

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

**ÁJINIYAZ ATÍNDAGÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ
INSTITUTÍ**



MAGISTRATURA BÓLIMI

**5A110401-Aniq hám tábiyy pánlerdi oqıtıw metodikası (Matematika)
qánigeliginiń pitkeriwshisi 2-kurs talabası**

Qalbaev Sultanbek Nazerbaevich

Magistr akademiyalıq dárejesin alıw ushın jazılğan

DISSERTACIYASÍ

**Tema: ULÍWMA BILIMLENDIRIW MEKTEPLERINDE GEYPARA
FUNKCIYALAR MENEN BAYLANÍSQAN TEÑLEMELERDI HÁM
TEÑSIZLIKLERDI ÚYRETIW JOLLARÍ»**

MAK da jaqlawğa ruxsat

Magistratura bólimi baslıǵı:

Magistrant:

S.Qalbaev

Ilimiy basshı:

f.m.k.i.k. Z. Saparov

“Matematika oqıtıw metodikası”

kafedrası baslıǵı:

f-m.i.k., doc. B.B.Prenov

Kafedra májilisiniń 2019-jıl _____ sánesindegi

№__ protokoli menen qorgawğa ruxsat berildi.

Nókis – 2020

M A Z M U N Í

KIRISIW.....	3
---------------------	----------

Geypara kerekli maǵliwmatlar	5
------------------------------------	---

I BAP. ERIKLI ÓZGERIWSHILER QATNASPAYTUǴÍN ULÍWMA FUNKCIYALÍQ TEŃLEMELER

§1.1. Ornına qoyıw usılı menen sheshiletuǵın erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın ulıwma funkciyalıq teńlemeler	18
--	----

§1.2. Eriqli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın funkciyalıq teńlemelerdi úzliksiz funkciyalar klasında sheshiw	29
--	----

§1.3. Eriqli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın funkciyalıq teńlemelerdi differenciyanıwshı funkciyalar klasında sheshiw	33
--	----

§1.4. Natural argument funkciyalar klasında erikli ózgeriwshige iye emes funkcional teńlemelerdiń sheshimi	35
--	----

II BAP. ERIKLI ÓZGERIWSHI QATNASATUǴÍN FUNKCIONAL TEŃLEMELER

§2.1. Eriqli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi ornına qoyıw usılı menen sheshiw	39
---	----

§2.2. Eriqli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi sheshiwdiń Koshi usılı	45
---	----

§2.3. Eriqli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi differenciyanıwshı funkciyalar klasında sheshiw	50
--	----

III BAP. FUNKCIYALÍQ TEŃLEMELER JÁRDEMINDE TIYKARGÍ ELEMENTAR FUNKCIYALARDÍ ANÍQLAW

§3.1. Sızıqlı funkciyanı anıqlaw	54
--	----

§3.2. Kórsetkishli funkciyanı anıqlaw	56
---	----

§3.3. Logarifm funkciyanı anıqlaw	58
§3.4. Dárejeli funkciyanı anıqlaw	62
§3.5. Trigonometrik funkciyanı anıqlaw. $f(x) = \cos x$	64
JUWMAQLAW	72
PAYDALANÍLGAN ÁDEBIYATLAR.	73

KIRISIW

Dissertaciya temasınıń tiykarlanıwı hám aktualıǵı: Teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw jolların úyretiw ulıwma bilimlendiriw mekteplerinde matematika oqıtıw metodikasınıń baslı máseleleriniń biri. Házirgi zaman mektep oqıwshıları teńleme hám teńsizlikler menen baslawısh klasslardan-aq tanısıp baslaydı. Keyin teńleme hám teńsizlikler teması áste aqırın tereńlestiriledi hám keńeytiriledi. Teńleme hám teńsizliklerdi úyretkende konkret máselelerdi sheshiw procesin tiykarlaw máselelerine kóbirek kewil bólinedi. Algebra kursın úyretiwdiń dáslepki basqıshlarında bul tiykarlaw empirikalıq, induktivlik xarakterge iye. Soń teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw boyınsha tájiriye toplaǵannan keyin teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw procesin tiykarlawdıń deduktivlik usılları úlken áhmiyetke iye boladı. Teńleme hám teńsizliklerdi sheshiwdiń hár qıylı usılları jeterli dárejede jaqsı ózlestirilgennen keyin júdá kóp qollanılatuǵın túrlendiriwler: teń kushlılıq hám logikalıq izbe-izlik ayrıqsha ayrılıp kórsetiledi.

Belgisiz funkciya málim funkciyalar menen kompoziciyası ámeli járdeminde baylanısqa teńleme *funkciyalıq teńleme* dep ataladı.

$$f(x+3) - 4f(x+1) + f(x) = 0$$

hám

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Teńlemeler funkciyalıq teńlemege mısál bola aladı.

Bul jerde $f(x)$ - belgisiz funkciya x hám y -erikli ózgeriwshiler.

Eki teńlemede de belgisiz bir ózgeriwshili funkciya biraq ekinshi teńlemede eki erikli ózgeriwshi qatnasadı (olardıń birewi mısalı y) erikli ózgeriwshi. Sonlıqtanda birinshi teńleme erikli ózgeriwshilersiz teńleme boladı. Ekinshi teńleme *erikli ózgeriwshili* teńleme dep ataladı.

Eger $f(x)$ funkciya D kóplikte funkciyalıq teńlemenı qanaatlандırsa yaǵnıy ózgeriwshilerdiń D kóplikten alınǵan hámme mánislerinde teńlemenı

qanaatlandırsa onda bul funkciya D kópikte *funkciyalıq teńlemenin sheshimi* dep ataladı.

Basqasha aytqanda eger $f(x)$ funkciya teńlemede belgisiz funkciyanın ornına qoyılǵanda onı birdeylikke aylandırsa (erikli ózgeriwshilerdiń D hámme mánislerinde qanaatlandırsa) onda $f(x)$ D kópikte berilgen funkciyanın sheshimi boladı. Mısalı

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad (1)$$

teńlemenin qarayıq.

Teńlemenin sheshimi $f(x) = x^\mu$ funkciya boladı, bul jerde μ – qálegen turaqlı san.

$$f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 0 \quad (2)$$

Ekinshi teńlemenin sheshimi $f(x) = c_1 \cdot 3^x + c_2 \cdot 2^x$ bul jerde c_1 hám c_2 qálegen turaqlı sanlar.

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = f(x) \quad (3)$$

Úshinshi teńlemenin sheshimi $x \neq 1$ bolǵanda $f(x) = \Phi\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$ funkciya boladı.

Bul jerde Φ – qálegen funkciya.

Bul mısallardan funkciyalıq teńlemelerdiń sheshimleriniń ulıwmalıq dárejesi hár qıylı bolıwı múmkin ekenligi kórinip tur. Mısalı birinshi mısalda teńlemenin sheshimi tek bir μ qálegen turaqlı sanga gárezli. Al ekinshi teńlemenin sheshimi c_1 hám c_2 qálegen turaqlı sanlarǵa gárezli bolsa úshinshi mısalda teńlemenin sheshimi qálegen Φ funkciyǵa gárezli boladı.

Eger funkciyalıq teńlemenin sheshiminde qálegen turaqlı sanlar yaki turaqlı funkciyalar qatnassa onda bul turaqlı funkciyalarǵa hár qıylı mánisler berip teńlemenin hár qıylı sheshimler alamız, bul sheshimler *teńlemenin dara sheshimlerin* dep ataladı. Teńlemenin dara sheshimlerin alıw ushın qosımsha

shártler qoyladı. Eger birinshi teńlemenin sheshimi bolǵan $(1) f(x) = x^\mu$ bolǵan funkciya qosımsha $f(2) = 4$ shártti qanaatlandırsa onda $x = 2$ alıp $4 = 2^\mu$ teńlikke iye bolamız. Bunnan $\mu = 2$ demek $f(2) = 4$ qosımsha shártte birinshi teńlemenin dara sheshimi $f(x) = x^2$ funkciya boladı. Usıǵan uqsas ekinshi teńlemenin eki qálegen turaqlı san qatnasatıǵın sheshimi qosımsha $f(0) = 1$ hám $f(1) = 1$ shártlerde $f(x) = 2^{x+1} - 3^x$ funkciya dara sheshimge aylanadı.

Biz bunnan bılay belgisiz funkciya bir ózgeriwshili funkciya bolatuǵın teńlemelerdi qaraymız. Biraq joqarıda kórgenimizdey bunday teńlemede erikli ózgeriwshi qatnasıwıda qatnaspawıda múmkin.

Bunday teńlemelerdin eki klassın sheshiw usılları áhmiyetli ózgesheliklerge iye sonlıqtan biz olardı dara- dara qaraymız. Sonın menen birge funkciyalıq teńlemenin sheshimin izlew sheshim izlenetuǵın funkciyalar klasına ǵárezli bolatuǵınlıǵın atap ótemiz. Mısalı (1) teńleme úzliksiz funkciyalar klasında (sonday-aq differenciyanıwshı funkciyalar klasında da) $f(x) = x^\mu$ (μ – turaqlı san) sheshimge iye. Al úzliske iye funkciyalar klasında

$$f(x) = \text{Sgn} x:$$

funkciya boladı.

Júdá ápiwayı jaǵdaylarda bir qatar qıyın emes matematikalıq ámellerdi orınlaw jetkilikli

Mısalı $3f(x) - f^2(1) - \log_a x + 5x - 1 = 0$ teńlemenin sheshiw ushın tikkeley mına teńlikti jazıw múmkin.

$$f(x) = \frac{1}{3} f^2(1) + \frac{1}{3} \log_a x - \frac{5}{3} x + \frac{1}{3}.$$

Bul teńlikte $x = 1$ dep alıp, belgisiz $f(1)$ sanǵa qarata

$$f^2(1) - 3f(1) - 4 = 0.$$

kvadrat teńlemenin alamız.

Bul teńleme eki $f_1(1) = -1$ hám $f_2(1) = 4$ iye bolǵanlıqtan funkciyalıq teńlemede eki sheshimge iye $f_1(x) = \frac{1}{3}(\log_a x - 5x + 2)$ hám $f_2(x) = \frac{1}{3}(\log_a x - 5x + 17)$.

Biraq hámme funkciyalıq teńlemelerde usınday ańsat sheshile bermeydi.

Kópshilik jaǵdaylarda kórinisi júdá ápiwayı bolǵan funkciyalıq teńlemenı sheshiw ushın júdá qıyın usıllardı paydalanıw kerek boladı. Funkciyalıq teńlemeler teoriyasında málim ulıwma sheshiw usılları júdá az. Buni funkciyalıq teńlemelerdiń hár túrliligi hám olardı izzertlewde payda bolatuǵın qıyınshılıqlar menen túsindiriw múmkin.

Funkciyalıq teńlemeler teoriyasi klassikalıq matematikalıq analiz payda bolıwı menen bir waqıtta payda boldı. XVIII ásirdiń ortasında kúshler parallelogrammı mashqalasın sheshiw ushın Dalmber $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ funkciyalıq teńlemenı sheshiwi kerek boldı. Bul teńlemenı XIX ásirdiń basında Koshi sheshti ol tómendegi teńlemelerdi qaradı

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$

Bul teńlemeler matematikanı hár qıylı tarawlarında qollanıladı hám dara jaǵdayda elementar funkciyalardı anıqlawda tiykar bolıp xızmet qılıwı múmkin. Bul Koshi teńlemelerin (hám oǵan uqsas teńlemelerdi) sheshiw ushın házirgi waqıtta onıń atı menen qollanılatuǵın usıdan paydalanıladı. Koshidiń funkciyalıq teńlemesinen N.I. Lobashevskiy óz geometriyasında paydalandı.

Mına formula tiykarında

$$f(x) = tg \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{k}{x}}$$

Parallelık múyeshi ushın Lovoshevskiy joqarıdaǵı formulanı mına teńlemenıń sheshiminen aldı $f^2(x) = f(x-y) \cdot f(x+y)$.

Bir qatar áhmiyetli funkciyılıq teńlemelerdi Norvegiya matematıgı Avel izertledi. Ol bul teńlemelerdi differenciya teńlemelerge keltirdi.

Keyingi jıllarda Respublikamızdıń joqarǵı oqıw orınlarına matematika boyınsha kiriw test sınaqlarında funkciya teńleme hám teńsizlikler júdá kóp usınılıp atır. Matematikanıń, ilim hám texnikanıń basqa hámme tarawlarınıń ámeliy máselelerin funkciya teńleme hám teńsizliklerden paydalanıp sheshiw ádewir qolay boladı. Sonlıqtan ulıwma bilimlendiriw mektepleriniń joqarı oqıw orınlarınıń matematika kursların oqıtıw metodikasında funkciya teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw jolların úyretiw áhmiyetli orın iyeleydi. Magistrlik jumis usı aktual mashqalanı izetlewge arnalǵan.

Izertlew obyektı hám predmeti: Ulıwma orta bilimlendiriw mektepleriniń, akademiya lıcey hám kollejleri oqıwshılarına funkciya teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw jolların úyretiw metodika,

Jumistıń maqseti hám wazıypaları: Teńleme hám teńsizliklerdi úyretiw barısında intervallar usılı, grafikalıq usıl hám funkciya usıllar keń qollanıladı. Teńleme hám teńsizliklerdi, ásirese funkciya teńleme hám teńsizlik dep atalıwshı teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw jolların úyretiw dissertatsiyanıń tiykarǵı **maqseti** bolıp tabıladı. Bunda tiykarınan teńleme teńsizliklerdi sheshiwdiń funkciya usılınan paydalanıladı.

Bul dissertatsiyanıń tiykarǵı **wazıypası** teńleme hám teńsizliklerdi sheshiwdiń funkciya usılların, funkciya teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw usılların tereń úyreniwden ibarat.

Izertlewdi alıp barıw usılları: Pedagogika, psixologiya, ulıwma bilimlendiriw mekteplerinde matematika oqıtıw metodika pánleriniń usılları

Izertlewdiń ilimiy jańalıǵı: Jumis tiykarınan reparativlik xarakterge iye.

Izertlewdiń tiykargı máseleleri hám boljawları: Matematikaniń, ilim hám texnikaniń basqa tarawlariniń kópshilik ámeliy máselelerin funkciyalıq teńleme hám teńsizliklerden paydalanıp sheshiw ádewir qolaylı boladı

Izertlewde qollanılğan metodika: Pedagogika, psixologiya, ulıwma bilimlendiriw mekteplerinde matematika oqıtıw metodikası pánleri metodikaları

Izertlew nátiyjeleriniń teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti: Jumista alınğan nátiyjelerden ulıwma orta bilimlendiriw mektepleri, akademiyalıq licey hám kollejerinde matematika pánin oqıtıwda tabıslı paydalanıw múmkin.

Jumıstıń kólemi hám dúzilisi: Magistrlik dissertaciya kirisiw bóliminen, úsh baptan, juwmaqlaw bóliminen hám paydalanılğan ádebiyatlar diziminen turadı.

Jumıstıń birinshi babı «Erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın ulıwma funkciyalıq teńlemeler» dep atalıp onıń birinshi paragrafında «Ornına qoyıw usılı menen sheshiletuǵın erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın ulıwma funkciyalıq teńlemeler» keltirilgen. Usı baptıń ekinshi paragrafında «Erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın funkciyalıq teńlemelerdi úzliksiz funkciyalar klasında sheshiw» jolları haqqındaǵı mısál hám metodlar kórsetilgen. Usı baptıń úshinshi paragrafında «Erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın funkciyalıq teńlemelerdi differenciyanıwshı funkciyalar klasında sheshiw» keltirilip mısallar menen bekkemlendi. Usı baptıń tórtinshi paragrafında «Natural argument funkciyalar klasında erikli ózgeriwshige iye emes funkcional teńlemelerdiń sheshimi» haqqındaǵı mısallar kórsetilgen.

Ekinshi babı «Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkcional teńlemeler» dep atalıp onıń birinshi paragrafında «Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi orınna qoyıw usılı menen sheshiw» haqqında aytıp ótildi. Ekinshi paragrafında bolsa «Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi sheshiwdiń Koshi usılı» keltirilip mısallar menen bekkemlendi. Úshinshi paragrafında bolsa «Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi

differentiýallanıwshı funksiýalar klasında sheshiw» ge mısal hám máseleler keltirilgen.

Úshinshi babı «Funksiýalıq teńlemeler járdeminde tiýkarǵı elementar funksiýalardı anıqlaw» dep atalıp onıń birinshi paragrafı «Sızıqlı funksiyanı anıqlaw» dep ataldı hám qosımsha tastıyıqlawlar menen bekkemlendi. Ekinshi paragrafında «Kórsetkishli funksiyanı anıqlaw» haqqında maǵlıwmatlar hám dálillewler keltirildi. Úshinshi paragrafında «Logarifm funksiyanı anıqlaw» haqqında maǵlıwmatlar qosımsha tastıyıqlawlar keltirildi. Tórtinshi paragrafında «Dárejeli funksiyanı anıqlaw» haqqında maǵlıwmatlar keltirildi. Besinshi paragrafında «Trigonometrik funksiyanı anıqlaw $f(x) = \cos x$ » dep ataldı hám qosımsha tastıyıqlawlar menen bekkemlendi.

GEYPARA KEREKLI MAǴLIWMATLAR

1. Analiz baslamalarinan geypara elementar faktler

Biz keyin paydalanatuǵın analiz baslamalarinan geypara tiýkarǵı maǵlıwmatlardı kiritemiz. R haqıyqıy sanlar kópliginiń D úles kópligin $E \in R$ úles kóplikke sáwlelendiriw sanlı funksiya dep ataladı.

Bul jerde D kóplik funksiyanıń anıqlanıw oblastı dep al E kóplik funksiyanıń mánisler kópligi dep ataladı.

Basqasha aytqanda sanlı funksiya- bul hár bir teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw jolların úyretiw mektep matematika kurısında matematika oqıtıw metodikasınıń baslı máseleleriniń biri. Házirgi zaman mektep oqıwshıları teńleme hám teńsizlikler menen baslawısh klasslardan-aq tanıp baslaydı. $x \in D$ sanga jalǵız bir $y \in E$ san sáykes qoyılatuǵın f nızam. Bul ádette $y = f(x)$ kóriniste jazıladı, bul jerde x funksiyanıń argumenti yaki erikli ózgeriwshi dep al y funksiya yaki eriksiz ózgeriwshi dep ataladı. Kópshilik jaǵdaylarda funksiya y ózgeriwshiniń sáykes mánisin alıw ushın x ózgeriwshi ústinde orınlanıwı kerek bolǵan ámeller kórsetilgen formula kórinisinde beriledi. Biraq funksiya basqa

kórinislerde de beriliwi múmkin. Dara jaǵdayda óz anıqlanıw oblastınıń hár qıylı analitikalıq ańlatpalar menen beriliwi múmkin. Mısalı $f(x)$ funkciya berilgen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{eger } x \in [0,1] \\ x^2 + 3, & \text{eger } x \in (1,2] \end{cases}$$

funkciya keste menen de beriliwi múmkin, (mısalı natural sanlar kvadratları hám kublarınıń kesteleri menen), yaki onıń grafıǵı menen beriliwi múmkin. Ádette funkciyanıń beriliwiniń bul usılları, sáykes túrde kestelik hám grafikalıq uslı dep ataladı.

Natural sanlar kvadratları hám kubları kesteleri natural sanlar kópliginde anıqlanǵan funkciya bolatuǵının atap ótemiz. Biz tiykarınan funkciyanıń beriliwiniń analitikalıq usılınan paydalanamız. Meyli eki funkciya berilgen bolsın: $D \subset R$ kóplikti $L \subset R$ kóplikke sáwlelendiriwshi hám L kóplikti $E \subset R$ kóplikke sáwlelendiriwshi $z = F(y)$.

D kóplikti E kóplikke sáwlelendiriwshi hám $z = F(f(x))$ teńlik penen anıqlanatuǵın funkciya F hám f funkciyalardıń kompoziciyası yaki F hám f funkciyalardan dúzilgen quramalı funkciya dep ataladı.

Mısalı R kóplikte anıqlanǵan hám mánisler kópligi $\mathbb{R}$ bolǵan $y = x^3$ hám R kóplikte anıqlanǵan hám mánisler kópligi $[-1,1]$ bolǵan $z = \sin y$ funkciyalardıń kompoziciyası R kóplikte anıqlanǵan hám mánisler kópligi $[-1,1]$ bolǵan $z = \sin(x^3)$ funkciya boladı.

F hám f funkciyalardıń kompoziciyası ushın $F \circ f$ belgilew qabıl qılınǵan.

$\varphi \circ \varphi$ funkciyalardıńda kompoziciyasında qaraw múmkin.

Bul kompoziciya $y = \varphi(\varphi(x))$ funkciya boladı.

Mısalı $\varphi(x) = x^2$ funkciya ushın $\varphi(\varphi(x)) = x^4$ al $\varphi(x) = \frac{2x+3}{3x+1}$ funkciya ushın

$$\varphi(x) = \frac{2 \frac{2x+3}{3x+1} + 3}{3 \frac{2x+3}{3x+1} + 1} = \frac{4x+6+9x+3}{6x+9+3x+1} = \frac{13x+9}{9x+10} \text{ funkciya boladı.}$$

Ádette $\varphi \circ \varphi$ kompoziciya φ^2 kóriniste jazıladı.

$$\varphi^3 = \varphi^2 \circ \varphi = (\varphi \circ \varphi) \circ \varphi = \varphi(\varphi(\varphi(x))),$$

$$\varphi^4 = \varphi^3 \circ \varphi = ((\varphi \circ \varphi) \circ \varphi) \circ \varphi = \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))$$

Kompoziciyalarda soǵan uqsas anıqlanadı. Mısalı

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{1-x}: \text{ ushın}$$

$$\varphi^2 = \varphi(\varphi(x)) = \frac{\frac{x+1}{1-x} + 1}{1 - \frac{x+1}{1-x}} = \frac{x+1+1-x}{1-x-x-1} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x},$$

$$\varphi^3 = \varphi(\varphi(\varphi(x))) = -\frac{1}{\frac{x+1}{1-x}} = -\frac{1-x}{x+1} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$\varphi^4 = \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x)))) = \frac{\frac{x+1}{1-x} + 1}{1 - \frac{x+1}{1-x}} = \frac{x+1-1+x}{x+1+1-x} = \frac{2x}{2} = x.$$

Meyli D kóplikti E kóplikke sáwlelendiriwshi $y = f(x)$ funkciya berilgen bolsın ulıwma jaǵdayda hár qıylı $x \in D$ sanlarǵa jalǵız bir $y \in E$ san sáykes qoyılıwı múmkin. Mısalı $y = x^2$ ushın R haqıyqıy sanlar kópliginen alınǵan hár qıylı x hám $-x$ sanlar ushın jalǵız bir $x^2 \in [0, +\infty)$ san sáykes qoyıladı.

Meyli $y = f(x)$ funkciya ushın argumenttiń hár qıylı x_1 hám x_2 mánislerine funkciyanıń hár qıylı y_1 hám y_2 mánisleri sáykes qoyılǵan bolsın bul jaǵdayda D kóplikti E kóplikke sáwlelendiriwshi $y = f(x)$ funkciya menen bir waqıtta hár bir $y \in E$ sanǵa $y = f(x)$ bolatuǵın jalǵız bir $x \in D$ sandı sáykes qoyıwshı E kóplikte anıqlanǵan mánisler kópligi D kóplik bolǵan $x = \varphi(y)$ funkciyanıda

qaraw múmkin. Ádette bul funkciya $y = f(x)$ funkciyağa kerı funkciya dep ataladı hám $x = f^{-1}$ dep belgilenedi.

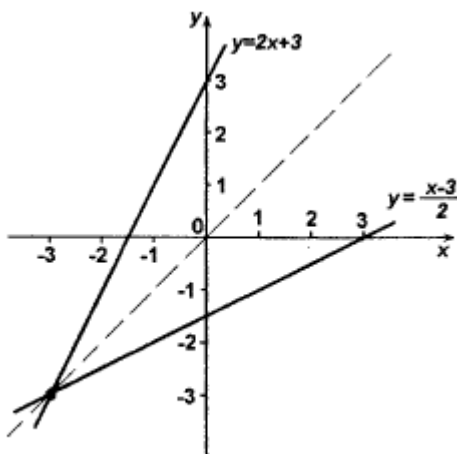
$x = \varphi(y)$ funkciya ushın $y = f(x)$ kerı funkciya bolğanı ushın bul funkciyalar óz-ara kerı funkciyalar dep ataladı.

Óz-ara kerı funkciyalar ushın $f(\varphi(y)) = y$ hám $\varphi(f(x)) = x$ teńlikler orınlı ekeni óz ózinen orınlı bolatuǵını málim bul teńliklerdi kerı funkciyalardıń anıqlaması sıpatında qaraw múmkin.

$x = \varphi(y)$ kerı funkciyanıń analitikalıq ańlatpasın tabıw $y = f(x)$ teńlemenı x ózgeriwshige qaray sheshiwge keltiriletuǵının kóriw qıyın emes. Mısalı

$y = 2x + 3$ ushın $x = \frac{y-3}{2}$ funkciya kerı funkciya boladı.

$x = \varphi(y)$ funkciya hám oǵan kerı $y = f(x)$ funkciya bir baylanıstı ańlatqanlıǵı sebepli olardıń grafikleri birdey, biraq $y = f(x)$ hám $y = \varphi(x)$ funkciyalardıń grafikleri I hám III koordinatalıq shereklerdiń bissektisasına qarata simmetriyalı (sızılmaǵa qarań)



Hár bir $y = f(x)$ funkciya ushın kerı funkciya bar bolıwı shárt emesligi atap ótemiz. Mısalı putkil sanlar kósherinde anıqlanǵan $y = x^2$ funkciya ushın kerı funkciya joq .

Meyli $y = f(x)$ funkciya $D \in R$ kóplikte anıqlanǵan hám $\Delta x > 0$ bolsın .

Eger $\forall x \in D$ ushın $\Delta f(x + \Delta x) - f(x) := \Delta f(x) \geq 0$ bolsa onda $y = f(x)$ funkciya D kóplikte *kemeymeytuǵın* funkciya dep ataladı.

Eger $\forall x \in D$ noqat ushın $\Delta f(x) > 0$ bolsa onda $y = f(x)$ funkciya D kóplikte ósiwshi (qatal ósiwshi funkciya dep ataladı).

Eger $\forall x \in D$ ushın $\Delta f(x + \Delta x) - f(x) := \Delta f(x) \leq 0$ bolsa onda $y = f(x)$ funkciya D kóplikte *óspeytuǵın* funkciya dep ataladı.

Eger $\forall x \in D$ noqat ushın $\Delta f(x) < 0$ bolsa onda $y = f(x)$ funkciya D kóplikte kemiwshi (qatal kemeyiwshi funkciya dep ataladı).

Kóplikte kemimeytuǵın (óspeytuǵın) hám ósiwshi (kemeyiwshi) funkciyalar usı kóplikte monoton funkciya dep ataladı

Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń noqatta úzliksizliginiń bir neshe anıqlamaları bar biz tek bir anıqlamanı ketiremiz (Geyne anıqlamasın)

$f(x)$ funkciyanıń $D \in R$ anıqlanıw oblastınan alınǵan $x_0 \in D$ noqatqa jıynaqlı $\forall x_n$ izbe- izlik alınsada funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik $f(x_0)$ sanǵa jıynaqlı bolsa onda $f(x)$ funkciya $x_0 \in D$ noqatta úzliksiz dep ataladı.

D kópliktiń hár bir noqatında úzliksiz funkciya usı D kóplikte úzliksiz dep ataladı. Úzliksiz funkciyanıń áhmiyetli qásiyeti- funkciya beligisi astında limitke ótiw huquqı, yaǵnıy eger $f(x)$ funkciya $x_0 \in D$ noqatta úzliksiz bolsa onda $f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ teńlik orınlı.

2. Differenciyalıq teńlemeler teoriysinan ayrim maǵlıwmatlar

Joqarıda aytqanımızday Abeldiń ilimiy miynetlerinde funkciyalıq teńlemelerdi differenciyalıq teńlemelerge keltiriw usılı qollanıldı. Usıǵan

baylanıslı funkciyalıq teńlemelerdi differenciyanıwshı funkciyalar klasında sheshiwde qollanılatuǵın ápiwayı differenciyalıq teńlemerdi qaraw kerek boladı.

Belgisiz funkciyanıń tuwındısı yaqı differenciya qatnasatuǵın teńleme differenciya teńleme dep ataladı. Berilgen funkciyanıń daslepki funkciyasın tabıw máselesinde eń ápiwayı teńleme payda boladı. Bul

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1)$$

teńleme. Bul jerde $y - x$ ózgeriwshiden ǵárezli belgisiz funkciya al $f(x)$ sanlar kósherindegi bazi bir aralıqta anıqlanǵan málim funkciya. Birinshi teńlikten belgisiz funkciya $f(x)$ nıń dáslepki funkciyası ekenligi kórinip tur demek

$$y = \int f(x) dx + C = F(x) + C, \quad (2)$$

Bul jerde C qálegen turaqlı san al $F(x)$, kishi $f(x)$ funkciyanıń bazi bir daslepki funkciyası (2) teńlikten (1) teńleme sheksiz kóp sheshimge iye ekeni kelip shıǵadı. Bul sheshimlerdiń hár biri geometriyalıq kóz qarastan bazi bir iymek sıızıqtan ibarat. Anıq bir sheshimdı tabıw ushın bazi bir qosımsha shárt, atap aytqanda, Belgisiz funkciyanıń tayınlanǵan x_0 noqattaǵı yaǵınıy $y(x_0) = y_0$ beriliwi kerek. Sonda ekinshi teńlikte x hám y tiń orınna x_0 hám y_0 sanlardı qoyıp $C = y_0 - F(x_0)$ teńlikti alamız, hám belgisiz iymek sıızıq ushın

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0) \quad (3)$$

teńlemenı alamız.

Materiyallıq noqattıń turaqlı a tezleniwli tuwrı sıızıqlı hareketi nızamın tabıw haqqındaǵı másele ekinshi differenciya teńleme mısılın beredi.

Eger t waqıtta basıp ótilgen joldı S dep belgilesek onda másele (4) sheshiwge keltiriledi

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = a. \quad (4)$$

bul teńlemede belgisiz funkciyanı ekinshi tuwındısı qatnasadı. Bul jaǵdayda belgisiz funkciyanı tabıw ushın eki ret integrallaw kerek boladı

Birinshi integrallaw

$$\frac{dS}{dt} = at + C_1.$$

teńlikti beredi

Ekinshi ret integrallap

$$S = \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2. \quad (6)$$

alamız.

(4) teńlemenin 6 sheshiminde eki C_1 hám C_2 qálegen turaqlılar qatnasadı. Sonlıqtan bir anıq sheshimdi alıw ushın eki qosımsha shárt qoyıw kerek. Mısalı t_0 (dáslepki momentte) $S = S_0$ (dáslepki qashıqlıq) hám $\frac{dS}{dt} = V_0$ (baslawısh tezlik) beriliwi kerek. Sonda (5) hám (6) teńliklerden $C_1 = V_0$, $C_2 = S_0$ bolatuǵını tabamız hám

$$S = \frac{at^2}{2} + V_0t + S_0. \quad (7)$$

teńlikti alamız.

Joqarıda keltirilgen mısallar belgisiz funkciya bir ózgeriwshili funkciya bolǵan ápiwayı differenciya teńlemelerdin dara jaǵdayı boladı. Bunday túrdegi teńleme (8) kóriniste boladı

$$F(x, y, y') = 0 \text{ yamasa } F(x, y, y', y'') = 0 \quad (8)$$

Belgisiz funkciyanın (8) teńlemelerde qatnasatuǵın tuwındılarınıń eń úlken tártibi differenciya teńlemenin tártibi dep ataladı. Sonlıqtan birinshi birinshi tártipli al ekinshi teńleme ekinshi tártipli boladı. Differenciya teńlemenin sheshiw máselesi yaǵınıy belgisiz funkciyanı tabıw máselesi kobinese differenciya teńlemenin integrallaw máselesi dep ataladı.

Differenciya teńlemenin anıq bir sheshimin tabıw ushın joqırdagı máselelerde kórgenimizdey differenciya teńlemeden tısqarı

$$x = x_0, y = y_0 \text{ yamasa } x = x_0, y = y_0, \frac{dy}{dx} = y'_0. \quad (9)$$

Kórinistegi qosımsha shártlerdi qoyıw kerek bul shártler ádette baslangısh shártler dep ataladı.

(8) teńlemenıń (9) baslangısh sheshimlerin tabıw máselesi Koshi máselesi dep ataladı. Keń teńlemeler klassı ushın Koshi máselesi x_0 noqattı óz ishine alıwshı bazı bir aralıqta jalǵız bir sheshimge iye *dara sheshimi* dep ataladı. Differenciya teńlemenıń hámme dara sheshimleri kópligi bul teńlemenı n ulıwma sheshimin dúzedi. Mısalı (1) hám (4) teńlemeler ushın (3) hám (7) funkciyalar dara sheshimler (2) hám (6) funkciyalar ulıwma sheshimler boladı.

Bunnan bılay bizge ózgeriwshileri ajıralıwshı differenciya teńlemeler dep atalıwshı birinshi tártipli differenciya teńlemeler sheshiw usılların bilıw kerek boladı (10) kórinistegi birinshi tártipli differenciya teńleme ózgeriwshileri ajıralatuǵın differenciya teńleme dep ataladı. Eger $f(x, y)$ funkciya tek x ózgeriwshiden gárezli hám y ózgeriwshi dep gárezli bolǵan differenciya teńleme bolsa

$$\frac{dy}{dx} = P(x)Q(y) \text{ yamasa } dy = P(x)Q(y)dx.$$

Eger $Q(y) \neq 0$, bolsa onda $dy = P(x)Q(y)dx$ keyingi teńlikti $g(y)$ funkciyaǵa aǵzama aǵza bólgennen keyin biz ózgeriwshileri ajıralǵan teńlemenı alamız:

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx \quad (11)$$

Endi teńlemenıń eki jaǵında integrallap

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C \quad (12)$$

Ulıwma sheshimdi tabıw múmkin (12) ańlatpa ulıwma sheshimdi ayqın emes kóriniste beredi. Ulıwma sheshimniń bul forması teńlemenıń ulıwma integralı dep ataladı. Mısalı

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}.$$

Teńlemenıń ulıwma integralın tabamız $Q(y) = \frac{1+y^2}{y}$, al $P(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Ózgeriwshilerdi ayırǵannan keyin $\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{1+x^2}$. Demek izlenip atırǵan ulıwma

integral $\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2} + C$ kóriniste boladı.

Integrallardı esaplap $\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ teńlikti alamız.

C – qálegen turaqlı $\frac{1}{2} \ln C$ kóriniste alıw múmkin. Onda aldınǵı teńlikti

potenciyalap ulıwma integraldi $1+y^2 = C(1+x^2)$ kóriniste jazamız.

I BAP. ERIKLI ÓZGERIWSHILER QATNASPAYTUĞÍN ULÍWMA FUNKCIYALIQ TEŇLEMELER

Bul bapta belgisiz funkciya tek bir ózgeriwshili funkciya bolıp erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuğın funkciyalıq teńlemeler qaraladı. Bunday teńlemelerdi sheshiwdiń tiykarǵı usılı – ornına qoyıw usılı. Bul usıldan tısqarı erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuğın funkciyalıq teńlemelerdi úzliksiz funkciyalar klasında sonday-aq differenciyanıwshı klası hám natural argumentli funkciyalar klası qaraladı.

§1.1. Orınına qoyıw usılı menen sheshiletuğın erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuğın ulıwma funkciyalıq teńlemeler

Bul usılda teńlemedegi erikli ózgeriwshi jańa erikli ózgeriwshiniń bazı bir funkciyası menen almasırladı. Bunday almasırw nátiyjesinde belgisiz funkciyaǵa qarata jańa teńleme alınadı. Ayrim jaǵdaylarda alınǵan jańa teńleme ańsat sheshiledi. Kópshilik jaǵdaylarda bir neshe almasırwlar orınlawǵa hám bul almasırwlar nátiyjesinde alınǵan teńlemelerdi berilgen teńleme menen biriktiriwge tuwra keledi. Nátiyjede berilgen másele belgisiz funkciyaǵa qarata algebralıq teńlemeler sistemasın hám onıń málim funkciyalar menen kompozitciyaların sheshiwge keltiriledi. Ornına qoyıw usılı júdá keń qollanıwlarǵa iye bolıp bul teńlemenıń strukturasına baylanıslı boladı.

$$a(x)f(\varphi(x)) + b(x)f(\psi(x)) = F(x) \quad (1)$$

kórinistegi funkciyalıq teńlemelerdi orınna qoyıw usılı menen qaraymız.

Bul jerde $a(x), b(x), \varphi(x), \psi(x), F(x)$ – bazı bir $D \subset R$ oblasta anıqlanǵan bazı bir funkciyalar, al $f(x)$ -belgisiz funkciya

(1) teńlemenıń áhmiyetli dara jaǵdayları

$$a(x)f(\varphi(x)) + b(x)f(x) = F(x) \quad (2)$$

hám

$$f(\varphi(x)) = F(x) \quad (3)$$

olar birinshi teńlemeden sáykes túrde $\psi(x) = x$ hám $b(x) \equiv 0, a(x) \equiv 1$ bolǵanda alınadı.

Bul teńlemelerden (3) teńlemesi eń ápiwayısı. Eger $\varphi(x)$ funkciya óz anıqlanıw oblastında $\varphi^{-1}(z)$ kerı funkciyaǵa iye bolsa (3) teńlemede x ózgeriwshiniń orınna jańa z ózgeriwshiniń funkciyasın $x = \varphi^{-1}(z)$ formula menen qoyıw $f(z) = F[\varphi^{-1}(z)]$ teńlikke alıp keledi.

Bul jerde z ózgeriwshini x ózgeriwshige almastırıp (3) teńlemenin $f(x) = F[\varphi^{-1}(x)]$ sheshimin tabamız.

Mısalı $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ teńlemenı sheshiw kerek.

Bul jerde $\varphi(x) = \frac{x}{x+1}$ funkciya $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ oblata anıqlanǵan.

$(-\infty, +1) \cup (+1, +\infty)$ oblata anıqlanǵan $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ funkciya bul funkciyaǵa kerı funkciya boladı.

Teńlemede x ózgeriwshini $z = \frac{x}{x+1}$ formula menen jańa z ózgeriwshi menen almastırıp $f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^2$ yaki $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ sheshimdi alamız bul jerde $f(x)$ funkciya $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ oblata anıqlanǵan.

Ekinshi teńlemenı sheshiw biraz qıyınraq. Meyli $\varphi(x)$ funkciya óz anıqlanıw oblastında $\varphi^{-1}(x)$ kerı funkciyaǵa iye bolsın bul $\varphi^{-1}(x) = \varphi(x)$ teńlikke teń kushli. (2) teńlemede x ózgeriwshini $\varphi(x)$ funkciyaǵa almastırıp

$$a(\varphi(x))f(\varphi(\varphi(x))) + b(\varphi(x))f(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) \quad (4)$$

hám

$$a(\varphi(x))f(x) + b(\varphi(x))f(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) \quad (5)$$

teńlemege kelemiz.

(2) hám (5) teńlemeler birgelikte $f(x)$ hám $f(\varphi(x))$ funkciyalargá qarata algebralıq teńlemeler sistemasın beredi. Eger bul sistema sheshimge iye bolsa, onda bul sistemada $f(\varphi(x))$ funkciyani joǵaltıp belgisiz $f(x)$ funkciyanı tabamız.

Mısalı $x \neq 0$ noqatlarda anıqlanǵan hám hámme $x \neq 0$ noqatlar ushın $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^x$ teńlemeni qanaatlandıırıwshı $f(x)$ funkciyanı tabıw kerek bolsın.

Bul jerde $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ hám $\varphi(\varphi(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ teńlik orınlı.

Teńlemede x ózgeriwshini $\frac{1}{x}$ bólshekke almastırıp $f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ teńlemeni alamız. Bul teńleme berilgen teńleme menen birgelikte belgisiz $f(x)$ hám $f\left(\frac{1}{x}\right)$ funkciyalargá qarata algebralıq teńlemeler sistemasın beredi. Bul sistemada $f\left(\frac{1}{x}\right)$ funkciyanı joǵaltıp $f(x) = -\frac{1}{3}\left(2^x + 2^{\frac{1}{x}+1}\right)$ funkciyanı tabamız.

Bul usılda ekinshi teńlemeni sheshiw ushın $\varphi(\varphi(x)) \neq x$ biraq kompoziciyası k - ret $\varphi(\varphi(\varphi\dots(\varphi(x)\dots))) = x$ ($\varphi^k(x) = x$) bolǵan waqıtta da paydalanıw múmkin.

Meyli konkretlik ushın

$$\varphi(\varphi(\varphi(x))) = x \quad (6)$$

bolsın.

Onda ekinshi teńlemede x ózgeriwshini $\varphi(x)$ ózgartirip (4) teńlemenini alamız, al (4) teńlemede x ózgeriwshini $\varphi(x)$ funkciyaǵa almastırıp

$$a(\varphi(\varphi(x)))f(\varphi(\varphi(\varphi(x))))+b(\varphi(\varphi(x)))f(\varphi(\varphi(x)))=F(\varphi(\varphi(x))) \quad (7)$$

alamız.

(6) teńlemenini esapqa alıp (2) (4)(7) teńlemeler belgisiz $f(x)$, $f(\varphi(x))$ hám $f(\varphi(\varphi(x)))$ funkciyalardı qarata úsh sıızılıq teńlemeler sistemasın dúzedi dep ayırıwımız múmkin. Eger bul sistema sheshimge iye bolsa onda bul sistemada $f(\varphi(x))$ hám $f(\varphi(\varphi(x)))$ funkciyalardı joǵlatıp belgisiz $f(x)$ funkciyanı tabamız. Mısalı $x \neq 1$ noqatlarda anıqlanǵan $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ teńlemenini qanaatlandırıwshı $f(x)$ funkciyanı tabıw kerek bolsın.

$$\text{Bul jerde } \varphi(x) = \frac{1}{1-x}, \varphi(\varphi(x)) = \frac{x-1}{x}, \varphi(\varphi(\varphi(x))) = x.$$

Sonlıqtan berilgen teńlemede x ózgeriwshini $\frac{1}{1-x}$ bólshekke almastırıp

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \text{ teńlemenini alamız,}$$

bul teńlemede x ózgeriwshini $\varphi(x)$ funkciyaǵa almastırıp

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} \text{ teńlemenini alamız.}$$

Nátiyjede belgisiz $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ hám $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$: teńlemelerge qarata úsh algebralıq teńlemeler sistemasın alamız

$$\left. \begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) &= x, \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) &= \frac{1}{1-x}, \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) &= \frac{x-1}{x} \end{aligned} \right\} \text{ sistemani alamız.}$$

Bul sistemadağı 1- hám 3- teńlemelerdi qosıp hám bul qosındıdan 2- teńlemeni ayırıp $f(x) = \frac{1}{2} \left(1 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} \right)$ qosındını alamız.

Eger $\varphi(x)$ funkciyanıń k eseli kompoziciyası x qa teń al $\varphi(x)$ funkciyanıń eseligi k dan kishi bolğan hámme kompoziciyaları x qa teń bolmağan jaǵdayda, al ekinshi teńlemeni sheshiw máselesi belgisiz

$$f(\varphi(x)), f(\varphi(\varphi(x))), \dots, f(\varphi(\varphi(\dots(\varphi(x))\dots)))$$

funkciyalarǵa qarata k dana sıızqlı algebralıq teńlemeler sistemasın sheshiwge keltiriledi.

Endi (1) teńlemeni qaraymız $\varphi(x)$ (yaki $\psi(x)$) kerı funkciyaǵa iye bolsa onda (1) teńleme (2) teńlemege keltiriledi.

Haqıyqatında da $z = \varphi(x)$ funkciya $x = \varphi^{-1}(z)$ kerı funkciyaǵa iye bolsa onda $z = \varphi(x)$ ($x = \varphi^{-1}(z)$) dep alıp biz (2) teńlemeni tómendegi kóriniske

$$a_1(z) f(z) + b_1(z) f(w(z)) = F_1(z)$$

bul jerde

$$a_1(z) = a(\varphi^{-1}(z)), b_1(z) = b(\varphi^{-1}(z)), F_1(z) = F(\varphi^{-1}(z)), W(z) = \psi(\varphi^{-1}(z))$$

yaǵnıy (2) teńlemege keltiremiz. Mısalı $x \neq -1$ noqatlarda anıqlanğan hám

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2f(x+1) = x+1 \text{ teńlemeni qanaatlandıırıwshı } f(x) \text{ funkciyani tabıw}$$

talap etilsin.

Bul jerde $x+1=z$ alıp $x=z-1, \frac{x}{x+1} = \frac{z-1}{z}$ teńliklerdi alamız hám teńleme

$f\left(\frac{z-1}{z}\right) + 2f(z) = z$ yaǵnıy (2) teńleme kórinisinde jazıladı.

Bul jerde $\varphi(z) = \frac{z-1}{z}, \varphi(\varphi(z)) = -\frac{1}{z-1}, \varphi(\varphi(\varphi(z))) = z$ hám demek

keyingi teńlemeni sheshiw tómendegi úsh sıızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasın sheshiwge keltiriliwi múmkin

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{z-1}{z}\right) + 2f(z) &= z, \\ f\left(\frac{-1}{z-1}\right) + 2f\left(\frac{z-1}{z}\right) &= \frac{z-1}{z}, \\ f(z) + 2f\left(-\frac{1}{z-1}\right) &= -\frac{1}{z-1} \end{aligned} \right\}$$

Bir qatar jaǵdaylarda (1) teńlemede $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalar tikkeley baylanısqa yaǵnıy mısalı:

$$a)\varphi(x) = -\psi(x), b)\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)}, v)\varphi(-x) = \psi(x)$$

kórinistegi teńlikler menen baylanısqa bolıwı múmkin bul jaǵdaylarda birinshi teńlemeden, ekinshi kórinistegi teńlemeler kórinisine ótiw ádewir ańsatlasadı. Mısalı a) hám b) jaǵdaylarda $z = \varphi(x)$ almasırlılıwı (1) teńlemeni (2) kórinistegi teńlemege alıp keledi. Haqıyqatında da a) jaǵdayda

$$a(\varphi^{-1}(z))f(z) + b(\varphi^{-1}(z))f(-z) = F(\varphi^{-1}(z)),$$

al b) jaǵdayda

$$a(\varphi^{-1}(z))f(z) + b(\varphi^{-1}(z))f\left(\frac{1}{z}\right) = F(\varphi^{-1}(z))$$

alamız al v) jaǵdayda (1) teńleme

$$a(x)f(\varphi(x)) + b(x)f(\varphi(-x)) = F(x)$$

kóriniste jazıladı.

Bul jerde x ózgeriwshini $-x$ qa almashtırıp tómendegi tenlemeni alamız

$$a(-x)f(\varphi(-x))+b(-x)f(\varphi(x))=F(-x)$$

bul teńleme aldınǵı teńleme menen birgelikte $f(\varphi(-x))$ funkciyanı joǵaltıwǵa $f(\varphi(x))$ funkciyanı tabıwǵa múmkinshilik beredi yaǵnıy (3) kórinistegi teńlemege keltiriwge múmkinshilik beredi.

Mısalı $af(x-1)+bf(1-x)=cx$ sheshiw kerek bolsın, bul jerde a, b, c – turaqlılar hám $a^2 \neq b^2$.

Bul jerde $\varphi(x)=x-1$ al $\psi(x)=1-x$ hám demek $\psi(x)=-\varphi(x)$, $x-1=z$ alıp tómendegi teńlemeni alamız $af(z)+bf(-z)=c(z+1)$, keyingi eki teńlemeni birgelikte sheship $f(z)\frac{c}{a-b}z+\frac{c}{a+b}$ yamasa $f(x)\frac{c}{a-b}x+\frac{c}{a+b}$ teńliklerdi alamız.

Birinshi teńlemeni sheshiwdiń kórsetilgen orınına qoyıw usılınan keńirek klasın sheshiw ushın paydalanıw múmkin. Dara jaǵdayda bul usıldan

$$a(x)f(\varphi(x))+b(x)f(\psi(x))+c(x)f(w(x))=F(x) \quad (8)$$

kórinistegi teńlemelerdi sheshiwde paydalanıw múmkin.

Bul jerde $a(x), b(x), c(x), \varphi(x), \psi(x), w(x), F(x)$ – bazi bir oblasta anıqlanǵan málim funkciyalar $f(x)$ – belgisiz funksiya.

(1) teńlemege jaǵdayǵa uqsas (8) teńlemege qosımsha shártler qoyıw arqalı onı tómendegi kóriniske keltiriw múmkin

$$a(x)f(\varphi(x))+b(x)f(\psi(x))+c(x)f(x)=F(x). \quad (9)$$

(1) teńlemeni sheshiw jolınan paydalanıp, (9) teńlemeni sheshiwde eki ornına qoyıw usılınan: aldı menen (9) teńlemede x tıń ornına $\varphi(x)$ almashtırıp, keyin sol (9) teńlemede x tı $\psi(x)$ penen almashtıramız. Bul almashtırıwlardan eki jańa teńlemege iye bolamız:

$$a(\varphi(x))f(\varphi(\varphi(x)))+b(\varphi(x))f(\psi(\varphi(x)))+$$

$$+c(\varphi(x))f(\varphi(x))=F(\varphi(x)) \quad (10)$$

hám

$$a(\psi(x))f(\varphi(\psi(x)))+b(\psi(x))f(\psi(\psi(x)))+ \\ +c(\psi(x))f(\psi(x))=F(\psi(x)) \quad (11)$$

(9) ,(10),(11) teńlemeler birgelikte

$$f(x), f(\varphi(x)), f(\psi(x)), f(\varphi(\varphi(x))), f(\varphi(\psi(x))), f(\psi(\psi(x))),$$

hám $f(\psi(\varphi(x)))$ jeti belgisizli úsh teńlemeler sistemasın berdi.

Eger biz máseleni (1) kórinistegi teńlemenı sheshiwge keltiriwde qálesek, onda (9) teńlemede qatnasatuǵın funkciyalar qosımsha shártlerdi qanaatlandiriw kerek bul shártler orınlanganda, (9)-(10)-(11) teńlemeler sisteması 4 belgisizli teńlemeler sisteması boladı. Onda bul sistemada eki belgisizdi joǵaltıp biz birinshi kórinistegi (yaki ekinshi kórinistegi) sistemaǵa kelemiz.

Ayrım qosımsha shártlerdi kórsetemiz.

1-jaǵday. $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalar

$$\varphi(\varphi(x))=\psi(\psi(x))=x, \varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x)) \text{ qanaatlandıradı.}$$

Mısalı $\varphi(x)=-x, \psi(x)=\frac{1}{x}.$

2-jaǵday. $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalar

$$\varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x))=x, \varphi(\varphi(x))=\psi(\psi(x)) \text{ qanaatlandıradı.}$$

Mısalı

$$\varphi(x)=\frac{x-5}{x+3}, \psi(x)=\frac{3x+5}{1-x}.$$

3-jaǵday. $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalar

$$\varphi(\varphi(x))=\psi(x), \varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x)), \psi(\psi(x))=x \text{ qanaatlandıradı.}$$

Mısalı

$$\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}, \psi(x) = -\frac{1}{x}, \psi(\psi(x)) = x.$$

Birinshi jaǵdaydı tolıq qaraymız, bul jerde (9)(10)(11) teńlemeler tómendegi 4 belgisizli 3 teńlemeler sistemasın beredi.

$$\left. \begin{aligned} a(x)f(\varphi(x)) + b(x)f(\psi(x)) + c(x)f(x) &= F(x), \\ a(\varphi(x))f(x) + b(\varphi(x))f(\psi(\varphi(x))) + c(\varphi(x))f(\varphi(x)) &= F(\varphi(x)), \\ a(\psi(x))f(\psi(\varphi(x))) + b(\psi(x))f(x) + c(\psi(x))f(\psi(x)) &= F(\psi(x)). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Bul sistemada eki belgisizli mısalı $f(\psi(\varphi(x)))$ hám $f(\psi(x))$ belgisizlerdi joǵaltıp biz eki $f(x)$ hám $f(\varphi(x))$ belgisizli bir teńlemege yaǵınıy ekinshi kórinistegi teńlemege kelemiz.

Konkret tómendegi teńlemenı sheshiwdi qaraymız.

$$3f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = x.$$

Bul jerde $\varphi(x) = -x, \psi(x) = \frac{1}{x}$ al (12) sistema tómendegi kóriniste jazıladı

$$\left. \begin{aligned} 3f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) &= x, \\ f(-x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + 3f(x) &= -x, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f\left(-\frac{1}{x}\right) + f(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned} \right\}.$$

$f\left(\frac{1}{x}\right)$ funkciyanı belgili dep esaplap, belgisiz úsh teńlemege qarata

$f(x), f(-x)$ hám $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ mına sistemanı qaraymız

$$\left. \begin{aligned} f(x) + 3f(-x) &= x - f\left(\frac{1}{x}\right), \\ 3f(x) + f(-x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) &= -x, \\ f(x) + 3f\left(-\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} - f\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned} \right\}.$$

Bul sistemani $f(x)$ funkciyaga qarap sheship

$$f(x) = -\frac{4}{7}x - \frac{1}{7x} + \frac{2}{7}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

yamasa

$$f(x) - \frac{2}{7}f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{4}{7}x - \frac{1}{7x}$$

teńliklerdi alamız yaǵnıy ekinshi kórinistegi teńlemeni alamız.

$$\text{Onıń sheshimi: } f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3x}.$$

Jáne bir teńlemeni qaraymız

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x(x+1)}.$$

$$\text{Bul jerde } \varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}, \psi(x) = -\frac{1}{x}, F(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x(x+1)}.$$

$$\psi(\psi(x)) = x, \varphi(\varphi(x)) = -\frac{1}{x} = \psi(x), \quad \varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = -\frac{x+1}{x-1}, \text{ bolǵanlıqtan}$$

(3) jaǵdaydı alamız.

Bunda (9)-(10)-(11) sistema

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + f(x) &= F(x), \\ f\left(-\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= F\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \\ f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + f(x) + f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) &= F\left(-\frac{1}{x}\right), \end{aligned} \right\}$$

kóriniske keledi.

Bul sistemany (1) hám (3) teńlemelerin qosıp qosındıdan (2) teńlemenı ayırıp

$$f(x) + \frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2x} \text{ teńlemege yaǵnıy onıń kórinisi (2) teńlemege keledi}$$

Onıń sheshimi $f(x) = x$.

Sózimizdiń sońında ornına qoyıw usılınan funkciyalıq teńlemeler sistemasın sheshiw ushın da qollanıw múmkinligin atap ótemiz. Bul jerde ádette ornına qoyıw sistemasınıń teńlemelerin ayırım belgisiz funkciyalardı ańsat joǵaltıw ańsat bolatuǵın kóriniske keltiriwge múmkinshilik beredi.

Mısalı tómendegi funkciyalıq teńlemeler sistemasın belgisiz $f(x)$ hám $q(x)$ funkciyalardıǵa qarata sheshiw talap etilsin.

$$f(2x) + 2q(2x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + x + 1}{x}.$$

(1)teńlemede $2x = \frac{1}{z}$ alamastırıw orınlaymız.

Sol sebepli $\frac{2x^2 + x + 1}{x} = \frac{2z^2 + z + 1}{z}$ hám birinshi teńleme tómendegi

kóriniske iye boladı

$$f\left(\frac{1}{z}\right) + 2q\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2z^2 + z + 1}{z} \quad \text{yamasa}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}.$$

Keyin tómendegi sistemanı alamız

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) + 2q\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{2x^2 + x + 1}{x}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + q\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{x^2 + x + 1}{x}, \end{aligned} \right\}.$$

Sheshimi $q(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = x + 1$ bolǵan.

§ 1.2. Erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın funkciyalıq teńlemelerdi úzliksiz funkciyalar klasında sheshiw

Úzliksiz funkciyalar klasında úzliksiz funkciya belgisi astında limitke ótiw múmkin ekenligi málim. Bul ayrım jaǵdaylarda izbe-iz almasırlar (izbe-iz orınna qoyırlar) usılınan paydalanıwǵa múmkinshilik beredi.

$$f(x) = F(x) \cdot f(\varphi(x)) + \psi(x), \quad (1)$$

teńlemenı qarayıq

Bul jerde $F(x), \varphi(x), \psi(x)$ $D \subset R$ oblasta úzliksiz málim funkciyalar.

Ápiwayılıq ushın $D = R$ hám $f(x)$ – belgisiz funkciya dep alamız.

$$\varphi(x) = \varphi_1(x), \psi(x) = \psi_1(x), F(x) = F_1(x),$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(x) &= \varphi_{n-1}(\varphi(x)), \\ \psi_n(x) &= \psi_{n-1}(\varphi(x)), \\ F_n(x) &= F_{n-1}(\varphi(x)), \end{aligned} \right\} n = 2, 3, 4, \dots$$

dep belgileymiz yaǵnıy

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \varphi(\varphi(x)), \varphi_3(x) = \varphi_2(\varphi(x)), \varphi_4(x) = \varphi_3(\varphi(x)), \dots \\ \psi_2(x) &= \psi(\varphi(x)), \psi_3(x) = \psi_2(\varphi(x)), \psi_4(x) = \psi_3(\varphi(x)), \dots \end{aligned}$$

(1)teńlemede $x = \varphi(z)$ alamastiriw orınlaymız z ózgeriwshini x penen alastırıp ekinshi teńlemenı alamız.

$$f(\varphi(x)) = F_2(x) f(\varphi_2(x)) + \psi_2(x) \quad (2)$$

(2)Teńliktegi $f(\varphi(x))$ funkciyanı birinshi teńliktiń oń tárepine qoyıp

$$f(x) = F_1(x)F_2(x) \cdot f(\varphi_2(x)) + F_1(x)\psi_2(x) + \psi_1(x) \quad (3)$$

alamız

Bunnan soń (2) teńlikte x ózgeriwshini $\varphi(x)$ funkciyağa alastırıp

$$f(\varphi_2(x)) = F_3(x) f(\varphi_3(x)) + \psi_3(x) \quad (4)$$

alamız.

(4)Teńliktegi $f(\varphi_2(x))$ funkciyanı (3) teńliktiń oń tárepine qoyıp

$$f(x) = F_1(x)F_2(x)F_3(x) \cdot f(\varphi_3(x)) + F_1(x)F_2(x) \cdot \psi_3(x) + \\ + F_1(x)\psi_2(x) + \psi_1(x)$$

alamız.

Matematikalıq induksiya usılı menen qálegen n san ushın orınlı bolıwın dálilleymız.

$$f(x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \dots \cdot F_n(x) \cdot f(\varphi_n(x)) + F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \dots \cdot F_{n-1}(x) \cdot \psi_n(x) + \\ + F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \dots \cdot F_{n-2}(x) \psi_{n-1}(x) + \dots + F_1(x) \psi_2(x) + \psi_1(x)$$

teńlik orınlı ekenin kórsetiw múmkin, qısqaraq

$$f(x) = \left(\prod_{r=1}^n F_r(x) \right) f(\varphi_n(x)) + \sum_{p=1}^n \prod_{r=1}^{p-1} F_r(x) \psi_p(x), \quad (5)$$

bul jerde $\prod_{r=1}^n F_r(x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \dots \cdot F_n(x)$, al

$$\sum_{p=1}^n \prod_{r=1}^{p-1} F_r(x) \psi_p(x) = \psi_1(x) + F_1(x) \psi_2(x) + \left(\prod_{r=1}^2 F_r(x) \right) \cdot \psi_3(x) + \\ + \left(\prod_{r=1}^3 F_r(x) \right) \cdot \psi_4(x) + \dots + \left(\prod_{r=1}^{n-1} F_r(x) \right) \cdot \psi_n(x).$$

Limitler bar bolsa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{r=1}^n F_r(x) = \Phi(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \prod_{r=1}^{p-1} F_r(x) \psi_p(x) = A(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \alpha(x),$$

onda (5) teńlikti limitke ótip

$$f(x) = \Phi(x) f(\alpha(x)) + A(x) \quad (6)$$

alamız.

Eger $\alpha(x) = C(\text{const})$ bolsa, onda (6) teńliktiń (1) teńlemeniniń sheshimin beredi:

$$f(x) = \Phi(x) f(C) + A(x)$$

$$\text{Bul jerde } f(C) = \frac{A(C)}{1 - \Phi(C)} \quad (\Phi(C) \neq 1).$$

$$\text{Eger } \alpha(x) = x \text{ bolsa, onda } f(x) = \frac{A(x)}{1 - \Phi(x)}.$$

$F(x) = 1$ yaki $\psi(x) = 0$ jaǵdaylarda (1) teńlemenini sheshiw ádewir ańsatlasadı.

Eger berilgen teńlemede $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \infty$ bolsa, onda teńlemenini aldın sáykes almasıw járdeminde túrlendiriw kerek. Bul túrlendirilgen teńlemede $\varphi_n(x)$ funkciyalar shekli limitke iye bolıwı kerek.

Mısalı $f(2x+1) = f(x)$ teńlemede

$$\varphi(x) = 2x+1, \varphi_n(x) = 2^n x + 2^n - 1 \text{ hám } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = +\infty.$$

Teńlemede almasıw orınlaymız, $2x+1$ di x qa almasıramız. Onda $x, \frac{x-1}{2}$

ge almasıdı, hám teńleme tómendegi kóriniste boladı

$$f(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

$$\text{Bul jerde } \varphi(x) = \frac{x-1}{2}, \text{ al } \varphi_n(x) = \frac{x - (2^n - 1)}{2^n} \text{ hám } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = -1.$$

Ápiwayı mısallar qaraymız.

1-mısal

$$f(x) = a^x f\left(\frac{x}{5}\right).$$

teńlemenı sheshiń.

Bul teńlemede $F(x) = a^x, \varphi(x) = \frac{x}{5}, \psi(x) = 0$.

Sonlıqtan $\varphi_n(x) = \frac{x}{5^n}$,

$$\Phi(x) = a^x \cdot a^{\frac{x}{5}} \cdot a^{\frac{x^2}{25}} \dots a^{\frac{x}{5^n}} \dots = a^{x + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{25} + \dots + \frac{x}{5^n} + \dots} = a^{\frac{5x}{4}}, \psi_n(x) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0, A(x) = 0$$

hám demek

$$f(x) = C \cdot a^{\frac{5}{4}x}, \text{ bul jerde } C = f(0).$$

2-mısal. Teńlemenı sheshiń

$$f(2x) = \left(e^{x^2} \cos x\right) f(x).$$

Eger $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ shártın qanaatlandırǵanda,

bul teńlemede $\varphi(x) = 2x, \varphi_n(x) = 2^n \cdot x, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = +\infty$. Sonlıqtan berilgen

teńlemede x ózgeriwshini $\frac{x}{2}$ teńlikke almastıramız. Bul jerde

$$f(x) = \left(e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \cos \frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Bul jerde $F(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \cos \frac{x}{2}, \psi(x) = 0, \varphi(x) = \frac{x}{2}$.

Sol sebepli $\psi_n(x) = 0, \varphi_n(x) = \frac{x}{2^n}$,

$$F_n(x) = e^{\frac{x^2}{2^{2n}}} \cdot \cos \frac{x}{2^n}, \prod_{r=1}^n e^{\frac{x^2}{2^{2r}}} = e^{x^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} \right)} \text{ hám } \lim_{x \rightarrow 0} \prod_{r=1}^n e^{\frac{x^2}{2^{2r}}} = e^{\frac{x^2}{3}}.$$

$\prod_{r=1}^n \cos \frac{x}{2^r}$ eger $n \rightarrow 0$ umtılğanda funksiyanıń limiti bar, sonday eken

$\left| \cos \frac{x}{2^r} \right| \leq 1$ boladı. Oylayıq $\lim_{x \rightarrow 0} \prod_{r=1}^n \cos \frac{x}{2^r} = Q(x)$. Onda belgili

$$Q(2x) = \cos x Q(x).$$

$$\text{Endi } \lim_{n \rightarrow 0} f(\varphi_n(x)) = \lim_{n \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 1.$$

$$\text{Sonday eken, } f(x) = e^{\frac{1}{3}x^2} Q(x).$$

Bul funksiya berilgen teńlemenı qanaatalandıırıwın tekserip kóriw qıyın emes.

§ 1.3. Erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın funksiyalıq teńlemelerdi differenciyanıwshı funksiylar klasında sheshiw

Differenciyanıwshı funksiylar klasındaǵı funkcional teńlemeler sheshimi ideyasi sonnan ibarat. Erikli ózgeriwshı boyınsha differenciyanıw jolı menen funkcional teńlemege say keledi.

Bul jerde erikli ózgeriwshilerge iye bolmaǵan hám iye bolǵan funkcional teńlemelerdiń differenciyanıwındaǵı prinsiplik ayırmashılıqtı esapqa alıwımız kerek. Birinshi jaǵdayda differenciyanıw nátiyjesinde kóbinese $f'(x)$ funkcional teńlemenıń belgisiz funksiyanıń tuwındısına qatnaslı tuwrıdan tuwrı jańa funkcional teńlemege kelemiz. Onı sheship $f'(x)$ ti tawamız, sońınan $f(x)$ tı ıxtıyarıy turaqlıǵa deyin anıq esaplaymız.

Ekinshi jaǵdayda tómende kórsetilgendey, funkcional teńlemeler differenciyanıw járdeminde sol bir belgisiz funksiyanıń differenciya teńlemesi menen alastırıladı.

Joqarida aytilganlar menen baylanisli, bizge belgili erikli ózgeriwshilerge iye emes teńlemelerde, differenciýallaw arqalı teńlemenı ápiwayılastırıw kózde tutıladı.

Mısalı, $f(x) = F(x) f(\varphi(x)) + \psi(x)$ teńlemesın alıp qarasaq.

Bul teńlemenıń sheshimin differenciýallanıwshı funksiýalar ishinde izlewde maqsetke muwapıq $F(x) = \ell$ - turaqlı hám $\varphi(x) = \frac{x}{\ell}$ (yamasa $\varphi(x) = \frac{x+b}{\ell}$) jaǵdayda differenciýallanıwı kerek.

Rasında da, $\ell > 1$ jaǵday da $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{r=1}^n F_r(x) = +\infty$, al $\ell < 1$ jaǵdayda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = +\infty.$$

Bul teńlemenı differenciýallap

$$f(x) = \ell \cdot f\left(\frac{x}{\ell}\right) + \psi(x)$$

$$\text{biz } f'(x) = f'\left(\frac{x}{\ell}\right) + \psi'(x)$$

teńlemesine kelemiz, bunda

$$F(x) = 1, \text{ al } \varphi(x) = \frac{x}{\ell}.$$

Eger bul jerde $\ell > 1$, bolsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$ al eger $\ell < 1$, onda $\frac{x}{e}$ dı x ke almastırsaq, bul bizdi sonday teńlemege alıp keledi, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$.

Mısalı 4 $f(x) = f(4x)$ teńlemesın sheshiw kerek.

Bul teńlemenı differenciýallap otıra, taza funksional teńlemege kelemiz.

$$f'(x) = f'(4x) \text{ yamasa } f'(x) = f'\left(\frac{x}{4}\right) \text{ bul jerde } f'(x) - \text{belgisiz bolsa } \varphi(x) = \frac{x}{4}$$

boladı. Bul aqırǵı teńlemenıń sheshimi úzliksiz funksiýalar klasında turaqlı ekenin, yaǵnıy $f'(x) = C$ ekenin kórsetiw ańsat.

Aqırǵı teńlemenı tuwrıdan tuwrı integrallaw teńleme sheshimin differenciyanıwshı funksiya klasında beredi hám onıń sheshimi bolıp

$f(x) = Cx + C_1$ usı funksiya tabıladı.

Teńlemeden $f(0) = 0$ ekeni kelip shıǵadı, sonlıqtan $C_1 = 0$, demek $f(x) = Cx$.

Usıǵan uqsas etip $f(3x + 2) = 3f(x)$ teńlemesi sheshiledi.

Bul teńlemenı x boyınsha differenciyalap, $f'(x)$ ge baylanıslı funksional teńlemege kelemiz

$$f'(3x + 2) = f'(x),$$

bul teńlemenı úzliksiz funksiya klasında shıǵarıw qolaylı.

Rasındada $(3x + 2)$ ni x ke almasırsaq $f'(x) = f'\left(\frac{x-2}{3}\right)$ ke kelemiz hám

bunda $\varphi(x) = \frac{x-2}{3}$.

Bul teńlemenıń sheshimi bolıp $f'(x) = C$ bolıp keledi, bunda $C = f'(-1)$.

$f'(x) = C$ teńlemesın integrallap, $f(x) = Cx + C_1$ di tabamız.

Bul sheshimdi teńlemege aparıp qoyıw nátiyjesinde $C = C_1$ hám $f(x) = C(x + 1)$ di tabamız.

§ 1.4. Natural argumentli funksiya klasında erikli ózgeriwshı qatnaspaytuǵın funksiya teńlemelerdi sheshiw

Bul jerde bizler sonday funksional teńlemelerdi qaraymız, olarda $f(x)$ belgisiz funksiya tek ǵana $x \in \mathbb{N}$ ushın izlenedi.

Bul jaǵdayda funksional teńlemenıń sheshimin tabıw jollarınıń biri bolıp tiykarǵı metodlardıń biri (jalǵız emes) matematikalıq indukciya metodı bolıp keledi.

Ádette, bul metod teńlemenı argumenttiń $x = 1, 2, 3, \dots$ dara mánislerinde qollanıladı. Bunda belgisiz funksiyanıń mánisleri ushın qandayda bir nızamlılıq

tabılıp $f(n)$ túrindegi (ańlatpa) haqqında gipoteza júrgiziledi. Bul gipotezanıń orınlı ekeni tolıq matematikalıq induksiya metodı menen dálillenedi.

Mısalı, $f(n)$ natural argumentli funkciyanı tabıw kerek, bunda bári $\forall n \geq 2$ ushın tómendegi teńlemenı qanaatlandırıwı kerek

$$n^{f(n)-1} = (n-1)^{f(n-1)}$$

Máseleni sheshiw ushın teńlemenı logarifimleymiz:

$$(f(n)-1)\lg n = f(n-1) \cdot \lg(n-1) \text{ yamasa } f(n) = 1 + \frac{\lg(n-1)}{\lg n} f(n-1) \quad (1)$$

(2)shi teńlemede n – ge izbe-iz 2,3,4 mánislerin berip

$$f(2) = 1$$

Bul dara jaǵdaylar, tómendegishe gipotezanı beredi

$$f(n) = \frac{\lg(n!)}{\lg n} \quad (2)$$

Bul teńlemenıń orınlı ekenin matematikalıq induksiya metodı menen dálilleymiz $n = 2$ jaǵdayda teńleme tómendegishe kóriniske keledi

$$f(2) = \frac{\lg(2!)}{\lg 2} = 1$$

Bul teńlemenıń orınlı ekeni joqarıda tekserilgen.

Endi gipoteza qandayda bir n ushın orınlı bolsın. Bul jaǵdaydı qollanıp, gipotezanıń $(n+1)$ natural sanı ushında orınlı ekenin dálilleymiz.

(1) teńlemeden biz bilemiz

$$f(n+1) = 1 + \frac{\lg n}{\lg(n+1)} f(n)$$

(2)teńlemenıń orınlı dep qarasaq

$$f(n+1) = 1 + \frac{\lg n}{\lg(n+1)} \cdot \frac{\lg(n!)}{\lg n} = 1 + \frac{\lg(n!)}{\lg(n+1)} = \frac{\lg((n+1)!)}{\lg(n+1)}$$

boladı, yaǵnıy gipoteza $(n+1)$ natural sanı ushında orınlı ekeni kelip shıǵadı.

Bunnan matematikalıq induksiya metodına muwapıq, gipoteza bári $n \geq 2$ jaǵdayda orınlı. Bunnan kelip shıǵıp, teńlemenıń sheshimi bolıp $f(n) = \frac{\lg(n!)}{\lg n}$ funkciyası tabıladı.

II BAP

ERIKLI ÓZGERIWSHI QATNASATUĞIN FUNKCIONAL TEŃLEMELER

Erikli ózgeriwshiler qatnasatuğın funkciyalıq teńlemeler matematikler birinshi náwbette ushırasatuğın teńlemeler qatarına kirdi buğan joqarıda atalğan Dalamber teńlemeleri Koshi hám Lovashebiskiy teńlemeleri kiredi. Bul teńlemelerdi sheshiwde de ornına qoyıw usılı jetekshi rol oynaydı. Biraq bul jerde ol júdá keń qollanıwlarğa iye. Funkciyalıq teńlemelerdi úzliksiz funkciyalar klasında funkciyalıq teńlemelerdi sheshiwdiń effektiv usılı Koshi tárepinen usınıldı. Dara jağdayda bul usıl Dalamber Koshi hám Lovasheviskiy teńlemelerin izzertlewde qollanıldı. Funkciyalıq teńlemelerdi differenciyanıwshı funkciyalar klasında sheshiwde ushın Abel erikli ózgeriwshiler qatnasatuğın funkciyalıq teńlemelerdi differenciyal teńlemege keltiriw usılınan paydalandı. Joqarıda keltirilgendey Koshi óz usılınan

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$

paydalandı.

Bul teńlemelerdiń sheshimi

$$f(x) = Cx, \quad f(x) = C^x, \quad f(x) = C \ln x, \quad f(x) = x^C$$

bolıwın atap ótemiz.

Bul jerde C – turaqlımız R yaki R_+ kóplikke tiyisli bazı bir turaqlı san.

§ 2.1. Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi ornına qoyıw usılı menen sheshiw

Belgisiz bir ózgeriwshili funkciya bolǵan al teńlemede (yaki odanda kóp) erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi qaraymız. Bunday teńlemelerge

$$f(x \cdot y) = y^k f(x), \quad (1)$$

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2 \quad (2)$$

mısal boladı.

Bul teńlemelerdi ornına qoyıw usılı menen sheshkende bir yaki eki erikli ózgeriwshilerdi jańa funkciyalar (sonday-aq turaqlılar) menen almasırwımız múmkin. Eń ápiwayı jaǵdaylarda erikli ózgeriwshilerdiń birin turaqlı menen almasırw erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi erikli ózgeriwshiler qatnaspaytuǵın funkciyalıq teńlemelerge alıp keledi. Mısalı

(1) teńlemelerde $x=1$ dep alıp biz mına teńlikke kelemiz

$$f(y) = y^k f(1)$$

yamasa $f(x) = Cx^k$ bul jerde $C = f(1)$.

Tikkeley tekseriw járdeminde bul funkciya qálegen haqıyqiy C sanlar ushın (1) teńlemenıń sheshimi bolatuǵına isenim arttırıw múmkin. Ayrim jaǵdaylarda erikli ózgeriwshilerdiń birewin turaqlı menen almasırw erikli ózgeriwshi qatnaspaytuǵın teńlemege alıp keledi. Bul teńleme óz náwbetinde orınna qoyıw usılı menen sheshiledi. Mısalı (2) teńlemede $x=0$ dep alıp

$$f(y) - 2f(-y) + f(0) - 2f(y) = y - 2$$

Teńlemenı alamız bul teńlemede y ózgeriwshini $-y$ penen almasırwıp

$$f(-y) - 2f(y) + f(0) - 2f(-y) = -y - 2$$

Teńlemege kelemiz.

Keyingi eki teńleme birgelikte belgisiz $f(y)$ hám $f(-y)$ funkciyalarga qarata sızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasın beredi. Bul sistemadan belgisiz $f(y)$ funkciya tabıladı:

$$f(y) = y + \frac{1}{3}(f(0) + 2)$$

(1) teńlemede $x = y = 10$ dep alıp $f(0) = 1$ hám $f(y) = y + 1$ funkciya ekinshi teńlemenin shehimi bolatuǵının tabamiz.

Erikli ózgeriwshilerdin birewin turaqlı sangá teń dep alıp biz belgisiz funkciyanıń bir dara mánisin qaraw ushın kiritemiz. Geyde bul mánisti anıqlaw múmkin boladı. Ekinshi teńlemenin sheshkende bul $f(0) = 1$ boldı. Biraq geyde bul mánisti anıqlaw múmkin bolamaydı. Biraq bul jaǵdayda alınǵan sheshim qálegen turaqlıǵa ǵárezli boladı.

Sonın ushın tikkeley tekseriw járdeminde hár bir jaǵdayda turaqlıların qanday mánislerinde tabılǵan funkciya teńlemenin sheshimi bolatuǵının tekserip bariw máqsetke muwapıq boladı. Erikli ózgeriwshilerdin birewin yaki ekewinde bazı bir funkciyalar menen almastırǵanda sáykes almastırwdı izlew málim sheberlikti talab etedi. Mısal sıpatında

$$f(x^y) = yf(x), x > 0.$$

Teńlemenin qaraymiz bul teńlemede $x = e^z$ dep almastırıp biz

$$f(e^{z \cdot y}) = yf(e^z). \text{ Eger } z = 1 \text{ bolǵanda } f(e^y) = yf(e) \text{ teńlikke kelemiz.}$$

$z = 1$ bolsa $f(e^y) = Cy$. Bul jerde $e^y = x$ ($y = \ln x$), dep alıp teńlemenin sheshimin $f(x) = C \ln x$ bul jerde $C = f(e)$ kóriniste alamız.

Bul funkciya qálegen C ushın berilgen teńlemenin sheshimi bolatuǵının tekseriw qıyın emes álbette erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi sheshkende almastırwdı tańlap alıw teńlemenin strukturasına ǵárezli boladı.

Málim kórinistegi almastırıwları orınlaw múmkin bolǵan teńlemerdiń usınday teńlemelerdiń bir neshe turi birinshi maqalada keltirilgen bulardıń ayırımların qarap shıǵamız.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x), f(y)] \quad (3)$$

bul jerde G bazı bir funkciya, (4) teńlemenıń ulıwmalasıwı sıpatında qaraw múmkin .

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (4)$$

Bunday teńlemeler x ózgeriwshini $x+y$ qosındıǵa al y ózgeriwshini 0 menen almastırıw arqalı ápiwayı kóriniske keltiriledi. Bunday almastırıwları (4) teńlemede paydalanamız nátiyjede

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + f(0)}{2} \quad (5)$$

teńlemenı alamız.

(4) hám (5) teńlemenıń oń táreplerin teńlestirip

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a, \text{ bul jerde } a = f(0)$$

teńlemege kelemiz.

Keyingi teńleme $\varphi(x) = f(x) - a$ almastırıwda

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ otedi.}$$

Bul teńlemenıń sheshimi $\varphi(x) = Cx$ demek $f(x) = Cx + a$

2) Berilgen

$$H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0 \quad (6)$$

kórinistegi teńleme bul jerde H bazı bir funkciya .

Bul teńleme ushın eki teńleme kórsetemiz xarakterı H funkciyanıń kórinisine ǵárezli bolǵan almastırıwlardan paydalanamız. Bul usıldıń birewin

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y \quad (7)$$

teńleme mısasında kórsetemiz.

(7) teńlemede 3 almastırıwdı orınlaymız

$$x=0, y=t; x=\frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t$$

hám $f(0)=a, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$ belgilewlerin kirgizemiz.

Nátiyjede úsh teńleme alamız

$$\left. \begin{aligned} f(t) + f(-t) &= 2a \cos t, \\ f(t + \pi) + f(t) &= 0, \\ f(t + \pi) + f(-t) &= 2b \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -2b \sin t. \end{aligned} \right\}$$

Bul belgisiz úsh $f(t), f(-t)$ hám $f(t + \pi)$ belgisizli úsh algebralıq teńlemeler sisteması.

Sistemanı dáslepki eki teńlemesin qosıp hám qosındıdan (3) tenlemenı ayırıp belgisiz funkciyanı tabamız

$$f(t) = a \cos t + b \sin t.$$

Tikkeley tekseriw járdeminde qálgen a hám b turaqlılar ushın (7) teńlemenıń sheshimi bolıwına isenim arttırıw múmkin. Qaralğan mısalda $y = \frac{\pi}{2}$ bolǵanda $f(x) \cos y$ funksiya nólge teń bolatuǵını úlken ról oynadı. Sonlıqtan bul usıdan (6) kórinistegi basqa teńlemelerdi sheshiw ushın hám paydalaniw ushın (6) teńlemede $H(z_1, z_2, z_3, x, y)$ funksiya z_3 ózgeriwshiden gárezli bolmaytuǵın $y = y_0$ dara mánis bar bolıwı kerek:

$$H(z_1, z_2, z_3, x, y_0) = h(z_1, z_2, x) \quad (8)$$

Bul jerde h – bazı bir funksiya

Eger bul shárt orınlansa onda tómendegi usıǵan uqsas kobinese sheshimdi tabıwǵa múmkinshilik beredi.

(6) teńlemede $x=0, y=t; x=y_0+t, y=y_0, x=y_0, y=y_0+t$ almastırıwların orınlap hám $f(0)=a, f(y_0)=b$ belgilewlerin kiritip

$$\left. \begin{aligned} H[f(t), f(-t), a, 0, t] &= 0, \\ H[f(2y_0 + t), f(t), y_0 + t] &= 0, \\ H[f(2y_0 + t), f(-t), b, y_0, y_0 + t] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

teńlemelerdi alamız.

Bul teńlemelerden $f(2y_0 + t)$ hám $f(-t)$ lardı joǵaltıp biz izlenip atırǵan $f(t)$ funkciyani tabamız.

Eger 8- shárt orınlanbasa kóbinese onday jaǵdaylarda biz tómendegi misalda kórsetetuǵın usıdan tabıslı paydalanıw múmkin.

$$f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y$$

teńlemenı qaraymız

$x = 0, y = t; x = t, y = 2t; x = t, y = -2t$ almasırlardı orınlap biz belgisiz $f(t), f(-t), f(3t)$ funkciyalardı qarata úsh algebralıq teńlemeler sistemasın alamız.

$$\left. \begin{aligned} f(t) + 2f(-t) &= 3a - t, \\ -3f(t) + 2f(-t) + f(3t) &= -2t, \\ -3f(t) + f(-t) + 2f(3t) &= 2t. \end{aligned} \right\}$$

Bunnan $f(t) = t + a$ bul jerde $a = f(0)$ funkciyanı alamız.

Bul funksiya qálegen haqiqiy a ushın berilgen teńlemenı qanaatlandıradi. Táriyiplengen usıdan (6) ulıwma teńlemenı sheshiw ushın paydalanıw múmkin. Haqiqatında da (6) teńlemede $x = 0, y = t; x = t, y = 2t; x = t, y = -2t$ almasırların orınlap biz belgisiz $f(t), f(-t), f(3t)$ almasırlardı qarata úsh teńlemeler sistemasın alamız

$$\left. \begin{aligned} H[f(t), f(-t), a, 0, t] &= 0, \\ H[f(3t), f(-t), f(t), t, 2t] &= 0, \\ H[f(-t), f(3t), f(t), t, -2t] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Eger bul sistema sheshimge iye bolsa, onda belgisiz $f(x)$ funksiya tabıladı.

3) Tómindegi kórinistegi teńleme

$$H[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y] = 0 \quad (9)$$

bul jerde h – bazı bir funkciya.

(9) teńlemede izbe-iz $x=0, y=t; x=t, y=2t; x=2t, y=t; x=t, y=t$ almastırıwların orınlap belgisiz $f(t), f(-t), f(2t), f(3t)$ funkciyalardıǵa qarata teńlemeler sistemasın alamız. Eger bul sistema sheshimge iye bolsa, onda belgisiz $f(t)$ funkciyanı tabamız.

Mısalı

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Bul teńlemelerde kórsetilgen almastırıwlar járdeminde tórt sıızılıq algebralıq teńlemeler sistemasın alamız

$$\left. \begin{aligned} -f(t) - 2f(-t) + a &= t - 2, \\ f(3t) - 2f(-t) + f(t) - 2f(2t) &= 2t - 2, \\ f(3t) - 4f(t) + f(2t) &= t - 2, \\ f(2t) - 2a - f(t) &= t - 2, \end{aligned} \right\}$$

bul jerde $a = f(0)$.

Birinshi hám úshinshi teńlemelerdiń qosındısınan 3 ke kóbeytilgen tórtinshi hám ekinshi teńlemenı ayırıp

$$f(t) = t + \frac{7a-4}{3}$$

yamasa qısqaraq

$$f(t) = t + b,$$

bul jerde b – ayırım turaqlı

Biraq tikkeley orınına qoyıw járdeminde $f(t)$ funkciya tek $b=1$ bolǵan jaǵdayda ǵana berilgen teńlemenı qanaatlandıratuǵına isenim arttırıw múmkin. Demek, tek $f(0) = a = 1$ bolǵanda $f(x) = x + 1$ sheshim bolıwı múmkin.

(9) ulıwma teńleme jaǵdayında $x=0, y=t; x=t, y=2t; x=2t, y=t; x=t, y=t$

almastırıwlar orınlaw múmkin.

Nátiyjede, belgisiz $f(t), f(-t), f(2t), f(3t)$ funkciyalargá qarata sızıqlı tórt teńlemeler sistemasın alamız.

$$\left. \begin{aligned} H[f(t), f(-t), a, f(t), 0, t] &= 0, \\ H[f(3t), f(-t), f(t), f(2t), t, 2t] &= 0, \\ H[f(3t), f(t), f(2t), f(t), 2t, t] &= 0, \\ H[f(2t), a, f(t), f(t), t, t] &= 0, \end{aligned} \right\}$$

bul jerde $a = f(0)$.

Onda belgisiz $f(t)$ funkciya tabıladı.

§ 2.2. Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funkciyalıq teńlemelerdi sheshiwdiń

Koshi usılı

Bul usıl teńlemenıń sheshimi úzliksiz funkciyalar klasında izlenetuǵın jaǵdayda erikli ózgeriwshi funkciyalıq teńlemelerdi sheshiwde qollanıladı. Bunda dáslep teńlemenıń $f(x)$ sheshimi izbe-iz NZQ kópliklerde tabıladı. Bunnan keyin qálegen $x \in \mathbb{R}$ mánis alınadı hám $(x_n) \subset Q$ racional sanlar izbe-izligi alınadı. Bul izbe-izlik x sanǵa jıynaqlı bolıwı kerek. Demek, $(f(x_n))$ funkciyanıń mánisleri izbe-izligide alınadı.

Úzliksiz funkciyalar klasında úzliksiz funkciya belgisi astında limitke ótiw yaǵnıy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

teńlik orınlı bolǵanlıqtan funkciyalıq teńlemenıń sheshimi izbe-iz $\mathbb{R}$ kóplikte tabıladı. Koshi usılın konkret mısalda kórsetemiz.

Endi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

teńlemenı qaraymız.

Bul teńlemenı sheshimin dáslep natural argumentli funkciyalar klasında qaraymız.

Teńlemede y izbe-iz $x, 2x, 3x$ kóbeymege teń dep alıp

$$\begin{aligned}f(2x) &= f(x+x) = f(x) + f(x) + x \cdot x = 2f(x) + x^2, \\f(3x) &= f(x+2x) = f(x) + f(2x) + x \cdot 2x = 3f(x) + 3x^2, \\f(4x) &= f(x+3x) = f(x) + f(3x) + x \cdot 3x = 4f(x) + 6x^2\end{aligned}$$

teńliklerdi alamız.

Bul dara jaǵdaylarda baqlanıp turǵan nızamlılıq

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2 \quad (1)$$

degen gipotezanı aytıwǵa múmkinshilik beredi. Bul gipotezanıń durıslıǵın matematikalıq indukciya usılı menen dálillew múmkin.

$n=1$ bolǵanda birinshi teńliktiń orınlı bolıwı anıq birinshi teńlik bazı bir natural n ushın birinshi teńlik orınlı dep alıp kelesi $n+1$ sanı ushın dálillewmiz kerek edi.

$$\begin{aligned}f((n+1) \cdot x) &= f(x+nx) = f(x) + f(n \cdot x) = \\&= f(x) + n \cdot f(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2 + x \cdot nx = (n+1) \cdot f(x) + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) \cdot x^2 = \\&= (n+1) \cdot f(x) + \frac{n(n+1)}{2} \cdot x^2\end{aligned}$$

(1) Teńlikte $x=1$ alıp ekinshi teńlikti alamız.

$$f(n) = n \cdot f(1) + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2)$$

$f(1)=C$ dep esaplap natural argumentli funkciyalar klasındaǵı sheshimin alamız:

$x \in N$

$$f(x) = Cx + \frac{x(x-1)}{2}. \quad (3)$$

Tikkeley tekseriwler járdeminde úshinshi funkciya qálegen C ushın berilgen teńlemenıń sheshimi bolıwına isenim arttırıw múmkin.

Endi (3) funkciya $x \in Q$ bolǵan jaǵdayda teńlemenıń sheshimi bolatuǵının kórsetemiz.

(1) teńlikte x ti $\frac{x}{n}$ bólshekke almastırıp

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(x) - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Keyingi teńlikte $x = m$ dep alıp hám (2) teńlikti esapqa alıp tórtinshi teńlikti tabamız

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = C \frac{m}{n} + \frac{1}{2} \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1\right) \quad (4)$$

Bunnan (3) sheshim argumenttiń oń racional mánisleri yaǵnıy $x \in Q_+$ ushın orınlı ekeni kelip shıǵadı.

$x = y = 0$ bolsa berilgen funkcional teńleme $f(0) = 2f(0)$ keltirilgenlikten $f(0) = 0$ boladı.

Usını esapqa alıp funkciyalıq teńlemede $f(0) = 2f(0)$ keltirilgenlikten $f(0) = 0$ alamız. Nátiyjede,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(-\frac{m}{n}\right) - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 0 \quad \text{alamız. Bunnan}$$

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 - f\left(\frac{m}{n}\right) \quad \text{kelip shıǵadı.}$$

(2) teńlikti esapqa alıp

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = -C \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \frac{m}{n} \left(-\frac{m}{n} - 1\right)$$

alamız, yaǵnıy berilgen funkciyalıq teńlemenıń sheshimi argumenttiń teris racional ($x \in Q_-$) ushında orınlı.

Endi (3) funkciya teńlemenıń $x \in \mathbb{R}$ ushında sheshimi bolatuǵını dálillew ǵana qaldı.

Meyli, $(r_n) - x$ haqıyqıy sanǵa jıyınalı qálegen bazı bir racional sanlar izbe-izligi bolsın. Onda $(r_n) -$ racional sanlar ushın

$$f(r_n) = Cr + \frac{1}{2}r_n(r_n - 1) \quad (5)$$

teńlik orınlı

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ al $f(x)$ funkciya úzliksiz bolǵanlıqtan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = f(x) \text{ orınlı.}$$

Endi (5) teńlikte $n \rightarrow +\infty$ limitke ótemiz nátiyjede

$$f(x) = Cx + \frac{x(x-1)}{2}$$

teńlikti alamız hám demek (3) sheshim argumenttiń qálgen haqıyqıy mánisleri ushın orınlı boladı.

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad x > 0, y > 0.$$

Teńlemenı sheshiw sál qıyınraq bul jerdede dáslep y ózgeriwshini $x, 2x, 3x$ teń dep alıp dara jaǵdaylardı qaramız.

$$\begin{aligned} f(x^2) &= f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x), \\ f(x^3) &= f(x \cdot x^2) = f(x) + f(x^2) = 3f(x), \end{aligned}$$

Bul dara jaǵdaylarda bayqalatuǵın nızamlılıq 6-kórınistegi gipotezanı aytıwǵa múmkinshilik beredi.

$$f(x^k) = kf(x) \quad (6)$$

Koshi usılınan paydalanıp 6- teńlikti k ózgeriwshiniń qálegen oń haqıyqıy mánisleri $k \in \mathbb{R}_+$ ushın dálillew múmkin eken.

Dálillewdi úsh basqıshta ótkizemiz.

1) meyli, $k \in \mathbb{N}$, $k=1$ ushın (6) teńliktiń orınlı ekeni kórinip tur (6) teńlik bazı

bir natural k san ushın orınlı dep boljaymız.

Onda kelesi $k+1$ natural san ushın

$$f(x^{k+1}) = f(x^k \cdot x) = f(x^k) + f(x) = k \cdot f(x) + f(x) = (k+1)f(x),$$

alamız, yaǵnıy altınshı teńlik keyingi $k + 1$ natural san ushın hám demek qálegen $k \in \mathbb{N}$ ushın orınlı.

2) meyli, $k \in Q_+$, onda $k = \frac{p}{q}$ bul jerde p hám $q \in \mathbb{N}$ onda

$$f(x^p) = pf(x),$$

$$f\left(\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\right) = qf\left(x^{\frac{p}{q}}\right)$$

bul teńliklerdiń shep tárepleri teń bolǵanlıqtan olardıń oń tárepleri de teń bunnan

$$f\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} f(x),$$

teńlikti alamız, yaǵnıy (6) teńlik $k \in Q_+$ orınlı .

3) meyli, $k \in \mathbb{R}_+$, al $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ oń racional sanlar izbe-izligi hám $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k$.

onda $f(x^{k_n}) = k_n f(x)$, orınlı.

Bul teńlikte limitke ótip $f(x)$ funkciyanıń úzliksizliginen $f(x^k) = kf(x)$, alamız yaǵnıy (6) teńlik qálegen $k \in \mathbb{R}_+$, ushında orınlı.

$f(x)$ funkciyanıń anıq ańlatpasın tómendegishe alıwmız múmkin. Beligilew kiritemiz $t = \ln x$ belgilep alıp, onda $x = e^t$, al $f(x) = f(e^t) = tf(e) = f(e) \ln x$.

Sonıń menen birge $f(x) = C \ln x$ funkciya qálegen haqıyqiy C ushın berilgen funkciyalıq teńlemenı qanaatlandıratuǵının ańsat tekseriw múmkin. Demek, $f(e) = C$.

Koshi usılınan bazı bir tábiyiy ózgerisler kirgizip funkciyalıq teńlemelerdiń sheshimin monoton funkciyalar klasında paydalanıw múmkin. Bul jaǵdayda úzliksiz funkciyalar klasında Koshi usılınan paydalanǵanımız sıyaqlı funkciyalıq teńlemenıń argumenttiń qálegen racional mánisleri ushın orınlı bolǵan sheshimleri

tabıladı. Soń x haqıyqıy sanǵa ósip jıynaqlı (r_n) hám x sanǵa kemeyip jıynaqlı bolatuǵın (r'_n) racional sanlar izbe-izligi qaraladı. Bunda $r_n < x < r'_n$ orınlı boladı.

Funkciya monoton bolaganlıqtan keyingi tensizliklerden

$$f(r_n) \leq f(x) \leq f(r'_n)$$

kelip shıǵadı eger $f(x)$ kemeyiwshi funksiya bolsa hám

$$f(r_n) \geq f(x) \geq f(r'_n)$$

orınlı eger $f(x)$ óspeytuǵın funksiya bolsa.

Eger $(f(r_n))$ hám $f(r'_n)$ izbe-izlikler birdey limitke jıynaqlı bolsa, onda funksiyanıń $f(x)$ mánisi de usı limitke teń.

§ 2.3. Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funksiyaq teńlemelerdi differenciyanıwshı funksiyaq klasında sheshiw

Erikli ózgeriwshiler qatnasatuǵın funksiyaq teńlemelerdi differenciyanıwshı funksiyaq klasında sheshiw ideyası funksiyaq teńlemenı differenciyaq teńlemege keltiriwden ibarat. Buǵan ádette funksiyaq teńlemenı izbe-iz ózgeriwshilerdiń hár biri boyınsha differenciyaq jolı menen erisiledi. Bunday usıl áddette teńlemede qatnasatuǵın belgisiz funksiya erikli ózgeriwshilerdiń qosındısınan ayırmasınan kóbeymesinen hám qatnasınan ǵárezli bolǵan jaǵdayda nátiyje beredi. Bunday jaǵdaylarda eki erikli ózgeriwshiniń hár birewi boyınsha izbe-iz differenciyaq eki teńlikke alıp keledi. Bul teńliklerden eki erikli ózgeriwshili f funksiyanıń tuwındısı joǵaltıladı, al qalǵan teńlik belgisiz $f(x)$ funksiyaǵa qarata differenciyaq teńlemege alıp klinedi.

Differenciyaq teńlemenıń ulıwma sheshimi qálegen turaqlılardıń hámme mánisleri ushın berilgen funksiyaq teńlemenıń sheshimi boladı. Bul ideyanı mısallarda kórsetemiz.

1) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ funkciyalıq teńlemenı differenciyalanıwshı funkciyalar klasında sheshiń.

Berilgen teńleme Koshi teńlemeleriniń biri ekenin atap ótemiz.

Teńlemenı dáslep x ózgeriwshi boyınsha soń y ózgeriwshi boyınsha differenciyalaymız nátiyjede eki teńlemenı alamız.

$$f'(x+y) = f'(x) \cdot f(y),$$

$$f'(x+y) = f(x) \cdot f'(y)$$

Bul teńliklerdiń shep tárepleri teń bolǵanlıqtan oń tárepleride teń olardı teńlestirip

$$f'(x) \cdot f(y) = f(x) \cdot f'(y)$$

alamız.

$f(x) \neq 0$ dep alıp

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)} \text{ jazamız.}$$

Bul teńlik x hám y ózgeriwshilerdi barlıq mánisleri ushın orınlı bolǵanlıqtan bul tek

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = C \quad (C - \text{turaqlı shama})$$

bolsa ǵana orınlı bolıwı múmkin.

Keyingi teńlikti integrallap

$$\ln f(x) = Cx + C_1$$

$$f(x) = e^{Cx+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{Cx} = C_2 (e^C)^x = C_2 \cdot a^x,$$

bul jerde $C_2 = e^{C_1}$, al $a = e^C$.

Solay etip differenciyal teńlemenıń ulıwma sheshimi $f(x) = C_2 \cdot a^x$

kóriniste jazıladı.

C_2 qálegen turaqlını anıqlaymız. Berilgen funkciyalıq teńlemeden $x=y=0$ bolǵanda $f(0) = f^2(0)$ teńlikti alamız.

Bul tek eki jaǵdayda ǵana orınlı bolıwı múmkin $f(0)=0$ yamasa $f(0)=1$

Biraq 1- jaǵdayda ulıwma sheshimnen $C_2 = f(0)=0$ demek $f(x) \equiv 0$.

2-jaǵdayda ulıwma sheshimnen $C_2 = 1$ hám sheshim $f(x) = a^x$ kóriniste jazıladı.

2) $f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$ berilgen teńlemenı dáslep x ózgeriwshi boyınsha keyin y ózgeriwshi boyınsha differenciyalap

$$f'(x+y) + 2f'(x-y) = 3f'(x),$$

$$f'(x+y) - 2f'(x-y) = -1$$

teńliklerdi alamız.

Bul teńliklerdi qosıp

$$2f'(x+y) = 3f'(x) - 1 \text{ teńlikti alamız.}$$

Bul teńlikti de dáslep x ózgeriw boyınsha keyin y ózgeriw boyınsha differenciyalaymız bul bizge

$$2f''(x+y) = 3f''(x),$$

$$2f''(x+y) = 0$$

eki teńlikti berdi

Bunnan $f''(x) = 0$, al $f(x) = C_1x + C_2$.

Bul sheshimdi berilgen funkciyalıq teńlemege qoyıp $C_1 \cdot y = y$ teńlikke kelemiz, bunnan $C_1 = 1$ demek. Berilgen funkciyalıq teńlemenıń sheshimi

$$f(x) = x + C \text{ funkciya boladı.}$$

III BAP. FUNKCIYALIQ TEŃLEMELER JÁRDEMINDE TIYKARǴI ELEMENTAR FUNKCIYALARDIŃ ANIQLAW

Ilim rawajlanıwı jolında túrli funkciyonal baylanıs túrleri ishinde kóbinese hár túrli esaplarda ushırasatuǵın funkciyalar gruppası ajralıp shıqtı.

Tiykarǵı elementar funkciyalardı sızıqlı, dárejeli, kórsetkishli, logarifmli hám trigonometriyik funkciyalar kiredi.

Ádette, elementar funkciyalar dep tiykarǵı elementar funkciyalardan kelip shıqqan hám hár dayım sanlı arifmetik ámeller hám kompoziciyalardı qollanıw járdeminde kelip shıqqan funkciyalardı aytamız.

Tiykarǵı elementar funkciyalardı anıqlawdıń jeterlishe kóp usılları bar (integrallar járdeminde differenciya teńlemeler hám funkciyonal teńlemeler járdeminde).

Tiykarǵı elementar funkciyalardıń anıqlanıwın funkciyonal teńlemeler sheshimi retinde qaraymız. Bul arqalı tómendegi teńlemelerdiń sheshiliwin izzertleymiz:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad (I)$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad (II)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad (III)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad (IV)$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y), \quad (V)$$

$f(x)$ funkciyanı turaqlı funkciya emes dep onıń úzliksizligi talap etilgende, joqarıda kórsetilgen teńlemeler sheshimi retinde tek ǵana anıq elementar funkciyaǵa iye ekenin hám ayırım qosımsha jaǵdaylar teńlemelerdiń hár qaysısı jalǵız sheshimge iye ekenin dálillewge jaǵday jaratatuǵının kórsetemiz.

§ 3.1. Sızıqlı funkciyanı anıqlaw

(I) Teñlemeni tómendegi jaǵdaylarda qaraymız.

$I_1)$ $f(x)$ funkciya $(-\infty; +\infty)$ intervalında úzliksiz funkciya

$I_2)$ $f(1) = k$

Teorema. (I) Funkciyonal teñlemenin sheshimi I_1 hám I_2 jaǵdaylarda tómendegi qásiyetlerge iye:

a) $f(0) = 0$, b) $f(-x) = -f(x)$,

v) Hár qanday haqıyqıy x sanı ushın $f(x) = kx$ teñleme orınlı.

g) Eger $k > 0$, onda $x > 0$ bolǵan $f(x) > 0$ hám $f(x) < 0$ bolǵanda $x < 0$.

Eger $k < 0$, onda $x > 0$ bolǵan $f(x) < 0$ hám $f(x) > 0$ bolǵanda $x < 0$.

d) funkciya $k > 0$ bolǵanda $f(x)$ jaǵdayında qatań ósiwshi $k < 0$ jaǵdayında qatań kemeyiwshi

e) eger $k > 0$, onda $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, al $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

eger $k < 0$, onda $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, al $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Dálillenıwı: a) (I) teñlemede $x = y = 0$ dep qarasaq, $f(0) = 2f(0)$ boladı.

Bul jerden $f(0) = 0$ ekeni kelip shıǵadı.

b) $f(-x) = [f(-x) + f(x)] - f(x) = f(-x + x) - f(x) = f(0) - f(x) = -f(x)$

bolsa, onda $f(-x) = -f(x)$.

v) Koshi metodınan paydalanıp, hár qanday haqıyqıy x sanı ushın $f(x) = kx$ ekenin dálilleybiz. Aldı menen bul teñlemeni $x \in \mathbb{N}$ ushın dálilleybiz

Teñlemede y ti izbe-iz $x, 2x, 3x, \dots$ ǵa teń dep qarap

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) + f(2x) = 3f(x)$$

$$f(4x) = f(x + 3x) = f(x) + f(3x) = 4f(x)$$

— — — — — — — — — —

ekenin keltirip shıǵaramız.

Joqarıdaǵı teńlemelerden kelip shıqqan nızam tómendegi gipotezanı beredi

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x) \quad (1)$$

Bunı matematikalıq indukciya menen dálilleymiz. $n=1$ bolsa (1) teńleme anıq kórinip tur. $n=k$ jaǵdayda (1) teńleme orınlı dep qarap, $n=k+1$ jaǵdayında orınlı ekenin dálilleymiz.

$$\text{Onda } f((k+1) \cdot x) = f(x + k \cdot x) = f(x) + k \cdot f(x) = (k+1) \cdot f(x)$$

teńlik dálillendi.

Teńlemede $x=1$ bolsa, $f(n) = n \cdot f(1)$ yamasa $f(n) = k \cdot n$ (2)

Demek $f(x) = kx$ teńleme $x \in \mathbb{N}$ ushın orınlı.

Endi $r = \frac{m}{n}$ – qandayda bir racional oń san. Onda (1) teńlemede $x = \frac{m}{n}$ dep

qarasaq, $f(m) = nf\left(\frac{m}{n}\right)$, (2) teńlemenı esapqa alsaq $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} f(m) = k \cdot \frac{m}{n}$

ekenin anıqlaymız.

Demek, $f(x) = f(kx)$ teńlemesi $x \in Q^+$ ushın b) $f\left(\frac{m}{n}\right) = -f\left(-\frac{m}{n}\right)$

jaǵdayı esapqa alınıp orınlı, bunnan $f\left(-\frac{m}{n}\right) = k\left(-\frac{m}{n}\right)$ ekeni kelip shıǵadı.

Demek, $f(x) = kx$ teńlemesi $x \in Q^-$ ushında orınlı, sonlıqtan $x \in Q$ ushın orınlı.

Endi x – qálegen bir haqıyqıy san, onda qandayda bir racional sanlar izbe-izligi tabılıp (r_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ teńleme orınlı.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = k \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n \text{ yamasa } f(x) = kx \quad (3)$$

ekenı kelip shıǵadı.

d) (1) teńlemede $y = \Delta x > 0$ dep qarasaq.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f(x) + f(\Delta x) - f(x) = f(\Delta x) = k \cdot \Delta x \text{ yamasa}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = k \cdot \Delta x \quad (4)$$

ekeni kelip shıǵadı.

Eger $k > 0$ bolsa, onda (4) teńlemenıń oń tárepi nolden úlken ($k \cdot \Delta x > 0$), demek $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ yaǵnıy $f(x)$ funkciya qatań ósiwshi funkciya.

Eger $k < 0$ bolsa, onda (4) teńlemenıń oń tárepi nólden kishi, demek $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ yaǵnıy $f(x)$ funkciya qatań kemeyiwshi funkciya.

e) (3) teńlemede $x \rightarrow +\infty$ limitke ótsek, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \begin{cases} +\infty, & k > 0 \\ -\infty, & k < 0 \end{cases}$

demek,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \begin{cases} -\infty, & \text{eger } k > 0 \\ +\infty, & \text{eger } k < 0 \end{cases}$$

teńlemenıń hár qıylı sheshimleri bir - birinen tek ǵana $f(x)$ tiń $x=1$ noqatındaǵı mánisleri menen parıq qıladı.

Demek úzliksizlik talap etilgende, (I) teńleme óziniń sheshimi retinde anıqlanǵan bir elementar funkciya ($f(x) = kx$) tı qabıl etedi, al qosımsha $f(1) = k$ jaǵdayı k – nıń anıq mánislerinde jalǵız sheshimge iye boladı.

Anıqlama (I) funkciyanal teńlemenıń sheshimi (I_1) hám (I_2) jaǵdaylarda sızıqlı funkciya dep ataladı hám $f(x) = kx$ dep belgilenedi.

§ 3.2. Kórsetkishli funkciyanı anıqlaw

(II) teńlemenı tómendegi jaǵdaylarda izzertleymiz:

Π_1) $(-\infty; +\infty)$ – intervalında $f(x)$ úzliksiz

Π_2) $f(x) \neq 0$

Π_3) $f(1) = a$ ($a > 0, a \neq 1$).

Teorema. (II) funkciyalıq teńlemenin sheshimi Π_1, Π_2 hám Π_3 jaǵdaylarda tómendegi qásiyetlerge iye:

a) $f(x) > 0$

b) $f(0) = 1$

v) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

g) hár qanday haqiyqiy x sanı ushın $f(x) = a^x$ ornılı.

d) Eger, $a > 1$, bolsa, onda $f(x) > 1$ bolǵanda $x > 0$, hám $f(x) < 1$ bolǵanda $x < 0$.

Eger, $0 < a < 1$, bolsa, onda $f(x) < 1$ bolǵanda $x > 0$, hám $f(x) > 1$ bolǵanda $x < 0$.

e) Funkciya $f(x)$, $a > 1$ jaǵdayda qatań ósiwshi, $0 < a < 1$ qatań kemeyiwshi.

j) Eger $a > 1$, onda $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, al $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Eger $0 < a < 1$, onda $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, al $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Dálilleniwi. a) Teoremanın shártı boyınsha sonday $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ tabıladı, sonday-aq $f(x_0) \neq 0$, onda hár qanday $x \in (-\infty; +\infty)$ ushın (II) teńleme tiykarında

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(x_0 - \frac{x}{2}\right) = f(x_0) \neq 0.$$

Bunnan $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, demek, $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$.

b) $f(x) = f(x+0) = f(x) - f(0)$ hám $f(x) > 0$, onda $f(0) = 1$.

v) (II) teńlemede $y = -x$ dep qarasaq, onda $f(0) = f(x) \cdot f(-x)$ yamasa

$f(x) \cdot f(-x) = -1$ boladı. Bunnan $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ kelip shıǵadı.

g) Matematikalıq indukciya arqalı qálegen n ushın

$$f(nx) = f^n(x) \quad (1)$$

teńleme orınlı ekenin dálillew qıyın emes.

$n=1$ jaǵdayda orınlı ekeni anıq.

$n=k$ jaǵdayda orınlı dep qarap,

$n=k+1$ jaǵdayda orınlı ekenin dálilleybiz (n – natural san).

$f((n+1) \cdot x)$ tı qaraymız. (II) teńlemeden

$$f((n+1) \cdot x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = f^n(x) \cdot f(x) = f^{n+1}(x)$$

dálillendi.

$x=1$ jaǵdayda (1) teńleme $f(x)$ funkciyanıń mánislerin, argumenttiń natural mánislerinde beredi: $f(n) = f^n(1)$ yamasa $f(n) = a^n$.

(1) teńlemede $x = \frac{m}{n}$ dep qarap $f(m) = f^n\left(\frac{m}{n}\right)$ di yamasa $f^{(n)}\left(\frac{m}{n}\right) = a^m$

tabamız, demek $f(x)$ funkciyanıń mánisin x argumentti oń mánisindegi jaǵdayda tabamız.

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)} \text{ bolsa, onda } f\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}.$$

Sunday qılıp, r – argumenttiń hár qanday racional mánisinde $f(r) = a^r$.

Endi x – qálegen haqıyqıy san bolsın, al (r_n) haqıyqıy sanlar izbe-izligi bolsın, x qa jıynaqlı bolǵan. Biraq dálillengen $f(r_n) = a^{r_n}$. Bul teńlemeden limitke ($n \rightarrow \infty$) ótetuǵın bolsaq, funkciyanıń úzliksiz ekenin esapqa alıp, tómendegi teńlemenı anıqlaymız.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} = a^{\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n} = a^x.$$

d) Eger $a > 0$, onda $f(x) = a^x > 1$.

Endi x – qálegen haqıyqıy san bolsın, al (r_n) ósiwshi racional sanlar izbe-izligi bolsın, x qa jıynaqlı bolǵan. Onda $f(r_n) = a^{r_n} > 1$ hám, $f(x)$ funkciyanıń úzliksizliginen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = f(x) > 1$ kelip shıǵadı.

Usıǵan tiyisli basqa tastiyoqlawlarda usı tárizde dálillenedi.

e) (II) teńlemede $y = \Delta x$ dep qarap,

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) f(\Delta x) \text{ yamasa} \\ f(x + \Delta x) - f(x) &= f(x)(f(\Delta x) - 1) \end{aligned} \quad (2)$$

alamız.

$a > 1, \Delta x > 0$ bolsın. Bunnan (2) teńlemenin óń tárepi teris emes hám usıǵan tiykarlana otırıp $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$. Yaǵniy, $f(x)$ funkciya $(-\infty, +\infty)$ intervalda qatań ósiwshi.

Eger $0 < a < 1$ bolsa $f(x)$ funkciya $(-\infty, +\infty)$ intervalda qatań kemeyiwshi ekenligi usı tárizde dálillenedi.

j) Eger, $x \rightarrow +\infty$ hám $x \rightarrow -\infty$ bolǵanda $f(x)$ funkciyanın limit mánislerin tabamız. $f(x)$ funkciyanın úzliksizligin hám onın mina intervalda $(-\infty, +\infty)$ qatań ósiwshi (kemeyiwshi) esapqa alıp, pútin sanlar kópliginde funkciyanın limitin qaraymız.

$f(n) = a^n$ bolsa, onda eger $a > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$, al eger $0 < a < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Bunnan kelip shıǵıp eger $a > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ al eger $0 < a < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Eger $a > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ al eger $0 < a < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ usı tárizde dálillenedi.

Bul jerde (II) teńlemeden alınǵan sheshimler bir- birinen tek funkciyanın $x = 1$ tochkasındaǵı mánisinde parıq qıladı, $f(1) = a$.

Bunnan kelip shıǵadı, eger úzliksizlik hám $f(x)$ nolden ózgeshelik shártleri talap qılınǵanda, (II) teńlemenin sheshimi belgili elementar funkciyalar klasın ańlatadı ($f(x) = a^x$), eger qosımsha shártler $f(1) = a$ bolsa konkret a jalǵız sheshim ekenligin bildiredi.

Anıqlama 2. (II) funkciyanal teńlemenin sheshimi $(II_1), (II_2)$ hám (II_3) jaǵdaylarda kórsetkishli funksiya dep ataladı hám $f(x) = a^x$ dep belgilenedi

§ 3.3. Logarifmlik funkciyanı anıqlaw

(III) teńlemenin tómendegi jaǵdaylarda qaraymız:

$III_1)$ $f(x)$ funksiya úzliksiz hám turaqlı funksiya $(0, +\infty)$ intervalında ózgeshe.

$$III_2) f(a) = 1 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Teorema. (III) teńleme III_1, III_2 jaǵdaylarında jalǵız sheshimge iye.

Dálilleniw. $\varphi(\xi) = f(a^\xi) = f(x)$ funkciyanı qaraymız, yaǵnıy x -ti ξ menen ózgertemiz $x = a^\xi$ formulası boyınsha

$$\varphi(\eta) = f(a^\eta) = f(y), \text{ yaǵnıy, } y = a^\eta$$

$$\text{Bunnan } f(x, y) = f(a^\xi \cdot a^\eta) = f(a^{\xi+\eta}) = \varphi(\xi + \eta)$$

(III) teńlemede tómendegi kóriniske keledi:

$$\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$$

Sonday-aq $\varphi(\xi)$ funksiya úzliksiz, (2 úzliksiz funkciyanın kompoziciyası retinde $\varphi(1) = \varphi(a) = 1$.

Sonın menen (I') teńleme ushın I_1 hám I_2 jaǵdaylar órinli.

Joqarıda kórsetilgenindey, (I') teńleme jalǵız sheshimge iye:

$$\varphi(\xi) = \kappa \xi \quad (\text{bul jaǵdayda } \kappa = 1)$$

Funkcional teńleme (I') jalǵız sheshimge iye bolsa, onda funkcional teńleme

(III) (III_1 hám III_2 jaǵdaylarda) jalǵız sheshimge iye.

Bul (III) teńlemenin jalǵız sheshimin logarifm funkciyasın anıqlamasın negizi desek boladı.

Anıqlama 3. $(0; +\infty)$ ta úzliksiz funkcional teńlemenin sheshimi logarifm funksiya dep ataladı hám

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

dep belgilenedi.

Bul logarifm funkciyanıń anıqlaması arqalı onıń eń áhmiyetli qásiyetlerin alıwǵa boladı.

Teorema. (III) funkcional teńlemenıń sheshimi tómendegi qásiyetlerge iye:

a) $f(1) = \alpha$

b) $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

v) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

g) $(x^\alpha) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha (\alpha \in R)$

h) Eger $x_0 \neq 1$, onda $f(x_0) \neq 0$

e) Eger $a > 1$, onda $f(x)$ funksiya $(0, +\infty)$ intervalında ósiwshi

eger $0 < a < 1$, onda $f(x)$ funksiya $(0, +\infty)$ intervalında kemeyiwshi.

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{eger } a > 1 \\ -\infty, & \text{eger } 0 < a < 1, \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{eger } a > 1 \\ +\infty, & \text{eger } 0 < a < 1. \end{cases}$

Dálilleniw: a) (III) teńlemege $x = y = 1$ qoyıp $f(1) = 2f(1)$ teńlemesin tawamız. Bul jerden $f(1) = 0$ ekeni kelip shıǵadı.

b) (III) teńlemege $x = \frac{1}{y}$ ti qoysaq $x \cdot y = \frac{1}{y} \cdot y = 1$ hám $f(1) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) = 0$ kelip shıǵadı. Bunnan $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$ ekeni kelip shıǵadı.

v) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

g) qálegen α ushın $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$ ekenin Koshi metodı menen dálilleybiz.

$a \in N$ ushın dálillewde matematikalıq induksiya metodın qollanamız $a=1$ de orınlı ekeni anıq $a=n$ jaǵdayda orınlı dep qarap $a=n+1$ ushında orınlı ekenin dálilleyemiz.

Haqıyqattan da

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \cdot x) = f(x^n) + f(x) = n \cdot f(x) + f(x) = (n+1) \cdot f(x) \text{ dálillendi.}$$

Endi $f(x) = f((x^n)^{\frac{1}{n}}) = n \cdot f(x^{\frac{1}{n}})$ teńlemesi ushın $f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} f(x)$ $a = \frac{1}{n}$ ushın orınlı,

$(n \in N)$.

Endi bul teńlemenıń $a \in Q_+$ ushında orınlı ekenin dálilleyemiz.

$a = \frac{m}{k}$ bolsın $m, n \in N$, onda $f\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = m f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{m}{n} f(x)$ endi

b) qasiyetin paydalanıp tómendegi teńlemege kelemiz

$$f\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}\right)^m = m f\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}\right) = -m f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = -\frac{m}{n} f(x) \text{ demek } f(x^a) = a f(x) \text{ teńlemesi}$$

$a \in Q_-$ ushında orınlı, sonlıqtan ol hár qanday $a = r \in Q$ ushın orınlı.

$a \in R$ al (r_n) –racional sanlar izbe-izligi, a –ǵa jiynaqlawshi.

Dálillengennen $f(x^{r_n}) = r_n f(x)$ al $f(x)$ hám x^{r_n} funksiya úzliksiz, aqırǵı teńlemede $n \rightarrow +\infty$ limitke ótsek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{r_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) f(x) \text{ yamasa } f(x^a) = a f(x)$$

z) $x_0 \neq 1$ bolǵanda $f(x_0) \neq 0$ ekenin dálilleyemiz $x_0 \neq 1$ bolǵanda $f(x_0) = 0$ bolsın.

Onda g) qásiyettegi dálilleniw boyınsha $f(x_0^a) = a \cdot f(x_0) = 0, \quad \forall a \in Q$ eger

$a = \log_{x_0} x$ onda $f\left(x_0^{\log_{x_0} x}\right) = 0$, bul ese múmkın emes.

e) $\varphi(\xi) = f(a^\xi)$ funksiya (I¹) teńlemenıń sheshimi bolǵanı ushın, ol ushın $k=1 > 0$,

onda $\varphi(\xi) (-\infty; +\infty)$ intervalında ósiwshi:

$a > 1$ jaǵdayda $a^\xi (-\infty; +\infty)$ intervalında ósedı.

Biraq onda $\varphi(\xi) = f(a^\xi)$ teńlemeden, $f(x)$ funkciyanıń $(0; +\infty)$ intervalında ósiwshi ekeni kelip shıǵadı.

Usınday qılıp $0 < a < 1$ jaǵdayda $f(x)$ funkciya $(0; +\infty)$ intervalında kemeyiwshi ekenligi dalillenedi.

j) $a > 1$ bolsın, $f(x) = f(a^\xi) = \varphi(\xi)$ bolsa, onda

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(a^\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi).$$

biraq aqırǵı limit $+\infty$ teń, bunnan kelip shıǵadı

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Endi $0 < a < 1$, bolsın. Taǵı $f(x) = f(a^\xi) = \varphi(\xi)$ teńlemesin qollanıp

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(a^\xi) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = -\infty.$$

$f(x)$ shegi $x \rightarrow +\infty$, usınday qılıp kórip shıǵıladı.

§ 3.4. Dárejeli funkciyanı anıqlaw

(IV) funkcional teńlemenı tómendegi jaǵdaylarda kórip shıǵamız:

$IV_1)$ $f(x)$ - úzliksiz funkciya, $(0; +\infty)$ intervalında hám konstanta dan ayırıqsha

$IV_2)$ $f(a) = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$)

Teorema. (IV) teńleme IV_1 hám IV_2 jaǵdaylarda jalǵız sheshimge iye.

Dalilleniwi: Gárezsiz ózgeriwshi x hám y lerdi jańa ózgeriwshi ξ hám η ler menen almastıramız, formula boyınsha $\xi = \log_a x$, $\eta = \log_a y$ hám φ funkciyasın kiritemiz:

$\varphi(\xi) = f(a^\xi)$, $\varphi(\eta) = f(a^\eta)$. Onda (IV) teńlemeden

$\varphi(\xi_1) = f(a^{\eta+\xi}) = f(a^\xi \cdot a^\eta) = f(a^\xi) \cdot f(a^\eta) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\eta)$ kelip shıǵadı, yaǵniy φ funkciyası tómendegi funkciyonal teńlemenı qanaatlandıradı:

$$\varphi(\eta + \xi) = \varphi(\xi_1) \cdot \varphi(\eta) \quad (II')$$

hám shártinde qanaatlandiradi: $\varphi(1) = f(a) = b$ ($b > 0, b \neq 1$).

Joqarıda kórsetilgende, bul teńlemenıń berilgen shártlerinde jalǵız úzliksiz sheshimi kórsetkishli $\varphi(\xi) = b^\xi$ funkciya bolıp tabıladı.

Kórgenimizdey (IV) teńlemenıń jalǵız úzliksiz sheshimi

$$f(x) = b^{\log_a x} = (a^{\log_a b})^{\log_a x} = (a^{\log_a x})^{\log_a b} = x^{\log_a b} = x^\mu$$

funkciya esaplanadı.

$$f(x) = x^\mu, \text{ bul jerde } \mu = \log_a b.$$

Anıqlama 4. $(0; +\infty)$ intervalında úzliksiz bolǵan (IV) funktsional teńlemenıń sheshimi IV_1 hám IV_2 jaǵdaylarında dárejeli funkciya dep ataladı hám $f(x) = x^M$ dep belgilenedi.

Teorema. (IV) funktsional teńlemenıń sheshimi IV_1 hám IV_2 jaǵdaylarında tómendegi qásiyetlerge iye: a) $f(1) = a$ v) $f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}$

$$b) f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

g) eger, $x_1 > 0$ onda $f(x_1) \neq 0$.

h) $f(x)$ funkciyanıń qálegen mánisi oń.

e) eger $a \neq 1$ onda $f(a) \neq 1$.

Dálilleniwi: a) (IV) teńleme $x = y = 1$ dep qarasaq $f(1) = [f(1)]^2$ kelip shıǵadı.

Bunnan $f(1) = 1$ yamasa $f(1) = 0$. Biraq $f(1) = 0$, bolsa onda

$\forall x \in (0; +\infty) - f(x) = 0$. Haqıyqatında da $f(1) = 0$ bolsın, onda

$f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$. Bunnan $f(1) \neq 0$ hám $f(1) = 1$ kelip shıǵadı.

$$b) \text{ eger } f(1) = f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot f(y) = 1 \text{ onda } f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}.$$

$$v) \text{ eger } f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) \cdot \frac{1}{f(y)}, \text{ onda } f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}.$$

h) $x_1 > 0$ bolsa $f(x_1) \neq 0$ ekenin dálilleyemiz.

Teris mánisi orınlı dep qarayıq, $x_1 > 0$ $f(x_1) = 0$ bolsın, biraq bunnan qálegen $x \in (0; +\infty)$ ushın $f(x) = f\left(\frac{x}{x_1} \cdot x_1\right) = f\left(\frac{x}{x_1}\right)f(x_1) = 0$ orınlı, al bul múmkin emes.

g) eger $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2$ onda funkciyaniń bazı mánisi eń

e) $a \neq 1$ bolsa $f(a) \neq 1$ ekenin dálilleyemiz.

Teris jaǵdayın orınlı dep qarasaq: $a \neq 1, \Rightarrow f(a) = 1$.

Biraq bul jaǵdayda $f(a^n) = (f(a))^n = 1$.

$f(a^n \cdot a^{-n}) = f(1) = 1$ teńlemesin biz $f(a^n) \cdot f(a^{-n}) = 1$ ekenin bilemiz, demek

$f(a^{-n}) = \frac{1}{f(a^n)} = 1$. Odan soń $f(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}) = f(a) = 1$ teńlemesinen $\left[f\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\right]^n = 1$

ekenı kelip shıǵadı, demek $f\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = 1$.

Ulıwma alǵanda: $f(a^r) = f\left(a^{\pm \frac{m}{n}}\right) = \left(f\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\right)^{\pm m} = 1 \quad (r \in Q)$.

Biraq onda hár qanday haqıyqıy $x > 0$ ushın sonday (r_n) racional sanlar izbe-izligi tabıladı, ol $\log_a^x$ ke jıyınaladı sonlıqtan $f(x) = f(a^{\log_a^x}) = 1$, al, bul múmkin emes. Sonıń ushın $f(a) = b \neq 1$.

§ 3.5. Trigonometrik funkciyalardı anıqlaw $f(x) = \cos x$

(V) funkcional teńlemenı tómendegi jaǵdaylarda qaraymız:

V_1) $f(x)$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ intervalında úzliksiz.

V_2) Sonday oń san C tabıladı, bunnan $f\left(\frac{C}{2}\right) = 0$ hám $f(x) \neq 0$, eger $0 < x < \frac{C}{2}$

V_3) $f(0) > 0$

Teorema 1. (V) funksional teńlemenin sheshimi V_1, V_2, V_3 jaǵdaylarda tómendegi qásiyetlerge iye:

a) $f(0)=1$,

b) $f(x)=f(-x)$,

v) $f(C)=f(0)=-1$,

c) $f(x+C)=-f(x)$,

d) $f(x+2C)=f(x)$,

e) $f(2C)=f(x)$,

j) $|f(x)| \leq 1$,

Dálilleniwi. a) $x=y=0$ jaǵdayda (V) teńleme tómendegi kóriniske iye boladı $f(0)=f^2(0)$, sebebi $f(0)>0$, onda $f(0)=1$.

b) $x=0$ jaǵdayda (V) teńleme tómendegi kóriniske iye boladı:

$f(y)+f(-y)=2f(0) \cdot f(y)$. $f(0)=1$ bolǵanlıqtan aqırǵı teńlemeden $f(-y)=f(y)$ ti tabamız.

v) $x=y=\frac{C}{2}$ bolsa (V) teńleme tómendegi kóriniske iye boladı:

$$f(C)+f(0)=2f^2\left(\frac{C}{2}\right). \text{ Biraq shárt boyınsha } f\left(\frac{C}{2}\right)=0. \text{ Demek}$$

$$f(C)=-f(0)=-1.$$

g) (V) teńlemede x ti $x+\frac{C}{2}$ ge y ti $\frac{C}{2}$ ge almastırsaq,

$$f\left(x+C\right)+f\left(x\right)=2f\left(x+\frac{C}{2}\right) \cdot f\left(\frac{C}{2}\right) \text{ kelip shıǵadı yamasa}$$

$$f\left(x+C\right)+f\left(x\right)=0, \text{ demek } f\left(x+C\right)=-f\left(x\right)$$

d) (V) teńlemede x ti $x + \frac{3}{2}C < 0$ ğa y ti $\frac{C}{2}$ ge almastırsaq

$$f(x + 2C) + f(x + C) = 2f\left(x + \frac{3}{2}C\right) \cdot f\left(\frac{C}{2}\right) \text{ yamasa } f(x + 2C) + f(x + C) = 0$$

kelip shıǵadı. Bunnan $f(x + 2C) = -f(x + C) = f(x)$ orınlı.

e) (V) teńlemege $x = y = C$ dep qarasaq onda $f(2C) + f(0) = 2f^2(0)$. Biraq dálilleniwmizden $f(0) = 1$, ol $f(C) = -1$ ekenin bilemiz, hám aqırǵı teńleme tómendegi kóriniske iye boladı: $f(2C) + 1 = 2$ yamasa $f(2C) = 1$.

j) $x = 0$ de $|f(a)| > 1$ orınlı dep qarayıq. $2f\left(\frac{C}{2} + a\right)f\left(\frac{C}{2} - a\right)$ bul jaǵdayda tómendegi ańlatpanı alayıq (V) teńlemenı qollay otırıp

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{C}{2} + a\right)f\left(\frac{C}{2} - a\right) = \\ & = f\left[\left(\frac{C}{2} + a\right) + \left(\frac{C}{2} - a\right)\right] + f\left[\left(\frac{C}{2} + a\right) - \left(\frac{C}{2} - a\right)\right] = f(C) + f(2a) = -1 + f(2a) = \\ & = -1 + [2f^2(a) - 1] = 2[f^2(a) - 1] > 0 \\ & \text{teńsizlikti payda etemiz.} \end{aligned}$$

Sannan $f\left(\frac{C}{2} + a\right) \cdot f\left(\frac{C}{2} - a\right) > 0$ teńsizligi orınlı bolıwı kerek.

Ekinshi jaǵdaydan g) qásiyetin qollansaq

$$f\left(\frac{C}{2} - a\right) = f\left[C - \left(\frac{C}{2} + a\right)\right] = -f\left(\frac{C}{2} + a\right) \text{ ni tabamız, al bul joqaridagi}$$

teńsizlikke qarama-qarsı keledi.

Teorema 2. (V) funkcional teńlemenıń sheshimi V_1, V_2, V_3 jaǵdaylarda jalǵız funkciya qanaatlandıradı.

Dálilleniw. Teris jaǵdayın orınlı dep qarasaq. Sonday eki túrli $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyaları bar dep oylayıq, olar (V) teńlemenı V_1, V_2, V_3 jaǵdaylarda qanaatlandırınsın.

Bul funkciyalar $x > 0, \frac{C}{2}, C, 2C$ larda birdey mániske iye ekeni anıq.

$x = a \neq 0$ de $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalardıń mánisleri bir birine say keliwi kerek ekenin dálilleymiz.

$f_1(a) = f_2(a)$ dep qarayıq.

Onda $f_1(2a) = 2f_1^2(a) - 1 = 2f_2^2(a) - 1 = f_2(2a)$. Oylayıq $f_1(k \cdot a) = f_2(k \cdot a)$ teńleme qandayda bir $k \geq 2$ ushın orınlı dep alsaq:

$f_1[(k+1) \cdot a] + f_1[(k-1) \cdot a] = 2f_1(k \cdot a) \cdot f_1(a) = 2f_2(k \cdot a) \cdot f_2(a) = f_2[(k+1) \cdot a] + f_2[(k-2) \cdot a]$
bunnan $f_1[(k+1) \cdot a] + f_1[(k-1) \cdot a]$

Matematikalıq induksiya metodı menen hár qanday natural n ushın $f_1(na) = f_2(na)$ teńlemesi orınlı.

Ekinshi tárepten, (V) teńlemeden $x = y = \frac{a}{2}$ bolǵanda

$$f_1(a) + f_1(0) = 2f_1^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

hám

$$f_2(a) + f_2(0) = 2f_2^2\left(\frac{a}{2}\right) \text{ kelip shıǵadı.}$$

Bunnan $0 \leq a \leq C$ jaǵdayda $f_1\left(\frac{a}{2}\right) = f_2\left(\frac{a}{2}\right)$.

Aqırǵı teńlemenı qollap $f_1\left(\frac{a}{2^2}\right) = f_2\left(\frac{a}{2^2}\right)$ tabamız.

Matematikalıq induksiya metodı menen qálegen m natural san ushın $f_1\left(\frac{a}{2^m}\right) = f_2\left(\frac{a}{2^m}\right)$ ekenin dálillew qıyın emes.

Eki teńlemenı paydalanıp $f_1\left(\frac{na}{2^m}\right) = f_2\left(\frac{na}{2^m}\right)$ di anıqlaymız.

Al endi x – qandayda bir san bolsın al a – qandayda nólден ayrıqsha san.

Teńlemenıń sheshimi. $f_1(x) = f_2(x)$

$\frac{x}{a}$ sanın sheksiz onlıq bólshekke jayamız hám $2^{\frac{n_1}{m}}, 2^{\frac{n_2}{m}}, \dots, 2^{\frac{n_k}{m}}$ izbe-izligin túsineimiz.

Bul izbe-izlik $\frac{x}{a}$ ğa jiynaqlanadi.

Biraq teńlemeden: $f_1\left(2^{\frac{n_k}{m}} \cdot a\right) = f_2\left(2^{\frac{n_k}{m}} \cdot a\right)$ den $k \rightarrow +\infty$ limitke ótsek, $f_1(x)$ hám

$f_2(x)$ funkciyalarınń úzliksizligin inabatqa alsaq $f_1(x) = f_2(x)$ teńlemesi kelip shıǵadı, hár qanday haqıyqıy x ushın.

Dálilleniwmizdiń mánisinen tómendegi anıqlamalardı $f(x) = \cos x$ funkciyası ushın bere alamız:

Anıqlama 5. (V) funkcional teńlemenıń V_1, V_2, V_3 hám $C = \pi$ jaǵdaylardaǵı sheshimi trigonometrik kórınisi dep ataladı hám $f(x) = \cos x$ dep belgilenedi.

Basqa trigonometriyalıq funkciyalardıń anıqlamaların tómendegishe beriwge boladı.

Anıqlama 6. $\varphi(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ funkciya trigometrik sinus dep ataladı hám $f(x) = \sin x$ dep belgilenedi.

Anıqlama 7. $F(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ funkciya trigonometrik tangens dep ataladı hám $F(x) = \operatorname{tg} x$ dep belgilenedi.

Anıqlama 8. $F(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ funkciya trigonometriya katangensi dep ataladı hám $F(x) = \operatorname{ctg} x$ dep belgilenedi.

$\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ funkciyalardıń barlıq qásiyetlerin $\cos x$ funkciyasınıń qásiyetlerinen keltirip shıǵarıwǵa boladı.

JUWMAQLAW

Biz joqarida funkciyalıq teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw usılların qarap óttik. Funkciyalıq teńlemeler tiykarınan eki klasqa bolinedi: Erikli ózgeriwshi qatnasatuǵın hám qatnaspaytuǵın funkciyalıq teńlemeler. Bul teńlemelerdi sheshiw jollari bir birinen adewir pariqladı, sonlıqtan bul teńlemelerdi sheshiw jollari dissertaciyada dara- dara qaraldı. Funkciyalıq teńlemelerdi hár qiyli funkciyalar klaslarında sheshiw jollari da bir birinen parqladı, Sonlıqtan bul teńlemelerdi hár qiyli funkciyalar klaslarında sheshiw jollari dissertaciyada dara-dara qaraldı.

Funkciyalıq teńlemenıń sheshimi bir yamasa bir neshe erikli turaqlılarga ğarezli bolıwı mumkin. Bul turaqlılardı tabıw ushin, ádette, qosımsha shártlar qoyıladı. Dissertaciyada berilgen teńlemenıń berilgen qosımsha shartlerdi qanaatlandıriwshi dara sheshimlerin tabıwga ayırıqsha kewil bolinedi.

Funkciyalıq teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw jolların uyretiw orta bilimlendiriw mektepleri akademiyalıq licey hám kollejlerde matematika oqıtıw metodikasınıń baslı máseleleriniń biri sebebi matematikanıń, ilim hám texnikanıń hár qiyli tarawlarınıń ámeliy máselelerin sheshkende funkciyalıq teńleme hám teńsizliklerden paydalanıw jaqsı nátiyjeler beredi.

Magistrlik dissertacısın tayarlaw barısında Respublikamızda matematika hám onıń geypara qollanıwlarına arnalıp shólkemlestirilgen ilimiy konferenciyalarda óz bayanatlarım menen qatnastım bul bayanatlar tezislari konferenciya materialları toplanlarında basılıp shıqtı [13],[14],[15][16]. Bunnan tisqari ilimiy maqalam Ilim hám jámiyet jurnalında basılıp shıqtı [17].

Keyingi jıllarda Respublikamızdıń joqarı oqıw orınlarına talabalardı qabıllaw boyınsha test sınaqlarında matematika pání boyınsha test sınaqları variantlarında funkciyalıq teńleme hám teńsizlikler júdá kóp ushıraspaqta. Orta bilimlendiriw mektepleriniń hám akademiyalıq licey, kollej oqıwshılarınıń

funkciyalıq teńleme hám teńsizliklerdi jaqsı ózlestirip alıwı olardıń keleshekte jaqsı qániyge bolıp jetilisiwinde jaqınnan járdem beredi dep oylaymız.

PAYDALANÍLGAN ÁDEBIYATLAR

1. Abduhamidov A., Nasimov N. A. Algebra va matematik analiz asoslari. I qism. - T.: «Istiqbol», 2000.
2. Abduhamidov A., Nasimov N. A. Algebra va matematik analiz asoslari. II qism. - T.: «Istiqbol», 2000.
3. Besov O.V. Lektsii po matematicheskomu analizu. - M.: Fizmatlit. 2014.
4. Vinogradova L. V. Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole: ucheb. posobie / L.V. Vinogradova – Rostov-na-Donu: Feniks, 2005.
5. Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obshaya metodika/ Oganessian V. A., Kolyagin Yu. M., Lukankin G. L., Sanninskiy V. Ya. - M.: Prosveshchenie, 2001.
6. Мирзаахмедов М. А., Исмаилов Ш. Н., Аманов А. К. Математика. Алгебра и начала анализа. Геометрия. Ч. I, II.- Ташкент: ООО «EXTREMUM PRESS», 2017.
7. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир, 1965
8. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков Д. И. Лекции по математическому анализу.- М.: Высшая школа, 1999.
9. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «Ózbekiston». 1 t: 1994.
10. Adams, Robert A. (Robert Alexander), Calculus: a complete course. Textbooks. Christopher Essex. - 7th ed. Copyright @ 2010, 2006, 2003 Pearson Education Canada, a division of Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.-1077 p.
11. Il'in V.A. Matematicheskiy analiz. /Klassicheskiy universitetskiy uchebnik. Chast` 1. Il'in V.A, Sadovnichiy V.A., Sendov Bl. X. – M.: TK Velbi. 2004. – 400s.
12. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл., Х. Математический анализ, 1- том. - М.` Наука, 1979.
13. Saparov.Z.B, Saparova.T.Z, Qalbaev.S.N Tema: Teńlemelerdi hám teńsizliklerdi sheshkende funkciyalardıń ayırım qásiyetlerinen paydalanıw

(“Хазирги заман анык хам техникалык илимлеринин машкалалары хам олардын шешимлери” Respublika ilimiy-ámeliy konferenciya I bólim 10-bet: Nókis-2018)

14. Saparov.Z, Qalbaev.S Tema: Irracional tensizliklerdi sheshkende funkciyalardıń qásiyetlerinen paydalaniw (“Инновационные технологии в науке и образовании” Respublika ilimiy-ámeliy konferenciya: Nókis-2018).

15. Saparov.Z, Qalbaev.S Tema: Funkciyalıq teńlemelerdi sheshiwdiń órnına qoyıw usili (“Илим ҳәм тәлим-тәрбияның әҳмийетли мәселелери” Respublika ilmiy-nazariy anjuman: Nókis-2019).

16. Сапаров.З.Б, Калбаев.С.Н Тема: Функциялык тенлемелерди шешиу методикасы (“Математика ва информатикани укитишнинг долзарб мәселелери” Respublika ilmiy-nazariy anjuman: Nókis-2019).

17. Saparov.Z, Qalbaev.S Tema: Funkciyalıq teńlemelerdi sheshiwdiń geypara usılları (“Ilim hám jámiyet” jurnalı №4.2019).