

O‘ZBEKISON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIK ANALIZ VA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

KAFEDRASI

«5130100- matematika» ta‘lim yo‘nalishi bo‘yicha

bakalavr darajasini olish uchun

015-46-guruh talabasi Safarov Abbos Abdurasul o‘g‘lining

“ $\mathbb{R}$ da ba‘zi diskret dinamik sistemalarning xossalari”

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:_____dots.N.Dilmurodov

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika – matematika fakulteti

dekani:_____f.-m.f.d. A.Xolmurodov

“_____” 2019-yil

Qarshi – 2019

MUNDARIJA

KIRISH	3
1-BOB.DINAMIK SISTEMALAR NAZARIYASININGASOSIY TUSHUNCHALARI	6
1.1.Yordamchi ma'lumotlar	6
1.2.Qo'zg'almas nuqtalar	10
2-BOB.DINAMIK SISTEMALAR.....	13
2.1. Dinamik sistema ta'rifi.....	13
2.2.Giperboliklik	16
2.3.Turlarning ko'payish (kamayish) dinamikasi	20
3-BOB.BA'ZI DISKRET DINAMIK SISTEMALARVA ULARNING XOSSALARI.....	24
3.1.Bir o'lchamli dinamik sistema trayektoriyalari	24
3.2.Kvadrat akslantirishlar dinamikasi.....	26
3.3.Simvolik dinamika.....	31
3.4.Topologik qo'shmalik.....	33
XULOSA	35
ADABIYOTLAR	36

KIRISH

Bugungi kunda O'zbekistonda ta'lim sohasida amalga oshirilayotgan islohotlar ko'p jihatdan mamlakatimizni modernizatsiya qilish jarayonlari bilan hamohang tarzda olib borilmoqda. Bunda asosiy yo'nalishlar sifatida oliy va o'rta maxsus ta'lim tizimida o'quv, o'quv-uslubiy va ilmiy faoliyatni modernizatsiya qilish, ta'lim va tadqiqot jarayonlaridagi innovatsion yo'nalishlarni kuchaytirish tadbirlari izchil amalga oshirilmoqda. Mazkur tadbirlardan kutilayotgan asosiy maqsad yuqori darajadagi intellektual salohiyatga ega bo'lgan milliy mutaxassislar, kadrlarni tayyorlash texnologiyasi hamda ta'limning mazmunini yangicha bosqichga ko'tarishdan iborat.

Hozirgi zamon pedagogikasining asosiy maqsadi uzluksiz ta'limdagi uzviylikni ta'minlashdan iborat bo'lib, uning bosh masalalaridan biri yosh avlodga har tomonlama chuqur va puxta bilim berishning samarali metodika va metodlarini ishlab chiqishdan iborat. Bu esa o'z navbatida uzluksiz ta'lim va uning mutaxasislari oldiga bo'lajak kadrlarni tayyorlashda ularga o'qitiladigan fanlarning uzluksiz ta'lim tizimining turli bosqichlarida o'qitish uzviyligi va uzluksizligini ta'minlashni muhim vazifalaridan biri qilib qo'yadi.

Ana shunday vazifa uzluksiz ta'lim tizimida o'qitiladigan matematika fanining oldiga ham qo'yildi. Ko'pgina matematik tushunchalar ba'zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida o'z tatbig'ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo'la oladi.

Shunga o'xshash sohalardan yana biri zamonaviy matematikaning bir bo'limi hisoblangan dinamik sistemalar nazariyasidir. Dinamik sistemalar nazariyasi – matematikaning muhim bo'limlaridan biri hisoblanadi.

Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida dinamik sistemalar nazariyasining fizika, biologiya fanlaridagi tatbiqlari qo'llanilmoqda.

Dinamik sistemalar nazariyasining asosiy maqsadi akslantirishni qayta – qayta qo‘llaganda qanday hodisa sodir bo‘lishini o‘rganish. Dinamik sistemalarni o‘rganishda akslantirishlarni o‘zini o‘ziga o‘tkazganda hosil bo‘ladigan ketma-ketliklar trayektoriyasini o‘rganish muhim hisoblanadi.

Yuqoridagi omillarni hisobga olib ba’zi diskret dinamik sistemalar va ularning xossalarini o‘rganishga bag‘ishlangan ushbu bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligini ham aytishi mumkin.

Mavzuning dolzarbligi: Dinamik sistemalar nazariyasi zamonaviy matematikaning muhim sohalaridan hisoblanadi. Dinamik sistemalar fizikada, matematik iqtisodiyot va biologiyada uchraydi. Ayirmali tenglamalar dinamik sistemalarni tavsiflaydi. Bunday tenglamalar ilm – fanning ko‘plab tarmoqlarida hosil bo‘ladi. Amaliyotda dinamik sistema masalalari differensial tenglama yoki ayirmali tenglamalarga keltirib yechiladi. Zamonaviy dinamik sistemalar nazariyasi qisqa tarixga ega. Shunga qaramay, bu sohada juda ko‘p natijalarga erishilgan. Bu sohani Puankare boshlab bergan. U dinamik sistemalarning global xossalari bilan qiziqqan. O‘zbekistonda bu sohadagi ilmiy ishlarni akademiklar A.Sa’dullayev, A.A’zamov, prof. R. G‘anixo‘jayev, O‘. Roziqov va boshqalarning ilmiy faoliyatlarida ko‘rish mumkin.

BMIning maqsadi: Haqiqiy sohadagi ba’zi diskret dinamik sistemalar va ularning xossalarini o‘rganish.

BMIning vazifalari: Tatqiqod maqsadidan kelib chiqqan holda quyidagi vazifalar belgilandi:

- ✓ Matematik analiz, differensial geometriya va topologiya kursidan zarur yordamchi ma’lumotlar;
- ✓ Dinamik sistema ta’rifi;
- ✓ Giperboliklik;
- ✓ Dinamik sistema trayektoriyalari;
- ✓ Simvolik dinamika;
- ✓ Topologik qo‘shmalik;
- ✓ Kvadrat akslantirishlar dinamikasi va ularning xossalarini o‘rganish.

BMIning obyekti: $\mathbb{R}$ da dinamik sistemalar, davriy nuqtalar, giperboliklik, ketma-ketliklar trayektoriyasi

BMIning predmeti: Bir o'lchamli dinamik sistema trayektoriyalari, kvadrat akslantirishlar dinamikasi, .

BMIning strukturaviy tuzilishi: Kirish, uch bob, sakkizta paragraf, xulosa hamda adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan.

Birinchi bob jami 9 ta ta'rif, 3 ta teorema, 2 ta lemma va 2 ta misoldan iborat bo'lib, bu bobda matematik analiz va topologiyadan asosiy tushunchalar, qo'zg'almas nuqtalar va ularga doir misollar o'rganilgan.

Ikkinchi bob 3 ta ta'rif, 1 ta lemma va 5 ta misoldan tashkil topgan bo'lib, ushbu bobda dinamik sistema ta'rif, ba'zi uzluksiz va diskret dinamik sistemalar va giperboliklik o'rganilgan.

Uchinchi bob 9 ta ta'rif, 4 ta teorema, 4 ta lemma va 1 ta misoldan tashkil topgan bo'lib, bu bobda kvadrat akslantirishlar dinamikasi, simvolik dinamika va topologik qo'shmaliklar o'rganilgan.

.

1-BOB.DINAMIK SISTEMALAR NAZARIYASININGASOSIY TUSHUNCHALARI

1.1.Yordamchi ma'lumotlar

Bir o'zgaruvchili va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan ba'zi tushunchalarni keltiramiz.

$\mathbb{R}$ – haqiqiy sonlar to'plamini anglatadi. I va J - $\mathbb{R}$ dagi segmentlar, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ akslantirish bo'lsin.

Bo'sh bo'lmagan $X, Y \subset \mathbb{R}$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.1.1 Agar X to'plamning har bir x elementiga biror f qoida bo'yicha Y to'plamning aniq y elementi mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamning Y to'plamga akslantirilishi berilgan deyiladi.

f qoida bilan X to'plamning Y to'plamga akslantirilishini $f: X \rightarrow Y$ ko'rinishda yozamiz.

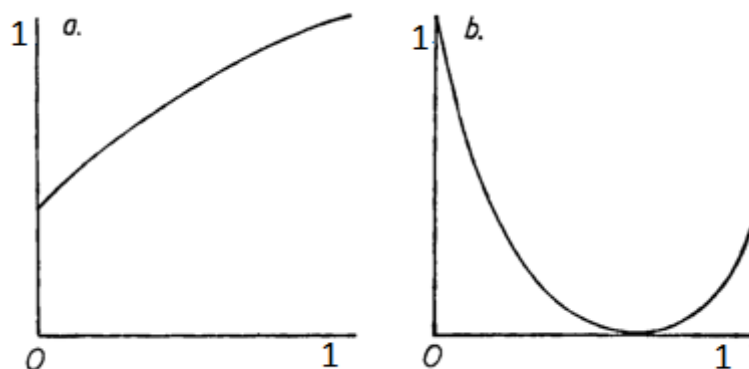
Agar f akslantirishda $x \in X$ elementga $y \in Y$ element mos keltirilsa, uni $y = f(x)$ kabi yoziladi. y ni x elementning f akslantirishdagi *aksi*(obrazi), x ni esa y elementning *asli*(proobrazi) deyiladi. X to'plam barcha elementlarining obrazlari to'plami $\{f(x) | x \in X\}$ ni $f(X)$ ko'rinishda belgilanadi va X to'plamning f akslantirishdagi obrazi deyiladi.

Ta'rif 1.1.2 Agar X to'plamning har qanday ikki x_1, x_2 elementi uchun $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f: X \rightarrow Y$ akslantirish *in'yektiv akslantirish* deyiladi. Boshqacha aytganda, f akslantirish in'yektiv bo'lsa, Y to'plamning har bir elementi bittadan ortiq bo'lmagan aslga egadir.

Ta'rif 1.1.3 $f: X \rightarrow Y$ bo'lsin. Agar f akslantirishdagi obrazlar to'plami Y to'plamdan iborat, ya'ni $f(X) = Y$ bo'lsa, u holda $f: X \rightarrow Y$ akslantirish *sur'yektiv akslantirish* deyiladi. Boshqacha aytganda, f akslantirish sur'yektiv bo'lsa, Y to'plamning har bir elementi kamida bitta aksga egadir.

Agar akslantirish ham sur'yektiv, ham in'yektiv bo'lsa, u holda bunday akslantirishni *biyektiv*(o'zaro bir qiymatli) akslantirish deb ataladi.

Demak, funksiya o'zaro bir qiymatli bo'lsa, uning teskarisi ham mavjud. $f(x)$ funksiyaning teskarisini quyidagicha belgilaymiz: $f^{-1}(x)$.



1.1.1-rasm. a) $f(x)$ - $[0,1]$ kesmada biyektiv akslantirish;

b) $f(x)$ - $[0,1]$ kesmada sur'yektiv akslantirish;

$\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plami, $a \in \mathbb{R}$ biror nuqta va $\varepsilon > 0$ bo'lsin.

$$U_\varepsilon(a) = \{x: x \in \mathbb{R}, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtaning ε atrofi deyiladi.

$M \subset \mathbb{R}$ to'plam berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.1.4 Agar $a(a \in M)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda a nuqta M to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Ta'rif 1.1.5 Agar M to'plamning barcha limit nuqtalari to'plamning o'ziga tegishli bo'lsa, M to'plam *yopiq to'plam* deyiladi.

Ta'rif 1.1.6 Agar $x \in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $U_\varepsilon(x) \subset M$ bo'lsa, x nuqta M to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi.

Agar M to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa, M to'plam *ochiq to'plam* deyiladi.

M to'plamning barcha limitik nuqtalaridan iborat to'plamni M' bilan belgilaymiz. Agar $M = M'$ tenglik o'rinli bo'lsa, M ga *mukkammal to'plam* deyiladi.

Ta'rif 1.1.7 $f: X \rightarrow Y$ bo'lsin. Agar $f(x)$ biyektiv, uzluksiz va $f^{-1}(x)$ ham uzluksiz bo'lsa, f akslantirish *gomeomorfizm* deyiladi.

Masalan, $f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ va $\mathbb{R}$ orasida gomeomorfizm bo'ladi, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ interval $\mathbb{R}$ ga gomeomorf. $\operatorname{tg} x$ funksiya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda uzluksiz, teskarisi $\operatorname{arctg} x$ ham mavjud va uzluksiz.

Ma'lumki, f dan x bo'yicha hosila $f'(x)$, ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ va h.k yuqori tartibli hosilalar $f^{(n)}(x)$ kabi ifodalanadi. f funksiya C^n sinfga tegishli deyiladi, agar $f^{(n)}(x)$ mavjud va u $\forall x \in I$ larda uzluksiz bo'lsa. Agar funksiya C^1 sinfga tegishli bo'lsa, u silliq deyiladi. Biz dinamik sistemalar nazariyasida C^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, sinfga tegishli funksiyalardan foydalanamiz.

Berilgan f va g funksiyalarning kompozitsiyasini quyidagicha kiritamiz (kompozitsiya mavjud bo'lganda):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Xuddi shunday

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ marta}}(x).$$

Agar $f^{-1}(x)$ mavjud bo'lsa, $f^{-n}(x)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$f^{-n}(x) = \underbrace{(f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1})}_{n \text{ marta}}(x)$$

Agar f va g funksiyalar berilgan bo'lsa, u holda bu funksiyalar kompozitsiyasining hosilasi uchun quyidagi formula o'rinli:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Agar $h(x) = f^n(x)$ bo'lsa, u holda uning hosilasi

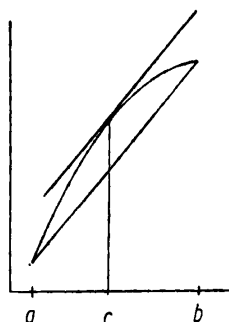
$$h'(x) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot f'(f^{n-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(x)$$

ko'rinishda hisoblanishi mumkin.

Teorema 1.1.1 (Lagranj). $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ funksiya (a, b) intervalda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi(1.1.2-rasm).

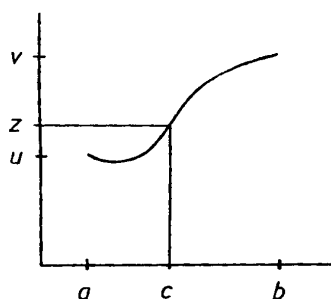


1.1.2-rasm

Teorema 1.1.2 (O'rta qiymat haqida). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uning chetki nuqtalarida $f(a) = u$ va $f(b) = v$ qiymatlarga ega va $u \neq v$ bo'lsa, u va v orasidan har qanday z son olinganda ham a bilan b orasidan shunday c nuqta topiladiki,

$$f(c) = z$$

tenglik o'rinli bo'ladi (1.1.3-rasm).



1.1.3-rasm

Teorema 1.1.3 (Oshkormas funksiya haqida). Aytaylik, $F: R^2 \rightarrow R^1$, $F \in C^1$ hamda

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

bo'lsin. U holda x_0 ning shunday I va y_0 ning shunday J kichik atrofida shunday $p: I \rightarrow J \in C^1$ funksiya topiladiki, $\forall x \in I$ lar uchun

1. $p(x_0) = y_0$,
2. $F(x, p(x)) = 0$

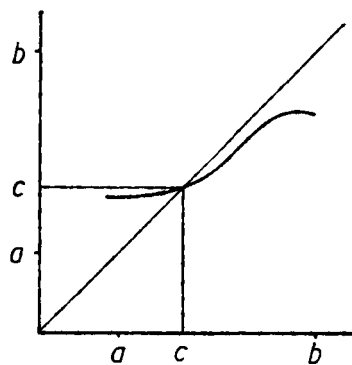
tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

1.2.Qo‘zg‘almas nuqtalar

Ta’rif 1.2.1 Agar biror x nuqta uchun $f(x) = x$ tenglik bajarilsa, x nuqta $f(x)$ funksiyaning *qo‘zg‘almas nuqtasi* deyiladi.

Lemma 1.2.1 Berilgan $f: I \rightarrow I$ funksiya uzluksiz bo‘lsin, u holda f funksiyaning I oraliqda kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtasi mavjud.

Isbot. $f(x) - x = g(x)$ bo‘lsin. Ma’lumki, $g(x)$ I da uzluksiz. Faraz qilaylik, $f(a) > a$, $f(b) < b$ bo‘lsin. Bundan esa $g(a) > 0$, $g(b) < 0$ bo‘ladi. O‘rta qiymat haqidagi teorema ko‘ra shunday $c \in [a, b]$ nuqta mavjud bo‘lib, $g(c) = 0$ bo‘ladi. $g(c) = f(c) - c$. $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$.



1.2.1- rasm

Lemma 1.2.2 $f: I \rightarrow I$ funksiya uzluksiz va $\forall x \in I$ lar uchun $|f'(x)| < 1$ bo‘lsa, u holda f funksiyaning I ga tegishli bo‘lgan yagona qo‘zg‘almas nuqtasi mavjud. Bundan tashqari $\forall x, y \in I$, $x \neq y$ lar uchun

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. Lemma 1.2.1 ga ko‘ra f da kamida bitta qo‘zg‘almas nuqta bor. Faraz qilaylik, x va y ($x \neq y$) qo‘zg‘almas nuqtalar bo‘lsin. Lagranj teoremasiga ko‘ra, x va y nuqtalar orasida shunday c nuqta mavjud bo‘lib,

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1$$

Lekin bu tenglik $\forall c \in I$ lar uchun $|f'(c)| < 1$ tengsizlikka zid. Demak, farazimiz xato. $x = y$ bo‘ladi. Ya’ni f funksiya I da yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega.

Lemmaning ikkinchi qismini isbotlashda yana Lagranj teoremasidan foydalanamiz. $\forall x, y \in I, x \neq y$ lar uchun

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| < |y - x|$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Ta’rif 1.2.2 x nuqta f ning qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘lsin. Agar $f^n(x) = x$ bo‘lsa, x nuqta n davrli davriy nuqta deyiladi.

Misol 1.2.1 $f(x) = x^3$ funksiyaning qo‘zg‘almas nuqtalarini topaylik.

$$x^3 - x = 0 \text{ tenglamaning ildizlarini topamiz.}$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Demak, 0, 1, va -1 nuqtalar $f(x)$ funksiyaning qo‘zg‘almas nuqtalari.

Misol 1.2.2 $f(x) = x^2 - 1$ funksiyaning qo‘zg‘almas nuqtalarini topaylik.

$$x^2 - 1 = x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

Demak, berilgan $f(x)$ funksiyaning qo‘zg‘almas nuqtalari $(1 \pm \sqrt{5})/2$ nuqtalardir.

$Per_n(F)$ bilan F ning barcha qo'zg'almas nuqtalar to'plamini belgilaymiz.

2-BOB.DINAMIK SISTEMALAR

2.1. Dinamik sistema ta'rifi

Birinchidan, dinamik sistema nima degan savolga javob berishimiz lozim. Bu savolga javob juda oddiy: ilmiy kalkulyator olaylik va biror ixtiyoriy raqamni kiritaylik. Keyin qayta-qayta funksiya tugmachalarining birini bosib boshlaylik. Bu iterativ jarayon diskret dinamik sistemaga bir misol. Misol tariqasida ko'rsatkichli funksiyaning olaylik va yuqoridagi kabi tajribani qayta-qayta amalga oshiraylik. $x_0 > 0$ boshlang'ich qiymat berilganda e^x ning keyingi darajalari o'sib boradi.

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$$

Yana boshqa bir misol $\sin x$ funksiyaning qaraylik. Bunda x_0 boshlang'ich qiymat berilganda, bu funksiyaning iteratsiya ketma-ketligi nolga intilib boradi.

Dinamik sistemalar 2 turga bo'lib o'rganiladi: uzluksiz va diskret vaqtli dinamik sistemalar.

X – ixtiyoriy to'plam bo'lsin. Uning har bir elementiga biror tayin elementini qonuniyat asosida mos qo'yuvchi akslantirish dinamik sistema hosil qiladi. Bu akslantirishni f bilan belgilaylik. $f: X \rightarrow X$ akslantirish X ni o'ziga o'tkazadi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, akslantirishlar – matematikaning hamma sohalarida uchraydigan asosiy tushunchalardan. Dinamik sistemalarning asosiy vazifasi bu akslantirishni qayta-qayta qo'llaganda nima sodir bo'lishini o'rganish.

$x \in X$ elementga $f(x)$ mos kelgach, u yana X to'plamning elementi bo'lgani uchun, $f(x)$ ga nima mos keladi degan savolni qo'yish mumkin. Ma'lumki, $f(x)$ ga $f(f(x))$ mos keladi. Qisqalik uchun algebradagi kabi quyidagi ko'rinishda yozishni qabul qilamiz: $f^2(x)$. Xuddi shu jarayonni davom ettirish natijasida

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), \dots$$

ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlik x elementning trayektoriyasi deb ataladi va odatda $O(x)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, trayektoriya bu- X to'plamning biror elementiga akslantirishni ketma-ket qo'llash natijasidir. Agar $x_n = f^n(x)$ desak, u holda $\{x_n\}$ trayektoriya hosil bo'ladigan ketma-ketlikdir. Bu ketma-ketlik

$$x_n = f(x_n), \quad x_0 = x$$

shartni qanoatlantiradi. Bu shartlarning birinchisi dinamik sistema tenglamasi, ikkinchisi esa boshlang'ich shart deb ataladi. Diskret tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uning umumiy yechimi deyiladi.

Endi yuqorida bayon qilinganlarni misollarda ko'rib chiqaylik.

Arifmetik progressiya dinamik sistemalarning eng sodda misoli hisoblandi. Bunda X to'plam sifatida barcha haqiqiy sonlar to'plamini, ratsional sonlar to'plamini, yoki butun sonlar to'plamini, hatto ayrim shartlarda natural sonlar to'plamini ham olish mumkin. Bunda f akslantirish

$$f(x) = x + d$$

formula bilan beriladi. Bunda x_0 kabi progressiya ayirmasi d ham qaralayotgan X to'plamga tegishli bo'lishi lozim. Bu dinamik sistema tenglamasini yozsak,

$$x_{n+1} = x_n + d \quad (2.1.1)$$

ko'rinishda bo'ladi. (2.1.1) tenglamaning barcha yechimlari $x_n = x + nd$ formula bilan beriladi (bunda x - ixtiyoriy son). U maktab matematikasida keltiriladigan arifmetik progressiyaning n - hadi uchun $x_n = x + (n - 1)d$ formuladan biroz farq qilmoqda: keyingi formulada progressiya x_1 haddan boshlanadi, biz esa dinamik sistemani x_0 haddan boshlayapmiz.

(2.1.1) dinamik sistema xossalariga kelsak, $d = 0$ bo'lgan hol qiziq emas, $d \neq 0$ bo'lganda esa shunday tasdiq o'rinlidir.

n ortishi bilan x_n cheksizlikka intiladi.

Ikkinchi misol sifatida geometrik progressiyani qarash mumkin. U mana bunday dinamik sistema degani:

$$f(x) = qx$$

(bu yerda x - boshlang'ich had, q -maxraj). Uning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x_{n+1} = qx_n \quad (2.1.2)$$

Ushbu dinamik sistemani $q \neq \pm 1, q \neq 0$ hollarda qaraymiz.

Boshlang'ich qiymat $x_0 = 0$ bo'lsa, barcha had 0 ga teng. Ya'ni 0 nuqtaga f akslantirishni qo'llasak, u joyidan qo'zg'almaydi. Bunday xossaga ega nuqta dinamik

sistemaning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi. Demak, 0 soni (2.1.2) ning qo'zg'almas nuqtasidir.

Endi $x_0 \neq 0$ boshlang'ich nuqtalarni qaraylik. Agar $|q| > 1$ bo'lsa, nomer o'sishi bilan x_n ning absolyut qiymati ham kattalashib, cheksizlikka intiladi. Bu xossa dinamik sistemalarda 0 qo'zg'almas nuqtaturg'un emas deb ifodalanadi. Bu atama shunday izohlanadi: boshlang'ich nuqta 0 bo'lsa, u joyidan qo'zg'almaydi, agar 0 biroz siljitsa, ya'ni x_0 qiymat qanchalik kichik bo'lmasin 0 dan farq qilsa, x_n ning qiymati uzoqlashib boradi.

$|q| < 1$ bo'lsa, geometrik progressiya cheksiz kamayuvchi deyilishi ma'lum. Sababi aniq: n ortishi bilan x_n ning absolyut qiymati kichiklashib, 0 ga intiladi. Bunday holda 0 turg'un qo'zg'almas nuqta deyiladi.

Ko'rilgan uch hol: arifmetik progressiya, turg'un hamda turg'un bo'lmagan geometrik progressiyalar dinamikasi hisoblanadi.

Ma'lumki, $y = kx + b$ funksiya chiziqli funksiya deb ataladi. Uning grafigi to'g'ri chiziqdan iborat. Bu formula $f(x) = kx + b$ akslantirishni, ayni paytda dinamik sistemani ham aniqlaydi. Uning tenglamasi

$$x_{n+1} = kx_n + b \quad (2.1.3)$$

Bunda $b = 0$ bo'lganda geometrik progressiya, $k = 1$ bo'lganda esa arifmetik progressiya hosil bo'ladi. Shunday qilib, (2.1.3) dinamik sistema bir yo'la ham arifmetik, ham geometrik progressiyani umumlashtirar ekan. Haqiqatan ham, $k \neq 1$ bo'lsa,

$$x_n = \frac{b}{1-k} \quad (2.1.4)$$

o'zgarmas ketma-ketlik (2.1.3) tenglamani qanoatlantiradi. Boshqacha qilib aytganda, (2.1.4) ketma-ketlik (2.1.3) tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi, dinamik sistemalar nazariyasida esa $\frac{b}{1-k}$ nuqta qo'zg'almas nuqtadir.

2.2. Giperboliklik

$f(x) = x$ va $f(x) = -x$ funksiyalardinamik sistemalar nazariyasida turlicha. Bunday akslantirishlarning noodatiy xususiyati shundaki, ularning barcha nuqtalari davriy. Ko'pgina akslantirishlarning bunday xususiyati yo'q. Shu sababli biz giperboliklik tushunchasini kiritamiz.

Bizga haqiqiy sohada aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif 2.2.1 p nuqta n davrli davriy nuqta bo'lsin. Agar $|(f^n)'(p)| \neq 1$ bo'lsa, u holda p giperbolik nuqta deyiladi.

Misol 2.2.1 Quyidagi funksiyaning qaraylik

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x).$$

Ushbu $f(x)$ funksiyaning qo'zg'almas nuqtalarini topaylik.

$$\frac{1}{2}(x^3 + x) = x$$

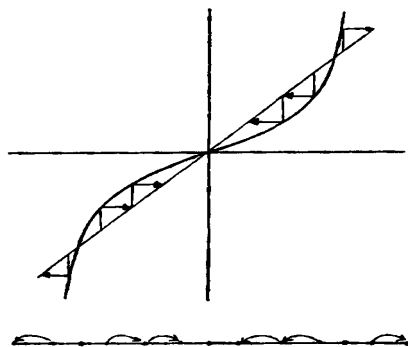
$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Berilgan funksiya 3 ta qo'zg'almas nuqta bor: $0, 1, -1$. Ushbu nuqtalarni giperboliklikka tekshirib ko'raylik.

$f'(0) = \frac{1}{2}$ va $f'(\pm 1) = 2$. Demak, har bir qo'zg'almas nuqta giperbolik.



2.2.1-rasm

Lemma 2.2.1 $f \in C^1$, p giperbolik qo'zg'almas nuqta va $|f'(p)| < 1$ bo'lsin. U holda p ning biror U ochiq atrofidan olingan $x \in U$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$$

tenglik bajariladi.

Isbot. $f \in C^1$ bo'lsin. $\forall \varepsilon > 0$ son mavjud bo'lib, $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ nuqtalar uchun $|f'(x)| < A < 1$ bo'lsin. Lagranj teoremasiga ko'ra,

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon$$

$$|f^n(x) - p| \leq A^n|x - p|$$

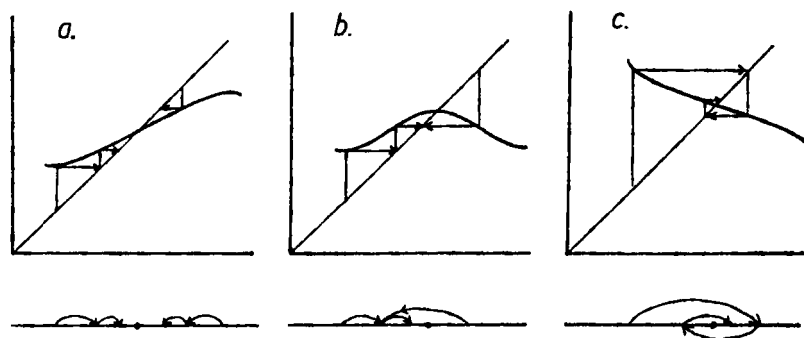
$$f^n(x) \rightarrow p, \quad n \rightarrow \infty \text{ yoki}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$$

Ta'rif 2.2.2 Berilgan p nuqta n davrli giperbolik davriy nuqta bo'lib, $|(f^n)'(p)| < 1$ bo'lsa, p nuqta *tortuvchi davriy nuqta* deyiladi.

Tortuvchi qo'zg'almas nuqtalar 3 oraliqda farqlanadi.

a) $0 < f'(p) < 1$, b) $f'(p) = 0$, c) $-1 < f'(p) < 0$



2.2.2-rasm

Ta'rif 2.2.3 p qo'zg'almas nuqta berilgan va $|f'(p)| > 1$ bo'lsa, p *itaruvchi qo'zg'almas nuqta* deyiladi.

Misol 2.2.2 $F_c(x) = x^2 + c$ kvadrat funksiyalar oilasi berilgan. Bu yerda c — parametr.

$F_c(x) = x$ deylik va qo'zg'almas nuqtalarini topaylik.

$$x^2 + c = x$$

$$x^2 - x + c = 0$$

Ushbu tenglamada D deskriminant c parametrغا bog‘liq. Shuning uchun bu tenglamaning yechimlarini $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ hollarda aniqlashga harakat qilamiz.

1) $D > 0$ bo‘lsa

$$1 - 4c > 0$$

$$c < \frac{1}{4}$$

2) $D = 0$ bo‘lsa

$$1 - 4c = 0$$

$$c = \frac{1}{4}$$

3) $D < 0$ bo‘lsa

$$1 - 4c < 0$$

$$c > \frac{1}{4}$$

F_c ning grafigi c parametrning o‘zgarishiga ko‘ra turli hollarda bo‘ladi, ya’ni

$$c > \frac{1}{4}, \quad c = \frac{1}{4}, \quad c < \frac{1}{4}$$

Endi F_c ni c parametrning qiymatlariga ko‘ra tahlil qilaylik. (2.2.3-rasm)

1) $c > \frac{1}{4}$ bo‘lganda F_c da birorta ham qo‘zg‘almas nuqta yo‘q. Ya’ni $D < 0$ bo‘lganda $c > \frac{1}{4}$ shartga kelamiz. Bu esa tenglama yechimga ega emasligini ko‘rsatadi.

2) $c = \frac{1}{4}$ bo‘lganda yagona giperbolik bo‘lmagan qo‘zg‘almas nuqta mavjud ($D = 0$). Ya’ni

$F_c(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ bo‘lsin. Uning qo‘zg‘almas nuqtasini topaylik.

$$x^2 + \frac{1}{4} = x$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

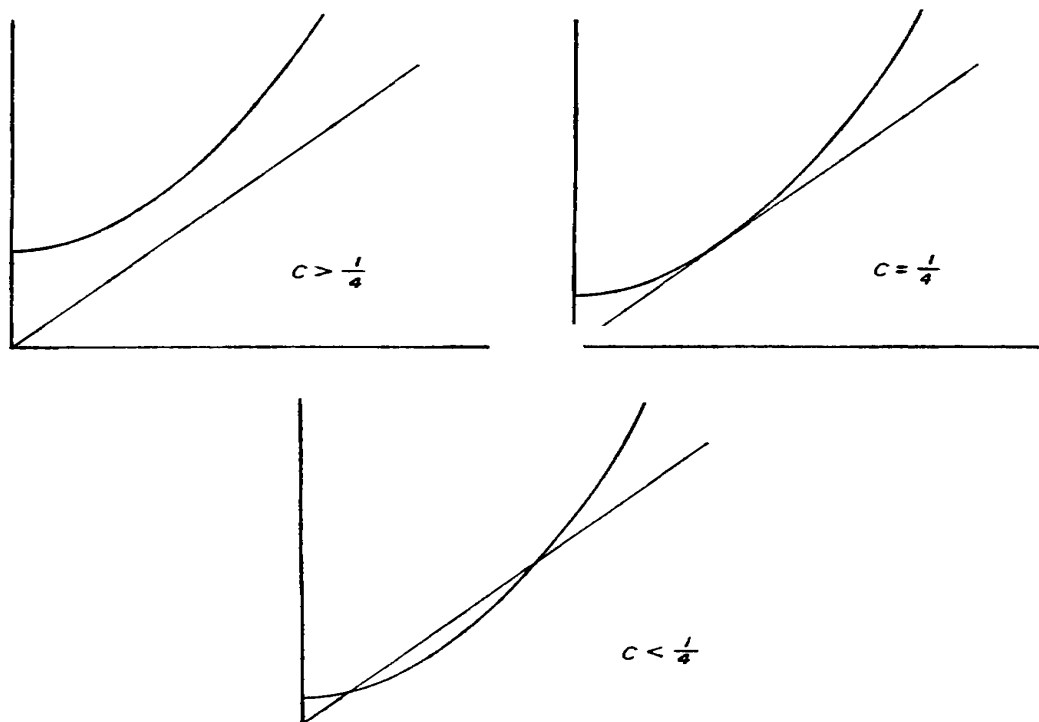
$$x = \frac{1}{2}$$

Demak, $x = \frac{1}{2}$ qo'zg'almas nuqta. Endi bu nuqtani giperboliklikka tekshiraylik:

$$F'_c(x) = 2x \quad F'_c\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Bundan ko'rish mumkinki, $x = \frac{1}{2}$ nuqta giperbolik nuqta emas.

3) $c < \frac{1}{4}$ bo'lsin. F_c da itaruvchi va tortuvchi qo'zg'almas nuqtalar mavjud.



2.2.3-rasm

2.3.Turlarning ko‘payish (kamayish) dinamikasi

Dinamik sistema ilm-fanning ko‘plab tarmoqlarida: fizikada, iqtisodiyot va biologiyada sodir bo‘ladi. Biz quyida oddiy biologik modelni tasvirlashga harakat qilamiz.

Populyatsiya biologlari ma’lum bir turlarni o‘rganishda chatishishi, uzoq muddatli nasl bera olishi bilan qiziqadi. Aniq kuzatilgan yoki empirik belgilangan parametrlarni (yirtqichlarning soni, oziq-ovqat va boshqalar) mavjudligini va biologik ko‘rsatkichlarni bayon qilish uchun matematik modelni olish lozim. Bunday gen bir yilda bir marta o‘lchanadi. Ushbu jarayon sifatida yoki belgisida bir marta yoki doimiy diskret o‘zgartirish qabul qilishiga qarab differensial tenglama yoki ayirmali tenglama ko‘rinishida bo‘lishi mumkin. Har ikkala holda ham populyatsiya biologlari dastlabki gen bilan nima sodir bo‘lishiga qarab, ularni tanlashadi. Vaqt turlarning yo‘q bo‘lib ketishiga olib keladi. Shuningdek, biror gen uzoq vaqt nasl bera olishi ham mumkin.

Bir necha oddiy biologik modellar boshlang‘ich hisob kursida uchraydi. Misol uchun, ko‘rsatkichlar o‘sishi yoki pasayish tenglamasi differensial tenglama hisoblanadi. Ushbu model biz qabul qilish belgilangan vaqtda gen turiga to‘g‘ri proporsional bo‘ladi va tezligi boshqa bir tur o‘zgarishiga bog‘liq. Bu juda soda model bo‘lib, o‘lim darajasi kabi va h.k omillar hisobga olinmaydi. Ayniqsa, oddiy differensial tenglamani yechish talab qilinsa bu model tez hal bo‘ladi.

$P(t)$ - t vaqtdagi populyatsiya bo‘lsin.

Quyidagi

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (2.3.1)$$

tenglamani qaraylik. Ma’lumki, bu uzluksiz dinamik sistemaning matematik ko‘rinishini ifodalaydi.

Bu differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (2.3.2)$$

Bu yerda $P_0 = P(0)$, ya’ni P_0 –boshlang‘ich shartni ifodalovchi kattalik.

(2.3.2) ifodani asimptotik o'rgananimizda uning limitik qiymati k parametrga bevosita bog'liqdir, ya'ni $k \geq 0$ bo'lganda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = +\infty.$$

$k < 0$ bo'lganda esa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$$

bo'ladi.

(2.3.1) differensial tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olaylik.

$$P_{n+1} = kP_n \quad (2.3.3)$$

Boshlang'ich dinamik holat $P_0 = P(0)$. U holda

$$P_1 = kP_0$$

$$P_2 = kP_1 = k \cdot kP_0 = k^2P_0$$

.....

$$P_n = kP_{n-1} = k^n P_0$$

Ushbu holatlarni asimptotik o'rganaylik.

$k > 1$ bo'lganda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty.$$

$0 < k < 1$ bo'lganda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$$

bo'ladi.

Bu ifodalarni

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$$

ifodalar bilan taqqoslab, $x = P_0, f(x) = kx$ uchun olganimizda

$$f(x) = P_1, f(f(x)) = k^2x = P_2, f(f(f(x))) = P_3, \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz.

Xuddi shunday tahlilni quyidagi

$$\frac{dP}{dt} = kP(L - P) \quad (2.3.4)$$

jarayon uchun ko‘rib chiqaylik (uzluksiz dinamik sistema).

$k > 0$ holni qaraylik.

$$1. \text{ agar } P = L \text{ bo'lsa, } \frac{dP}{dt} = 0$$

$$2. \text{ agar } P > L \text{ bo'lsa, } \frac{dP}{dt} < 0$$

$$3. \text{ agar } P < L \text{ bo'lsa, } \frac{dP}{dt} > 0$$

(2.3.4) ning umumiy yechimi

$$P(t) = \frac{LP_0 e^{Lkt}}{L - P_0 + P_0 e^{Lkt}} \quad (2.3.5)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

(2.3.4) ni diskret hol uchun yozadigan bo‘lsak (diskret dinamik sistema),

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n) \quad (2.3.6)$$

Bu funksiyada $x = P_0$ olganimizda

$$f(x) = kx(1 - x)$$

uchun

$$P_1 = f(x)$$

$$P_2 = f(f(x))$$

$$P_3 = f(f(f(x)))$$

deb olishimiz mumkin.

Bir o‘zgaruvchiga bog‘liq ko‘phad quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin.

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots \dots a_0 \quad (2.3.7)$$

$Q(x) = 0$ deylik va x_0 boshlang‘ich nuqta berilganda Nyuton metodi yordamida hisoblashlarni bajarib, quyidagi dinamik sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 - \frac{Q(x_0)}{Q'(x_0)} \\
 x_2 &= x_1 - \frac{Q(x_1)}{Q'(x_1)}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.8}$$

.....

$$x_n = x_{n-1} - \frac{Q(x_{n-1})}{Q'(x_{n-1})}$$

bu yerda $Q'(x_0) \neq 0, \dots Q'(x_{n-1}) \neq 0$.

$$N(x) = x - \frac{Q(x)}{Q'(x)} \tag{2.3.9}$$

kabi ifodalab, $N(x)$ ni x ning funksiyasi sifatida o'rganish qulayroq.

3-BOB.BA'ZI DISKRET DINAMIK SISTEMALARVA ULARNING XOSSALARI

3.1.Bir o'lchamli dinamik sistema trayektoriyalari

Dinamik sistemalar nazariyasidagi asosiy obyektlardan biri bu – trayektoriya hisoblanadi.

Ta'rif 3.1.1 Berilgan dinamik sistemaning $x \in X$ nuqtadan o'tuvchi *trayektoriyasi* deb,

$$O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

to'plamga aytiladi.

$n \rightarrow f^n(x)$ akslantirish trayektoriya bo'yicha harakat tushunchasiga yaqin bo'lgani uchun, ba'zida trayektoriyani to'plam emas, $x, f(x), f^2(x), \dots$ nuqtalar ketma-ketligi deb tushunish qulay.

Ko'pincha u yoki bu trayektoriya yoki biror trayektoriyalar to'plami chekli yoki cheksiz vaqt oralig'ida o'zini qanday tutishini aniqlash talab etiladi. Qaysi atamalarda va qanday shaklda bu yoki bunga o'xshash savollarga javob berish mumkin?

Dinamik sistemalar nazariyasida trayektoriyani asimptotik holati ω – limit to'plamlar yordamida xarakterlanadi.

Ta'rif 3.1.2 $x' \in X$ nuqta $x, f(x), f^2(x), \dots$ trayektoriyaning ω – limit nuqtasi deyiladi, agar ixtiyoriy $n' > 0$ va x' nuqtaning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday $n'' > n'$ topilsaki, uning uchun $f^{n''}(x) \in U$ o'rinli bo'ladi, boshqacha aytganda shunday $n_1 < n_2 < \dots \rightarrow \infty$ ketma-ketlik mavjudki, $i \rightarrow \infty$ da $f^{n_i}(x) \rightarrow x'$ munosabat o'rinli bo'ladi.

x nuqta orqali o'tuvchi trayektoriyaning barcha ω – limitik nuqtalar to'plami $\omega_i(x)$ yoki $\omega(x)$ deb belgilanadi.

Ta'rif 3.1.3 Agar $f^m(x_0) = x_0$ va $0 < n < m$ da $f^n(x_0) \neq x_0$ bo'lsa, u holda $x_0 \in X$ nuqta m davrli *davriy nuqta* deyiladi.

Bu holda $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1, \dots, m - 1$ nuqtalarning har biri m davrli davriy nuqta bo'ladi va $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ nuqtalar davriy trayektoriyani yoki m davrli siklni tashkil etadi.

Davriy trayektoriyalar dinamik sistemalar nazariyasida muhim rol o'ynaydi. Ayniqsa bu bir o'lchamli dinamik sistemalarga taaluqli.

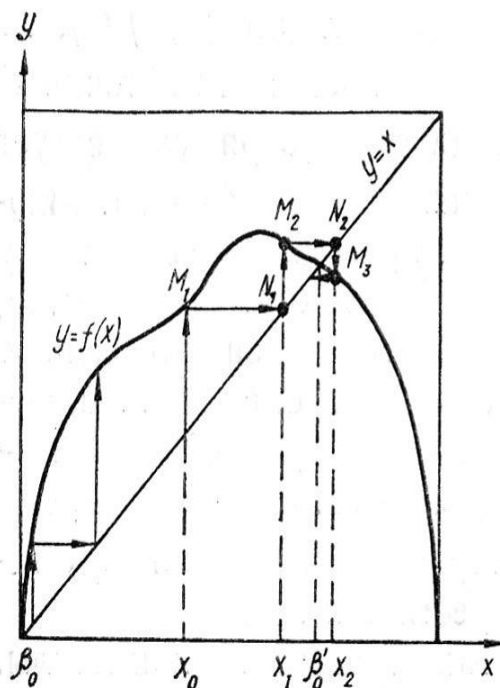
Davriy trayektoriyalar uchun ω – limitik to'plam trayektoriyaning o'zi bilan ustma-ust tushadi. Umuman, agar uning qandaydir trayektoriyasi uchun ω - limitik to'plam sikldan iborat bo'lsa, u holda bu trayektoriya yoki davriy yoki asimptotik davriy bo'ladi, ya'ni davriy trayektoriyaga tortiladi.

Intervalda berilgan dinamik sistemalar nazariyasi uchun trayektoriyalarni grafik tasvirlashning oddiy usuli mavjud. Bunday yasash, masalan qo'zg'almas nuqta yoki sikl atrofida trayektoriyalar holatini tekshirishda foydali bo'lishi mumkin.

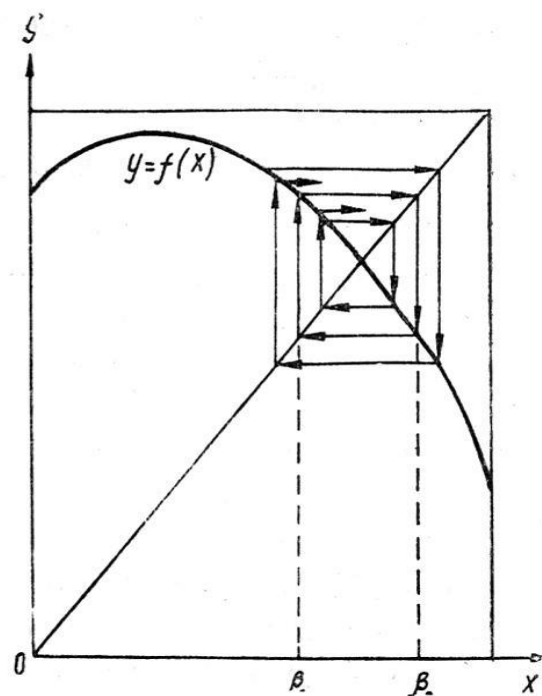
I oraliqda $x \rightarrow f(x)$ akslantirish va $x_0 \in I$ nuqta berilgan bo'lsin. Kyonigs-Lamerey diagrammasi deb ataluvchi, $x_0 \in I$ nuqtaning trayektoriyasini grafigini tasvirlash usuli quyidagilardan iborat. (x, y) tekislikda $y = f(x)$ va $y = x$ funksiyalari grafiklari tasvirlanadi. $x_0 \in I$ nuqtaning trayektoriyasi koordinata o'qlariga parallel bo'lgan $M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3 \dots$, sinik chiziq bilan tasvirlanadi (Rasm 3.1.1). M_1 , N_1 va M_2, N_2 va M_3 va h.k nuqtalar absissalari x_0 nuqtaning ketma-ket iteratsiyalaridan iborat va mos ravishda $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ larga teng. M_1 va N_1, M_2 va N_2, M_3 va N_3 va h.k. nuqtalar koordinatalari ham mos ravishda $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2) \dots$ larga teng. $M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3 \dots$ sinik chiziqni x_0 nuqtadan boshlab ketma-ket yasash mumkin.

f akslantirishning qo'zg'almas nuqtalariga $y = f(x)$ va $y = x$ funksiyalar grafiklari kesishish nuqtalari mos keladi. Rasmda bunday nuqtalar $\beta_0 \beta_0'$ nuqtalar hisoblanadi. Bunda β_0 nuqta itaruvchi, β_0' tortuvchi nuqta, chunki β_0 ga yaqin nuqtalar trayektoriyalari undan uzoqlashadi, β_0 ga yaqinlari aksincha, yaqinlashadi.

$M_{n+1} = M_1$ bo'ladigan $M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3 \dots$ yopiq sinik chiziqqa, n davrli sikl mos keladi. Rasm 3.1.2 dan $n = 2$ davrli yopiq sinik chiziq tasvirlangan. U ikki davrli β_1, β_2 nuqtalarga mos keladi va $f(\beta_1) = \beta_2, f(\beta_2) = \beta_1$ bo'ladi. Bu sikl tortuvchi, chunki sinik chiziqlar ularga mos keluvchi yopiq sinik chiziqlar ularga mos keluvchi yopiq sinik chiziqli siklga yaqinlashadi.



Rasm 3.1.1



Rasm 3.1.2

Grafiklari rasm 3.1.1 va rasm 3.1.2 larda tasvirlangan akslantirishlar uchun har bir trayektoriyaning ω – limit to‘plamini topish mumkin: har qanday trayektoriya yo qo‘zg‘almas nuqta bilan, yoki 2 davrli sikl bilan tortiladi. Agar akslantirish kattaroq davrli siklga ega bo‘lsa, u holda bu siklning atrofida trayektoriyalar holatini tekshirish uchun kalkulyator yoki EHMdan foydalanish mumkin. Lekin ko‘p hollarda na Kyonigsa-Lamerey usuli, na katta kalkilyatorda hisoblash tajribasi bilan trayektoriyalar holatining qandaydir qonuniyatlarini: qo‘zg‘almas nuqtalarga yoki sikllarga yaqinlashishlarini aniqlashga imkon bermaydi. Bundan tashqari boshlang‘ich nuqtalarga yaqin trayektoriyalar holati turlicha bo‘ladi.

3.2.Kvadrat akslantirishlar dinamikasi

Ushbu

$$F_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$$

akslantirish trayektoriyalarini $\mu > 0$ parametrlarning turli qiymatlarida tekshiramiz.

F_μ akslantirishlar oilasi $\mathbb{R}$ da aniqlangan. Bunda $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ va $\mu > 0$ bo'lganda

$$\max_{x \in R} F_\mu(x) = F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}.$$

Natijada, $\mu \in (0,4]$ bo'lganda $I = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ kesma o'z-o'ziga akslanadi. Kyonigs-Lamerey usulidan foydalanib, bu holda $[0,1]$ kesmada yotmagan nuqtalar trayektoriyalari $-\infty$ ga intilishini tekshirib ko'rish mumkin. I dagi nuqtalar trayektoriyasini qaraymiz. Bizni davriy nuqtalar va ular hosil qiladigan sikllar qiziqtiradi.

Misol 3.2.1 $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ va $\mu > 1$ bo'lsin.

$$F_\mu(x) = x$$

$$x = \mu x(1 - x)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$$

Bu funksiyaning qo'zg'almas nuqtalari 0 va $p = \frac{\mu-1}{\mu}$.

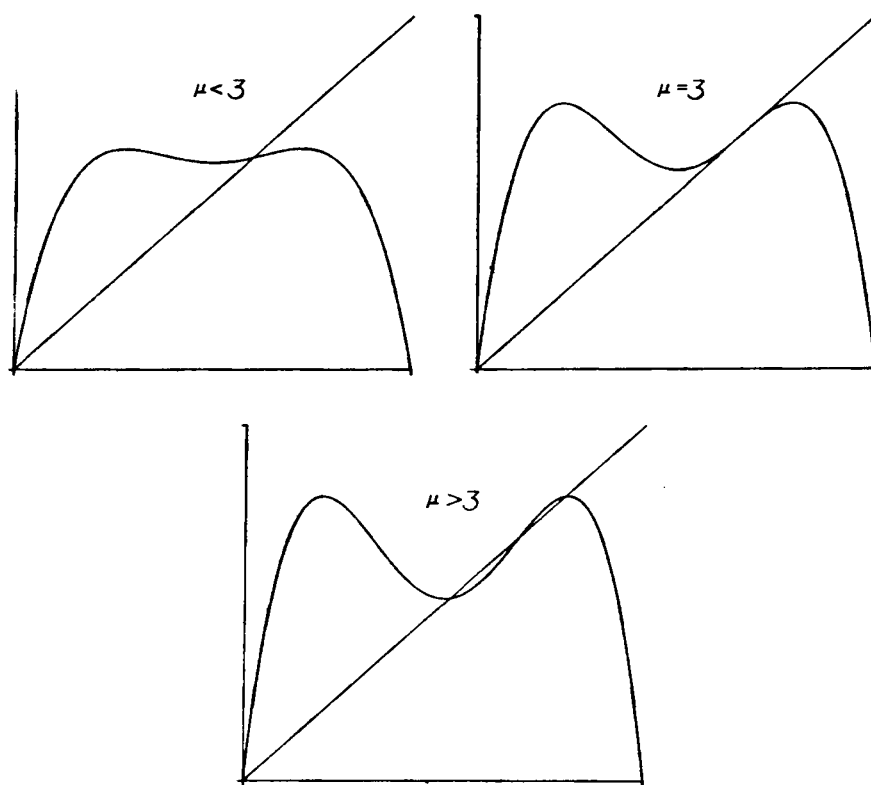
$$F'_\mu(0) = \mu \quad \text{va} \quad F'_\mu(p) = 2 - \mu.$$

Agar $\mu > 1$ bo'lsa, 0 nuqta itaruvchi qo'zg'almas nuqta,

agar $1 < \mu < 3$ da p nuqta tortuvchi qo'zg'almas nuqta,

agar $\mu = 3$ bo'lsa, $F'_\mu(p) = -1$ bo'ladi.

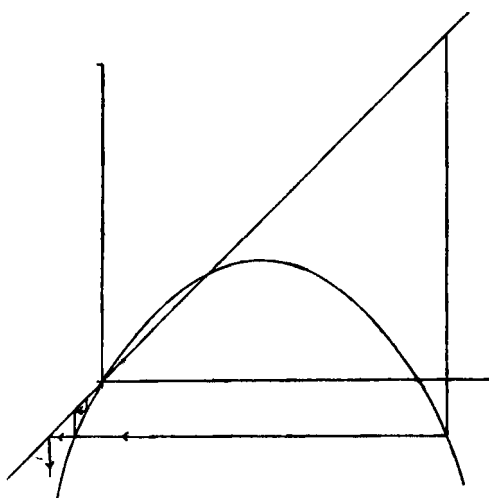
3.2.1-rasmda μ ning $\mu > 3, \mu = 3, \mu < 3$ qiymatlarida $F_\mu^2(x)$ funksiyaning grafigi berilgan. $\mu > 3$ bo'lganda $F_\mu^2(x)$ funksiyaning 2 ta qo'zg'almas nuqtasi bor. Bu nuqtalar $n = 2$ davrning davriy nuqtalari hisoblanadi.



3.2.1-rasm. $F_\mu(x)$ funksiyaning $\mu > 3$, $\mu = 3$, $\mu < 3$ hollardagi grafik tahlili.

Xossalari:

1. $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ va $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$, ($p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$).
2. agar $\mu > 1$ bo'lsa, $0 < p_\mu < 1$.



3.2.2-rasm. $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ funksiyaning

$\mu > 1$ bo'lganda grafik tahlili.

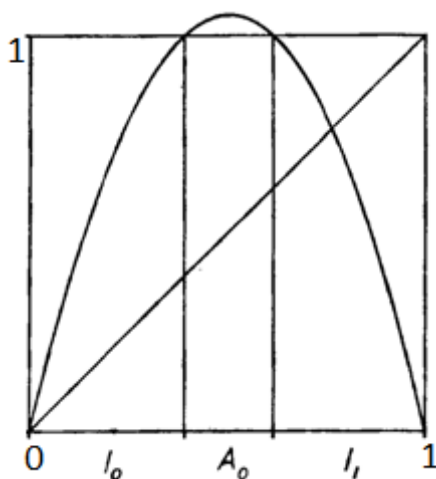
Lemma 3.2.1 $1 < \mu < 3$ bo'lsin.

1. F_μ da $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ –tortuvchi qo'zg'almas nuqta va 0 –itaruvchi qo'zg'almas nuqta bor.

2. agar $0 < x < 1$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$$

$\mu > 4$ bo'lgan holni qaraylik. Bundan keyingi o'rinlarda F_μ ni F bilan belgilaymiz. Aytaylik, $F: I \rightarrow I$ bo'lsin. Ma'lumki, F ning maksimum qiymati $\frac{\mu}{4}$ birdan katta. F ning bir iteratsiyasidan so'ng uning qiymatlarini I dan chiqarib yuboradigan I dagi ochiq intervalni A_0 deb belgilaymiz. (Rasm 3.2.3)



Rasm 3.2.3

Demak, A_0 ochiq interval uchun quyidagi xossa o'rinli:

Agar $x \in A_0$ bo'lsa, u holda $F(x) > 1$, $F^2(x) < 0$ va shu kabi $F^n(x) \rightarrow -\infty$

A_0 to'plamdan boshqa barcha nuqtalarda I kesma F ning iteratsiyadan so'ng o'z-o'ziga akslanadi.

$A_1 = \{x \in I | F(x) \in A_0\}$ bo'lsin. Agar $x \in A_1$ bo'lsa, u holda $F^2(x) > 1$, $F^3(x) < 0$ va $F^n(x) \rightarrow -\infty$. Xuddi shunday davom ettirish natijasida $A_n = \{x \in I | F^n(x) \in A_0\}$ ga kelamiz. Bundan $A_n = \{x \in I | F^i(x) \in I, i \leq n, F^{n+1}(x) \notin I\}$. Agar $x \in A_n$ bo'lsa, u holda $F^n(x) \rightarrow -\infty$.

$$I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

to‘plamni K deb belgilaylik.

$I \setminus A_0$ to‘plam 2 ta segmentdan iborat. (Rasm 3.2.3)

F akslantirish I_0 ni ham I_1 ni ham I ga monoton akslantiradi. $F - I_0$ da o‘syapti, I_1 da kamayayapti. $F(I_0) = I = F(I_1) = I$.

Endi $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ to‘plamni qaraylik. Bu to‘plam 4 ta segmentdan iborat va bu segmentlarning har birini F akslantirish I_0 yoki I_1 ga ustiga monoton akslantiradi. Shunday qilib, F^2 akslantirish ularning har birini I ga ustiga akslantiradi. Yuqoridagilardan quyidagi natijaga kelamiz: A_n 2^n ta kesishmaydigan ochiq intervallardan iborat.

Umuman olganda, K to‘plamni qurish Kantor to‘plamining hosil bo‘lishini eslatadi. K to‘plam yopiq intervallar to‘plamining “o‘rtalari” dan ochiq intervallarni chiqarib tashlashdan hosil qilingan to‘plam.

Ta’rif 3.3.1 Agar to‘plamning ixtiyoriy ikki nuqtasi bilan birgalikda bu nuqtalarni tutashtiruvchi interval ham shu to‘plamda yotsa, u holda bunday to‘plam bog‘lanishli to‘plam deyiladi, aks holda *bog‘lanishsiz to‘plam* deyiladi.

Ta’rif 3.3.2 To‘plam *mukammal to‘plam* deyiladi, agar to‘plamning barcha limit nuqtalaridan iborat to‘plam shu to‘plamning o‘zidan iborat bo‘lsa.

Ta’rif 3.3.3. Agar K to‘plam yopiq, bog‘lanishsiz va I ning mukammal qism to‘plami bo‘lsa, K ga Kantor to‘plami deyiladi.

Ma’lumki, μ ning yetarlicha katta qiymatlarida $\forall x \in I_0 \cup I_1$ uchun $|F'(x)| > 1$ bo‘ladi. Buni $\mu > 2 + \sqrt{5}$ bo‘lganda tekshirib ko‘rish mumkin. Demak, μ ning bunday qiymatlari uchun shunday $\tau > 1$ son mavjudki, $\forall x \in K$ lar uchun $|F'(x)| > \tau$ tengsizlik o‘rinli va $|(F^n)'(x)| > \tau^n$. Biz K ning bog‘lanishsiz bo‘lishini talab qildik. Faraz qilaylik, $x, y \in K, x \neq y$ nuqtalar tanlangan va $[x, y] \subset K$ bo‘lsin. U holda $\forall \beta \in [x, y]$ lar uchun $|(F^n)'(\beta)| > \tau^n$ o‘rinli. Biror n uchun $\tau^n |y - x| > 1$ va Lagranj teoremasiga ko‘ra

$$|F^n(y) - F^n(x)| \geq \tau^n |y - x| > 1.$$

Bu tengsizlik $F^n(y)$ yoki $F^n(x)$ larning kamida bittasi I da yotmasligini ko‘rsatadi. Bu ziddiyat esa K to‘plam bog‘lanishsiz ekanligini bildiradi.

3.3.Simvolik dinamika

Simvolik dinamika deganda

$$s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$$

ketma-ketliklarning turli fazolardagi siljishlari bilan hosil bo'lgan kaskadlar o'rganiladigan dinamik sistemalar umumiy nazariyasining maxsus bo'lishi tushuniladi. Simvolik dinamika usullari hozirgi paytda turli dinamik sistemalarni o'rganishda keng foydalaniladi.

Ta'rif 3.4.1 $S_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) | s_j = 0 \text{ yoki } 1\}$.

S_2 — fazo $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ barcha mumkin bo'lgan ketma-ketliklar fazosi bo'lsin va bu fazoda metrika quyidagicha kiritiladi:

$$\rho[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Lemma 3.4.1 $\rho - S_2$ da metrika bo'ladi.

Isbot. Metrika shartlarini tekshiraylik.

$$1) \rho[s, t] \geq 0 \text{ va } \rho[s, t] = 0 \leftrightarrow s_i = t_i$$

$$2) |s_i - t_i| = |t_i - s_i| \Rightarrow \rho[s, t] = \rho[t, s]$$

$$3) r, s, t \in S_2, |r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$$

$$\rho[r, s] + \rho[s, t] \geq \rho[r, t]$$

Ta'rif 3.4.2 S_2 fazoda

$$\sigma: S_2 \rightarrow S_2$$

siljish ni quyidagicha aniqlaymiz: $\sigma: (s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$.

(S_2, σ) dinamik sistema uchun dinamik sistemalar nazariyasida, odatda, ko'riladigan ko'p misollar, xususan, davriy trayektoriyalarga taaluqli misollar deyarli trivial yechiladi.

Masalan, aytaylik, $s = (000 \dots)$ va $t = (111 \dots)$ bo'lsin. U holda ular orasidagi masofa $\rho[s, t] = 2$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

$r = (1010 \dots)$ bo'lsin. U holda

$$\rho[s, r] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(S_2, σ) dinamik sistema uchun eng kichik k davrli $s_1 \dots s_k s_1 \dots s_k s_1 \dots$ davriy ketma-ketlikka mos keluvchi har qanday s nuqta S_2 fazoda k davrli davriy trayektoriya hosil qiladi (chunki $\sigma^k(s) = s$ va $1 \leq i \leq k$ da $\sigma^i(s) \neq s$). Demak, bu dinamik sistema ixtiyoriy davrli davriy trayektoriyaga ega va bu davriy trayektoriyalar S_2 ning barcha joyida zich bo'ladi. Bu natija $\sigma \in S_2$ va $\forall \varepsilon > 0$ qanday bo'lmasin, agar k shunday bo'lsaki, $\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$ va $\sigma = (s_0 s_1 \dots s_{k-1} s_k \dots)$ bo'lsa, u holda $\sigma = (s_0 s_1 \dots s_{k-1} s_0 s_1 \dots s_{k-1} \dots)$ nuqta σ nuqtaning ε atrofida yotishi va davriy bo'lishidan kelib chiqadi.

Lemma 3.4.2 $s, t \in S_2$ bo'lsin. Faraz qilaylik, $s_i = t_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) bo'lsin. U holda quyidagi

$$\rho[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Aksincha, agar $\rho[s, t] < \frac{1}{2^n}$ bo'lsa, u holda $s_i = t_i$ ($i \leq n$) tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $s_i = t_i$ bo'lsin. U holda

$$\rho[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1/2^n$$

Teskarisini faraz qilaylik, agar $s_j \neq t_j$ ($j \leq n$) bo'lsa,

$$\rho[s, t] \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Demak farazimiz xato. Shunday qilib, agar $\rho[s, t] < \frac{1}{2^n}$ bo'lsa, $s_i = t_i$ bo'ladi.

3.4. Topologik qo'shmalik

Simvolik dinamikaga ko'ra x ning trayektoriyasi 0 va 1 ning cheksiz ketma-ketligidir. Shunga ko'ra, $S(x) - S_2$ ketma-ketliklar fazosidagi nuqta. Bundan ko'rinadiki,

$$S: K \rightarrow S_2$$

Bu akslantirishning bir nechta xossalari bor.

Teorema 3.5.1 agar $\mu > 2 + \sqrt{5}$ bo'lsa, u holda

$$S: K \rightarrow S_2$$

gomeomorfizm bo'ladi.

Bu teorema shuni ko'rsatadiki, K va S_2 to'plamlar o'xshash. S akslantirish K da F_μ ning va S_2 da σ ning dinamikasi o'rtasida ekvivalentlik o'rnatadi.

Ta'rif 3.5.2 $f: A \rightarrow A$ va $g: B \rightarrow B$ akslantirishlar berilgan. Agar $h \circ f = g \circ h$ munosabat o'rinli bo'ladigan $h: A \rightarrow B$ gomeomorfizm mavjud bo'lsa, f va g *topologik qo'shma* deb ataladi. h gomeomorfizm esa *topologik qo'shmalik* deb ataladi.

Akslantirishlarning topologik qo'shmasi ularning dinamikalari borasida birato'la ekvivalent. Masalan, agar f g bilan h ga topologik qo'shma va p nuqta f uchun qo'zg'almas nuqta bo'lsa, u holda $h(p)$ g uchun qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Haqiqatan ham, $h(p) = hf(p) = gh(p)$. Shunga o'xshash $h - Per_n(f)$ va $Per_n(g)$ orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi.

Teorema 3.5.2 $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 2 + \sqrt{5}$ bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinli

1. $Per_n(F_\mu)$ 2^n ga teng.
2. $Per(F_\mu) - K$ da zich.
3. F_μ da K ga tegishli zich orbita bor.

Bu teorema simvolik dinamika va topologik qo'shmalikning imkoniyatini ko'rsatib beradi. Aslida n davrning 2^n ta davriy nuqtalari hisoblab bo'lmaydigan masala. Shunday qilib, bu 2 tushuncha $\sigma: S_2 \rightarrow S_2$ akslantirish kvadratik akslantirish uchun aniq model ekanini ko'rsatadi.

XULOSA

Ushbu bitiruv malakaviy ishi kirish, uch bob, jami to‘qqizta paragraf, xulosa va adabiyotlar ro‘yxatidan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining birinchi bobi “Dinamik sistemalar nazariyasining asosiy tushunchalari” deb nomlangan. Unda akslantirishlar, gomeomorfizm, funksiyalarning kompozitsiyasi, qo‘zg‘almas davriy nuqtalar haqida so‘z yuritilgan. Jumladan, qo‘zg‘almas davriy nuqtalar va ular haqidagi teoremlar o‘rganilib, ularga misollar keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishining ikkinchi bobi “Dinamik sistemalar” deb nomlangan bo‘lib, bu bobda dinamik sistema ta’rifi, uzluksiz va diskret dinamik sistemalar, dinamik sistemalarning giperbolikligi kabi tushunchalar o‘rganilgan. Bu bobning birinchi paragrafida eng sodda dinamik sistemalar, ularning xossalari misollar yordamida o‘rganilgan. Ikkinchi paragrafda giperboliklik ta’rifi va u haqidagi lemmalar o‘rganilgan, misollar keltirilgan. Uchinchi paragrafda esa kvadrat akslantirishlar dinamikasi va ularning xossalari, grafiklari o‘rganilgan. Bundan tashqari ushbu paragrafning oxirida simvolik dinamika va topologik qo‘shmalik haqida ba’zi tushunchalar o‘rganilgan.

ADABIYOTLAR

1. Robert Devaney. An Introduction to Chaotical Dynamical Systems second edition. Boston University 1989.
2. H.Broer, F.Takens. Dynamical Systems and chaos. Netherlands 2009.
3. Azlarov.T.A., Mansurov H. Matematik analiz. 1-qism. T.,1986.
4. Moser, J. Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973
5. Shub, M. Global Stability of Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York, 1987
6. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 1. М.1981.