МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИВАНОВА С.Б., ИШНАЗАРОВ А.И.

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебное пособие
для студентов бакалавриата по направлению образования
5340100 – Экономика «Информационные системы в экономике»

ТАШКЕНТ - 2007

Иванова С.Б., Ишназаров А.И. Эконометрика. Учебное пособие. -Т.: ТГЭУ, 2007. – 128 с.

Основными задачами предмета "**Эконометрика**" являются: овладение студентами бакалавриата методологией построения и применения эконометрических моделей; углубления теоретических знаний о проблемах экономики, исследуемых средствами эконометрического моделирования; изучение типовых моделей, используемых в экономическом анализе.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

1. Шадиев Т.Ш., д.э.н., проф. зав. кафедры «ЮНЕСКО» ТМВУ.
2. Исмаилов А.А. – к.э.н., доц. кафедры «Информационные технологии» ТГЭУ.

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ЭКОНОМЕТРИКИ

1.1. Понятие «Эконометрика». Задачи эконометрики. Предмет и метод эконометрики.

Эконометрия как наука относится к классу общественных дисциплин и точное определение ее содержания и области исследования имеет существенное значение.

"Эконометрика" наука, появившаяся в начале тридцатых годов путем интерференции математики, статистики и экономики. Родоначальники создавшие термин "эконометрика" имели в виду развитие, прежде всего, экономических исследований в тесной связи со статистикой и математикой. Авторы, изобретавшие термин "эконометрика" являются одновременно и основателями эконометрического общества. 29 декабря 1930 года в Кливленде было основано "Эконометрическое общество" и в последующем журнал "Эконометрика".

"Эконометрика" это наука, изучающая в количественном аспекте, связи между сложными экономическими процессами и явлениями, изменяющимися в динамике. Следовательно, *предметом* эконометрии является экономика, ее процессы и явления.

Объектом изучения эконометрики выступают существующие экономические связи и тенденции в национальной экономике. *Область* эконометрики определяется моделями математической экономики.

Как известно, математическая экономика изучает экономические проблемы применением математики для более удобного исследования сложных экономических явлений. Эконометрия ищет числовые значения параметров моделей математической экономики. Она занимается измерением экономических объектов как аналогичных эквивалентов экономико-математической модели.

Методом эконометрики является метод, предложенный математической статистикой. Это первое важное разграничение, которое необходимо сделать между эконометрией и количественной экономикой вообще. Не всякие результаты измерений, и не всякая количественная информация должны или могут быть использованы математической статистикой. В экономико-математические модели могут быть введены параметры, получаемые из инженерных источников (технические данные) на основе интуиции или непосредственно из первичных статистических данных. Но иногда технические данные или отсутствуют или искажены различными факторами, а статистические данные, полученные статистическими наблюдениями не корреспондируют истинной структуре экономического процесса. В этом случае математическая статистика должна искать связь между данными, получаемыми из наблюдений, чтобы раскрыть истинное структурное или причинное отношение в экономическом объекте, из которого возникают эти данные.

Предположим, что сделано статистическое наблюдение динамики национальной экономики за 1980-1995 годы и зарегистрировано состояние национального дохода (в неизменных ценах) за каждый год наблюдения. Одновременно проведено статистическое наблюдение за состоянием занятости населения за указанный период. Известно или предполагается с некоторыми вероятностями, что величины национального дохода (Y) в каждом году определяются каким-то образом состоянием занятости (X, т.е. числом производительно занятых работников). Другими словами, можно предположить, что в действительности величины X трансформируются в Y и что существует некоторый механизм такого преобразования.

1.2. Цели и задачи курса

Целью эконометрики является открытые подобных механизмов трансформации путем формулирования нескольких рациональных гипотез об этих механизмах в виде математических моделей, приспособления к ним числовых данных и выбора в качестве "истинной" той модели, которая обнаруживает максимальное правдоподобие.

При таком определении цели эконометрики имеются два преимущества. Во-первых, эконометрика не смешивается с математической статистикой, а лишь использует часть ее аппарата. Потенциально из математической статистики все может быть использовано в эконометрике. Однако в большинстве случаев на практике применяются те методы, которые постулируют нормальное распределение Гаусса-Лапласа. Ошибок наблюдаемых величин изучаемой переменной.

Во-вторых, эконометрика не является единственным методом количественного исследования экономических связей (отношений). Ряд структурных аспектов экономики может быть исследован также при помощи других методов, помимо тех, которые содержатся в данном определении эконометрики (например, модели "затраты выпуск" В.Леонтьева). В данной модели механизм трансформации промежуточной продукции (производственное потребление) в общую продукцию показан непосредственными числовыми измерениями.

Эконометрика как метод познания имеет свои границы. Но познание должно достигнуть этих границ с тем, чтобы выйти за их пределы при помощи других методов. Переход этих границ почти невозможен при помощи количественных методов. Это можно сделать лишь при помощи методов чисто рационалистических или даже интуитивных. Поэтому можно сказать, что эконометрическое изучение экономических явлений представляет собой этап или ступень в процессе познания. Если даже во многих случаях этот метод не разрешает, а напротив, создает или вскрывает противоречия и пробелы в экономических исследованиях, именно этим он дает чрезвычайно много. Мир предстает перед экономистом совсем иным до и после изучения эконометрики.

Эконометрика является дальнейшим последовательным развитием, усовершенствованием и детализацией численных методов математической экономики.

Опыт количественных исследований в экономике показывает, что существует много ступеней в процессе построения эмпирической модели из рационалистически созданной. Прежде всего перед нами исследуемый объект или процесс. Различные математические модели выражают его более или менее детально или в целом. Затем регистрируются сигналы, которые исходят от исследуемого объекта. Эти наблюдения являются экономической статистикой. Однако изображение очень сложного механизма взаимодействия рыночных факторов (например, продажи товаров и цен) с помощью корреляции не очень.

Эконометрия идет дальше этого упрощенного способа подхода к количественному экономическому анализу. Она исходит из того факта, что статистические сведения порождают более сложными механизмами, чем непосредственно наблюдаемые отношения.

Поэтому эконометрика исходит первоначально из экономико-математических методов, которые строят модели возможного, варианты, умозрительно изображающие механизмы, которые для исследователя являются первичными причинами, порождающими статистику. Иными словами, эконометрика рассматривает модели математической экономики как порождающие статистику механизмы, а затем выбирает для данной статистики модель, которая может считаться наиболее приемлемым ее генератором. Эконометрика является таким методом испытания математических моделей - единственный вид испытаний, который доступен экономическим наукам вследствие того, что объект их исследования не может вместиться в лабораторный эксперимент. Преимущества, так же и ограничения, эконометрического метода будут проявляться постепенно, в процессе его изучения, в аспекте противоречия между сигналом и моделью.

Эконометрия применяется там, где заранее не известны некоторые общие, хотя и существенные, черты изучаемой структуры в подобных случаях и модель должна быть очень общей, чтобы ее можно было приспособить к особенностям производства.

Производственная деятельность состоит в комбинировании векторов производства в условиях, определенных границами находящихся в распоряжении факторов, сообразно с целью производства. По завершении деятельности получают множество сведений о результатах и факторах производства. Это статистика, которая составляет первичный материал для эконометрии. В самом деле, эконометрика исходит из этой системы данных и пытается восстановить механизм, при помощи которого одни трансформируются в факторы, а другие - в результаты (цели).

Эконометрика означает воспроизводство числовых моделей эконометрических структур и механизмов на основе имитируемых ими сигналов, которые нам известны в форме статистических данных.

Эконометрика выдвигает определенные гипотезы об исследуемой функции и выбирает параметры функции (оценки) таким образом, чтобы они соответствовали (с максимальной вероятностью) гипотезам, выдвинутым относительно их свойств. Эконометрика располагает только таким знанием, которое, с одной стороны, очень невелико, а с другой - имеет неоценимое достоинство.

Все эконометрические методы созданы на принципах вероятности, однако их познавательная деятельность различна в естественных науках и науках об обществе. Задача построения эконометрической модели состоит в том, чтобы найти ответ на вопрос: изменяется ли переменная величина случайно (стахостически), например, в результате ошибки измерения, или, напротив, систематически.

Ошибка - одна из основных понятий эконометрики. Определение и сведение ее к минимуму в наших измерениях считается предварительным условием построения моделей для предвидения.

Ошибки измерения бывает двоякого рода: неполнота спецификации исследуемого объекта. Ошибка агрегирования наиболее велики в макроэкономических моделях. Основная цель эконометрических исследований - восстановление структур, не поддающихся непосредственному наблюдению, которые связывают между собой экономические переменные.

Понятие нормального распределения - главное в эконометрии и вполне позволяет определить ошибки между ожидаемой величиной переменной и ее реальной величиной.

Для экономиста вся проблема заключается в установлении различий между ошибкой измерения и ошибкой в оценке эконометрических функций.

Цель эконометрики состоит не в простом применении математико-статистических методов к схематизации рядов наблюдаемых данных с помощью функций и уравнений, а в выявлении внутренних структур, порождающих значение этих данных. Необходимость решения задач такого рода привела к созданию некоторых специфических эконометрических методов оценок, связанных с проблемами идентификации экономических структур.

Эконометрика является техникой выявления или идентификации механизмов, при помощи которых одно множество переменных X превращается в другое - Y. Эти механизмы могут быть удовлетворительными и убедительными моделями для других механизмов, посредством которых в "реальном мире" экономики определенные факторы (X) превращаются в определенные результаты (Y). Но при исследовании тренда национального дохода, например, мы не получим модели механизма, который преобразует время в заработную плату, прибыль, налоги и т.д. В конечном счете время является средством эконометрического анализа, не будучи само по себе предметом исследования.

1.3. Эконометрическое моделирование

Эконометрические модели дают полезную и существенную информацию для анализа, синтеза и прогноза экономических процессов, если они базируются на теоретических положениях экономической теории, учитывают многосторонние взаимосвязи экономических показателей, обеспечивают многовариантность принятия хозяйственных решений, а также доступны для применения на практике. Соблюдение этих требований обеспечивается в процессе построения и использования экономической модели.

Вопросы математического описания, качественной формализации, количественного определения и проверки различных гипотез и прогнозных свойств эконометрических уравнений рассматриваются нами с учетом возможности их практической реализации в процессе принятия решений.

Методика построения моделей эконометрического типа включает пять этапов:

1. ***Спецификация или формулировка модели***. На основе глубокого качественно-логического и количественно-математического анализа исследуются важнейшие стороны, особенности и закономерности экономического процесса, уточняется круг синтетических показателей, которые могут в простом и сжатом виде описать процесс расширенного воспроизводства в народном хозяйстве, представить отдельные уровни системы. Определяется характер и степень взаимозависимостей экономических показателей и механизм их функционирования, делается отбор факторов-аргументов и результативных (функциональных) показателей, уточняются форма связи зависимой и независимых переменных, вопросы их математической формализации. Решаются вопросы соразмерности и агрегирования производственных ресурсов в производственной функции. Этап заканчивается формальным описанием будущей эконометрической модели.

2. ***Сбор и подготовка необходимой информации*** для расчета уравнения регрессии. Вопрос информационного обеспечения эконометрических моделей является одним из ответственных на сегодняшний день. Как правило, приходится использовать динамические временные ряды, которые отражают эволюцию экономических процессов, но не всегда сопоставимы в связи с различием цен на товары и услуги в динамике или изменением ареала региона, района, республики. Пространственная выборка связана с организационными трудностями и требует много времени. Следовательно, обеспечение эконометрической модели эмпирическими результатами требует умелого и творческого подхода к данным временных рядов и компромиссного решения некоторых возникающих в ходе исследования вопросов.

3. ***Оценка параметров эконометрических уравнений, проверка доверительных интервалов и гипотез***. Параметры эконометрических уравнений оцениваются способом наименьших квадратов (или двух шагового метода наименьших квадратов), если уравнения регрессии линейные или приведены к ним, либо методом максимума правдоподобия. Выбор метода оценки параметров стохастической структурной системы зависит в основном от спецификации модели. Следует отметить, что коэффициенты структурных выражений по способу наименьших квадратов дают в общем неустойчивые оценки. Однако этот способ дает устойчивые оценки для случая диагональной рекурсивной системы.

С точки зрения технологии проводимых расчетов, существуют два способа оценки параметров комплексных эконометрических уравнений линейного типа:

- пошаговое вычисление параметров отдельных уравнений и подстановка найденных значений переменных низшего порядка в уравнения, относящиеся к высшему порядку. В некоторых случаях сначала образуется система уравнений более высокого порядка относительно эндогенных переменных путем подстановки в них уравнений низшего порядка и далее решается эта система;
- одновременное нахождение коэффициентов всех эндогенных переменных путем решения системы совместных регрессионных уравнений, что связано с переходом от системы структурных уравнений к приведенной; в этом случае вычисляется так называемая матрица мультипликаторов и проверяется ее устойчивость. Говоря языком эконометрии, при этом необходимо решить проблему идентификации.

По треугольной структуре рекурсивной системы оцениваются параметры в отдельных уравнениях, а подстановка предопределенных переменных дает прогнозную величину зависимой и множества независимых переменных.

В практических расчетах использование одного из описанных способов зависит от ряда обстоятельств, и выбор альтернативы решается конкретно с учетом размерности и качества спецификации модели. После оценки параметров системы эконометрических моделей приступают к проверке подобранной линии регрессии. При этом анализируется дисперсия, вычисляются доверительные интервалы параметров (t-критерий Стьюдента), проверяется существенность коэффициента детерминации, а также гипотеза отсутствия автокорреляции остатков (критерий Дарбина-Уотсона *DW*), завершается этот этап определением области прогноза на производственной поверхности *XY*. В настоящее время методика расчета этих параметров и проверка гипотез в экономической литературе описана и не требует подробного освещения.

4. ***Оценка прогнозных свойств эконометрической модели***. Проводится серия экспериментальных расчетов по модели, исследуется влияние перехода от применения отдельных уравнений для каждого показателя к их определению из системы уравнений. Для проверки качества отображения закономерностей исследуемого периода делается ретроспективный расчет экономических показателей, анализ и синтез, а также прогнозные расчеты на перспективу, которые являются научно-аналитической информацией текущего и перспективного плана. При этом проигрываются множества вариантов прогноза с целью обеспечения сбалансированности экономической системы и согласования показателей по вертикали управления.

Для оценки прогнозных свойств модели часто в качестве критерия используется коэффициент корреляции между ретроспективными, прогнозированными и фактическими значениями зависимой переменной. Но высокий коэффициент корреляции между прогнозированной и наблюденной величинами не всегда свидетельствует о лучшей верификации, поэтому как альтернативная мера точности прогноза Тейлом был предложен коэффициент *U*:

$$U = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}\left(F_t^* - F_t\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}F_t^{*2}} + \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}F_t^2}},$$

где F_t^* - прогнозная оценка в t-м году; F_t - фактическое значение в t-м году.

Коэффициент Тейла *U* принимает значения от 0 до 1, чем выше точность прогнозирования, тем *U* ближе к нулю.

Коэффициент Тейла *U* измеряет только точность прогнозов, не дает детальной информации о направленности ошибок прогнозирования. Поэтому полезно подставить прогнозные значения (F_t^*) вместо соответствующих наблюденных значений (F_t). Разница между прогнозными и фактическими значениями показывает ошибки прогнозирования (F_t^* - F_t). При F_t^* - F_t =0 прогноз великолепный, при (F_t^* - F_t) > 0 - переоценка, при F_t^* - F_t < 0 - недооценка.

5. ***На заключительном этапе осуществляется практическая реализация модели и разрабатываются рекомендации*** по применению конкретных эконометрических моделей в совершенствовании методологии и методики перспективного планирования.

1.4. Результаты моделей и их применения в управлении экономикой

Программы сбалансированного роста и оптимизации нормы производственных вложений можно определить по моделям экономического роста, какими являются макроэкономические производственные функции. Этими вопросами занимались А.И.Анчишкин и Л.Столерю.

Допустим, рассчитана макроэкономическая производственная функция, которая учитывает изменение совокупной эффективности ресурсов:

$$Y_t = e^{\lambda t} K_t^{\mu} L_t^{1-\mu}, \tag{1}$$

где λ - темп прироста совокупной эффективности производства.

В этой функции прирост основных производственных фондов происходит с учетом эффективности использования ресурсов и морального износа:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \left(\rho - \frac{\lambda}{1-\mu}\right) K(t) \tag{2}$$

где ρ - норма выбытия основных производственных фондов.

В функции (2) национальный доход представлен как результативный показатель, зависящий от уровня и темпа материализованного технического прогресса и размеров применяемых основных производственных фондов и затрат труда. Известно, что национальный доход состоит из фонда потребления и накопления. Причем последняя компонента может быть представлена как сумма производственных и непроизводственных накоплений. Поэтому

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{3}$$

или

$$Y(t) = C(t) + I^{\text{пр}}(t) + I^{\text{н}}(t) \tag{4}$$

Норма производственного накопления

$$s(t) = \frac{I^{\text{пр}}(t)}{Y(t)} \quad \text{или} \quad I^{\text{пр}}(t) = sY(t). \tag{5}$$

В каждый момент времени обществу небезразлично, какая часть вновь созданной стоимости будет отвлечена на расширение основных производственных фондов, и она определяется в соответствии со стоящими перед обществом социально-экономическими целями. Для полного удовлетворения материальных и духовных потребностей народа необходимо оптимизировать нормы производственных вложений в сферу материального производства, которая при прочих равных условиях сможет обеспечить сбалансированный рост экономики. Для формализации макроэкономической модели допустим, что известны закономерности изменения занятости населения и среднегодовой темп ее прироста:

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \tag{6}$$

где $L(t)$ - занятость населения в сферах материального производства;

L_0 - исходный уровень;

n - темп прироста занятости.

Прирост основных производственных фондов происходит в условия выбытия функционирующих фондов, определяемого физическим и моральным износом фондов. При со-

блюдении этих условий макроэкономическая модель представляется следующими уравнениями:
уравнение занятости

$$L = L_0 e^{nt}, \tag{7}$$

производственная функция

$$Y = e^{\lambda t} K^{\mu} L^{1-\mu} \tag{8}$$

уравнение прироста основных производственных фондов

$$\dot{K} = I^{\text{пр}} - \pi K, \tag{9}$$

распределение национального дохода

$$Y = C + I^{\text{пр}} + I^{\text{н}}, \tag{10}$$

уравнение производственного накопления

$$I^{\text{пр}} = sY, \tag{11}$$

где

$$\pi = \rho - \frac{\lambda}{1-\mu}.$$

Решение приведенной системы позволяет получить дифференциальное уравнение, характеризующее закономерности изменения $\dot{K}$, т.е.

$$\dot{K} = sY - \pi K \tag{12}$$

или

$$\dot{K} = sL_0^{1-\mu} e^{[\lambda + n(1-\mu)]\cdot t} K^{\mu} - \pi K. \tag{13}$$

Из соотношения (13) далее находим функцию $K(t)$, из которой можно вычислить соответствующие значения Y, C, $I^{\text{пр}}$ **и** $I^{\text{н}}$. Система (7) - (11) с пятью неизвестными имеет единственное решение при известности начальных условий.

Рассмотрим параметры реальной производственной функции и сформулируем гипотезу об оптимальном уровне производственных вложений и условий сбалансированности. Макроэкономическая функция народного хозяйства Республики Узбекистан за 1960 - 1990 гг.

$$Y = e^{0.011} K^{0.3616} L^{0.6386}.$$

За исследуемый период темп прироста численности работников в отраслях материального производства составил $n = 3.75$, а норма выбытия основных производственных фондов по народному хозяйству республики $\rho = 3.6\%$. Из производственной функции можно получить темп прироста капитальных вложений. Для этого предположим, что темп прироста капитальных вложений (m) в прошлом происходил в одинаковой мере. Тогда

$$K_0^{\text{пр}} = \frac{I_0^{\text{пр}}}{m + \rho + \dfrac{\lambda}{1-\mu}}. \tag{14}$$

Или при известной фондоемкости $\left(K_0 / Y_0\right)$ в базисном периоде

$$m + \rho = \frac{1503.6}{8099} \cdot \frac{8099}{14600} = \frac{1503.6}{14600} = 10.3\%$$

Отсюда m+ 3.6 = 10.3 или m = 6.7%.

При допущении гипотезы о равномерном темпе прироста основных производственных фондов k из соотношения (13) получим реальное значение k за исследуемый период:

$$\frac{\dot{K}}{K} = k = sL_0^{1-\mu} e^{[\lambda + n(1-\mu)]t} K^{-(1-\mu)} - \rho. \tag{15}$$

Поскольку $K^{-(1-\mu)} e^{[\lambda + n(1-\mu)] \cdot t}$ - величина постоянная, k должно удовлетворять условие

$$(1-\mu) + n(1-\mu) = 0 \tag{16}$$

Из выражения (15)

$$k = n + \frac{\lambda}{1-\mu}. \tag{17}$$

За период 1960 - 1990 гг. для народного хозяйства Республики Узбекистан

$$k = 37{,}5 + \frac{1{,}1}{0{,}6385} = 5{,}5\%.$$

При известных k и ρ норма производственного накопления, связанная со сбалансированным ростом, находится из выражения

$$k = sK^{\mu} L^{1-\mu} - \rho, \tag{18}$$

которое позволяет исчислить уровень:

$$s_0 = (k + \rho)\frac{K_0}{Y_0}. \tag{19}$$

В нашем примере $s_0 = (5{,}5 + 3{,}6) \cdot 1{,}8 = 16{,}38$ %.

Следовательно, в среднем за рассматриваемый период темп оптимального сбалансированного роста народного хозяйства Республики Узбекистан составляет 5.5%, норма производственного накопления, обеспечивающая этот рост, равна 16.38%. Анализ фактических данных показывает, что темпы роста основных производственных фондов значительно опережали темпы выпуска чистой продукции и за 1960-1990 гг. в среднем составили 11.4%, т.е. в 2 раза выше оптимального. Для сравнения отметим, что фактическая норма производственных вложений в народное хозяйство в 1960 г. составила 11.2%, 1970 г. - 14.2%, 1980 г. - 18.2%,, 1985 г. - 17.2%, 1990 г. - 17.0%.

При определении рациональной нормы производственных вложений необходимо принимать во внимание следующее обстоятельство. Если рост основных средств производства опережает увеличение объемов производства, то коэффициент производственной силы общественного труда будет ниже единицы, что приведет к замедлению темпов роста производительности труда. Иначе говоря, быстрое увеличение средств производства может сопровождаться нерациональным их использованием и отставанием уровня квалификации.

В настоящее время сложилось несоответствие между темпами роста фондовооруженности и производительности труда, в результате этого замедлились темпы роста производительности общественного труда. Одним из путей разрешения этого несоответствия является рациональное использование производственных фондов, повышения в их составе доли активных фондов, коэффициента сменности и профессионально-технического и образовательного уровня работников.

Сложившийся уровень эффективности производственных фондов свидетельствует о том, что для народного хозяйства Республики Узбекистан за 1960-1990 гг. среднегодовая оптимальная норма производственного накопления составила 16.38%. Оптимальная норма накопления позволяет перейти из несбалансированного состояния экономической системы в сбалансированное, в котором интересы потребления и накопления сочетаются на оптимальной основе.

Из соотношения (19) можно констатировать, что норма производственных вложений зависит от оптимального темпа прироста производственных фондов, нормы их выбытия и уровня фондоемкости.

Следовательно, для ускорения технического прогресса на основе наращивания объемов производственных фондов при прочих равных условиях необходимо существенно снизить уровень фондоемкости, перейти к фондосберегающему типу технического прогресса. В свою очередь оптимальный темп прироста производственных фондов в прямой пропорциональности зависит от темпа прироста занятости и совокупной эффективности ресурсов. Поэтому актуальное значение приобретает проблема рационального использования функционирующих фондов.

Норма производственных вложений характеризует издержки воспроизводства фондов: чем она ниже, тем на единицу выше их вклад в конечные результаты производства, превышающий потребности воспроизводства самих фондов. По методике [36] вклад производственных фондов в конечные результаты производства может быть исчислен из соотношения

$$\alpha \frac{Y_t}{K_t} - s \frac{Y_t}{K_t} = (\alpha - s) \frac{Y_t}{K_t},$$

для народного хозяйства республики он составляет 0.25, или 25%.

Аналогично можно рассчитать вклад факторной производительности живого труда по формуле А.И.Анчишкина

$$(\beta - b) \frac{Y_t}{L_t}.$$

Параметры s и b отражают процесс экономического роста с точки зрения затрат на простое и расширенное воспроизводство производственных ресурсов. Такая оценка необходима для анализа экономического роста с позиции соотношения издержек на простое и расширенное воспроизводства производственных ресурсов и их эффективности. Кроме того, информация об оптимальном уровне производственных вложений при различных вариациях темпа прироста производственных фондов и нормы выбытия служит для реализации нормативного подхода при среднесрочном прогнозировании. Варианты выбора оптимальной нормы производственных вложений при K_0/Y_0= 1,8 % (табл. 1).

Как видно из приведенных данных, увеличение на 1% (при фиксированных значениях фондоемкости и нормы выбытия) темпы прироста производственных фондов сопровождается увеличением нормы вложений на 1.8%.

Таблица 1.

	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13
2,0	14,4	16,2	18,0	19,8	21,6	23,4	25,2	27 ,0
2,5	15,3	17,1	18,9	20,7	22,5	24,3	26,1	27,9
3,0	16,2	18,0	19,8	21,6	23,4	25,2	27,0	28,8
3,5	17,1	18,9	20,7	22,5	24,3	26,1	27,9	29,7
4,0	18,0	19,8	21,6	23,4	25,2	27,0	28,8	30,6
4,5	18,9	20,7	22,5	24,3	26,1	27,9	29,7	31,5
5,0	19,8	21,6	23,4	25,2	27,0	28,8	30,6	32,4
5,5	20,7	22,5	24,3	26,1	27,9	29,7	31,5	33,8
6,0	21,6	23,4	25,2	27,0	28,8	30,6	32,4	34,2

В пределах рассмотренного подхода и как его естественное развитие возникает проблема определения нормы производственных вложений и на отраслевом уровне. Отраслевая норма вложений также формируется под влиянием разнообразных факторов экономического роста и конкретных форм производственной функции. Для определения ее величины по отраслям нами использована производная информация, получаемая от функций, присутствующих в модели "Узбекистан-2". За 1960-990 гг. оптимальный темп прироста основных производственных фондов промышленности составляет

$$k^{\text{пр}} = 4{,}3 + \frac{2}{0{,}9816} = 6{,}34\%.$$

Оптимальная норма производственных вложений, обеспечивающая сбалансированный рост, при этом

$$S_{\text{опт}}^{\text{пр}} = (6{,}34 + 2{,}1)\cdot 1{,}7 = 14{,}4\%.$$

В сельскохозяйственном производстве Республики Узбекистан темпы сбалансированного роста производственных фондов в некоторой мере выше, чем в промышленности $(k^{\text{сх}} = 3{,}6 + \dfrac{3{,}7}{0{,}9262} = 7{,}6\ \%)$ что обусловливает и высокий уровень производственных вложений:

$$S_{\text{опт}}^{\text{сх}} = (7{,}6 + 5{,}2) \cdot 1{,}94 = 24{,}9\ \%.$$

Таким образом, системный анализ параметров сельского хозяйства также подтверждает необходимость опережающего роста производственного потенциала основных фондов этой отрасли по сравнению с другими отраслями материального производства.

Наращивание объемов основных фондов сельского хозяйства на ближайшую перспективу позволит значительно укрепить материально-техническую базу отрасли и создать предпосылки для повышения его эффективности, улучшения качества продукции и роста производительности общественного труда. Для строительной индустрии Узбекистана для рассматриваемого периода характерен более высокий уровень, чем в других отраслях, темпа прироста занятости, что обусловливает соответствующий ему оптимальный темп прироста фондов:

$$k^{\text{ст}} = 5{,}3 + \frac{4{,}0}{0{,}9998} = 9{,}7\ \%.$$

Оптимальная норма производственных вложений, обеспечивающая такой темп, составляет

$$S_{\text{опт}}^{\text{ст}} = (9{,}7 + 4{,}9) \cdot 0{,}699 = 10{,}2\ \%.$$

Следовательно, в настоящее время исходя из существующей фондоемкости продукции и сбалансированного темпа прироста фондов можно принять оптимальную норму вложений в строительство на уровне 10.2%. Эти гипотетические конструкции, выведенные из условия равновесия издержек воспроизводства основных средств их факторным производительностям дают полезную информацию для обоснования экономической политики вложений в отрасли в прогнозируемом периоде.

Ключевые слова

Объект, область, метод, цели, эконометрическое моделирование, спецификация, оценки параметров эконометрических уравнений, эндогенные переменные, экзогенные переменные, макроэкономическая модель,

Контрольные вопросы

1. В чем суть понятия "эконометрика".
2. Предмет и метод эконометрики.
3. Математические методы применяемые в эконометрике.
4. Где применяется эконометрика?
5. Какие этапы построения эконометрических моделей Вы знаете?
6. Как оцениваются прогнозные свойства эконометрической модели?
7. Записать макроэкономическую модель народного хозяйства Республики Узбекистан?
8. Какие основные экономические показатели можно проанализировать, используя модель народного хозяйства Республики Узбекистан.

Литература

1. Каримов И.А. Узбекистан по пути углубления экономических реформ. -Т.: Узбекистон, 1995.
2. Каримов И.А. Узбекистан - собственная модель перехода на рыночные отношения. -Т.: Узбекистон, 1993.
3. Каримов И.А. Узбекистан - свой путь обновления и прогресса. -Т.: Узбекистон, 1992.

4. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. –М.: МЭСИ, 2001.
5. Бородич С.А. Эконометрика. –Минск: Новое знание, 2001.
6. Доугерти К. Введение в эконометрику. –М.: ИНФРА-М, 2001.
7. Ежеманская С.Н. Эконометрика. –Ростов-на Дону: Феникс, 2003.
8. Замков О.О. Математические методы и модели. -М.: ДиС, 2000.
9. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. –М.: ЮНИТИ, 2003.
10. Ивашев-Мусатов О.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособ. 2-е изд. –М.: ФИМА, 2003.
11. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
12. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. –М.: Дело, 2002.
13. Моделирование и прогнозирование экономических показателей на основе информационных технологий: Учеб. пос./Н.М.Махмудов. -Т.: ТГЭУ, 2002.
14. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. Учебное пособие. Санкт-Петербург, 2002.
15. Моррелл Д. Как делать прогнозы в бизнесе. –М.: HIPPO, 2004.
16. Нименья И.Н. Эконометрика. –СПб.: издательский Дом «Нева», 2003.
17. Эконометрика. Учебник. /под ред. И.И.Елисеевой. –М.: Финансы и статистика, 2004.
18. Экономико-математические методы и прикладные модели. Учебное пособие. / Под ред. В. В. Федосеева.. -М.: ЮНИТИ, 2001.

Интернет сайты

1. *www.center.neic.nsk.su/page_rus/bmodel.html*
2. *www.cis2000.ru/publish/books/book_56/ch32.shtml*
3. *www.cde.osu.ru*
4. *www.cemi.rssi.ru*
5. *www.ito.edu.ru*
6. *www.econ.asu.ru*

Тема 2. Основные статистические понятия

2.1. Понятие случайной переменной. Генеральная совокупность и выборка
2.2. Числовые характеристики распределения случайной величины
2.3. Среднее значение. Математическое ожидание
2.4. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины

2.1. Понятие случайной переменной. Генеральная совокупность и выборка

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Оно описывает результаты (исходы) стохастического эксперимента. Так называются эксперименты, результаты которых нельзя предугадать заранее. Приведем примеры.

Пример 1. Розыгрыш лотереи. На купленный лотерейный билет может выпасть любой из разыгрываемых в лотерее выигрышей или нет.

Пример 2. Эксперимент состоит продаже автомобилей за определенный период времени.

Определение 1. Случайной величиной называется величина (переменная), которая количественно описывает результаты эксперимента.

Рассмотрим эксперимент состоящий продажи автомобилей за один день, предполагая, что в наличии имеется 50 автомобилей.

Пусть ξ количество проданных автомобилей за день. Тогда случайная величина ξ может принимать одно из следующих значений: 0, 1, 2, 3,..., 50.

Пример 3. Эксперимент состоит проверке качество 40 телевизоров. ξ - количество дефектных телевизоров, тогда оно может принимать значений: 0, 1, 2,..., 40.

Случайные величины разделяют на два типа:

- дискретный;
- непрерывный.

Случайная величина ξ называется дискретной, если она принимает конечное или счетное (1, 2, 3,...) число значений.

Количество проданных автомобилей за день, количество бракованных телевизоров в определенный период времени, количество клиентов пришедшие в банк в течение дня, чтобы сделать какое-либо операцию и т.д. являются дискретными случайными величинами.

Случайная величина ξ называется непрерывной, если всевозможные значение полностью покрывает некоторый интервал $[a, b]$.

Другими словами, непрерывные случайные величины принимают значение из некоторого интервала $[a, b]$. Такие величины встречаются, когда мы имеем дело с измерением весов, времени или температуры. Например, поезда метро идут в данном направлении с интервалами 3 мин. Пусть ξ время ожидания пассажира. Тогда ξ может принимат любое число из интервала [0, 3], т.е. $0 \leq \xi \leq 3$.

Пусть ξ - курс доллара по отношению сума на какомто бирже и рынке ценных бумаг. Тогда $90.2 \le \xi \le 95.6$

Перед тем как дать понятие распределение дискретной случайной величины, мы найдем распределение числа проданных автомобилей фирмы UzDAEWOO за последней год (Таблица 1).

Таблица 1.

Продажа автомобилей за день

Объем продажи	**Количество дней**
не продано	54
продан 1 автомобиль	117
продана 2 автомобиля	72
продана 3 автомобиля	42
продана 4 автомобиля	12
продана 5 автомобиля	3
И Т О Г О	300

Если ξ - число проданных автомобилей за день, то оно принимает значение 0, 1, 2, 3, 4, 5. Из таблицы 1 видно, что максимальное число проданных автомобилей за день равно 5. Случайная величина ξ принимает конечное числовое значение (шесть) и поэтому дискретна.

Обозначим через P_k вероятности того, что случайная величина ξ принимает значение k т.е.

$$P_k = P(\xi = k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Тогда P_0 - вероятность того, что число проданных машин за день равно 0.

В теории вероятностей вероятность любого события A - это есть число между 0 и 1, которая характеризует измерения объективной возможности наступления события A.

Напимер, если $P(A)=0.8$, то это означает, что событие A происходить в среднем 80% случаях.

Если событие не произойдет не когда, то $P(A)=0$. Если же оно всегда происходить, то $P(A)=1$.

Теперь вернемся к нашему примеру. Из таблицы 1 видно, что 54 дня не было продано не одной машины, а всего 300 дней были заняты продажей автомобилей. Доля непроданных не одного автомобиля равно (54/300)=0.18, поэтому $P_0=P(\xi=0)=0.18$. Другими словами 18% из наблюденных дней (300) нами не было продано не одного автомобиля.

Аналогично находим остальные вероятности:

$$P_1 = P(\xi=1)=117/300=0.39$$
$$P_2 = P(\xi=2)=72/300=0.24$$
$$P_3 = P(\xi=3)=41/300=0.14$$

$$P_4 = P(\xi=4)=12/300=0.04$$
$$P_5 = P(\xi=5)=3/300=0.01$$

Вероятность P_k , $k \geq 0$ должны удовлетворят условием:

$$P_k \geq 0, \quad \sum_{k\geq 0} P_k = 1.$$

2.2. Числовые характеристики распределения случайной величины

Законом распределения (или просто распределением) дискретной случайной величины называется совокупность пар чисел (x_i, P_i), где x_i - возможные значения случайной величины, а P_i - вероятности, с которыми она принимает эти значения, причем $\sum P_i =1$.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

ξ	x_1	x_2	...	x_k	...
P	P_1	P_2	...	P_k	...

Число проданных автомобилей имеет следующий ряд распределений:

ξ :	0	1	2	3	4	5
P :	0.18	0.39	0.24	0.14	0.04	0.01

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, его изображают графически (Рис.1.): на оси $0X$ наносят точки x_i и приводят из них перпендикуляры длиной P_i .

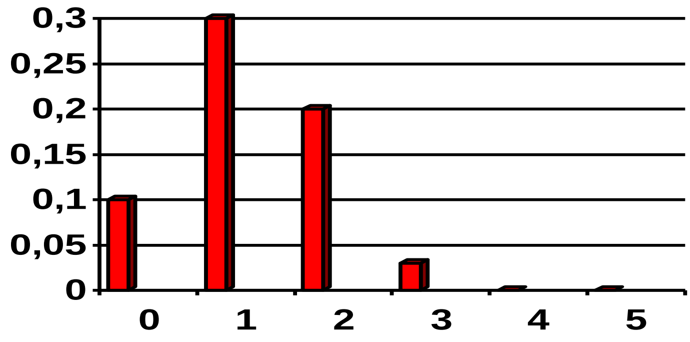


Рис. 1. Число проданных автомобилей.

Закон распределения непрерывной случайной величины в отличие от дискретной задается (или определяется) так называемой плотностью распределения вероятностей или плотностью распределения $P(x)$.

Плотность вероятности обладает следующими свойствами:

1. $P(x) \geq 0$ для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[\alpha, \beta]$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=P(x)$, осью $0x$ и прямым и $x=\alpha$, $x=\beta$.

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} P(x)dx.$$

На рис.2 изображена плотность распределения вероятности $P(x)$ и заштрихована площадь фигуры равна вероятностей $P(\alpha \leq \xi \leq \beta)$.

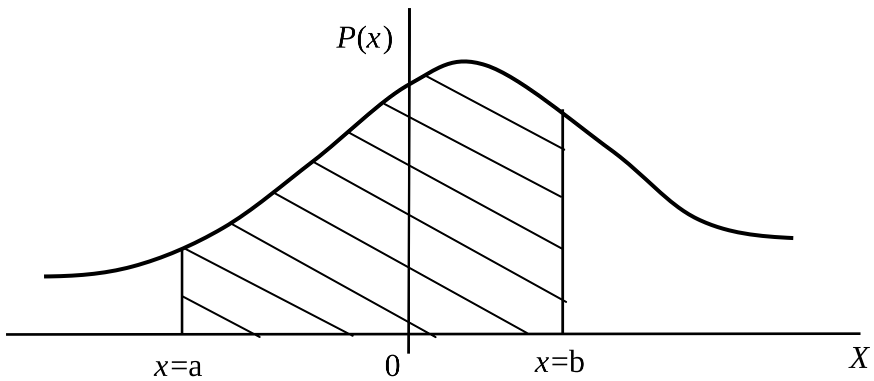


Рис. 2. Плотность распределения вероятности $P(x)$

3. Площадь ограниченной кривой $y=P(x)$ и осью $0x$ равна единице, т.е.

Примеры на закон распределения непрерывной случайной величины будут приведены в следующем параграфе.

2.3. Среднее значение. Математическое ожидание.

Математическим ожиданием или средним значением случайной величины называется число $M\xi$, которое вычисляется по формуле:

$$M\xi = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot P_k, & \text{если } \xi \text{ дискретная случайная величина} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x)dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывная случайная величина} \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание число проданных автомобилей фирмы UzDAEWOO за день:

$$M\xi = 0{\cdot}0{,}18 + 1{\cdot}0{,}39 + 2{\cdot}0{,}24 + 3{\cdot}0{,}14 + 4{\cdot}0{,}04 + 5{\cdot}0{,}01 = 1{,}50$$

Среднее значение случайной величины ξ равно 1.50 или другими словами в среднем 1.50 автомобилей будет продано за день. Знать среднее значение случайной величины очень важно в управлении производством или более точно в планировании и принятия решений. Например, сколько автомобилей будет продано в течении следующих трех месяцев? Так как в среднем 1.5 автомобилей продается в день, то за три месяца будет продано $90*1.5=135$ автомобилей. Это дает полезную информацию для принятия решений.

Отметим, что математическое ожидание - это постоянное число, описывающей центр распределения.

Рассмотрим свойства математического ожидания.

1^0. Математическое ожидание постоянной равна этой постоянной, т.е. если C - постоянная, то:

$$MC = C$$

2^0. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C\cdot\xi) = C\cdot M\xi$$

3^0. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин:

$$M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$$

Пример 3. Известно, что в оптовой торговле цена товара зависить от объема партии. Пусть цена 1 кг сахара зависить от объема проданных партии товара следующим образом:

$$\xi_1 = 50 - (\xi_2/10),$$

где ξ_1 - цена (в тыс. сумах) одной тонны сахара;

ξ_2 - объем партии в тоннах.

Предположим, что средней объем партии равна 250 тонн, т.е. $M\xi_2$=50 тонн. Вычислить среднюю цену 1 кг сахара в оптовой торговле.

В силу свойств 1^0 - 3^0 математического ожидания имеем:

$$M\xi_1 = M(50+(-1/10)\cdot\xi_2) = M(50)+M((-1/10))\cdot\xi_2)=$$
$$= 50 - (1/10)\cdot M\xi_2 = 50 - (250/10) = 25 \text{ тыс.сум.}$$

На практике часто требуется оценить рассеивание возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. На первый взгляд может показаться, что проще всего вычислить все возможные значения отклонения ξ - $M\xi$ случайной величины и затем найти их среднее значение. Однако среднее арифметическое отклонение может быть равно нулю, хотя сами отклонения будут большими по модулью. Это объясняется тем, что значения могут иметь противоположные знаки и взаимно погашаться при нахождении среднего арифметического.

2.4. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Для характеристики рассеивания вычисляют дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины ξ называется число $D\xi$, равное математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

$$D\xi = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - M)^2 \cdot P_k, & \text{если } \xi \text{ дискретная случайная величина} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \cdot P(x)dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывная случайная величина} \end{cases}$$

Дисперсию общее принята обозначать $\sigma^2 = D\xi$. Теперь вычислим дисперсию чисел проданных автомобилей за день:

$$\sigma^2 = (0-1,5)^2 \cdot 0,18 + (1-1,5)^2 \cdot 0,39 + (2-1,5)^2 \cdot 0,24 + (3-1,5)^2 \cdot 0,14 +$$
$$+ (4-1,5)^2 \cdot 0,04 + (5-0,5)^2 \cdot 0,01 = 2,25 \cdot 0,18 + 0,25 \cdot 0,39 +$$
$$+ 0,25 \cdot 0,24 + 2,25 \cdot 0,14 + 6,25 \cdot 0,04 + 12,25 \cdot 0,01 = 1,25$$

Дисперсия случайной величины как характеристика рассеивания имеет одну неприятную особенность: ее размерность, как видно из определения дисперсии, равна квадрату размерности случайной величины ξ. Поэтому для характеристики отклонений случайной величины ξ, имеющих размерность, одинаковую с размерностью случайной величины, вводится понятие среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется арифметический корень из дисперсии, т.е. $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D\xi}$. Для нашего примера $\sigma = \sqrt{1.25} = 1.118$. Это означает, что число проданных автомобилей отклоняется от среднего числа проданных автомобилей на 1,118 единиц за день.

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение характеризуют степень рассеивания случайной величины относительно ее математического ожидания: чем больше дисперсия или среднеквадратическое отклонение, тем больше степень рассеивания случайной величины.

Рассмотрим еще один пример. Продавец мороженного в солнечный день может продать мороженное на $160, а в дождливый - на $20. Какова ожидаемая выручка (дневная), если вероятность того, что день окажется дождливым, равна 0,35?

Пусть ξ - возможная выручка в дождливые и солнечные дни. Тогда имеет следующее распределение:

ξ:	20	160
P:	0.35	0.65

Так как ξ - дискретная случайная величина и ожидаемая выручка - это математическое ожидание $M\xi$=20·0,35+160·0,65=\$111, то продавец может продать мороженное на \$111.

Среднее квадратическое отклонение ожидаемой дневной выручки равна:

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{(20-111)^2 \cdot 0.35 + (160-111)^2 \cdot 0.65} = \$67.$$

Возможная выручка в дождливые и солнечные дни отклонится от ожидаемой выручки на \$67.

Таким образом, зная введенные две числовые характеристики случайной величины - математическое ожидание $M\xi$ и среднее квадратическое отклонение σ, получаем ориентировочное представление о пределах возможных значений случайной величины.

Рассмотрим свойства дисперсии.

1^0. Дисперсия постоянной C равна нулю:

$$DC = 0.$$

2^0. Дисперсия произведения случайной величины ξ на постоянную C равна произведению дисперсии случайной величины ξ на квадрат постоянной:

$$D(C\cdot\xi) = C^2\cdot D\xi.$$

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются независимыми, если совместный закон распределения этих величин равна произведению законов распределения ξ_1 и ξ_2.

3^0. Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсией:

$$D(\xi_1+\xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2.$$

В общем случае, т.е. если ξ_1 и ξ_2 произвольные случайные величины, то

$$D(\xi_1+\xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 + 2\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2),$$

где cov(ξ_1, ξ_2) - ковариация случайных величин ξ_1 и ξ_2, определения которого дано в следующем параграфе.

Рассмотрим пример с оптовой торговле сахаром, т.е.

$$\xi_1 = (50-(1/10)\cdot\xi_2)$$

здесь ξ_1 -цена в сумах одной тонны сахара, а ξ_2 - объем сахара в тоннах.

Предположим, что средний объем партии равна 250 тонн, а среднее квадратическое отклонение 50, т.е. $M\xi_2$=50, $D\xi_2$=25. Известно, что при таком объеме партии средняя цена одной тонны сахара равна $M\xi_1$=25 тыс.сум. Насколько отклонится цена 1 тонны сахара от средней цены?

В силу свойств дисперсии 1^0 - 3^0 имеем:

$$D\xi_1=D(50+((-1/10)\cdot\xi_2)=D(50)+D((-1/10)\cdot\xi_2)=$$
$$=0+(-1/10)^2\cdot D\xi_2=(1/100)\cdot D\xi_2$$

Следовательно

$$\sqrt{D\xi_1}=\sqrt{(1/100)D\xi_2}=(1/10)\sqrt{D\xi_2}=(1/10)\cdot 25=2.5$$

Это означает, что цена одной тонны сахара в оптовой продаже отклоняется от средней цены сахара на 2,5 тыс.сум.

Ключевые слова

Случайная величина, закон больших чисел, дискретная и непрерывная случайная величина, математическое ожидание, вариация, частота, частость, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

Контрольные вопросы

1. Что такое случайная величина ?
2. Виды случайных величин.
3. Распределение случайной величины. Законы распределения.
4. Среднее значение дискретной и непрерывной случайной величины.
5. В чем отличие дисперсии от среднеквадратического отклонения?
6. Какой из показателей удобно использовать в экономическом анализе и почему?
7. Свойства дисперсии.
8. Ковариация и ее свойства.

Литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. –М.: МЭСИ, 2001.
2. Бородич С.А. Эконометрика. –Минск: Новое знание, 2001.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику. –М.: ИНФРА-М, 2001.
4. Ежеманская С.Н. Эконометрика. –Ростов-на Дону: Феникс, 2003.
5. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. –М.: ЮНИТИ, 2003.

6. Ивашев-Мусатов О.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособ. 2-е изд. –М.: ФИМА, 2003.
7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
8. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. –М.: Дело, 2002.
9. Нименья И.Н. Эконометрика. –СПб.: издательский Дом «Нева», 2003.
10. Эконометрика. Учебник. /под ред. И.И.Елисеевой. –М.: Финансы и статистика, 2004.

Интернет сайты

1. *www.center.neic.nsk.su/page_rus/bmodel.html*
2. *www.econ.asu.ru*
3. *www.tsure.ru*
4. *www.wsu.ru*
5. *www.economics.com*
6. *www.stat.mesi.ru*

Тема 3. Статистические распределения случайной величины

3.1. Биномиальное распределение.
3.2. Геометрическое распределение. Распределение Пуассона.
3.3. Нормальное распределение. Основные параметры стандартного распределения. Табуляция значений распределения стандартной случайной величины.
3.4. Логнормальное распределение.
3.5. Хи–квадрат распределение. Распределение Стьюдента и Фишера.

3.1. Биномиальное распределение

В теории вероятностей в основном существует два типа распределений - дискретные и непрерывные. Известно, что каждому распределению соответствует некоторая случайная величина и наоборот. Если случайная величина соответствующей некоторому распределению является дискретной, то и распределение называется дискретной. Значит закон распределения дискретной случайной величины есть дискретной распределение. Аналогично закон распределения непрерывной случайной величины называется непрерывным распределением. Здесь приведем важнейшие распределения, которые широко используются в экономике.

Рассмотрим опыт (эксперимент) который удовлетворяет следующим условиям:

- эксперимент состоит из последовательности n испытаний;
- каждое испытание имеет два исхода (успех и неудача);
- вероятности этих двух исходов не меняется от испытаний к испытаний;
- каждое испытание не зависит друг от друга, другими словами исход первого испытания не зависит от остальных и наоборот (независимые испытание).

Такие эксперименты получили название схемы Бернулли.

Биномиальное распределение является вероятностным законом схемы Бернулли.

Пусть p вероятность успеха, т.е. $p=P(Y)$, $0 < p < 1$, тогда $q=1-p$ - вероятность неудачи, и S_n - число появлении "Удач" в n испытаниях. Тогда $P(k)=P(S_n=k)$ - есть вероятность того, что "Удача" наступит k раз при n испытаниях, а остальные $n-k$ раз наступит неудача.

Случайная величина S_n являясь дискретной случайной величиной, принимает целочисленные значения от 0 до n и ее множество значений: $0,1,2,...,n$. Ряд распределения случайной величины S_n имеет следующий вид:

X_i	0	1	2	...	n
P_i	$C^0_n p^\infty q^n$	$C^1_n pq^{n-1}$	$C^2_n p^2 q^{n-2}$	...	$C^n_n p^n q^0$

и называется биномиальным распределением, потому что вероятности

$$P(k)=P(S_n=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (1)$$

можно рассматривать как члены бинома $(p+q)^n$, здесь

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad n!=1,2,3,\dots,n.$$

Для того, чтобы продемонстрировать биномиальное распределение рассмотрим опыт состоящий из покупателей входящих в обувной магазин. Управляющим установлена, что каждый покупатель вошедший в его магазин с вероятностью 0,30 делает покупку. Каково вероятность того, что из следующих трех покупателей ровна двое сделают покупки?

Сначала мы хотим показать, что три клиента входящий в обувной магазин и решившие сделать покупки может быть рассмотрены как схема (испытание) Бернулли. Для этого проверим следующие четыре требований (условия):

- эксперимент может быть описан как последовательности трех одинаковых испытаний. Испытание - это есть вхождение каждого покупателя в магазин;
- исход испытание равен двум. Покупатель сделает покупку (успех) или не сделает покупку (неудача);
- каждый покупатель может сделать покупки с вероятностью 0,30 (вероятность успеха) и с вероятностью 0,70 (вероятность неудачи) не сделает покупки;
- каждый покупатель независимо друг от друга делает покупку (решает вопрос о покупки).

Таким образом, если мы определим случайную величину S_3 - число покупателей сделавший покупку (т.е. число успехов в трех испытаниях), то эта величина удовлетворяет все условия биномиального распределения.

В этом примере n=3, вероятность покупки p=0,30 и мы можем вычислить вероятность того, что двое сделают покупки.

$$P(2)=\frac{3!}{2!\cdot 1!}(0{,}3)^2(0{,}7)=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1}(0{,}3)^2(0{,}7)=0{,}189.$$

Аналогично, вероятность того, что из трех покупателей некто не сделает покупки равна:

$$P(0)=\frac{3!}{0!3!}(0{,}3)^0(0{,}7)^3=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}(0.7)^3=0.343.$$

В силу формулы (1) вероятность того, что из трех покупателей сделает покупки один и трое равна соответственно $P(1)$=0,441, $p(3)$=0,027.

Таблица 1.

Распределение вероятности число покупателей сделавшие покупки

k	0	1	2	3
$p(k)$	0,343	0,441	0,189	0,027

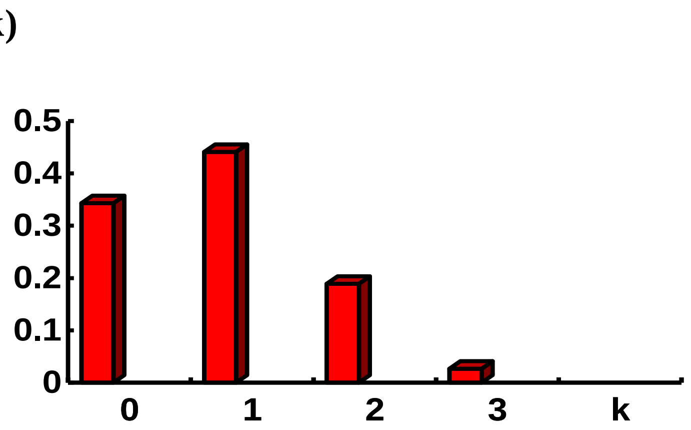


Рис.3.

Если мы вместо трех покупателей рассмотрим например, 10 клиентов входящих в магазин и следует найти вероятность того, что из 10 покупателей сделают покупки ровна четыре. Тогда это вероятность равно

$$P(4) = \frac{10!}{4!\cdot 6!}(0{,}3)^4 \cdot (0{,}7)^6 = 0.2001.$$

В этой биномиальной схеме n=10, k=4, p=0,3. Биномиальное распределение табулирована и поэтому легко и быстро находим значение P(4)=0,2001, не обращаясь к формуле (1).

Вычислим теперь среднее число покупателей сделавшие покупки:

$$\mu = \sum_{k=0}^{3} k \cdot p_k = 0 \cdot 0{,}343 + 1 \cdot 0{,}441 + 2 \cdot 0{,}189 + 3 \cdot 0{,}027 = 0{,}9.$$

Заметим, что этот результат мы можем получить очень просто перемножив количество испытаний к вероятности успеха, т.е.

$$n \cdot p = 3 \cdot 0{,}3 = 0.9$$

Математическое ожидание случайной величины распределенной по биномиальному закону, равна произведению числа испытаний и вероятности появления успеха, т.е.

$\mu = n \cdot p$	(2)

Предположим, что в течении следующего месяца ожидается посещение 1000 покупателей обувной магазин. Найти среднее число покупателей сделавшие покупки. В силу (2)

$$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}3 = 300.$$

Для того, чтобы увеличить среднее число продаж магазин должен побуждать заинтересованность многих покупателей, чтобы они вошли в магазин или каким либо другим образом увеличить вероятность покупки любого покупателя.

Дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равна числу испытаний умноженному на вероятности появления p и не появления 1-p успеха в отдельном испытании, т.е.

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p).$$

Для нашего примера (задача о покупателей обувного магазина) дисперсия и среднеквадратическое отклонение равна:

$$\sigma^2 = 3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.63$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.63} = 0.79.$$

Нетрудно заметить, что биномиальное распределение определяется с помощью двух параметров - числом испытаний n и вероятностью успеха p. Числовые характеристики, т.е. математическое ожидание и дисперсия также определяется этими параметрами.

3.2. Геометрическое распределение. Распределение Пуассона.

Рассмотрим эксперимент удовлетворяющий вышеуказанной схемы Бернулли. Пусть X - число испытаний, которое нужно выполнить до первого появления "Удач ". Тогда X - дискретная случайная величина принимающая значение 1, 2, 3,... . Ряд распределения этой случайной величины имеет следующий вид:

X_i	1	2	3	...	k	...
p_i	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	...	$q^{k-1} \cdot p$	...

и называется геометрическим распределением, потому что вероятности

$$P_k = P(x=k) = q^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \dots .$$

является геометрической прогрессией со знаменателем q, где p - вероятность успеха (или удачи), а q=1- p - вероятность неудачи.

Среднее число испытаний до первого появления удач равна

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \frac{1}{p},$$

а дисперсия,

$$DX = q/p^2.$$

Пример. Торговая фирма занимающейся продажей пластмассовых изделий заключив сделку с фирмой "Совпластитал" с вероятностью 0.75 получает определенный прибыль. Сколько необходимо заключит сделку, чтобы впервые получить прибыль?

Среднее число сделок до первого получения прибыли равна

$$MX=1/p = 1/0,75 = 4/3= 1,3$$

Среднеквадратическое отклонение равна

$$\sigma = \sqrt{q/p} = \sqrt{(1-0,75)}/0,75 = 0,5/0,75 = 0,08.$$

Здесь мы будем рассматривать такие дискретные случайные величины, которые имеют дело (связаны) с количеством появлений событий в фиксированный интервал времени. Примерами таких случайных величин являются число обрывов нити определенного сорта пряжи в течении времени T; число машин поступивших на ремонт в течение дня; число проданных товаров со склада в течение недели; число утечек в трубопроводе определенной длины и т.д.

Для применения распределение Пуассона необходимо удовлетворение следующих двух условий:

- вероятность появления события на одинаковой длины интервалов равны;
- появления или не появления события в любой интервале времени (длины) не зависит от того, что появилось или не появилось события в любом другом интервале. Ряд распределения случайной величины подчиненной закону Пуассона имеет следующий вид:
-

X_i	0	1	2	...	k	...
P_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}/1!$	$\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}/2!$	...	$\lambda^k \cdot e^{-\lambda}/k!$	...

где $\lambda > 0$, e=2,71828....

Пусть X - число (количество) кассиров пришедшие в окно банка в течении 30 минут распределена по закону Пуассона с параметром λ=6. Чему равна вероятность того, что в течении 30 минут в банк прибудут четыре кассира?

Распределение Пуассона как и другие распределение табулирована и поэтому легко по таблице (распределение Пуассона λ=6) находим

$$F(x=4)=\frac{6^4\cdot e^{-6}}{4!}=0{,}1339.$$

По этой таблице видно, что

$$P(x=15) = 0{,}0009\ ,\ P(x=16) = 0{,}0003\ ,\ P(x=17) = 0{,}0001$$

Это означает, что в течении 30 минут войдут в банк 15 или 16 или 17 кассиров очень маловероятно и поэтому эти событие происходят очень редко.

Числовые характеристики распределение Пуассона равны:
- математическое ожидание:

$$MX=\lambda,$$

- дисперсия:

$$DX=\lambda$$

Таким образом, дисперсия случайной величины, распределенный по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию.

Распределение Пуассона задается одним параметром λ, которое характеризует среднее число событий появившихся в единицу времени.

Забегая вперед заметим, что распределение Пуассона аппроксимирует биномиального распределения, т.е. при достаточно большим числом испытаний n и при малых p (вероятность появления успеха). Так, что $n\cdot p\to\lambda$ (при $n\to\infty$), тогда биномиальное распределение стремится к распределению Пуассона.

3.3. Нормальное распределение. Основные параметры стандартного распределения. Табуляция значений распределения стандартной случайной величины.

Нормальная плотность вероятности имеет фундаментальное значение для статистического вывода по нескольким взаимосвязанным причинам. Во-первых, она является представителем класса плотностей вероятности, которые зависят только от двух параметров - среднего значения и дисперсии. Следовательно, с этой плотностью можно относительно просто работать аналитически. Во-вторых, обнаружено, что нормальное распределение довольно точно отображает широкий круг случайных явлений. Например, курс иностранной валюты по отношению сума, рост большего числа лиц одного и того же пола, национальности и возраста, размеры органов животных также подчиняется нормальному распределению. В-третьих, нормальное распределение связана с центральной предельной теоремой. Эта теорема утверждает, в частности, что распределение выборочных средних значений, случайно отобранных из генеральной совокупности с известной конечной дисперсией, асимптотически приближается к нормальному по мере увеличения объема выборки. Поэтому нормальная плотность широко используется при анализе выборочных средних значений.

Нормальный закон распределения характеризуется функцией плотностью вероятности вида:

$P(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$	(3)

где, a - среднее значение случайной величины X;

σ^2 - дисперсия случайной величины X;

σ - среднее квадратическое отклонение X;

π =3.14159, e= 2.71828

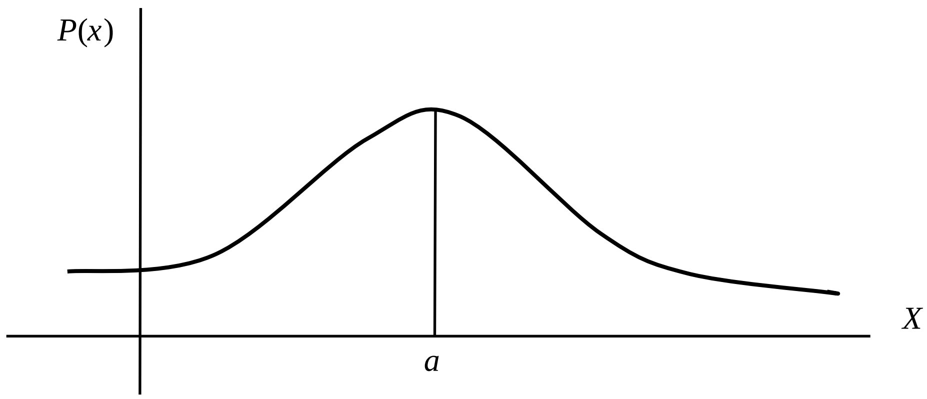


Рис. 4.

Кривая распределения y=P(x) - эта кривая Гаусса, которая имеет симметрический холмообразный вид (рис.4.). Среднее значение а определяет меру расположения плотности. На рис.5. показаны три нормальные плотности вероятности с одной и той же дисперсией, но с различными средними значениями. Из формулы (3) следует, что кривая y=P(x) достигает максимума при x=a и $y_{max}=\frac{1}{\left(\sigma\cdot\sqrt{2\pi}\right)}$. С ростом σ y_{max} уменьшается, а так как площадь, ограниченной всей кривой и осью 0x, равна 1, то с увеличением σ кривая как бы расстегивается вдоль оси 0x. При уменьшении σ кривая вытягивается вверх вдоль прямой x=a, но сжимается в горизонтальном направлении (рис.6.).

Следовательно, параметр σ характеризует форму кривой, а a - ее положение

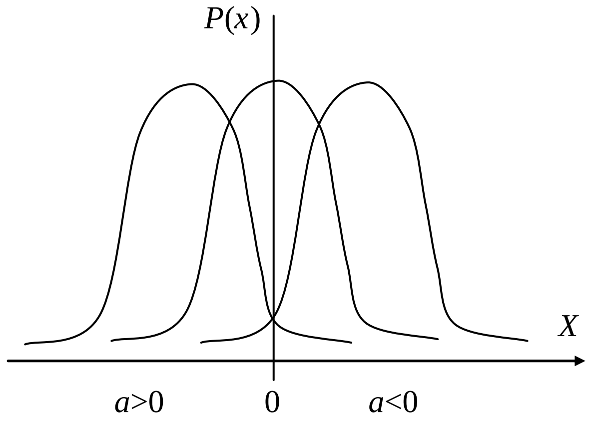


Рис. 5.

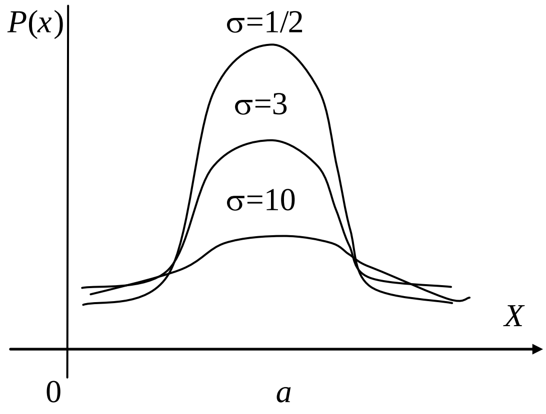


Рис. 6.

Заметим, что на обоих предыдущих рисунках кривая плотности не касается горизонтальной оси. Нормальная плотность асимптотически приближается к оси $0x$; она никогда не равна нулю, независимо от того, сколь мало или велико становится значение X.

Очевидно, что существует бесконечно много нормальных плотностей вероятности, зависящих от различных комбинаций a и σ. К счастью, мы можем выразить нормальную плотность в стандартной форме, записав ее как функцию стандартизированной переменной Z, а не X. Эта стандартизированная переменная определяется как

$$Z = \frac{X - a}{\sigma}.$$

Из свойств математического ожидания и дисперсии следует, что MZ=0, DZ=1. Значит, случайная величина Z распределена по нормальному закону с параметрами a=0 и σ=1. В теории вероятностей такие распределение называют стандартными нормальными распределениями.

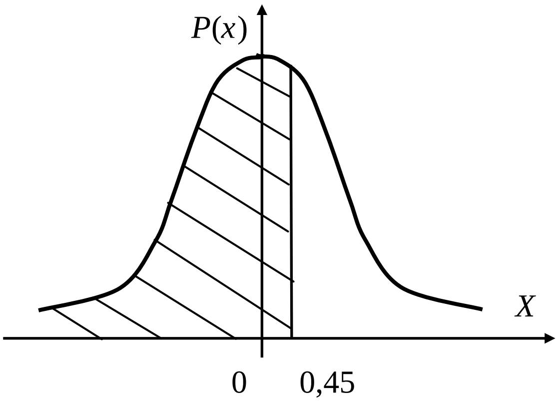
Таким образом, если в нормальной функции плотности вероятности (3) a=0, σ=1, то ее называют стандартной нормальной функцией плотности вероятности, что дает возможность составит единую таблицу площадей (вероятностей), задаваемых этой плотностью. Такая таблица приведена в конце книги в приложении (см. Табл. №) и она относится к левому "хвосту" стандартной нормальной функции плотности.

Мы можем использовать табл.№ в двух целях:

- определить площадь области (вероятность) по заданному значению Z;
- найти процентиль (квантиль) $Z(\alpha)$ по заданному площадью α .

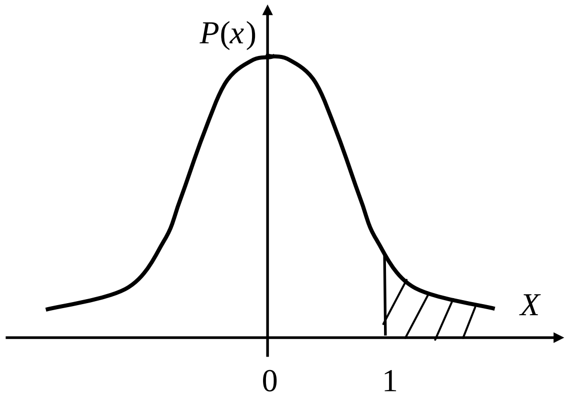
Для закрепления этого материала может быть полезен числовые примеры применения этой таблицы.

Пример 1. Найдите $P(Z < 0.45)$. По табл.№ найдем строку отмеченный 0.4 (в первом столбце), затем найдем колонку отмеченный 0.05, на пересечении этой строки и столбца стоит искомая площадь = 0.6736. Поэтому $P(Z < 0.45) = 0.6736$ (см. рис.7).



а) $P(Z<0,45)=0,6736$

Рис. 7.



b) $P(Z>1)=0,1587$

Рис. 8.

Пример 2. Мы хотим найти вероятность $P(Z \geq 1)$. Поскольку площадь ограниченной всей кривой и осью $0x$, равна 1, и этот площадь равна сумме двух площадей (площадь лежащий левее и правее от +1), и поэтому (рис.8.)

$$1 = P(Z < +1) + P(Z > +1)$$

По таблице находим $P(Z < +1) = 0.8413$. Следовательно,

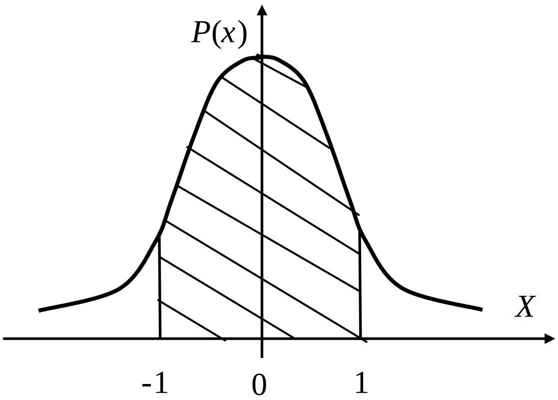
$$P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

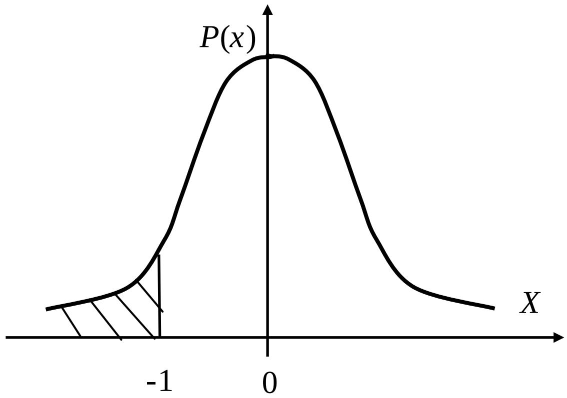
Пример 3. В таблице не приведены вероятности для отрицательных значений Z. Для того, чтобы найти вероятность $P(Z < -1)$ воспользуемся симметричностью стандартного нормального распределения относительно среднего значения a=0. В силу симметричности

$$P(Z < -1) = P(Z > 1).$$

Используя результат предыдущего примера имеем

$$P(Z < -1) = 0.1587 \text{ (см. рис.9).}$$





a) $P(Z<0{,}45)=0{,}6736$ b) $P(Z>1)=0{,}1587$

Рис. 9. Рис. 10.

Пример 4. Требуется найти вероятность $P(-1< Z < 1)$. Из рис.10 видно, что эта вероятность есть площадь лежащей между -1 и 1. Эта площадь равна разности двух площадей - площади лежащее левее 1 и -1, т.е.

$$P(-1< Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

Во всех четырех примерах по заданному значению x находили вероятность $P(Z<x)=\alpha$. Иногда возникает обратная задача: по заданному значению α найти такое x_α , чтобы $P(Z<x_\alpha) =\alpha$. Точка x_α называется α - квантилю или α 100%-ной квантилю, отвечающей заданному уровню вероятности α. Другими словами, точка $x(\alpha)=x_\alpha$ является α - квантилю или α 100%-ной квантилю (процентилю), если площадь лежащее левее от $x(\alpha)$ равна α (см. Рис.11а)

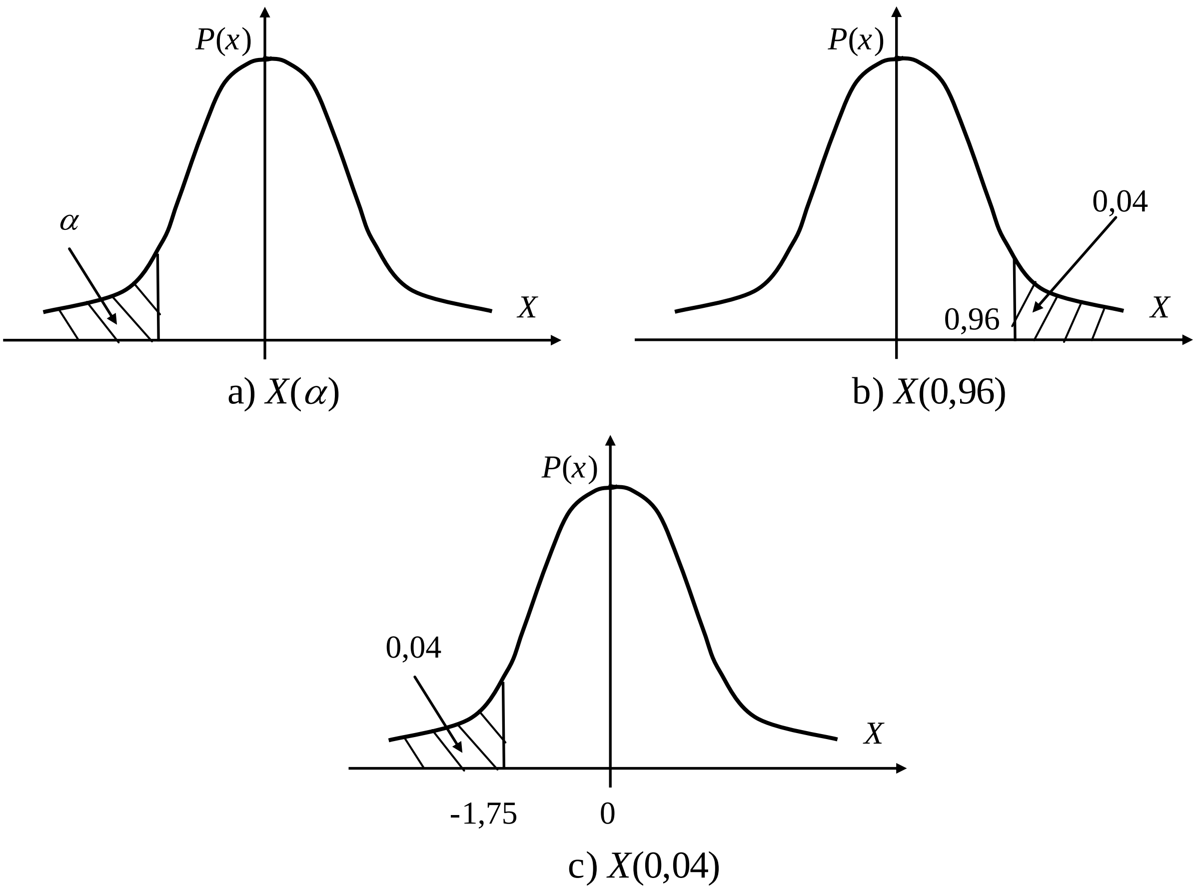


Рис. 11.

Теперь рассмотрим несколько примеров.

Пример 5. Найти 96 процентный квантиль (или просто процентиль) для стандартного нормального распределения.

Из таблицы № видно, что близко к 0.96 является значение α= 0.9599. Из ячейки таблицы № содержащий 0.9599 по строке двигаясь влево, а по столбцу вверх находим 1.7+0.05=1.75. Таким образом, $x(0.96)=1.75$ (см. рис. 11b).

Пример 6. Мы хотим найти 95%-ный квантиль. Из таблицы № видно, что близко к 0.95 является α=0.9495 и α=0.9505. Соответствующий значений Z являются, соответственно 1.64 и 1.65. В качестве 95%-ной квантилю берем среднее арифметическую $X(0.95) = 1.645$.

Заметим, что процентные квантили больше чем 50 являются положительными, потому что стандартное нормальное распределение симметрично относительно среднего значения 0 и поэтому 50% площади лежит слева от нуля. Следовательно, процентные квантили больше чем 50 должны лежат справа от нуля. Процентные квантили меньше чем 50 лежат слева от нуля и поэтому они отрицательны. Зная процентные квантили выше чем 50 мы можем найти квантили ниже 50%. Они связаны между собой следующим соотношением:

$$X(\alpha)= - X(1 - \alpha)$$

Например, мы хотим найти 4 процентный квантиль (α=0.04). В силу вышеупомянутой соотношение $X(0.04)=-X(0.96)$, а в силу примера 5 $X(0.96)=1.75$. Поэтому $Z(0.04)= -1.75$ (см. рис.11c).

На практике часто имеем дело с нестандартным нормальным распределением, а нормальным распределением. Из сложившегося ситуации выходит (применяя) переходя к стандартизированной переменой. Для закрепления этого рассуждения будет полезен следующий числовой пример.

Пример 7. Пусть случайная величина X распределена нормально со средним значением равным 10 и дисперсией, равной 4 (среднее квадратическое отклонение равно 2) единицам. Каково вероятность того, что случайная величина X принимает значение больше или равное 12?

Переходя к стандартизированной переменной имеем

$$Z = \frac{X-a}{\sigma} = \frac{12-10}{2} = 1.$$

Таким образом $P(X>12)=P(Z>1)$, а в силу примера 2 $P(Z>1)=0.1587$ и поэтому $P(X>12)=0.1587$.

Пример 8. Пусть заработная плата (X) рабочих и служащих Ташкентского текстильного комбината распределена по нормальному закону со средним значением 1500 сум и среднее квадратическим отклонением 1000 сум. Какова вероятность того, что заработная плата наугад выбранного рабочего будет больше чем 1200 сумов.

Переходя к стандартизированной величине имеем:

$$Z = \frac{X-a}{\sigma} = \frac{1200-1500}{1000} = 0.3.$$

Следовательно

$$P(X > 1200)=P(Z > 0.3)=1- P(Z < 0.3)=1- 0.6173= 0.3827$$

Таким образом, 38.27% рабочих Ташкентского текстильного комбината имеет заработную плату больше чем 1200 сумов.

3.4 Логнормальное распределение.

Случайная величина X распределена по логнормальному закону, если она имеет следующий вид функции плотности вероятности:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \cdot e^{\frac{-(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \geq 0.$$

Логнормальное распределение имеет среднее значение равное $e^{\frac{\mu+\sigma^2}{2}}$ и дисперсию равную $e^{2\mu+\sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

Если случайная величина Y распределена по логнормальному закону с параметрами a и σ^2, то $\ln Y$ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Поэтому для того чтобы вычислить вероятность события связанной с логнормальным распределением переходят логарифму (потенцированием), а затем использует таблицу нормального распределения.

Пример 9. Известно, что каждая фирма характеризуется прибыльностью и их можно распределить по этому параметру. Рассмотрим только прибыльные фирмы пищевой промышленности. Пусть X - величина прибыли фирмы распределена по логнормальному закону с средним значением 0.5 млн. сум (за квартал) и дисперсией равной 0.25. Определить, сколько процентов составляет фирмы пищевой промышленности, прибыли которых больше чем 1 млн. сум за квартал?

В силу вышеупомянутой $\ln X$ распределена по нормальному закону с параметрами a = 0.5 и σ= 0.25. Следовательно

$$P(X > 1) = P(\ln X > \ln 1) = P(\ln X > 0) = P\left(\frac{\ln X - 0.5}{0.5} > \frac{0 - 0.5}{0.5}\right) =$$

$$= P(Z > -1) = 1 - P(Z < -1) = 1 - 0.1587 = 0.8413.$$

Таким образом, 84% фирмы пищевой промышленности имеют прибыль больше чем 1 млн. сум.

Переходя к стандартизированной величине имеем:

$$Z = \frac{X - a}{\sigma} = \frac{1200 - 1500}{1000} = 0.3.$$

Следовательно

$$P(X > 1200)=P(Z > 0.3)=1- P(Z < 0.3)=1- 0.6173= 0.3827$$

Среднее квадратическое отклонение совпадает с математическим ожиданием.

Экспоненциальный закон распределения может применяться в качестве одной из возможных математических моделей в теории надежности. Параметр λ в теории надежности называется интенсивностью отказа элемента.

3.5. Хи-квадрат распределение. Распределение Стьюдента и Фишера.

Хи-квадрат распределение и последующие t (Стьюдента) и F (Фишера) распределение происходит от нормального распределения.

Пусть X_1, X_2, ..., X_n последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным нулю и дисперсией равной единице и положим Величина χ_{n}^2распределение с законом распределения хи-квадрат со степенью свободы $\nu=n$.

Хи-квадрат распределение определяется одним параметром (степеней свободы), которая характеризует количеством слагаемых нормально распределенных случайных величин. В частности, если n=1, то распределение по закону хи-квадрат со степенью свободы 1.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение соответственно равны.

Если X_1, X_2, ..., X_n независимые случайные величины распределенные по закону хи-квадрат со степенью свободы n_1, n_2, ..., n_n соответственно, то их сумма распределена по закону хи-квадрат со степенью свободы равный, сумме степеней свободы слагаемых, т.е. $n = n_1 +n_2+...+ n_n$.

Хи-квадрат распределение связано с распределением статистической дисперсией S^2 выборки и используется при нахождение вероятности того, что S^2 принимает значение, принадлежащее определенному отрезку, при построение доверительных интервалов для неизвестных параметров распределение выборки и играет важную роль в проверке статистических гипотез.

Составлена таблица (см. приложение №), в которой для различных значений ν=n $\leq$ 50 приведены квантили (процентные точки) хи-квадрат распределения, т.е. такие значения x_α при которых

$$P(\chi^2 < x_\alpha) = \alpha$$

где α - заданный уровень вероятности (значимости).

Хи-квадрат распределение со степенью свободы больше чем 50 аппроксимируется со стандартным нормальным распределением.

Пример . Пусть X распределена по закону хи-квадрат со степенью свободы n=61. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значение меньше чем 72.

Пусть Z распределена по нормальному закону с математическим ожиданием равным нулю, и дисперсией равной единице и χ^2_n распределена по закону хи-квадрат со степенью свободы $\nu=n$ и случайные величины Z и χ^2_n независимы, тогда (соотношение) случайная величина распределена по закону Стьюдента со степенью свободы $\nu=n$.

С ростом числа степеней свободы распределение Стьюдента приближается к нормальному распределению с параметрами (0, 1). Таблица распределения Стьюдента приведена в приложении№ . В ней содержатся значения $x=x_\alpha$ (α - процентные), удовлетворяющие равенству $P(T_n< x_\alpha)=\alpha$. Для больших n значений x_α определяется по таблице нормального распределения.

Пусть независимые случайные величины распределенные по закону хи-квадрат со степенями свободы n_1 и n_2 соответственно, то случайная величина имеет распределение Фишера.

Ключевые слова

Распределение случайной величины, виды распределений, параметры распределений: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Контрольные вопросы

1. Что такое случайная переменная (зависимая, независимая)?
2. В чем различие среднего значения от математического ожидание случайной величины для различных распределений?
3. Напишите формулы среднеквадратического отклонения и дисперсия для нормального распределения
4. . В каких случаях используется каждый из этих показателей?
5. Какие типы распределений Вы знаете?
6. Какие дискретные распределения Вы знаете?
7. Какие непрерывные распределения Вы знаете?
8. Распределения Стьюдента и Фишера.

Литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. М.:МЭСИ,2000.
2. Бородич С.А. Эконометрика. Минск: Новое знание, 2001.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику. ИНФРА-М,1999.
4. Ежеманская С.Н. Эконометрика. Ростов – на Дону, Феникс, 2003.
5. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. М., ГУ ВШЭ, 2001.
6. Кремер Н.Ш. Эконометрика: Учебник. /Под. ред. Н.Ш.Кремера. -М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика.М.:ЮНИТИ-ДАНА,2002.
8. Кулинич Е.И. Эконометрия. -М.: Финансы и статистика, 2001.
9. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. М.: Дело, 2000.
10. Нименья И.Н. Эконометрика. СПб.:Издательский Дом «Нева», 2003.
11. Практикум по эконометрике. Под ред. Елисеевой И.И. М.: Финансы и статистика, 2002.
12. Сборник задач к начальному курсу эконометрики. /под ред. Катышева П.К. М.:Дело, 2002.
13. Эконометрика. /под. ред. проф. Т.Шадиев. -Т.: «Шарк» 1999.

Интернет сайты

1. *www.allinsurance.ru* – сайт Российской компании по страхованию, позволяет получить материалы по моделированию рисковых ситуаций.
2. *www.bitex.ru/~dialog/markl_modeler.html* – позволяет получить информацию по эконометрическому моделированию.
3. *www.blogic.ru* – Российский сайт, позволяет просмотрет и получить материалы по логическому моделированию.
4. *www.bolero.ru/product-22422499.html* – сайт Российской компании “BOLERO”. Можно получить теоретическую и практическую информацию по моделирование.

Тема 4 Основы теории корреляционного анализа

4.1. Задачи корреляционного анализа. Соотношения между экономическими переменными, корреляционная связь.
4.2. Коэффициент корреляции для выборки и генеральной совокупности. Оценивания параметров и проверка гипотез о корреляции случайных переменных.
4.3. Виды коэффициентов корреляции и их свойства.
4.4. Критерий Стьюдента. Таблица распределения Стьюдента. Проверка статистических гипотез.
4.5. Мультиколлениарность в эконометрических моделях. Матрица парных коэффициентов корреляции.

4.1. Задачи корреляционного анализа. Соотношения между экономическими переменными. Корреляционная связь.

Изучая процессы и явления, исследователи наталкиваются на проблему изучения не отдельных показателей, а их совокупности, взаимного влияния друг на друга и взаимосвязи между собой.

При изучении тех или иных явлений признаки (факторы) можно разделить на две группы: зависимые факторы и независимые. Такое деление является чисто условным, так как фактор, являющийся зависимым в одном случае, может стать независимым в другом.

Например, исследуя урожайность хлопчатника в регионе зависимым фактором является урожайность (Y), а независимыми: количество внесенных минеральных удобрений, количество солнечных дней, количество поливов земли и т.д.

При изучении валового сбора хлопка-сырца в регионе объем валового сбора выступает как зависимый фактор, а урожайность, уровень механизации, квалификация рабочих и другие - как независимые.

Таким образом, изучая массовые явления, в частности, экономические явления, необходимо логически провести классификацию всех изучаемых признаков (факторов) на независимые и зависимые.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

i - номер изучаемого фактора, $i \in N$;

X_i - изучаемый независимый фактор;

Y - изучаемый зависимый фактор.

В отдельных ситуациях Y можно рассчитать как функцию от X_i

$$Y = f\,(X_1,\ X_2,\ X_i,\dots,\ X_n).$$

В этом случае говорят, что Y и множество X_i связаны функциональной зависимостью.

Пример. В регионе изучается пять хозяйств. Урожайность хлопчатника составила: I- 30 ц/га; II- 32 ц/га; III- 34 ц/га; IV- 31.5 ц/га; V- 33.7 ц/га, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 - соответственно площади (га) земли занятыми под этой культурой в хозяйстве. Тогда общий сбор хлопка в данном регионе составит:

$$Y = 30 \cdot X_1 + 32 \cdot X_2 + 34 \cdot X_3 + 31.5 \cdot X_4 + 33.7 \cdot X_5 \text{ (центнеров).}$$

Рассмотренная ситуация соответствует функциональной зависимости:

$$Y = f\,(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_5).$$

Функциональная связь называется полной связью.

Изучая данное явление, приходим к выводу, что урожайность в хозяйствах не является постоянной (const), а изменяется под влиянием ряда факторов (количества поливов, внесенных минеральных удобрений, температуры воздуха и т.д.), т.е. урожайность - не детерминированный, а вероятностный показатель и функция $f\,(X_1, X_2, \ldots, X_5)$ должна включать в себя еще случайную переменную "U"

$$Y = f\,(X_1, X_2, X_i, \ldots, X_n, U\,).$$

Такая зависимость называется корреляционной зависимостью (от слова ***correlation*** - взаимосвязь, взаимозависимость, соотношение) при массовом изучении явлений.

4.2. Коэффициент корреляции для выборки и генеральной совокупности. Оценивания параметров и проверка гипотез о корреляции случайных переменных.

В основе математической статистики лежат понятия **генеральной совокупности и выборки.** Под генеральной совокупностью подразумеваются все возможные наблюдения интересующего нас показателя. Однако в большинстве случаев мы имеем дело только с частью возможных наблюдений, взятых из генеральной совокупности. При построении моделей зависимости экономических показателей, как правило, пользуются выборочными данными, и задача эконометрического анализа сводится к оценке надежности параметров сделанных на основе выборки и приемлемости их для выводов о зависимостях в генеральной совокупности.

Выборка называется репрезентативной, если она достаточно полно представляет изучаемые признаки и параметры генеральной совокупности, т.е. все элементы генеральной совокупности имеют возможность оказаться в выборке.

<u>Задача статистического оценивания</u> состоит в том, чтобы по данным случайной выборки оценить неизвестные значения параметров известного закона распределения генеральной совокупности значений СВ. *Оценкой* числового па-

раметра θ называется функция выборочных значений $\theta^* = \theta^*(x_1, ..., x_n)$, которая в определенном статистическом смысле близка к истинному значению этого параметра. Важнейшими статистическими свойствами оценки, определяющими ее близость к истинному значению числовой характеристики рассматриваемой СВ, являются свойства несмещенности, состоятельности и эффективности.

Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание как случайной величины равно истинному значению числовой характеристики: $M(\theta^*) = \theta$.

1) Оценка называется *состоятельной*, если предел оценки по вероятности равен истинному значению числовой характеристики, то есть

$$lim\ \mathrm{P}(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1 \text{ для любого } \varepsilon > 0.$$

2) Оценка называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех несмещенных оценок.

Экономические переменные связаны друг с другом множеством взаимосвязей. Рассмотрим экономические переменные Y и X. Пусть заданы выборки их значений объема n:

Y	X
y_1	x_1
y_2	x_2
…	…
y_n	x_n

Пусть ρ - коэффициент корреляции для генеральной совокупности значений X и Y, то есть

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

Оценкой для ρ является выборочный коэффициент корреляции

$$r(X,Y) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2}},$$

где $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$ - оценка математического ожидания $M(X)$ переменной X, $\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n}$ - оценка математического ожидания $M(Y)$ переменной Y.

Выборочный коэффициент корреляции двух СВ является случайной величиной. Как статистическая оценка, он отклоняется от истинного значения коэффициента корреляции в генеральной совокупности, но чем больше такое отклонение, тем менее оно вероятно.

Статистическая гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции («нулевая гипотеза») проверяется следующим образом:

- Предполагается, что коэффициент корреляции ρ в генеральной совокупности равен нулю.
- При ρ=0 выборочный коэффициент корреляции r (оценка для ρ) при данном числе наблюдений имеет определенное распределение.
- Оценки, сильно отличающиеся от нуля, имеют малую вероятность. Для конкретной величины r вычисляется вероятность получить в выборке такую или большую по модулю ее величину.
- Если эта вероятность мала, то есть случилось маловероятное событие, то гипотеза о том, что ρ=0, отвергается. «Критическое», то есть граничное значение вероятности называется *уровнем значимости.* В эконометрических исследованиях уровень значимости α выбирается обычно равным 1% или 5%.

Пусть выдвинуты два предположения:

H_0: ρ=0 (нулевая гипотеза);

H_1: $\rho \neq 0$ (альтернативная гипотеза).

Вероятность отклонить нулевую гипотезу и принять гипотезу H_1, когда в действительности верна H_0, называется *ошибкой 1-го рода*. Вероятность принять гипотезу H_0, когда в действительности верна H_1, называется *ошибкой 2-го рода*.

Если возможными считаются только положительные или только отрицательные значения коэффициента корреляции, то рассматривается односторонняя альтернативная гипотеза H_1: $\rho>0$ или H_1: $\rho<0$.

При проверке нулевой гипотезы рассматривается не сама величина r выборочного коэффициента корреляции, а ее функция, имеющая известное распределение. Такой функцией для выборочного коэффициента корреляции является t-статистика, рассчитываемая по формуле: $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$. Она имеет распределение Стьюдента с (n-2) степенями свободы.

Итак, корреляционный анализ позволяет проверить гипотезу о наличии линейной связи между переменными. Однако этого недостаточно для экономического анализа, поскольку возникают и другие проблемы: Возникает две проблемы: установление тесноты связи и изучение формы связи.

Для двух переменных: X - независимая и Y - зависимая

$$r_{x,y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x \cdot D_y}}$$

называется коэффициентом корреляции величин X и Y.

Ковариация величин X и Y вычисляется:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M\,(X-M_x)(Y-M_y)$$

$$M_x = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot P_k \ ,$$

где M - математическое ожидание (средняя случайной величины X);

a_k - значение случайной величины;

P_k - вероятность принимаемого значения;

k - количество значений $\{k \in N\}$.

Если $r_{x,y}$=1, то с вероятностью 1 величины X и Y связаны линейной зависимостью, т.е. связь аналитическая.

Если $r_{x,y}$=0, то величины X и Y - независимы или некоррелированы.

Таким образом чем ближе $r_{x,y}$ к 1, тем связь теснее. Положительное значение $r_{x,y}$ - означает прямую связь (с увеличением X, Y-увеличивается), а отрицательное значение $r_{x,y}$ - означает обратную связь (с ростом X, Y -уменьшается).

Следовательно $r_{x,y}$ - коэффициент меры линейной зависимости X и Y.

4.3. Виды коэффициентов корреляции и их свойства

При изучении двумерного нормального распределения случайных величин X и Y была введена такая характеристика тесноты связи, как коэффициент корреляции.

1. Линейным коэффициент корреляции (Z y/x) измеряет тесноту связи в том случае, если связь линейная.

$$r_{Y/X} = \frac{\overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

где σ_x - среднее квадратичное отклонение признака X;

σ_y - среднее квадратичное отклонение признака Y.

С помощью этого показателя измеряется степень коррелированности признаков в выборке.

Различают несколько видов коэффициента корреляции:

1. Частный коэффициент корреляции ($r_{y/x}$) – показывает тесноту связи между результирующим показателем (Y) и фактором (X), влияющим на него.
2. Парный коэффициент корреляции($r_{x/x}$) - показывает тесноту связи между факторами ($X_1, X_2, \ldots, X_m$), влияющими на результирующий показатель.
3. Совокупный коэффициент корреляции ($Ry/x_1,\ldots x_m$) – показывает тесноту связи между результирующим показателем (Y) и факторами ($X_1, X_2, \ldots, X_m$), влияющими на него.

Напомним следующие свойства коэффициента корреляции:

а) коэффициент не имеет размерности, следовательно, он сопоставим для разных статистических рядов;

б) величина r лежит в пределах от – 1 до 1. Значение r=+1 свидетельствует о том, что между переменными существует полная положительная корреляция, т.е. функциональная зависимость – все данные наблюдения лежат на прямой с положительным углом наклона в плоскости xy, иначе говоря, с увеличением x растет y; r=-1 указывает на полную обратную линейную связь;

r=0 (а это может быть тогда, когда $\sum xy = 0$) не означает, что x и y статистически независимы, а лишь указывает на отсутствие линейной связи между ними, что, естественно, не отрицает возможность существования иной формы зависимости между переменными.

Итак, при наличии двумерного нормального распределения коэффициент корреляции является мерой линейной согласованности между переменными, их взаимного варьирования. Высокий коэффициент корреляции подтверждает наличие линейной связи между переменными. Последняя может быть, если x есть причина (или следствие) y, если x и y являются совместно зависимыми переменными – x зависит от y, а y от x (например, цены на один вид продукции на разных колхозных рынках) , наконец, если x и y являются следствиями некоторой общей для них причины (например, существенную корреляцию имеют такие признаки, как рост и вес человека; однако ни один из них не может рассматриваться как непосредственная причина другого).

Если анализ связи переменных x и y выполнялся на основе модели, предполагающей, что x – фиксированные значения, устанавливаемые экспериментатором, то коэффициент корреляции может быть вычислен и в этом случае, однако его не следует рассматривать как строгую меру взаимосвязи явлений. Для модели с фиксированными x это просто мера близости эмпирических точек к линии регрессии. Заметим, что в этом случае величина коэффициента корреляции будет заметно зависеть от того, какие значения x выбраны экспериментатором. Если же совокупность значений x представляет собой выборку, то предполагается, что выборка отражает соответствующее генеральное распределение и отклонение от него есть следствие только случайности.

В практике статистического анализа не являются исключением случаи, когда с помощью корреляционного анализа обнаруживают существование достаточно сильной «зависимости» признаков, в действительности не имеющих причинной связи между собой. Такие корреляции принято называть ложными или бессмысленными. Как правило, бессмысленные корреляции получают при коррелировании временных рядов двух признаков, не связанных причинной зависимостью. В дальнейшем будем полагать, что между рассматриваемыми переменными существует причинная зависимость и, следовательно, применение теории корреляции имеет логическое основание.

4.4. Критерий Стьюдента. Таблица распределения Стьюдента. Проверка статистических гипотез.

Критерий Стьюдента используется для проверки значимости r. Применяя коэффициент корреляции в качестве меры связи, нужно иметь в виду, что он получен на основе данных выборки и, следовательно, подвержен влиянию случайности. Если объем выборки небольшой, то найти выборочную ошибку этой величины достаточно сложно, поэтому в практике обычно вместо определения ошибки коэффициента корреляции проверяют гипотезу о его значимости (существенности), т.е. существенно ли *r* отличается от нуля или это отличие можно приписать влиянию случайности, связанной с выборкой. Иначе говоря, проверяется гипотеза H_0: p=0. Проверка значимости осуществляется путем сопоставления табличного и расчетного значений *t* – статистики. Последняя определяется по формуле:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Величина *t* здесь следует *t*-распределению Стьюдента. Найденное по данной формуле значение t^* сопоставляют с табличным значением t_a при *n*-2 степенях свободы. При изучении, например, роста и веса человека (выборка охватила 42 мужчин) коэффициент корреляции оказался равным 0,65. Необходимо проверить гипотезу о существенности отличия *p* от нуля.

$$t^* = \frac{0{,}65\sqrt{42-2}}{\sqrt{1-0{,}65^2}} = 5{,}27.$$

При *a*=0,05 и числе степей свободы, равном 40, t_a=2,02. Следовательно, коэффициент корреляции существенно отличается от нуля ($p \neq 0$), что, впрочем, и следовало ожидать.

Как следует из формулы, значение *t* здесь полностью определяется числом наблюдений (*n*) и величиной выборочного коэффициента корреляции. Поэтому нетрудно для заданного числа степеней свободы найти наименьшее значение выборочного коэффициента корреляций, при котором гипотеза H_0: *p*=0 может быть отклонен с заданной вероятностью.

Для данных предыдущего примера минимальное значение коэффициента корреляции равно 0,30 (при числе степени свободы 42-2=40), что значительно меньше 0,65.

4.5. Мультиколлениарность в эконометрических моделях. Матрица парных коэффициентов корреляции.

При построении и расчете эконометрических моделей следует обращать внимание на явление мультиколлинеарности. Мультиколлинеарность проявляется в том, что наряду с изучаемой корреляционной связью - между зависимой переменной и независимыми - в исследуемой совокупности существуют и другие корреляционные связи - между самими независимыми переменными. Специфика эконометрических моделей, включая производственные функции, такова, что для них явление мультиколлинеарности весьма характерно.

Мультиколлинеарность "опасна" тем, что полученные при расчете параметры производственной функции могут оказаться бессодержательными, обусловленными не существенными отношениями исследуемой зависимости, а ошибками наблюдения. Предположим, например, что изучается связь зависимой переменной с двумя факторами x_1 и x_2, которые фактически находятся между собой в строго функциональной зависимости (коэффициент корреляции равен единице). Можно доказать, что в этом случае система нормальных уравнений для расчета параметров функции (методом наименьших квадратов) не имеет определенного решения. Однако из-за ошибок наблюдения статистические данные не покажут строго функциональной зависимости между x_1 и x_2. Это позволит рассчитать параметры функции, которые в данной ситуации лишены всякого смысла. Ясно, что и в случае не полностью функциональной, но сильной корреляционной зависимости факторов расчетные параметры могут определяться не столько реальными, существенными отношениями, сколько ошибками наблюдения.

Простейший способ проверки мультиколлинеарности заключается в вычислении и оценке величины коэффициентов корреляции для каждой пары включаемых в уравнение независимых переменных. Если для какой-либо пары переменных коэффициент корреляции оказывается достаточно большим (порядка 0,8 и более), то во избежание получения бессодержательных коэффициентов регрессии следует рассмотреть вопрос о возможности исключения из уравнения одной из этих переменных. Впрочем, условие исключения переменных не является строго обязательным и не применяется в тех случаях, когда каждый из взаимосвязанных факторов оказывает на зависимую переменную достаточно сильное и специфическое воздействие.

Для анализа свойства мультиколлениарности используется матрица коэффициентов парной корреляции

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \cdots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2x_1} & 1 & r_{x_2x_3} & \cdots & r_{x_2x_m} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & 1 & \cdots & r_{x_3x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & r_{x_mx_3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

При наличии корреляции один из пары связанных между собой факторов исключаются из модели, либо в качестве объясняющего фактора берется какая-то их функция.

Ключевые слова

Зависимость между экономическими переменными, теснота зависимости, коэффициент корреляции, частный, парный, совокупный коэффициент корреляции, проверка статистических гипотез, значимость коэффициента корреляции, критерий Стьюдента.

Контрольные вопросы

1. Что такое корреляционная связь?
2. Понятие корреляционного поля.
3. Какие типы коэффициентов корреляции вы знаете?

4. Для анализа какого свойства модели используется парный коэффициент корреляции?
5. Для чего необходимо проверять значимость коэффициент корреляции?
6. Как проверяется нулевая гипотеза?
7. В чем смысл критических значений Стьюдента?
8. Как строится матрица парных коэффициентов?
9. Какой вид имеет распределение Стьюдента?

Литература

1. Нименья И.Н. Эконометрика. -С.Пб.:Издательский Дом «Нева», 2003.
2. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. -М.: Дело,2000.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику. -М.: ИНФРА-М, 2001.
4. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. -М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
5. Практикум по эконометрике. /под ред. Елисеевой И.И. –М.: Финансы и статистика, 2002.
6. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. -М.: МЭСИ, 2000.
7. Сборник задач к начальному курсу эконометрики. /под ред. Катышева П.К. -М.:Дело, 2002.
8. Бородич С.А. Эконометрика. -Минск: Новое знание, 2001.
9. Кулинич Е.И. Эконометрия. -М.: Финансы и статистика, 2000.
10. Ежеманская С.Н. Эконометрика. Ростов – на Дону, Феникс, 2003.
11. Эконометрика. /под. ред. проф. Т.Шадиев. -Т.:«Шарк» 1999 г.
12. Кремер Н.Ш. Эконометрика: Учебник. /Под. ред. Н.Ш.Кремера. -М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
13. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. -М.: ГУ ВШЭ, 2001.

Интернет сайты

1. *www.center.neic.nsk.su/page_rus/bmodel.html*
2. *www.cis2000.ru/publish/books/book_56/ch32.shtml*
3. *www.cde.osu.ru*
4. *www.colibri.ru*
5. *www.cemi.rssi.ru*

Тема 5. Регрессионный анализ.

5.1. Задачи и этапы регрессионного анализа. Зависимые и независимые переменные.
5.2. Парная линейная регрессия. Линейное уравнение парной регрессии.
5.3. Метод наименьших квадратов для парной регрессии, как метод оценивания параметров линейной регрессии.
5.4. Анализ статистической значимости коэффициентов линейной регрессии.
5.5. Ошибка коэффициентов регрессии. Доверительные интервалы линии регрессии.
5.6. Множественная линейная регрессия.

5.1. Задачи и этапы регрессионного анализа. Зависимые и независимые переменные.

Аналитическая зависимость между X и Y называется уравнением регрессии и записывается в виде

$$Y = f(X).$$

Эта зависимость может быть линейной:

а) $Y = a_0 + a_1 \cdot X$.

либо нелинейной:

б) $Y = a_0 \cdot e^{a_1 \cdot x}$;

в) $Y = a_0 \cdot X^{a_1}$;

г) $Y = a_0 + \left(\dfrac{a_1}{x}\right)$.

Нелинейные соотношения можно с помощью не сложных математических операций привести к линейным. Эта процедура называется *линеаризация*. Выражения б) и в) прологарифмируем

$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 \cdot X \qquad \ln Y = \ln a_0 + a_1 \cdot \ln X$$

Заменим

$$\ln Y = Y' \qquad \ln Y = Y'$$

$$\ln a_0 = a_0' \qquad \ln X = X'$$

Получим:

$$Y' = a_0' + a_1 \cdot X \qquad\qquad Y' = a_0' + a_1 \cdot X'$$

А в выражении г) проведем замену переменных $(1/X)=X'$, тогда г) запишется в виде:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X'.$$

Изучая экономику на любом уровне, прежде всегда возникает проблема установления и изучения основных экономических показателей и взаимосвязей между ними.

Экономические показатели называются факторами, переменными, предикаторами.

Все факторы делятся на группы для каждой из них строятся математические зависимости, соответствующие математическую модель задачи.

Для каждой задачи (проблемы) таких зависимостей может быть одна или несколько. При рассмотрении экономических процессов идет обработка больших массивов информации и часто целесообразно строить не одну математическую модель, а систему взаимосвязанных математических зависимостей. Их называют экономическими, либо эконометрическими моделями.

Модели имеют особенности, характерные для всех уровней моделирования.

1. Математическая модель является упрощением действительности, но включает главные характеристики изучаемого объекта.

2. Предполагается, что изменение экономических переменных рассчитывается с помощью совместных и одновременных операций нескольких экономических соотношений.

3. Цель построения математической модели - изучение реальной действительности, предсказание ее будущего, постановка возможных экспериментов и управление ими в целях улучшения состояния экономического объекта.

Экономико-математические модели записанные с помощью алгебраических формул являются точными функциональными соотношениями. Однако, изучения поведения экономической системы показывает, что между показателями существуют случайные колебания, не учитывать которые нельзя. Следовательно, необходимо ввести в модель стохастический член.

Для однофакторной модели

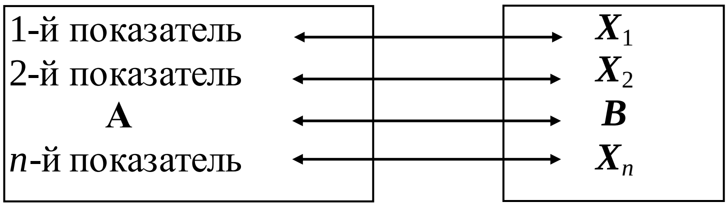
$$Y = f(X_1, U),$$

где X_1 - самая важная независимая переменная;

U - переменная отражающая суммарный эффект от воздействия всех остальных факторов.

Таким образом, в процессе моделирования экономического процесса проходит несколько этапов.

Прежде всего проводится *<u>идентификация</u>*, т.е. проводится взаимно однозначное соответствие между экономическими показателями и переменными X_i.



где A - множество экономических показателей;

B - множество переменных.

Следующим этапом является спецификация формы связи между Y и X_i.

Одни и те же экономические показатели могут быть связаны различными функциональными соотношениями. Требуется среди множества альтернативных вариантов выбрать варианты, адекватно описывающий процесс.

Наиболее простой формой связи является линейная. Существует два критерия для ее построения.

1. Включить как можно больше переменных (предикаторов) в модель, чтобы прогноз по этой модели был более надежен.

2. Сбор информации и ее контроль качества связан с большими затратами, то стремятся строить регрессионные модели с меньшим числом переменных, но она должна отражать адекватно процесс.

Среди существующих методов выбора "наилучшего" уравнения регрессии следует выделить 10 основных

1. Метод всех возможных регрессий с использованием трех критериев: R^2, S^2 и критерия Маллоуза C_p.

2. Метод наилучшего подмножества регрессий с применением критериев R^2, R^2 (приведенного) и критерия Маллоуза C_p.

3. Метод исключения.

4. Шаговый регрессионный метод.

5. Некоторые вариации предыдущих методов.

6. Гребневую регрессию.

7. ПРЕСС.

8. Регрессию на главные компоненты.

9. Регрессию на собственные числа.

10. Ступенчатый регрессионный анализ.

От качества модели, от степени ее изоморфности изучаемой системы во многом зависят все дальнейшие результаты анализа, выбор значимых переменных, определяющих поведение системы в динамике, точность прогнозирования развития системы. Для управления объектом или системой необходима модель этой системы с выбором структуры и параметров системы управления.

Направление, разрабатывающее подходы и методы построения математической модели получило название идентификации.

Определение наилучшей модели в условиях реально существующей системы по данным статистическим данным и является главной задачей идентификации.

В узком смысле слова идентификация - оценка параметров при заданной структуре модели для обобщенных, преобразованных агрегированных временных рядов. Разработка математических моделей, которые описываются не только уравнениями регрессии, но и алгоритмически приводит к применению имитационных моделей. Для их идентификации служит более тонкий, чем регрессионный анализ, математический аппарат. Сюда относятся методы функционального анализа, теории групп, топологии и т.д.

5.2. Парная линейная регрессия. Линейное уравнение парной регрессии.

Наиболее простым уравнением регрессии является его линейная форма:

$Y = a_0 + a_1 * X$ - однофакторная
$Y = a_0 + a_1 * X_1 + a_2 * X_2 + ... + a_n * X_n$ - многофакторная

Модели с включением обобщенного случайного предикатора

$Y = a_0 + a_1 * X + U$ - однофакторная
$Y = a_0 + a_1 * X_1 + a_2 * X_2 + ... + a_n * X_n + U$ - многофакторная.

Математическая модель может содержать несколько уравнений и тождеств. Каждое из них является структурным соотношением модели. Совокупность структурных соотношений с предложениями о свойствах стохастического возмущения, записанным в виде математических выражений (условий) составляют полную спецификацию модели.

Набор численных значений неизвестных параметров:a_0, a_1, a_2,...,a_n и σ^2 - позволяют выделить специфическую структуру в рамках рассматриваемой модели.

Спецификация опирается на интуитивные представления, знания и экономические теории. Если элементы матрицы **A** и **B** получают численные значения, мы получаем внутреннюю структуру данной модели. Коэффициенты матриц **A** и **B** могут принимать нулевые значения, если эти переменные в данном соотношении отсутствуют. Специфическая конфигурация матриц **A** и **B** отражает априорные знания о системе и возмущающих воздействиях.

Если спецификации модели выбрана правильно, оцениваем значения параметров этой структуры и идентифицируем ее с изучаемым процессом. Так как возмущения носят стохастический характер, то для оценивания строят функции правдоподобия для выборочных наблюдений и вывод - оценок структурных параметров из условия минимизации функции правдоподобия.

В эконометрике мы предполагаем стохастические связи между зависимой и независимыми переменными. Простая форма стохастической связи между переменными Y и X называется линейной регрессионной моделью. Формально эта модель может быть представлена

$$Y = \alpha + \beta * X + \varepsilon, \qquad (1)$$

где Y - зависимая переменная, X - независимая переменная и ε является стохастической ошибкой. α и β являются параметрами регрессионной модели, которые необходимо вычислить по эмпирическим статистическим данным.

Значения Y и X могут быть наблюдены, но значения ε нет. Наблюдения значений Y и X могут быть получены из статистических временных динамических рядов или по наблюдением отдельных предприятий, отраслей или рыночных агентов. Тогда эти данные называются пространственной выборкой.

Стохастический характер регрессионной модели означает, что каждому значению X соответствует полная вероятность распределения значений Y. Другими словами оценка Y никогда точно предсказать невозможно. Так как неопределенность параметров Y появляется в силу присутствия в уравнении (1) стохастической ошибки ε.

Например, мы вычислим производственную функцию фирмы. Предположим, что выпуск продукции зависит только от количества затрат рабочей силы, так как другие, материальные затраты в краткосрочном периоде фиксированы. Но и в этом случае некоторое количество рабочей силы может привести к получению различного количества выпуска в силу изменения погоды, человеческих усилий, работы (поломки) машин и оборудования и других факторов. Выпуск, который в данном случае является переменной не только зависит от количества рабочей силы (независимой, объясняющей переменной), но и от многих случайных причин, которые суммированы в значении ошибки ε. Поэтому вероятность распределения Y определяются значениями независимой переменной X и вероятностью распределения ошибки ε.

Необходимо отметить, что полная спецификация регрессионной модели включает не только оценку регрессионного уравнения (1), но и спецификацию вероятности распределения ошибки, а также определение значений независимой переменной. Эта информация дана в первоначальных допущениях.

Рассмотрим однофакторную линейную зависимость. Аналитическая зависимость или уравнение регрессии будет

$$\overline{Y}_x = a_0 + a_1 \cdot X ,$$

где, a_0, a_1 - параметры - постоянные величины (const);

Y - значение результативного признака, рассчитанного только от факторного признака.

Теснота связи между факторами X и Y опреляется с помощью коэффициента корреляции (r) для линейной формы связи:

$$r_{y/x} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{X}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\overline{X \cdot Y}$ - средняя произведения X•Y;
$\overline{X}$ - средняя фактора X;
$\overline{Y}$ - средняя фактора Y;
σ_x - среднее квадратическое отклонение X;
σ_y - среднее квадратическое отклонение Y.

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{X}^2 - (\overline{X})^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{Y}^2 - (\overline{Y})^2}$$

Для вычисления доли дисперсии, образующейся под влиянием фактора X в доле дисперсии используется коэффициент детерминации (D).

$$(D) = r^2.$$

Величина (1-r^2) называется коэффициентом остаточной дисперсии и характеризует долю вариации за счет неучтенных факторов.

Оценка надежности показателя тесноты связи производится по формуле:

$$\sigma_r = \frac{(1 - r^2)}{\sqrt{n}},$$

где r - коэффициент корреляции;
n - число наблюдений.

Если r>3σ_r при n>50, то считают, что связь действительно существует.

В случае нелинейной связи теснота связи оценивается с помощью индекса корреляции. В случае линейной зависимости индекс корреляции равен коэффициенту корреляции. Индекс корреляции рассчитывается по формуле:

$$R_{y/x} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y}},$$

где

$\sigma^2_y = \dfrac{\sum(Y - \overline{Y})^2}{n}$ - общая вариация, за счет всех факторов;

$\sigma^2_{y/x} = \dfrac{\sum(Y - \overline{Y}_x)^2}{n}$ - остаточная дисперсия.

При построении линейной однофакторной модели следует обратить внимание на некоторые ее недостатки:

1. Нельзя адекватно отразить процесс в модели только с помощью одного, хотя и самого существенного фактора.

Например, изучая объем валового сбора хлопка-сырца можно за основной самый существенный фактор взять - урожайность, но при более тщательном рассмотрении необходимо учитывать и такие факторы как количество и качество земель, удобрения (их количество, качество, сроки внесения), полив, температурный режим и т.д. Таким образом, количество "основных" факторов может возрасти до бесконечности. Выход: переходить от однофакторной к многофакторной модели. Но и это не исключает ошибок в расчетах за счет того, что кроме основных факторов на функцию влияет еще множество случайных второстепенных факторов. Часто их влияние незначительно и носит противоположный характер. Суммарный эффект от всех этих факторов оценивается случайной переменной "U", которая может принимать то положительные, то отрицательные значения. Линейная зависимость будет:

$$Y = f\,(X_1,\ U),$$

или

$$Y = f\,(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n,\ U).$$

Переменная "U" выступает как стохастическое возмущение или ошибка, обладающая свойствами:

- обладает вероятностным нормальным распределением;
- имеет нулевую среднюю;
- имеет конечную дисперсию σ_U^2;
- является ошибкой измерения.

Занимаясь сбором статистического материала, исследователь часто вместо истинных значений параметров закладывает параметры со скрытой ошибкой (они могут носит как объективный так и субъективный характер, неточность расчетов параметров, нечеткий документооборот, субъективные оценки отдельных параметров и т.д.). Все выше перечисленные недостатки приводят к тому, что ошибки измерения перейдут в ошибку уравнения.

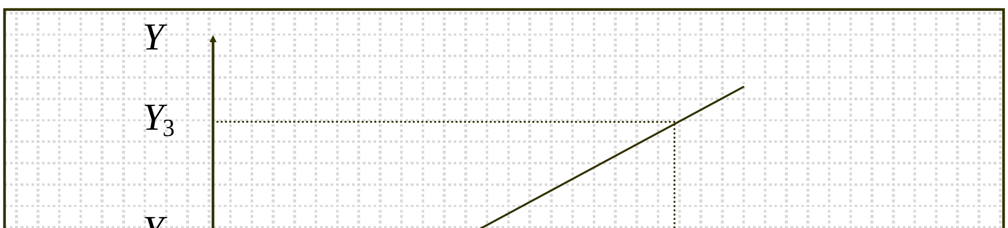
$$Y = a_0 + a_1 * X + W,$$

где $W = U + V$, W - совокупная ошибка; U - стохастическое возмущение; V - ошибка измерения.

Наиболее простой связью является линейная однофакторная, либо линейная многофакторная модель с принятием некоторых гипотез относительно случайного возмущения:

- среднее равно нулю;
- дисперсия *const* и не зависит от основных факторов;
- случайные возмущения не зависят друг от друга.

В случае линейной однофакторной зависимости графически это будет выглядеть так:



$Y=a_0+a_1*X$

Y_2

X

Рис. 1.

Из рис.1 видно, что точки располагаются вблизи некоторой прямой $Y=a_0+a_1*X$, в случае многофактороной:

$$Y_i = a_{0i} + a_{1i}*X_i + U_i.$$

Коэффициенты a_0 и a_1 можно определить, исходя из условий:

$$E(U)= 0, \quad i\in N$$

$$E(U_iU_j = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j \quad i, j \in N \\ \sigma_u^2 & \text{при} \quad i = j \quad i, j \in N \end{cases}.$$

5.3. Метод наименьших квадратов для парной регрессии, как метод оценивания параметров линейной регрессии.

При рассмотрении простых экономических моделей задачу расчета параметров модели можно решить с помощью стандартных методов. Классическим является метод наименьших квадратов. Однако, в более сложных ситуациях при рассмотрении сложных эконометрических моделей необходима разработка новых методов с использованием сложных технических приемов.

Способ наименьших квадратов.

Проблема оценки параметров регрессионной модели может рассматриваться как вычисление параметров вероятности распределения зависимой переменной Y. Как видно из вышеуказанных, в силу принятых предположений в модели Y_i нормально распределен со средней

$$E(Y)=\alpha+\beta X$$

и вариацией

$$var\,(Y)=\sigma^2.$$

Проблема оценки регрессионных параметров α и β эквивалентно проблема вычисления средней Y_i. Она может быть разрешена множеством способов.

Рассмотрим способ наименьших квадратов. В этом способе принцип вычисления состоит в том, чтобы найти минимум суммы квадратов отклонений наблюденных значений Y_i от их среднего значения. Следовательно, нам необходимо найти среднюю, которая делает требуемую сумму отклонений минимальной. Таким образом:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - E(Y_i)\right]^2,$$

или

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i\right]^2$$

где, S - сумма квадратов отклонений.

Для нахождения значений α *и* β, минимизирующих сумму требуется взять первую производную S относительно α *и* β:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sum_i \frac{\partial (Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i)^2}{\partial \alpha} = -\sum_i 2(Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i) = -2\sum_i Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_i \frac{\partial (Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i)^2}{\partial \beta} = -\sum_i 2(Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i) \cdot (-X_i) = -2\sum_i X_i (Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i)$$

Приравняв нулю значения каждой производной нулю и обозначая вычисленные значения α и β соответственно $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, мы получим:

$$-2\sum_i \left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_i\right) = 0$$

$$-2\sum_i X_i \left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_i\right) = 0$$

или эквивалентно:

$$\sum Y_i = \hat{\alpha} \cdot n + \hat{\beta} \left(\sum_i X_i\right),$$

$$\sum X_i \cdot Y_i = \hat{\alpha} \left(\sum X_i\right) + \hat{\beta} \left(\sum_i X_i^2\right) \quad (*)$$

Эти уравнения известны как нормальные уравнения наименьших квадратов. Поэтому, мы можем записать:

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot X_i + e_i$$

где ее представляют остатки наименьших квадратов и нормальные уравнения наименьших квадратов могут быть представлены в простой форме:

$$\sum e_i = 0$$

$$\sum X_i \cdot e_i = 0.$$

Уравнения (∗) могут быть решены относительно $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Решение относительно β' есть :

$$\hat{\beta} = \frac{n\left(\sum X_i \cdot Y_i\right) - \left(\sum X_i\right)\cdot\left(\sum Y_i\right)}{n\left(\sum X_i^2\right) - \left(\sum X_i\right)^2}$$

Это уравнение можно записать в несколько иной формуле:

$$\begin{aligned}
&n\cdot\sum\left(X_i - \bar{X}\right)\cdot\left(Y_i - \bar{Y}\right) = n\cdot\sum\left(X_i\cdot Y_i\right) - n\cdot\bar{X}\cdot\left(\sum Y_i\right) - n\cdot\bar{Y}\cdot\left(\sum X_i\right) + n^2\cdot\bar{X}\cdot\bar{Y} = \\
&= n\cdot\left(\sum X_i\cdot Y_i\right) - \left(\sum X_i\right)\cdot\left(\sum Y_i\right) - \left(\sum X_i\right)\cdot\left(\sum Y_i\right) + \left(\sum X_i\right)\cdot\left(\sum Y_i\right) = \\
&= n\cdot\left(\sum X_i\cdot Y_i\right) - \left(\sum X_i\right)\cdot\left(\sum Y_i\right)
\end{aligned}$$

которое является числителем для оценки β'. А также

$$\begin{aligned}
&n\cdot\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = n\cdot\left(\sum X_i^2\right) - 2\cdot n\cdot\bar{X}\cdot\left(\sum X_i\right) + n^2\cdot\bar{X}^2 = \\
&= n\cdot\left(\sum X_i^2\right) - 2\cdot\left(\sum X_i\right)^2 + \left(\sum X_i\right)^2 = n\cdot\left(\sum X_i^2\right) - \left(\sum X_i\right)^2,
\end{aligned}$$

которое является знаменателем при оценке β'. Следовательно, мы можем записать:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)\cdot\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}.$$

После нахождения значения $\hat{\beta}$ оценку параметра α' можно получить из первого уравнения (∗). Таким образом,

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\sum Y_i\right) - \beta\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sum X_i\right) = \bar{Y} - \hat{\beta}\cdot\bar{X}$$

который означает, что теоретическая линия, $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\cdot X_i$ проходит через средние точки $\bar{X}$ и оценочные параметры для модели с k - ми переменными может быть получены как прежде с применением способа наименьших квадратов, но нахождение суммы квадратов отклонений сводится к решению линейных уравнений с k-ми неизвестными. Система уравнений выглядеть довольно сложной и задача сводится к нахождению неизвестных параметров.

Эта система уравнений выглядит:

$$\begin{cases} \hat\beta_1 \cdot n + \hat\beta_2 \cdot \sum X_{2t} + \ldots + \hat\beta_k \cdot \sum X_{kt} = \sum Y_t \\ \hat\beta_1 \cdot \sum X_{2t} + \hat\beta_2 \cdot \sum X_{2t}^2 + \ldots + \hat\beta_k \cdot \sum X_{2t} \cdot X_{kt} = \sum X_{2t} \cdot Y_t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat\beta_1 \cdot \sum X_{kt} + \hat\beta_2 \cdot \sum X_{kt} \cdot X_{2t} + \ldots + \hat\beta_k \cdot \sum X_{kt}^2 = \sum X_{kt} \cdot Y_t \end{cases}$$

В вышеприведенных уравнениях все суммы: суммы квадратов и суммы продуктов представляют количества, которые вычисляются по исходным данным, касающимся наблюдений над зависимой переменной Y и над всеми независимыми переменными от X_2 до X_k. Все суммы изменяются от единицы до n (t=1, 2, ... , n). Первое уравнение выглядит иначе, чем остальные. Вспомним, что X_{1t}=1; t =1, 2, ... , n.

Так,

$$\sum X_{1t}^2 = n, \qquad \sum X_{1t} \cdot Y_t = \sum Y_t$$

и

$$\sum X_{1t} \cdot X_{jt} = \sum X_{jt} \cdot X_{1t} = \sum X_{jt}; \qquad j = 2,3,\ldots,k.$$

Если необходимо вычислить параметры модели, которая не содержит точку пересечения, то можно исключить из вычисления X_1, вычисляя независимые переменные от X_2 до X_k.

Порядок вычисления параметров независимых переменных рассмотрим на конкретном примере. Предположим, что нужно вычислить параметры β_1, β_2 и β_3 в модели

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + U, \qquad (4)$$

при наличии наблюденных значений Y, X_2 и X_3 .

t	Y_t	X_{2t}	X_{3t}
1	10	10	12
2	13	8	14
3	15	6	18
4	20	5	30
5	18	3	25
n=5	$\sum Y_t$=76	$\sum X_{2t}$=32	$\sum X_{3t}$=99

В случае k=3 уравнения (4) выглядит конкретно

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 \cdot n + \hat{\beta}_2 \cdot \sum X_{2t} + \hat{\beta}_3 \cdot \sum X_{3t} = \sum Y_t \\ \hat{\beta}_1 \cdot \sum X_{2t} + \hat{\beta}_2 \cdot \sum X_{2t}^2 + \hat{\beta}_3 \cdot \sum X_{2t} \cdot X_{3t} = \sum X_{2t} \cdot Y_t \\ \hat{\beta}_1 \cdot \sum X_{3t} + \hat{\beta}_2 \cdot \sum X_{3t} \cdot X_{2t} + \hat{\beta}_3 \cdot \sum X_{3t}^2 = \sum X_{3t} \cdot Y_t \end{cases} \quad (5)$$

Рассчитывая другие колонки, можем составит таблицу

$X_{2t} \cdot Y_t$	$X_{3t} \cdot Y_t$	X_{2t}^2	X_{3t}^2	$X_{2t} \cdot X_{3t}$
100	120	100	144	120
104	182	64	196	112
90	270	36	324	108
100	600	25	900	150
54	450	9	625	75
$\sum X_{2t} \cdot Y_t = 448$	$\sum X_{3t} \cdot Y_t = 1622$	$\sum X_{2t}^2 = 234$	$\sum X_{3t}^2 = 2189$	$\sum X_{2t} \cdot X_{3t} = 565$

Используя вышеприведенные значения решаемая система нормальных уравнений записана как

$$\begin{cases} 5 \cdot \hat{\beta}_1 + 32 \cdot \hat{\beta}_2 + 99 \cdot \hat{\beta}_3 = 76 \\ 32 \cdot \hat{\beta}_1 + 234 \cdot \hat{\beta}_2 + 565 \cdot \hat{\beta}_3 = 448 \\ 99 \cdot \hat{\beta}_1 + 565 \cdot \hat{\beta}_2 + 2189 \cdot \hat{\beta}_3 = 1622 \end{cases} \quad (6)$$

Приведенная система линейных уравнений может быть решена методом последовательного исключения Гаусса. Для этого первое уравнение умножим $\left(\frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}\right)$ и вычитая результат из второго уравнения, исключим β_1 из второго уравнения:

$$\left[234 - 32 \cdot (6.4)\right] \cdot \hat{\beta}_2 + \left[565 - 99 \cdot (6.4)\right] \cdot \hat{\beta}_3 = \left[448 - 76 \cdot (6.4)\right]$$

$$\left[234 - 204.8\right] \cdot \hat{\beta}_2 + \left[565 - 633.6\right] \cdot \hat{\beta}_3 = \left[448 - 486.4\right]$$

$$29.2 \cdot \hat{\beta}_2 + (-68.6) \cdot \hat{\beta}_3 = -38.4$$

или $29.2 \cdot \hat{\beta}_2 - 68.6 \cdot \hat{\beta}_3 = -38.4.$

Умножая первое уравнение на (99/5 = 19.8) и вычитая результат из третьего уравнения возможно исключить $\hat{\beta}_1$ из третьего уравнения:

$$\left[565 - 19.8 \cdot (32)\right] \cdot \hat{\beta}_2 + \left[2189 - 19.8 \cdot (99)\right] \cdot \hat{\beta}_3 = \left[1622 - 19.8 \cdot (76)\right]$$

$$\left[565 - 633.6\right] \cdot \hat{\beta}_2 + \left[2189 - 1960.2\right] \cdot \hat{\beta}_3 = \left[1622 - 1504.8\right]$$

$$-68.6 \cdot \hat{\beta}_2 + 228.8 \cdot \hat{\beta}_3 = 117.2$$

Теперь два уравнения с двумя неизвестными $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$:

$$\begin{cases} 29.2 \cdot \hat{\beta}_2 - 68.6 \cdot \hat{\beta}_3 = -38.4 \\ -68.6 \cdot \hat{\beta}_2 + 228.8 \cdot \hat{\beta}_3 = 117.2 \end{cases} \qquad (7)$$

Исключение $\hat{\beta}_2$ дает

$$[228.8+ 68.6\cdot(2.3493)]\cdot \hat{\beta}_3 = [117.2+ 38.4\cdot (2.3493)],$$
$$[228.8 + 161.16]\cdot \hat{\beta}_3 = [117.2 + 90.21],$$
$$389.96 \cdot \hat{\beta}_3 = 207.41,$$
$$\hat{\beta}_3 = 207.41/389.96 = 0.5318.$$

При известности значения $\hat{\beta}_3$ вычислить параметр $\hat{\beta}_2$ можно подставляя оценку $\hat{\beta}_3$=0.5318 в одно из уравнения (7)

$$[29.2\cdot \hat{\beta}_2 - 68.6(0.5318)] = - 38.4,$$
$$29.2 \cdot \hat{\beta}_2 - 36.4815 = - 38.4.$$

Отсюда

$$\hat{\beta}_2 = \frac{-38.4 + 36.4815}{29.2} = \frac{-1.9185}{29.2} = -0.0657$$

Следовательно $\hat{\beta}_2$=- 0.0657.

И наконец, оценка $\hat{\beta}_1$ может быть проведена используя одно из уравнений (6):

$$5\cdot \hat{\beta}_1 + 32\cdot(- 0.0657) + 99\cdot(0.5318) = 76,$$
$$5\cdot \hat{\beta}_1 - 2.1024 + 52.648 = 76,$$
$$5\cdot \hat{\beta}_1 = 76 + 2.1024 - 52.648,$$
$$\hat{\beta}_1 = 25.454/5,$$
$$\hat{\beta}_1 = 5.091.$$

Так, вычисленное уравнение регрессии записывается как

$$\overline{Y}_t = 5.091 - 0.0657 \cdot X_{2t} + 0.5318 \cdot X_{3t}, \qquad t = 1,2,\ldots,n$$

Если проверить правильность решения, то она отклоняется на точность округления данных.

В уравнении регрессии с двумя неизвестными возможно найти другое приближенное решение подставляя значения отклонений, полученных из статистических данных. Если предположить, что k=3 и $y_t = Y_t - \overline{Y}$, $x_{2t} = X_{2t} - \overline{X}_2$, $x_{3t} = X_{3t} - \overline{X}_3$, система нормальных уравнений может быть выражена в форме отклонений искомых переменных:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_2 \cdot \sum x_{2t}^2 + \hat{\beta}_3 \cdot \sum x_{2t} \cdot x_{3t} = \sum x_{2t} \cdot y_t \\ \hat{\beta}_2 \cdot \sum x_{3t} \cdot x_{2t} + \hat{\beta}_3 \cdot \sum x_{3t}^2 = \sum x_{3t} \cdot y_t \end{cases} \qquad (8)$$

Сопоставление уравнений (5) и (8) показывает, что, чтобы получить нормальное уравнение в форме отклонений, первое уравнение исключено из системы, часть $\hat{\beta}$ исключено из последующих других уравнений и все оставшиеся уравнения переписаны в отклонениях, полученных из выборочных данных.

Уравнения (8) используются для вычисления параметров неизвестных. Коэффициент пересечения кривой с осью ординаты $\hat{\beta}$ вычисляется в конце решения из уравнения

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \cdot \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \cdot \overline{X}_3 - \ldots - \hat{\beta}_k \cdot \overline{X}_k \qquad (9).$$

В случае, когда k равен 3 вышеприведенное уравнение записывается как

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \cdot \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \cdot \overline{X}_3 \qquad (10).$$

Завершая параграф, можно сказать, что выше описанный способ вычисления рассматривается как множественная регрессия Y от неизвестных X_1, X_2, ..., X_k. В нем искомые параметры $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ..., $\hat{\beta}_3$ являются коэффициентами регрессии.

5.4. Анализ статистической значимости коэффициентов линейной регрессии.

Для проверки значимости уравнения регрессии воспользуемся критерием дисперсионного анализа (F-критерием). Предполагается, что вектор ε имеет нормальный закон распределения.

Предварительно докажем тождество

$$Y^T \cdot Y \equiv (Y - X \cdot b)^T \cdot (Y - X \cdot b) + (X \cdot b)^T \cdot (X \cdot b)$$

Преобразуем правую часть тождества и поставим в него выражение

$$(Y - b^T \cdot X^T) \cdot (Y - X \cdot b) + (b^T \cdot X^T) \cdot (X \cdot b) = Y^T \cdot Y - Y^T \cdot X \cdot b - b^T \cdot X^T \cdot Y + 2b^T \cdot X^T \cdot X \cdot b =$$
$$= Y^T \cdot Y - Y^T \cdot X \cdot b - (Y^T \cdot X \cdot b)^T + 2\, b^T \cdot (X^T \cdot X) \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y = Y^T \cdot Y.$$

Так как $Y^T \cdot X \cdot b = \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_{ij}$ есть скалярная величина, то

$$(Y^T \cdot X \cdot b) = (Y^T \cdot X \cdot b)^T.$$

Мы доказали справедливость тождества. Проанализируем теперь смысл слагаемых этого тождества.

Уравнение регрессии. без свободного члена, поэтому $\bar{y} = 0$. Тогда $Q_{\text{общ}}$ = $Y^T \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ есть сумма квадратов отклонения y_i от средней $\bar{y} = 0$.

Первое слагаемое тождества

$$Q_{ocm} = (Y - X \cdot b)^T \cdot (Y - X \cdot b) = e^T \cdot e = \sum_i e_i^2.$$

есть сумма квадратов остатков или сумма квадратов отклонения результатов наблюдения y_i от регрессии $\hat{Y} = X \cdot b$.

Второе слагаемое

$$Q_R = (X \cdot b)^T \cdot (X \cdot b) = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2$$

есть сумма квадратов отклонений от общей средней $\bar{y} = 0$, обусловленных регрессией.

Таким образом, согласно

$$Q_{\text{общ}} = Q_R + Q_{\text{ост}}.$$

Мы имеем разложение общей вариации на составляющие.

Так как ранг n квадратичной формы $Q_{\text{общ}}$ уравнения (22) равен сумме рангов k и $(n - k)$ квадратичных форм Q_R и $Q_{\text{ост}}$, стоящих в правой части (22), то, согласно теореме Кохрана, слагаемые правой части Q_R и $Q_{\text{ост}}$ независимы.

Согласно

$$M \cdot \frac{Q_{ocm}}{n-k} = \sigma^2.$$

Определим теперь математическое ожидание второго слагаемого Q_R

$$M \cdot Q_R = M\,[(X \cdot b)^T \cdot (X \cdot b)] = M\,(b^T \cdot X^T \cdot X \cdot b).$$

Подставив выражения (11) и (15) и учитывая, что $b^T = Y^T \cdot X(X^T \cdot X)^{-1}$, будем иметь

$$M \cdot Q_R = M[(\varepsilon^T + \beta^T \cdot X^T) \cdot X \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot (X \cdot \beta + \varepsilon)] =$$
$$= M[\varepsilon^T \cdot X(X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot \varepsilon] + \beta^T \cdot X^T \cdot X \cdot \beta =$$

$$= K\cdot\sigma^2 + \beta^T\cdot X^T\cdot X\cdot b.$$

Если предположить, что β=0, где 0 - нулевой вектор, то

$$M \cdot Q_R = K\cdot\sigma^2$$

откуда

$$M \cdot \frac{Q_R}{K} = \sigma^2 .$$

Мы показали, что при выполнении условия β=0, т.е. когда

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3 \ldots \beta_k=0, \quad \frac{Q_{ост}}{n-k} \quad \text{и} \quad \frac{Q_R}{k}$$

являются независимыми оценками одной и той же дисперсии σ^2.

В этой связи для проверки гипотезы H_0 : = 0 используется статистика

$$F = \frac{(1/k)\cdot Q_R}{(1/(n-k))\cdot Q_{ост}},$$

которая при выполнении гипотезы H_0 имеет F-распределение с k и n-k степенями свободы.

Если уравнение регрессии незначимо, т.е. все коэффициенты уравнения регрессии для генеральной совокупности равны нулю, то на этом анализ уравнения заканчивается.

Если же нулевая гипотеза H_0: = 0 отвергается, то представляет интерес проверить значимость отдельных коэффициентов регрессии и построить интервальные оценки для значимых коэффициентов.

Значимость коэффициентов регрессии можно проверить с помощью F - критерия, основанного на статистике

$$F_{\epsilon\ddagger\cdot} = \frac{b_j^2}{\hat{S}^2\cdot\left[\left(X^T\cdot X\right)^{-1}\right]_{jj}}, \qquad (\ )$$

которая имеет при выполнении гипотезы H_0 : = 0 распределение Фишера-Снедокора с числом степеней свободы 1 и n - k.

5.5. Ошибка коэффициентов регрессии. Доверительные интервалы линии регрессии.

Пусть вектор ошибок ε имеет нормальное распределение. В этом случае вектор Y наблюдений (11) также имеет нормальное распределение и из некоррелированности наблюдений следует их независимость.

Согласно (15) оценка b_j (j=1,2,...,k) имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием β_j и дисперсией

$$D(b_j)=\sigma^2\cdot[(X^T\cdot X)^{-1})]_{jj} .$$

Откуда

$$Z = \frac{b_j - \beta_j}{\sigma \cdot \left[\left(X^T \cdot X\right)^{-1}\right]_{jj}^{\frac{1}{2}}}$$

имеет нормированный нормальный закон распределения.

Согласно (21), статистика

$$U^2 = \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2}$$

имеет распределение χ^2 с n-k степенями свободы.

Подставив Z и U в $T = \left(\frac{Z}{U}\right) \cdot \sqrt{K}$, получим выборочную характеристику

$$T = \frac{b_j - \beta_j}{S\left[\left(X^T \cdot X\right)^{-1}\right]_{jj}^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{n-k}{n}},$$

которая имеет распределение Стьюдента с n-k степенями свободы. Используя (24), построим с надежностью γ интервальную оценку для β_j.

$$\beta_j \in \left(b_j \pm t_\gamma \cdot \sqrt{D\left(b_j\right)} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-k}}\right),$$

или

$$\beta_j \in \left(b_j \pm t_\gamma \cdot \left\{S^2\left[\left(X^T \cdot X\right)^{-1}\right]_{jj}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-k}}\right)$$

Полная спецификация простой линейной регрессионной модели состоит из регрессионного уравнения (1) и пяти первоначальных допущений. Приступим к рассмотрению этих допущений. Первые два предположения касаются того, что для каждого значения X ошибки ε распределены нормально вокруг значения ноль. Предполагается, что ε_j является непрерывной величиной, изменяющей от - ∞ до + ∞, которая симметрично распределена вокруг средней и ее распределение полностью определяется двумя параметрами: средней и вариацией. Следовательно:

Первое предположение: ε_i нормально распределена.

Второе предположение: $E(\varepsilon_{ii})$=0 средняя ошибки равна нулю.

В действительности мы можем рассматривать каждое значение стохастической ошибки как результат множества причин, в котором, каждая причина незначительно отклоняет зависимую переменную от того значения, когда она являлась бы детерминистической. При таком рассмотрении аналогия ошибки измерения с ошибкой распределения правильна и поэтому предположения о нормальности и нулевой средней ошибки идентичны.

Третье предположение относится к гомоскедичности, означающая, что каждая ошибка имеет одну и ту же вариацию σ^2, значение которой неизвестно. Это предположение согласуется с утверждением, о том, например, что возможность дисперсии ошибки для больших значений X, такая же как для малых значений. В производственной функции, рассмотренной выше, согласно этому предположению вариация в выпуске, такая же не зависимо от значений рабочей силы, например, 20, 100 или другие количества рабочих.

Третье предположение: Гомоскедичность: $var(\varepsilon_i)=\delta^2$.

Четвертое предположение связано с автокорреляцией в остатках. Предполагается, что между ошибками нет автокорреляции, т.е. отсутствие автокорреляции

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0 \; (i \neq j).$$

Это предположение означает тот факт, что если сегодня фактический выпуск больше чем ожидаемый и отсюда нельзя сделать вывод, что завтра выпуск будет больше (или меньше).

Первое и четвертое утверждение вместе позволяют сказать с позиции вероятности, что ошибки распределения независимы. Поэтому $\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_n$ могут быть рассмотрены как идентичные и независимые распределения переменной. Так как $E(\varepsilon_i)=0$ и это означает $var(\varepsilon_i)=E(\varepsilon)^2$. Отсюда

$$cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

Заключительное, пятое, предположение утверждает, что независимая переменная X нестохастическая. Другими словами, предполагается, что значения $\boldsymbol{X}$ контролируемы или полностью прогнозируемы. Важное применение этого предположения состоит в том, что $E(\varepsilon_i, X_j) = X_j * E(\varepsilon_i)=0$ для всех значений i и j.

Пятое предположение: Нестахостичность значений X, которые в выборке идентичны независимо от размера выборки

$$\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{n=1}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

и отличен от нуля и ее лимит $n \to \infty$ конечное число.

На практике, конечно, трудно точно соблюсти абсолютное наличие указанных предположений, однако мы удовлетворяемся если эти предположения соблюдаются приблизительно. Вышеуказанные предположения для составления классической линейной регрессионной модели необходимы для вычисления параметров регрессии.

Так как ошибки распределения предполагаются нормальными и равными нулю, неизвестной является дисперсия отклонений σ^2. В регрессионной модели (1) неизвестными являются значения параметров α и β, а также вариация ошибок σ^2.

После полной спецификации регрессионной модели, представленной регрессионным уравнением и пятью предположениями рассмотрим теперь ее некоторые особенности. Прежде всего, вернемся к вероятности распределения зависимой переменной Y.

Первое, среднее функции Y_i может быть получено как математическое ожидание двух частей уравнения (1)

$$E(Y_i) = E(\alpha+\beta*X_i + \varepsilon_i) = \alpha +\beta*X_i. \ (2)$$

Это следует из спецификации параметров α и β и нестохастичности X_i (это заданное число) и средняя ε_i=-0 (предположение второе). Далее, вариация Y_i есть

$$var(Y_i)=E\ [Y_i - E\ (Y_i)]^2 = E[(\alpha + \beta*X_i + \varepsilon_\mathrm{i}) - (\alpha+\beta*X_i)]^2 =E(\varepsilon_i^{\ 2}) =\sigma^2. \ (3)$$

Уравнение (2), которое дает усредненное значение переменной Y для каждой зависимой переменной X, называется эмпирическая линия регрессии.

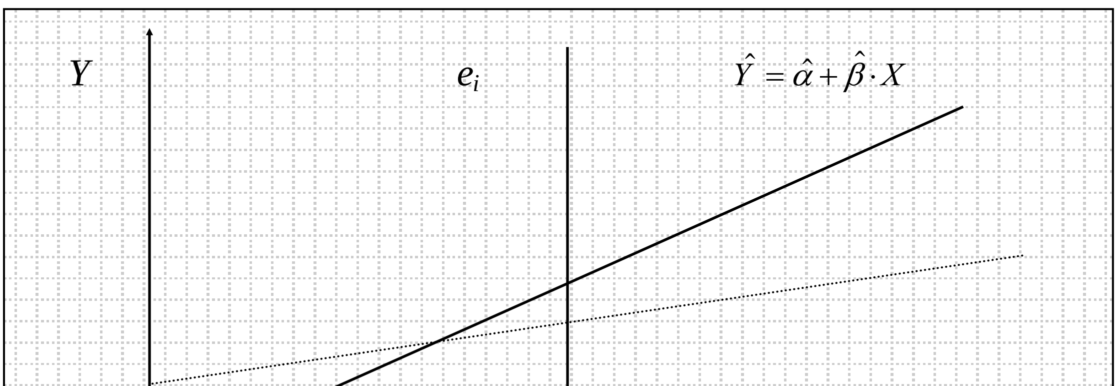
Пересечение этой линии с ординатой соответствует величине α, измеряющей оценку Y при значении X равном нулю. Наклон линии β, измеряет изменение значения Y на каждое дополнительную единицу значения X. Если, например, Y представляет агрегированное потребление, X - агрегированный доход, то α измеряет уровень потребления при нулевом доходе и β представляет предельную склонность к потреблению. Так как значения этих параметров неизвестны, эмпирическая линия регрессии неизвестна. Когда мы вычисляем значения параметров и α, β получим теоретическую линию регрессии. Если значения α и β, вычислены, соответственно как $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, тогда теоретическая линия регрессии задана уравнением

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot X_i\,,$$

где $\hat{Y}_i$ сглаженные значения Y. Многие, если не все, значения эмпирические Y значения не лежат на теоретической линии, поэтому значения Y_i и $\hat{Y}_i$ не совпадают. Эти разницы называются остатками и обозначаются $\boldsymbol{e}_i$. Поэтому мы различаем следующие уравнения:

$$Y_i =\alpha+\beta*X_i + \varepsilon_\mathrm{i} \text{ (эмпирическая),}$$
$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + e_i \text{ (теоретическая).}$$

Следует заметит, что, в общем, значения e_i отличаются от значений ε_i, так как $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ различаются от значений α и β. Фактически, можно сказать, что остатки e_i являются оценками ошибок ε_I. Альтернативно можно сказать, что e_i используются для приблизительной оценки распределения ε_i. Это показано на рисунке 2.



ε_I $E(Y)=\alpha+\beta\cdot X$

Y_i

X_i X

Рис. 2.

5.6. Множественная линейная регрессия.

Зависимая переменная, представленная в экономической системе как зависимая от одной независимой переменной является упрощением. Теперь необходимо предположить более общую форму зависимости, которая рассматривает множество независимых переменных. Обозначим, как прежде, зависимую переменную Y и множество независимых переменных вектором X.

Единичное наблюдение объяснимой переменной обозначается как X_{jt}, где j - нумерация переменной (j=1,2,...,k), а t - нумерация наблюдения. Полный перечень обозначений Y_t , где t=1,2,...,n и X_{jt}, j=1,2,..., k; t=1,2, ..., n.

Необходимо различать степень зависимости независимых переменных в модели и эти параметры обозначены B_j, j= 1,2,...,k.

В рамках данного анализа можно рассмотреть точку пересечения, переменной X_1, которая рассматривает единственное (одно) значение X_{1t}=1 для всех t. Если это справедливо β_1 является точкой пересечения функции с линией ординаты и линейная модель с k - ми переменными записывается как:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \ldots + \beta_k \cdot X_{kt} + U_t,\ (t=1,2,\ldots,n)\ (1)$$

Как обозначено выше, k является нумерацией объяснимых переменных, включая искусственную переменную X_1. Следовательно, модель с k-ми переменными включает Y, X_2, X_3, ... , X_k.

Например, модель с двумя переменными записывается как

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t,\ (t=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

где две главные переменные Y и X_2, однако объяснимой (независимой) переменной является X_2, и опущенная искусственная переменная X_1.

Уравнение (1) выглядит довольно сложным, однако его можно детально рассмотреть для случая с двумя переменными. Для изучения смысла параметров модели, временно, допустим отвлечемся от наличия ошибок в уравнении и рассмотрим только линейную зависимость переменных

$$Y = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + ... + \beta_k \cdot X_{kt}, \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет те же свойства как между линейными зависимостями двух переменных, например, изменения объяснимой переменной X_j на одну единицу может привести (сопровождается) к изменению β_j в зависимой переменной и это справедливо для всех возможных значений X_j. Каждый параметр β_j (кроме β_1) представляет наклон функции. Наклон кривой это свойство линейной зависимости, который измеряется постоянными параметрами, независящими от принимаемых значений переменных. Параметр β_j измеряет влияние изменения X_j на Y при фиксированных значениях всех остальных переменных.

Простой способ представления изменений объяснимых переменных многомерной связи это сгруппировать переменную и постоянную части

$$Y = \text{точка пересечения} + \beta_j \cdot X_j .$$

В таком представлении β_j измеряет наклон функции, однако такая интерпретация справедливо для одной переменной при фиксированных значениях остальных (*ceteris paribus*). В этой главе объяснимые переменные рассмотрены неслучайными. Экономическая интерпретация такого допущения может опираться на предположении политики как стабильной. Другое объяснение неслучайности объяснимых переменных может опираться на том, что значения переменных другими зависимостями.

Рассмотрим случай с функцией потребления. Допустим, что в дополнение к располагаемому доходу (Д), уровень ликвидности активов (Л) домашних хозяйств является главным показателем потребительских расходов (П).

$$П_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot Д_t + \beta_3 \cdot Л_t + U_t, \; t = 1, 2, ... , n \quad (3)$$

Все переменные выражены в реальных измерениях. Было бы нереалистичным допустить располагаемый доход и ликвидные активы фиксированными политикой. Поэтому правильно интерпретировать, что количество обеих указанных переменных определены другими переменными в системе, например, включая законодательных инструментов фискальной и монетарной политики. Было бы идеально включить эти переменные в модель, однако тогда модель стало бы сложной. Использование уравнения (3) может отмечено как частный случай многомерной зависимости с условием того, что значения дохода и ликвидных активов сформированы экзогенно.

Независимо от типа рассмотрения (стохастический или нестохастический) неслучайных переменных, ясно, что нужно использовать единицы измерения. В уравнении (3) параметр β_2 представляет меру изменения в располагаемом доходе при фиксированных значениях ликвидных активов. Следует отметить, что в действительности "чистое" изменение потребления от уровня располагаемого дохода в истории экономических систем не встречается. Несмотря на такую трудность, объектом анализа должен быть изоляция "чистого" эффекта от изменения дохода. И этот "чистый" эффект влияния представлен параметром β_2.

Ключевые слова

Понятие регрессии, зависимые факторы, независимые факторы, форма связи, линеаризация, спецификация, идентификация; множественная регрессия, система нормальных уравнений, параметры множественного уравнения регрессии, значимость уравнения, критерий Фишера, доверительные интервалы.

Контрольные вопросы

1. Какие факторы называются независимыми, а какие зависимыми?
2. Что такое форма связи?
3. Как определяется теснота связи?
4. Что такое линеаризация и когда она используется?
5. Что такое спецификация?
6. Что такое идентификация?
7. Что такое эмпирическая линия?
8. Как рассчитываются доверительные интервалы.
9. Что такое множественная регрессия?
10. Какие критерии используются для вычисления значимости уравнения регрессии?
11. Записать систему нормальных уравнений для множественной регрессии?

Литература

1. Бородич С.А. Эконометрика. Минск: Новое знание, 2001.
2. Нименья И.Н. Эконометрика. СПб.:Издательский Дом «Нева», 2003.
3. Ежеманская С.Н. Эконометрика. Ростов – на Дону, Феникс, 2003.
4. Замков О.О. Математические методы и модели. -М.: ДиС, 2000.
5. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе.М 2003.
6. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. М.: Дело,2000.
7. К.Доугерти. Введение в эконометрику. ИНФРА-М,1999.
8. Н.Ш.Кремер, Путко Б.А. Эконометрика.М.:ЮНИТИ-ДАНА,2002.
9. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. М.:МЭСИ,2000.
10. Моделирование и прогнозирование экономических показателей на основе информационных технологий: Учеб. пос./Н.М.Махмудов. -Т.: ТГЭУ, 2002.

Интернет сайты

1. *www.econ.asu.ru*
2. *www.tsure.ru*
3. *www.wsu.ru*

4. *www.economics.com*
5. *www.cemi.rssi.ru*

Тема 6. Проверка общего качества эконометрической модели.

6.1. Коэффициент детерминации. Остаточная и общая дисперсия

Коэффициент детерминации как мера качества подбора линии регрессии. Коэффициент корреляции служит основой для другой статистической характеристики – *коэффициента детерминации.* Последний определяют как r^2. Этот коэффициент позволяет ответить на вопрос о том, каково качество описания зависимости с помощью уравнения регрессии. Очевидно, чем теснее наблюдения примыкают к линии регрессии, тем лучше регрессия описывает соответствующую зависимость переменных и с большей надежностью может быть примечена для практических расчетов – оценивая значения y для заданных значений x.

Для того чтобы выяснить смысл коэффициента детерминации, значение зависимой переменной расчленим на составляющие:

$$y_t = Y + r_t + e_t.$$

Здесь $r_t = y_t - Y = bx_t$, $y_t = y_t - Y = r_t + e_t$.

Определим теперь сумму квадратов отклонений:

$$\sum (y_t)^2 = \sum (r_t + e_t)^2 = \sum r_t^2 + 2\sum r_t e_t + \sum e_t^2$$

Однако $2\sum r_t e_t = 0$. Это следует из того, что

$$e_t = y_t - r_t = y_t - bx_t$$

и

$$\sum r_t e_t = \sum bx_t (y_t - bx_t) = b\left[\sum x_t e_t - b\sum (x_t)^2\right].$$

Но

$$= \frac{\sum x_t y_t}{\sum (x_t)^2}$$

b

и, следовательно,

$$\sum r_t e_t = b\left[\sum x_t y_t - \frac{\sum x_t y_t}{\sum (x_t)^2}\sum (x_t)^2\right] = b \cdot 0 = 0.$$

Таким образом,

$$\sum(y_t)^2 = \sum r_t^2 + \sum e_t^2.$$

Итак, сумма квадратов отклонений от средней расчленена на две составляющие. Первая из них характеризует *систематическую вариацию,* т.е. изменение y в соответствии с уравнением регрессии (такую вариацию иногда называют *объясненной,* так как она объясняется уравнением регрессии), вторая - случайную вариацию (отклонение от линии регрессии).

Найдем теперь отношение суммы квадратов отклонений, обусловленных линией регрессии, к общей сумме квадратов:

$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 \cdot \ln X$$

Напомним, что

$$r = \frac{\sum x_t y_t}{\sqrt{\sum(x_t)^2 \sum(y_t)^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sum r_t^2}{\sum(y_t)^2} = \frac{\sum(y - Y)^2}{\sum(y_t - Y)^2} = r^2.$$

Величина r^2 получила название выборочного *коэффициента детерминации.* Заметим теперь суммы квадратов отклонений в формуле на соответствующие дисперсии. После такой замены получим:

$$r^2 = \frac{s_y^2}{s_Y^2} \quad \text{или} \quad r^2 = 1 - \frac{s^2}{s_Y^2},$$

где s_y^2 - дисперсия линии регрессии относительно средней;

s^2 - дисперсия остаточных членов относительно линии регрессии;

s_Y^2 - общая дисперсия.

Из этого следует, что коэффициент детерминации характеризует долю объясненной регрессией дисперсии в общей величине дисперсии зависимой переменной.

В силу сказанного r^2 может рассматриваться как мера качества описания зависимости признаков x и y с помощью уравнения регрессии. Чем ближе s_y к значению s_Y тем выше r^2 и тем теснее примыкают отдельные наблюдения к линии регрессии. Если $s_y = s_Y$, то s = 0, а $r^2 = 1$. В этом случае все эмпирические точки лежат на линии регрессии. Если $s_y = 0$ (а это может быть в том случае, когда все $y = Y$ и изменения y не связаны с изменениями x), то $r^2 = 0$

Из этого следует, что коэффициент корреляции может быть определен и как

$$r = \sqrt{\frac{\sum(y - Y)^2}{\sum(y_t - Y)^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum(y_t - Y)^2}}$$

и, наконец,

$$r = \sqrt{1 - \frac{s^2}{s_Y^2}}.$$

В таком виде коэффициент принято называть *индексом корреляции* или *корреляционным отношением*.

Проверка статистического качества оцененного уравнения регрессии включает следующие шаги:

- проверка статистической значимости каждого коэффициента регрессии;
- проверка общего качества уравнения регрессии;
- проверка наличия свойств данных, предполагавшихся при оценивании уравнения регрессии.

Если с помощью уравнения регрессии анализируется взаимосвязь экономических переменных, то результаты оценивания должны иметь разумную экономическую интерпретацию, в частности, должны быть получены ответы на следующие вопросы:

- являются ли статистически значимыми объясняющие факторы, важные с теоретической точки зрения;
- являются ли коэффициенты, показывающие направление воздействия этих факторов, положительными или отрицательными и соответствуют ли знаки коэффициентов экономическому смыслу;
- лежат ли оценки коэффициентов регрессии внутри интервалов, предполагаемых из теоретических соображений.

Для проверки общего качества уравнения регрессии обычно используется коэффициент детерминации R^2, который в случае парной регрессии равен квадрату коэффициента корреляции между переменными X и Y. Коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = 1 - \frac{\textit{Остаточная дисперсия}}{\textit{Общая дисперсия}} =$$

$$= \frac{\textit{Общая дисперсия} - \textit{Остаточная дисперсия}}{\textit{Общая дисперсия}} = \frac{\textit{Объясненная дисперсия}}{\textit{Общая дисперсия}}$$

Таким образом, коэффициент детерминации представляет собой долю объясненной дисперсии в общей дисперсии зависимой переменной Y.

6.2. Оценка адекватности модели. Критерий Фишера.

На значения экономических переменных обычно влияют многие факторы. В этом случае предполагается, что зависимая переменная Y является функцией m объясняющих факторов $X_1,...,X_m$ и оцениваются параметры функции $Y=\alpha_0+\alpha_1X_1+...+\alpha_mX_m+\varepsilon$, где α_j- коэффициенты регрессии, ε - случайная ошибка. Как и в случае парной регрессии предполагается, что

(I) Возмущение ε является нормально распределенной случайной величиной.

(II) Математической ожидание ε равно нулю: $M(\varepsilon)=0$.

(III) Дисперсия возмущений постоянна: $D(\varepsilon)=const$.

(IV) Последовательные значения ε не зависят друг от друга.

Таким образом, задача состоит в нахождении оценок $a_0,a_1,...,a_m$ коэффициентов $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m$. Для ее решения обычно используется множественный метод наименьших квадратов, заключающийся в минимизации функции

$$S(a_0,a_1,...,a_m)=\sum_{i=1}^{n}e_i\to\min,$$

где $e_i=y_i-a_0-a_1x_{i1}-...-a_mx_{im}$ – отклонения зависимой переменной Y от линии регрессии; n – объем выборок переменных.

Для обеспечения статистической надежности оценок требуется, чтобы число наблюдений (объем выборок) как минимум в три раза превосходило число оцениваемых параметров.

Если предпосылки 1-4 выполняются, то МНК обеспечивает несмещенность, состоятельность и эффективность оценок.

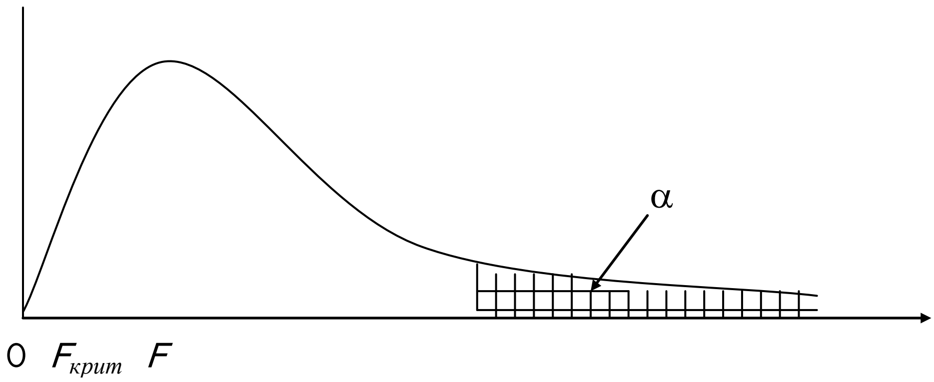
Приравнивая к нулю частные производные функции S по всем a_j, мы получаем так называемую *систему нормальных уравнений*, состоящую из $(m+1)$ линейных уравнений с $(m+1)$ неизвестными. Такая система обычно имеет единственное решение.

Для определения статистической значимости коэффициента детерминации проверяется нулевая гипотеза для F-статистики, вычисляемой по формуле:

$$F=\frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m}.$$

Смысл проверяемой гипотезы заключается в равенстве нулю всех коэффициентов регрессии за исключением свободного члена. Если они действительно равны нулю в генеральной совокупности, то уравнением регрессии является $Y=\bar{y}$, и коэффициент детерминации R^2 и F-статистика также равны нулю. Итак, нулевая гипотеза H_0: $R^2=0$ равносильна гипотезе H_0: $\alpha_1=...=\alpha_n=0$.

Если предположения **(I)-(IV)** имеют место, то при выполнении нулевой гипотезы величина F имеет распределение Фишера с (m; n-m-1) степенями свободы. При принятом уровне значимости α для распределения Фишера находится критическое значение $F_{крит}$ такое, что $P(F>F_{крит})=\alpha$. Нулевая гипотеза отвергается, если $F>F_{крит}$. В случае парной линейной регрессии проверка нулевой гипотезы для t-статистики коэффициента регрессии эквивалентна проверке нулевой гипотезы для F-статистики.



<u>Пример.</u> Рассмотрим уравнение кривой Филлипса для США, параметры которого оценены на основе годовых данных 1994-1966 гг., 13 наблюдений:

$$\pi=6.29-0.76u,\ R^2=0.66$$

(здесь π – темп инфляции, u - уровень безработицы).

Отсюда следует, что $F=\frac{0.66}{0/34}\frac{11}{1}\approx 21.4$. Для степеней свободы (1;11) при 5% уровне значимости (доверительная вероятность 95%) $F_{крит}$=4.84, при 1% уровне значимости $F_{крит}$=9.65. Поскольку F=21.4>$F_{крит}$, то нулевая гипотеза H_0: R^2=0 отвергается в обоих случаях.

6.3. Оценка значимости параметров модели по критерию Стьюдента. Проверка статистических гипотез.

Оценки параметров a и b, полученные методом МНК, при условии, что сделанные выше предположения относительно возмущений ε справедливы, обладают свойствами:

1) Оценки параметров являются *несмещенными*, то есть математическое ожидание параметра равно истинному его значению: $M(a)=\alpha$; $M(b)=\beta$.
2) Оценки *состоятельны*, то есть дисперсия оценки параметра стремится к нулю с возрастанием объема выборки n: $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_a^2=0,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_b^2=0$.
3) Оценки являются *эффективными*, то есть они имеют минимальную дисперсию по сравнению с любыми другими линейными и несмещенными оценками параметров α и β.

Величины y_i и x_i в выборке значений переменных Y и X являются случайными. Следовательно, оценки a и b также случайны. Их математические ожидания равны, соответственно, α и β. Чем меньше разброс оценок a и b вокруг их истинных значений α и β, тем более они значимы. Формулы для дисперсий оценок следующие:

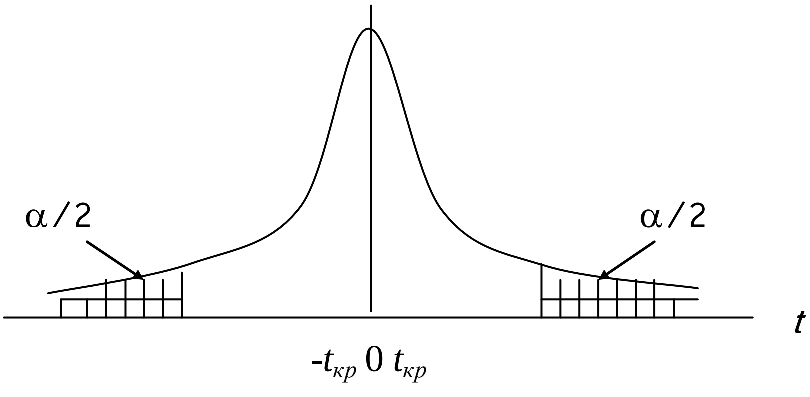
$$D(b) = s_b^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}; \qquad D(a) = s_a^2 = \frac{s^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2},$$

где $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$ - мера разброса значений зависимой переменной Y около линии регрессии (*необъясненная дисперсия*); $e_i=y_i-a-bx_i$ - отклонения наблюдаемых значений случайной величины Y от линии регрессии; s_a и s_b - стандартные отклонения оценок коэффициентов a и b.

При проверке нулевой гипотезы отдельно для каждого коэффициента a_j рассчитываются t-статистики: $t_{a_j} = \frac{a_j}{s_{a_j}}$, где s_{a_j} - стандартная ошибка для коэффициента a_j. Они имеют распределение Стьюдента с (n-m-1) степенями свободы. Процедура проверки статистической значимости коэффициентов множественной линейной регрессии такая же, как и в случае парной регрессии.

Формальный метод проверки значимости коэффициента регрессии b использует величину отношения b к его стандартной ошибке s_b. Величина $t_b = \frac{b}{s_b}$ (t-статистика для коэффициента b) при условии, что предположения о возмущениях ε выполнены, имеет t-распределение Стьюдента с n-2 степенями свободы. При заданном уровне значимости α для t-статистики проверяется нулевая гипотеза H_0 о равенстве её нулю (и, следовательно, о равенстве нулю коэффициента b). Нулевая гипотеза H_0 при заданном уровне значимости отвергается, если $|t_b| > t_{кр}(n\text{-}2;\alpha)$, где $t_{кр}(n\text{-}2;\alpha)$–граница критической области распределения Стьюдента для числа степеней свободы n-2 и уровне значимости α.

Аналогично проверяется гипотеза о равенстве нулю свободного члена α уравнения регрессии $Y=\alpha+\beta X$.



6.4. Автокорреляция остатков. Статистика Дарбина-Уотсона.

Необходимо отметить, что близкое к единице значение коэффициента детерминации R^2 еще не является свидетельством высокого качества уравнения регрессии. Коэффициент детерминации может быть относительно высоким, однако модель может оказаться непригодной для прогнозирования. Это обычно происходит в результате того, что взаимосвязь между зависимым экономическим показателем Y и объясняющими (независимыми) переменными X_i оказывается явно нелинейным. В этом случае можно утверждать, что не выполнены необходимые предпосылки об отклонениях e_i значений показателя Y от линии регрессии. Если эти отклонения не являются взаимно независимыми и дисперсия их непостоянна, то такое нарушение исходных предпосылок, сделанных выше, свидетельствует о неточной спецификации (определения вида зависимости) уравнения регрессии, а также свидетельствуют о неточности полученных оценок коэффициентов регрессии и их стандартных ошибок. Поэтому при оценке качества уравнения регрессии существенна проверка его некоторых важных свойств, которые предполагались при оценке параметров этого уравнения. Если, например, реальная связь между экономическим показателем Y и объясняющими переменными $X_1,X_2,,...,X_m$ нелинейна, то анализ статистической значимости коэффициентов регрессии неточен и оценки этих коэффициентов не обладают желательными для исследователя свойствами, как несмещенность, состоятельность и эффективность.

Закономерность в поведении остатков $e_i=y_i-a_0-a_1x_{i1}-a_2x_{i2}-...-a_mx_{im}$, $i=1,...,n$, - отклонений выборочных значений показателя Y от линии регрессии выражается, как правило, в знаке каждых соседствующих отклонений, что может являться следствием нелинейного характера связи переменных или воздействием какого-то фактора, не включенного в уравнение регрессии. Это может быть причиной того, что существует возможность улучшить уравнение регрессии путем оценивания другой нелинейной формулы уравнения или путем включения нового объясняющего экономического фактора.

Одним из основных предполагаемых свойств отклонений ε_i выборочных значений y_i от регрессионной формулы является их статистическая независимость между собой. Поэтому после оценки параметров уравнения регрессии необходимо проверить статистическую независимость отклонений e_i. При этом проверяется обычно их некоррелированность, которая, вообще говоря, является необходимым, но недостаточным условием независимости. Для проверки некоррелированности соседних значений остатков e_i можно использовать их коэффициент автокорреляции первого порядка

$$r_{i,i-1} \approx \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i e_{i-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2}}$$

и проверить его статистическую значимость, например, с помощью t-статистики $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$, которая имеет t-распределение Стьюдента с n-2 степенями свободы. При этом, используя закон распределения Стьюдента, для заданного уровня значимости α, проверяется нулевая гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции.

На практике эконометрических исследований для проверки наличия или отсутствия автокорреляции остатков обычно используют тесно связанную с коэффициентом автокорреляции первого порядка $r_{i,i-1}$ статистику Дарбина-Уотсона, рассчитываемую по формуле

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}.$$

Так как

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i^2 - 2\sum_{i=2}^{n} e_i e_{i-1} + \sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}$$

и при больших объемах выборки n имеет место

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \approx \sum_{i=2}^{n} e_i^2 \approx \sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2,$$

то

$$DW \approx 2(1 - r_{i,i-1}).$$

Если e_i в точности равны e_{i-1}, то DW=0. Если $e_i = -e_{i-1}$, то DW=4. В остальных случаях $0 < DW < 4$.

Это показывает, что близость статистики Дарбина-Уотсона DW к двум является необходимым условием случайного характера отклонений от линии регрессии. Если статистика Дарбина-Уотсона близка к двум, можно считать отклонения наблюдений экономического показателя Y от линии регрессии случайными. Это значит, что оцененная функция отражает реальную взаимосвязь и не осталось существенных неучтенных факторов, влияющих на показатель Y.

При заданном уровне значимости α для статистики Дарбина-Уотсона существуют два критических значения, меньших двух: нижнее $d_н$ как граница для принятия гипотезы о наличии положительной автокорреляции остатков первого порядка и верхнее $d_в$ для признания отсутствия положительной автокорреляции. Для проверки гипотезы об отрицательной автокорреляции остатков используется критическая область (4-$d_н$; 4). Гипотеза же об отсутствии автокорреляции остатков первого порядка принимается, если расчетное значение статистики Дарбина-Уотсона попадает в интервал ($d_в$; 4-$d_в$):

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & | & | & | \\ 0 & d_н & d_в & 2 & 4-d_в & 4-d_н & 4 \end{array}$$

автокорреляции остатков первого порядка принимается, если расчетное значение статистики Дарбина-Уотсона попадает в интервал ($d_в$; 4-$d_в$):

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & | & | & | \\ 0 & d_н & d_в & 2 & 4-d_в & 4-d_н & 4 \end{array}$$

В случае, если коэффициент Дарбина-Уотсона DW попадает в интервалы ($d_н$; $d_в$), (4-$d_в$; 4-$d_н$), никакая из трех гипотез (об отсутствии автокорреляции остатков, о положительной автокорреляции остатков, об отрицательной автокорреляции остатков) при заданном уровне значимости α не может быть ни принята, ни отвергнута.

При объясняющих переменных не более 3 и достаточном числе наблюдений (не меньше 12), если статистика Дарбина-Уотсона составляет 1.5-2.5 для уровня значимости α=0.05 принимается гипотеза об отсутствии автокорреляции остатков первого порядка.

В случае наличия автокорреляции остатков полученная формула регрессии обычно считается неудовлетворительной. В этом случае приходится искать другую формулу функции, включить неучтенные факторы, применить к данным уменьшающее автокорреляцию остатков преобразование (например, метод скользящих средних) или разбить наблюдения на части, с тем, чтобы для первого периода получить одно уравнение регрессии, а для второго периода - другое.

6.5. Направления совершенствования линейной регрессионной модели.

При эконометрическом исследовании мы встречаемся с тремя противоречиями:

1. Противоречие между структурным и феноменальным. Не всегда измерения (количественных, статистически наблюдаемых величин) относятся к реальной структуре, на основе которой строится экономический объект. Какими бы точными и правильными ни были данные наблюдения, они могут отражать лишь внешние свойства, столь далекие от сущности исследуемого явления, что связь, которую мы устанавливаем между ними, не будет иметь ничего общего со структурной связью, от которой они происходят.

2. Противоречие между причинным и стохастическим. Это противоречие в значительной мере является результатом первого. Следует допускать вероятностные гипотезы [Шаттеллес] при описании связей между наблюдаемыми переменными во многих случаях, когда отсутствует знание относительной "пол-

ной" системы причин. По существу это незнание и порождает эконометрию. Если бы были известны непосредственно искомые структурные связи, то были бы известны и система действующих в них причинных отношений. В связи с тем, что наши измерения, наша статистика относятся не только к феноменальному, нужно прибегать к вероятностному суррогату действительности.

3. Противоречие между рационалистическим и эмпирическим. Наши дедуктивные модели часто вступают в противоречие с результатами эмпирического исследования. На первый взгляд, кажется, что нужно отдать предпочтение эмпирическим результатам. Зная искажения, к которым они восприимчивы, становится ясно, что мы не можем и не имеем права ни при каких обстоятельствах отказаться от строгих теоретических дедукций.

Формулировка упомянутых противоречий, возможно, внесет теперь больше ясности в то, что касается различий между математической экономикой и эконометрией.

Первая трактует структурные и причинные аспекты экономики. Последняя, вместе с другими количественными методами трактует эмпирически феноменальные и статистические аспекты экономических объектов.

В эконометрике следующая проблема о наиболее благоприятном моменте эконометрического анализа. Какие данные, за какой период наиболее подходящие для построения эконометрических моделей? При сложном эконометрическом анализе прежде всего следует иметь в виду, извлекаются ли исследуемые данные из "одной и той же урны". В случае наиболее "свежих" данных мы не всегда можем на это полагаться. Следовательно, не обязательно располагать "последними данными" для построения эконометрической модели.

Эконометрика может применяться в построении количественных моделей структур, основанном на регистрации моментных состояний:

1) для оценки или уточнения параметров моделей, полученных по статистическим данным;

2) для создания возможности включения в модель как дополняющего наряду с данными одномоментной регистрации элемента, так и данных, полученных в результате эконометрического анализа.

Вычисление параметров макроэкономических моделей, по существу - основная цель эконометрии, как и других методов количественной экономики, если рассматривать их полезность для экономической политики и прогнозирования. Предсказание эволюции основано на результатах эконометрических расчетов.

Цель оценки или построения эконометрических функций и уравнений заключается в конечном счете в получении эффективного инструментария предвидения. Достижение желательной эффективности предвидения является, однако, функцией степени согласованности между эконометрической моделью (подробная числовая экономико-математическая модель) и внутренней структурой статистических показателей, данных наблюдения. Искомая корреспонденция ограничена не только противоречием между структурой изучаемого объекта и сигналами, которые содержатся в статистических данных.

Ключевые слова

Адекватность модели, значимость коэффициентов регрессии, надежность статистических оценок, общая и остаточная дисперсия, нулевая и ненулевая гипотеза, автокорреляция остатков, критерий Дарбина-Уотсона, таблицы распределений.

Контрольные вопросы

1. 1.Для чего необходимо проверять качество модели?
2. 2.В чем суть понятия адекватности модели?
3. Как используется коэффициент детерминации при выборе адекватной линии регрессии.
4. Как проверяется нулевая гипотеза для критерия Фишера?
5. Для чего используется таблица распределения Стьюдента?
6. Что такое автокорреляция остатков?
7. Критерий Дарбина-Уотсона
8. Основные противоречия эконометрического исследования

Литература

1. Замков О.О. Математические методы и модели. -М.: ДиС, 2000.
2. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе.М 2003.
3. Бородич С.А. Эконометрика. Минск: Новое знание, 2001.
4. Нименья И.Н. Эконометрика. СПб.:Издательский Дом «Нева», 2003.
5. Ежеманская С.Н. Эконометрика. Ростов – на Дону, Феникс, 2003.
6. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. М.: Дело,2000.
7. К.Доугерти. Введение в эконометрику. ИНФРА-М,1999.
8. Н.Ш.Кремер, Путко Б.А. Эконометрика.М.:ЮНИТИ-ДАНА,2002.
9. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. М.:МЭСИ,2000.
10. Моделирование и прогнозирование экономических показателей на основе информационных технологий: Учеб. пос./Н.М.Махмудов. -Т.: ТГЭУ, 2002.

Интернет сайты

1. *www.bolero.ru/product-22422499.html*
2. *www.books.ru/shop/books/86703.html*
3. *www.center.neic.nsk.su/page_rus/bmodel.html*
4. *www.cemi.rssi.ru*

Тема 7. Производственные функции.

7.1. Понятие производственной функции.
7.2. Производственная функция Кобба-Дугласа. Средние и предельные производительности факторов производства.
7.3. Соотношение замещения и взаимодействия ресурсов в производственной функции.
7.4. Анализ эффектов масштаба на основе параметров производственной функции.
7.5. Типы показателей рассчитываемых на основе производственных функций.

7.1 Понятие производственной функции.

Производственная функция есть экономико-математическое выражение зависимости результатов производственной деятельности от показателей - факторов, обусловивших эти результаты. В условиях экономической действительности результат процесса производства определяется действием большого количества различных факторов - технических, экономических, социальных, природных. Все эти факторы учесть в производственной функции невозможно, т.к. одни из факторов не поддаются количественному выражению, а воздействие других практически мало. Поэтому производственная функция включает в себя те факторы, которые оказывают решающее воздействие на изучаемый показатель.

Аппаратом исследования производственных функций служат методы математической статистики. По своему содержанию производственные функции охватывают всевозможные зависимости в сфере производства на различных уровнях - предприятие, отрасль, народное хозяйство. С учетом изучаемой зависимости, целей и задач исследования применяются многообразные формы производственных функций. В простом случае изменение результативного показателя ставится в связь с изменением одного из показателей - факторов. Тогда производственная функция представляет собой уравнение $y = f(x)$ с двумя переменными - независимой x (показатель фактор) и зависимой у (результативный показатель). Это уравнение может быть линейный или нелинейным. Чаще строятся многофакторные производственные функции, позволяющие измерить характер и силу совместного влияния нескольких показателей-факторов на величину результативного фактора. Уравнение многофакторной производственной функции имеет вид:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

где у - результативный показатель (выпуск продукции и т.д.), а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - показатели - факторы (затраты труда и средств производства, природные условия и т.д.). Многофакторное уравнение может быть линейным или нелинейным. Многофакторная производственная функция может быть представлена в виде системы взаимосвязанных уравнения, когда это необходимо. Различают статистические и динамические производственные функции. В статистических функциях не учитывается время как фактор, изменяющий основные характеристики изучаемой зависимости. Динамические производственные функции включают фактор времени: время может в них рассматриваться как самостоятельная переменная, влияющая на результат; параметры и показатели-факторы могут рассматриваться как функции времени. Производственные функции разрабатываются и как самостоятельные экономико-математические модели, предназначенные для прогнозирования, принятия решений.

7.2 Производственная функция Кобба-Дугласа. Средние и предельные производительности факторов производства.

Экономико-математическое исследование производственных функций позволяет получить ряд показателей, связанных с содержанием и формой функции и дают возможность анализа о характере изучаемой зависимости. Рассмотрим эти показатели на примере одной из производственных функций - функции Кобба-Дугласа. Предположим, что в масштабах народного хозяйства изучается зависимость величины валовой продукции от двух факторов: затрат живого труда и производственных фондов. Эта зависимость имеет вид:

$$y = a_0\, x_1^{a1} \cdot x_2^{a2} \qquad (1)$$

где y - величина валовой продукции

x_1- затраты труда

x_2 - объем производственных фондов

a_0, a_1, a_2 - параметры производственной функции.

$0 < a_i < 1$, где $i = 1; 2$.

Сначала определим на основании производственной функции (1) показатель производительности труда, как отношение величины валового продукта к совокупным затратам труда:

$$\frac{y}{x} = a_0 \cdot x_1^{a1-1} \cdot x_2^{a2} \qquad (2)$$

Это выражение характеризует среднюю производительность труда, т.к. показывает среднее количество продукции приходящееся на единицу отработанного времени, т.к. коэффициент $0 < a_1 < 1$, то показатель степени (a_1-1) при X_1 - отрицательная величина, т.е. с увеличением затрат труда производительность снижается. Производительность труда снижается с ростом трудовых затрат при прочих равных условиях, т.е. при неизменном объеме других ресурсов, в том числе производственных фондов x_2. Увеличение производственных функций помимо средних показателей большую роль играют предельные величины. Предельная производительность труда показывает сколько дополнительных единиц продукции приносит дополнительная единица затраченного труда. Уравнение предельной производительности труда для функции (1) есть частная производная выпуска продукции по затратам труда.

$$\frac{dy}{dx} = a_0\, a_1\, x_1^{a1-1} \cdot x_2^{a2} \qquad (3)$$

Из этого выражения видно, что предельная производительность труда зависит от трудовых затрат x_1 и производственных фондов x_2 . С увеличением затрат труда при неизменных производственных фондах предельная производительность труда снижается. С увеличением объема фондов при неизменных затратах труда предельная производительность труда увеличивается. Одновременное изменение переменных x_1 и x_2 приводит к разным результатам - снижению, росту или неизменной величине предельной производительности труда. Сопоставляя выражение (2) и (3) получим

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \frac{y}{x_1} \qquad (4)$$

т.к. $0<a_1<1$, то в производственной функции (1) предельная производительность труда ниже средней производительности. Наряду с исчислением абсолютного прироста продукции на единицу прироста затрат исчисляют относительный прирост объема производства на единицу относительного увеличения ресурсов труда:

$$\frac{dy}{dx_1} \cdot \frac{x_1}{y} = a_1 \qquad (5)$$

из выражения (4). Полученный показатель называется эластичностью выпуска продукции по затратам труда. Он показывает, на сколько процентов увеличивается выпуск при увеличении затрат труда на 1%. Относительная величина не зависит от ресурсов, и при любом их сочетании увеличение трудовых затрат на 1% приводит к росту объема производства на a_1 %.

Аналогичные показатели рассчитываются по отношению ко второму фактору x_2 - производственным фондам. Объем продукции на единицу используемых фондов есть фондоотдача, рассчитаем среднюю фондоотдачу из выражения (1):

$$\frac{y}{x_2} = a_0\ x_1^{a1}\ x_2^{a2-1} \qquad (6)$$

Это выражение показывает, что средняя фондоотдача увеличивается при увеличении ресурсов труда (при неизменных фондах) и уменьшается с увеличением фондов (при неизменных трудовых ресурсах). Показатель предельной фондоотдачи есть частная производная выпуска продукции по объему фондов:

$$\frac{dy}{dx_2} = a_0\, a_2\, x_1^{a1}\ x_2^{a2-1} \qquad (7)$$

т.к. $0<a_2<1$, то предельная фондоотдача ниже средней. Относительная предельная фондоотдача или эластичность выпуска продукции по объему производственных фондов определяется выражением

$$\frac{dy}{dx_2} \cdot \frac{x_2}{y} = a_2 \qquad (8)$$

7.3 Соотношение замещения и взаимодействия ресурсов в производственной функции.

Производственная функция позволяет рассчитывать потребность в одном из ресурсов при заданном объеме производства и величине другого ресурса. Из уравнения (1) следует, что потребность в ресурсах труда равна:

$$x_1 = \left(\frac{y}{a_0 \cdot x_2^{a2}}\right)^{\frac{1}{a2}} \qquad (9)$$

потребность в производственных фондах:

$$x_2 = \left(\frac{y}{a_0 \cdot x_1^{a1}}\right)^{\frac{1}{a2}} \qquad (10)$$

Производственная функция позволяет исследовать и вопросы соотношения, замещения, взаимодействия ресурсов. При изучении взаимодействия трудовых ресурсов и производственных фондов определяется показатель фондовооруженности труда. Для функции (1) - это есть отношение переменных x_1 и x_2.

Разделив выражение (10) на (9) получим:

$$\frac{x_2}{x_1} = a_0^{-\frac{1}{a2}} \cdot y^{\frac{1}{a2}} \cdot x_1^{-1-\frac{a1}{a2}} \qquad (11)$$

Взаимодействующие в рамках производственной функции ресурсы могут замещать друг друга. Это означает, что единицу одного ресурса можно было бы заменить некоторым количеством другого ресурса так, что объем продукции при этом не изменится. На основе производственной функции можно рассчитать предельную норму замещения ресурсов. Предельная норма замещения затрат труда производственными фондами равна:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_1 x_1}{a_2 x_1} \qquad (12)$$

Знак минус в этом выражении означает, что при фиксированном объеме производства увеличению одного ресурса соответствует уменьшение другого, и наоборот. Предельная норма замещения ресурсов зависит не только от параметров a_1 и a_2 , но и от соотношения объемов ресурсов. Чем выше фондовооруженность труда, тем выше норма замещения затрат живого труда производственными фондами. Это обстоятельство находит свое выражение в показателе, который называется эластичностью замещения ресурсов и определяется как отношение относительных приращений фондовооруженности труда и предельной нормы замещения ресурсов (w):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = h \qquad (13)$$

$d\,(x_2/x_1) \qquad h$

w = ------------- · ---------

dh x2/x1

Эластичность замещения ресурсов постоянна и равна единице. Это согласуется с анализом выражения (12): изменению фондовооруженности труда на 1% соответствует изменение предельной нормы замещения на 1 %.

7.4 Анализ эффектов масштаба на основе параметров производственной функции.

Важной характеристикой производственной функции (1) является сумма коэффициентов эластичности выпуска по затратам, т.е. величина $A = a_1 + a_2$; $0 < a_1$; $a_2 < 1$, экономически это предположение оправдано. Если бы, например коэффициент a_1 был бы отрицательным, это означало бы, что с увеличением трудовых затрат выпуск продукции снижается абсолютно. Нереально и то, что $a_1 \geq 1$: это означало бы, что увеличение только трудовых ресурсов, например, в два раза при неизменном количестве остальных производственных ресурсов обеспечивает прирост продукции в два раза (если $a_1 = 1$) и более , чем в два раза (если $a_1 > 1$). Аналогичные выводы относятся и к коэффициенту a_2. Сумма А - показывает эффект одновременного пропорционального увеличения объема как ресурсов труда, так и производственных фондов. Предположим, что объем каждого ресурса увеличился в m раз, тогда новый объем продукции равен:

$$y` = a_0 (mx_1)^{a1} \cdot (mx_2)^{a2} = a_0 m^{a1 + a2} x_1^{a1} \cdot x_2^{a2} = m^A y \quad (14)$$

Итак, при расширении масштабов производства можно, в зависимости от величины $A = a_1 + a_2$ получить три варианта результатов:

1) Если А = 1, то увеличение ресурсов в m раз приводит к увеличению объема производства тоже в m раз (y` = my)

2) Если А > 1, то увеличение ресурсов в m раз приводит к росту объема продукции, более, чем в m раз. Экономически можно говорить о положительном эффекте расширения масштабов производства.

3) Если $A \leq 1$, то увеличение ресурсов в m раз приводит к возрастанию объема производства менее, чем в m раз . В этом случае имеет место отрицательный эффект расширения масштабов производства.

В соответствии с уравнением (15) выпуск продукции возрастает с ростом затрат ресурса, причем при любом уровне затрат дополнительная их единица обеспечивает постоянный прирост выпуска на a_1 единиц ($a_1 > 0$). Для большинства ресурсов такое предположение расходится с реальностью. Более естественную интерпретацию уравнение (15) получает как функция затрат, где x - объем производства, y - производственные затраты, тогда a_0 - постоянные затраты, не зависящие от объема производства, a_1x - переменные затраты, пропорциональные выпуску продукции. Средняя производительность убывает по гиперболическому закону. Предельный продукт (или предельная себестоимость единицы продукции) есть величина постоянная, равная a_1. При положительных параметрах a_0 и a_1 коэффициент эластичности E < 1. С увеличением x эластичность растет, приближаясь к 1, т.е. для функции линейной увеличение независимой переменной на 1 % приводит к росту зависимой переменной величины менее чем на 1%.

7.5 Типы показателей рассчитываемых на основе производственных функций.

Учитывая характеристики, полученные для функции вида (1), дадим общее описание производственных функций. При n показателях - факторах она имеет вид.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Для любого ресурса i можно определить его среднюю производительность при фиксированных объемах остальных ресурсов:

$$\frac{y}{x_1} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i}$$

Предельная производительность i-го ресурса, характеризующая приращение результата производства на единицу приращения i-го ресурса, определяется так:

$$\frac{dy}{dx_i} = f`_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Изменение предельной производительности с изменением объема i-го ресурса при неизменном объеме других ресурсов рассчитывается как вторая частная производная зависимой переменной у по i-му ресурсу

$$\frac{d^2y}{dx_i^2} = f``_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Если эта производная положительна, то предельна отдача i-го ресурса возрастает, если - отрицательна, то предельная производительность убывает, в случае знакопеременной производной кривая предельной отдачи фактора имеет восходящий и нисходящий участки, причем в некоторой точке достигается максимум предельной производительности. Для отыскания точки максимума имеет:

$$f``(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Эластичность выпуска по затратам i-го ресурса, показывающая относительное изменение результата производства на единицу относительного изменения затрат i-го ресурса, имеет вид:

$$Ei = \frac{dy}{} \cdot \frac{x_1}{} = \frac{f`_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{}$$

$dx_1 \quad y \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Потребность в *i*-м ресурсе как функция величины выпуска и объемов других ресурсов определяется выражением:

$$x_i = f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Предельная норма замещения h_{ij} j-го ресурса i-м ресурсом:

$$h_{ij} = \frac{dx_1}{dx_j} = \frac{-dy/dx_j}{dy/dx_i}$$

Относительным показателем замещения ресурсов является эластичность замещения:

$$w_{ij} = \frac{d(x_1/x_j)}{dh_{ij}} = \frac{h_{ij}}{x_i\, x_j}$$

В соответствии с видом производственной функции эластичность замещения может быть переменной или постоянной величиной.

При выборе вида производственных функций необходимо учитывать закономерности изменения средних и предельных продуктов, норм замещения, коэффициентов эластичности.

Рассмотрим некоторые виды производственных функций. Сначала рассмотрим однофакторные функции, где результат производства связан с единственной независимой переменной.

Простейшей формой однофакторной производственной функции является линейное уравнение вида

$$y = a_0 + a_1 x \qquad (15)$$

Функция выражает зависимость объема производства от величины затрат какого-либо ресурса, при условии, что экономическая сущность зависимости согласуется с уравнением (15). При отсутствии затрат ресурса ($x = 0$) выпуск продукции имеет некоторую величину: $y = a_0$ (при $a_0 > 0$). Для специфических видов ресурсов типа удобрений такое условие отвечает действительности, для других ресурсов - не имеет смысла

Ключевые слова

Производственная функция, факторы производства, эндогенные и экзогенные переменных виды производственной функция, функция Кобба-Дугласа, основные производственные характеристики, средняя производительность труда, предельная производительность труда, эластичность выпуска продукции, потребность в ресурсах, замещение ресурсов, виды производственных функций.

Контрольные вопросы

1. Понятие производственной функции и виды.
2. Структура функции Кобба-Дугласа и ее экономическое предназначение.
3. Расчет основных алгебраических характеристик функции Кобба-Дугласа.
4. Экономическое содержание основных характеристик функции Кобба-Дугласа.
5. Понятие замещения ресурсов в производственной функции.
6. Расчет потребности в ресурсах в производственной функции.
7. Виды производственной функции и ее классификация.

8. Понятие коэффициента эластичности и его расчет.

Литература

1. Замков О.О. Математические методы и модели. -М.: ДиС, 2000.
2. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе.М 2003.
3. Бородич С.А. Эконометрика. Минск: Новое знание, 2001.
4. Нименья И.Н. Эконометрика. СПб.:Издательский Дом «Нева», 2003.
5. Ежеманская С.Н. Эконометрика. Ростов – на Дону, Феникс, 2003.
6. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. М.: Дело,2000.
7. К.Доугерти. Введение в эконометрику. ИНФРА-М,1999.
8. Н.Ш.Кремер, Путко Б.А. Эконометрика.М.:ЮНИТИ-ДАНА,2002.
9. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. М.:МЭСИ,2000.
10. Моделирование и прогнозирование экономических показателей на основе информационных технологий: Учеб. пос./Н.М.Махмудов. -Т.: ТГЭУ, 2002г.

Интернет сайты

1. www.com1c.by.ru/bp.html
2. www.document.ru/education/mbus_doc.html
3. www.edu.intalev.ru
4. www.hyperion.ru/mdlrv.html
5. www.interface.ru/rtcs/cs018-06.html

Тема 8. Методология построения комплексных систем эконометрических уравнений.

8.1. Системы эконометрических уравнений. Виды систем независимых уравнений.
8.2. Экзогенные и эндогенные переменные.
8.3. Построение и расчёт эконометрических моделей.
8.4. Проблема идентификации в системах уравнений.

8.1. Системы эконометрических уравнений. Виды системы эконометрических уравнении.

Сложность и многогранность производственных взаимосвязей, объектов анализа и прогнозирования, специфика конкретной производственной структуры или особые цели и формы исследования часто обусловливают необходимость представления производственной функции не одним уравнением, а в виде системы уравнений.

Системы эконометрических уравнений можно условно подразделить на три вида.

К первому виду относятся системы независимых уравнений, каждое из которых решается самостоятельно, вне зависимости от других уравнений, но все они рассматриваются совместно в рамках единой экономико-математической модели, предназначенной для анализа, планирования или прогнозирования производства. Иными словами, интересы исследования производства в целом требуют совместного рассмотрения ряда функций, каждая из которых может характеризовать лишь одну из сторон этого производства.

Простейший вариант такой системы уравнений возникает при анализе выпуска продукции с применением определенной технологии, требующей строго фиксированных пропорций затрат различных ресурсов (непосредственная заменяемость ресурсов отсутствует). Тогда уровень затрат ресурса изменяется пропорционально изменению объема производства. Если рассматриваются два ресурса, причем возможен их расход сверх минимальной потребности на данный объем производства у, то производственная функция представляется системой неравенств:

$$x_1 \geq a_1 y,$$

$$x_2 \geq a_2 y.$$

Технологическая характеристика описываемого этой системой производственного процесса определяется коэффициентами затрат

$$a_1 = \frac{x_1}{y} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{x_2}{y}$$

В экономико-математических моделях часто исследуется определенный набор технологических процессов, в которых затрачивается ряд видов ресурсов и производится различная продукция. Если сохраняются предположения о пропорциональности затрат выпуску и отсутствии взаимозаменяемости ресурсов в рамках каждого производственного процесса, то основой модели служит система производственных функций вида:

$$x_{ij} = a_{ij}y_j,$$

где x_{ij} - уровень затрат i-го ресурса в j-м технологическом процессе; y_j, - интенсивность j-го процесса или выпуск j-го вида продукции; a_{ij} - технологический коэффициент, норма затрат i-го ресурса на единицу интенсивности j-го процесса (или на единицу j-го вида продукции).

При m ресурсах и n производственных процессах эта система содержит, очевидно, mn уравнений. Такой вид производственных функций широко применяется в моделях межотраслевого баланса и линейных моделях оптимального планирования и прогнозирования; они будут рассмотрены в последующих главах.

Ко второму виду относятся системы зависимых уравнений статического характера. Можно выделить два случая зависимости уравнений. В одном случае уравнения описывают последовательную цепочку прямых причинно-следственных связей; при этом факторы, влияющие на анализируемый результативный производственный показатель, сами являются функциями иных факторов, последние также находятся в зависимости от своих показателей-факторов и т.д. Например, одно уравнение системы может представлять объем национального дохода у в зависимости от величины трудовых ресурсов x_1 и производственных фондов x_2 т. е. функцию $y = f(x_1,x_2)$. Другое уравнение определяет величину трудовых ресурсов x_1 как функцию общей численности населения L, т. е. $x_1 = y(L)$. В такой системе уравнения решаются последовательно (сначала, например, определяется объем трудовых ресурсов на основе прогнозных данных о численности населения, а затем уже может рассчитываться национальный доход из первого уравнения).

В другом случае в цепи причинно-следственных зависимостей отражаются обратные связи, например, национальный доход у является функцией трудовых ресурсов и производственных фондов, т. е. $y = f(x_1, x_2)$, а величина производственных фондов x_2 ставится в зависимость от созданного национального дохода у и иных факторов **Z,** т.е. $x_2 = y(y_1, z)$. В такой системе уравнения должны решаться совместно, одновременно.

В обоих рассматриваемых случаях системы уравнений второго вида включают два типа переменных: эндогенные и экзогенные переменные. Эндогенными являются "внутренние" переменные — их значения рассчитываются в рамках самой системы уравнений. Экзогенные переменные влияют на эндогенные, но сами определяются за пределами данной системы уравнений; они являются как бы "внешними" переменными в том смысле, что воздействующие на них факторы данной системой уравнений не контролируются. Например, в только что приведенных примерах национальный доход, трудовые ресурсы, производственные фонды являются эндогенными переменными, а общая численность населения — переменная экзогенная, ее величина определяется социально-демографическими факторами, лежащими вне рамок производственных функций. Для разрешимости системы уравнений необходимо, вообще говоря, чтобы число эндогенных переменных в системе было равно числу уравнений.

К третьему виду относятся динамические системы уравнений, охватывающие ряд периодов времени и устанавливающие зависимость переменных не только в пределах каждого периода, но и в связи с их состоянием в предшествующие периоды. Обратимся к примеру. Предположим, что в задачу прогнозирования входит определение четырех взаимосвязанных переменных для некоторого периода t: $x_{1,t}$, $x_{2,t}$, $x_{3,t}$, $x_{4,t}$. В анализ включены не только их связи в самом периоде t, но и воздействие с запаздыванием, т. е. зависимости величин переменных в периоде t от состояния влияющих переменных в предыдущем (или еще более раннем) периоде. Такие влияния с запаздыванием вполне реальны; например, величина производственных фондов в народном хозяйстве в данном периоде в значительной степени зависит от объема капиталовложений предыдущего периода.

8.2.Экзогенные и эндогенные переменные.

При построении системы уравнений нужно учитывать, что помимо влияний, показанных на рисунке, каждая анализируемая переменная может испытывать воздействие одной или нескольких экзогенных переменных. Пусть $Z_{1,t}$ обозначает экзогенные факторы переменной $x_{1,t}$; соответственно для $x_{2,t}$, $x_{3,t}$, $x_{4,t}$ введем агрегированные экзогенные переменные $Z_{2,t}$, $Z_{3,t}$, $Z_{n,t}$. Тогда с учетом всех взаимосвязей имеем в общем виде следующую систему уравнений:

$$x_{1,t} = f_1 (x_{3,t}, x_{2,t-1} , Z_{1,t})$$
$$x_{2,t} = f_2 (x_{1,t}, x_{3,t-1} , Z_{2,t})$$
$$x_{3,t} = f_3 (x_{2,t}, x_{4,t-1} , Z_{3,t})$$
$$x_{4,t} = f_4 (x_{2,t}, x_{3,t-1} , Z_{4,t}).$$

В этой системе четко различаются три группы переменных:

1) эндогенные переменные $x_{1,t}$, $x_{2,t}$, $x_{3,t}$, $x_{4,t}$, определение которых требует решения приведенной' системы уравнений;

2) запаздывающие эндогенные переменные $x_{1,t-1}$, $x_{2,t-1}$, $x_{3,t-1}$, $x_{4,t-1}$); для t-го периода они считаются известными, определенными либо на основе статистической информации, либо в результате решения аналогичной системы уравнений, составленной для (t - 1)-го периода;

3) экзогенные переменные $Z_{1,t}$, $Z_{2,t}$, $Z_{3,t}$, $Z_{4,t}$), определяемые за рамками данной системы уравнений.

Переменные второй и третьей групп имеют то общее, что их значения предопределены внешними по отношению к системе уравнений факторами; влияя на переменные t-го периода, они сами не подвержены их обратному влиянию. Переменные второй и третьей групп будем называть предопределенными. Количество предопределенных переменных в уравнениях, как будет показано в следующем параграфе, имеет существенное значение для решения систем эконометрических уравнений. Частным случаем, упрощающим расчеты, является система уравнений в виде причинной цепочки зависимостей при отсутствии обратных связей между переменными. Пример такой системы зависимостей показан на рис. 8. Как видим, любая цепочка связей приводит в конечном счете к переменной $x_{4,t}$, последовательно и без возвратов.

Данная цепь взаимосвязей с добавлением экзогенных переменных дает систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
x_{1,t} &= f_1 (x_{2,t-1}, x_{3,t-1}, Z_{1,t}) \\
x_{2,t} &= f_2 (x_{1,t}, x_{3,t-1}, x_{4,t-1}, Z_{2,t}) \\
x_{3,t} &= f_3 (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{4,t-1}, Z_{3,t}) \\
x_{4,t} &= f_4 (x_{2,t}, x_{3,t}, Z_{4,t}).
\end{aligned}
$$

Такие системы уравнений в виде однозначной причинной цепи называются рекурсивными (рекурректными) системами. Уравнения в них решаются не одновременно, а последовательно. Так, в приведенной системе вначале решается первое уравнение — определение $x_{1,t}$, как функция только предопределенных переменных. Затем из второго уравнения получаем $x_{2,t}$, как функцию предопределенных переменных и уже вычисленной $x_{1,t}$. Далее последовательно получаем $x_{3,t}$ из третьего уравнения и $x_{4,t}$ из последнего уравнения системы. Здесь расчеты в первых трех уравнениях являются, в сущности, подготовительными этапами для решения четвертого уравнения, в котором переменная $x_{4,t}$ может в конечном счете рассматриваться как сложная функция всех остальных переменных системы. В этом смысле рекурсивные системы занимают промежуточное положение между производственными функциями, состоящими из одного уравнения, и системы эконометрических уравнений, требующих одновременного решения.

8.3. Построение и расчет эконометрических моделей.

Важным этапом построения эконометрической модели, в частности производственной функции, является отбор включаемых в нее показателей-факторов. Исследователь редко может назвать все факторы, в той или иной мере воздействующие на прогнозируемый “показатель, но если он знает достаточно много факторов, включение их всех в функции либо невозможно, либо просто нецелесообразно: влияние одних факторов может быть заведомо весьма слабым, по другим отсутствуют необходимые данные, наконец, множество включаемых факторов делает производственную функцию слишком громоздкой, неудобной в анализе и применении, к тому же сильно затрудняются вычисления. По отношению к реально разрабатываемым функциям, комплекс показателей-факторов обычно можно представить в виде

$$y = f(x_1, x_2 \ldots, x_k/x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_m/x_{m+1}, x_{m+2} \ldots, x_n)$$

Из n факторов, определяющих величину зависимой переменной y, первые k факторов являются переменными величинами, включаемыми в уравнение производственной функции; факторы от (k + 1)-го до т-го в уравнение не входят, но каждый из них в наблюдаемой статистической совокупности фиксирован на определенном уровне,, не варьирует и потому не влияет на колебания зависимой переменной; факторы от (m + 1)-го до n-го являются переменными величинами, вариация которых влияет на изменения зависимой переменной, но в функцию эти факторы по тем или иным причинам не включены. На получение надежного уравнения производственной функции можно рассчитывать в том случае, когда первую группу составляет пусть небольшая по числу, но максимально мощная по силе воздействия на y совокупность важнейших факторов, а из остальных (n—k) факторов возможно большее число принадлежит ко второй, контролируемой группе.

В уравнение не должны одновременно включаться факторы, находящиеся между собой в строгой функциональной зависимости; включается лишь один из них — по влиянию наиболее важный. Нежелательно и включение факторов, между которыми существует тесная корреляционная связь.

Специфика производственных функций состоит в том, что в качестве независимых переменных в них фигурируют в основном различные ресурсы производства. Построение производственной функции предполагает решение вопросов о перечне вводимых в функцию первичных ресурсов (труд, производственные фонды, природные ресурсы), о включении в модель промежуточных продуктов (сырье, материалы, топливо, энергия), об отражении качественных характеристик различных ресурсов. Практически в однопродуктовые эконометрические модели для народнохозяйственного уровня включают только первичные ресурсы либо двух видов (труд и производственные фонды), либо трех (добавляются природные ресурсы, чаще всего — используемые земли). На уровнях отраслей, объединений, предприятий, списки ресурсов отличаются гораздо большим разнообразием, причем в них зачастую фигурируют промежуточные продукты, например, электроэнергия, топливо, корма, удобрения и др. Особо важное значение имеет достижение качественной однородности вводимых в модель ресурсов.

8.4 Проблема идентификации для систем эконометрических уравнений.

Введение искусственных переменных. На основе качественного анализа сущности изучаемой зависимости и списка переменных величин делаются предварительные предположения о виде эконометрической модели: будет она представлена одним уравнением или системой уравнений, какую математическую форму намечается применить, каково примерно будет количество параметров функции. Окончательно эти вопросы решаются в процессе расчета модели.

Наличие исходных статистических данных и выбранной формы уравнения позволяет перейти к расчету параметров производственной функции. Существует ряд методов расчета параметров, однако практически в большинстве случаев применяется метод наименьших квадратов, который позволяет получить параметры функции, удовлетворяющие требованию минимальной суммы квадратов отклонений фактических значений зависимой переменной от вычисленных по уравнению.

Метод наименьших квадратов может применяться и в случае, когда модель состоит не из одного уравнения производственной функции, а представляет собой систему уравнений. Однако расчет параметров для системы уравнений имеет некоторые особенности. Очень важное значение для расчетов имеет характеристика системы с точки зрения количества и "размещения" переменных в уравнениях.

Уже отмечалось, что переменные в системах эконометрических уравнений бывают двух видов — эндогенные и предопределенные (к последним относятся экзогенные и запаздывающие эндогенные переменные). Учитывая это, введем понятие идентификации уравнений.

Обозначим через Н число эндогенных переменных, входящих с ненулевыми коэффициентами в исследуемое уравнение системы. Через D обозначим число предопределенных (экзогенных и запаздывающих эндогенных) переменных, которые содержатся а системе, но не входят в данное уравнение. Уравнение называется точно идентифицированным, если число Н на единицу больше числа D, т. е.

$$D + 1 = H$$

При условии $D+1>H$ уравнение называется сверхидентифицированным, а при $D+1<H$ - неидентифицированным. Рассмотрим в качестве примера систему уравнений, приведенную на стр.4. Первое уравнение этой системы содержит две эндогенные переменные $x_{1,t}$ и $x_{3,t}$, т. е. $H = 2$. Предопределенных переменных, входящих в систему, но не в первое уравнение, насчитывается пять, это $x_{3,t-1}$, $x_{4,t-1}$, $Z_{2,t}$, $Z_{3,t}$, $Z_{4,t}$. Итак, для первого уравнения $D+1=6>H$ и уравнение является сверхидентифицированным. Аналогично можно показать, что и остальные уравнения этой системы являются сверхидентифицированными.

Для расчета параметров системы эконометрических уравнений наиболее благоприятен случай, когда все уравнения системы точно идентифицированны. Предположим, что система состоит из n точно идентифицированных уравнений с n эндогенными и m предопределенными переменными:

$$f_i (x_1, x_2, ..., x_n; Z_1, Z_2, ..., Z_m) = 0; \; i = 1, 2, .., n.$$

Для расчета параметров система вначале перестраивается в приведенную форму, при которой каждая эндогенная переменная выражается как функция только предопределенных переменных. Такая система имеет вид:

$$x_1 = Y_i (Z_1, Z_2, ..., Z_m), i = 1, 2, ..., n.$$

Для каждого уравнения этой системы на основе статистических данных определяются параметры методом наименьших квадратов (если он применим) или каким-либо другим методом, используемым для вычисления параметров отдельных уравнений регрессии. Затем приведенная система с вычисленными параметрами преобразуется алгебраическими методами в исходную систему уравнений. На этом последнем этапе расчета как раз и проявляется важность проблемы идентификации: для точно идентифицированного уравнения достаточно легко производится исключение не входящих в него предопределенных переменных.

Ключевые слова.

Системы эконометрических уравнений, виды эконометрических уравнений, уровень затрат ресурсов, уравнения статистического характера, причинно - следственные зависимости, экзогенные и эндогенные переменные, рекурсивные системы.

Контрольные вопросы.

1. Виды системы эконометрических уравнений.
2. Системы независимых уравнений и методы их решения.
3. Системы зависимых уравнений и методы их построения.
4. Динамические системы уравнений.
5. Виды переменных эконометрических уравнений.
6. Методика построения системы эконометрических уравнений.
7. Понятие мультиколлинеарности в эконометрических системах.
8. Проверка мультиколлинеарности с использованием коэффициента корреляции.

Литература

1. Н.Ш.Кремер, Путко Б.А. Эконометрика.М.:ЮНИТИ-ДАНА,2002.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. М.:МЭСИ,2000.
3. Замков О.О. Математические методы и модели. -М.: ДиС, 2000.
4. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе.М 2003.
5. Бородич С.А. Эконометрика. Минск: Новое знание, 2001.
6. Нименья И.Н. Эконометрика. СПб.:Издательский Дом «Нева», 2003.
7. Ежеманская С.Н. Эконометрика. Ростов – на Дону, Феникс, 2003.
8. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. М.: Дело,2000.
9. К.Доугерти. Введение в эконометрику. ИНФРА-М,1999.
10. Моделирование и прогнозирование экономических показателей на основе информационных технологий: Учеб. пос./Н.М.Махмудов. -Т.: ТГЭУ, 2002г.

Интернет сайты

1. *www.document.ru/education/mbus_doc.html*
2. *www.edu.intalev.ru*
3. *www.hyperion.ru/mdlrv.html*
4. *www.interface.ru/rtcs/cs018-06.html*

Тема 9. Моделирование динамики экономических явлений.

9.1. Характеристики экономического развития. Характеристики скорости и интенсивности изменения динамического ряда.
9.2. Типы экономического развития. Выбор моделей типов траектории экономического развития.
9.3. Модель макроэкономической динамики Харрода-Домара.
9.4. Особенности модели макроэкономического роста Солоу.

9.1 Характеристики экономического развития. Характеристики скорости и интенсивности изменения динамического ряда.

Задачи, изучаемые экономической наукой и практикой, делятся, в зависимости от учета времени, на статистические и динамические. Статистика изучает состояния экономических объектов, относящихся к определенному моменту или периоду времени, без учета изменения их параметров во времени. В динамических задачах отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязи во времени. Например, динамика инвестиций определяет динамику величин основного капитала, что в свою очередь является важнейшим фактором изменения объема выпуска.

В основе динамического анализа лежит понятие *траектории.* Траектории описывает состояние изучаемого объекта (или значения изучаемого показателя) как функцию от времени:

$$T = Y(t), t \in [0, T],$$

где $[0, T]$ - отрезок времени, на котором определена траектория.

При этом время t может учитываться как по моментам (или интервалам), так и непрерывно. В первом случае (1) называют также *динамическим (временным)* рядом. По временному признаку экономические показатели делятся на моментные (например, численность населения и объем основных фондов на начало года) и интервальные (объем производства за год и т.п.). Непрерывное время удобно для моделирования, так как позволяет использовать аппарат дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений. Дискретное время удобно для приложений, так как статистические модели всегда дискретны и относятся к конкретным моментам или интервалам времени. Для дискретного времени может использоваться аппарат разностных уравнений.

Характеристики скорости и интенсивности изменения динамического ряда.

Абсолютный прирост за единицу времени характеризует скорость изменения уровня.

Темп роста характеризует интенсивность изменения.

Темп прироста – относительную скорость изменения.

Показатели изменения динамического ряда могут вычисляться при постоянной и переменной базе. За постоянную базу принимается один уровень динамического ряда, как правило, начальный. Переменной базой служит предшествующий уровень. Показатели на постоянной базе называются *базисными,* а на переменной – *цепными.*

Показатель	База показателя	
	Постоянная (базисный показатель)	Переменная (цепной показатель)
Абсолютный прирост	$\Delta_{t/0} = Y_t - Y_0$	$\Delta_{t/t-1} = Y_t - Yt - 1$
Темп роста	$y_{t/0} = Y_t / Y_0$	$\eta_{t/t-1} = Y_t / Y_{t-1} = Y / Y_{-1}$
Темп прироста	$y_{t/0} = (Y_t - Y_0) / Y_0$	$y_{t/t-1} = (Y - Y_{-1}) / Y_{-1}$

Предельные (непрерывные) абсолютные и относительные приросты
Непрерывный абсолютный прирост:

$$\Delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Y(t+\Delta t) - Y(t)}{\Delta t} = \frac{dY(t)}{dt} = Y.$$

Непрерывный темп прироста:

$$y(t) = \frac{\Delta(t)}{Y(t)} = \frac{dY(t)/dt}{Y(t)}$$

Связь между непрерывным и дискретным темпам прироста
Пусть непрерывный темп прироста

$$y = \frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = B = const.$$

Тогда

$$\ln Y(t) = \int Bdt = Bt + C, \text{ C = const.}$$

Потенцируя, имеем:

$$Y(t) = Ae^{Bt}, \text{ A} = \text{e}^{C}$$

Дискретный темп прироста равен

$$y = \frac{Y}{Y_{-1}} - 1 = \frac{Ae^{Bt}}{Ae^{B(t-1)}} - 1 = e^{B} - 1 = e^{y} - 1.$$

Таким образом, связь между непрерывным и дискретным темпами прироста имеет вид:

$$y = e^{y} - 1, \quad y = \ln(y+1).$$

9.2. Типы экономического развития. Выбор моделей типов траектории экономического развития.

Пусть показатель S(t) есть сумма A(t) и B(t), растущих с постоянными непрерывными темпами α и β соответственно. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. Тогда

$$S(t)=A(t)+B(t)=A(0)e^{\alpha t}+B(0)e^{\beta t}=A(0)e^{\alpha t}\left[1+e^{(\beta-\alpha)t}B(0)/A(0)\right]$$

Поскольку $\beta-\alpha<0$, то величина в квадратных скобках стремиться к единице, и темп прироста суммы приближается к темпу быстрее растущего составляющего.

Пусть показатель P(t) есть произведение A(t) и B(t) с непрерывными темпами прироста α и β:

$$P(t)=A(t)B(t)=A(0)e^{\alpha t}B(0)e^{\beta t}=P(0)e^{(\beta+\alpha)t},$$

то есть темп прироста произведения равен сумме темпов прироста сомножителей.

В случае дискретных темпов прироста α и β показателей A(t) и B(t), имеем:

$$P(t)=A(t)B(t)=A(0)(1+\alpha)^t B(0)(1+\beta)^t=P(0)(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)^t.$$

При малых α и β величина $\alpha\beta$ пренебрежимо мала и темп прироста произведения приближенно равен сумме темпов прироста сомножителей. Если же α и β значительны, то темп прироста произведения не может приближенно считаться равным сумме темпов прироста сомножителей.

Пример. *Производственная функция* – статистически устойчивая, взаимосвязь между ресурсами и результатом производства: K,L $\xrightarrow{f}$ Y.

1) Производственная функция типа Кобба-Дугласа: $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$.
   Логарифмируя, имеем: $\ln Y = \ln A+\alpha\ln K+\beta\ln L$. Дифференцируя по времени: $\frac{d\ln Y}{dt}=\alpha\frac{d\ln K}{dt}+\beta\frac{d\ln L}{dt}$. Таким образом, $\frac{\dot Y}{Y}=\alpha\frac{\dot K}{K}+\beta\frac{\dot L}{L}$, где $\dot Y$ – производная по времени. Таким образом, производственная функция в темповой записи имеет вид:
   $y=\alpha k+\beta l.$
2) Рассмотрим производственную функцию Кобба-Дугласа
   $Y=AK^{\alpha}L^{\beta},\alpha+\beta=1,\alpha>0,\beta>0.$ Так как $\beta=1-\alpha,$ то $\frac{Y}{L}=A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$.
   Отсюда $P=AF^{\alpha}$, где $P=Y/L$ - производительность труда, $F=K/L$ - капиталовооруженность (фондовооруженность) труда. В темповой записи производственная функция имеет вид: $p=\alpha f,$ где p – темп прироста производительности труда, f - темп прироста фондовооруженности. Так как в моделе Кобба-Дугласа $0<\alpha<1,$ то темп прироста производительности труда меньше темпа прироста фондовооруженности.
3) Производственная функция типа Кобба-Дугласа с постоянным темпом роста вследствие нейтрального технического прогресса: $Y=AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t}$. В темповой записи:

$y = \alpha k + \beta l + y.$

9.2 .Модель макроэкономической динамики Харрода-Домара.

Y(t) = C(t)+I(t), C(t) – функция потребления, I(t) – функция инвестиций.

В модели Харрода-Домара предполагается, что скорость роста дохода пропорциональна инвестициям: $I(t) = B\dfrac{dY}{dt}$, где B – коэффициент капиталоемкости прироста дохода. Таким образом, $Y(t) = C(t) + B\dfrac{dY}{dt}$.

А) C(t) = 0, то есть все ресурсы направляются на инвестиции. Решая дифференциальное уравнение получаем[2] :$Y(t) = Y(0)e^{\frac{1}{B}t}$. В темповой записи модель принимает вид: y(t) = 1/B. Таким образом, 1/B представляет собой максимально возможный темп прироста и называется *технологическим* темпом прироста.

Б) Пусть потребление постоянно во времени: C(t) = C const, то есть Y(t) = BY(t)+C. Частное решение этого уравнения представляет собой Y(t)=C. Общее решение однородного дифференциального уравнения[3] $Y(t) - \dfrac{1}{B}Y(t) = 0$ имеет вид: $Y(t) = Ae^{\frac{1}{B}t}$. Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$Y(t) = BY(t) + C \text{ есть}^{4}\ Y(t) = Ae^{\frac{1}{B}t} + C.$$

При t=0: Y(0)=A+C, то есть A=Y(0)-C Y(t)=(Y(0)-C)$e^{\frac{1}{B}t}$ +C.
В этом случае непрерывный темп прироста равен

$$\frac{1}{B}\left(1 - \frac{C}{Y(0)}\right).$$

При $t = 0$ темп прироста

$$y(t) = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{C}{Y(0)}\right).$$

При $t \to \infty$ темп прироста

$$y(t) \to \frac{1}{B},$$

так как доход растет, а постоянный объем потребления составляет все меньшую ее долю.

В) Потребление растет с постоянным темпом *r*:

$$C(t)=C(0)e^{rt}.$$

Решение данной модели:

$$Y(t) = Y(0)e^{\frac{t}{B}} + \frac{C(0)}{B}e^{rt}.$$

Действительно, запишем уравнение $Y(t) = BY(t) + C(0)e^{rt}$ в виде

$$Y(t) - \frac{1}{B}Y(t) = -\frac{C(0)}{B}e^{rt}.$$

Частное решение этого дифференциального уравнения имеет вид: $Y(t)=\dfrac{C(0)}{1-Br}e^{rt}$, так как

$$\frac{d\left(\dfrac{C(0)}{1-Br}e^{rt}\right)^{rt}}{dt}-\frac{1}{B}\left(\frac{C(0)}{1-Br}\right)e^{rt}=-\frac{C(0)}{B}e^{rt}\Rightarrow$$

$$r\frac{C(0)}{1-Br}e^{rt}-\frac{1}{B}\left(\frac{C(0)}{1-Br}\right)e^{rt}\Rightarrow$$

$$\left(r-\frac{1}{B}\right)\frac{C(0)}{B}e^{rt}\Rightarrow\left(\frac{Br-1}{B}\right)\frac{C(0)}{1-Br}e^{rt}=-\frac{C(0)}{B}e^{rt}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $Y(t)=Y(0)e^{\frac{t}{B}}$. Действительно, интегрируя уравнение $Y(t)-\dfrac{1}{B}Y(t)=0,$ получаем, $\ln Y(t)=\dfrac{t}{B}+K,$ где K-константа интегрирования. Потенцируя: $Y(t)=Ae^{\frac{t}{B}}\quad A=e^{K}$. Отсюда $Y(t)=Y(0)e^{\frac{t}{B}}$.

Из общих соображений ясно, что темп прироста потребления r не должен быть больше максимально возможного общего темпа прироста $1/B$, так как иначе потребление будет занимать все большую, ив конце концов – подавляющую часть дохода, что сведет к нулю сначала инвестиции, а затем и доход. Эти видно из формулы решения модели, так как в случае r>1/B коэффициент $\dfrac{1}{1-Br}$ отрицателен, а e^{rt} растет быстрее, чем $e^{\frac{t}{B}}$ - следовательно, отрицательное в этом случае второе слагаемое через некоторое время перевесит первое.

В решении рассматриваемой модели роста при *r*>*1*/*B* многое зависит от соотношения между *r* и $\rho_O=\dfrac{1-C(0)/Y(0)}{B}$ (здесь $\alpha_O=1-\dfrac{C(0)}{Y(0)}$ - норма накопления в начальный момент времени t=0). Если $r=p_0$, то темп прироста дохода равен темпу прироста потребления, и решением является $Y(t)=Y(0)e^{\frac{\alpha 0^t}{B}}$. Норма накопления в этом случае постоянна и равна α_0, а темп прироста дохода пропорционален норме накопления и обратно пропорционален коэффициенту капиталоемкости прироста дохода.

Если в рассматриваемой модели роста $r>p_0$, то темп прироста потребления оказывается слишком высоким для экономики, и темп прироста дохода падает и становится отрицательным, что аналогично случаю $r\geq 1/B$. Если же $r<p_0$, то норма накопления, а вместе с ней и темп прироста дохода растут, причем темп прироста дохода в пределе приближается к 1/В.

9.3 Особенности модели макроэкономического роста Солоу

Еще одним важным и интересным примером модели экономической динамики является модель Солоу, которая рассматривается в курсе макроэкономики. Не рассматривая здесь модель Солоу еще раз, рекомендуем обратить на нее внимание и сопоставить используемые в ее изложении подходы и выводы с теми, о которых говорится в настоящей лекции.

1. Если показатель Y(t) есть непрерывная функция времени, то рост ее с постоянным темпов записывается как $Y(t) = Y(0)e^{\lambda t}$, где $e \approx 2{,}72$ - основание натуральных логарифмов, а λ - непрерывный темп прироста.

В случае дискретного времени динамика показателя, растущего с постоянным темпом λ, описывается как $Y(t) = Y(0)(1-\lambda)^t$.

2. $Y(t) = B\dfrac{dY}{dt} \Rightarrow \dfrac{dY/dt}{Y} = \dfrac{1}{B}$. Интегрируя, имеем: $\int \dfrac{dY}{Y} = \dfrac{1}{B}\int dt + K \Rightarrow \ln Y(t) = \dfrac{1}{B}t + K,$ где К – константа интегрирования.

Потенцируя, получаем: $Y(t) = Ae^{\frac{1}{B}t}$, где $A = e^k$. При $t = 0$: $Y(0) = A,$ поэтому $Y(t) = Y(0)e^{\frac{1}{B}t}$.

3. Однородное уравнение, соответствующее исходному неоднородному, получается, если свободный член уравнения приравнять к нулю.

4. Общее решение дифференциального уравнения представляет собой сумму частного решения исходного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

5. Из соотношения Y(t)=BY(t)+C имеем: $\dfrac{Y}{Y} = \dfrac{1}{B}\left(1 - \dfrac{C}{Y}\right)$– непрерывный темп прироста.

Ключевые слова

Динамический ряд, траектория развития, моментные и интервальные экономические показатели, Характеристики скорости и интенсивности, предельные и относительные приросты, модели экономического роста.

Контрольные вопросы

1. Как может быть записана динамика показателя?
2. Как пересчитать непрерывные темпы прироста в дискретные и наоборот?
3. Как изменяется формула Кобба-Дугласа ,если темпы прироста измерять в абсолютном выражении?
4. Какова связь между непрерывным и дискретными темпами?
5. Особенность модели динамики Харрода – Домара.
6. Какой вид имеет модель, с постоянным темпом?
7. Как в моделях динамики оценить вклад технического прогресса?
8. Особенности модели Солоу.

Литература

1. Кугаенко А.А. Основы теории и практики динамического моделирования социально-экономических объектов и прогнозирования их развития. -М.: Вузовская книга, 2000.
2. Кулинич Е.И. Эконометрия. -М.: Финансы и статистика, 2001.
3. Основные имитационного и статистического моделирования. Учебное пособие. /Ю.С.Харин. -М.: Дизайн ПРО, 2001.
4. Попов Л.А. Анализ и моделирование: Учебник. -М.: Финансы и статистика, 2003.
5. Фролькис В.А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов: 2-е изд. -СПб: Питер, 2002.
6. Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении. Учебное пособие. -М.: Дело, 2000.
7. Отчет о человеческом развитии» Ташкент 2003г.
8. О.О.Замков. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. М., ГУ ВШЭ, 2001.
9. О.О.Замков. Макроэкономическая динамика: Прикладное моделирование и анализ. М., Диалог-МГУ, 2003.

Интернет сайты

1. *www.allinsurance.ru* – сайт Российской компании по страхованию, позволяет получить материалы по прогнозированию рисковых ситуаций.
2. *www.bitex.ru/~dialog/markl_modeler.html* – позволяет получить информацию по моделирование и прогнозирование.
3. *www.blogic.ru* – Российский сайт, позволяет просмотрет и получить материалы по логическому прогнозированию.
4. *www.bolero.ru/product-22422499.html* – сайт Российской компании “BOLERO”. Можно получить теоретическую и практическую информацию по прогнозированию.

Тема 10. Методы и модели эконометрического прогнозирования.

10.1. Системный анализ объекта прогнозирования. Классификация прогнозов.
10.2. Методы прогнозирования.
10.3. Методы моделирования одномерных временных рядов.
10.4. Методы прогнозной экстраполяции

10.1.Системный анализ объекта прогнозирования. Классификация прогнозов.

В процессе прогнозирования, начиная с разработки задания на прогноз, должен быть проведен всесторонний анализ объекта прогнозирования. Этот анализ включает определение объекта и предмета исследования целей и задач его прогнозирования, его зависимости от внешний среды, его структуры; механизма его функционирования, управления им. Формально - содержательное исследование объекта приводит обычно к построению его моделей с их последующей корректировкой; выявлением альтернативных управляющих воздействий на объект и выбором оптимальной альтернативы.

Мы будем рассматривать социально - экономические системы, а их анализ как объектов прогнозирования достаточно натрудим в связи с тем, что относятся они к системам очень сложным. Для исследования сложных объектов требуется применение глубоко разрабатываемой в последние десятилетия теории систем, системного анализа.

Важной особенностью методологии исследования систем является функциональный подход к их анализу. Функция системы проявляется в ее поведение, в непрерывном взаимодействии всех ее элементов для достижения стоящих перед системой целей. Система связана с внешней средой своими входами и выходами. Допустим, что нам известны три вектора, описывающих состояния в момент времени t : вектор состояний входов.

$$X_t = (x_1, x_2,..., x_m)_t$$

Вектор состояний выходов

$$Y_t = (y_1, y_2,..., y_m)_t;$$

Вектор внутренних состояний системы

$$S_t = (s_1, s_2,..., s_m)_t$$

Функция системы, ее поведение характеризуются вектором состояний выходов. Если считать что в момент t состояния выходов определяются состояниями входов системы и ее внутренними состояниями, то имеем зависимость $y_t=f(X_t, S_t)$.

Выявление таких функций часто оказывается весьма полезным для прогнозирования сложной системы: ведь протезируют обычно состояния выходов в зависимости от возможных, ожидаемых или достижимых состояний входов и внутренних состояний системы. На таком подходе основаны, в частности, эконометрические модели прогнозирования.

- Классификация прогнозов осуществляется по ряду признаков в зависимости от целей, задач, объектов протезирования, времени упреждения, научно - методических основ и организации прогнозирования, формы и его конечных результатов.

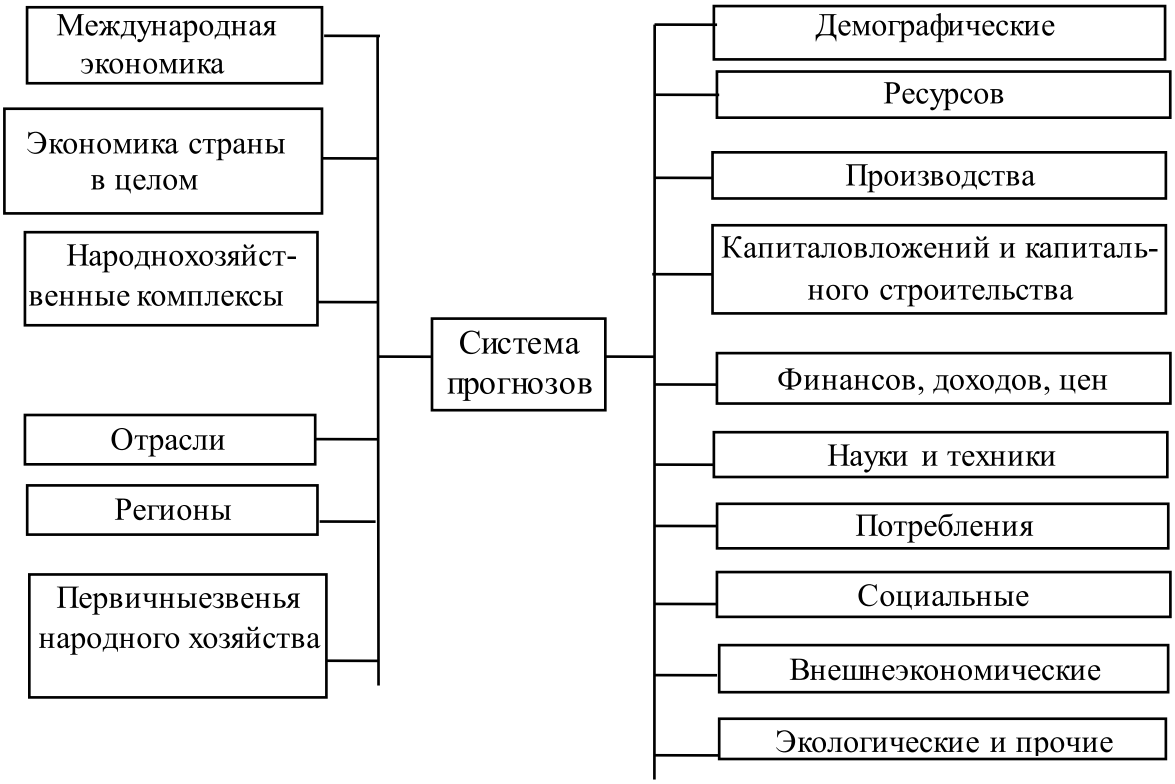


Рис. 2. Схема классификации прогнозов.

Рассмотрим типология социально - экономических прогнозов по основным критериям.

По масштабам прогнозируемой системы дифференциация очень велика от протезов мирового хозяйства до протезов предприятий и отдельных производств. Здесь можно выделить следующие группы прогнозов:

- прогнозы международной экономики, включая конъюнктуру мирового рынка и внешней торговли;
- прогнозы экономики страны в целом как укрупненные однопродуктовые, так и межотраслевые;
- прогнозы народнохозяйственных комплексов таких, как топливно - энергетический комплекс агропромышленный комплекс и другие;
- прогнозы отраслей народного хозяйства, однопродуктовые или многопродуктовые;
- прогнозы регионов, охватывающие по возможности всю региональную социально - экономическую систему;
- прогнозы первичных звеньев народного хозяйства, имея в виду объединения, предприятия, опальные производства.

Классификация прогнозов представлена на рис. 2. (левая сторона) , справа приводится типология прогнозов по объектам прогнозирования. Выделено

10 групп таких прогнозов, относящихся полностью или почти полностью (как демографические, экологические) к социально - экономическому прогнозированию. Остановимся на содержании каждой из этих групп.

Демографические прогнозы охватывают динамику народонаселения исходя из половозрастной его структуры, данных о рождаемости и смертности, продолжительности жизни. Исследуются объемы и направления миграционных потоков населения, воспроизводство трудовых потоков населения, воспроизводство трудовых ресурсов и занятость, численность и величина семей. Особое значение для других экономических и социальных расчетов имеют прогнозы численности, состава и размещения трудоспособного населения.

Прогнозы ресурсов охватывают прежде всего природные ресурсы как беду общественного производства: топливно-энергетические, минерально-сырьевые, водные, лесные и т.д. Ясно, что наличием ресурсов во многом определяется структура всего народного хозяйства, а происходящее уменьшение запасов, снижение качества, ухудшение условий добычи многих видов ресурсов требуют тщательно обоснованной информации об ожидаемом в будущем состоянии этой проблемы. Представляют интерес и прогнозы о количестве и использовании вторичных и попутных ресурсов.

Прогнозы производства: многосторонне включают различные аспекты производительных сил и производственных отношений. Это темпы экономического роста, объем и структура конечного продукта народного хозяйства, межотраслевые связи, территориальное размещение производства, объемы, состав, качество основных производимых продуктов в натуральном исчислении.

В прогнозы капиталовложений и капитального строительства включаются объемы и структура капитальных вложений, стоимость выполняемого строительства, ввод в действие основных фондов, сооружений, сроки их службы, выбытия и замены.

Прогнозами финансов, доходов, цен охватываются важнейшие балансы денежно - финансовой системы - государственный бюджет, баланс денежных доходов и расходов населения, баланс финансовых ресурсов, бюджет социального страхования. Включаются также прогнозы издержек производства, прибылей, все возможных ценообразующих факторов.

Значение прогнозов науки и техники все более возрастает, поскольку завершается превращение науки в непосредственную производительную силу общества. Научно - технические прогнозы включают в себя прогнозы науки в направлениях фундаментальных и прикладных исследований, прогнозы развития и внедрения достижений научно-технического прогресса в различные производства, отрасли экономики, прогнозы социального воздействия научно-технического прогресса на общественную жизнь.

В прогнозах потребления исследованию подлежат общественные потреблении, которые сводятся к двум формам - потребностям личным и производственным. Необходимость в прогнозировании потребления связана с тем что величина и структура потребностей в будущем носят весьма вероятностный характер, зависят от множества факторов, а без знания потребностей невозможно правильно спланировать производство.

Социальными прогнозами исследуется такая сложная совокупность как образ жизни, т.е. способ жизнедеятельности людей, коллективов, социальных групп, общества в целом в аспектах условий труда, быта и отдыха, степени удовлетворения всевозможных материальных и духовных потребностей, развития социальной инфраструктуры, тенденцией в области культуры, образования, здравоохранения и т.д. Значительную долю занимают здесь прогнозы потребительского спроса и потребления населением всех видов товаров и услуг.

Внешнеэкономические прогнозы охватывают общие тенденции развития мировой экономики, экономические взаимоотношения нашей страны с другими странами, конъюнктуру международного рынка и внешней торговли.

Экологические прогнозы исследуют состояние природопользования, проблемы загрязнения природной среды, перспективы развития растительного и животного мира, продуктивность сельскохозяйственных угодий, возможности совершенствования производства с целью минимизации строительных последствий. Все эти 10 групп выделенных прогнозов существенно необходимы для анализа и управления социально - экономическими процессами развития общества. По сроку прогнозирования (периоду упреждения) выделяются прогнозы оперативные, краткосрочные, среднесрочные, долгосрочные, дальнесрочные.

По характеру научно методического обоснования прогнозы делятся на поисковые (исследовательские, изыскательские) и нормативные.

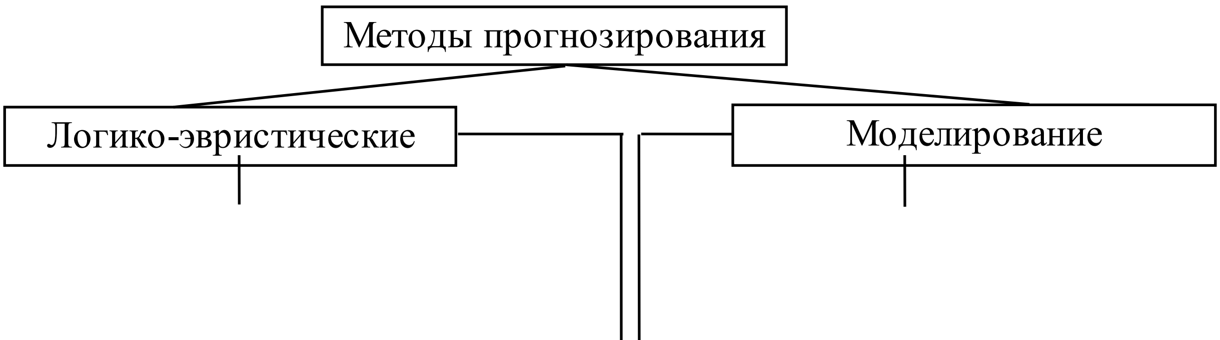
Существует также разграничение прогнозов на пассивные и активные.

10.2 Методы прогнозирования.

Методы прогнозирования можно разделить на две большие группы - логико-эвристические методы базируются на широко известной общенаучной теории логики и на эвристике, которая определяется словарями как «Искусство нахождения истины. В этой группе выделяются четыре подгруппы методов, это методы формальной логики, аналогии, экспертных оценок и специальные эвристические.

Методы моделирования основаны прежде всего и количественных, математических и статистических исследованиях на выявлении формальных зависимостей и тенденции развития на построении прогностических моделей и экспериментировании с ними на базе компьютерной техники. В качестве подклассов выделяются модели экстраполяции, эконометрические, нормативно - целевые и имитационные.

Отдельно в классификации представлены комплексные методы в которых сочиняются как логико-эвристические подходы, так и моделирование.



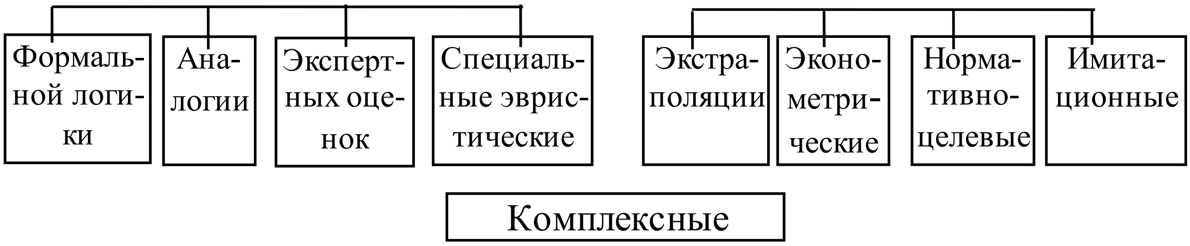


Рис 2. Классификация методов прогнозирования.

В ходе научных исследований вообще, прогнозирования в частности, дедукция и индукция тесно между собой взаимосвязаны. Без индукции строго говоря, возникновение дедукции становится невозможным. Диалектика не позволяет беспрепятственно оделять анализ от синтеза, индукцию от дедукции. Более того - и в своем сочетании они могут оказаться недостаточными для полного обоснования прогноза, а часто служат лишь дополнением и поклонением при использовании более специализированных методов прогнозирования.

Модель какой - либо сложной системы тоже представляет собой систему (и нередко весьма сложную), имеющую физическое воплощение либо записанную с помощью слов, шифр, математических обозначений, графических изображений и т.д. Таким образом, можно сказать, что модель - это физическая или знаковая система, имеющая объективное подобие с исследуемой системой в отношении функциональных, а часто и структурных характеристик, являющихся предметом исследования.

10.3 Методы моделирования одномерных временных рядов.

Методы экстраполяции основываются на предположении о неизменности факторов, определяющих развитие изучаемого объекта, и заключаются в распространении закономерностей развития объекта в прошлом на его будущее.

В зависимости от особенностей изменения уровней в ряду динамики приёмы экстраполяции могут быть простыми и сложными.

Первую группу составляют методы прогнозирования, основанные на предположении относительного постоянства в будущем абсолютных значений уровней, среднего уровня ряда, среднего абсолютного прироста, среднего темпа роста.

Вторая группа методов основана на применении статистических формул, описывающих тренд и их можно разделить на два основных типа: на адаптивные и аналитические.

Адаптивные методы прогнозирования основаны на том, что процесс реализации их заключается в вычислении последовательных во времени значений прогнозируемого показателя. К ним относятся методы скользящий и экспоненциальной средних, метод гармонических весов, метод авторегрессионных преобразований. В основу аналитических методов прогнозирования положен принцип получения с помощью метода наименьших квадратов оценки детерминированной компоненты f_t.

Одним из наиболее распространенных методов краткосрочного прогнозирования является экстраполяция. Типичным и наиболее применимым приемом экстраполяции является прогноз по одномерному временному ряду. Динамика одномерных временных рядов в общем случае складывается из четырех компонентов:

1) тенденции, характеризующей долговременную основную закономерность развития исследуемого явления;

2) периодического компонента;

3) циклического компонента;

4) случайного компонента, как результата влияния множества случайных факторов.

Под тенденций понимают некоторое общее направление развития, долговременную эволюцию. Тенденцию ряда динамики представляют в виде гладкой, которая аналитически выражается некоторой функцией времени, называемой трендом. Тренд характеризует основную закономерность движения во времени, свободную в основном от случайных воздействий. Под трендом обычно понимают регрессию на время. Отклонение от тренда есть влияние случайных факторов. Исходя из этого уровни временного ряда описываются следующим уравнением:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

где $f(t)$ - статистическая составляющая, характеризующая основную тенденцию явления во времени; ε_t - случайная составляющая.

Во временных рядах можно наблюдать тенденции трех видов: тенденция среднего уровня; тенденция дисперсии; тенденция автокорреляции.

Тенденция среднего уровня аналитически можно выражать в виде функции $f(t)$. Тенденция дисперсии - это изменения отклонений эмпирических значений временного ряда от значений, вычисленных по уравнению тренда. Тенденция автокорреляции - это тенденция изменения связи между отдельными уровнями временного ряда.

Наиболее распространенным и простым способом моделирования тенденции социально-экономического явления является сглаживание временного ряда. Существуют различные приемы сглаживания, но суть их одна - замена фактических уровней ряда расчетными.

Наибольшее распространение имеют линейные тренды, общая формула которых имеет вид:

$$\bar{y}_t = \sum_{\tau=-q}^{s} a_\tau y_{t+\tau} \quad (1)$$

где $\bar{y}_t$ - сглаженное значение уровня на момент t;

a_τ - все, приписываемого уровня ряда, находящемуся на расстоянии τ от момента t;

s - число уровней после момента t;

q - число уровней до момента t.

В зависимости от того, какие значения принимают веса a_τ сглаживание по формуле (1) будет выполнено либо с помощью скользящих средних, либо экспоненциальных средних.

Процесс выравнивания состоит из двух основных этапов: выбора типа кривой, оценивания параметров кривой. Существуют различные приемы, позволяющие выбрать форму кривой. Наиболее простой путь - это визуальный, на основе графического изображения временного ряда.

1) Полиномы:

$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t$ - первой степени (2)

$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ - второй степени (3)

$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ - третьей степени (4)

$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_k t^k$ - k-й степени (5)

2) различные экспоненты:

$$\bar{y}_t = a_0 a_1^t \qquad (6)$$

$$\bar{y}_t = a_0 a_1^{b_1 t + b_2 t^2} \qquad (7)$$

$\bar{y}_t = b + a_0 a_1^t$ - модифицированная экспонента (8)

3) Логистические кривые:

$$\bar{y}_t = \frac{k}{1 + a_0 e^{-a_1 t}} \qquad (9)$$

где e - основание натурального логарифма.

4) Кривая Гомперца:

$$\bar{y} = k a_0^{a_1^t}$$

Другой путь выявления формы кривой заключается в применении метода последовательных разностей.

$$\Delta_{t^1} = y_t - y_{t-1};\ \Delta_{t^2} = \Delta_{t^2} - \Delta_{t-1}^1;\ \Delta_{t^3} = \Delta_{t^2} - \Delta_{t-1}^2 ... \quad (10)$$

Расчет этих разностей ведется до тех пор, пока разности не будут приблизительно равными.

10.4 Методы прогнозной экстраполяции.

Экстраполяция по среднему абсолютному приросту.

Прогноз определяет ожидаемые варианты экономического развития исходя из гипотезы, что основные факторы и тенденции прошлого периода сохраняется на период прогноза. Подобная гипотеза выдвигается исходя из инерционности экономических явлений и процессов. Прогнозы на основе экстраполяции рядов динамики как и любые статистические прогнозы, могут быть либо точечными, либо интервальными.

Экстраполяцию в общем виде можно представить в виде определенного значения функции

$$y'_{t+l} = f(y_i, l, a_j) \qquad (11)$$

где y'_{t+l} - прогнозируемое значение ряда динамики;

l - период упреждения;
y_i - уровень ряда, принятый за базу экстраполяции;
a_j - параметр уравнения тренда.

Наиболее простым методом экстраполяции одномерных рядов динамики является применение средних характеристик данного ряда: среднего уровня, среднего абсолютного прироста и среднего темпа роста.

При экстраполяции социально-экономических явлений на основе среднего уровня ряда используется принцип, при котором прогнозируемый уровень принимается равным среднему значению уровней ряда в прошлом,

$$y'_{t+l} = \bar{y} \qquad (12)$$

В данном случае экстраполяция дает прогностическую точечную оценку. Точное совпадение этих оценок с фактическими данными - явление маловероятное. Следовательно, прогноз должен быть дан в виде «вилки», интервала значений.

$$y'_{t+l} \pm t_\alpha S_{\bar{y}},$$

где t_α - табличное значение t критерия Стьюдента с n-1 степенями свободы и уровнем вероятности P; S'_y - средняя квадратическая ошибка средней. Значение ее определяется по формуле:

$$S_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Экстраполяция по среднему абсолютному приросту.

Она может быть выполнена в том случае, если считать общую тенденцию развития явления линейной.

$$\sigma^2_{\text{ост}} = \rho^2, \text{ где } \rho^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum \Delta_i}{n}$$

где $\sigma^2_{\text{ост}}$ - остаточная дисперсия;
Δ_i - общий прирост показателя от начального уровня до конечного y_i.

Для нахождения интересующего нас прогнозного значения уровня y'_{t+l} необходимо определить средний абсолютный прирост $\bar{\Delta}$. Затем, зная уровень ряда динамики, принятый за базу экстраполяции y_i, записать интересующую нас экстраполяционную формулу следующим образом:

$$y'_{t+l} = y_i + \overline{\Delta t}.$$

Экстраполяция по среднему темпу роста может осуществится в случае, когда есть основания считать, что общая тенденция ряда динамики характеризуется показательной кривой. Прогнозируемый уровень ряда в этом случае определяется следующей формулой:

$$y'_{t+l} = y_i + T_p^{-t},$$

где, $\bar{T}_p$ - средний темп роста. Все три способа экстраполяции тренда являются простейшими способами.

Ключевые слова.

1. Экстраполяция

2. Тренд
3. Параметры кривой
4. Полиномы
5. Экспоненты
6. Логистические кривые
7. Кривая Гомперца
8. «Вилка» интервала значений прогноза
9. Экстраполяция по среднему темпу роста.

Контрольные вопросы.

1. Что такое экстраполяции?
2. Дать определение тренда. Где это применяется?
3. Какие методы сглаживания временные рядов Вы знаете?
4. Какие формы связи кривой Вы знаете?
5. Что такое прогнозная экстраполяция?
6. В чем отличие экстраполяции по среднему абсолютному приросту от других методов.
7. В чем заключаются адаптивные методы прогноза?
8. Где используются методы экстраполяции?

Литература.

1. Горбунов В.К Математическая модель потребительского спроса. Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004.- 174с.
2. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике :Учебник.- М.: Изд-во «Дело и сервис»,2004 .-368С.
3. Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для вузов /Под ред. Ш.В.Грвчевой, М.Н. фадеевой, Ю.Н. Черёмных.- М.: ЮНИТИ – ДИАНА,2004.-791с.
4. Росленский В.З. Количественный анализ в моделях экономики. Лекции для студентов. -М.: Эконом.факуль. МГУ, ТЕИС,2002.-113 2с.
5. Федосеев В.В., Гармош А. и др. Экономико-математические методы прикладные модели: Учебное пособие для вузов.- М.: ЮНИТИ,2002.- 391с.
6. Эконометрика. Учебник \ Под.ред И.И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика,2004.-344с.
7. www.cemi.rssi.ru
8. www.economics.com
9. www.edu.intalev.ru
10. www.eduworld.ru/x35500.html

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Привитие навыков самостоятельной работы выпускникам экономических вузов в условиях непрерывного изменения развития народного хозяйства под воздействием социально-экономических факторов является одной из главных проблем подготовки специалистов. При этом молодой экономист должен иметь фундаментальную подготовку. Весь ход обучения студента в высшей школе должен нацеливать его на новую ступень знаний, приобретение нового мышления по способам составления и методам выполнения экономических и социальных задач развития экономики, доведения их до практического применения, расширять круг задач, решаемых с помощью ПЭВМ и современных компьютерных систем.

Важным элементом в повышении уровня самостоятельной работы, приобретения знаний, навыков и умений является преподавание предмета «Эконометрика» для студентов третьих курсов обучения направления «Информационные системы в экономике», который позволяет студентам представить общую схему исследовательской работы, понять основное назначение, цель и характер научной работы с применениями современного математического инструментария анализа. С этой целью при преподавании этого предмета основной упор делается на определение такого понятия как «модель, моделирование и другие», приводится системная характеристика составляющих науки, рассматриваются основное этапы проведения научных изысканий. Для студентов направления «Информационные системы в экономике» представлена детальная характеристика принципов моделирования с использованием «Информационные системы в экономике» представлена детальная характеристика принципов моделирования с использованием экономико-математических методов и современных компьютерных систем. При изучении курса наряду с творческими вопросами, отраженными в содержании научной работы, студенты должны уметь выполнять стандартные операции по оформлению и защите рефератов, отчетов и других научных работ. Поэтому значительное место в содержании этого курса отведено описанию порядка выполнения требований к оформлению лабораторных и практических работ.

Система подготовки кадров в вузе должна обеспечить у выпускников развитое экономическое мышление, творческую активность, инициативу и предприимчивость. Именно выполнение этой цели, а именно -научить студентов умению самостоятельно ставить и решать новые задачи, проводить теоретические и экспериментальные исследования и испытания, используя достижения современной науки и техники - является главной задачей преподавания курса «Эконометрика».

Список рекомендуемой литературы

Основная литература.

1. Каримов И.А. «Узбекистан - свой путь обновления и прогресса», Ташкент, «Узбекистан» 1992 г.
2. Каримов И.А. «Узбекистан - собственная модель перехода на рыночные отношения», Ташкент, «Узбекистан» 1993 г.
3. Каримов И.А. «Узбекистан по пути углубления экономических реформ», Ташкент, «Узбекистан» 1995 г.
4. Абдуллаев А., Фаттахов А., Саидов М. Учебное пособие. Моделирование и прогнозирование экономических процессов. -Т.: 2000.
5. Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник. -М.: ЮНИТИ, 1998.
6. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистка и эконометрика. М.:МЭСИ,2000.
7. Бородич С.А. Эконометрика. Минск: Новое знание, 2001.
8. Ежеманская С.Н. Эконометрика. Ростов – на Дону, Феникс, 2003.
9. Замков О.О. Математические методы и модели. -М.: ДиС, 2000.
10. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе.М 2002.
11. К.Доугерти. Введение в эконометрику. ИНФРА-М,1999.
12. Кулинич Е.И. Эконометрия. М.:Финансы и статистика, 1999.
13. Лугачев М. И. Методы социально-экономического прогнозирования. -М.: ТЕИС, 1999.
14. Магнус Я.Р. и другие. Эконометрика. М.: Дело,2000.
15. Моделирование и прогнозирование экономических показателей на основе информационных технологий: Учеб. пос./Н.М.Махмудов. -Т.: ТГЭУ, 2002.
16. Н.Ш.Кремер, Путко Б.А. Эконометрика.М.:ЮНИТИ-ДАНА,2002.
17. Нименья И.Н. Эконометрика. СПб.:Издательский Дом «Нева», 2003.
18. Практикум по эконометрике. Под ред.Елисеевой И.И. М.: Финансы и статистика,1999.
19. Сборник задач к начальному курсу эконометрики. Под ред. Катышева П.К. М.:Дело,2002.

Дополнительная литература.

1. Боровиков В. П. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере: Учебное пособие. /В.П.Боровиков, Т. И.Ивченко. -М.: ФиС, 1999.
2. Государство и частное предпринимательство в Республике Узбекистан. Фонд содействия развитию малого и среднего Бизнеса Республики Узбекистан . -Т., 2001.
3. Кремер Н.Ш. Эконометрика: Учебник. /Под. ред. Н.Ш.Кремера. -М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

4. Кугаенко А. А. Основы теории и практики динамического моделирования социально-экономических объектов и прогнозирования их развития. -М.: Вузовская книга, 2000.
5. Кулинич Е.И. Эконометрия. -М.: Финансы и статистика, 2001.
6. Основные имитационного и статистического моделирования. Учебное пособие. /Ю.С.Харин. -М.: Дизайн ПРО, 2001.
7. Фролькис В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов: 2-е изд. -СПб: Питер, 2002.
8. Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении. Учебное пособие. -М.: Дело, 2000.
9. Замков О.О. Макроэкономическая динамика: Прикладное моделирование и анализ. М., Диалог-МГУ, 1999.

Интернет сайты

1. *www.cemi.rssi.ru*
2. *www.economics.com*
3.*www.edu.intalev.ru*
4.*www.eduworld.ru/x35500.html*
5. *www.fxo.ru/forum-3/6275.html*
6. *www.glossary.bank24.ru*
7. *www.iteam.ru/publications/it/sectiion_51/article_1335*
8.*www.ito.edu.ru*
9. *www.mf.grsu.by.*
10. *www.nsu.ru/modelirovanie.html*
11. *www.rea.ru/econommertika.html*
12. *www.nber.com*