alpha|+|\beta|\neq 0$, $y(x)\in C^1\left[0,\pi\right]$.

Эта спектральная задача сводится к следующей спектральной задаче:

$$-y''(x)=\mu y(x), \quad \mu=\lambda^2, \qquad (4)$$

$$\begin{cases}\alpha y(0)+\beta y(\pi)=0,\\ \beta y'(0)+\alpha y'(\pi)=0.\end{cases} \qquad (5)$$

Собственными числами и собственными функциями задачи (4) – (5) являются соответственно

$$\mu_n=\lambda_n^2=(2n+\varepsilon_n\varphi)^2,\ \varphi=\frac{1}{\pi}ar\cos s\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2},\ \varepsilon_n=\pm1,\ \varepsilon_{-n}=\varepsilon_n,\ n\in\square\ ,$$

$$y_n=\omega_n(\beta\cos\lambda_n x+\varepsilon_n\,\mathrm{si\,gn}(\beta^2-\alpha^2)\alpha\sin\lambda_n x). \qquad (6)$$

где $\omega_n=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+(2n)^{2s}}}$.

Теорема 8. Пусть $|\alpha|\neq|\beta|,\ \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ действительные числа и

$\rho = \sqrt{\theta^2 + 2(\frac{\theta}{\sqrt{2}} + (\varphi+1)^s - 1)^2} \cdot \sigma(s) < 1$, где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s) = 1$ при $s > 0$,

$\theta = \sqrt{2} \max\limits_{x \in [0,\pi]} \left| e^{i\varphi x} - 1 \right|$, $\lambda_n = 2n + \varepsilon_n \cdot \varphi$, $\varphi = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \pm 1$ при $n \in \mathbb{Z}$. Тогда система собственных функций

$$\overline{y}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta \cos \lambda_n x + \varepsilon_n \operatorname{sign}(\beta^2 - \alpha^2)\alpha \sin \lambda_n x}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \cdot \sqrt{1 + \left|\lambda_n\right|^{2s}}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

спектральной задачи (4) – (5) образует полную ортонормированную систему в классе Соболева $W_2^s(0,\pi)$.

Теорема 9. Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $|\alpha| \neq |\beta|$ – действительные числа и

$$\rho = \sqrt{\theta^2 + 2(\frac{\theta}{\sqrt{2}} + \varphi)^2} < 1,$$

где $\theta = \sqrt{2} \max\limits_{x \in [0,\pi]} \left| e^{i\varphi x} - 1 \right|$, $\lambda_n = 2n + \varepsilon_n \cdot \varphi$, $\varphi = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \pm 1$ при $n \in \mathbb{Z}$.
Тогда ряд Фурье функций $f(x) \in W_2^1(0,\pi) \cap C[0,\pi]$ по ортонормированным собственным функциям

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta \cos \lambda_n x + \varepsilon_n \operatorname{sign}(\beta^2 - \alpha^2)\alpha \sin \lambda_n x}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \cdot \sqrt{1 + \left|\lambda_n\right|^{2s}}}, \; n \in \mathbb{Z}$$

спектральной задачи (4)–(5) равномерно сходится на отрезке $[0,\pi]$ к функции $f(x)$.

В параграфе 2.2 рассмотрим уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad 0 < \alpha \leq 2 \qquad (7)$$

с начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha - k} u(x,t) = \varphi_k(x), \quad k = \overline{1, \; [\alpha] + 1} \qquad (8)$$

и с краевыми условиями

$$\alpha u(0,t) + \beta u(\pi,t) = 0, \qquad \beta u'(0,t) + \alpha u'(\pi,t) = 0, \qquad (9)$$

где функции $f(x,t)$, $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, [\alpha]+1}$,– функции, разлагаемые по собственным функциям $\{y_n(x)\}_{n \in Z}$ системы собственных функций спектральной задачи:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y(x), \qquad (10)$$

$$\begin{cases} \alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0, \\ \beta y'(0) + \alpha y'(\pi) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Здесь дробный интеграл D^{α} имеет вид $D_{at}^{\alpha} u(x,t) = \frac{sign(t-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_a^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{\left|t-\tau\right|^{\alpha+1}}$ при $\alpha < 0$,

$D_{at}^{\alpha} u(x,t) = u(x,t)$ при $\alpha = 0$, а при $p - 1 < \alpha \leq p$, $p \in \mathbb{N}$, дробная производная имеет вид

$$D_{at}^{\alpha} u(x,t) = \frac{sign^p(t-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{d^p}{dt^p} D_{at}^{\alpha-p} u(x,t) = \frac{sign^{p+1}(t-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^p}{dt^p} \int\limits_a^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{\left|t-\tau\right|^{\alpha-p+1}}.$$

Функцию $q(x)$ будем считать достаточно гладкой функцией на отрезке $[0,\pi]$.

Теорема 10. Пусть $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ |\alpha| \neq |\beta|$ – действительные числа и $\theta < 1$, где $\theta = \sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi x}-1\right|$, $s_n = 2n + \varepsilon_n \cdot \varphi$, $\varphi = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \pm 1$ при $n \in Z$.Тогда система собственных функций

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\beta\cos s_n x + \varepsilon_n \operatorname{sign}(\beta^2-\alpha^2)\alpha\sin s_n x}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n\in Z,$$

спектральной задачи (10) –(11) образует полную ортонормированную систему в классах $L_2(0,\pi)$.

Теорема 11. Пусть $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ |\alpha| \neq |\beta|$ – действительные числа, и $\theta < 1$, где $\theta = \sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi x}-1\right|$, $s_n = 2n + \varepsilon_n \cdot \varphi$, $\varphi = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \pm 1$ при $n \in Z$, и пусть существует решение задачи (7) –(9). Тогда это решение единственно.

В параграфе 2.3 рассмотрим уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t),\ \ (x,t)\in\Pi\times(0,\infty),\ \ 0<\alpha\le 2 \tag{12}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t) = \varphi_k(x),\quad k=\overline{1,\,[\alpha]+1}, \tag{13}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_j u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=0} + \beta_j u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=\pi} = 0, 1\le j\le p, \\ \beta_j \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=0} + \alpha_j \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0, 1\le j\le p, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=0} = u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=\pi},\ p+1\le j\le q, \\ \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=0} = \dfrac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0,\ p+1\le j\le q, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=0} = 0,\quad q+1\le j\le N, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)|_{x_j=\pi} = 0,\quad q+1\le j\le N, \\ 1\le p\le q\le N, \end{cases} \tag{14}$$

где $f(x,t),\ \varphi_k(x),\ k=\overline{1,\,[\alpha]+1}$ – функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^N}$ системы собственных функций спектральной задачи:

$$\Delta v(x) + \mu v(x) = 0, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \alpha_j \cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=0} + \beta_j \cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=\pi} = 0, 1 \le j \le p, \\ \beta_j \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=0} + \alpha_j \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0, 1 \le j \le p, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=0} = v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=\pi},\ p+1 \le j \le q, \\ \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=0} = \dfrac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0,\ p+1 \le j \le q, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \le j \le N, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)|_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \le j \le N, \\ 1 \le p \le q \le N \end{cases} \tag{16}$$

где $(x,t) = (x_1,...,x_j,...,x_N,t) \in \Pi \times (0,\infty)$, $\Pi = (0,\pi) \times ... \times (0,\pi)$, $\alpha_j = const$, $\beta_j = const$, $|\alpha_j| \ne |\beta_j|$, $\alpha_j \ne 0$, $\beta_j \ne 0$.

Обозначим через $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ класс функций, принадлежащих $W_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{cases} \alpha_j \dfrac{\partial^{2k} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=0} + \beta_j \dfrac{\partial^{2k} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=\pi} = 0, 1 \le j \le p, \quad 0 \le 2k < s - \dfrac{N}{2}, \\ \beta_j \dfrac{\partial^{2k+1} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k+1}}|_{x_j=0} + \alpha_j \dfrac{\partial^{2k+1} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k+1}}|_{x_j=\pi} = 0, 1 \le j \le p,\ 0 \le 2k+1 < s - \dfrac{N}{2}, \\ \dfrac{\partial^{k} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{k}}|_{x_j=0} = \dfrac{\partial^{k} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{k}}|_{x_j=\pi} = 0,\ p+1 \le j \le q,\ 0 \le k < s - \dfrac{N}{2}, \\ \dfrac{\partial^{2k} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \le j \le N,\ 0 \le 2k < s - \dfrac{N}{2}, \\ \dfrac{\partial^{2k} v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j^{2k}}|_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \le j \le N,\ 0 \le 2k < s - \dfrac{N}{2},\ 1 \le p \le q \le N. \end{cases}$$

Теорема 12. Пусть $\alpha_j \ne 0$, $\beta_j \ne 0$, $|\alpha_j| \ne |\beta_j|$ – действительные числа при каждом $1 \le j \le p$ и

$$\rho = \max_{1 \le j \le p} \left(\sqrt{\theta_j^2 + 2(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1)^2} \cdot \sigma(s_j) \right) < 1,$$

где $\sigma(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$ при $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2} \max\limits_{x \in [0,\pi]} \left| e^{i\varphi_j x} - 1 \right|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varepsilon_{m_j} \cdot \varphi_j$, $\varphi_j = \dfrac{1}{\pi} \arccos \dfrac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$, $\varepsilon_{m_j} = \varepsilon_{-m_j} = \pm 1$ при $m_j \in \mathbb{Z}$. Тогда система собственных функций

$$\left\{ v_{m_1,...,m_N}(x_1,x_2,...,x_N) \right\}_{(m_1,...,m_p) \in \mathbb{Z}^p \times (m_{p+1},...,m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p} \times (m_{q+1},...,m_N) \in \mathbb{Z}^{N-q}} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta_j \cos\lambda_{m_j} x + \varepsilon_{m_j} \cdot \operatorname{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2)\alpha_j \sin\lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \cdot \sqrt{1 + \left|\lambda_{m_j}\right|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1,\dots,m_p)\in \mathbb{N}^p} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=p+1}^{q} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left|2m_j\right|^{2s_j}}} \cdot e^{i2m_j x_j} \right\}_{(m_{p+1},\dots,m_q)\in \mathbb{Z}^{q-p}} \times \left\{ \prod_{j=q+1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left|m_j\right|^{2s_j}}} \cdot \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1},\dots,m_N)\in \mathbb{N}^{N-q}}$$

(17)

спектральной задачи (15)–(16) образует полную ортонормированную систему в классах Соболева $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$.

Согласно теореме 12, система собственных функций (17) спектральной задачи (15)–(16) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{0}{H}{}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$ и $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$. Поэтому справедливо следующее неравенство

$$\left\|u(x,t)\right\|^2_{C^{2,2,\dots,2}(\Pi)} \le c_8 \left\|u(x,t)\right\|^2_{H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)} \le$$

$$\le c_9 \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{[\alpha]+1} \left(\varphi_j\right)_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right] f_{m_1,\dots,m_N}(\tau) d\tau \right|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty. \quad (18)$$

Теорема 13. Пусть $\alpha_j \ne 0,\ \beta_j \ne 0,\ \left|\alpha_j\right| \ne \left|\beta_j\right|$ – действительные числа при каждом $1 \le j \le p$ и

$$\rho = \max_{1\le j\le p}\left(\sqrt{\theta_j^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j+1)^{s_j} - 1\right)^2 \cdot \sigma(s_j)} \right) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$ при $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2} \max_{x\in[0,\pi]} \left|e^{i\varphi_j x} - 1\right|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varepsilon_{m_j} \cdot \varphi_j$, $\varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$, $\varepsilon_{m_j} = \varepsilon_{-m_j} = \pm 1$ при $m_j \in \mathbb{Z}$, $s_j > 2 + \frac{N}{2}$, и пусть начальные функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, [\alpha]+1$ и правая часть $f(x,t)$ удовлетворяет условию (18) при каждом $0 < t < T$. Тогда регулярное решение задачи (12) – (14) из класса $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N > 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ существует и единственно представляется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{[2]+1} \varphi_{j,(m_1,\dots,m_N)} t^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha}) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}] f_{m_1,\dots,m_N}(\tau) d\tau \right] v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N), \quad (19)$$

где коэффициенты определяется следующим образом:

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot t^{\alpha})=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot t^{\alpha})^i}{\Gamma(\alpha i+\alpha-j+1)}\ ,$$

$$E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-\mu_{m_1,\dots,m_N})^{i-1}(t-\tau)^{\alpha(i-1)}}{\Gamma(\alpha\cdot i)}\ ,$$

$$f(x,t)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{m_q=-\infty}^{\infty}\sum_{m_{q+1}=1}^{\infty}\dots\sum_{m_N=1}^{\infty} f_{m_1,\dots,m_N}(t)\cdot v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\,,$$

$$\varphi_j(x)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{m_q=-\infty}^{\infty}\sum_{m_{q+1}=1}^{\infty}\dots\sum_{m_N=1}^{\infty}\varphi_{j,(m_1,\dots,m_N)}\cdot v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N),\ j=1,2,\dots,n.$$

В параграфе 2.4 доказана теорема о разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка с дробными производными по времени, со степенями операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

В третьей главе диссертации, названной «О полноте системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака в классах Соболева. Разрешимость смешанной задачи для уравнений Дирака и Клейна-Гордона» исследована полноты системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака в классах Соболева, а также разрешимости смешанной задачи для уравнения Дирака и Клейна–Гордона.

В параграфе 2.3 рассмотрены вопросы полноты системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака

$$\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\lambda\psi,\qquad \psi(x,y)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,y)\\ \psi_2(x,y)\end{pmatrix}$$

или в развернутом виде

$$-i\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=\lambda\psi_1,\quad -i\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\lambda\psi_2\ . \tag{20}$$

в классах Соболева.

Предположим, что вектор-функция $\psi(x,y)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,y)\\ \psi_2(x,y)\end{pmatrix}$ в системе (20) рассматривается в прямоугольнике $T^2=[0,a]\times[0,b]$, где $\psi_i(x,y)\in C^1([0,a]\times[0,b])$, $i=1,2$. В связи с системой (20) рассмотрим следующие краевые условия:

$$\begin{cases}\alpha_1\psi_1(0,y)+\beta_1\psi_1(a,y)=0, & \beta_1\dfrac{\partial\psi_1(0,y)}{\partial x}+\alpha_1\dfrac{\partial\psi_1(a,y)}{\partial x}=0,\\ \gamma_1\psi_1(x,0)+\delta_1\psi_1(x,b)=0, & \delta_1\dfrac{\partial\psi_1(x,0)}{\partial y}+\gamma_1\dfrac{\partial\psi_1(x,b)}{\partial y}=0,\end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\alpha_2\psi_2(0,y)+\beta_2\psi_2(a,y)=0, & \beta_2\dfrac{\partial\psi_2(0,y)}{\partial x}+\alpha_2\dfrac{\partial\psi_2(a,y)}{\partial x}=0,\\ \gamma_2\psi_2(x,0)+\delta_2\psi_2(x,b)=0, & \delta_2\dfrac{\partial\psi_2(x,0)}{\partial y}+\gamma_2\dfrac{\partial\psi_2(x,b)}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{22}$$

Теорема 14. Пусть $\alpha_1=\beta_2,\ \ \alpha_2=\beta_1$ и $\gamma_1=\delta_2,\ \gamma_2=\delta_1$. Тогда система нормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака (20)–(22) есть двух кратная полная ортонормированная система в классах Соболева.

Во втором параграфе данной главы изучено одномерное безмассовое уравнение Дирака с зависящими от времени граничными условиями.

Рассмотрим следующую систему Дирака (ћ=c=1)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\alpha p+m\beta)\psi\ , \tag{23}$$

где $\psi(t,x)=\begin{pmatrix}\psi_1(t,x)\\ \psi_2(t,x)\end{pmatrix}$ являются двухкомпонентными спинорами в области $D=\{(t,x),\,0<t<T,0<x<L(t)\}$, правая граница $L(t)$ меняется со временем, $p=-i\dfrac{\partial}{\partial x}$, и $\alpha=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \ \beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ являются матрицами Паули.

Граничные условия задаются следующим образом

$$\psi(t,0)=0,\ \ \psi(t,L(t))=0,\ \ \ 0\le t\le T\ . \tag{24}$$

В стационарном случае уравнения Дирака

$$(\alpha p+mc^2\beta)\psi=E\psi$$

найдены собственные функции в виде

$$\psi_n(x)=A_n\begin{pmatrix}\sin(k_nx)\\ \dfrac{ck_n}{E_n+mc^2}\cos(k_nx)\end{pmatrix},$$

где A_n – нормировочная константа, $k_n=\dfrac{n\pi}{L},\ \ n=0,1,2,3,...,$

$$E_n=[k_n^2+(mc^2)^2]^{1/2}.$$

Мы ограничимся рассмотрением безмассового случая, т.е. предположим, что $m=0,\ \ V=0$. В уравнении (23) с помощью замены $y=\dfrac{x}{L(t)}$ область D можно свести к области с фиксированными границами $D_1=\{(t,x),0<x<T,0<y<1\}$

.

Тогда полный набор решений (23) для линейно меняющихся границ будет иметь вид:

$$\psi_{1n}(t,x)=M\exp[\frac{-i\lambda_n}{a}\ln\frac{at+b}{b}]\left((1-\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}-(1+\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}\right),$$

$$\psi_{2n}(t,x)=M\exp[\frac{-i\lambda_n}{a}\ln\frac{at+b}{b}]\left\{\frac{1}{i\lambda_n-a}\left((1-\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a+1}}+(1+\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a+1}}\right)-\right.$$

$$-iay\left((1-\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}-(1+\frac{ax}{at+b})^{\frac{-i\lambda_n}{a}}\right)\Bigg\}. \qquad (25)$$

Получено точное аналитическое решение одномерного уравнения Дирака с зависящими от времени граничными условиями для случая линейной зависимости от времени пограничного (граничного) положения.

В третьем параграфе исследовано уравнение Клейна–Гордона для конечного электрического дипольного потенциала и найдено его решение приближенно методом согласования асимптотических решений. Здесь же энергии состояния вблизи континуума найдены аналитически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию полноты и базисности системы собственных функций в различных функциональных пространствах и вопросов разрешимости краевых задач, связанных с частными производными дробного порядка с нелокальными краевыми условиями.

По основным результатам исследования мы пришли к выводам:

1. Найдены достаточные условия базисности (полнота) негармонических систем общего вида $\exp(i\lambda_n x),\ n \in Z,\ \lambda_n \in C$ в функциональных пространствах Соболева, Соболева–Лиувилля и Бесова.

2. Доказаны теоремы о базисности некоторых негармонических систем в классах Соболева–Лиувилля и Бесова.

3. Доказаны теоремы о равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье в классах Соболева–Лиувилля и Бесова.

4. Доказана теорема о полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи в классах Соболева.

5. Доказана теорема о базисности Рисса в классах Соболева системы собственных функций для задачи со спектральным параметром в граничном условии.

6. Доказана теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями.

7. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма–Лиувилля и Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева.

8. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи для уравнения с частными производными высокого порядка с дробными производными по времени и со степенями операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

9. Доказана теорема о полноте системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака в классах Соболева, а также теорема о двух кратной полноте системы нормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака с нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

10. Найдено точное аналитическое решение одномерного уравнения Дирака с зависящими от времени граничными условиями для случая линейной зависимости от времени пограничного (граничного) положения.

11. Исследовано уравнение Клейна–Гордона для конечного электрического дипольного потенциала и найдено его решение приближенно методом согласования асимптотических решений. Энергии состояния вблизи континуума найдены аналитически.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

OTAEV SHONAZAR KODIRIVICH

ON THE COMPLETENESS AND BASICITY OF NONHARMONIC SYSTEMS IN SOBOLEV-LIOUVILLE CLASSES

01.01.02- Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Comissision at the Cabinet of Minsters of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.PhD/FM13.

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (http://ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific advisor:	**Kasimov Shakirbay Gapparovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Urazbaev Gayrat Urazalievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place « __ » _________ 2020 at ___ at the meeting of Scientific Council number DSc 03/30.12.2020. FM 01.01 at National university of Uzbekistan . (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-53-21, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National university of Uzbekistan (is registered №__). (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ___ » _________ 2020 year.

(Mailling report №____ on « ___ » _________2020 year).

A.Sadullaev
Chairman of Scientific Council on
award of of scientific degrees,
D.Ph.M.S. Academician.

N.K.Mamadaliyev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of of scientific degrees ,
Ph.D.

Sh.A.Alimov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of of scientific degrees,
D.Ph.M.S. Academician.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work.

The present dissertation work is devoted to clarifying the issues of convergence and basicity of some nonharmonic systems in Banach spaces, as well as studying the conditions for the unique solvability of the mixed problem for a partial differential equation of fractional order with Laplace operators with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes.

The object of the research work is the completeness and basicity of nonharmonic systems of functions, as well as the completeness and basicity of the system of eigenfunctions of the differential operator.

Scientific novelty of research work is as follows:

sufficient conditions for the basicity (completeness) of non-harmonic systems of the general form $\exp(i\lambda_n x),\quad n \in Z,\quad \lambda_n \in C$ in the Sobolev–Liouville and Besov functional spaces are found:

theorems are proved on the basis property of some nonharmonic systems and also on the uniform convergence of multiple nonharmonic Fourier series in the Sobolev – Liouville and Besov classes;

a theorem on the completeness of the system of orthonormal eigenvectors of a generalized spectral problem in Sobolev classes is proved;

the Riesz basicity theorem in Sobolev classes of a system of eigenfunctions for a problem with a spectral parameter in the boundary condition is proved;

a theorem on the completeness of the system of eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with non-local boundary conditions is proved;

the unique solvability of the mixed problem for a partial differential equation of fractional order with Sturm – Liouville and Laplace operators with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes is proved;

the unique solvability of a mixed problem for a high-order partial differential equation with fractional derivatives with respect to time, with Laplace operators with spatial variables and nonlocal boundary conditions in Sobolev Classes is proved;

a theorem on the completeness of the orthonormal system of eigenvectors of two-dimensional Dirac operator in Sobolev classes, and a theorem is two-fold completeness of the system of normalized eigenvectors of the two-dimensional Dirac operator with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes;

exact analytical eigenfunctions and eigenvalues are found for a one-dimensional massless Dirac equation with time-dependent boundary conditions in the case of linear time dependence of the boundary position;

the Klein-Gordon equation for the finite electric-dipole potential is solved approximately by the method of matching of asymptotic solutions, and also continuum state energies are found analytically.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of the introduction, three chapters, the conclusions and the list of the used literature. The volume of the thesis is 131 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О базисности некоторых негармонических систем в классах Соболева-Лиувилля и Бесова // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2008. – № 3. – С.41-56. (01.00.00; №6).

2. Атаев Ш.К., Касимов Ш.Г. О полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи в классах Соболева // Узбекский математический журнал. 2009, №2. С.101-111. (01.00.00; №6).

3. Атаев Ш.К., Касимов Ш.Г. О полноте системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора Дирака в классах Соболева. Вестник НУУз. г. Ташкент. Изд. «Университет». 2010 г. № 3. С. 104-107. (01.00.00; №8).

4. Атаев Ш.К. О базисности Рисса в классах Соболева система сообственных функции для задачи со спектральным параметром в граничном условии. Вестник НУУз. г. Ташкент. Изд. «Университет». 2013 г. № 2.С. 35-38. (01.00.00; №8).

5. Касимов Ш. Г., Атаев Ш. К., Мадрахимов У. С. О полноте системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями // Вестник НУУз 2016 № 2/1, С. 37-44. (01.00.00; №8).

6. Касимов Ш. Г., Атаев Ш. К., Мадрахимов У. С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частнымы производными дробного порядка с операторами Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. Узбекский математический журнал. г. Ташкент. Изд. «Фан» АН РУз. 2016 г. № 2. С. 149 – 158. (01.00.00; №6).

7. Kasimov Sh.G., Ataev Sh.K. On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes “Uzbek Mathematical Journal”. Tashkent. "FAN". 2018 № 1. P. 73 - 89.258. (01.00.00; №6).

8. O.A. ˙Ilhan, Sh. G. Kasimov., Sh.Q. Otaev H.M. Baskonus. On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes. Mathematics 2019, 7, 235. pp.1-20. Basel, Switzerland. (№3.SJR. IF =1.747).

9. D.U. Matrasulov and Sh.K. Ataev. An approximate analytical solution of the Klein –Gordon equation for the finite electric dipole potential. Journal of Physics A: Mathematical and General. 36 (2003) 10227-10232. (№4. SJR. IF=**2.110**)

10. Matrasulov D. U., Otajonov D. M., Ataev Sh.K. Kepler map for relativistic atoms. Узбекский физический журнал. г. Ташкент. изд. «ФАН» АН РУз. Journal Volume: 4; page(s) 15-19. Май 01, 2002. (01.00.00; №5).

11. З.А. Собиров, Ш.К. Атаев. Д. Матрасулов, Ф. Хошимова. Уравнение дирака с нестационарными граничными условиями. Узбекский физический журнал. г. Ташкент. изд. «ФАН» АН РУз. 2008 г.Volume 10 № 4-5. С. 286 - 290. (01.00.00; №5).

12. Z. A. Sobirov, D. Matrasulov, Sh.К. Ataev, H. Yusupov. Time dependent neutrino billiards. Nato Science fop peace and security Series-B: Physics and Biophysics. Complex Phenomena in Nanoscale Systems, Springer Science +Business Media B.V.2009, pages 215-221. (№4. SJR.IF =0.5).

II бўлим (2 часть; part 2)

13. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О базисности некоторых негармонических систем в классах Лиувилля и Бесова // Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Труды международной конференции. Ташкент, 18-24 апреля 2005 г. В 3-х томах. – Ташкент, 2005. – Том 1. – С. 90 - 91.

14. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О базисности некоторых негармонических систем в классах Соболева-Лиувилля и Бесова // Тихонов и современная математика: Международной конференции. 19-25 июня 2006 г. – Москва: Издательский отдел факультета ВМиК им. М.В. Ломоносова, 2006. – С.119-120.

15. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О базисности некоторых систем в пространствах Соболева // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы III Международной конференции. Нальчик, 5-8 декабря 2006 г. – Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2006. – С. 153-155.

16. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи в классах Соболева // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий: Материалы республиканской научной конференции, посвященной 90-летнему юбилею НУУ. 8 мая 2008 года. г. Ташкент, 2008. – С. 133-135.

17. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье в классах Соболева-Лиувилля и Бесова // Казахстан в новом мире и проблемы Национального образования: Труды международной научно-практической конференции. Жетысай, 16-18 мая 2008 г. В 3-х томах. – Шымкент, 2008. – Том III. – С.114-119.

18. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О равномерной сходимости кратных негармонических рядов Фурье в классах Соболева-Лиувилля и Бесова // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции, посвященной юбилеям академиков РАН Ильина В.А. и Моисеева Е.И. Стерлитамак, 24-28 июня 2008г. В 3-х томах. – Уфа: Гилем, -2008. – Том 2. – С.16-22.

19. Ш.Г. Касимов, Ш.К. Атаев. О полноте системы ортонормированных собственных векторов двумерного оператора дирака в классах соболева. Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума “Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики”. Нальчик-2010. Нальчик-Хабез. 25-30 июня 2010 г. С. 116 - 118.

20. Ш.Г. Касимов, Ш.К. Атаев. О полноте системы ортонормированных собственных функций одной нелокальной спектральной задачи в классах Соболева. Дифференциальные уравнение и смежные проблемы. Труды международной научной конференции 26-30 июня 2013 г. г. Стерлитамак. С. 59-64.

21. Ш.Г. Касимов, Ш.К. Атаев. О полноте системы ортонормированных собственных функций одной нелокальной спектральной задачи. СамДиф-2013 Конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара,1-3 июля 2013 г. С.43-44.

22. Ш.Г. Касимов, Ш.К. Атаев, У.С. Мадрахимов. О полноте системы собственных оператора Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского Том 49. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций-2014. Материалы Международной научной конференции (Казань,29 сентября-1 октября 2014г.) С.196-199.

23. Ш.Г. Касимов, Ш.К. Атаев. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частнымы производными дробного порядка с операторами Штурма Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ “Актуальное вопросы геометрии и её приложения”. Ташкент, 25-27 октября 2014 года. С. 189-190.

24. Ш.Г. Касимов, Ш.К. Атаев. У.С. Мадрахимов. О полноте системы собственных оператора Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых 23-25 октября 2014 г.

25. Ш.К. Атаев. О базисности Рисса в классах Соболева системы собственных функции для задачи со спектральным параметром в граничном условии. Современные методы математической физики и их приложения, Ташкент-2015. С.33-35.

26. Ш.Г. Касимов, Ш.К.Атаев. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева. Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых Ташкент, Узбекистан, 15–17 декабря, 2017 год.

27. Ш.Г. Касимов, Ш.К.Атаев, У.С. Мадрахимов О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка оператора штурма-лиувилля с нелокальными краевыми условиями.

Modern problems of dynamical systems and their applications. Pade 123-124. May 1-3, 2017, Turin Polytecnic University in Tashkent.

28. Ш.Г. Касимов, Ш.К. Атаев. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева. Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». 25–29 июня 2018 года. г. Стерлитамак. Стр. 274–281.

29. Касимов Ш., Атаев Ш.К. Об однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи в классах Соболева для уравнения с частными производными дробного порядка и оператором Лапласа. V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» 4–7 декабря 2018 года. г. Нальчик. Стр. 98 - 99.

30. Атаев Ш.К. О разрешимости об одной смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева. Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тезисы докладов Узбекско–Российской научной конференции (24–26 октября 2019 года, г. Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. "Университет". 2019. ст.150-152.

31. Атаев Ш.К. О разрешимости в классах Соболева одной смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с нелокальными краевыми условиями. Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики. Тезисы докладов Международной научной конференции (12-13 март 2020 г.). Фергана. Ферганский государственный университет. С. 236-238.