ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОТИРОВ ҒОЛИБЖОН ИСРОИЛОВИЧ

СПИН ҚИЙМАТЛАРИ ТЎПЛАМИ ЧЕКСИЗ БЎЛГАН ПАНЖАРАЛИ СИСТЕМАЛАР УЧУН ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2020

УДК: 517.98

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОТИРОВ ҒОЛИБЖОН ИСРОИЛОВИЧ

СПИН ҚИЙМАТЛАРИ ТЎПЛАМИ ЧЕКСИЗ БЎЛГАН ПАНЖАРАЛИ СИСТЕМАЛАР УЧУН ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2020

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.3-4.DSc/FM84 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Wolfgang Koenig** Математика фанлари доктори, профессор **Лақаев Саидахмат Норжигитович** физика- математика фанлари доктори, академик **Рахимов Абдугафур Абдумаджидович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Тошкент шаҳридаги Турин политехника университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «___»_____________2020 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz.)

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.)

Диссертация автореферати 2020 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2016 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С.Садуллаев
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор, академик

Н.К.Мамадалиев
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш котиби, PhD

Р.Н.Ғаниходжаев
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда статистик физика ва статистик механика моделларини тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Статистик физикада макроскопик системаларнинг фундаментал қонуниятларини ва тақсимот функцияларини эҳтимоллар назариясига асосланиб топиш ҳамда система ҳолатини характерловчи термодинамик катталикларни ва улар орасидаги муносабатларни топиш муҳим аҳамиятга эга. Термодинамик мувозанат ҳолатида бўлган ихтиёрий системанинг тақсимот функцияси кўриниши биринчи марта америкалик олим Гиббс томонидан аниқланган. Панжарали системаларда спин қийматлари чексиз бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовини қуриш физика, статистик механика, кимё, биология ва информацион технологиялардаги баъзи муаммоларни ҳал этишда муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда спин қийматлари тўплами чексиз бўлган панжарали системалар учун Гиббс ўлчовлари тўпламини аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Спин қийматлари тўплами чексиз бўлган системаларнинг хоссаларини классик усуллар орқали ўрганиш имкониятининг йўқлиги боис, Кэли дарахтида аниқланган спин қийматлари чексиз бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларини топиш масаласи Ҳаммерштейн интеграл тенгламаларининг мусбат ечимларини топишга келтирилади. Бу борада: спин қийматлари саноқли бўлган Ҳамилтонианга мос келувчи асосий ҳолатларни топиш, ҳароратнинг фаза алмашишини таъминловчи критик қийматларини аниқлаш, спин қийматлари саноқли ва саноқсиз бўлган панжарали системаларда Гиббс ўлчовларини аниқлаш ва уларнинг ягона эмаслигини исботлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнининг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган статистик механика ва физиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда спин қийматлари чекли бўлган панжарали системаларда аниқланган классик моделлар учун даврий ва даврий бўлмаган, ҳақиқий ва p-адик трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларини қуриш ҳамда ўлчовлар назарияси орқали амалий муаммоларни ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида панжарали системаларда спин қийматлари чексиз бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовлари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947 Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387 Қарорлари ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2].

Панжарали системаларда Гиббс ўлчовлари назарияси бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Индиана университети (АҚШ), Берлин Вейерштрасс илмий текшириш институти, Берлин техника университети, Бонн университети ва Бохум Рур университети (Германия), Назарий физика халқаро маркази ва Ла Сапиенса Рим университети (Италия), Марсель университети ва Париж университети (Франция), Кембридж университети ва Лидс университети (Буюк Британия), Мельбурн университети (Автралия), Сан-Паулу университети (Бразилия), Малайзия халқаро ислом университети (Малайзия), Цзянси педагогика унверситети ва Пекин педагогика университетида (Хитой) олиб борилмоқда.

Охирги йилларда панжарали системаларда Гиббс ўлчовларини топиш бўйича олинган натижаларни тадқиқ қилишга оид олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган. Жумладан қуйидаги илмий натижалар олинган: Гиббс ўлчовлари ягона бўлмайдиган саноқсиз спин қийматли моделлар қурилган (Берлин Вейерштрасс илмий текшириш институти, Берлин техника университети), ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида ферромагнит Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўлиқ таснифланган (Бохум Рур университети), уч ҳолатли қаттиқ диск моделлари учун Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги исботланган (Кембридж университети, Лидс университети), қаттиқ диск моделлари ҳамда SOS модели учун Гиббс ўлчовларининг ягона эмаслиги исботланган (Марсель университети, Париж университети), Кэли дарахтида ўзаро рақобатлашувчи

---

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий тадқиқотлар шарҳи: Mathematical Physics, Analysis and Geometry https://www.springer.com/journal/11040/, The Annals of Probability http://www.imstat.org/aop/, Positivity https://www.springer.com/journal/11117, Journal of Siberian Federal University: Mathematics and Physics http://journal.sfu-kras.ru/en/series/mathematics_physics ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

таъсирга эга Изинг модели учун парамагнетик, ферромагнетик ва антиферромагнетик фазалар алмашишлари топилган (Мелбурон университети), Изинг модели учун $(k_0)-$трансляцион-инвариант бўлган Гиббс ўлчовлари топилган (Малайзия халқаро ислом университети), Ашкин-Теллер модели учун фаза алмашишлари мавжудлиги исботланган (Цзянси педагогика унверситети, Пекин педагогика университети).

Дунёда бугунги кунда статистик механика ва физиканинг панжарали системаларда аниқланган моделлари учун Гиббс ўлчовларини аниқлаш ва уларни татбиқ этиш бўйича бир қатор изланишлар, жумладан, спин қийматлари сони саноқли бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларининг мавжудлик шартларини топиш; спин қийматлари саноқли бўлган Ҳамилтонианга мос келувчи асосий ҳолатлар ва кучсиз асосий ҳолатларни топиш; ҳароратнинг фаза алмашишини таъминловчи критик қийматларини аниқлаш; интеграл тенгламалардан фойдаланиб спин қийматлари саноқсиз бўлган панжарали системаларда Гиббс ўлчовларини аниқлаш каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Статистик физикада ташқи системалар билан иссиқлик мувозанатида бўлган системанинг микроҳолатлардаги энергия қийматлари Гиббснинг каноник тақсимоти билан тавсифланади. Америкалик олим Дж.У.Гиббс томонидан мувозанат ҳолатининг тақсимот функциясини аниқлашда термодинамик мувозанатдаги ёпиқ система микроҳолатлари тенг эҳтимолларга эга эканлиги исботланган. Р.Л.Добрушин, О.Ленфорд ва Д.Рюэллар томонидан лимит Гиббс ўлчовларининг умумий характеристикаси келтирилган. Лимит Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ҳақидаги теорема Р.Л.Добрушин томонидан исботланган. Панжарали системаларда фаза алмашишларнинг асосий назарияси эса С.А.Пирогов ва Я.Г.Синай ишларида ёритилган. Немис олими Ҳ.Георгининг ишларида Гиббс ўлчовлари ва фаза алмашишлар орасидаги боғлиқликлар батафсил баён этилган.

Спин қийматлари чекли бўлган ҳолларда Кэли дарахтида аниқланган моделлар учун Гиббс ўлчовларини тадқиқ қилиш учун Марков тасодифий майдонларига боғлиқ бўлган рекуррент тенгламалардан фойдаланилади. К.Престон, Ф.Спитцер, П.М.Блехер, Ж.Руиз, В.Загребнов ва Д.Иоффеларнинг ишларида Кэли дарахтида Изинг модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ва асосий ҳолатларнинг структуралари ўрганилган. Изинг модели учун континуумта Гиббс ўлчовлари мавжудлиги П.М.Блехер ва Н.Ғаниходжаевлар томонидан исботланган. М.Фаннес, Б.Начтергаеле ва Р.Вернерлар томонидан Кэли дарахтида VBS моделининг асосий ҳолатлари топилган. Кэли дарахтида аниқланган Поттс, Андерсон, Z(M) ва бошқа моделлар учун асосий ҳолатлар, Гиббс ўлчовлари Ф.Ҳаласан, А.Клейн, Ж.Миллер, Ҳ.Мораал, Н.Ғаниходжаев, Ў.Розиқов, М.Рахматуллаев, Р.Хакимов ва Ф.Мухамедовларининг ишларида ўрганилган. Шунингдек, Н.Ғаниходжаев, Ў.Розиқов ва Ф.Мухаммедовларнинг ишларида Кэли дарахтида етарлича кенг синфдаги Ҳамилтонианлар учун турли Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги контур усуллар (Пирогов-Синай назарияси) ёрдамида кўрсатилган.

Спин қийматлар тўплами континуум бўлган қўшни таъсирли Айзенберг модели М.Лакшманан томонидан ўрганилган. Спин қийматлари саноқли бўлган Поттс модели Н.Ғаниходжаевнинг ишларида ўрганилган. Кэли дарахтида аниқланган саноқли спин қийматга эга Поттс модели учун Гиббс ўлчовлари Н.Ғаниходжаев ва Ў.Розиқовларининг ишларида ўрганилган. Ў.Розиқов, Ю.Эшқобилов ва Ф.Ҳайдаровнинг ишларида континуум спин қийматли, қўшни таъсирли моделлар учун даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги ҳамда камида иккита даврий Гиббс ўлчовларига эга бўлган континуум спин қийматли, қўшни таъсирли моделлар қурилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасаси ва илмий-тадқиқот институтининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Бухоро давлат университетининг Ф-4-07 «Статистик физика моделларининг чизиқли бўлмаган интеграл тенгламалари ва уларнинг татбиқлари» (2012-2016), Ф-4-02 «Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси» (2017-2020), Математика институтининг ЁФ-4-3+ЁФ-4-4 «Саноқли графларда спин системаларнинг эҳтимоллик ўлчовлари ва Ли алгебраларнинг тасвирлари ёрдамида ҳосил қилинувчи Лейбниц алгебралари» (2016-2017) ва ОТ-Ф4-82 «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос» (2017-2020) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади спин қийматлари тўплами чексиз (саноқли ёки саноқсиз) бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларини ўрганиш ва спин қийматлари саноқсиз бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларининг ягона эмаслиги (фаза алмашиш)ни таъминловчи ҳароратнинг критик қийматларини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

спин қийматлари континуум бўлган Ҳамилтонианлар учун Гиббс ўлчовларини топиш;

берилган Ҳамилтониан параметрларига қўйилган маълум шартларда Гиббс ўлчовлари ягона эмаслигини исботлаш;

маълум Гиббс ўлчовлари ёрдамида янги Гиббс ўлчовларининг континуум тўпламини қуриш;

спин қийматлари саноқли бўлган Поттс модели учун асосий ҳолатларни қуриш;

Тадқиқотнинг объекти: Кэли дарахти, панжарали моделлар, асосий ҳолатлар, Гиббс ўлчови, Ҳаммерштейн интеграл оператори.

Тадқиқотнинг предмети: Группалар ва графлар назарияси, алгебра ва сонлар назарияси, Гиббс ўлчовлари назарияси, ночизиқли интеграл тенгламалар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари: Тадқиқот ишида функционал анализ, группалар назарияси, ўлчовлар назарияси ва ночизиқли интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида XY модел учун ҳароратнинг фаза алмашишини таъминловчи критик қиймат аниқланган;

камида иккита даврий Гиббс ўлчовларига эга бўлган континуум спин қийматли, қўшни таъсирли моделлар қурилган;

маълум Гиббс ўлчовлари ёрдамида янги Гиббс ўлчовларининг континуум тўпламлари қурилган;

спин қийматлари саноқли бўлган Поттс модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар топилган;

Тадқиқотнинг амалий натижалари

Кэли дарахтида аниқланган моделлар учун Гиббс ўлчовлари тўпламидан панжарали системаларда фаза алмашишлари мавжудлигини текширишда қўлланилган;

Кэли дарахтида спин қийматлари тўплами чексиз бўлган модделар учун аниқланган трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлаш усулларидан, панжарали системалар ҳолатини характерловчи термодинамик катталиклар ва улар орасидаги асосий муносабатларни топишда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ, Гиббс ўлчовлари назарияси, ночизиқли операторлар назарияси усулларидан ва қўзғалмас нуқталар ҳақидаги теоремалардан фойдаланилган. Олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти Кэли дарахтида спин қийматлари чексиз бўлган статистик механиканинг турли моделлари учун Гиббс ўлчовлари ва асосий ҳолатларни топиш орқали термодинамик хоссаларни ўрганишда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти физик системалар ҳолатининг ўзгариши тадқиқ қилинганлиги ҳамда ҳароратнинг фаза алмашишини таъминловчи критик қийматлари аниқланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Спин қийматлари тўплами чексиз бўлган панжарали системалар учун Гиббс ўлчовлари бўйича олинган натижалар асосида:

Спин қийматлари тўплами саноқсиз бўлган моделлар учун Гиббс ўчловларидан ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 рақамли грант лойиҳасида статистик механиканинг айрим классик моделларининг умумлашмаси бўлган моделлар учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўпламини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 2 ноябрдаги № 89-03-4233-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши ночизиқли интеграл операторлар назариясида учрайдиган айрим ночизиқли интеграл операторлар спектрларини таҳлил қилиш имконини берган;

Спин қийматлар тўплами саноқли бўлган моделларнинг асосий ҳолатлари ва Гиббс ўлчовларидан FRGS-14-116-0357 рақамли хорижий грант лойиҳасида панжарали системаларда спин қийматлари чексиз бўлган моделларнинг фаза алмашишларини топишда фойдаланилган (Малайзия Халқаро Ислом университетининг 2019 йил 16 августдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши физика ва биологияда панжарали системаларнинг термодинамик хоссаларини ўрганиш имконини берган;

Панжарали системаларда спин қийматлари саноқли ва саноқсиз бўлган моделлар учун топилган Гиббс ўлчовлари тўпламидан хорижий илмий журналлардаги мақолаларда (Positivity, 2016; Stochastic Processes and their Applications, 2017; Theoretical and Mathematical Physics, 2017; Украинский математический журнал, 2020) континуум спин қийматли моделларнинг Гиббс ўлчовларини тавсифлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган физик системаларнинг термодинамикасини таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та халқаро ва 9 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 29 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фан доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 14 та мақола, жумладан, 10 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, тўрт боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 155 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган. Шунингдек, бу қисмда диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Панжарада аниқланган Гиббс ўлчовлари ва унинг татбиқлари**» деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни олишда зарур бўлган муҳим тушунчалар, спин қийматлар тўплами саноқли ва саноқсиз бўлган моделлар учун аниқланган Гиббс ўлчовлари ҳамда уларнинг татбиқлари батафсил баён этилган. Шунингдек, ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида XY модели учун ҳароратнинг фаза алмашишини таъминловчи критик қийматлари аниқланган.

Ҳар бир учидан $k+1$ та қирра чиқувчи циклик бўлмаган чексиз графга k-тартибли Кэли дарахти деб аталади ва у $\Im^k = (V, L)$, $k \geq 1$ каби белгиланади. Бу ерда $V-$ учлар тўплами, L эса қирралар тўплами. Агар x ва y учлар $l \in L$ қирранинг учлар бўлса энг яқин қўшнилар дейилади ва $l =< x, y >$ каби белгиланади. Кэли дарахтида $x, y \in V$ учлар орасидаги $d(x, y)$ масофа ушбу формула орқали аниқланади

$$d(x,y) = \min\{d | \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V, < x_0, x_1 >, \ldots, < x_{d-1}, x_d >\}.$$

Фиксирланган $x^0 \in V$ учун қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \qquad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l =< x, y > \in L \mid x, y \in V_n\}$$

ва $S(x) = \{y \in W_{n+1}: d(x, y) = 1\}$, $x \in W_n$ тўплам билан x нинг тўғри авлодлари тўплами дейилади.

G_k билан иккинчи тартибли $k+1$ та циклик группаларнинг эркин кўпайтмасини ва $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ лар билан ушбу группанинг ясовчиларини белгилайлик.

Н.Ғаниходжаев ва Ў.Розиқовнинг илмий ишларида $\Im^k$. Кэли дарахтининг учлари тўплами V ҳамда G_k группанинг элементлари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган ва бу группанинг хоссалари ўрганилган.

Айтайлик,$\Phi \subset \mathbb{R}$ тўплам берилган бўлсин. Кэли дарахтининг $V-$учлари тўпламининг бирор бўш бўлмаган A қисм тўпламида аниқланган $\sigma_A: A \to \Phi$ акслантиришга A тўпламдаги спин қийматлари Φ тўпламдан бўлган *конфигурация* дейилади. Одатда берилган спин қийматлар тўплами маълум бўлгани учун шунчаки, A тўпламдаги конфигурация дейилади. A тўпламда аниқланган барча конфигурациялар тўпламини $\Omega_A = \Phi^A$ билан белгилаймиз.

Шунингдек, σ орқали V тўпламдаги ($x\in V \longmapsto \sigma(x)\in\Phi$) конфигурацияни ва ўз навбатида V тўпламда аниқланган барча конфигурациялар тўпламини $\Omega := \Phi^V$ билан белгилаймиз.

$\Phi = [0,2\pi)$ учун Ω тўпламда қуйидаги Ҳамилтонианни қараймиз:

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y>\in L} \cos\big(\sigma(x)-\sigma(y)\big) - h\sum_{x\in V}\cos\big(\sigma(x)\big). \tag{1}$$

бу ерда $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ихтиёрий $n = 1,2,\ldots$ натурал сон учун, Ω_{V_n} тўпламда қуйидагича аниқланган $\mu^{(n)}$ эҳтимоллик ўлчовини қараймиз:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1}\exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x}\right), \tag{2}$$

бу ерда $\beta = \frac{1}{T}$ ва $T > 0$ температура.

Агар ихтиёрий $n \geq 1$ ва $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ учун ушбу

$$\int_{\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\cup\omega_n)\lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \tag{3}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\mu^{(n)}$ эҳтимоллик ўлчовлари кетма-кетлиги *мувофиқлашган* дейилади. Бу ерда $\lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \prod_{x\in W_n}\lambda(dx)$ ҳамда λ Лебег ўлчови.

Теорема 1. *(2) кўринишдаги $\mu^{(n)}(\sigma_n), n = 1,2,\ldots$ эҳтимоллик ўлчовлари кетма-кетма кетлиги мувофиқлашган бўлиши учун ихтиёрий $x \in V\setminus\{x^0\}$ олинганда ҳам қуйидаги тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли:*

$$f(t,x) = \prod_{y\in S(x)} \frac{\int_0^{2\pi}\exp\big(J\beta\cos(t-u) - h\beta\cos(u)\big)f(u,y)du}{\int_0^{2\pi}\exp\big(J\beta\cos(u) - h\beta\cos(u)\big)f(u,y)du} \tag{4}$$

Бу ерда, $f(t,x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x}), t\in[0,2\pi)$ ва $du = \lambda(du)$ Лебег ўлчови.

Теорема 2. *Айтайлик температура учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин:*

$$T > \frac{2k(|J|+|h|)}{\ln\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2k}}. \tag{5}$$

У ҳолда (1) модел ягона Гиббс ўлчовига эга бўлади.

Диссертациянинг «**Спин қийматлари [0,1] тўпламидан бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовлари**» деб номланувчи иккинчи бобида камида иккита даврий Гиббс ўлчовларига эга бўлган континуум спин қийматли, қўшни таъсирли моделлар қурилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида ихтиёрий тартибли Γ^k Кэли дарахтида аниқланган модел учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ягона эмаслигини аниқловчи критик қийматлар топилган.

$\Phi = [0,1]$ учун Ω_V тўпламда қуйидаги Ҳамилтонианни қараймиз:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \xi_{\sigma(x),\sigma(y)}, \tag{6}$$

бу ерда $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ва $\xi: (u,v) \in [0,1]^2 \to \xi_{u,v} \in \mathbb{R}$ чегараланган, Лебег маъносида ўлчовли функция.

Ихтиёрий $k \in N$ учун $C^{+}[0,1] = \{f \in C[0,1]: f(x) \geq 0\}$ синфда H_k интеграл оператор ушбу кўринишда бўлсин:

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 K(t,u) f^k(u)du, \quad k \in N. \tag{7}$$

H_k операторга k-тартибли Ҳаммерштейн интеграл оператори дейилади. Таъкидлаш жоизки, агар $k \geq 2$ бўлса, у ҳолда k-тартибли Ҳаммерштейн интеграл оператори ночизиқли оператор бўлади.

Ў.Розиқов, Ю.Эшқобилов ва Ф.Ҳайдаровларнинг ишларидан маълумки, (6) модел учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлар тўплами Ҳаммерштейн интеграл операторининг қўзғалмас нуқталари орқали ифодаланади. Яъни, Кэли дарахтида аниқланган (6) модел учун Гиббс ўлчовлари ушбу интеграл тенгламанинг ечимлари орқали ифодаланади:

$$f(t,x) = \prod_{y \in S_k(x)} \frac{\int_0^1 K(t,u) f(u,y)du}{\int_0^1 K(0,u) f(u,y)du}, \tag{8}$$

бу ерда, $K(t,u) = \exp(J\beta\xi_{tu})$, $f(t,x) > 0,\ x \in V, t \in [0,1]$ номаълум функция ва $du = \lambda(du)$ Лебег ўлчови.

Айтайлик, $k \geq 2$ бўлсин. Агар (6) моделдаги $\xi_{\sigma(x)\sigma(y)}$ функция қуйидаги кўринишда бўлса

$$\xi_{t,u} = \xi_{t,u}(\theta,\beta) = \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + \theta \sqrt[2n+1]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)}\right), \qquad t,u \in [0,1] \tag{9}$$

бу ерда $0 \leq \theta < 1$, у ҳолда k-тартибли Ҳаммерштейн операторининг ядроси қуйидагича бўлади:

$$K(t,u) = 1 + \theta \sqrt[2n+1]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)}. \tag{10}$$

Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$|k|_{\text{even}}=\begin{cases} k, & \text{агар } k \text{ жуфт,}\\ k-1, & \text{агар } k \text{ ток}\end{cases} \quad \text{ва} \quad |k|_{\text{odd}}=\begin{cases} k, & \text{агар } k \text{ ток}\\ k-1, & \text{агар } k \text{ жуфт.}\end{cases}$$

$V_k\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\to(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ оператор қуйидагича аниқлансин:

$$V_{k,n}(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0,2,\ldots,|k|_{\text{жуфт}}}\binom{k}{i}\frac{2n+1}{2n+1+i}\cdot 2^{\frac{i}{2n+1}}x^{k-i}(\theta y)^i\\ \displaystyle\sum_{i=1,3,\ldots,|k|_{\text{ток}}}\binom{k}{i}\frac{2n+1}{2n+2+i}\cdot 2^{\frac{i-1}{2n+1}}x^{k-i}(\theta y)^i\end{cases} \tag{11}$$

Тасдиқ 3. *Берилган* $\varphi\in C[0,1]$ *функция* k*-тартибли Ҳаммерштейн интеграл операторининг қўзғалмас нуқтаси бўлиши учун унинг қуйидаги кўринишда бўлиши зарур ва етарли:*

$$\varphi(t)=C_1+C_2\theta\sqrt[2n+1]{4(t-\frac{1}{2})},$$

бу ерда $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ *жуфтлик (11) кўринишдаги* $V_{k,n}$ *операторнинг қўзғалмас нуқталари.*

Теорема 4. *Ихтиёрий* $n\in\mathbb{Z}_+$ *ва* $k\geq 2$ *учун* $\theta_c=\dfrac{2n+3}{k(2n+1)}$ *ўринли бўлса, у ҳолда (8) модел учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:*

(i) $0\leq\theta\leq\theta_c$ *ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови ягона;*

(ii) $\theta_c<\theta<1$ *ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учта.*

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида иккинчи ва учинчи тартибли Кэли дарахтида аниқланган модел учун фаза алмашишлари кўрсатилган. Хусусан, $k=3$ ва $n=1$ бўлганда $V_{3,1}\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\to(x',y')\in\mathbb{R}^2$ оператор ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} x'=x^3+\dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{\theta^2}{\sqrt[3]{2}}xy^2,\\ y'=\dfrac{9}{5}\theta x^2y+\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{\theta^3}{\sqrt[3]{2}}y^3\end{cases} \tag{12}$$

Тасдиқ 5. *а) Агар* $0\leq\theta\leq\dfrac{5}{9}$ *бўлса, у ҳолда 3-тартибли Ҳаммерштйен оператори ягона мусбат қўзғалмас нуқтага эга;*

б) Агар $\dfrac{5}{9}<\theta<1$ *бўлса, у ҳолда 3-тартибли Ҳаммерштйен оператори фақат учта мусбат қўзғалмас нуқтага эга.*

Агар $0 \leq \theta \leq \frac{5}{9}$ бўлса, 5-тасдиққа кўра H_3 оператор ягона $\varphi(t) = \varphi_1(t) \equiv 1$ қўзғалмас нуқтага эга бўлади. Агар $\frac{5}{9} < \theta < 1$ бўлса, у ҳолда ҳолда бу оператор қуйидаги мусбат қўзғалмас нуқталарга эга бўлади:

$$\varphi_1(t) \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = x_1^{+} + y_1^{+}\theta\sqrt[3]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)}, \qquad \varphi_2(t) = x_1^{+} + y_1^{-}\theta\sqrt[3]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)}.$$

Теорема 6. *Учинчи тартибли Кэли дарахтида аниқланган (6) модел учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:*

а) агар $0 \leq \theta \leq \frac{5}{9}$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови ягона;*

б) агар $\frac{5}{9} < \theta < 1$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учта.*

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида аниқланган модел учун фаза алмашишлари кўрсатилган. Яъни, $k \geq 2$, $n = 1$ учун $V_{k,1}: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x', y') \in \mathbb{R}^2$ оператор ушбу кўринишга эга бўлади:

$k \geq 2$ жуфт тартибли Кэли дарахтларида	$k \geq 3$ тоқ тартибли Кэли дарахтларида
$V_k(x,y) = \begin{cases} x' = 3 \sum\limits_{l=0,2,\dots,k} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} A_k(l) \\ y' = 3 \sum\limits_{l=1,3,\dots,k-1} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} B_k(l) \end{cases}$	$V_k(x,y) = \begin{cases} x' = 3 \sum\limits_{l=1,3,\dots,k} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} A_k(l) \\ y' = 3 \sum\limits_{l=0,2,\dots,k-1} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} B_k(l) \end{cases}$

Тасдиқ 7. *а) Агар* $0 \leq \theta \leq \frac{5}{3k}$ *бўлса, у ҳолда* k*-тартибли Ҳаммерштейн интеграл оператори ягона мусбат қўзғалмас нуқтага эга;*

б) Агар $\frac{5}{3k} < \theta < 1$ *бўлса, у ҳолда* k*-тартибли Ҳаммерштейн интеграл оператори фақат учта мусбат қўзғалмас нуқтага эга.*

Агар $0 \leq \theta \leq \frac{5}{3k}$ бўлса, 7-тасдиққа кўра H_k оператор ягона қўзғалмас $\varphi(t) = \varphi_1(t) \equiv 1$ нуқтага эга бўлади. Агар $\frac{5}{3k} < \theta < 1$ бўлса, у ҳолда бу оператор қуйидаги мусбат қўзғалмас нуқталарга эга бўлади:

$$\varphi_1(t) \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = x_0 + y_0\theta\sqrt[3]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)}, \qquad \varphi_2(t) = x_0 - y_0\theta\sqrt[3]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)}.$$

Теорема 8. *k-тартибли Кэли дарахтида аниқланган (6) модел учун қуйидагилар ўринли:*

а) агар $0\le\theta\le\dfrac{5}{3k}$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови ягона;*

б) агар $\dfrac{5}{3k}<\theta<1$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учта.*

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида 2-тартибли Кэли дарахтида аниқланган модел учун фаза алмашишлари кўрсатилган. Яъни, $k=2,\ n\ge1$ бўлганда $V_{2,n}\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\to(x',y')\in\mathbb{R}^2$ оператор ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} x'=x^2+\dfrac{2n+1}{2n+3}\cdot\sqrt[2n+1]{4}\theta^2y^2, \\ y'=2\cdot\dfrac{2n+1}{2n+3}\theta\cdot x\cdot y \end{cases}$$

Тасдиқ 9. *а) Агар* $0\le\theta\le\dfrac{2n+3}{2(2n+1)}$ *бўлса, у ҳолда 2-тартибли Ҳаммерштейн интеграл оператори ягона мусбат қўзғалмас нуқтага эга;*

б) Агар $\dfrac{2n+3}{2(2n+1)}<\theta<1$ *бўлса, у ҳолда 2-тартибли Ҳаммерштейн интеграл оператори фақат учта мусбат қўзғалмас нуқтага эга.*

Агар $0\le\theta\le\dfrac{2n+3}{2(2n+1)}$ ўринли бўлса, у ҳолда 9-тасдиққа кўра H_2 оператор ягона қўзғалмас $\varphi(t)=\varphi_1(t)\equiv1$ нуқтага эга бўлади. Агар $\dfrac{2n+3}{2(2n+1)}<\theta<1$ бўлса, у ҳолда бу оператор қуйидаги мусбат қўзғалмас нуқталарга эга бўлади: $\varphi_1(t)\equiv1$ ва

$$\varphi_2(t)=\frac{2n+3}{2(2n+1)\cdot\theta}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{2(2n+1)\cdot\theta-(2n+3)}{2n+1}}\cdot\sqrt[2n+1]{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right),$$

$$\varphi_3(t)=\frac{2n+3}{2(2n+1)\cdot\theta}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{2(2n+1)\cdot\theta-(2n+3)}{2n+1}}\cdot\sqrt[2n+1]{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right).$$

Теорема 10. *Учинчи тартибли Кэли дарахтида аниқланган (6) модел учун қуйидагилар ўринли:*

а) агар $0\le\theta\le\dfrac{2n+3}{2(2n+1)}$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови ягона;*

b) агар $\frac{2n+3}{2(2n+1)} < \theta < 1$ *ўринли бўлса, у ҳолда трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учта.*

Диссертациянинг «**Спин қийматлари саноқсиз тўпламидан бўлган моделлар учун трансляцион-инвариант бўлмаган Гиббс ўлчовлари**» деб номланувчи учинчи бобида маълум Гиббс ўлчовлари ёрдамида янги Гиббс ўлчовларининг континуум тўпламлари қурилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида зарурий таърифлар берилган ҳамда маълум Гиббс ўлчовларидан ART (H.Akin, U.Rozikov, S.Temir) конструкцияси ёрдамида янги Гиббс ўлчовларининг континуум тўпламлари ҳосил қилинган.

Изинг модели учун k_0 тартибли Кэли дарахтидаги маълум Гиббс ўлчовларидан фойдаланиб $k>k_0$ тартибли Кэли дарахтида янги Гиббс ўлчовларини қуриш конструкцияси дастлаб, Ҳ.Акин, Ў.Розиқов ва С.Темирларнинг илмий ишларида берилган.

Ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида (6) модел учун барча Гиббс ўлчовлари тўпламини $G_k(H)$ билан белгилаймиз.

Теорма 11. *Ихтиёрий* $k_0, k \in \{2,3,...\}$, $k > k_0$ *сонлар берилган бўлсин. Агар* $\left|G_{k_0}(H)\right| \geq 2$ *бўлиб,* $K(t,u)$ *учун*

$$\int_0^1 \left(K(t,u) - K(0,u)\right) du = 0, \quad \forall t \in [0,1], \tag{13}$$

ўринли бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\mu \in G_{k_0}(H)$ *учун* $\nu = \nu(\mu) \in G_k(H)$ *Гиббс ўлчови мавжуд.*

Мисол. Айтайлик, $k=2$ ва (6) моделдаги ξ_{tu} функция ушбу кўринишда бўлсин:

$$\xi_{tu} = \frac{1}{\beta J} \ln\left(1 + \theta \cdot \sqrt[5]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(u - \frac{1}{2}\right)}\right), \quad t,u \in [0,1].$$

У ҳолда Ҳаммерштейн интеграл операторининг ядроси қуйидагича бўлади:

$$K(t,u) = 1 + \theta \cdot \sqrt[5]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(u - \frac{1}{2}\right)}, \quad t,u \in [0,1].$$

Диссертациянинг иккинчи бобида берилган модел учун (13) тенглик ўринли бўлганда камида учта Гиббс ўлчовлари мавжудлиги кўрсатилган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида маълум Гиббс ўлчовларидан фойдаланиб, Блехер-Ғаниходжаев (Bleher-Ganikhodjaev) конструкцияси ёрдамида янги Гиббс ўлчовларининг континуум тўплами ҳосил қилинган.

$\Im^k$ Кэли дарахтини $\Im_0^k$ ва $\Im_1^k$ каби иккита дарахтга ажратиб оламиз. Биз $\Im_0^k$ ярим дарахтни қараймиз ва V^0 билан унинг учлари тўпламини белгилаймиз.

Ушбу кўринишда $h(t,x)=\ln f(t,x)$ белгилаш киритиб (8) тенгликни қуйидагича ифодалаймиз:

$$h(t,x)=\sum_{y\in S_k(x)}\ln\frac{\int_0^1 K(t,u)e^{h(u,y)}du}{\int_0^1 K(0,u)e^{h(u,y)}du} \tag{14}$$

У ҳолда (14) га кўра (8) формула билан аниқланган узлуксиз функция қуйидаги чизиқсиз интеграл оператор орқали ифодаланади:

$$Af(t)=\ln\frac{\int_0^1 K(t,u)e^{f(u)}du}{\int_0^1 K(0,u)e^{f(u)}du}, \tag{15}$$

бу ерда $K(t,u)>0$.

12-ШАРТ. Фараз қилайлик $[0,1]^2$ тўпламда $K(t,u)>0$ узлуксиз бўлиб, шундай $\alpha\equiv\alpha_K\in[0,1)$ мавжуд бўлсинки, қуйидаги тенгсизлик бажарилсин:

$$|Af(t)-Ag(t)|\leq\alpha|f(t)-g(t)|, \quad \forall f,g\in C[0,1], \forall t\in[0,1].$$

13-ШАРТ. Фараз қилайлик, (14) тенгламанинг иккита $h(t,x)\equiv h(t)\in C[0,1]$ ва $h(t,x)\equiv\eta(t)\in C[0,1]$ трансляцион-инвариант ечимлари мавжуд бўлсин.

Изоҳ. Агар 12-ШАРТ бажарилса, у ҳолда 13-ШАРТ фақат $\frac{1}{k}\leq\alpha<1$ бўлгандагина бажарилади.

Биз $h(t)$ ва $\eta(t)$ дан фойдаланиб (15) операторнинг янги саноқсизта ечимларини топамиз.

Айтайлик, $\pi=\{x^0=x_0<x_1<...\}$ чексиз йўл бўлсин (ушбу $x<y$ белгилаш билан y га x орқали борувчи йўлни ифодалаймиз). Бу йўлга мос $h^\pi=\{h^\pi_{t,x}:x\in V^0, t\in[0,1]\}$ сонлар тўпламини аниқлаймиз:

$$h^\pi_{t,x}=\begin{cases} h(t), & \text{if } x\prec x_n,\ x\in W_n, \\ \eta(t), & \text{if } x_n\prec x,\ x\in W_n, \\ h_{t,x_n}, & \text{if } x=x_n, \end{cases} \tag{16}$$

n=1,2,.... бу ерда $x\prec x_n$ (мос равишда $x_n\prec x$) маъноси *x* нуқта π йўлнинг чап (мос равишда ўнг) томонида турганлигини англатади.

Теорема 14. *Агар 12-ШАРТ ва 13-ШАРТлар ўринли бўлса, у ҳолда ихтиёрий чексиз* π *йўл учун (14) ва (16) ни қаноатлантирувчи ягона* $h^\pi=\{h^\pi_{t,x}\}$ *сонлар тўплами мавжуд бўлади.*

Теорема 15. *Агар 12-ШАРТ ва 13-ШАРТлар ўринли бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $r \in [0,1]$ *учун шундай* ν_r *трансляцион-инвариант бўлмаган Гиббс ўлчови мавжуд. Шунингдек,* $r \neq l$ *учун* $\nu_r \neq \nu_l$ *ўринли.*

Учинчи бобнинг учинчи параграфида маълум Гиббс ўлчовларидан фойдаланиб, Захари (Zachary) конструкцияси бўйича янги Гиббс ўлчовларининг континуум тўпламлари қурилган.

16-ШАРТ. Фараз қилайлик, берилган $K(t,u)>0$ учун (15) кўринишдаги оператор тескариланувчи бўлсин.

(14) дан қуйидагига эга бўламиз

$$h^{\min}(t) \leq h(t,x) \leq h^{\max}(t), \quad \forall x \in V, \tag{17}$$

бу ерда

$$h^{\min}(t) = k \ln \frac{\min\limits_{u\in[0,1]} K(t,u)}{\max\limits_{u\in[0,1]} K(0,u)}, \qquad h^{\max}(t) = k \ln \frac{\max\limits_{u\in[0,1]} K(t,u)}{\min\limits_{u\in[0,1]} K(0,u)}.$$

Биз 13-ШАРТ ва 16-ШАРТлар асосида (14) функционал тенгламани қаноатлантурувчи континуумта турли $h^{\xi}_{t,x}$ функцияларни қура оламиз, бу ерда $\xi(t)$ қуйидагича аниқланади

$$h^{\min}(t) < \xi(t) < h^{\max}(t), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{18}$$

Теорема 17. *Айтайлик, 13-ШАРТ ва 16-ШАРТлар ўринли бўлсин. У ҳолда (17) шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий* ξ *учун* μ^{ξ} *Гиббс ўлчови мавжуд. Шунингдек, агар* $\xi \neq \eta$ *бўлса, уларга мос Гиббс ўлчовлари ҳам турли, яъни* $\mu^{\xi} \neq \mu^{\eta}$.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида Кэли дарахтида спин қийматлари саноқли бўлган SOS (Solid on Solid) модели учун градиент Гиббс ўлчовлари топилган.

$\Phi = \mathbb{Z}$ бўлган SOS моделни қараймиз.

SOS моделининг Ҳамилтониани ушбу кўринишда аниқланади:

$$\mathrm{H}(\sigma) = -\mathrm{J} \sum_{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle \in \mathrm{L}} |\sigma(\mathrm{x}) - \sigma(\mathrm{y})|, \tag{19}$$

бу ерда $J \in \mathbb{R}$ ўзгармас сон.

К.Кулске, А.Линей, Ф.Хеннинг ва Ў.Розиқовларнинг ишида бу моделнинг даврий градиент Гиббс ўлчовлари таърифланган ва уларни қуриш масаласи қуйидаги чексизта номаълумли ночизиқли тенгламалар системасини ечишга келтирилган:

$$z_i = \frac{\nu(i)}{\nu(0)} \left(\frac{\theta^{|i|} + \sum\limits_{j\in Z_0} \theta^{|i-j|} z_j}{1 + \sum\limits_{j\in Z_0} \theta^{|j|} z_j} \right)^k, \tag{20}$$

бу ерда $z_i = \exp(h_i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

$u_0 > 0$ учун $u_i = u_0 \sqrt[k]{z_i}$ бўлса, у ҳолда (20) тенгликни қуйидаги

$$u_i = C\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \theta^J u_{i-j}^k + u_i^k + \sum_{j=1}^{+\infty} \theta^J u_{i+j}^k\right), \quad i \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

кўринишда қайта ёзиб оламиз.

Тасдиқ 18. *Ушбу* $\mathbf{u} = (u_i, i \in Z)$, $u_0 = 1$ *вектор (21) нинг ечими бўлиши учун* u_i $(= \sqrt[k]{z_i})$ *вектор*

$$u_i^k = \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - \tau u_i}{u_{-1} + u_1 - \tau}, \; i \in Z, \tag{22}$$

тенгликни қаноатлантириши зарур ва етарли, бу ерда $\tau = \theta^{-1} + \theta$.

Ушбу тасдиқдан қуйидаги тенгликка эга бўламиз

$$1 + l_0 + r_0 = \frac{\theta - \theta^{-1}}{u_{-1} + u_1 - \tau}. \tag{23}$$

(22) тенгламалар системаси қуйидаги иккита ўзаро боғлиқ бўлмаган рекуррент тенгламаларга ажралади:

$$u_{-i-1} = (u_{-1} + u_1 - \tau)u_{-i}^k + \tau u_{-i} - u_{-i+1}, \tag{24}$$

$$u_{i+1} = (u_{-1} + u_1 - \tau)u_i^k + \tau u_i - u_{i-1}, \tag{25}$$

бу ерда $i \geq 1$, $u_0 = 1$ ва u_{-1}, u_1- бирор бошланғич қийматлар.

Шунингдек, агар (25) тенгламанинг ечими u_i бўлса, у ҳолда u_{-i} сони (24) тенгламанинг ечими бўлади. Демак, фақат (25) тенгламани қараш етарли.

(22) тенгламанинг даврий ечимларини қарайлик. Яьни, (22) тенгламанинг ечимлари қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$u_n = \begin{cases} 1, & агар \;\; n = 2m, \\ a, & агар \;\; n = 4m - 1, \; m \in Z, \\ b, & агар \;\; n = 4m + 1, \end{cases} \tag{26}$$

бу ерда a ва b бирор мусбат сонлар. Ушбу ҳолда (25) тенглама қуйидаги тенгламалар системасига тенг кучли бўлади:

$$\begin{aligned} (a + b - \tau)b^k + \tau b - 2 = 0 \\ (a + b - \tau)a^k + \tau a - 2 = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

(27) тенгламалар системасининг мусбат ечимларини топиш орқали қуйидаги теорема исботланди.

Теорема 19. *Айтайлик,* $\mathrm{k} \geq 2$ *ва* $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ *бўлсин. У ҳолда шундай* $\tau_{\mathrm{c}} > 0$ *сони топиладики,* k*-регуляр дарахтда аниқланган* $\tau = 2\cosh(\beta)$ *параметрли SOS-модели (19) учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:*

1. Агар $\tau < \tau_{\mathrm{c}}$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (26) кўринишдаги ечимга мос келувчи ягона 3-даврий градиент Гиббс ўлчови мавжуд;*

2. Агар $\tau = \tau_{\mathrm{c}}$ *тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (26) кўринишдаги ечимга мос келувчи 3-даврий айнан иккита градиент Гиббс ўлчовлари мавжуд;*

3. Агар $\tau > \tau_c$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда айнан учта градиент Гиббс ўлчовлари мавжуд.*

Теорема 20. *Айтайлик,* $\mathrm{k} \geq 2$ *ва* $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ *бўлсин. У ҳолда* k*-регуляр дарахтда аниқланган* $\tau = 2\cosh(\beta)$ *параметрли SOS-модели учун қуйидаги муносабатлар ўринли:*

1. Берилган мусбат b *сони учун* $\tau \leq \frac{2}{\mathrm{b}}$ *бажарилса, у ҳолда (26) кўринишдаги ечимга мос келувчи градиент Гиббс ўлчови мавжуд эмас;*

2. Берилган мусбат b *сони учун* $\tau > \frac{2}{\mathrm{b}}$ *бажарилсаа, у ҳолда (26) кўринишдаги ечимга мос келувчи ягона градиент Гиббс ўлчови мавжуд.*

Диссертациянинг «**Ўзаро таъсирли Поттс модели учун асосий ҳолатлар**» деб номланувчи тўртинчи бобида спин қийматлари саноқли бўлган Поттс модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар топилган.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида зарурий тушунчалар ва панжарали системаларда аниқланган моделлар учун топилган асосий ҳолатлар ҳақида маълумотлар берилган.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида Кэли дарахтида ўзаро таъсирли, спин қийматлари саноқли бўлган Поттс модели учун функционал тенглама топилган.

Ўзаро таъсирли Поттс моделининг Ҳамилтониани қуйидагича аниқланади:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle, \\ x,y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad (28)$$

бу ерда $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$.

Айтайлик, $h: x \longmapsto h_x = \left(h_{0,x}, h_{1,x}, \ldots\right) \in \mathbb{R}^{\infty}$ ҳақиқий қийматли функциялар кетма-кетлиги ва $\nu = \{\nu(i) > 0,\, i \in \Phi\}$ бирор эҳтимоллик ўлчови бўлсин.

Ихтиёрий $n = 1,2,\ldots$ натурал сон учун, Ω_{V_n} да аниқланган $\mu^{(n)}$ эҳтимоллик ўлчовини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\right) \prod_{x \in V_n} \nu(\sigma(x)), \qquad (29)$$

бу ерда $\beta = 1/T$ ва $T -$ температура.

Теорема 21. *(29) кўринишдаги* $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1,2,\ldots$ *эҳтимоллик ўлчовлари кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлиши учун ихтиёрий* $x \in V \setminus \{x^0\}$ *олинганда ҳам қуйидаги*

$$h_{i,x}^{*} = F_i\left(h_y^{*}, h_z^{*}, \beta, J\right), \quad i = 1,2,3,\ldots,. \tag{30}$$

тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли. Бу ерда,

$$h_x^{*} = \left(h_{1,x} - h_{0,x} + \ln\frac{\nu(1)}{\nu(0)},\, h_{2,x} - h_{0,x} + \ln\frac{\nu(2)}{\nu(0)},\ldots \right),$$

$$F_i(h_y^{*}, h_z^{*}, \beta, J) = \ln \frac{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0 \\ p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\left\{\beta J\left(\delta_{ip} + \delta iq\right) + J_1\beta\delta_{pq} + h_{p,y}^{*} + h_{q,z}^{*}\right\}}{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0 \\ p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\left\{\beta J\left(\delta_{ip} + \delta iq\right) + J_1\beta\delta_{pq} + h_{p,y}^{*} + h_{q,z}^{*}\right\}}.$$

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфида ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида ўзаро таъсирли Поттс модели учун асосий ҳолатлари топилган.

Фараз қилайлик M тўплам Кэли дарахтидаги барча бирлик шарлар оиласи бўлсин. Берилган $\sigma \in \Omega_V$ конфигурациянинг $b \in M$ шардаги қисми σ_b *чегараланган конфигурация* деб аталади. $b \in M$ шарда σ_b конфигурациянинг энергияси қуйидагича аниқланади:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{<x,y>, \\ x,y\in b}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in b: \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{31}$$

бу ерда $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 22. *Ихтиёрий* $k \geq 2$ *натурал сон ва* $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$ *сонлар берилган бўлсин. Қуйидагилар ўринли.*

1) σ_b *чегараланган конфигурация учун* $\sigma_b(c_b) = i$ *(бу ерда* c_b *нуқта* b *шарнинг маркази),* $|\{x : \sigma_b(x) = 1\}| = m$, $|\{x : \sigma(x) = 2\}| = n$, $|\{x : \sigma(x) = 3\}| = l$, *ўринли бўлса, у ҳолда* $U(\sigma_b)$ *қуйидаги кўринишда бўлади:*

$$\begin{aligned} U(\sigma_b) \equiv U_{i,k}(m,n,l,r,J_1,J_2) = \frac{1}{2}(\delta_{1i}m + \delta_{2i}n + \delta_{3i}l + \delta_{3i}l)J_1 + \\ + (C_m^2 + C_n^2 + C_l^2 + C_r^2)J_2 \end{aligned} \tag{32}$$

бу ерда $m, n, l, r \in \mathbb{Z}_+$, $m + n + l + r = k + 1$.

2) Ихтиёрий σ_b *чегараланган конфигурация учун қуйидаги ўринли:*

$$U(\sigma_b) \in \{U_{i,k}(m,n,l,r,J_1,J_2) : m,n,l,r \in \mathbb{Z}_+, m + n + l + r = k + 1\}.$$

Ушбу белгилашларни киритамиз:

$$F_p^{(i)} \equiv F_p^{(i)}(\sigma_b) = \{j \in N_k : \sigma_b(c_b) = i, \sigma_b(a_j) = p\},\ p = 1,2,3,4;$$

$$\Omega^{(i)}_{m,n,l} = \{\sigma_b : \sigma_b(c_b) = i, |F_1^{(i)}| = m, |F_2^{(i)}| = n, |F_3^{(i)}| = l\}.$$

$$C^{(i)}_{m,n,l} = \bigcup_{\pi \in S_4} \pi(\Omega^{(i)}_{m,n,l}),$$

бу ерда $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)) \in S_4$ ва

$$\pi(\Omega^{(i)}_{m,n,l}) = \{\pi\sigma : \sigma \in \Omega^{(i)}_{m,n,l}\},\ (\pi\sigma)(x) = \pi(\sigma(x)).$$

Теорема 23. *Ихтиёрий* $C^{(i)}_{m,n,l}$ *синф ва* $\sigma_b \in C^{(i)}_{m,n,l}$ *чегараланган конфигурация учун даври 4 дан катта бўлмаган шундай даврий* φ *конфигурация мавжудки* $b' \in M$ *ва* $\varphi_b = \sigma_b$ *учун* $\varphi_{b'} \in C^{(i)}_{m,n,l}$ *бўлади.*

Таъриф 24. *Агар* σ *конфигурация учун ихтиёрий* $b \in M$ *шар олинганда ҳам*

$$U(\sigma_b) = \min\{U_{i,k}(m,n,l,J_1,J_2) : i = 1,2,3,\ m,n,l \in \mathbb{Z}_+,$$
$$0 \leq m + n + l \leq k + 1, \qquad J_1, J_2 \in \mathbb{R}\}$$

ўринли бўлса, бу конфигурация Ҳамилтонианнинг асосий ҳолати дейилади.

Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$A_{i,k}(m,n,l) = \{(J_1, J_2) : U_{i,k}(m,n,l,J_1,J_2) \leq U_{j,k}(m',n',l',J_1,J_2),$$
$$\text{ихтиёрий}\ m', n', l' \in \mathbb{Z}_+\}, \quad i = 1,2,3,4.$$

$GS(H)$ орқали барча асосий ҳолатлар тўпламини белгилаймиз.

Теорема 25. *(i) Агар* $J_1 = J_2 = 0$ *бўлса, у ҳолда* $GS(H) = \Omega$.

(ii) Агар $(J_1, J_2) \in A_{i,k}(m,n,l)$ *бўлса, у ҳолда* $GS(H) = \{\pi(\sigma^{(i)}_{m,n,l}) : \pi \in S_4\}$ *бўлади. Бу ерда* $\sigma^{(i)}_{m,n,l} \in \Omega$, *яъни* $b \in M, 0 \leq m+n+l \leq k+1, i = 1,2,3,4$ *учун* $(\sigma^{(i)}_{m,n,l})_b \in \Omega^{(i)}_{m,n,l}$ *бўлади.*

Тўртинчи бобнинг тўртинчи параграфида учинчи тартибли Кэли дарахтида спин қийматлари саноқли бўлган ўзаро рақобатлашувчи Поттс модели учун асосий ҳолатлар топилган.

Айтайлик G_k^* индекси $r \geq 1$ бўлган қисм группа бўлсин. $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}$ фактор группани қараймиз.

Таъриф 26. *Агар ихтиёрий* $x \in H_i$ *учун* $\sigma(x) = \sigma_i$ *ўринли бўлса,* $\sigma(x)$ *конфигурацияга* G_k^**-даврий конфигурация дейилади.* G_k*-даврий конфигурация эса трансляцион-инвариант дейилади.*

Таъриф 27. *Агар ихтиёрий* $x \in H_i$ *ва* $x_\downarrow \in H_j$ *(*$x_\downarrow$ *нуқта* x *нуқтадан пастда турган нуқтани ифодалайди) учун* $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ *бўлса,* $\sigma(x)$ *конфигурация* G_k^**-кучсиз даврий дейилади.*

Учинчи тартибли Кэли дарахтида спин қийматлар тўплами саноқли бўлган Поттс моделини қараймиз.

Ихтиёрий σ_b учун $U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, ..., U_{12}\}$ ушбу кўринишда ифодаланади:

$$U_1 = 2J_1 + 6J_2, \qquad U_2 = \frac{3}{2}J_1 + 3J_2, \qquad U_3 = J_1 + 2J_2, \qquad U_4 = \frac{1}{2}J_1 + 3J_2,$$

$$U_5 = 6J_2, \qquad U_6 = \frac{1}{2}J_1, \qquad U_7 = 3J_2, \qquad U_8 = J_2,$$

$$U_9 = J_1 + J_2, \qquad U_{10} = \frac{1}{2}J_1 + J_2, \qquad U_{11} = 2J_2, \qquad U_{12} = 0.$$

Бу белгилашлардан фойдаланиб, Ҳамилтонианнинг асосий ҳолатини қуйидагича таърифлаш мумкин.

Таъриф 28. *Ихтиёрий* $b \in M$ *учун* $U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, ..., U_{12}\}$ *бўлса,* φ *конфигурация Ҳамилтонианнинг асосий ҳолати дейилади.*

Кўриш мумкинки, агар $\sigma_b \in C_i, i = 1, 2, \ldots, 12$ бўлса, у ҳолда $C_i = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_i\}$ ва $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$ ўринли бўлади.

Ихтиёрий $i = 1, 2, ..., 12$ учун ушбу

$$A_i = \{J \in R^2 : U_i = \min\{U_1(J), U_2(J), \ldots, U_{12}(J)\}\}$$

тўпламга эга бўламиз.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз $B = A_1 \cap A_2$, $B_0 = A_1 \cap A_5$, $B_1 = A_2 \cap A_9$, $B_2 = A_9 \cap A_6$, $B_3 = A_6 \cap A_{12}$, $\tilde{A}_1 = A_1 \setminus (B \cup B_0)$, $\tilde{A}_2 = A_2 \setminus (B_0 \cup B_1)$, $\tilde{A}_5 = A_5 \setminus (B_0 \cup B_7)$, $\tilde{A}_6 = A_6 \setminus (B_2 \cup B_3)$, $\tilde{A}_9 = A_9 \setminus (B_1 \cup B_2)$, ва $\tilde{A}_{12} = A_{12} \setminus (B_3 \cup B_7)$. $GS(H)$ барча асосий ҳолатлар, $GS_p(H)$ эса даврий асосий ҳолатлар тўплами.

Теорема 29. *Ихтиёрий* C_i, $i = 1, 2, ..., 12$ *синф ва* $\sigma_b \in C_i$ *чегараланган конфигурация учун, шундай* φ *даврий конфигурация мавжудки (Кэли дарахтида), ихтиёрий* $b' \in M$ *ва* $\varphi_b = \sigma_b$ *учун* $\varphi_{b'} \in C_i$ *ўринли бўлади.*

Теорема 30. A. *Агар* $J = (0,0)$ *бўлса, у ҳолда* $GS(H) = \Omega$.

B. *1. Агар* $J \in \tilde{A}_1$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi^{(i)} : i \in \Phi\}$.

2. Агар $J \in \tilde{A}_2$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi_2^{(lm)} : l, m \in \Phi, \ l \neq m\}$.

3. Агар $J \in \tilde{A}_5$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi_5^{(lm)} : l, m \in \Phi, \ l \neq m\}$.

4. Агар $J \in \tilde{A}_6$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi_6^{(lmnp)} : l, m, n, p \in \Phi, \ l \neq p \neq m \neq n\}$.

5. Агар $J \in \tilde{A}_9$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi_9^{(lm)} : l, m \in \Phi, \ l \neq m\}$.

6. Агар $J \in \tilde{A}_{12}$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi_{12}^{l} : l \in \Phi\}$.

C. 1. Агар $J \in B \setminus (0,0)$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi^{(i)}, \varphi_2^{(lm)} : i, l, m \in \Phi, \ l \neq m\}$.

2. Агар $J \in B_0 \setminus (0,0)$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi^{(i)}, \varphi_5^{(lm)} : i, l, m \in \Phi, \ l \neq m\}$.

3. Агар $J \in B_1 \setminus (0,0)$ *бўлса, у ҳолда* $GS_p(H) = \{\varphi_2^{(lm)}, \varphi_9^{(lm)} : i, l, m \in \Phi, \ l \neq m\}$.

4. Агар $J \in B_2 \setminus (0,0)$ *бўлс, у ҳолда*

$GS_p(H) = \left\{\varphi_6^{(lmnp)}, \varphi_9^{(lm)} : l, m, n, p \in \Phi, \, l \neq m \neq n \neq p\right\}.$

5. Агар $J \in B_3 \setminus (0,0)$ *бўлса, у ҳолда*

$GS_p(H) = \left\{\varphi_6^{(lmnp)}, \varphi_{12}^{(l)} : l, m, n, p \in \Phi, \, l \neq m \neq n \neq p\right\}.$

6. Агар $J \in A_8$ *бўлса, у ҳолда ушбу даврий конфигурациялар* $\varphi_5^{(lm)}$, $\xi_7^{(lmn)}$, $\psi_7^{(lmn)}$, $\varphi_8^{(lmnp)}$, φ_{12}^{l} *даврий асосий ҳолатлар ва* $\xi_7^{(lmn)}$ *кучсиз даврий конфигурация эса кучсиз даврий асосий ҳолат бўлади, бу ерда* $l, m, n, p \in \Phi, \, l \neq m \neq n \neq p$.

ХУЛОСА

Диссертация иши спин қийматлари тўплами чексиз бўлган панжарали системалар учун Гиббс ўлчовларини тадқиқ этишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида XY модел учун ҳароратнинг фаза алмашишни таъминловчи критик қиймати аниқланган;

2. Ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида аниқланган спин қийматлари тўплами саноқсиз бўлган бир модел учун шундай критик ҳарорат топилганки ундан паст ҳароратларда аниқ учта трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари борлиги исботланган. Иккинчи ва учинчи тартибли Кэли дарахтида бу модел учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига мос келувчи ечимларнинг кўриниши топилган.

3. Камида иккита даврий Гиббс ўлчовларига эга бўлган континуум спин қийматли, қўшни таъсирли моделлар синфи қурилган.

4. Спин қийматлари саноқсиз тўплам бўлган моделлар учун ART (Akin, Rozikov, Temir), Блехер-Ғаниходжаев, Захари (Zachary) конструкциялари бўйича янги Гиббс ўлчовларининг континуум тўпламлари қурилган.

5. Кэли дарахтида саноқли спин қийматли SOS (Solid on Solid) модели учун градиент Гиббс ўлчовлари топилган.

6. Кэли дарахтида рақобатлашувчи ўзаро таъсирли, спин қийматлари саноқли бўлган Поттс модели учун Гиббс ўлчовларини ифодаловчи функционал тенгламалар системаси топилган. Шунингдек, бу модел учун кучсиз асосий ҳолатлар (конфигурациялар) қурилган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

INSTITUTE OF MATHEMATICS

BOTIROV GOLIBJON ISROILOVICH

GIBBS MEASURES FOR LATTICE SYSTEMS WITH INFINITE SET OF SPIN VALUES

01.01.01-Mathematical analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF SCIENCE (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT-2020

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.3-4.DSc/FM84

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, english, russian (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific consultant:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academician
Official opponents:	**Wolfgang Koenig** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Lakaev Saidahmad Norjigitovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academician
	Rakhimov Abdugofir Abdumadjidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	**Turin Polytechnic University in Tashkent**

Defense will take place «____» _____________2020 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 227-12-24, fax: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2020 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.Mamadaliev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, PhD.

R.N.Gankhodjaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

Actuality and demand of the theme of dissertation. In the world, many scientific and applied research are reduced to the study of models of statistical physics and statistical mechanics. In statistical physics, it is important to find the fundamental laws and distribution functions of macroscopic systems based on the probability theory, to find the thermodynamic quantities that characterize the state of the system and the relationships between them. The appearance of the distribution function of an arbitrary system in a state of thermodynamic equilibrium was first determined by the American scientist Gibbs. For the models which have infinitely many spin values in lattice systems the constructing the Gibbs measures remains one of the important tasks of physics, statistical mechanics, chemistry, biology, and information technology.

Nowadays in the world, it is important to define the set of all Gibbs measures for lattice systems in which the set of spin values is infinite. The non-uniqueness of the Gibbs measures related to a phase transition in the physical systems. Since the properties of systems with an infinite set of spin values cannot be studied by classical methods, to study Gibbs measures for such systems on Cayley trees one reduces the problem to finding positive solutions of Hammerstein integral equations. In this regard, the main problems are: to drive the basic integral equation corresponding to a Hamiltonian with infinite set of spin values, to determine the critical values of temperature that allow phase transitions and to determine the set of Gibbs measures.

In our country, much attention has been paid to develop important directions of statistical mechanics and physics which have applications to the applied and fundamental sciences. In particular, significant results have been achieved in constructing periodic and non-periodic, real and *p*-adic Gibbs measures for classical models defined in lattice systems with a finite set of spin values, and in solving practical problems through measure theory. Investigations on the international level in such important areas as the functional analysis, mathematical physics, theory of probability and theory of dynamical systems considered as the main task of fundamental research[1]. In order to ensure the implementation of the decision, it is important to develop Gibbs measure theory for the models with infinitely many spin values in lattice systems in order to use scientific results in related fields of sciences.

---

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947 , “On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan”, PQ-4387 dated July 9, 2019 “On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan”, PQ-4708 of May 7, 2020 “On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics” as well as in other regulations related to basic sciences.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, “Mathematics, Mechanics and Computer Science”.

Review of foreign research on the topic of the dissertation.[2] Research on the theory of Gibbs measures of lattice systems has led research centers and universities in leading foreign countries, including Indiana University (USA), Weierstrass Research Institute in Berlin, Technical University of Berlin, University of Bonn and Bochum Ruhr University (Germany), International Center for Theoretical Physics and La Sapienza University of Rome (Italy), University of Marseille and University of Paris (France), University of Cambridge and University of Leeds (UK), University of Melbourne (Australia), University of São Paulo (Brazil), International Islamic University of Malaysia (Malaysia), Jiangxi Pedagogical University and Peking Pedagogical University (China).

The results of the scientific research of finding Gibbs measures of lattice systems has solved a number of current problems, including the following scientific results: Numerous models with non-unique Gibbs measures have been constructed (Berlin Weierstrass Research Institute, Berlin Technical University (Germany)), fully classified translational-invariant Gibbs measures for the ferromagnetic Potts model on the Cayley tree of arbitrary order (University of Bochum Ruhr (Germany)), it is proved the existence of Gibbs measures for several HC models (University of Cambridge, University of Leeds (UK)), it is proved that the Gibbs measures are not unique for the SOS model (University of Marseille and University of Paris-Est (France)), paramagnetic, ferromagnetic and antiferromagnetic phase transitions were found for the competing Ising model in on a Cayley tree (University of Melbourne

---

[2] Mathematical Physics, Analysis and Geometry https://www.springer.com/journal/11040/, The Annals of Probability http://www.imstat.org/aop/, Positivity https://www.springer.com/journal/11117, Journal of Siberian Federal University: Mathematics and Physics http://journal.sfu-kras.ru/en/series/mathematics_physics and others.

(Australia)), Translation-invariant Gibbs measures are found for the Ising model (International Islamic University of Malaysia (Malaysia)), and phase transitions were proven for the Ashkin-Teller model (Jiangxi Pedagogical University, Beijing Pedagogical University (China)).

Today there are a number of studies on the definition and application of Gibbs measures for models of statistical mechanics and physics defined in grid systems, including: finding the conditions for the existence of Gibbs measures for models with a countable spin values; research is being conducted in priority areas such as finding ground states and weakly periodic ground states corresponding to a Hamiltonian with a finite set of spin values, determining critical values of temperature that allow phase transations, determining Gibbs measures in lattice systems with an infinite set of spin values using integral equations.

The degree of scrutiny of the problem. In statistical physics, the energy values in the microstates of a system in thermal contact with external systems are characterized by the Gibbs canonical distribution. In determining the distribution function of the equilibrium state, the American scientist Dj.U.Gibbs proved that the closed states of a thermodynamic equilibrium state have equal probabilities. General characterization of limiting Gibbs measures was given by R.L. Dobrushin, O. Lanford and D. Ruelle. By R.L. Dobrushin the existence conditions of the limit Gibbs measure were found. The basic theory of phase transitions in lattice systems was described in the works of S.A. Pirogov and Y.G. Sinay. In the work of H.Georgii, the relationships between Gibbs measures and phase transitions are described in detail.

Recurrent equations related to Markov random fields are used to investigate Gibbs measures for models defined on the Cayley tree when the set of spin values is finite. In the work of K. Preston, F. Spitzer, P. M. Blexer, J. Ruiz, V. Zagrebnov, and D. Ioffe, translational-invariant Gibbs measures and groud states for the Ising model on the Cayley tree were studied. The existence of a continuum set of Gibbs measures for Ising model was proved by P.M.Blexer and N.N.Ganikhodjaev. By M. Fannes, B. Nachtergaele, and R. Werner the ground states of the VBS model on the Cayley tree were found. Gibbs measures for Potts, Anderson, Z(M) and other models on the Cayley tree were studied by F.Halasan, A.Klein, J.Miller, H.Moraal, N.Ganihodjaev, U.Rozikov, M.Rakhmatullaev and R.Khakimov and F. Mukhamedov. Also, in the works of N.Ganikhodjaev, U.Rozikov and F. Mukhamedov, the sets of many Gibbs measures for Hamiltonians of a sufficiently wide class were found by using contour methods (Pirogov-Sinai theory).

The continuous set of spin values was studied by M. Lakshmanan, as a interaction neighboring Heisenberg model. The Potts model with countable set of spin values on lattice is studied in the works of N. Ganikhodjaev and U.Rozikov. In the works of U.Rozikov, Yu.Eshkobilov and F.Haydarov models with continuous spin values are constructed, the existence of periodic Gibbs measures for these models is proved.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education and research institute, where the dissertation is carried out. The dissertation work is done in accordance with the planned theme of scientific research Bukhara State University F-4-07 “Nonlinear integral equations of models of statistical physics and their applications” (2012-2016), F-4-02 “Thermodynamics of models of mathematical physics with infinite set of spins” (2017-2020) Institute of Mathematics YoF-4-3 + YoF-4-4 “Leibniz algebras, probability measures of spin systems and Lie algebras on graphs” (2016-2017) and OT-F4-82 – “Local differentiation in operator and non-associative algebras and automorphisms, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems” (2017-2020).

The aim of research work was to study the Gibbs measures for models with infinite (countable or uncountable) set of spin values and to determine the critical values of the temperature that provide the non-uniqueness (phase transations) of Gibbs measures for models with infinite set of spin values.

Research problems:

finding the Gibbs measures for Hamiltonians whose spin values are continuum;

prove that the Gibbs measures are not unique under certain conditions to the given Hamiltonian parameters;

using known Gibbs measures construct a continuum set of new Gibbs measures;

construct ground states for the Potts model with infinite set of spin values;

The research object: Cayley tree, lattice models, ground states, Gibbs maesures, Hammerstein integral operator.

The research subject: Theory of groups and graphs, Algebra and number theory, Gibbs measures theory, Theory of nonlinear integral equations.

Research methods: The research used the methods of functional analysis, group theory, measures theory and nonlinear integral equations theory.

The scientific novelty of the research is as follows:

The critical values of temperature that provide the phase transitions for the XY model on Cayley tree were determined;

Constructed several models of competing interactions with a continuum set of spin values which have at least two periodic Gibbs measures;

constructed continuum sets of new Gibbs measures using known Gibbs measures;

weakly periodic ground states were found for the Potts model with countable sets of spin values.

Practical results of the research The Gibbs measures for the models on Cayley tree can be used to investigate the existence of phase transitions on lattice systems;

The methods of describing a set of translational-invariant Gibbs measures defined for models whose set of spin values is infinite have been used to obtain thermodynamic quantities characterizing the state of lattice systems and the basic relationships between them.

The reliability of the results of the study. Our results have been obtained by using the methods of functional analysis, Gibbs measure theory, methods of nonlinear operator theory, and theorems on fixed points. The obtained results are mathematically strongly proved.

Scientific and practical significance of research results. The scientific importance of the results of the research work is explained by the fact that various models of statistical mechanics with infinite set of spin values on the Cayley tree can be used in the study of thermodynamic properties by finding Gibbs measures and ground states.

The practical significance of the results of the studying are explained by the fact that changes in the state of physical systems have been studied and the critical values of temperature that provide phase transitions have been identified.

Implementation of the research results. In according to obtained results on Gibbs measures for lattice systems with infinite set of spin values:

Gibbs measures for models with uncountable set of spin values were used to investigate a set of translational-invariant Gibbs measures for models with generalization of some classical models of statistical mechanics in the research project YOT-FTEX-2018-154 (№ 89-03-4233 Reference Ministry of the higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan on 02.11.2019). The application of the scientific results made it possible to analyze the spectra of some nonlinear integral operators encountered in the theory of nonlinear integral operators;

The ground states and the Gibbs measures for the models with countable spin values were used to find phase transitions for models with uncountable spin values on lattice systems in the foreign research project FRGS-14-116-0357 (August 16, 2019 reference from the International Islamic University of Malaysia). The application of the scientific results made it possible to study the thermodynamic properties of lattice systems in physics and biology;

The set of Gibbs measures for models with countable and uncountable spin values in lattice systems are used to describe the Gibbs measures of models with continuum spin value in papers of foreign scientific journals (Positivity, 2016; Stochastic Processes and their Applications, 2017; Theoretical and Mathematical Physics, 2017; Ukraine Mathematical Journal, 2020). The application of the scientific results made it possible to analysis considering thermodynamics of physics systems.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed in 9 international and 5 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 29 research papers have been published in the scientific journals, 14 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the DSc thesis, in addition 10 of them were published in international journals of mathematics and physics and one paper published in national mathematical journal.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 155 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction besides the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic, we present a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we reduce the theoretical and practical importance of the obtained results, and give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the thesis, titled **"Gibbs measures on trees and their applications"** we gave main definitions of Cayley tree, Gibbs measure and known Gibbs measures of models with uncountable/countable spin values. Moreover, we gave some information about applications of Cayley tree in chemistry and physics. As well as we obtain the uniqueness condition for Gibbs measure of the XY model on Cayley tree. An infinite system of functional equations is obtained that guarantees that the consistency for the Gibbs measures on finite sets. In addition, a sufficient condition for the uniqueness of the Gibbs measure for this model is found.

The Cayley tree $\Im^k$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, with exactly *k+1* edges issuing from each vertex. We suppose that $\Im^k = (V, L)$, where V is the set of vertices of $\Im^k$, L is the set of its edges. Two vertices *x* and *y* are called nearest neighbors if there exists an edge $l \in L$ connecting them. We will use the notation $l =< x, y >$. A collection of nearest neighbor pairs $< x, x_1 >, < x_2, x_3 >, \ldots, < x_{d-1}, y >$ is called a path from *x* to *y*. The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree is number of edges of the shortest path from *x* to *y*.

For a fixed $x^0 \in V$, called the root, we set

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \qquad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l =< x, y > \in L \mid x, y \in V_n\}$$

and denote

$$S(x) = \{y \in W_{n+1}: d(x, y) = 1\}, \qquad x \in W_n,$$

The set of direct successors of *x*.

From works of N.Ganikhodjaev and U.Rozikov it is known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of free products of *k+1* cyclic groups of order two with the generators $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$.

Let $\Phi \subset \mathbb{R}$ be a nonempty set. A mapping $\sigma_A: A \to \Phi$ defined on nonempty subset A of the sets of all vertices of Cayley tree, is called *configuration* on A. Usually, Φ is called a *set of spin values*. We denote $\Omega_A \coloneqq \Phi^A$, i.e. Ω_A is the set of all configurations on A. By the same way we can define a configuration σ on V and we denote $\Omega \coloneqq \Phi^V$

For $\Phi = [0,2\pi)$ we consider XY model over Ω_V. The (formal) Hamiltonian of XY-model is

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y>\in L} \cos(\sigma(x) - \sigma(y)) - h \sum_{x\in V} \cos(\sigma(x)). \tag{1}$$

where $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Given $n = 1,2,\ldots$ we consider the probability distribution $\mu^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x} \right), \tag{2}$$

where $\beta = \frac{1}{T}$ and $T > 0$ is temperature.

The sequence of probability distributions $\mu^{(n)}$ are compatible if for any $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\int_{\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \cup \omega_n) \lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{3}$$

Here $\lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \prod_{x\in W_n} \lambda(dx)$, λ is the Lebesgue measure.

Theorem 1. *A sequence probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1,2,\ldots$ given by (2) are compatible iff for any $x \in V \setminus \{x^0\}$ the following equation holds:*

$$f(t,x) = \prod_{y\in S(x)} \frac{\int_0^{2\pi} \exp(J\beta\cos(t-u) - h\beta\cos(u)) f(u,y)du}{\int_0^{2\pi} \exp(J\beta\cos(u) - h\beta\cos(u)) f(u,y)du} \tag{4}$$

Here $f(t,x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x}), t \in [0,2\pi)$ and $du = \lambda(du)$ is the Lebesgue measure.

Theorem 2. *Let for the temperature the following inequality holds:*

$$T > \frac{2k(|J| + |h|)}{\ln \frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2k}} \tag{5}$$

Then the model (1) has a unique Gibbs measure.

In the second chapter, titled **"Gibbs measures for a model with the set [0,1] of spin values**" several model with competing interactions and a continuum spin values are constructed, which have at least two periodic Gibbs measures.

In the first section of Chapter 2, we study the phase-transition behavior of nearest-neighbor model on Cayley trees with arbitrary degree $k \geq 2$.

For $\Phi = [0,1]$ we consider the following Hamiltonian on Ω:

$$H = H_{\theta,\beta}(\sigma) = -J \sum_{<x,y>\in L} \xi_{\sigma(x)\sigma(y)}(\theta,\beta), \tag{6}$$

where $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $\xi: (u,v) \in [0,1]^2 \to \xi_{u,v} \in \mathbb{R}$ is a given bounded, measurable function.

For every $k \in \mathbb{N}$ we consider an integral operator H_k acting in the cone $C^{+}[0,1]$ as follows

$$\left(H_k f\right)(t)=\int_0^1 K(t,u) f^k(u)du, \quad k\in N. \tag{7}$$

The operator H_k is called Hammerstein's integral operator of order k. We notice that if $k\geq 2$ then H_k is a nonlinear operator.

From works of U.Rozikov, Yu.Eshkabilov and F.Haydarov it is known that the set of translational invariant Gibbs measures of the model (6) is described by the fixed points of the Hammerstein's operator such that

$$f(t,x)=\prod_{y\in S(x)}\frac{\int_0^1 K(t,u) f\left(u,y\right)du}{\int_0^1 K(0,u) f\left(u,y\right)du}, \tag{8}$$

where $K(t,u)=\exp\left(J\beta\xi_{tu}\right)$, and $du=\lambda\left(du\right)$ Lebesgue measure.

Let $k\geq 2$ and we suppose that function $\xi_{\sigma(x)\sigma(y)}$ in the model (6) is

$$\xi_{t,u}=\xi_{t,u}(\theta,\beta)=\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\theta\sqrt[2n+1]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)}\right), \qquad t,u\in[0,1] \tag{9}$$

where $0\leq\theta<1$. Then for the kernel $K(t,u)$ of the Hammerstein's operator H_k we have

$$K(t,u)=1+\theta\sqrt[2n+1]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)}. \tag{10}$$

Here we use the notation

$$|k|_{\text{even}}=\begin{cases}k, & \text{if } k \text{ is even}\\ k-1, & \text{if } k \text{ is odd}\end{cases} \quad \text{and} \quad |k|_{\text{odd}}=\begin{cases}k, & \text{if } k \text{ is odd}\\ k-1, & \text{if } k \text{ is even.}\end{cases}$$

We defined the operator $V_k\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\to(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ by

$$V_{k,n}(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0,2,\ldots,|k|_{\text{even}}}\binom{k}{i}\frac{2n+1}{2n+1+i}\cdot 2^{\frac{i}{2n+1}}x^{k-i}(\theta y)^i\\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1,3,\ldots,|k|_{\text{odd}}}\binom{k}{i}\frac{2n+1}{2n+2+i}\cdot 2^{\frac{i-1}{2n+1}}x^{k-i}(\theta y)^i\end{cases} \tag{11}$$

Proposition 3. *A function $\varphi\in C[0,1]$ is a fixed point of Hammerstein's integral operator equation of order k iff $\varphi(t)$ has the following form*

$$\varphi(t) = C_1 + C_2\theta\sqrt[2n+1]{4(t-\frac{1}{2})},$$

where $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ *is a fixed point of the operator* $V_{k,n}$ *given by (11).*

Theorem 4. *Let* $n \in \mathbb{Z}_+$ *and* $k \geq 2$. *If* $\theta_c = \dfrac{2n+3}{k(2n+1)}$, *then for the model (8) the following statements hold:*
(i) there exists a unique translation-invariant splitting Gibbs measure if $0 \leq \theta \leq \theta_c$*;*
(ii) there exist exactly three translation-invariant splitting Gibbs measures if $\theta_c < \theta < 1$.

In the second section of Chapter 2, we consider a phase transition for the model at *k=2* and *k=3*.

For $k = 3$ and *n=1* the operator $V_{3,1}: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x', y') \in \mathbb{R}^2$ has the form

$$\begin{cases} x' = x^3 + \dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{\theta^2}{\sqrt[3]{2}}xy^2, \\ y' = \dfrac{9}{5}\theta x^2 y + \dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{\theta^3}{\sqrt[3]{2}}y^3 \end{cases} \tag{12}$$

Proposition 5. *a) If* $0 \leq \theta \leq \dfrac{5}{9}$, *then Hammerstein operator of order three has a unique nontrivial positive fixed point;*
b) If $\dfrac{5}{9} < \theta < 1$, *then there are exactly three positive fixed points of the Hammerstein operator of order three.*

Consequently, by Proposition 5 the operator H_3 has a unique positive fixed point $\varphi(t) = \varphi_1(t) \equiv 1$ if $0 \leq \theta \leq \dfrac{5}{9}$. In the case $\dfrac{5}{9} < \theta < 1$ the functions

$$\varphi_1(t) \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = x_1^+ + y_1^+\theta\sqrt[3]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)}, \qquad \varphi_2(t) = x_1^+ + y_1^-\theta\sqrt[3]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)},$$

are positive fixed points of the Hammerstein's operator H_3.

Theorem 6. *For the model (6) defined on Cayley tree of order three the following statements hold:*

a) If $0 \leq \theta \leq \dfrac{5}{9}$, *then there exists a unique translational-invariant Gibbs measure;*

b) If $\dfrac{5}{9} < \theta < 1$, *then there exist exactly three translational-invariant Gibbs measures.*

In the third section of Chapter 2, we consider the model with a bifurcation analysis for any $k \geq 2$, case $n = 1$ and we show that for $0 \leq \theta \leq \dfrac{5}{3k}$ the model has a unique translation-invariant Gibbs measure, and for $\frac{5}{3k} < \theta < 1$ there is a phase transition, in particular there are three translation-invariant Gibbs measures.

Let $k \geq 2$ and n=1. The function $V_{k,1}$ can be written in the following way. First for even $k \geq 2$:

For even $k \geq 2$	For odd $k \geq 3$
$V_k(x,y) = \begin{cases} x' = 3 \sum\limits_{l=0,2,\dots,k} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} A_k(l) \\ y' = 3 \sum\limits_{l=1,3,\dots,k-1} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} B_k(l) \end{cases}$	$V_k(x,y) = \begin{cases} x' = 3 \sum\limits_{l=1,3,\dots,k} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} A_k(l) \\ y' = 3 \sum\limits_{l=0,2,\dots,k-1} \binom{k}{l} x^l \left(\sqrt[3]{2}\theta y\right)^{k-l} B_k(l) \end{cases}$

Proposition 7. *a) If* $0 \leq \theta \leq \frac{5}{3k}$, *then the Hammerstein operator of order k has a unique (nontrivial) positive fixed point;*

b) If $\frac{5}{3k} < \theta < 1$, *then the Hammerstein operator of order k has exactly three positive fixed points.*

Consequently, by Proposition 7, the operator H_k has a unique positive fixed point $\varphi_1(t) \equiv 1$ if $0 \leq \theta \leq \frac{5}{3k}$. In the case $\frac{5}{3k} < \theta < 1$ the operator H_k has the following fixed points:

$$\varphi_1(t) \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = x_0 + y_0 \theta \sqrt[3]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)}, \qquad \varphi_2(t) = x_0 - y_0 \theta \sqrt[3]{4\left(t - \frac{1}{2}\right)}.$$

Theorem 8. *Let k* $\geq$ 2. *For the model (6) defined on Cayley tree of order k the following statements hold:*

a) If $0 \leq \theta \leq \frac{5}{3k}$, *then there exists a unique translation-invariant Gibbs measure;*

b) If $\frac{5}{3k} < \theta < 1$, *then there exist three translation-invariant Gibbs measures.*

In the forth section of Chapter 2, it was proved the existence a phase transition for the model defined on Cayley tree of order $k \geq 2$.

Let k = 2 and $n \geq 1$. We defined the operator $V_{2,n}: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x', y') \in \mathbb{R}^2$ by

$$\begin{cases} x' = x^2 + \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \sqrt[2n+1]{4} \theta^2 y^2, \\ y' = 2 \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \theta \cdot x \cdot y \end{cases}$$

Proposition 9. *i) If* $0 \le \theta \le \frac{2n+3}{2(2n+1)}$, *then the Hammerstein operator of order two has a unique (nontrivial) positive fixed point;*

ii) If $\frac{2n+3}{2(2n+1)} < \theta < 1$ *, then the Hammerstein operator of order two has exactly three positive fixed points.*

Consequently, by Proposition 9 the operator H_k has the unique positive fixed point $\varphi_1(t) \equiv 1$ if $0 \le \theta \le \frac{2n+3}{2(2n+1)}$. In the case $\frac{2n+3}{2(2n+1)} < \theta < 1$ the operator H_k has the following fixed points: $\varphi_1(t) \equiv 1$ and

$$\varphi_2(t) = \frac{2n+3}{2(2n+1)\cdot\theta} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{2(2n+1)\cdot\theta - (2n+3)}{2n+1}} \cdot \sqrt[2n+1]{2\left(t - \frac{1}{2}\right)}\right),$$

$$\varphi_3(t) = \frac{2n+3}{2(2n+1)\cdot\theta} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2(2n+1)\cdot\theta - (2n+3)}{2n+1}} \cdot \sqrt[2n+1]{2\left(t - \frac{1}{2}\right)}\right).$$

Theorem 10. *Let* $k = 2$. *Then for the model (6) defined on Cayley tree of order k the following statements hold:*

i) If $0 \le \theta \le \frac{2n+3}{2(2n+1)}$, *then there exists the unique translation-invariant Gibbs measure;*

ii) If $\frac{2n+3}{2(2n+1)} < \theta < 1$, *then there are three translation-invariant Gibbs measures.*

In the third chapter, titled **"Nontranslation invariant Gibbs measures for models with uncountable set of spin values**" we consider models with nearest-neighbour interactions and with set [0,1] of spin values, on a Cayley tree of order $k \ge 1$.

In the first section of Chapter 3, we give main definitions and ART construction.

By H.Akin, U.A.Rozikov and S.Temir for the Ising model (with the set {-1,1} of spin values) the authors constructed a class of new Gibbs measures by extending the known Gibbs measures defined on a Cayley tree of order k_0 to a Cayley tree of higher order $k>k_0$. Their construction is called the ART–construction.

For a given $H(\sigma)$ of the model (6), denote by $G_k(H)$ the set of *all* Gibbs measures on the Cayley tree of order $k \ge 2$. By $|M|$ we denote the cardinality of a set M.

Theorem 11. *Let* $k_0, k \in \{2,3,...\}$ *be numbers such that* $k > k_0$. *If* $|G_{k_0}(H)| \ge 2$ *and* $K(t,u)$ *satisfies the following equality*

$$\int_0^1 (K(t,u)-K(0,u))du = 0, \quad \forall t \in [0,1], \tag{13}$$

then for each $\mu \in G_{k_0}(H)$ *there exists a measure* $\nu = \nu(\mu) \in G_k(H)$.

Example 1. Let $k = 2$. Suppose that the function ξ_{tu} in the model (6) is

$$\xi_{tu} = \frac{1}{\beta J} \ln\left(1 + \frac{14}{15} \cdot \sqrt[5]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)}\right), \quad t,u \in [0,1].$$

Then, for the kernel $K(t,u)$ of Hammerstein's operator we have

$$K(t,u) = 1 + \frac{14}{15} \cdot \sqrt[5]{4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)}, \quad t,u \in [0,1].$$

In the second chapter of dissertation it was shown that this model has at least two Gibbs measures and the condition (6) is satisfied.

In the second paragraph of chapter 3, we give the Bleher-Ganikhodjaev construction.

If an arbitrary edge $< x^0, x^l >= l \in L$ is deleted from the Cayley tree $\Im^k$, it splits into two components–two semi-infinite (half) trees $\Im_0^k$ and $\Im_1^k$. Consider the half tree $\Im_0^k$, and denote by V^0 the set of its vertices. Namely, the root x^0 has k nearest neighbors.

Denoting $h(t,x) = \ln f(t,x)$ we write Eq. (8) as

$$h(t,x) = \sum_{y \in S_k(x)} \ln \frac{\int_0^1 K(t,u) e^{h(u,y)} du}{\int_0^1 K(0,u) e^{h(u,y)} du} \tag{14}$$

On the set $C[0,1]$ of continuous functions we define the following nonlinear operator

$$Af(t) = \ln \frac{\int_0^1 K(t,u) e^{f(u)} du}{\int_0^1 K(0,u) e^{f(u)} du}, \tag{15}$$

where $K(t,u) > 0$.

Condition 12. Assume that $K(t,u) > 0$ is continuous on $[0,1]^2$, i.e., $K(\cdot,\cdot) \in C^+[0,1]^2$, and there is $\alpha \equiv \alpha_K \in [0,1)$ such that

$$|Af(t) - Ag(t)| \le \alpha |f(t) - g(t)|, \quad \forall f,g \in C[0,1], \forall t \in [0,1].$$

Condition 13. Assume that there are at least two translation invariant solutions: $h(t,x) \equiv h(t) \in C[0,1]$ and $h(t,x) \equiv \eta(t) \in C[0,1]$ to equation (14).

Remark 1. If Condition 12 is satisfied then to satisfying Condition 13 it is necessary that $\frac{1}{k} \le \alpha < 1$.

We use $h(t)$ and $\eta(t)$ to construct an uncountable set of new solutions to (15).

Consider an infinite path $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < ...\}$ (the notation $x < y$ meaning that path from the root to *y* go through *x*). Associate to this path a collection $h^\pi = \{h^\pi_{t,x} : x \in V^0, t \in [0,1]\}$ given by

$$h^\pi_{t,x} = \begin{cases} h(t), & \text{if } x \prec x_n,\ x \in W_n, \\ \eta(t), & \text{if } x_n \prec x,\ x \in W_n, \\ h_{t,x_n}, & \text{if } x = x_n, \end{cases} \tag{16}$$

n=1,2,.... where $x \prec x_n$ (resp. $x_n \prec x$) means that *x* is on the left (resp. right) from the path π.

Theorem 14. *If Conditions 12 and 13 are satisfied, then for any infinite path* π *there exists a unique set of numbers* $h^\pi = \{h^\pi_{t,x}\}$ *satisfying equations (14) and (16).*

Theorem 15. *If Condition 12 and 13 are satisfied then for any* $r \in [0,1]$ *there exists a nontranslation invariant Gibbs measure* ν_r. *Moreover,* $\nu_r \ne \nu_l$ *if* $r \ne l$.

In the third section of Chapter 3, we give the Zachary construction.

Condition 16. Assume $K(t,u) > 0$ such that the operator *A*, (15), is invertible. From (15) we get that

$$h^{\min}(t) \le h(t,x) \le h^{\max}(t), \quad \forall x \in V, \tag{17}$$

where

$$h^{\min}(t) = k \ln \frac{\min\limits_{u\in[0,1]} K(t,u)}{\max\limits_{u\in[0,1]} K(0,u)}, \qquad h^{\max}(t) = k \ln \frac{\max\limits_{u\in[0,1]} K(t,u)}{\min\limits_{u\in[0,1]} K(0,u)}.$$

Under Conditions 13 and 16 we constructed a continuum of distinct functions $h^\xi_{t,x}$, which satisfy the functional equation (11), where $\xi(t)$ is such that

$$h^{\min}(t) < \xi(t) < h^{\max}(t), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{18}$$

Theorem 17. *If Conditions 13 and 16 are satisfied, then for any* ξ *satisfying (18) there exists a Gibbs measure* μ^ξ. *Moreover,* $\mu^\xi \ne \mu^\eta$ *if* $\xi \ne \eta$.

In the forth section of Chapter 3, we considered the SOS (solid-on-solid) model on the Cayley tree of order $k \ge 2$.

We consider SOS model where the spin values set is $\Phi = \mathbb{Z}$.

The (formal) Hamiltonian of the SOS model is :

$$\mathrm{H}(\sigma) = -\mathrm{J} \sum_{\langle \mathrm{x,y} \rangle \in \mathrm{L}} |\sigma(\mathrm{x}) - \sigma(\mathrm{y})|, \tag{19}$$

where J ∈ ℝ is constant.

In the work of K. Kulske, A. LeNey, F. Henning and U.A. Rozikov, the definition gradient Gibbs measures (GGM) is given and construction of periodic such measures is reduced to the solution of the following system of nonlinear equations with infinitely many unknowns:

$$z_i = \frac{\nu(i)}{\nu(0)}\left(\frac{\theta^{|i|} + \sum\limits_{j\in Z_0}\theta^{|i-j|}z_j}{1+\sum\limits_{j\in Z_0}\theta^{|j|}z_j}\right)^k, \tag{20}$$

where $z_i = \exp(h_i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Put $u_i = u_0\sqrt[k]{z_i}$ for some $u_0 > 0$. Then (20) can be written as

$$u_i = C\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\theta^J u_{i-j}^k + u_i^k + \sum_{j=1}^{+\infty}\theta^J u_{i+j}^k\right), \quad i \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

Proposition 18. *A vector* $\mathbf{u} = (u_i, i \in Z)$, *with* $u_0 = 1$, *is a solution to (21) if and only if for* u_i $(= \sqrt[k]{z_i})$ *the following holds*

$$u_i^k = \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - \tau u_i}{u_{-1} + u_1 - \tau}, \ i \in Z, \tag{22}$$

where $\tau = \theta^{-1} + \theta$.

By this proposition we have

$$1 + l_0 + r_0 = \frac{\theta - \theta^{-1}}{u_{-1} + u_1 - \tau}. \tag{23}$$

Equations of system (21) for $i = -1$ and $i = 1$ are satisfied independently on values of u_{-1} and u_1 and the equation (22) can be separated to the following independent recurrent equations

$$u_{-i-1} = (u_{-1} + u_1 - \tau)u_{-i}^k + \tau u_{-i} - u_{-i+1}, \tag{24}$$

$$u_{i+1} = (u_{-1} + u_1 - \tau)u_i^k + \tau u_i - u_{i-1}, \tag{25}$$

where $i \geq 1$, $u_0 = 1$ and u_{-1}, u_1 are some initial numbers.

So, if u_i is a solution to (25) then u_{-i} will be a solution for (24). Hence we can consider only equation (25).

Let's consider the periodic solutions of (22) i.e., we describe solutions of (22) which have the form

$$u_n = \begin{cases} 1, & if \quad n = 2m, \\ a, & if \quad n = 4m-1, \ m \in Z, \\ b, & if \quad n = 4m+1, \end{cases} \tag{26}$$

where a and b some positive numbers. In this case (27) is equivalent to the following system of equations

$$\begin{aligned}(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\tau)\mathrm{b}^{\mathrm{k}}+\tau\mathrm{b}-2=0\\(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\tau)\mathrm{a}^{\mathrm{k}}+\tau\mathrm{a}-2=0.\end{aligned} \qquad (27)$$

We described positive solutions of (28) and proved the following

Theorem 19. *Let* $\mathrm{k}\geq 2$ *and* $\mathrm{a}=\mathrm{b}$. *For the SOS-model (20) on the* k*-regular tree, with parameter* $\tau=2\cosh(\beta)$ *there is number* $\tau_{\mathrm{c}}>0$ *such that the following assertions hold:*

1. If $\tau<\tau_{\mathrm{c}}$ *then there is a unique GGM corresponding to nontrivial period-3 height-periodic boundary laws of the type (26);*

2. At $\tau=\tau_{\mathrm{c}}$ *there are exactly two GGMs corresponding to a nontrivial period-3 heightperiodic boundary law of the type (26);*

3. For $\tau>\tau_{\mathrm{c}}$ *there are exactly three such (resp. one) Gradient GMs.*

Theorem 20. *Let* $k\geq 2$ *and* $\mathrm{a}\neq\mathrm{b}$. *For the SOS-model on the k-regular tree, with parameter* $\tau=2\cosh(\beta)$ *the following assertions hold:*

1. For any positive fixed b, *if* $\tau\leq\frac{2}{\mathrm{b}}$ *then there is no any GGM corresponding to nontrivial period-3 height-periodic boundary laws of the type (26);*

2. For any positive fixed b, *if* $\tau>\frac{2}{\mathrm{b}}$ *then there is a unique GGM corresponding to nontrivial period-3 height-periodic boundary laws of the type (26).*

In the fourth chapter, titled “**Ground states for the Potts model with competing interactions**” we derived an infinite system of functional equations for the Potts model with competing interactions of radius *r = 2* and countable spin values {0,1, … } and nonzero field, on a Cayley tree.

In the first section of Chapter 4, we give definitions and known facts about ground states.

In the secound section of Chapter 4, we consider functional equation for Potts models with countable set of spin values, i.e. $\Phi=\mathbb{Z}$.

The (formal) Hamiltonian of the Potts model is:

$$H(\sigma)=J\sum_{<x,y>}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+J_1\sum_{>x,y<}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad (28)$$

where $J,J_1\in\mathbb{R}$ are constants.

Let $h\colon x\ \longmapsto h_x=(h_{0,x},h_{1,x},\ldots)\in\mathbb{R}^{\infty}$ be a real sequence-valued function of $x\in V\setminus\{x^0\}$. Fix a probability measure ν on $\mathbb{Z}_+$ such that $\nu(i)>0$ for all $i\in\mathbb{Z}_+$.

Given *n=1,2,…,* consider the probability distribution μ_n on Ω_{V_n} defined by

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=Z_n^{-1}\exp\left(-\beta H(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\sigma(x),x}\right)\prod_{x\in V_n}\nu(\sigma(x)) \qquad (29)$$

Theorem 21. *The sequence of probability distributions* $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *given by (29) for a Cayley tree order two are compatible iff for any* $x \in V \setminus \{x^0\}$ *the following equation holds:*

$$h^*_{i,x} = F_i\left(h^*_y, h^*_z, \beta, J\right), \quad i = 1,2,3,\ldots,. \tag{30}$$

Here

$$h^*_x = \left(h_{1,x} - h_{0,x} + \ln\frac{\nu(1)}{\nu(0)},\ h_{2,x} - h_{0,x} + \ln\frac{\nu(2)}{\nu(0)}, \ldots \right)$$

$$F_i(h^*_y, h^*_z, \beta, J) = \ln\frac{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0 \\ p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\left\{\beta J\left(\delta_{ip} + \delta iq\right) + J_1\beta\delta_{pq} + h^*_{p,y} + h^*_{q,z}\right\}}{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0 \\ p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\left\{\beta J\left(\delta_{ip} + \delta iq\right) + J_1\beta\delta_{pq} + h^*_{p,y} + h^*_{q,z}\right\}}.$$

In the third section of Chapter 4, we construct periodic ground states for the model.

We suppose that M is the set of unit balls with vertices in V. The restriction of a configuration σ on a ball $b \in M$ is called a *bounded configuration* σ_b. We define the energy of the configuration σ_b on the ball b as

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{<x,y>, \\ x,y\in b}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in b: \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{31}$$

where $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

Lemma 22. *Let $k \geq 2$ be a natural number and $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$. Then the following statements hold.*

1) Let σ_b be a configuration with $\sigma_b(c_b) = i$, (where c_b is the center of the ball b), and $|\{x : \sigma_b(x) = 1\}| = m$, $|\{x : \sigma(x) = 2\}| = n$, $|\{x : \sigma(x) = 3\}| = l$, $|\{x : \sigma(x) = 4\}| = r$.

Then $U(\sigma_b)$ has the following form

$$\begin{aligned} U(\sigma_b) \equiv U_{i,k}(m,n,l,r,J_1,J_2) = \frac{1}{2}(\delta_{1i}m + \delta_{2i}n + \delta_{3i}l + \delta_{3i}l)J_1 + \\ + (C_m^2 + C_n^2 + C_l^2 + C_r^2)J_2 \end{aligned} \tag{32}$$

where $m, n, l, r \in \mathbb{Z}_+$, $m + n + l + r = k + 1$.

2) For any configuration σ_b we have

$$U(\sigma_b) \in \{U_{i,k}(m,n,l,r,J_1,J_2) : m,n,l,r \in \mathbb{Z}_+, m + n + l + r = k + 1\}.$$

Denote

$$F_p^{(i)} \equiv F_p^{(i)}(\sigma_b) = \{j \in N_k : \sigma_b(c_b) = i, \sigma_b(a_j) = p\},\ p = 1,2,3,4;$$

$$\Omega_{m,n,l}^{(i)} = \{\sigma_b : \sigma_b(c_b) = i, |F_1^{(i)}| = m, |F_2^{(i)}| = n, |F_3^{(i)}| = l\}.$$

Let S_4 be the group of permutations on $\{1,2,3,4\}$.

$C_{m,n,l}^{(i)} = \bigcup_{\pi\in S_4} \pi(\Omega_{m,n,l}^{(i)})$, where for $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)) \in S_4$ we put $\pi(\Omega_{m,n,l}^{(i)}) = \{\pi\sigma : \sigma \in \Omega_{m,n,l}^{(i)}\}$ with $(\pi\sigma)(x) = \pi(\sigma(x))$.

Theorem 23. *For any class* $C_{m,n,l}^{(i)}$ *and for any bounded configuration* $\sigma_b \in C_{m,n,l}^{(i)}$ *there exists a periodic configuration* φ *with period non exceeding 4 such that* $\varphi_{b'} \in C_{m,n,l}^{(i)}$ *for any* $b' \in M$ *and* $\varphi_b = \sigma_b$.

Definition 24. *A configuration* σ *is called a ground state of the relative Hamiltonian* H *if for any* $b \in M$ *the following holds:*

$$U(\sigma_b) = \min\{U_{i,k}(m,n,l,J_1,J_2): i = 1,2,3,\ m,n,l \in \mathbb{Z}_+,$$
$$0 \le m+n+l \le k+1, \qquad J_1, J_2 \in \mathbb{R}\}$$

Denote

$$A_{i,k}(m,n,l) = \{(J_1,J_2) : U_{i,k}(m,n,l,J_1,J_2) \le U_{j,k}(m',n',l',J_1,J_2),$$
$$for\ all\ m',n',l' \in \mathbb{Z}_+\}, \quad i = 1,2,3,4.$$

Let $GS(H)$ be the set of all ground states of the relative Hamiltonian.

Theorem 25. (i) If $J_1 = J_2 = 0$ then $GS(H) = \Omega$.

(ii) If $(J_1,J_2) \in A_{i,k}(m,n,l)$ then $GS(H) = \{\pi(\sigma_{m,n,l}^{(i)}) : \pi \in S_4\}$, where $\sigma_{m,n,l}^{(i)} \in \Omega$ such that $(\sigma_{m,n,l}^{(i)})_b \in \Omega_{m,n,l}^{(i)}$ for any $b \in M$, $0 \le m+n+l \le k+1$, $i = 1,2,3,4$.

In the fourth section of Chapter 4, we consider Potts model, with competing interactions and countable spin values ($\Phi = \mathbb{Z}$) on a Cayley tree of order three. We study periodic ground states for this model.

Let G_k^* be a subgroup of index $r \ge 1$. Consider the set of right cosets $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}$, where G_k^* is a subgroup.

Definition 26. *A configuration* $\sigma(x)$ *is said to be* G_k^**-periodic if* $\sigma(x) = \sigma_i$ *for all* $x \in H_i$. *A* G_k*-periodic configuration is a said to be translation-invariant. The period of a periodic configuration is the index of the corresponding subgroup.*

Definition 27. *A configuration* $\sigma(x)$ *is said to be* G_k^**-weakly periodic if* $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ *for all* $x \in H_i$ *and* $x_\downarrow \in H_j$.

We consider the case *k=3* with countable spin values. It is easy to see that $U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, ..., U_{12}\}$ for any σ_b, where

$$U_1 = 2J_1 + 6J_2, \qquad U_2 = \frac{3}{2}J_1 + 3J_2, \qquad U_3 = J_1 + 2J_2,$$

$$U_4=\frac{1}{2}J_1+3J_2, \qquad U_5=6J_2, \qquad U_6=\frac{1}{2}J_1,$$

$$U_7=3J_2, \qquad U_8=J_2, \qquad U_9=J_1+J_2,$$

$$U_{10}=\frac{1}{2}J_1+J_2, \qquad U_{11}=2J_2, \qquad U_{12}=0.$$

Using these notations we can give the following definition of ground state of Hamiltonian.

Definition 28. *A configuration* φ *is called a ground state of the relative Hamiltonian H if* $U(\varphi_b)=\min\{U_1,U_2,...,U_{12}\}$ *for any* $b\in M$.

We set $C_i=\{\sigma_b : U(\sigma_b)=U_i\}$ and $U_i(J)=U(\sigma_b,J)$ if $\sigma_b\in C_i, i=1,2,\ldots,12.$

For any $i=1,2,...,12$ we put

$$A_i=\{J\in R^2 : U_i=\min\{U_1(J),U_2(J),\ldots,U_{12}(J)\}\}.$$

We set $B=A_1\cap A_2$, $B_0=A_1\cap A_5$, $B_1=A_2\cap A_9$, $B_2=A_9\cap A_6$, $B_3=A_6\cap A_{12}$, $\tilde{A}_1=A_1\setminus(B\cup B_0)$, $\tilde{A}_2=A_2\setminus(B_0\cup B_1)$, $\tilde{A}_5=A_5\setminus(B_0\cup B_7)$, $\tilde{A}_6=A_6\setminus(B_2\cup B_3)$, $\tilde{A}_9=A_9\setminus(B_1\cup B_2)$, and $\tilde{A}_{12}=A_{12}\setminus(B_3\cup B_7)$. Let $GS(H)$ be the set of all ground states, and let $GS_p(H)$ be the set of all periodic ground states.

Theorem 29. *a) For any class* C_i, $i=1,2,...,12$, *and any bounded configuration* $\sigma_b\in C_i$, *there exists a periodic configuration* φ *(on the Cayley tree) such that* $\varphi_{b'}\in C_i$ *for any* $b'\in M$ *and* $\varphi_b=\sigma_b$.

Theorem 30. A. *If* $J=(0,0)$, *then* $GS(H)=\Omega$.

B. 1. *If* $J\in\tilde{A}_1$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi^{(i)} : i\in\Phi\}$.

2. If $J\in\tilde{A}_2$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_2^{(lm)} : l,m\in\Phi,\ l\neq m\}$.

3. If $J\in\tilde{A}_5$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_5^{(lm)} : l,m\in\Phi,\ l\neq m\}$.

4. If $J\in\tilde{A}_6$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_6^{(lmnp)} : l,m,n,p\in\Phi,\ l\neq p\neq m\neq n\}$.

5. If $J\in\tilde{A}_9$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_9^{(lm)} : l,m\in\Phi,\ l\neq m\}$.

6. If $J\in\tilde{A}_{12}$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_{12}^{l} : l\in\Phi\}$.

C. *1. If* $J\in B\setminus(0,0)$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi^{(i)},\varphi_2^{(lm)} : i,l,m\in\Phi,\ l\neq m\}$.

2. If $J\in B_0\setminus(0,0)$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi^{(i)},\varphi_5^{(lm)} : i,l,m\in\Phi,\ l\neq m\}$.

3. If $J\in B_1\setminus(0,0)$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_2^{(lm)},\varphi_9^{(lm)} : i,l,m\in\Phi,\ l\neq m\}$.

4. If $J\in B_2\setminus(0,0)$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_6^{(lmnp)},\varphi_9^{(lm)} : l,m,n,p\in\Phi,\ l\neq m\neq n\neq p\}$.

5. If $J\in B_3\setminus(0,0)$, *then* $GS_p(H)=\{\varphi_6^{(lmnp)},\varphi_{12}^{(l)} : l,m,n,p\in\Phi,\ l\neq m\neq n\neq p\}$.

6. If $J \in A_8$, *then periodic configuration* $\varphi_5^{(lm)}, \xi_7^{(lmn)}, \psi_7^{(lmn)}, \varphi_8^{(lmnp)}, \varphi_{12}^{l}$ *are periodic ground states, and weakly periodic configuration* $\xi_7^{(lmn)}$ *is weakly periodic ground states, where* $l,m,n,p \in \Phi, l \neq m \neq n \neq p$.

CONCLUSION

The dissertation work is devoted to the study of Gibbs measures for lattice systems with an infinite set of spin values.

The main results of the research are as follows:

1. The critical value of temperature that provide the phase transitions for the XY model on the Cayley tree of arbitrary order is determined;

2. For a model with a continuum set of spin values on the Cayley tree of arbitrary order a critical temperature is found, such that for temperatures lower from this critical value there are exactly three translation invariant Gibbs measures. In case of Cayley trees of order two and three the explicit solutions corresponding to the translation invariant Gibbs measures are found.

3. Several models with a continuum set of spin values and with nearest-neighbor interactions are constructed, which have at least two periodic Gibbs measures;

4. Using ART (Akin, Rozikov, Temir), Blexer-Ganikhodjaev, Zachary constructions continuum sets of new Gibbs measures are constructed.

5. For the SOS (Solid on Solid) model with a countable set of spin values gradient Gibbs measures are found;

6. For the Potts model with competing interactions and a countable set of spin values on Cayley tree a system of functional equations is dirived solutions of which corresponds to Gibbs measures. Weakly periodic ground states (configurations) of this model are constructed.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БОТИРОВ ГОЛИБЖОН ИСРОИЛОВИЧ

МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ СПИНА

01.01.01 – Математический анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ–2020

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.3-4.DSc/FM84.

Диссертация выполнена в Институт Математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Wolfgang Koenig** доктор математических наук, профессор
	Лақаев Саидахмат Норжигитович доктор физико-математических наук, академик
	Рахимов Абдугафур Абдумаджидович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Туринский политехнический университет в г.Ташкенте**

Защита диссертации состоится «____» ____________2020 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878)227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» ______________2020 года.
(протокол рассылки №________ от «____» ______________2020 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Н.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, PhD

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Объект исследования: Дерево Кэли, решеточные модели, основные состояния, мера Гиббса, интегральный оператор Гаммерштейна.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

определены критические значения температуры, обеспечивающие фазовый переход для модели *XY* на дереве Кэли произвольного порядка;

построены модели с континуум множеством значений спина и взаимодействиями ближайших соседей, имеющие по крайней мере двух периодических мер Гиббса;

с помощью известных мер Гиббса построены множества континуума новых мер Гиббса;

найдены слабо периодические основные состояния для модели Поттса со счетным числом значений спина;

Внедрение результатов исследования. На основании полученных результатов по мерам Гиббса для решетчатых систем с бесконечным множеством значений спина:

Меры Гиббса для моделей с несчетным множеством значений спина были использованы в исследованиях проекта ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 для описания множества трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей, являющихся обобщением некоторых классических моделей статистической механики (Министерство Высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, справка № 89-03-4233 от 2 ноября 2019 года). Применение этих научных результатов дает возможность анализировать спектров некоторых нелинейных интегральных операторов, встречающихся в теории нелинейных интегральных операторов;

Основные состояния и меры Гиббса для моделей со счетным множеством значений спина были использованы в исследованиях зарубежного проекта FRGS-14-116-0357 для определения фазовых переходов для моделей с бесконечным числом значений спина в решетчатых системах (Международный Исламский университет Малайзии, справка от 16 августа 2019 года, Малайзия). Применение этих научных результатов способствовало изучению термодинамических свойств решетчатых систем в физике и биологии;

Найденное множество мер Гиббса для моделей со счетным и несчетным множеством значений спина в решетчатых системах было использовано в статьях зарубежных научных журналов (Positivity, 2016; Stochastic Processes and their Applications, 2017; Theoretical and Mathematical Physics, 2017; Украинский математический журнал, 2020) для описания мер Гиббса моделей континуум множеством значений спина қийматли. Применение этих научных результатов дает возможность анализировать термодинамику рассматриваемых физических систем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 155 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Botirov G.I., Ground States for Potts Model with competing interactions on Cayley tree// Uzbek Mathematical Journal, 2011, No-4, p.59-66. (01.00.00, № 6).

2. Eshkabilov Y.K., Rozikov U.A., Botirov G.I., Phase transitions for a model with uncountable set of spin values on a Cayley tree// Lobachevskii Journal of Mathematics-2013– V.34, №.3, – pp.256-263. (41. SCImago. IF=0.42).

3. Botirov G.I., Jahnel B., Kuelske C., Phase transition and Critical values of a nearest-neighbor system with uncountable local state space on Cayley trees// Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2014, V.17, p.323-331. (3. Scopus. IF=0.86).

4. Botirov G.I., Critical values of a nearest-neigbor system on a Cayley tree// Doklady Acad. Nauk RUz., 2015. No 2. p. 3-8. (01.00.00, № 7).

5. Botirov G.I., Translation-invariant Gibbs measures of a model on Cayley tree// ACTA NUUz, 2016, 2/1, pp.106-113. (01.00.00, № 8).

6. Botirov G.I., Functional equations for the Potts model with competing interactions on a Cayley tree// Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2016, 7 (3), pp. 400–404 (Russian Science Citation Index-0,7).

7. Botirov G.I., A model with uncountable set of spin values on a Cayley tree: phase transitions// Positivity-2017. V.21, pp.955-962. (3. Scopus. IF=1.496).

8. Botirov G.I., An isotropic Ising model with countable set of spin values on Cayley tree// Journal of Siberian Federal University-Mathematics and Physics-2017, –V.10, №.3, – pp.305-310. (3. Scopus. IF=0.5).

9. Botirov G.I., The uniqueness condition for Gibbs measure of the XY model on Cayley trees// Uzbek Mathematical Journal, 2017, No-2, pp.32-40. (01.00.00, № 6).

10. Botirov G.I., Rahmatullaev M.M. Ground states for Potts model with a countable set of spin values on a Cayley tree//Springer Proceedings in Mathematics and Statistics-2018, pp.59-71. (3. Scopus. IF=0.6).

11. Rozikov U.A., Botirov G.I., Nontranslation invariant Gibbs measures for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // Reports on Mathematical Physics-2018, -V.81, -№.3, -pp.105-115. (3. Scopus. IF=0.86).

12. Botirov G.I., Jahnel B., Phase transitions for a model with uncountable spin space on the Cayley tree: the general case// Positivity-2019. –V.23, -pp.291-301. (3. Scopus. IF=1.496).

13. Botirov G.I., F.Haydarov, Gradient Gibbs measures for the SOS model with integer spin values on a Cayley tree//Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2020, https://doi.org/10.1088/1742-5468/abaecd, 9 pp. (3. Scopus. IF=2.215).

14. Eshkabilov Yu., Botirov G., Haydarov F., Phase transitions for models with a continuum set of spin values on a Bethe lattice// Theoretical and Mathematical Physics-2020, V-204, (3), 1228–1236 (3. Scopus. IF=0.96).

II бўлим (2 часть; part 2)

15. Botirov G.I., Description of a set of homogeneous period-4 height-periodic boundary laws for the SOS-model //Abstracts of on-line conference “Actual problems of Mathematics, physics and information technologies” Bukhara, 15 April 2020. p. 63.

16. Botirov G.I., Translation-invariant Gibbs measures of a model on Cayley tree//«Ёш олимлар» Республика илмий-амалий конференция 2017 йил 31 март - 11 апрель, 125-128.

17. Botirov G.I., On the Hammerstein’s operator related to translation-invariant Gibbs measures of a model on tress// International Conference on “Nonlinear analysis and its applications” September 19-21, 2016, Samarkand, pp.6-7.

18. Botirov G.I., Translation-invariant Gibbs measures of a model with binary interactions on the Cayley tree//“Актуальные проблемы математики” Материалы Республиканской научно-практической конференции (Андижан, 17 мая 2016), c.268-270.

19. Botirov G.I., Functional equations for the potts model with competing interactions on a Cayley tree// Тезисы докладов конференции с участием зарубежных учёных “Проблемы соврменной топологии и её приложения” (Ташкент, 5-6 мая 2016), c.47-49.

20. Botirov G.I., Gibbs measure for a model with degenerate kernel on a Cayley tree// Материалы Республиканской научной конференции «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа» (Бухара 26-27 ноября 2015 года) c.19-21.

21. Botirov G.I., Unique splitting Gibbs measure of a model on Cayley tree// Материалы VII Ферганская конференция «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» (Наманган, 11-12 май 2015), c.101-105.

22. Botirov G.I., Phase transition for a model on Cayley tree of order four// Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых "Современные методы математической физики и их приложения" (Ташкент, 15-17 апреля 2015 г.) Т-2, с. 88-91.

23. Botirov G.I., Condition of existence of phase transitions for a model on a Cayley tree of order k≥2// International Congress of Mathematicians, August 13-21, 2014, Seoul, Korea, pp.17-18.

24. Botirov G.I., On compatibility conditions of Gibbs measures for a model// V CONGRESS of the Turkic world Mathematicians, June 5-7, 2014, Kirgizstan, pp.98-99.

25. Botirov G.I., Number of energy-values on a unit ball for the Potts model on a Cayley tree// Abstracts Scientific Conference on Mathematics and Mechanics, (October 02–04, 2013, Tomsk) p. 40-41.

26. Botirov G.I., Benedikt Jahnel, Christof Kuelske, Fixed points of a nonlinear integral operators// Abstracts International Conf. Problems of modern topology and applications. 20-24 may Tashkent 2013, pp. 40-42.

27. Botirov G.I., An infinite system of functional equations for the Ising model on a Cayley tree of order two// Abstracts of the Conf. of Scientific Reports ”New Theorems of Young mathematicians - 2013”, 15-16 April 2013, p. 101-103.

28. Botirov G.I., Xudayarov S.S., A model with uncountable spin values on a Cayley tree// Proceedings X School Of Young Scientists “Non-Local Boundary value problems and problems of modern analysis and informatics”, Russia, 2012, pp.31-33.

29. Botirov G.I., On fixed points of Hammerstein's operator// Abstracts of the international conference Operator Algebras And Related Topics, Tashkent, September 12-14, 2012, pp.21-22.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари “Ўзбекистон математика журнали” таҳририятида таҳрир қилинди.