

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ  
УЗБЕКИСТАН**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ  
ЭЛЕКТРОНИКИ**

**А.К. АМОНОВ**

# **НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЕ И ВОЛНЫ**

*Курс лекции*

Самарканл 2020

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**  
**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**А.К. Амонов**

**ЛЕКЦИИ ПО КУРСУ  
НЕЛИНЕЙНЫЕ  
КОЛЕБАНИЕ И ВОЛНЫ**

*Курс лекции*

Рекомендовано Учёным советом физического факультета для магистрантов,  
специализирующихся в области физики, теоретическая физика

САМАРКАНД -2020

УДК 537.86  
ББК В 236.352+236.355  
Н-47

А.К.АМОНОВ Нелинейные колебание и волны: Курс лекции. – Самарканд: Самаркандский госуниверситет, 2020. 233с.

В курс лекции пособия систематически изложен материал по основам теории колебаний. Введены основные понятия и положения современной нелинейной динамики, изложены основы теории устойчивости, теории бифуркаций динамических систем на прямой и плоскости, основы асимптотических методов и теории релаксационных колебаний. Значительное место уделено изложению метода точечных отображений и методике его применения. Курс содержит многочисленные примеры исследования динамики моделей реальных систем. Каждая лекция дополнена контрольными вопросами и заданиями для самостоятельной работы студентов.

Курс лекции предназначено для студентов старших курсов и магистрантов, специализирующихся в области радиофизики, теоретической физики.

ББК В 236.352+236.355

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| <b>Предисловие</b>   | 7  |
| <b>Лекция 1. Введение в теорию колебаний</b>   | 8  |
| 1.1. Общие закономерности теории колебаний   | 8  |
| 1.2. Динамические системы  | 9  |
| 1.2.2. Типы траекторий   | 10 |
| 1.2.2. Динамические системы с непрерывным временем   | 11 |
| 1.2.3. Динамические системы с дискретным временем  | 12 |
| 1.2.4. Динамические системы с диссипацией  | 13 |
| 1.3. Аттракторы  | 14 |
| 1.4. Структурная устойчивость динамических систем  | 15 |
| 1.5. Контрольные вопросы и задания   | 17 |
| <b>Лекция 2. Динамические системы на прямой</b>  | 18 |
| 2.1. Качественный подход   | 18 |
| 2.2. Грубые состояния равновесия   | 20 |
| 2.3. Бифуркации состояний равновесия   | 21 |
| 2.3.1. Двукратное равновесие   | 21 |
| 2.3.2. Понятие о нормальной форме  | 22 |
| 2.3.3. Транскритическая бифуркация   | 23 |
| 2.3.4. Трехкратное равновесие  | 24 |
| 2.4. Системы на окружности   | 25 |
| 2.5. Контрольные вопросы и задания   | 26 |
| <b>Лекция 3. Устойчивость состояний равновесия. Классификация состояний равновесия двумерных линейных систем</b> | 27 |
| 3.1. Определение устойчивости состояний равновесия   | 28 |
| 3.2. Классификация состояний равновесия линейных систем на плоскости   | 30 |
| 3.2.1. Действительные корни  | 31 |
| 3.2.1.a Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ одного знака   | 33 |
| 3.2.1.б Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ разных знака   | 34 |
| 3.2.1.в Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ кратные - $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$                              | 35 |
| 3.2.2. Комплексные корни   | 36 |
| 3.2.3. Колебания двумерных линейных систем   | 37 |
| 3.2.4. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма  | 38 |
| 3.3. Контрольные вопросы и задания   | 40 |
| <b>Лекция 4. Анализ устойчивости состояний равновесия многомерных нелинейных систем</b>                          | 41 |
| 4.1. Метод линеаризации  | 41 |
| 4.2. Критерий Рауса-Гурвица  | 43 |
| 4.3. Второй метод Ляпунова   | 44 |

|  |  |     |
|--|--|-----|
| 4.4.   | Грубые состояния равновесия трехмерных систем  | 48  |
| 4.4.1.   | Действительные корни   | 48  |
| 4.4.1.а  | Корни $\lambda_i$ одного знака   | 49  |
| 4.4.1.б  | Корни $\lambda_i$ разного знака  | 50  |
| 4.4.2.   | Комплексные корни  | 51  |
| 4.4.2.а.   | Вещественные части корней $\lambda_i$ одного знака                                       | 52  |
| 4.4.2.б.   | Вещественные части корней $\lambda_i$ разных знаков                                      | 53  |
| 4.4.3.   | Состояние равновесия трехмерных нелинейных систем  | 53  |
| 4.4.4.   | Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма   | 55  |
| 4.5.   | Контрольные вопросы и задания  | 59  |
| <b>Лекция 5. Линейный и нелинейный осцилляторы</b>                 |  | 61  |
| 5.1.   | Динамика линейного осциллятора   | 61  |
| 5.1.1.   | Гармонический осциллятор   | 62  |
| 5.1.2.   | Линейный осциллятор при наличии потерь   | 65  |
| 5.1.3.   | Линейный осциллятор с «отрицательным» затуханием   | 69  |
| 5.2.   | Динамика нелинейного осциллятора   | 71  |
| 5.2.1.   | Консервативный нелинейный осциллятор   | 71  |
| 5.2.2.   | Нелинейный осциллятор с диссипацией  | 79  |
| 5.3.   | Контрольные вопросы и задания  | 80  |
| <b>Лекция 6. Основные свойства точечных отображений</b>            |  | 81  |
| 6.1.   | Точечные отображения – модели дискретных систем  | 81  |
| 6.2.   | Отображение Пуанкаре   | 82  |
| 6.3.   | Неподвижные точки  | 86  |
| 6.4.   | Одномерные линейные отображения  | 87  |
| 6.5.   | Двумерные линейные отображения   | 90  |
| 6.5.1.   | Действительные мультипликаторы   | 91  |
| 6.5.1.а.   | Неподвижная точка устойчивый узел  | 91  |
| 6.5.1.б.   | Неподвижная точка неустойчивый узел  | 94  |
| 6.5.1.в.   | Неподвижная точка седло  | 94  |
| 6.5.2.   | Комплексные мультипликаторы  | 94  |
| 6.6.   | Одномерные нелинейные отображения: некоторые понятия и примеры                           | 96  |
| 6.7.   | Контрольные вопросы и задания  | 100 |
| <b>Лекция 7. Предельные циклы динамических систем на плоскости</b> |  | 101 |
| 7.1.   | Изолированные и неизолированные периодические траектории. Определение предельного цикла. | 101 |
| 7.2.   | Орбитальная устойчивость. Устойчивые и неустойчивые предельные циклы                     | 103 |
| 7.2.1.   | Определение орбитальной устойчивости   | 103 |
| 7.2.2.   | Характеристики предельных циклов на фазовой плоскости                                    | 104 |
| 7.3.   | Вращательные и колебательные предельные циклы  | 107 |

|  |            |
|--|------------|
| 7.4. Критерий Бендиксона-Дюлака  | 107        |
| 7.5. Контрольные вопросы и задания   | 108        |
| <b>Лекция 8. Основные бифуркации состояний равновесия на плоскости</b>                                   | <b>109</b> |
| 8.1. Бифуркационные условия  | 109        |
| 8.2. Седло-узловая бифуркация  | 110        |
| 8.3. Бифуркация Андронова-Хопфа  | 113        |
| 8.3.1. Первая ляпуновская величина отрицательна  | 114        |
| 8.3.2. Первая ляпуновская величина положительна  | 116        |
| 8.3.3. «Мягкое» и «жесткое» рождение периодических колебаний   | 116        |
| 8.4. Затягивание потери устойчивости при динамической бифуркации Андронова-Хопфа                         | 117        |
| 8.5. Контрольные вопросы и задания   | 120        |
| <b>Лекция 9. Бифуркация двукратного предельного цикла. Бифуркация петли сепаратрис седла</b>             | <b>122</b> |
| 9.1. Двукратный предельный цикл  | 122        |
| 9.2. Петля сепаратрис седла  | 126        |
| 9.2.1. Точечное отображение в окрестности петли сепаратрис седла   | 127        |
| 9.2.2. Колебательные и вращательные петли сепаратрис   | 132        |
| 9.3. Контрольные вопросы и задания   | 132        |
| <b>Лекция 10. Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла. Динамика быстро-медленных систем на плоскости</b> | <b>133</b> |
| 10.1. Петля сепаратрисы седло-узла   | 133        |
| 10.2. Заключительные замечания о бифуркациях систем на плоскости   | 137        |
| 10.3. Динамика быстро-медленной системы  | 138        |
| 10.3.1. Медленные и быстрые движения   | 139        |
| 10.3.2. Системы с однократной релаксацией  | 140        |
| 10.3.3. Релаксационные колебания   | 142        |
| 10.4. Контрольные вопросы и задания  | 145        |
| <b>Лекция 11. Динамика сверхпроводящего Джозефсоновского контакта</b>                                    | <b>147</b> |
| 11.1. Стационарные и нестационарные эффекты  | 147        |
| 11.2. Эквивалентная схема контакта   | 149        |
| 11.3. Динамика модели  | 151        |
| 11.3.1. Консервативный случай  | 151        |
| 11.3.2. Диссипативный случай   | 152        |
| 11.3.2.а. Поглощающая область  | 152        |
| 11.3.2.б. Состояние равновесия и их локальные свойства   | 153        |
| 11.3.2.в. Функция Ляпунова   | 155        |
| 11.3.2.г. Кривые без контакта и управляющие «русла» для сепаратрис                                       | 159        |
| 11.3.2.д. Гомоклинические орбиты и их бифуркации   | 163        |
| 11.3.2.е. Предельные циклы и бифуркационная диаграмма  | 167        |
| 11.3.3. Вольт-амперная характеристика контакта   | 170        |

|  |     |
|--|-----|
| 11.4. Контрольные вопросы и задания  | 173 |
| <b>Лекция 12. Метод Ван-дер-Поля. Автоколебания и автоколебательные системы</b>                          | 174 |
| 12.1. Понятие об асимптотических методах   | 174 |
| 12.1.1. Приведение системы к стандартному виду   | 175 |
| 12.1.2. Усредненная (укороченная) схема  | 176 |
| 12.1.3. Усреднение и структурно устойчивые фазовые портреты  | 176 |
| 12.2. Автоколебания и автоколебательные системы  | 177 |
| 12.2.1. Динамика простейшей модели маятниковых часов   | 179 |
| 12.2.2. Автоколебания в системе с активным элементом   | 182 |
| 12.3. Контрольные вопросы и задания  | 191 |
| <b>Лекция 13. Вынужденные колебания линейного осциллятора</b>  | 192 |
| 13.1. Динамика системы и глобальное отображение Пуанкаре   | 193 |
| 13.2. Резонансные кривые   | 199 |
| 13.3. Контрольные вопросы и задания  | 202 |
| <b>Лекция 14. Вынужденные колебания в слабонелинейных системах с одной степенью свободы</b>              | 203 |
| 14.1. Приведение системы к стандартной форме   | 203 |
| 14.2. Резонанс в нелинейном осцилляторе  | 205 |
| 14.2.1. Динамика системы укороченных уравнений   | 206 |
| 14.2.2. Вынужденные колебания и резонансные кривые   | 210 |
| 14.3. Режимы вынужденных колебаний   | 214 |
| 14.4. Контрольные вопросы и задания  | 215 |
| <b>Лекция 15. Вынужденная синхронизация автоколебательной системы периодическим внешним воздействием</b> | 216 |
| 15.1. Динамика укороченной системы   | 218 |
| 15.1.1. Динамика при отсутствии расстройки   | 222 |
| 15.1.2. Динамика при наличии расстройки  | 224 |
| 15.2. Отображение Пуанкаре и синхронный режим  | 227 |
| 15.3. Амплитудно-частотная характеристика автоколебательной системы                                      | 228 |
| 15.4. Контрольные вопросы и задания  | 230 |
| <b>Список литературы</b>   | 231 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель курса заключалась не только в изложении базовых идей и методов теории колебаний, как науки об эволюционных процессах, но и в том, чтобы научить слушателей методикам и приемам исследования конкретных (практических) задач.

Ключевую роль в формировании лекционного курса играют качественные методы теории динамических систем и методы теории бифуркаций. Даже при решении простых задач, когда, в принципе, можно было бы обойтись без этих методов, они используются. Такой путь изложения материала позволяет, во-первых, раскрыть сущность и базовые идеи методов, а во-вторых, – выработать у читателя навыки их применения, что представляется важным при переходе к исследованию более сложных задач.

Курс лекций оформлен в соответствии с программой курса “Нелинейные колебание и волны” физического факультета СамГУ. Однако, материал почти всех лекций изложенный в книге, раскрыт более широко, чем обычно он представляется при чтении лекций. Это позволит читателям получить дополнительную информацию по теме лекции. В конце каждой лекции сформулированы контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы.

Курс лекции может быть полезным также студентам и аспирантам, специализирующимся в области нелинейной динамики, информационных систем, теории управления, биофизики и др.

Автор



# ЛЕКЦИЯ 1

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ

*Предмет и содержание теории колебаний. Динамические системы с непрерывным и дискретным временем. Фазовое пространство. Динамические системы с диссипацией. Аттракторы. Грубость (структурная устойчивость) динамических систем.*

### 1.1. Общие закономерности теории колебаний

Колебательные процессы и системы настолько широко распространены в природе, технике и обществе, что любой из нас с ними неоднократно сталкивается в повседневной жизни и, по-видимому, без труда сформулирует основные их свойства. Действительно, когда мы слышим о колебаниях температуры, курса валют, электрического напряжения, маятника, уровня воды и так далее, нам понятно, что речь идет о процессах во времени или в пространстве, обладающих той или иной степенью повторяемости и возвращаемости к начальному или близкому состояниям. Причем, эти базовые свойства процессов не зависят от природы систем и поэтому могут быть описаны и изучены с единой точки зрения в рамках общего междисциплинарного подхода. Именно такой подход и развивает теория колебаний, предметом которой являются колебательные явления и процессы в системах различной природы. Колебательные свойства реальных систем теория колебаний получает из анализа соответствующих моделей. В результате такого анализа устанавливается связь между параметрами модели и её колебательными свойствами.

Теория колебаний является как прикладной, так и фундаментальной наукой. Прикладной характер теории колебаний определяется её многочисленными приложениями в физике, механике, автоматическом управлении, радиотехнике и электронике, приборостроении и т.д. В этих областях науки методами теории колебаний проведено исследование большого числа различных систем и явлений. Более того, на базе теории колебаний возникли новые технические направления – вибротехника, вибродиагностика, биомеханика и др. Фундаментальный характер теории колебаний заключен в самих моделях, которые она изучает. Это так называемые динамические системы, с помощью которых можно описать любую детерминированную эволюцию во времени или во времени и пространстве. Именно изучение динамических систем позволило теории колебаний ввести понятия и положения, развить методы и получить результаты, оказывающие большое влияние на другие естественные науки. Здесь достаточно отметить

линеаризованную теорию устойчивости, понятия автоколебаний и резонанса, теорию бифуркаций, хаотические колебания и др.

## 1.2. Динамические системы

Рассмотрим систему, состояние которой определяется вектором  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ . Предположим, что эволюция системы определяется одно-параметрическим семейством операторов  $G^t, t \in \mathbb{R}$  (или  $t \in \mathbb{R}_+$ ) или  $t \in \mathbb{Z}$  (или  $t \in \mathbb{Z}_+$ ), таких, что состояние системы в момент  $t$

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = G^t \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x}_0$  – начальное состояние (начальная точка). Предположим также, что эволюционные операторы удовлетворяют двум следующим свойствам, отражающим детерминистический характер описываемых процессов.

Первое свойство:  $G^0$  – тождественный оператор, т.е.

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \text{ для любых } \mathbf{x}_0. \quad (1.2)$$

Это свойство означает, что состояние системы не может изменяться самопроизвольно.

Второе свойство эволюционных операторов имеет вид:

$$G^{t_1+t_2} = G^{t_1} \circ G^{t_2} = G^{t_2} \circ G^{t_1}, \quad (1.3)$$

т.е.

$$\mathbf{x}(t_1+t_2, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_0)) \quad (1.4)$$

Согласно (1.3) система приходит в одно и то же финальное состояние независимо от того, достигается ли оно за один временной интервал  $t_1+t_2$ , или за несколько последовательных интервалов  $t_1$  и  $t_2$ , суммарно равных  $t_1+t_2$ .

Совокупность всех начальных точек  $X$  или всех возможных состояний системы (в рассматриваемом случае  $X = \mathbb{R}^n$ ) называется фазовым пространством, а пара  $(X, \{G^t\})$ , где семейство эволюционных операторов удовлетворяют условиям (1.2), (1.3), – динамической системой (ДС).

ДС делятся на два важных класса – с непрерывным временем, если  $t \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{R}_+$ , и с дискретным временем, если  $t \in \mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Z}_+$ .

Эволюция системы соответствует движению изображающей точки в фазовом пространстве вдоль траектории  $\Gamma = \bigcup_t G^t \mathbf{x}_0$ . Семейство

$$\varphi^+ = \bigcup_{t \geq 0} G^t \mathbf{x}_0 \quad \varphi^- = \bigcup_{t < 0} G^t \mathbf{x}_0$$
 называется положительной (отрицательной)

полутраекторией, проходящей через начальную точку  $\mathbf{x}_0$ . Если семейство  $\{G^t\}$  является непрерывным по  $t$  (для ДС с непрерывным временем), то траектории

(полутраектории) представляют собой непрерывные кривые в  $X$ . Для ДС с дискретным временем траектории являются дискретными подмножествами в фазовом пространстве.

Введем необходимое в дальнейшем понятие инвариантности множества. Множество  $A \subset X$  называется положительно (отрицательно) инвариантным, если оно состоит из положительных (отрицательных) полутраекторий, т.е.  $A$  – положительно (отрицательно) инвариантно, если  $G^t A \subset A, t > 0 (t < 0)$ . Множество  $A$  называется инвариантным, если оно одновременно инвариантно как положительно, так и отрицательно.

### 1.2.1. Типы траекторий

Дадим определение основных типов траекторий ДС.

- Точка  $x_0$  называется неподвижной точкой ДС, если  $G^t x_0 = x_0$  для всех  $t$  (для систем с непрерывным временем такие точки чаще называют состояниями или положениями равновесия).
- Точка  $x_0$  называется периодической, если существует такое  $T > 0$ , что  $G^T x_0 = x_0$  и  $G^t x_0 \neq x_0$  для  $0 < t < T$ , а соответствующая траектория  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} G^t x_0$  динамической системы, проходящая через эту точку – периодической. Периодическая траектория является замкнутой кривой в фазовом пространстве ДС с непрерывным временем и совокупностью  $T$ -периодических точек для ДС с дискретным временем.
- Точка  $x_0$  называется неблуждающей, если для любой окрестности открытого множества  $U \ni x_0$  этой точки и любого  $t_0 > 0$  найдется сколь угодно большое  $t > t_0$ , такое что  $G^t U \cap U \neq \emptyset$ . Траектория, проходящая через такую точку, называется неблуждающей.

Между траекториями ДС и движениями реальных систем существует соответствие. Неподвижным точкам ДС отвечают стационарные состояния реальных систем, периодическим траекториям – периодические движения, а неблуждающим траекториям – движения с некоторым повторением их состояний во времени.

Заметим, что вышеприведенные траектории могут существовать и в ДС, у которых фазовое пространство не обязательно  $\mathbb{R}^n$ . Например, фазовым пространством динамической системы, описывающей колебания математического маятника, является цилиндр  $X = S^1 \cdot \mathbb{R}$ , поскольку состояние маятника в любой момент времени однозначно описывается значением угловой переменной  $\Pi(t)$ , определенной с точностью до  $2\pi$  ( $\Pi \in S^1$ ) и значением её скорости  $\dot{\Pi} \in \mathbb{R}$ .

### 1.2.2. ДС с непрерывным временем

Для многих ДС с непрерывным временем правило, которое позволяет найти состояние в любой момент времени по начальному состоянию, задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

для которой условия существования и единственности решений выполнены (здесь и далее точкой мы будем обозначать дифференцирование по времени). В этом случае семейство  $G^t \mathbf{x}_0$  задается просто решением системы (1.5) с начальным условием  $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ . Например, для линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

где  $A$  – матрица размерности  $n \cdot n$  с постоянными коэффициентами, решение имеет вид  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = e^{At} \mathbf{x}_0$ , в котором  $e^{At}$  – матрица  $n \cdot n$ . Поскольку матрицы  $e^{At_1}$  и  $e^{At_2}$  коммутируют для любой пары  $t_1, t_2$ , то свойство (1.3):

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \circ e^{At_2} = e^{At_2} \circ e^{At_1}$$

выполняется. Свойство (1.2) также, очевидно, выполнено.

В качестве другого примера рассмотрим систему, заданную в полярных координатах

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\varphi} = \beta,$$

где  $\alpha, \beta$  – параметры. Решение этой системы имеет вид

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \varphi_0 + \beta t$$

Следовательно, эволюционные операторы задаются следующим образом

$$G^t : (r_0, \varphi_0) \mapsto (r_0 e^{\alpha t}, \varphi_0 + \beta t).$$

Очевидно, что свойства (1.2), (1.3) выполняются.

Обратим внимание на то, что правая часть системы (1.5) явно от времени не зависит. Такие системы называются **автономными**. Существует также большое число задач (например, системы, подверженные внешнему переменному силовому воздействию), описываемых динамическими системами, правые части которых явно зависят от времени. Они называются **неавтономными**.

### 1.2.3. ДС с дискретным временем

ДС с дискретным временем обычно определяют следующим образом

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n)), \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – отображение и  $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  – дискретное время. Для таких систем траектория представляет собой конечную или счетную совокупность точек в  $\mathbb{R}^n$ . Иногда употребляют другую эквивалентную форму записи ДС с дискретным временем

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

где  $\bar{\mathbf{x}}$  является образом точки  $\mathbf{x}$  под действием отображения  $\mathbf{F}$ . В настоящем курсе мы будем использовать ту и другую форму записи точечных отображений.

Поясним понятие ДС с дискретным временем на примере одномерного отображения

$$\bar{x} = 2x, \text{ mod } 1 \quad (1.7)$$

Фазовым пространством этого отображения является интервал  $[0, 1]$ . Пусть  $x(0) = 1/5$ . Непосредственно из (1.7) получим

$$x(0) = \frac{1}{5} \rightarrow x(1) = \frac{2}{5} \rightarrow x(2) = \frac{4}{5} \rightarrow x(3) = \frac{3}{5} \rightarrow x(4) = \frac{1}{5}$$

Следовательно, рассматриваемая полутраектория является периодической с периодом 4 (рис. 1.1). На первый взгляд кажется, что при таком простом правиле точечного преобразования (1.4) временная эволюция переменной  $x(n)$  при любых начальных условиях может быть только простой и предсказуемой. Оказывается, что это не так. Если значение  $x(0)$  известно не точно, а с некоторой точностью  $\Sigma$ , предсказать будущее поведение  $x(n)$  не удастся. После достаточно большого числа итераций интервал  $J_\Sigma = (x(0) - \Sigma, x(0) + \Sigma)$  будет покрывать все фазовое пространство – интервал  $[0, 1]$ . Другими словами, существуют траектории, проходящие через начальные точки в  $J_\Sigma$ , растягивающие произвольный кусок фазового пространства. Непредсказуемость вызывается здесь неустойчивостью траекторий. Это феномен так называемого детерминированного хаоса, когда в детерминированной системе из-за неустойчивости траекторий возникают непредсказуемые наперед движения.

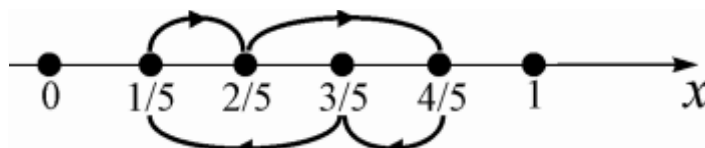


Рис.1.1. Полутраектория системы (1.4) с начальным условием  $x(0) = 1/5$ .

#### 1.2.4. ДС с диссипацией

Рассмотрим динамическую систему (1.5) и введем для нее понятие шара диссипации. Говорят, что гладкая поверхность  $S = \{ \Pi(\mathbf{x}) = 0 \}$  будет

трансверсальной к векторному полю  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , если скалярное произведение

$$(\text{grad } \Pi(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x})) \neq 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \in S,$$

где

$$\text{grad } \Pi = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \right).$$

Если  $S$  топологическая сфера, т.е. граница топологического шара  $D$ , то шар  $D$  называется шаром диссипации, если

$$(\text{grad } \Pi(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x})) < 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \in S.$$

Это означает, что векторное поле  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  на  $S$  ориентировано внутрь  $D$  (рис. 1.2). Очевидно, что траектории, входящие в  $D$ , остаются в нем навсегда. Такие динамические системы называются диссипативными. Наибольшее внимание в нашем курсе будет уделено именно таким динамическим системам, описывающим процессы в физических системах при учете различных потерь.

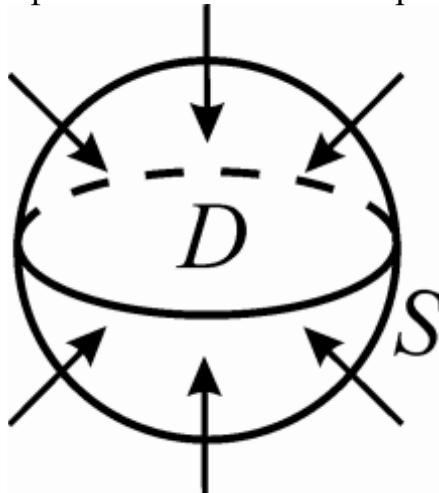


Рис. 1.2. Качественное представление шара диссипации  $D$ .

**Определение 1.1.** Система (1.5) называется диссипативной, если существует шар диссипации  $D$ , такой, что для любой начальной точки  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $G^t \mathbf{x}_0 \in D$  для некоторого  $t > 0$ .

Заметим, что существуют и другие определения диссипативных систем (например, иногда требуют, чтобы  $\text{div } \mathbf{F} < 0$ , и т.д.), но мы будем использовать определение 1.1.

При исследовании диссипативных систем важную роль играет понятие так называемой поглощающей области.

**Определение 1.2.** Компактная область  $D$  является поглощающей, если

$$G^t D \subset \text{Int } D \text{ для } t > 0,$$

где  $\text{Int } D$  – внутренняя часть  $D$ .

Например, для ДС с дискретным временем вида

$$\bar{x} = 3x(1 - x) = f(x)$$

интервал  $[1/5, 4/5]$  является поглощающей областью. Действительно, поскольку

$$f\left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right] = f\left[\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right] = \frac{12}{25}, \quad f\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \frac{3}{4},$$

то

$$f\left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right] = \left[-\frac{12}{25}, -\frac{3}{4}\right], \quad f\left[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}\right] = \left[-\frac{3}{4}, -\frac{12}{25}\right].$$

## 1.2. Аттракторы

Для систем с диссипацией очень естественно различать переходные процессы и установившиеся процессы или режимы. Базовой чертой установившегося процесса является то, что он «забывает» начальное состояние и не зависит от него. Это означает, что после конечного временного интервала, соответствующего переходному процессу, каждая положительная полутраектория попадает в малую окрестность некоторого инвариантного множества – «аттрактора» (от англ. attract – привлекать, притягивать). Существует несколько определений аттрактора (аттрактор Милнора, статистический аттрактор и др.). Приведем здесь одно из них, которое на наш взгляд наиболее соответствует задачам настоящего курса.

**Определение 1.3.** Пусть  $D$  – поглощающая область динамической системы  $(G^t, X)$ . Тогда множество

$$A = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} G^t D$$

называется **максимальным аттрактором** в  $D$ .

**Определение 1.4.** Инвариантное множество  $A$  является аттрактором, если существует поглощающая область  $D$ , для которой  $A$  – максимальный аттрактор.

Ясно, что максимальный аттрактор зависит от поглощающей области, и может содержать другие аттракторы. Примерами простейших аттракторов являются устойчивые состояния равновесия и неподвижные точки.





### 1.3. Структурная устойчивость ДС

Очевидно, что динамическая система, описывающая поведение любой реальной системы, должна зависеть от параметров. Рассмотрим, например, систему (1.5), зависящую от некоторого набора параметров

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k, \quad (1.8)$$

где  $\boldsymbol{\mu}$  – вектор параметров. Возникает вопрос: нельзя ли обойтись без методов теории колебаний и сделать необходимые нам расчеты динамики системы (1.8) напрямую, например, численно, используя современные компьютеры и численные методы? Предположим, что мы можем строить приближенно решение системы с любыми начальными условиями. Пусть мы построили какое – либо решение на некотором временном интервале. Что можно сказать о поведении всей системы, исходя из полученной информации об одном решении? Очевидно – ничего, поскольку в реальных системах начальные условия почти всегда произвольны. Поэтому перебор даже очень большого числа начальных условий не решает полностью задачу, т.к. поведение системы при оставшихся начальных условиях остается неясным. Кроме того, задачу усложняет и то, что реальные системы зависят от параметров. Следовательно, используя численное моделирование, мы можем в лучшем случае сказать о поведении реальной системы только при некоторых значениях параметров и начальных условий.

Таким образом, для конструирования каких-либо устройств, приборов, изучения свойств реальных объектов необходимо исследовать не одно какое-либо частное решение системы, а **целый класс моделей**. Для решения этой сложной задачи в теории колебаний развивается подход, включающий следующие базовые положения:

- изучать не все траектории системы, а только избранные (в некотором смысле особенные) и находить параметры, при которых такие траектории существуют;
- поведение траекторий системы при других значениях параметров изучать, как правило, лишь **качественно**.

Очевидно, что в динамических системах, описывающих движения реальных систем, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во времени. Следовательно, динамические системы, вообще говоря, изменяются вместе с входящими в них параметрами. Однако, если эти изменения достаточно малы, то, как показывает практика, реальная система как бы не замечает этих изменений, то есть качественные черты ее поведения сохраняются. Поэтому, если мы хотим, чтобы динамическая система отображала эту особенность, нужно придать ей свойство **грубости**. Именно: при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения фазового пространства на траектории. Тем самым выделить класс «грубых» динамических систем. Грубость динамической системы можно трактовать как устойчивость структуры разбиения её фазового

пространства на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы. Поэтому грубые динамические системы часто называют структурно устойчивыми.

А.А. Андронов и Л.С. Понтрягин (1937 г.) ввели строгое математическое определение грубости динамических систем с двумерным фазовым пространством. Приведем его здесь для системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (1.9)$$

где  $P$  и  $Q$  – гладкие функции, а система (1.9) является диссипативной с шаром диссипации  $D$ .

**Определение 1.5.** Система (1.9) называется грубой (структурно устойчивой), если существует такое малое число  $\tau_m > 0$ , что все динамические системы вида

$$\dot{x} = P(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y), \quad (1.10)$$

в которых аналитические функции  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  удовлетворяют неравенству

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \tau_m,$$

имеют такую же структуру разбиения  $D$  на положительные полутраектории, что и система (1.9).

Совершенно ясно, что не при всяком изменении параметра грубость динамической системы сохраняется. Можно так поменять параметр, что произойдет принципиальное изменение фазового портрета. Переход от одной грубой динамической системы к другой происходит через негрубую динамическую систему. Значение параметра, при котором динамическая система является негрубой, называется **бифуркационным**. Требование грубости для автономных систем второго порядка, являясь естественным с точки зрения приложений, существенно упрощает возможные структуры разбиения фазовой плоскости на траектории. Каждая из этих структур определяется конечным числом особых фазовых траекторий. Что это за траектории речь пойдет ниже в курсе теории колебаний.

Заметим, что прямое перенесение, приведенного выше определения грубости, на случай многомерных (размерность фазового пространства три и выше) динамических систем оказалось невозможным. Было установлено, что существуют многомерные системы, содержащие только неустойчивые траектории, а в пространстве динамических систем существуют целые области негрубых систем. Поэтому теория грубых многомерных динамических систем строится иначе, чем в двумерном случае. Мы обратимся к этому вопросу позднее.

### 1.5. Контрольные вопросы и задания

1. Найти 2- и 3-периодические траектории ДС (1.7).
2. Показать, что система  $\dot{x} = x - x^3$  является диссипативной.
3. Найти поглощающую область для отображения  $\bar{x} = 3.1x(1 - x)$ .

## ЛЕКЦИЯ 2

### ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ПРЯМОЙ

*Качественный подход. Грубые состояния равновесия и их устойчивость. Понятие о нормальной форме. Бифуркации состояний равновесия на прямой. Системы на окружности.*

Динамические системы с одномерным фазовым пространством – системы на прямой являются простейшим видом непрерывных динамических систем с конечномерным фазовым пространством. Сами по себе такие модели описывают поведение достаточно простых реальных систем. Например, изменение заряда  $q$  в простейшем RC-контуре (рис. 2.1), содержащем конденсатор с сегнетоэлектриком (вещество с нелинейной зависимостью поляризации от приложенного электрического поля).

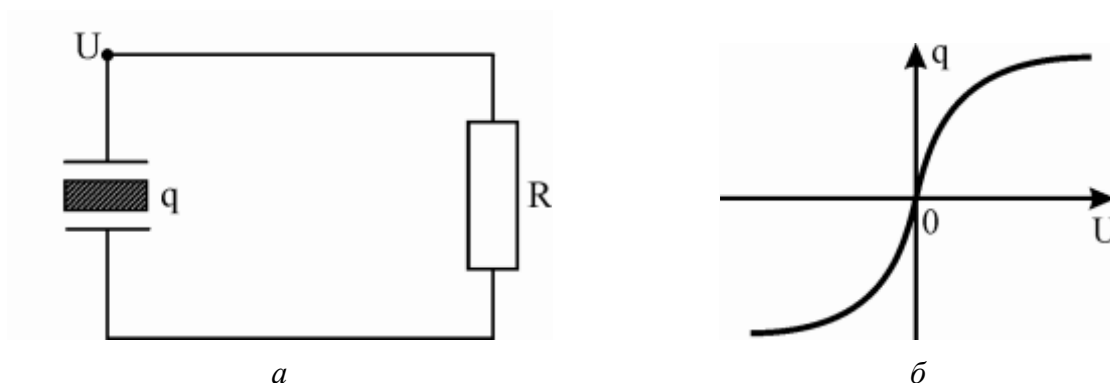


Рис. 2.1. RC-контур (а); нелинейная характеристика конденсатора с диэлектриком (б).

Однако, с методической точки зрения эти системы чрезвычайно важны, поскольку дают наглядное и ясное представление о базовых идеях и подходах теории колебаний.

#### 2.1. Качественный подход

Во многих случаях качественные (геометрические) представления о динамике нелинейных систем бывают более полезны, чем даже точное решение системы. Поясним это на простом примере. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x \square x^2 \quad (2.1)$$

Очевидно, что  $x=0$  и  $x=1$  является решениями (2.1). Найдём остальные решения. Считая, что  $x \in (0,1)$ , разделим переменными в (2.1)

$$\frac{dx}{x \square x^2} = dt \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2), получаем

$$\ln|x| \square \ln|1 \square x| + C = t, \quad (2.3)$$

где  $C = \text{const}$ . Рассмотрим решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию:  $x(0) = x_0$ , где  $x_0 \in (0; 1)$ . Из (2.3) находим, что этому начальному условию отвечает постоянная

$$C = \ln|1 \square x_0| \square \ln|x_0|$$

и соответствующее решение имеет вид

$$\ln \left| \frac{x}{x_0} \right| \square \ln \left| \frac{1 \square x}{1 \square x_0} \right| = t \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) задает точное решение рассматриваемой задачи. Давайте попробуем получить из (2.4) ответы на следующие вопросы:

1. Пусть  $x_0 = 1/2$ . Как изменяется переменная  $x(t)$  при  $t > 0$  и, в частности, какое предельное значение она принимает при  $t \rightarrow +\infty$ ?
2. Как ведет себя  $x(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  для различных  $x_0$ .

Конечно, из (2.4) ответить на эти вопросы можно, но это требует некоторых дополнительных рассуждений и выкладок. Давайте теперь для ответа на эти вопросы привлечем базовое понятие теории колебаний – фазовое пространство. Для системы (2.1) фазовым пространством является числовая прямая  $\mathbb{R}^1$ . Отметим на  $\mathbb{R}^1$  значения  $x=0$  и  $x=1$ . В этих точках  $\dot{x} = 0$  и, следовательно, эти значения не изменяются во времени. Из (2.1) легко найти знак  $\dot{x}$  во всех интервалах прямой  $\mathbb{R}^1$ , определяемых значениями  $x=0$  и  $x=1$ , и тем самым установить направление движения фазовых траекторий. Отсюда, принимая во

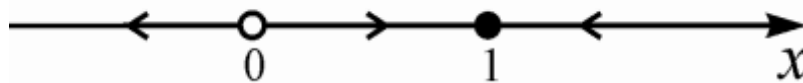


Рис.2.2. Фазовая прямая системы (2.1).

внимание структуру разбиения фазовой прямой на траектории, легко дать ответы на поставленные вопросы.

1. Траектория с начальным условием  $x_0 = 1/2$  при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически стремится к значению  $x=1$ .
2. Все траектории с начальными условиями  $x_0 > 0$  ( $x_0 \in (0; 1)$ ) при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически стремятся к значению  $x=1$ , а при  $x_0 < 0$  переменная  $x(t)$  неограниченно убывает, т.е.  $x(t) \rightarrow -\infty$ .

Рассмотренный пример показывает, что в фазовом пространстве существуют значения  $x$ , которое остаются неизменными при любом  $t$  – это так

называемые состояния равновесия (см. лекцию 1, раздел 1.2.1). С теоретической точки зрения любое состояние равновесия представляет собой классический геометрический объект – точку. В системе (2.1) к точке  $x=1$  траектории системы асимптотически приближаются при  $t \rightarrow +\infty$  и поэтому это состояние равновесия логично называть устойчивым, а от точки  $x=0$  траектории, наоборот, удаляются при увеличении  $t$  и его, поэтому, называют неустойчивым (строгое определение устойчивости состояний равновесия мы дадим позднее).

## 2.2. Грубые состояния равновесия

Рассмотрим динамическую систему на прямой общего вида

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (2.5)$$

где  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  – вектор параметров. Будем считать, что  $F(x)$  – взаимно-однозначная функция, обеспечивающая выполнение теорем существования и единственности решений. Очевидно, что состояние равновесия системы (2.5) определяются уравнением

$$F(x, \mu) = 0. \quad (2.6)$$

Пусть  $x=x^*(\mu)$  – одно из решений уравнения (2.6). Найдем условия локальной устойчивости состояния равновесия  $x^*(\mu)$ . Пусть  $\eta(t) = x - x^*(\mu)$  – малое возмущение, тогда из системы (2.5) имеем

$$\dot{\eta} = F(x^*(\mu) + \eta, \mu) = F(x^*(\mu), \mu) + F'_x(x^*(\mu), \mu)\eta + \dots$$

или

$$\dot{\eta} = F'_x(x^*(\mu), \mu)\eta + \dots \quad (2.7)$$

Если  $F'_x(x^*(\mu), \mu) \neq 0$ , то в малой окрестности  $x=x^*(\mu)$  в (2.7) можно ограничиться лишь линейным слагаемым по  $\eta$ , т.е. вместо (2.7) рассмотреть линейное уравнение (эта процедура называется линеаризацией, рамки применения которой мы обсудим позднее) вида

$$\dot{\eta} = L(\mu)\eta, \text{ где } L(\mu) = F'_x(x^*(\mu), \mu). \quad (2.8)$$

Поскольку общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\eta(t) = Ce^{L(\mu)t},$$

где  $C = \text{const}$ , то при условии  $L(\mu) < 0$  возмущение  $\eta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и состояние равновесия  $x^*(\mu)$  будет устойчивым, а если  $L(\mu) > 0$ , то  $\eta(t)$  растут и  $x^*(\mu)$  будет неустойчивым. Коэффициент  $L(\mu)$  называется ляпуновским характеристическим показателем. Условия устойчивости допускают простую

геометрическую интерпретацию. Состояние равновесия  $x^*(\mu)$  является локально устойчивым, если производная функции  $F(x, \mu)$  по  $x$  в точке  $x^*(\mu)$  отрицательна и неустойчиво, если  $F'_x(x^*(\mu), \mu) > 0$  (рис. 2.3).

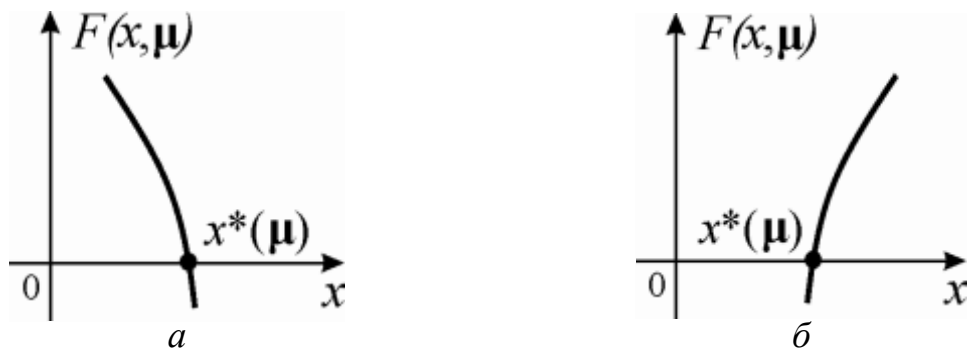


Рис.2.3. Поведение функции  $F(x, \mu)$  в окрестности точки  $x = x^*(\mu)$  в случае устойчивого (a) и неустойчивого (б) состояний равновесия.

Ясно, что в обоих случаях малые изменения правой части системы (2.5) не могут привести к исчезновению и смене устойчивости состояния равновесия  $x^*(\mu)$ . Следовательно, условие грубости состояний равновесия на прямой имеет вид  $L(\mu) \neq 0$ , а бифуркационные значения параметров определяются уравнением  $L(\mu^*) = 0$ . Таким образом, динамическая система (2.5) на прямой будет грубой (структурно устойчивой), если для всех состояний равновесия выполнено условие  $L_i(\mu) \neq 0$ .

## 2.3. Бифуркации состояний равновесия

### 2.3.1. Двукратное равновесие

Бифуркация двукратное равновесие определяет один из базовых динамических механизмов рождения и исчезновения состояний равновесия. Рассмотрим систему следующего вида

$$\dot{x} = \mu + x^2 \quad (2.9)$$

где  $\mu \in \mathbb{R}^1$ . Анализ динамики системы (2.9) прост и представлен на рис.2.4.

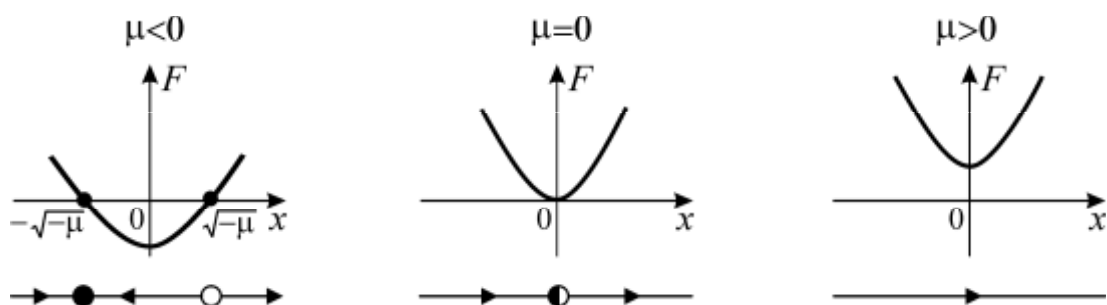


Рис.2.4. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.9) при различных значениях параметра  $\mu$ .

Он показывает, что при  $\mu=0$  состояние равновесия  $x=0$  является негрубым, поскольку любой сколь угодно малое изменение параметра  $\mu$  приводит к принципиальному изменению структуры фазовой прямой. Такое состояние равновесия называется двухкратным, так как при его разрушении на фазовой прямой появляются два грубых состояния равновесия.

Совершенно аналогично, для системы

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (2.10)$$

получаем разбиение фазовой прямой, представленное на рис.2.5.

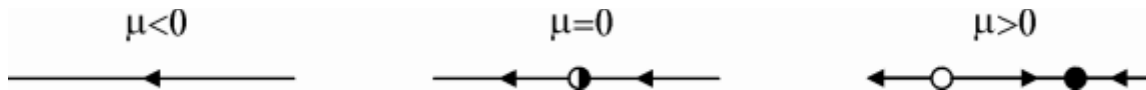


Рис.2.5. Фазовая прямая системы (2.10) для различных значений параметра  $\mu$

Представленные на рисунках 2.4, 2.5 результаты удобно представить в виде так называемых бифуркационных диаграмм, представляющих зависимость стационарных состояний системы от параметра  $\mu$ , который принято называть контрольным параметром. Эти диаграммы для систем (2.9) и (2.10) изображены на рис. 2.6, а и б соответственно.

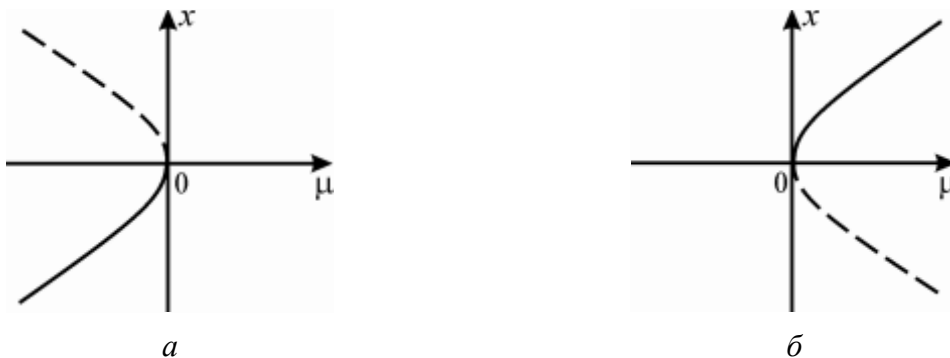


Рис.2.6. Бифуркационные диаграммы системы (2.9) (а) и системы (2.10) (б). Пунктирной линией указана ветвь неустойчивых, а сплошной линией – устойчивых состояний равновесия.

Таким образом, двукратное равновесие – негрубое состояние равновесия, которое при сколь угодно малом изменении параметра либо распадается на два грубых либо исчезает.

### 2.3.2. Понятие о нормальной форме

В определенном смысле системы (2.9) и (2.10) описывают все возможные бифуркации двукратных состояний равновесия на прямой и поэтому их называют нормальной формой для этой бифуркации. Другими словами, если какая-либо система на прямой имеет двухкратное равновесие, то в окрестности этой точки поведение системы можно описать с помощью уравнения (2.9) или



(2.10). Действительно, пусть при  $\mu = \mu_0$  система (2.5) имеет двухкратное равновесие  $x = x_0$ . Раскладывая правую часть (2.5) в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} = F(x, \mu) = & F(x_0, \mu_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x_0, \mu_0)} + \\ & + (\mu - \mu_0) \left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{(x_0, \mu_0)} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{(x_0, \mu_0)} + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Поскольку

$$F(x_0, \mu_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x_0, \mu_0)} = 0,$$

то (2.11) можно переписать в следующем виде

$$\dot{x} = a(\mu - \mu_0) + b(x - x_0)^2 + \dots, \quad (2.12)$$

где

$$a = \left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{(x_0, \mu_0)}, \quad b = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{(x_0, \mu_0)}.$$

Очевидно, что уравнение (2.12) путем введения новой переменной и параметра принимает вид (2.9) или (2.10).

### 2.3.3 Транскритическая бифуркация

Существует значительное число задач, в которых число состояний равновесия при изменении параметров сохраняется, но их устойчивость меняется. Такая бифуркация носит название транскритической или смены устойчивости состояния равновесия. Нормальная форма для транскритической бифуркации задается уравнением

$$\dot{x} = x - x^2 \quad (2.13)$$

или уравнением

$$\dot{x} = x + x^2 \quad (2.14)$$

Динамика уравнений (2.13), (2.14) в зависимости от управляющего параметра  $\mu$  представлена на рис. 2.7а и 2.7б соответственно.

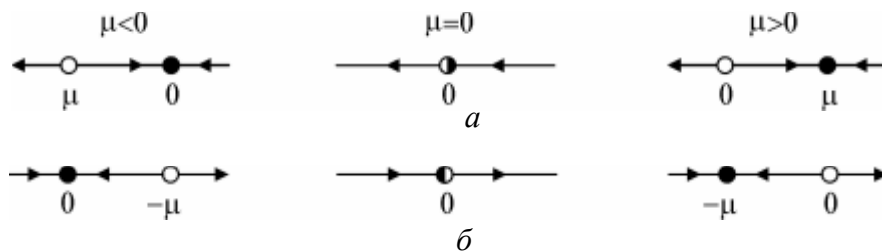


Рис. 2.7. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.13) и (2.14) соответственно.

Принимая во внимание результаты представленные на рис. 2.7, устанавливаем вид бифуркационных диаграмм для систем (2.13) и (2.14) (см. рис. 2.8).

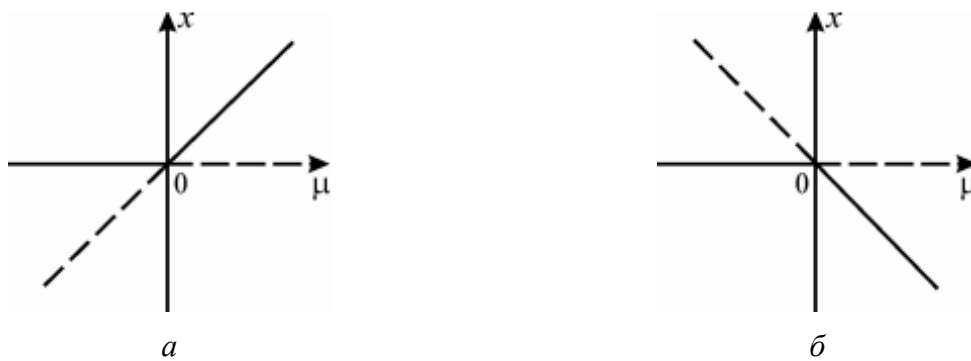


Рис.2.8. Бифуркационные диаграммы системы (2.13) (а) и системы (2.14) (б). Ветвь устойчивых состояний равновесия отмечена сплошной линией, а неустойчивых – пунктирной.

### 2.3.4. Трехкратное равновесие

Эта бифуркация типична для систем, обладающих симметрией. Например, многие физические задачи имеют пространственную симметрию между левым и правым направлениями. В таких системах состояния равновесия рождаются и исчезают парами. Нормальная форма бифуркации трехкратное равновесие определяется уравнениями

$$\dot{x} = \sqrt{x} \square x^3, \quad (2.15)$$

$$\dot{x} = \sqrt{x} + x^3. \quad (2.16)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (2.15) и (2.16) инвариантны относительно преобразования  $x \square \square x$ . Исследование динамики уравнения (2.15) представлено на рис.2.9.

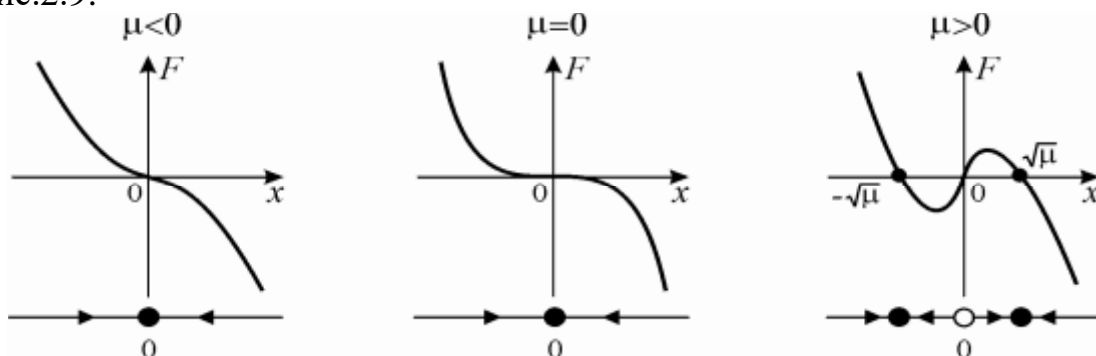


Рис.2.9. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.15) при различных значениях параметра  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

Обратим внимание на то, что в момент бифуркации, т.е. при  $\sqrt{=}0$ , ляпуновский характеристический показатель  $\mathcal{L}(0)=0$ , а само состояние равновесия, несмотря

на это является устойчивым. Исследование уравнения (2.16) проводится аналогично предыдущему и мы предлагаем читателю провести его самостоятельно. Представим здесь лишь соответствующую бифуркационную диаграмму (см. рис. 2.10б).

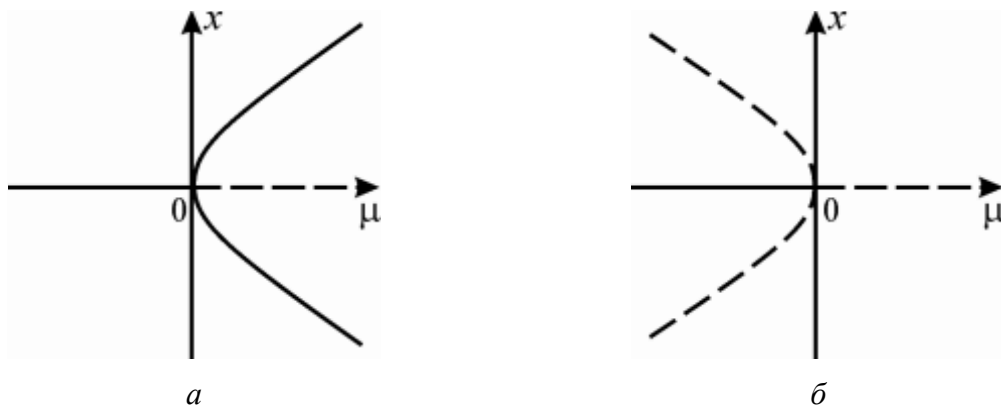


Рис. 2.10. Бифуркационные диаграммы системы (2.15) (а) и системы (2.16) (б). Ветвь устойчивых состояний равновесия отмечена сплошной линией, а неустойчивых – пунктирной.

## 2.4. Системы на окружности

Рассмотрим уравнение первого порядка следующего вида

$$\dot{\Pi} = F(\Pi), \text{ где } F(\Pi + 2\pi) = F(\Pi) \quad (2.17)$$

Уравнения такого вида возникают при описании динамики реальных систем, у которых переменная состояния изменяется циклически. Например, простейшая безфильтровая система фазовой автоподстройки (см. лекцию 4, уравнение (4.23)) описывается уравнением  $\dot{\Pi} + \sin \Pi = 0$ . В силу периодичности правой части (2.17) по  $\Pi$  ее фазовым пространством является окружность  $S^1$ . Поясним основные свойства таких систем на следующем примере. Рассмотрим уравнение

$$\dot{\Pi} = \gamma - a \sin \Pi, \quad (2.18)$$

где  $a$  и  $\gamma$  – параметры,  $a \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ . При  $a=0$  общее решение уравнения (2.17) имеет вид

$$\Pi = \gamma t + \Pi_0, \quad \Pi_0 = \text{const}$$

и описывает равномерное вращение изображающей точки по окружности  $S^1$ . Исследование системы (2.18) при  $a > 0$  представлено на рис.2.11. Проведенное исследование показывает, что при  $a = \gamma$  в системе (2.18) образуется двукратное равновесие, которое при изменении параметров либо распадается на два грубых ( $a > \gamma$ ) либо исчезает ( $a < \gamma$ ). При  $a < \gamma$  в (2.18) происходят вращательные движения, однако эти движения неравномерны, поскольку скорость  $\dot{\Pi}$  не

является постоянной (наибольшая скорость достигается при  $\Pi = \pi/2$ , а минимальная при  $\Pi = 3\pi/2$ ). При  $a > 1$  на окружности  $S^1$  существуют два грубых состояния равновесия:  $\Pi = \Pi_1 = \arcsin(1/a)$  и  $\Pi = \Pi_2 = \pi - \arcsin(1/a)$ . Состояние равновесия  $\Pi = \Pi_1$  – устойчивое, а  $\Pi = \Pi_2$  – неустойчивое.

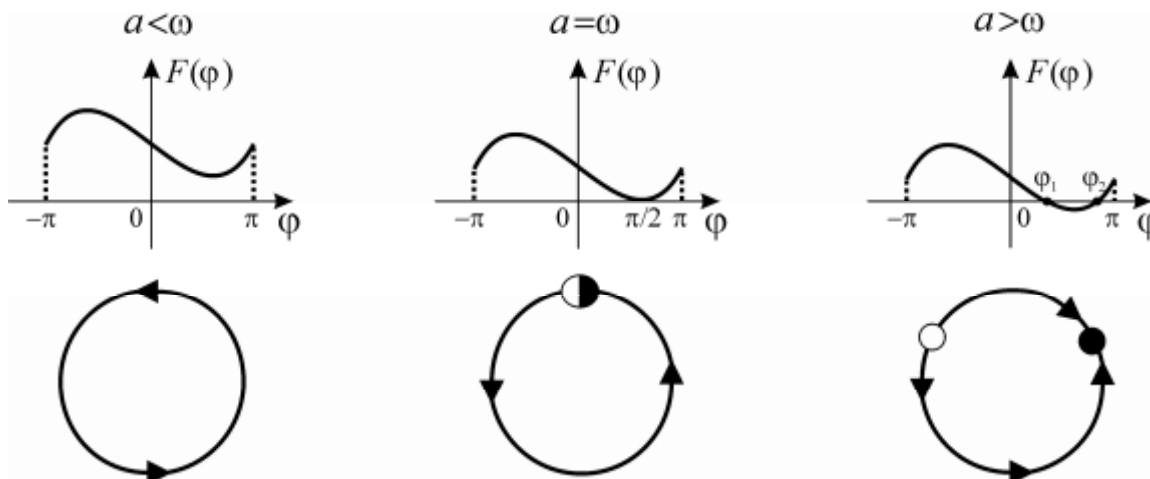


Рис.2.11. Разбиение окружности  $S^1$  на траектории для различных значений параметра  $a$ .

## 2.5. Контрольные вопросы и задания

1. Исследовать динамику уравнения (2.16).
2. Исследовать динамику уравнения

$$\dot{\Pi} + \sin \Pi = \gamma,$$

где параметр  $\gamma > 0$ .

3. Для уравнения (2.18) построить зависимость периода вращательных движений от параметра  $a$  и качественный вид временных реализаций  $\Pi(t)$  для различных значений  $a$ .
4. Для тривиального состояния равновесия уравнения

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx}),$$

где  $a, b$  – параметры, найти бифуркационные значения параметров и установить тип этой бифуркации.

5. Исследовать динамику системы следующего вида

$$\dot{x} = \gamma(x + x^3 - x^5),$$

где параметр  $\gamma > 0$ .

### ЛЕКЦИЯ 3

## УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Нормальные формы уравнений грубых состояний равновесия на плоскости. Бифуркационная двухпараметрическая диаграмма состояний равновесия на плоскости.*

На предыдущей лекции мы познакомились со свойствами динамических систем на прямой. Было показано, что поведение таких систем определяется состояниями равновесия и выбором начальных условий. Состояния равновесия также играют чрезвычайно важную роль и в динамике многомерных систем, поскольку они описывают стационарные состояния реальных систем. Важнейшим свойством состояний равновесия является их устойчивость. Термин «устойчивость» настолько широко распространён не только в научной литературе, но и в повседневной жизни, что его смысл интуитивно ясен даже людям далёким от науки. Например, вот какое определение «Устойчивый» даётся в словаре русского языка С.И. Ожегова:

1. Стоящий твёрдо, не колеблясь, не падая.
2. Не поддающийся, не подверженный колебаниям, стойкий, твёрдый.

Хотя, конечно, с физико-математической точки зрения, это определение нельзя назвать строгим, одна из важнейших и типичных характеристик устойчивости в нём содержится. Именно – сохранение исходного состояния системы при некоторых отклонениях (возмущениях). Однако, лишь одной этой характеристики недостаточно для построения строгого определения устойчивости, приемлемого для широкого круга практических задач. Свойство возвращаемости системы в исходное состояние является слишком строгим и оставляет «за бортом» широкий класс систем, для которых характерно более слабое проявление устойчивости – сохранение своего положения в малой окрестности исходного состояния. Действительно, рассмотрим поведение массивного шарика в желобе, состоящем из двух ямок (рис. 3.1). Очевидно, что в этой системе возможно существование трёх состояний равновесия:

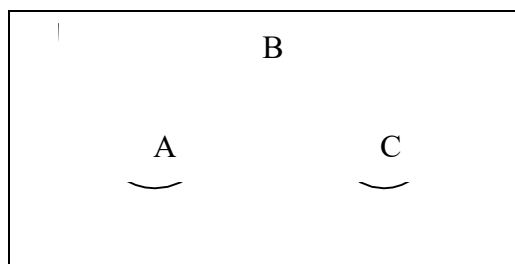


Рис.3.1. Колебания массивного шарика в жёлобе.

А, В и С. При сколь угодно малых отклонениях шарика от точки В, он начинает двигаться и покидает окрестность этой точки. Поэтому вполне логичным было бы назвать такое состояние равновесия неустойчивым. Совершенно иначе ведёт себя шарик, если изначально он покоился в точке А или С. Получив начальное отклонение, шарик начнёт двигаться с уменьшающейся за счёт трения скоростью и придёт в одно из этих состояний равновесия. Причём, в зависимости от величины отклонения шарик может сохранить своё начальное состояние равновесия, а может изменить его на противоположное. Следовательно, состояние равновесия может быть устойчивым по отношению к одним отклонениям и в тоже время быть неустойчивым по отношению к другим. Предположим теперь, что трение в жёлобе пренебрежимо мало. Как известно, в этом случае при малых отклонениях от точек А и С шарик будет совершать периодические колебания в их окрестности. Поскольку эти колебания происходят в окрестности точек А и С, состояние системы существенно не меняется и такое поведение шарика можно отнести к устойчивому. Как мы увидим ниже, отмеченные выше свойства состояний равновесия являются общими и лежат в основе строгого определения устойчивости состояний равновесия.

Основы теории устойчивости были заложены в работах великого русского математика и механика А.М. Ляпунова. В 1892 году в Харькове он представил к защите докторскую диссертацию, которая была опубликована год спустя. Идеи и подходы, заложенные в этой работе, оказались настолько плодотворными, что до сих пор являются актуальными и востребованными. Изложим положения определения теории устойчивости, принадлежащие Ляпунову.

### 3.1. Определение устойчивости состояний равновесия

Рассмотрим автономную динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Как мы уже знаем (см. лекцию 2), состояние равновесия определяются из условия равенства нулю всех производных по времени. Следовательно, состояние равновесия системы (3.1) являются решениями следующей системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.2)$$

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  - одно из решений системы (3.2). Для оценки близости состояния равновесия и накладываемых на систему возмущений (отклонений) введём в фазовом пространстве системы (3.1) норму. В качестве нормы мы будем использовать евклидову длину вектора, т.е.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n x_i^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Не останавливаясь здесь подробно, отметим лишь, что существуют и другие способы задания нормы. При этом сходимость в одной из норм автоматически означает сходимость и в смысле других норм.

**Определение 3.1.** Состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  системы (3.1) называется устойчивым (в смысле Ляпунова), если для всякого  $\Sigma > 0$  (как бы мало оно ни было) можно указать  $\tau^{\Sigma} > 0$  такое, что из неравенства

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t_0)\| < \tau^{\Sigma} \quad (3.3)$$

следует неравенство

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t)\| < \Sigma \quad (3.4)$$

при  $t \geq t_0$ .

Если же найти такое  $\tau^{\Sigma}$  невозможно, состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  называется неустойчивым. Заметим, что из условий (3.3) и (3.4) следует, что всегда можно выбирать число  $\tau^{\Sigma}$  из условия  $\tau^{\Sigma} \leq \Sigma$ , а число  $\Sigma$  задаёт область допустимых возмущений (отклонений).

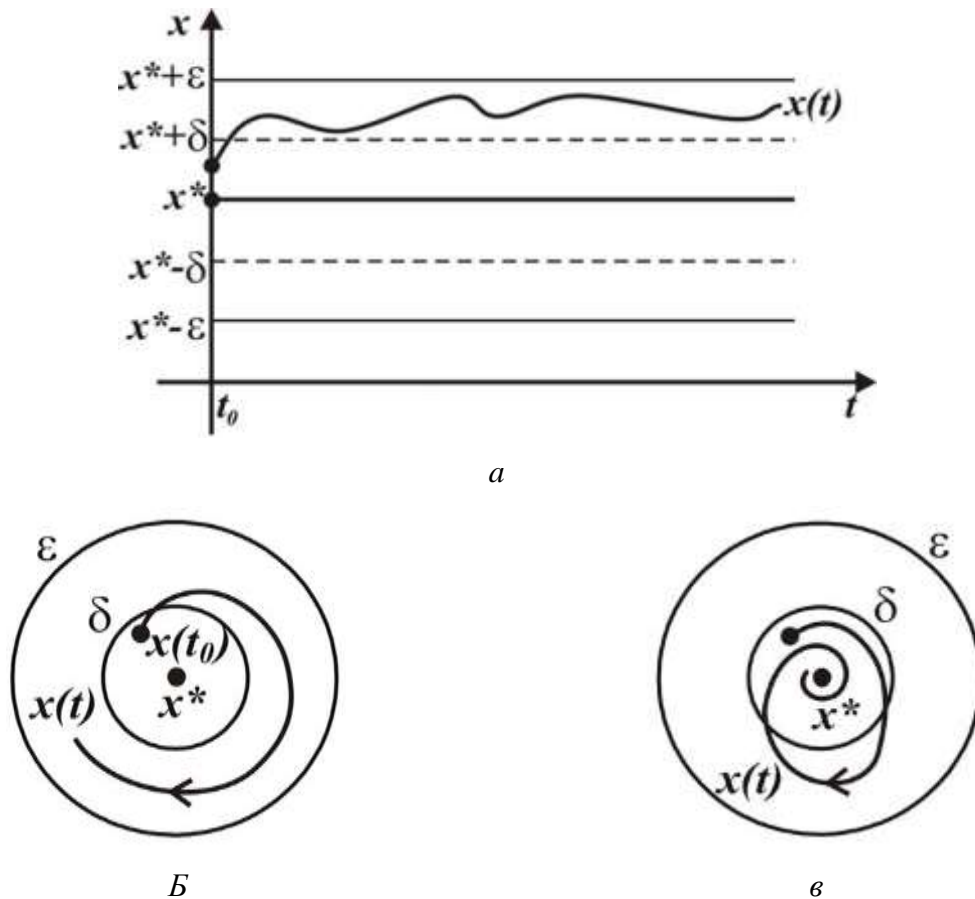
**Определение 3.2.** Состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  системы (3.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и для всех решений  $\mathbf{x}(t)$  системы (3.1), удовлетворяющих условию (3.3), выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0 \quad (3.5)$$

Рисунок 3.2 иллюстрирует определения 3.1 и 3.2. Устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  означает, что достаточно близкие к нему в любой начальный момент  $t = t_0$  решения  $\mathbf{x}(t)$  целиком останутся в сколь угодно узкой  $\Sigma$  - трубке около значения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  (рис. 3.2а). В фазовом пространстве устойчивость по Ляпунову, в выбранной нами норме, означает, что любая траектория системы (3.1) с начальными условиями внутри сферы радиуса  $\Sigma$  (рис. 3.2б) ни при каких  $t > t_0$  не достигают сферы радиуса  $\Sigma$ . В случае асимптотической устойчивости, кроме того, требуется стремление траекторий к состоянию равновесия (рис. 3.2в).

Из определения 3.2 следует, что асимптотическая устойчивость состояний равновесия зависит от величины начальных возмущений. В связи с этим различают устойчивость в *малом*, в *большом* и в *целом*. Состояние равновесия называется асимптотически устойчивым в целом, если определение 3.2 выполняется при любых начальных условиях. Если же определение 3.2 выполняется для начальных условий из некоторой ограниченной области, то состояние равновесия называется асимптотически устойчивым в большом (в

этой области). Наконец, если определение 3.2 справедливо для начальных возмущений из сколь угодно малой окрестности состояния равновесия, то оно называется асимптотически устойчивым в малом. Для систем, у которых одновременно существует несколько состояний равновесия, существует понятие *глобальной асимптотической устойчивости*. Система называется глобально асимптотически устойчивой, если каждая её траектория асимптотически стремится к какому-либо состоянию равновесия.



**Рис.3.2.** Качественное представление эволюции во времени переменной  $x(t)$  в случае устойчивости по Ляпунову (а); примеры поведения траектории  $x(t)$  в фазовом пространстве в случае устойчивости по Ляпунову (б) и в случае асимптотической устойчивости состояния равновесия  $x^*$  (в).

### 3.2. Классификация состояний равновесия линейных систем на плоскости

Рассмотрим произвольную линейную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  – некоторые параметры. Для удобства изложения представим (3.6) также в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad (3.7)$$



где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , тогда система (3.6) имеет единственное состояние равновесия  $O(x_1=x_2=0)$ . Будем искать решение системы (3.6) в виде

$$x_i = C_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2 \quad (3.8)$$

где  $C_i$  – произвольные константы. Подставляя (3.8) в систему (3.6), получим систему линейных однородных уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ , которая имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (3.9)$$

Это уравнение называется характеристическим. Обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  корни уравнения (3.9). Рассмотрим поведение фазовых траекторий системы (3.6) для различных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

### 3.2.1. Действительные корни

Предположим, что уравнение (3.9) имеет действительные корни, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_{1,2} \neq 0. \quad (3.10)$$

Покажем, что при этих условиях система (3.6) с помощью взаимнооднозначного преобразования координат может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda_1 u_1, \\ \dot{u}_2 &= \lambda_2 u_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система (3.11) называется нормальной формой уравнений для грубых состояний равновесия линейных двумерных систем. Как мы убедимся ниже, исследование фазовой плоскости системы (3.11) представляет собой значительно более простую задачу, чем исследование фазовой плоскости исходной системы (3.6).

Введём в (3.6) новые переменные

$$\begin{aligned} u_1 &= h_{11}x_1 + h_{12}x_2, \\ u_2 &= h_{21}x_1 + h_{22}x_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $h_{ik} (i, k=1, 2)$  – некоторые, пока неопределённые, коэффициенты. Из (3.12) и первого уравнения системы (3.6) имеем

$$\dot{u}_1 = h_{11}\dot{x}_1 + h_{12}\dot{x}_2 = (h_{11}a + h_{12}c)x_1 + (h_{11}b + h_{12}d)x_2. \quad (3.13)$$



С другой стороны, из системы (3.11)

$$\dot{u}_1 = L_1(h_{11}x_1 + h_{12}x_2). \quad (3.14)$$

Приравнявая коэффициенты при переменных  $x_1$  и  $x_2$  в (3.13) и (3.14), находим систему для определения  $h_{i,k}$

$$\begin{aligned} \clubsuit h_{11}(a \square L_1) + h_{12}c &= 0, \\ \square h_{11}b + h_{12}(d \square L_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Система (3.15) – система однородных линейных уравнений относительно  $h_{11}$  и  $h_{12}$ . Определитель этой системы равен нулю и, следовательно, система (3.15) имеет нетривиальное решение

$$\begin{aligned} h_{11} &= p, \quad h_{12} = \square \frac{p(a \square L_1)}{c}, \text{ если } c \neq 0, \\ h_{11} &= p, \quad h_{12} = \square \frac{bp}{(d \square a)}, \text{ если } c=0, d \neq a, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $p=\text{const}$ . Совершенно аналогично устанавливается вид остальных коэффициентов преобразования (3.12)

$$\begin{aligned} h_{21} &= q, \quad h_{22} = \square \frac{q(a \square L_2)}{c}, \text{ если } c \neq 0, \\ h_{21} &= 0, \quad h_{22} = q, \text{ если } c=0, d \neq a, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $q=\text{const}$ . Пусть для определённости  $p=q=1$ . В этом случае искомое преобразование системы (3.6) к виду (3.11) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \clubsuit u_1 &= x_1 \square \frac{(a \square L_1)}{c} x_2, \\ \diamond u_2 &= x_1 \square \frac{(a \square L_2)}{c} x_2, \text{ если } c \neq 0 \\ \spadesuit u_1 &= x_1 \square \frac{b}{(d \square a)} x_2, \text{ если } c=0, d \neq a. \\ \heartsuit u_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь поведение траекторий системы (3.11) на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  и на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  исходной системы (3.6) для различных значений  $L_1$  и  $L_2$ .



### 3.2.1.а. Корни $\lfloor_1$ и $\lfloor_2$ одного знака

Прежде всего заметим, что в этом случае систему (3.10) легко проинтегрировать (предлагаем читателям проделать это самостоятельно) и получить явный вид интегральных кривых, которые задаются следующим образом

$$u_2 = C(u_1)^{\frac{\lfloor_2}{\lfloor_1}}, \quad C = \text{const} \quad (3.20)$$

Для определённости будем считать, что  $|\lfloor_2| > |\lfloor_1|$ . В этом случае отношение  $\frac{\lfloor_2}{\lfloor_1} > 1$  и, следовательно, все интегральные кривые системы (3.11), за исключением осей координат, на фазовой плоскости имеют вид «парабол», касающихся оси  $u_2=0$  в начале координат. При этом на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  ось абсцисс и ось ординат являются интегральными кривыми системы (3.11).

**Корни  $\lfloor_1$  и  $\lfloor_2$  – отрицательные.** Непосредственно из системы (3.11) вытекает, что при таких значениях корней вдоль всех интегральных кривых переменные  $u_1$  и  $u_2$  убывают и, следовательно, на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  траектории с течением времени приближаются к состоянию равновесия  $u_1=u_2=0$  (рис.3.3а). Такое состояние равновесия называется **устойчивым узлом**. Заметим, что устойчивый узел является асимптотически

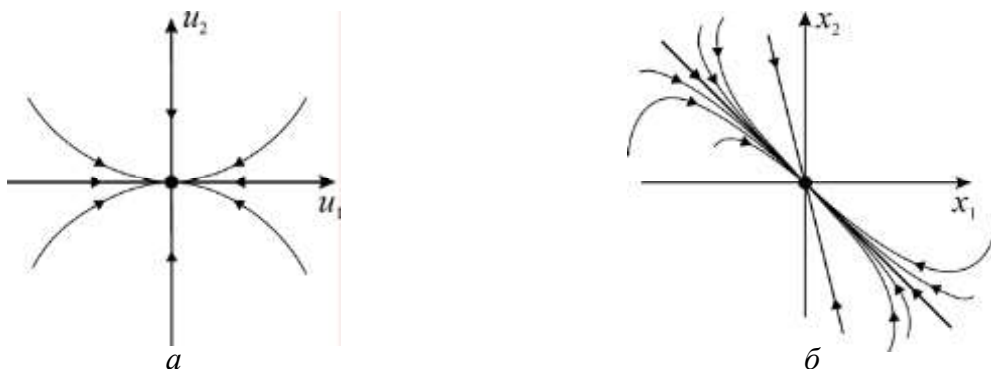


Рис.3.3. Состояние равновесия устойчивый узел: на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  (а); на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  (б).

устойчивым состоянием равновесия (см. определение 3.2). Поскольку все траектории системы (3.11) с начальными условиями, не лежащими на осях координат, касаются оси абсцисс, эту ось называют **ведущим** направлением узла. Наоборот, ось ординат не касается в состоянии равновесия ни одна траектория и поэтому она называется **неведущим** направлением узла.

Вернёмся теперь к системе (3.6) и рассмотрим поведение траекторий на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$ . Из (3.18) следует, что ведущее и неведущее направление узла на плоскости  $(x_1, x_2)$ , вообще говоря, не совпадают с

координатными осями. Принимая это во внимание, получаем качественный вид траекторий представленный на рис.3.3 (б).

**Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – положительные.** Этот случай без труда сводится к предыдущему путём обращения времени  $t \rightarrow -t$ , тот есть путём изменения движения на траекториях на противоположное. В результате получается состояние равновесия, которое называется **неустойчивым узлом** (рис.3.4).

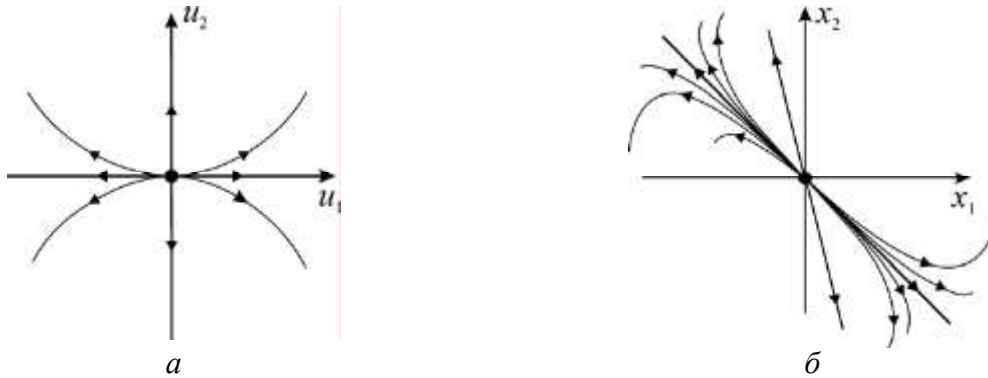


Рис.3.4. Состояние равновесия неустойчивый узел: на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  (а); на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  (б).

### 3.2.1.б. Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ разных знака

Пусть для определённости  $\lambda_1 > 0$ , а  $\lambda_2 < 0$ . Перепишем для удобства уравнение интегральных кривых (3.19) в следующем виде

$$u_2(u_1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \text{const} \quad (3.21)$$

Поскольку в (3.21) отношение  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$  все интегральные кривые системы (3.11),

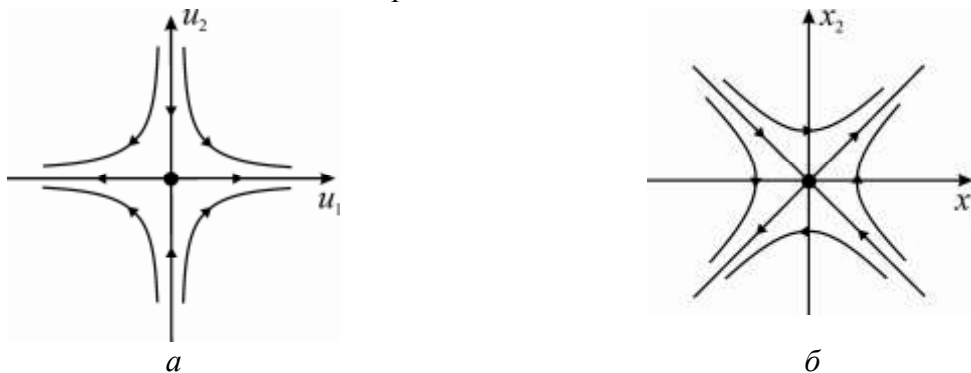


Рис.3.5. Качественный вид состояния равновесия седло: на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  (а); на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  (б).

за исключением осей координат, являются кривыми гиперболического типа, которые проходят мимо состояния равновесия (рис.3.5а). Существуют четыре исключительные траектории, лежащие на координатных полуосях. Две из этих траекторий асимптотически приближаются, а две другие, наоборот, отходят от состояния равновесия. Такое состояние равновесия называется **седлом** (рис.3.5), приближающиеся к нему траектории – **устойчивыми сепаратрисами**, а отходящие от него траектории – **неустойчивыми сепаратрисами**. Как мы увидим в дальнейшем, роль сепаратрис в динамике очень многих систем чрезвычайно важна. На фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  сепаратрисы седла имеют вид прямых, угловые коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  которых можно найти из (3.18) и (3.19) положив в эти уравнения  $u_2=0$  и  $u_1=0$ . Они задаются следующим образом

$$k_1 = \frac{(a \square l_1)}{c}, \quad k_2 = \frac{(a \square l_2)}{c}, \quad \text{если } c \neq 0, \quad (3.22)$$

$$k_1 = \frac{(d \square a)}{b}, \quad k_2 = 0, \quad \text{если } c=0, \quad d \neq a.$$

Выражая из (3.22) корни  $l_1$  и  $l_2$  через угловые коэффициенты  $k_1, k_2$  и подставляя эти выражения в характеристическое уравнения (3.9), нетрудно получить, что  $k_1$  и  $k_2$  являются корнями уравнения

$$bk^2 + (a \square d)k \square c = 0. \quad (3.23)$$

### 3.2.1.в. Корни $l_1$ и $l_2$ кратные - $l_1=l_2=l$ .

Не останавливаясь подробно на этом случае, отметим лишь, что нормальная форма уравнений такого состояния равновесия может быть двух видов – либо (3.11) с  $l_1=l_2=l$ , либо

$$\begin{aligned} \clubsuit u_1 &= l u_1 + u_2, \\ \heartsuit u_2 &= l u_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В первом случае состояние равновесия называется **дикритическим узлом** (устойчивым, если  $l < 0$  и неустойчивым, если  $l > 0$ ). Любая траектория приближается (рис.3.6а) или отходит от дикритического узла по своему собственному направлению. Во втором случае состояние равновесия называется **вырожденным узлом**, который также может быть либо устойчивым ( $l < 0$ ), либо неустойчивым ( $l > 0$ ). У вырожденного узла имеется только ведущее направление, которого касаются все остальные траектории (рис.3.6б).

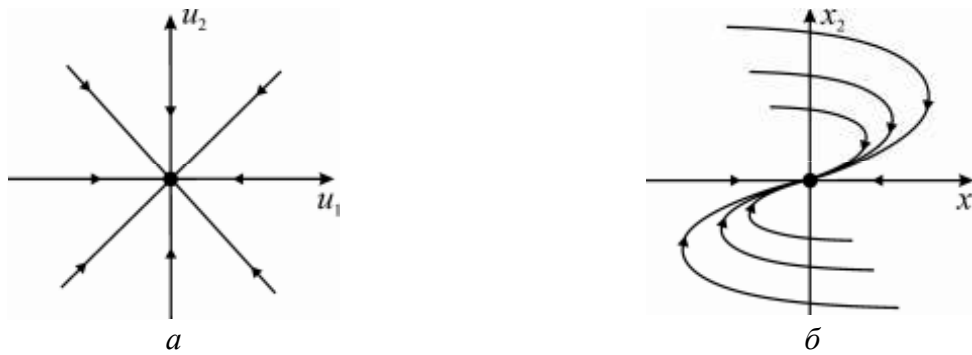


Рис.3.6. Устойчивый дикритический узел (а); устойчивый вырожденный узел (б).

### 3.2.2. Комплексные корни

Пусть характеристическое уравнение (13.9) имеет комплексно-сопряжённые корни  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ . Заметим, что при переходе от системы (3.6) к системе (3.11) с помощью преобразования (3.12) мы нигде не использовали предположение о действительности корней. Поэтому это преобразование (с комплексно-сопряжёнными коэффициентами) и система (3.11) справедливы и в случае комплексно-сопряжённых корней. Однако, в этом случае переменные  $u_1$  и  $u_2$  являются комплексными

$$u_1 = u + iJ, \quad u_2 = u - iJ. \quad (3.25)$$

Подставляя (3.25) в систему (3.11) и разделяя действительные и мнимые части полученных уравнений, приходим к следующей системе нормальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha u - \beta J, \\ \dot{J} &= \beta u + \alpha J. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Перейдем к системе (3.26) к полярным координатам  $\rho$  и  $\Pi$

$$u_1 = \rho \cos \Pi, \quad u_2 = \rho \sin \Pi. \quad (3.27)$$

С помощью этой замены переменных система (3.26) преобразуется (предлагаем читателям проделать это самостоятельно) к следующему эквивалентному виду

$$\dot{\rho} = \alpha \rho, \quad \dot{\Pi} = \beta. \quad (3.28)$$

Из (3.28) легко получить явный вид интегральных кривых

$$\rho = C e^{\frac{\alpha}{\beta} \Pi}, \quad C = \text{const}. \quad (3.29)$$

В силу (3.29) при  $\alpha \neq 0$  любая, за исключением самого состояния равновесия, интегральная кривая на плоскости  $(u_1, u_2)$  имеет вид логарифмической спирали с центром в состоянии равновесия, которая сохраняет эту форму и на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  интегральные кривые фокуса также имеют вид спиралей с центром в состоянии



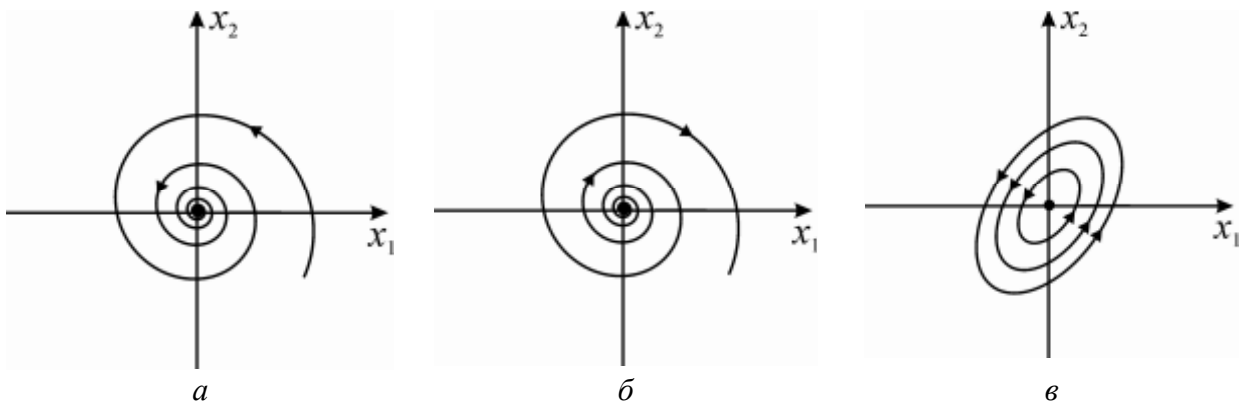


Рис.3.7. Устойчивый фокус (а); неустойчивый фокус (б); центр (в).



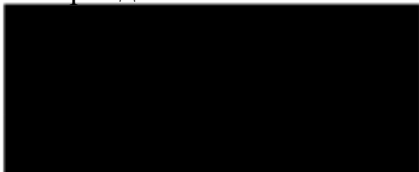

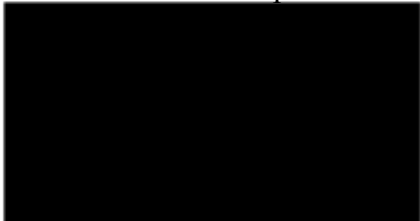
равновесия. Из первого уравнения в (3.28) следует, что при  $\langle < 0$  переменная  $\rangle$  монотонно убывает к нулю. Следовательно, в этом случае фазовые траектории асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  приближаются к состоянию равновесия. Такое состояние равновесия является асимптотически устойчивым и называется **устойчивым фокусом** (рис.3.7а). Наоборот, если  $\langle > 0$  переменная  $\rangle$  неограниченно растёт и, следовательно, фазовые траектории удаляются от состояния равновесия (рис.3.7б). Это состояние равновесия называется **неустойчивым фокусом**. Заметим, что с топологической точки зрения фокус эквивалентен узлу соответствующей устойчивости, поскольку с помощью взаимнооднозначного преобразования траектории одного из них могут быть переведены в траектории другого с сохранением ориентации. Несмотря на это, во многих задачах их следует различать, поскольку они определяют различные колебательные процессы. При  $\langle = 0$  переменная  $\rangle$  в (3.27) не меняется и, следовательно, любая нетривиальная траектория на плоскости  $(u_1, u_2)$  имеет вид окружности с центром в состоянии равновесия. Такое состояние равновесия называется **центром**. На фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  траектории центра представляют собой, вообще говоря, эллипсы, оси которых могут и не совпадать с координатными осями (рис.3.7в). Центр устойчив по Ляпунову, но не асимптотически.

### 3.2.3 Колебания двумерных линейных систем

Как мы установили выше, разбиение фазовой плоскости на траектории двумерных линейных систем определяются состояниями равновесия. Поэтому возможные в таких системах колебательные процессы полностью определяется типом состояния равновесия. Ниже в таблице 1 дана классификация этих процессов и представлен их качественный вид.



Таблица 3.1

| Состояние равновесия | Колебательный процесс   |
|----------------------|---|
| Устойчивый узел      | Затухающие аperiodические колебания<br>   |
| Устойчивый фокус     | Затухающие осцилляторные колебания<br>    |
| Центр                | Периодические колебания<br>               |
| Неустойчивый узел    | Нарастающие аperiodические колебание<br> |
| Неустойчивый фокус   | Нарастающие осцилляторные колебания<br> |

Принципиально другую, чем представленные в таблице состояния равновесия, роль играет в двумерных линейных системах седло – устойчивые сепаратрисы седла разделяют неограниченно нарастающие движения на две группы, имеющие различное предельное поведение (см., например, рис.3.5б).

### 3.2.4 Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма

Как правило, в практических задачах коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  системы (3.6) зависят от параметров, которые могут изменяться. Это изменение может вызвать смену типа состояния равновесия. Рассмотрим, как это может произойти в случае двух параметров, которые введём следующим образом

$$\Gamma_1 = \Delta(a + d), \Gamma_2 = \det A$$

В этих обозначениях характеристическое уравнение (3.9) перепишется в следующем виде

$$\lambda^2 + \lambda_1 \lambda + \lambda_2 = 0 \quad (3.30)$$

Анализируя значение корней уравнения (3.30) в зависимости от параметров  $\lambda_1, \lambda_2$ , устанавливаем вид разбиения плоскости  $(\lambda_1, \lambda_2)$  на области, соответствующие различным типам состояний равновесия системы (3.6). Разбиение осуществляется двумя бифуркационными прямыми –  $B_1 = \{\lambda_2 = 0, \lambda_1 \in \mathbf{R}\}$ ,  $B_2 = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0\}$  и параболой  $\{\lambda_2 = \lambda_1^2/4, \lambda_1 \in \mathbf{R}\}$ , отделяющей узлы от фокусов и не являющейся бифуркационной, поскольку эти состояния равновесия топологически эквивалентны. На прямой  $B_2$  происходит смена устойчивости фокуса через образование центра, а на прямой  $B_1$  уравнение (3.30)

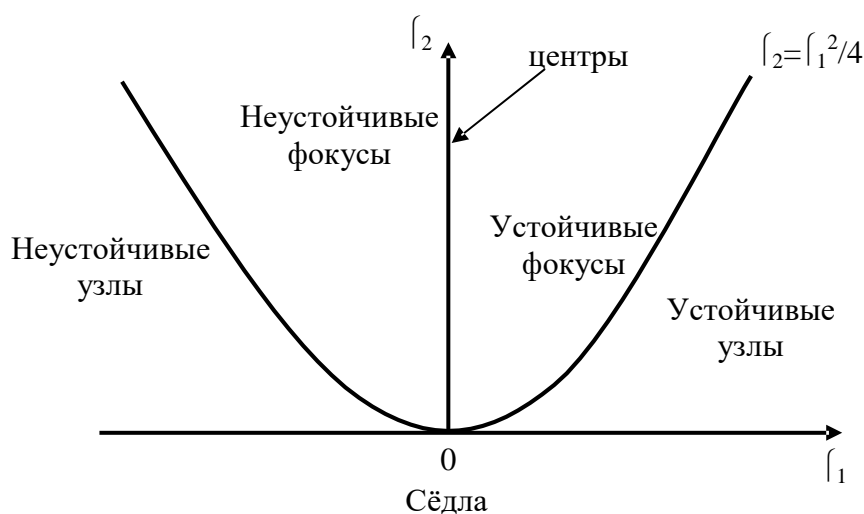


Рис.3.8. Разбиение плоскости  $(\lambda_1, \lambda_2)$  на области, соответствующие различным типам состояний равновесия.

имеет либо один, если  $\lambda_1 < 0$ , либо два нулевых корня, если  $\lambda_1 = 0$ . Исследуем поведение траекторий системы (3.6) для точек прямой  $B_1$ . Сделаем в (3.6) замену переменной  $x_2$ :

$$y = ax_1 + bx_2,$$

с помощью которой эта система преобразуется к виду

$$\dot{x}_1 = y, \quad \dot{y} = -\lambda_1 y \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует, что  $y=0$  является линией состояний равновесия, а все остальные траектории имеют вид прямых

$$y = -\lambda_1 x + C, \quad C = \text{const}$$

Принимая во внимание эти свойства траекторий, устанавливаем фазовые портреты системы (3.31), представленные на рис.3.9.

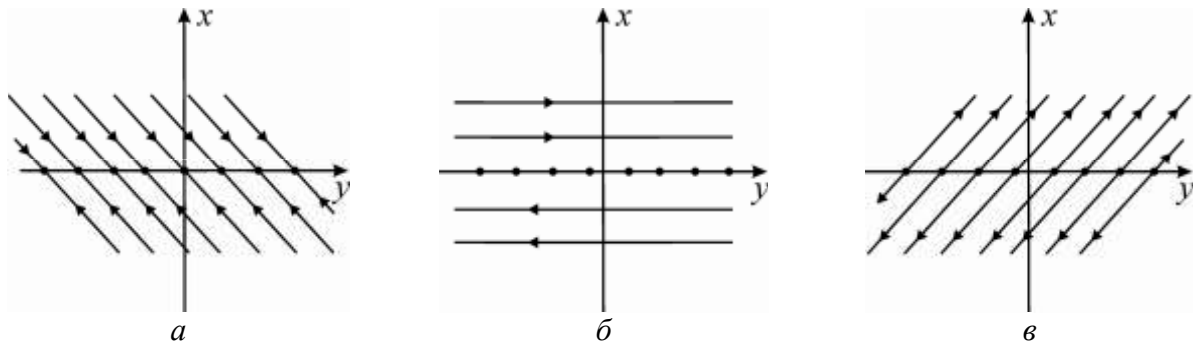


Рис.3.9. Фазовые портреты системы (3.30) для различных значений параметра  $\gamma_1$ : (а) соответствует значению  $\gamma_1 > 0$ ; (б) -  $\gamma_1 = 0$ ; (в) -  $\gamma_1 < 0$ .

### 3.3. Контрольные вопросы и задания

1. Пользуясь определениями 3.1 и 3.2 доказать, что устойчивые фокус и узел является асимптотически устойчивыми состояниями равновесия, а центр – устойчив по Ляпунову.
2. Определить тип состояний равновесия следующих систем

$$\begin{array}{l} \clubsuit \dot{x}_1 = 6x_2 \\ \heartsuit \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{array}, \quad \begin{array}{l} \clubsuit \dot{x}_1 = 6x_2 \\ \heartsuit \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \clubsuit \dot{x}_1 = 3x_1, \\ \heartsuit \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 \end{array}, \quad \begin{array}{l} \clubsuit \dot{x}_1 = 3x_1 \\ \heartsuit \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 \end{array}$$

Для состояний равновесия типа седло найти уравнения сепаратрис, а для узлов – ведущие и неведущие направления.

3. Классифицировать состояния равновесия для различных значений параметра  $\gamma$  следующих систем

$$\begin{array}{l} \clubsuit \dot{x}_1 = \gamma x_1 - x_2 \\ \heartsuit \dot{x}_2 = x_1 + \gamma x_2 \end{array}, \quad \begin{array}{l} \clubsuit \dot{x}_1 = x_2 \\ \heartsuit \dot{x}_2 = \gamma x_1 - x_2 \end{array}$$



## ЛЕКЦИЯ 4

### АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*Метод линеаризации. Функции Ляпунова. Грубые состояния равновесия трехмерных систем.*

Предыдущая лекция была посвящена исследованию состояний равновесия двумерных линейных систем. Было показано, что их характер может быть определен из анализа расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Перейдем теперь к исследованию состояний равновесия нелинейных систем.

#### 4.1. Метод линеаризации

Рассмотрим записанную в векторной форме нелинейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  – гладкая вектор-функция. Предположим, что система (4.1) имеет состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ . Введем малое возмущение  $\xi(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$ , для которого из системы (4.1) имеем

$$\dot{\xi} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \xi). \quad (4.2)$$

Раскладывая правую часть системы (4.2) в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + \dots, \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{A} \in n \times n$  – матрица Якоби с элементами

$$a_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^*}.$$

Отбросим в правой части (4.3) все нелинейные по  $\xi$  слагаемые и рассмотрим систему

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi. \quad (4.4)$$

Переход от нелинейной системы (4.3) к линейной системе (4.4) называется ее линеаризацией. Мы не будем пока обсуждать соотношение между траекториями систем (4.3) и (4.4), а рассмотрим возможные типы состояний равновесия линейной системы (4.4).

На предыдущих лекциях мы уже рассмотрели свойства системы (4.4) в одномерном и двумерном случаях. Как было показано, в этих случаях поведение траекторий зависит от корней характеристического уравнения.

Аналогичным свойством обладает и система (4.4), в случае когда размерность ее выше двух. Будем искать решение системы (4.4) в виде

$$\xi = Ce^{\lambda t}, \quad (4.5)$$

где  $C$  – постоянная матрица столбец. Подстановка (4.5) в (4.4) приводит к системе линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (4.6)$$

где  $E$  – единичная матрица. Уравнение (4.6) эквивалентно алгебраическому уравнению

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) называется характеристическим, а его корни – характеристическими показателями состояния равновесия  $x = x^*$ . Справедливы следующие, установленные А.М. Ляпуновым, утверждения.

- Если все корни уравнения (4.7) имеют отрицательные вещественные части, т.е.  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то состояние равновесия системы (4.4) асимптотически устойчиво.
- Если среди корней уравнения (4.7) есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то состояние равновесия системы (4.4) неустойчиво по Ляпунову.
- Если уравнение (4.7) не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеет некоторое число корней с нулевой вещественной частью, то состояние равновесия системы (4.4) может быть как устойчивым (но не асимптотически), так и неустойчивым.

Таким образом, вопрос об устойчивости состояний равновесия многомерных линейных систем сводится к исследованию характера корней алгебраического уравнения.

Вернемся теперь к исходной нелинейной системе (4.1), устойчивость состояний равновесия которой может быть установлена теоремами Ляпунова. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению (так называемый первый метод Ляпунова), если корни уравнения (4.7) удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то характер устойчивости состояний равновесия нелинейной системы (4.1) и соответствующей линеаризованной системы (4.7) совпадают. Таким образом, состояние равновесия системы (4.1) является асимптотически устойчивым, если  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и неустойчивым, если среди корней уравнения (4.7) имеется хотя бы один с положительной вещественной частью.



## 4.2. Критерий Рауса-Гурвица

Из сказанного выше следует, что решение задачи об устойчивости состояний равновесия нелинейных систем сводится к анализу расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, т.е. к чисто алгебраической задаче. Однако, в случае многомерных (размерности три и выше) систем, как правило, найти характеристические показатели  $\lambda_i$  в явном виде не удастся. Поэтому были развиты критерии и методы, позволяющие судить об устойчивости состояний равновесия без непосредственного решения характеристического уравнения. Одним из наиболее известных таких критериев является критерий Рауса-Гурвица.

Критерии устойчивости Рауса (Routh E.Y.) и Гурвица (Hurwitz A.), вошедших в литературу в виде единого критерия, были разработаны в конце 18-го века в связи с проблемами, возникающими в тот момент, в теории автоматического управления. Сформулируем этот критерий для уравнения (4.7) с вещественными коэффициентами. Без ограничения общности будем считать, что коэффициент  $a_0$  является положительным. Составим из коэффициентов  $a_j$  ( $j=0,1,2,\dots,n$ ) квадратную матрицу размерности  $n \cdot n$  в соответствии со следующими правилами.

- Первая строка матрицы состоит из коэффициентов с нечетными индексами, начиная с  $a_1$ .
- Элементы каждой последующей строки образуются из соответствующих элементов предшествующей строки уменьшением индексов на единицу.
- Если при таком построении индекс  $k$  какого-либо коэффициента  $a_k$  превосходит значение  $n$  или становится отрицательным, то он приравнивается нулю, т.е.  $a_k = 0$ .

В результате описанной процедуры получится  $n \cdot n$  матрица следующего вида

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0 \end{bmatrix}$$

Заметим, что на главной диагонали матрицы  $\mathbf{A}_R$  стоят последовательно все коэффициенты уравнения (4.7), начиная с  $a_1$ . Далее, выпишем все главные диагональные миноры матрицы  $\mathbf{A}_R$

$$\begin{aligned} \otimes_1 &= a_1, \quad \begin{vmatrix} \otimes_2 & a_3 \\ a_2 & \otimes_1 \end{vmatrix}, \dots, \otimes_n = a_n \otimes_{n-1}. \\ &= a_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Критерий Рауса-Гурвица состоит в следующем. Для того, чтобы все корни уравнения (4.7) с вещественными коэффициентами и  $a_0 > 0$  имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры были положительны

$$\otimes_n > 0, \quad \otimes_2 > 0, \dots, \otimes_{n-1} > 0, \otimes_n > 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, условия (4.9) гарантируют асимптотическую устойчивость состояния равновесия линейной (4.4) и нелинейной (4.1) систем. Однако заметим, что в случае нелинейной системы (4.1) это лишь локальная устойчивость в малой окрестности состояния равновесия.

В качестве примера применения критерия Рауса-Гурвица рассмотрим уравнение (4.7) в случае  $n=3$ . Для удобства перепишем это уравнение в следующем эквивалентном виде

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (4.10)$$

где

$$a = \frac{\overline{a_1}}{a_0}, \quad b = \frac{a_2}{a_0}, \quad c = \frac{a_3}{a_0}.$$

Введем, отвечающую уравнению (4.10), матрицу

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & a & c \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что главные диагональные миноры этой матрицы имеют вид

$$\otimes_1 = a, \quad \otimes_2 = ab - c, \quad \otimes_3 = c(ab - c). \quad (4.11)$$

Отсюда, согласно критерию Рауса-Гурвица, все корни уравнения (4.10) имеют отрицательные вещественные части, если параметры этого уравнения удовлетворяют неравенствам

$$a > 0, \quad ab - c > 0, \quad c > 0. \quad (4.12)$$

### 4.3. Второй метод Ляпунова

Рассмотрим еще один метод, позволяющий устанавливать условия устойчивости состояний равновесия без непосредственного нахождения

характеристических показателей. А.М. Ляпуновым была развита теория, в основе которой лежит построение специальных функций, позволяющих, в

случае их существования, судить об устойчивости и неустойчивости состояний равновесия. Эти функции получили название функций Ляпунова, а базирующаяся на них теория устойчивости – второго метода Ляпунова. Изложим кратко основные идеи этого метода для автономных систем.

Рассмотрим скалярную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  или в векторном виде  $V(\mathbf{x})$ , определенную в фазовом пространстве системы (4.1), непрерывную в некоторой области  $D$ , содержащей состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ . Кроме того, предположим, что  $V(\mathbf{x})$  имеет в  $D$  непрерывные частные производные. В основе второго метода Ляпунова лежит использование свойств так называемых **знакоопределенных** и **знакопостоянных** функций.

1. Функция  $V(\mathbf{x})$  называется **знакоопределенной** в области  $D$ , если она обращается в нуль лишь в состоянии равновесия и принимает значения одного знака во всех остальных точках области  $D$ . Очевидно, что знакоопределенные функции бывают двух типов – положительно и отрицательно определенные.
2. Функция  $V(\mathbf{x})$  называется **знакопостоянной** в области  $D$ , если она обращается в нуль не только в состоянии равновесия, но и в некоторых других точках области  $D$ , и имеет значения только одного знака во всех остальных точках области  $D$ .

Поясним смысл этих определений. Рассмотрим функции

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2.$$

Очевидно, что функция  $V_1$  является положительно определенной в области  $D = \mathbb{R}^3$ , а функция  $V_2$  – знакоположительной, поскольку она обращается в нуль не только в точке  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , но и при  $x_2 = 0, x_3 = -x_1$ .

Во втором методе Ляпунова задача об устойчивости состояний равновесия решается с помощью изучения поведения функции  $V(\mathbf{x})$  вдоль траекторий системы (4.1). Рассмотрим структуру поверхностей уровня  $V(\mathbf{x}) = C = \text{const}$  знакоопределенных функций, которую определяет следующее утверждение.

Если функция  $V(\mathbf{x})$  является знакоопределенной, то существует такое положительное число  $C^*$ , что все поверхности уровня  $V(\mathbf{x}) = C$ , где  $|C| < C^*$  являются замкнутыми относительно точки  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

Заметим, что поверхность  $V(\mathbf{x}) = C$  называется замкнутой, если на любой непрерывной линии, соединяющей точку  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  с точкой границы области  $D$ , существует по крайней мере одна точка, в которой  $V(\mathbf{x}) = C$ . Поясним свойства поверхностей уровня знакоопределенных функций на примере положительно определенных функций. На рис. 4.1a представлен пример простейшей

положительно определенной функции двух переменных. В этом примере ясно представлены основные свойства поверхностей уровня положительно определенных функций: они замкнуты, не имеют общих точек, окружают точку  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* = 0$  и стягиваются к ней при  $C \rightarrow 0$ .

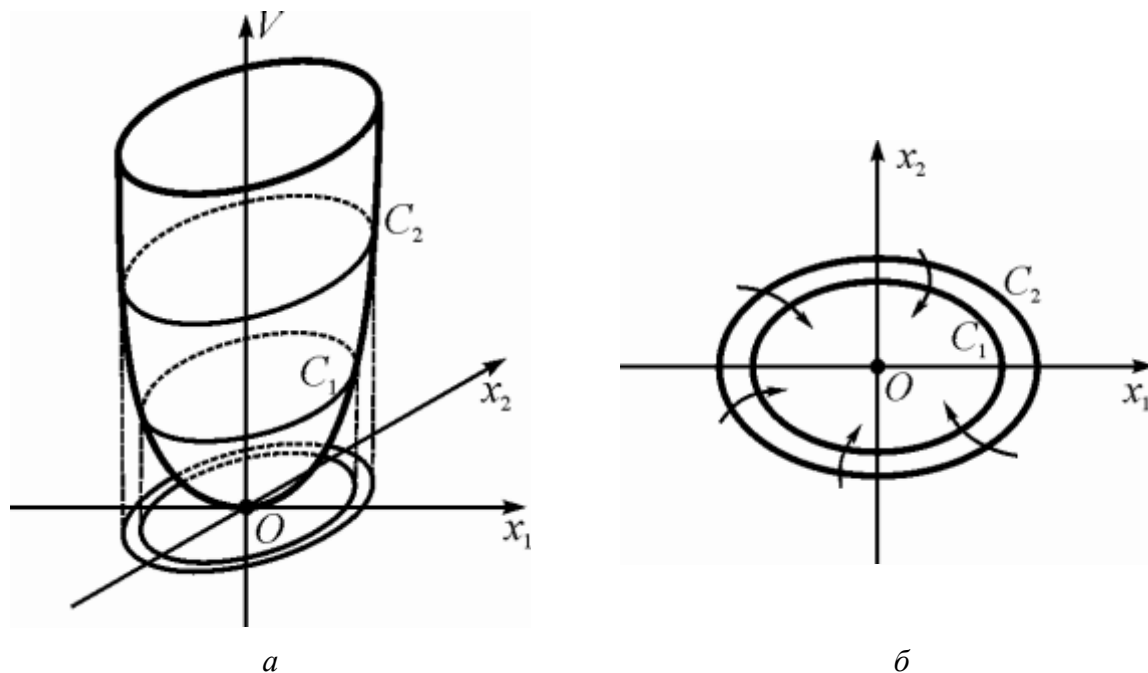


Рис. 4.1. Качественный вид положительно определенной функции двух переменных и линий уровня этой функции (а) и ориентация траекторий системы (4.1) на поверхностях уровня  $C_2 > C_1$  функции Ляпунова при выполнении теоремы об асимптотической устойчивости (б).

Поведение поверхностей уровня функции  $V(\mathbf{x})$  вдоль траекторий системы (4.1) может быть установлено с помощью производной по времени этой функции, вычисленной в силу системы (4.1). Такая производная находится следующим образом

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i = (\text{grad} V \circ F), \quad (4.13)$$

где круглые скобки означают скалярное произведение векторов. Заметим, что из (4.13) вытекает условие  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ , если  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

Сформулируем теперь теоремы Ляпунова, дающие достаточные условия устойчивости состояний равновесия.

**Теорема об устойчивости.** Если для системы (4.1) существует в области  $D$  знакоопределенная функция  $V(\mathbf{x})$ , производная которой по времени  $\dot{V}$ , вычисленная в силу системы (4.1), является **знакопостоянной** функцией, знака противоположного знаку функции  $V(\mathbf{x})$ , то состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  устойчиво в смысле Ляпунова.

**Теорема об асимптотической устойчивости.** Если для системы (4.1) существует **знакоопределенная** функция  $V(\mathbf{x})$ , производная которой по времени  $\dot{V}$ , вычисленная в силу этой системы, является также **знакоопределенной**, знака противоположного знаку  $V(\mathbf{x})$ , то состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  будет асимптотически устойчивым.

Поясним геометрический смысл теоремы об асимптотической устойчивости. Пусть для определенности функция  $V(\mathbf{x})$  будет положительно, а  $\dot{V}(\mathbf{x})$  - отрицательно определенными функциями. Неравенство  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  означает, что траектории системы (4.1) в точках поверхности  $V(\mathbf{x}) = C$  переходят снаружи внутрь, т.е. в направлении противоположном направлению вектора  $\text{grad} V$  (Рис. 4.1б). Отсюда, поскольку при  $C \geq 0$  поверхности  $V(\mathbf{x}) = C$  стягиваются в точку  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ , следует, что любая траектория системы (4.1) будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия, пересекая каждую из поверхностей  $V(\mathbf{x}) = C$  в одну и ту же сторону. Это означает, что состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  является асимптотически устойчивым, а поверхность уровня  $V(\mathbf{x}) = C_{\max}$ , соответствующая наибольшему значению константы  $C$ , при которой условия теоремы выполняются, выделяет в фазовом пространстве область, принадлежащую области притяжения состояния равновесия. Заметим, если,  $C_{\max} \rightarrow \infty$ , то состояние равновесия является асимптотически устойчивым при любых начальных условиях, т.е. устойчивым в целом.

**Пример.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_2^3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Нетрудно видеть, что система (4.14) имеет единственное состояние равновесия в начале координат -  $O(x_1 = x_2 = 0)$ . Введем в рассмотрение положительно определенную функцию

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

и вычислим ее производную в силу системы (4.14)

$$\dot{V} = x_1 \oplus x_1 + x_2 \oplus x_2 = -x_1^2 - x_2^2 - x_1^4 - x_2^4 \leq 0. \quad (4.15)$$

В силу (4.15)  $V(x_1, x_2)$  - отрицательно определенная функция во всех точках фазовой плоскости, отличных от состояния равновесия  $O$ . Следовательно,  $V(x_1, x_2)$  - функция Ляпунова и состояние равновесия  $O$  является асимптотически устойчивым в целом. Заметим, что с помощью метода линеаризации можно было бы установить устойчивость состояния равновесия  $O$  лишь в малом.



Таким образом, второй метод Ляпунова является эффективным способом изучения устойчивости состояний равновесия нелинейных систем не только в малом, но и в большом. Этот метод может быть также применен к системам с угловыми координатами. Для таких систем из существования функции Ляпунова, периодической по угловым координатам, вытекает глобальная асимптотическая устойчивость системы (см. лекцию 11). Однако, к сожалению, не существует стандартных способов построения функций Ляпунова для нелинейных систем и, как правило, каждая система требует своего индивидуального подхода. Наиболее часто функции Ляпунова ищутся в виде квадратичных форм переменных исследуемых систем.

Обратим также внимание еще на одно важное свойство поверхностей уровня знакоопределенных функций. Поверхность, на которой производная  $V$  в силу системы (4.1) является знакоопределенной, называется **поверхностью без контакта**. В некоторых случаях с помощью таких поверхностей можно получить ряд полезных свойств о поведении траекторий системы (4.1) в фазовом пространстве, хотя при этом функция Ляпунова не существует. Например, выделить в фазовом пространстве так называемую поглощающую область (см. лекцию 1), оценить локализацию аттракторов и др.

#### 4.4. Грубые состояния равновесия трехмерных систем

Метод линеаризации позволяет установить локальную устойчивость или неустойчивость грубых состояний равновесия нелинейных систем, но ничего не говорит о том, каким образом траектории приближаются к состоянию равновесия или удаляются от него. Для понимания этих свойств исследуем структуру разбиения фазового пространства на траектории в окрестности состояний равновесия трехмерных систем. Следуя методу линеаризации, рассмотрим сначала линейную систему (4.4). Предположим, что среди характеристических показателей состояния равновесия нет кратных и  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0, \quad i=1,2,3$ .

##### 4.4.1. Действительные корни

В этом случае линейной заменой переменных  $\mathbf{u} = \mathbf{H}\xi$ , где  $\mathbf{H}$  -  $3 \times 3$  матрица, система (4.4) может быть приведена к следующему виду

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2, \quad \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3. \quad (4.14)$$

Система (4.14) – нормальная форма уравнений для состояний равновесия с действительными различными характеристическими показателями линейных трехмерных систем. Общее решение системы (4.14) имеет вид





$$u_1 = u_1^0 e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_2^0 e^{\lambda_2 t}, \quad u_3 = u_3^0 e^{\lambda_3 t}, \quad (4.15)$$

где  $u_i^0 \neq \text{const}$ .

#### 4.4.1.a Корни $\lambda_i$ одного знака

**1. Случай отрицательных корней.** Из (4.15) следует, что в этом случае при любых начальных условиях при  $t \rightarrow \infty$  траектории системы (4.14) стремятся к состоянию равновесия  $O(u_1 = u_2 = u_3 = 0)$ , которое является асимптотически устойчивым и называется устойчивым узлом. Рассмотрим, как именно траектории в фазовом пространстве  $R^3$  подходят к точке  $O$ . Пусть для определенности  $\lambda_i$  упорядочены следующим образом:  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Прежде всего заметим, что плоскость  $\{u_1 = 0\}$  инвариантна относительно системы (4.14), т.е. траектории системы (4.14) с начальными условиями на этой плоскости целиком принадлежат ей. Поскольку  $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$ , траектории системы (4.14) на плоскости  $\{u_1 = 0\}$  ведут себя аналогично траекториям устойчивого узла двумерных систем (см. лекцию 3, рис. 4.2а).

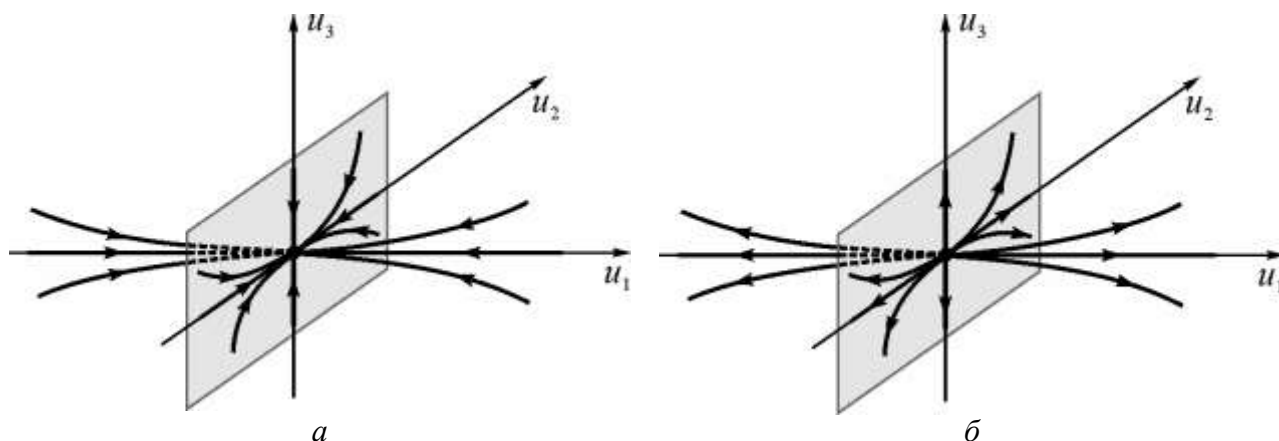


Рис. 4.2. Состояние равновесия системы (4.14): устойчивый узел (а); неустойчивый узел (б).

Пусть теперь  $u_1 \neq 0$ . Из (4.15) имеем

$$\frac{u_2}{u_1} = \text{const} \oplus e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \quad \frac{u_3}{u_1} = \text{const} \oplus e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t}. \quad (4.16)$$

В силу (4.16) при  $t \rightarrow \infty$  переменная  $u_1(t)$ , при стремлении к состоянию равновесия  $O$ , убывает медленнее, чем переменные  $u_2(t)$  и  $u_3(t)$ . Следовательно, все траектории системы (4.14), за исключением траекторий плоскости  $\{u_1 = 0\}$ , касаются в состоянии равновесия прямой  $\{u_2 = u_3 = 0\}$ , которая является ведущим направлением узла (Рис. 4.2а).

**2. Случай положительных корней.** Пусть уравнение (4.10) имеет только положительные корни, упорядоченные для определенности следующим

образом:  $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$ . В силу (4.15) все траектории системы (4.14) покидают окрестность состояния равновесия  $O$ , которое в этом случае является неустойчивым и называется неустойчивым узлом. Поведение траекторий в окрестности неустойчивого узла устанавливается аналогично предыдущему случаю и показано на рис. 4.2б.

#### 4.4.1.б. Корни $\lambda_i$ разного знака

##### 1. Случай одного положительного и двух отрицательных корней.

Предположим, что уравнение (4.10) имеет следующие корни:  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0, \lambda_3 > 0$ . Непосредственно из системы (4.14) следует, что все траектории с начальными условиями на плоскости  $E^s = \{u_1, u_2\} \times \mathbb{R}^2, u_3 = 0\}$  целиком принадлежат этой плоскости, т.е.  $E^s$  инвариантна относительно системы (4.14). Движения на плоскости  $E^s$  определяются первыми двумя уравнениями системы (4.14), которые задают на ней устойчивый узел. При этом прямая  $\{u_2 = 0\}$  является ведущим, а прямая  $\{u_1 = 0\}$  - неведущим направлениями этого узла (Рис. 4.3, а).

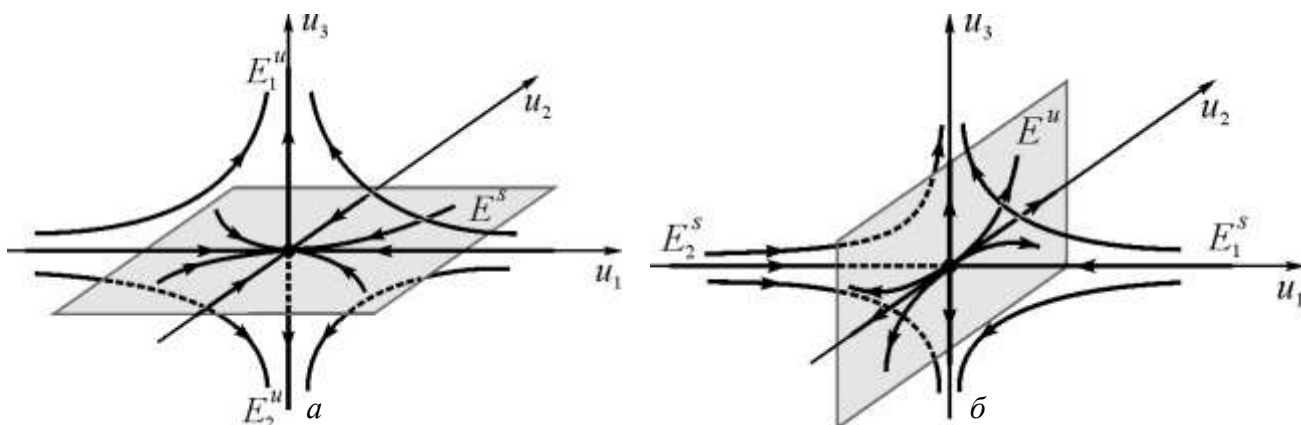


Рис. 4.3. Состояния равновесия системы (4.14): седло с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями (а); седло с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (б).

Очевидно, что прямая  $E^u = \{u_1 = u_2 = 0, u_3 \in \mathbb{R}\}$  также инварианта относительно системы (4.14). Движения на этой прямой определяются третьим уравнением системы (4.14). Поскольку  $\lambda_3 > 0$ , то для траекторий системы (4.14) с начальными условиями на этой прямой выполняется либо условие  $u_3(t) \rightarrow \infty$ , либо  $u_3(t) \rightarrow -\infty$  (Рис. 4.3а). Рассмотрим поведение траекторий с начальными условиями вне  $E^s$  и  $E^u$ . Введем в рассмотрение функцию

$$V(u_1, u_2) = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2}.$$

Производная этой функции в силу системы (4.14) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \mathcal{L}_1 u_1^2 + \mathcal{L}_2 u_2^2 < 0, \text{ если } (u_1, u_2) \in E^u. \quad (4.17)$$

В силу (4.17) поверхности уровня  $V(u_1, u_2) = C = \text{const}$  являются поверхностями без контакта, каждую из которых траектории системы (4.14) пересекают с внешней стороны во внутрь. Отсюда, поскольку  $V(u_1, u_2) = C$  имеет вид цилиндрических поверхностей, стягивающихся к прямой  $E^u$  при  $C \rightarrow 0$ , вытекает, что траектории с начальными условиями вне прямой  $E^u$  асимптотически приближаются к ней и стремятся к состоянию равновесия на  $E^s$ . Качественное поведение траекторий системы (4.14) в рассматриваемом случае представлено на рис. 4.3а. Такое состояние равновесия называется седлом, а плоскость  $E^s$  - устойчивым,  $E^u$  - неустойчивым многообразиями этого седла. Заметим, что неустойчивое многообразие  $E^u$  состоит из двух полупрямых  $E_1^u, E_2^u$  и точки  $O$  (Рис. 4.3а). Эти полупрямые называются неустойчивыми сепаратрисами седла.

**2. Случай одного отрицательного и двух положительных корней.** Пусть корни уравнения (4.10) упорядочены следующим образом:  $\mathcal{L}_3 > \mathcal{L}_2 > 0 > \mathcal{L}_1$ . Аналогично предыдущему можно показать, что в этом случае состояние равновесия  $O$  является также седлом. Однако, это седло имеет двумерное неустойчивое многообразие  $E^u = \{u_1 = 0, (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2\}$  и одномерное устойчивое многообразие  $E^s = \{u_2 = u_3 = 0, u_1 \in \mathbb{R}\}$  (Рис. 4.3б). Такое седло имеет две устойчивые одномерные сепаратрисы -  $E_1^s$  и  $E_2^s$ .

#### 4.4.2. Комплексные корни

Предположим, что уравнение (4.10) имеет пару комплексно-сопряженных корней:  $\mathcal{L}_{1,2} = \langle \pm i\mathbb{R} \rangle$  и один вещественный корень  $\mathcal{L}_3$ . Нормальная форма уравнений линейной системы (4.4) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \langle u_1 \rangle \mathbb{R} u_2, \\ \dot{u}_2 &= \mathbb{R} u_1 + \langle u_2 \rangle, \\ \dot{u}_3 &= \mathcal{L}_3 u_3. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Очевидно, что система (4.18) имеет двумерное (плоскость  $\{u_3 = 0\}$ ) и одномерное (прямая  $\{u_1 = u_2 = 0\}$ ) инвариантные многообразия. Устойчивость этих многообразий определяется знаком величин  $\langle \mathcal{L}_1 \rangle$  и  $\mathcal{L}_3$ .

#### 4.4.2.а. Вещественные части корней $\lambda_i$ одного знака

**1. Случай**  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  и  $\lambda_3 < 0$ . При этих условиях состояния равновесия  $O$  имеет одномерное  $E^{s_1} = u_1 = u_2 = \{0, u_3 \in R\}$  и двумерное  $E^{s_2} = u_3 = 0, (u_1, u_2) \in R^2$  устойчивые многообразия. Поведение траекторий системы (4.18) с начальными условиями вне этих многообразий установим с помощью функции  $V(u_1, u_2)$ , удовлетворяющей в силу (4.18) следующему условию

$$\frac{dV}{dt} = -\langle \dot{u}_1^2 + u_2^2 \rangle < 0, \text{ если } (u_1, u_2) \in E^{s_1}. \quad (4.19)$$

Из (4.19) вытекает, что рассматриваемые траектории асимптотически приближаются к прямой  $E^{s_1}$ , пересекая без контакта цилиндрические поверхности уровня, стягивающиеся к  $E^{s_1}$ . При этом в  $R^3$  траектории стремятся к состоянию равновесия и демонстрируют спиральное поведение, возникающее в силу осцилляторного затухания переменных  $u_1$  и  $u_2$ . Такое состояние равновесия является асимптотически устойчивым и называется устойчивым фокусом (Рис. 4.4а).

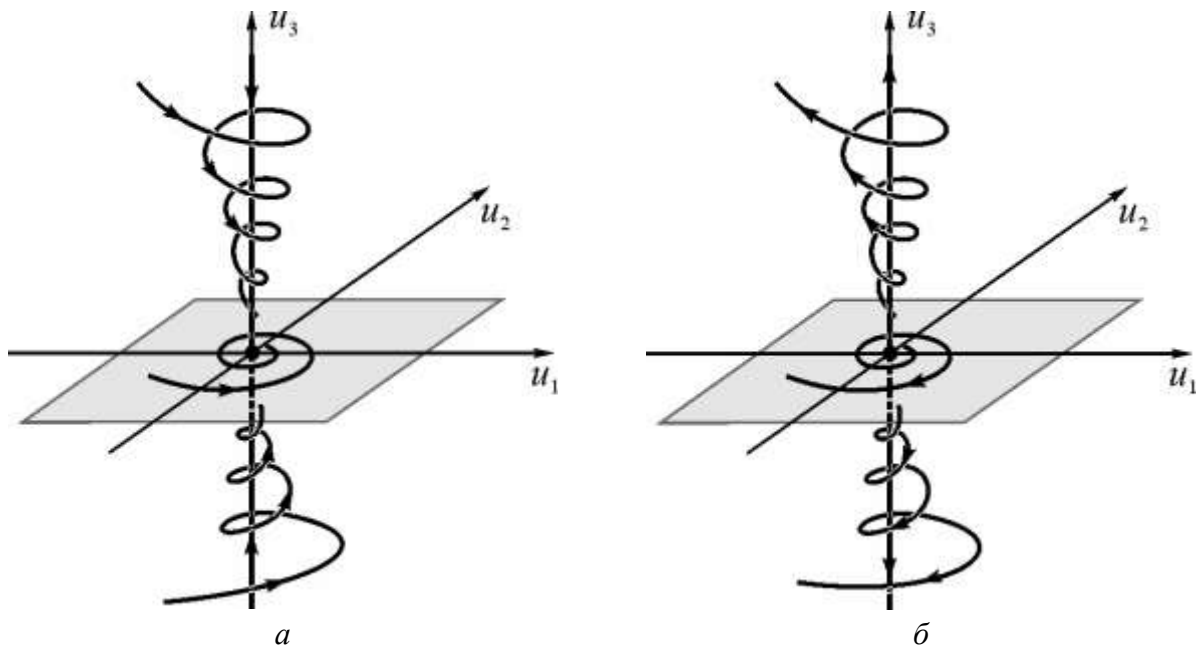


Рис. 4.4. Состояние равновесия системы (4.18): устойчивый фокус (а); неустойчивый фокус (б).

**2. Случай**  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$  и  $\lambda_3 > 0$ . Поведение траекторий системы (4.18) при таких характеристических показателях можно легко установить, сделав в системе замену  $t \rightarrow -t$ . Такая замена сводит данный случай к предыдущему.

Следовательно, искомый фазовый портрет подобен портрету, представленному на рис. 4.4а, в котором надо лишь изменить направление движения по траекториям на противоположное. Полученное состояние равновесия называется неустойчивым фокусом (Рис. 4.4б).

#### 4.4.2.б. Вещественные части корней $\lambda_i$ разных знаков

**1. Случай**  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  и  $\lambda_3 > 0$ . При этих условиях двумерное многообразие  $E^s = \{u_3 = 0, (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\}$  является устойчивым, а двумерное  $E^u = \{u_1 = u_2 = 0, u_3 \in \mathbb{R}\}$  - неустойчивым. На многообразии  $E^s$  система (4.18) имеет устойчивый двумерный фокус, а  $E^u$  состоит из двух неустойчивых сепаратрис  $E_1^u, E_2^u$  и точки  $O$ . Принимая во внимание неравенство (4.19), устанавливаем, что все траектории, вне многообразий  $E^s$  и  $E^u$ , асимптотически приближаются к прямой  $E^u$ , удаляясь при этом от состояния равновесия. Фазовый портрет такого состояния равновесия представлен на рис. 4.5а. Оно называется седло-фокусом.

**2. Случай**  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$  и  $\lambda_3 < 0$ . Обратив в системе (4.18) время  $t \rightarrow -t$ , мы получим рассмотренный выше случай. Поэтому для построения фазового портрета изучаемого состояния равновесия достаточно просто изменить на рис. 4.5а направление движения по траекториям на противоположное. В результате получится состояние равновесия, представленное на рис. 4.5б, которое также называется седло-фокусом. Однако, у этого состояния равновесия неустойчивым является двумерное многообразие, а устойчивым – одномерное многообразие.

#### 4.4.3. Состояние равновесия трехмерных нелинейных систем

Рассмотрим поведение траекторий нелинейной трехмерной системы (4.1) в окрестности состояния равновесия. Если состояние равновесия является грубым ( $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0, i=1,2,3$ ) то существует непрерывное взаимно-однозначное отображение, имеющее непрерывное обратное отображение, под действием которого каждая траектория из окрестности состояния равновесия нелинейной системы (4.1) переводится в траекторию из окрестности состояния равновесия линеаризованной системы с сохранением направления движения (теорема Гробмана-Хартмана). Следовательно, структура окрестности состояния равновесия нелинейной системы качественно выглядит также как окрестность состояния равновесия соответствующей линеаризованной системы. При этом размерность и устойчивость многообразий линеаризованной и нелинейной

систем совпадают. Однако, многообразия нелинейной системы представляют собой, вообще говоря, некоторые поверхности и кривые, а не плоскости и прямые, как в случае линеаризованной системы. Инвариантные многообразия состояния равновесия нелинейной системы касаются в этом состоянии

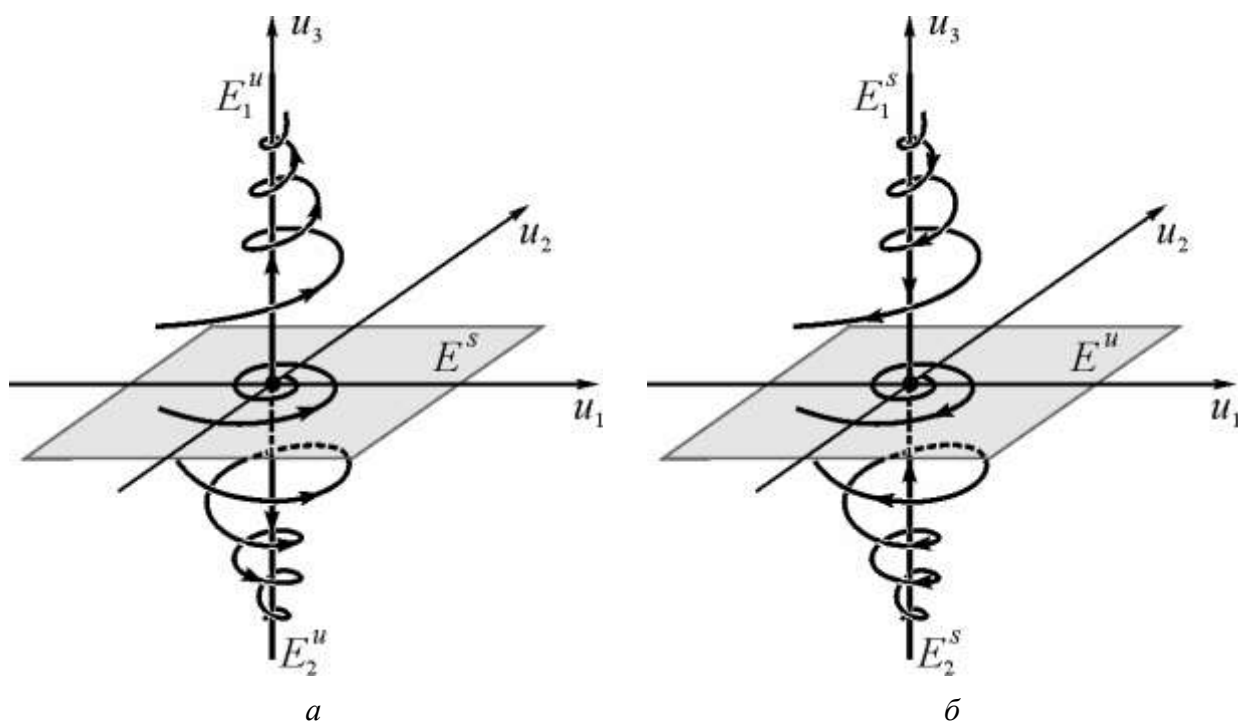


Рис. 4.5. Состояние равновесия системы (4.18): седло-фокус с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями (а); седло-фокус с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (б).

равновесия многообразий линеаризованной системы (теорема Адамара-Перрона).

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \clubsuit \dot{x} &= x - y^2 - z^2, \\ \square \dot{y} &= -y, \\ \heartsuit \dot{z} &= -z. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Система (4.20) имеет единственное состояние равновесия -  $O(x = y = z = 0)$  с характеристическими показателями:  $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = -1$ . Следовательно,  $O$  – седло. Нетрудно видеть, что многообразия седла линеаризованной системы имеют вид

$$\begin{aligned} E^s &= \{x = 0, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}, \\ E^u &= \{y = z = 0, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, непосредственно из (4.20) следует, что неустойчивое многообразие  $W^u$  седла  $O$  системы (4.20) совпадает с прямой  $E^u$ , а устойчивое многообразие  $W^s$  задается следующим образом

$$W^s = \left\{ x = \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} \right\}$$

Качественный вид многообразий седла иллюстрирует рис. 4.6, который ясно показывает принципиальное различие инвариантных многообразий нелинейных и линеаризованных систем. Заметим, что совпадение  $W^u$  и  $E^u$  в системе (4.20) носит частный характер и не отражает общей ситуации.

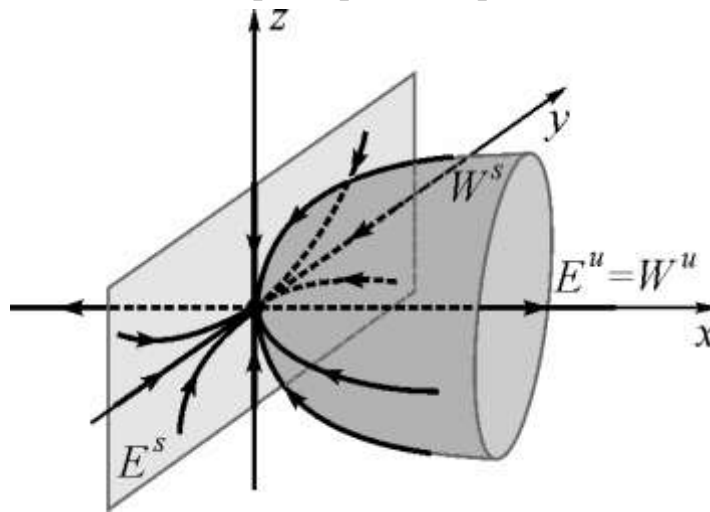


Рис. 4.6. Многообразие линеаризованной  $\square E^s, E^u$  и нелинейной системы (4.20) -  $W^s, W^u$ .

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что утверждения, сформулированные выше, относительно свойств состояний равновесия трехмерных систем имеют соответствующие аналоги и для систем произвольной размерности.

#### 4.4.4. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма

Характеристическое уравнение (4.10) содержит три параметра  $a, b$  и  $c$ , от значения которых зависит расположение корней этого уравнения на комплексной плоскости и, следовательно, тип состояния равновесия  $O$ . Установим связь между параметрами  $a, b, c$  и характером состояния равновесия. Согласно результатам, изложенным в разделах 4.2, 4.4, разбиение пространства параметров  $\{a, b, c\}$  на области, соответствующие различным типам состояний равновесия  $O$  определяется следующими условиями

$$a = 0, \quad ab \square c = 0, \quad c = 0, \quad D = 0, \quad (4.21)$$



где  $D$  - дискриминант уравнения (4.10) имеющей вид

$$D = \frac{b^3}{27} - \frac{a^2 b^2}{108} + \frac{a^3 c}{27} - \frac{abc}{6} + \frac{c^2}{4}.$$

Уравнение (4.10) имеет действительные корни, если  $D < 0$  и один действительный и два комплексно-сопряженных корня, если  $D > 0$ . При  $D = 0$  корни уравнения (4.10) действительные, два из которых равны между собой. Зафиксируем параметры и рассмотрим двухпараметрическую задачу, считая  $b$  и  $c$  контрольными параметрами.

**Случай**  $a = \text{const} > 0$ . Из условий (4.21) следует, что разбиение плоскости  $(b, c)$  (см. рис. 4.7) на области, соответствующие различным типам состояний равновесия осуществляется следующими бифуркационными кривыми

$$C^{\pm} = \{ c = \frac{a(9b \mp 2a^2) \pm 2(a^2 \mp 3b)^{3/2}}{27}, b < \frac{a^2}{3} \},$$

$$S = \{ c = ab, b > 0 \}, \quad B^+ = \{ c = 0, b > \frac{a^2}{4} \},$$

$$B^0 = \{ c = 0, 0 < b < \frac{a^2}{4} \}, \quad B^- = \{ c = 0, b < 0 \}.$$

Кривые  $C^+$  и  $C^-$  соответствуют обращению в нуль дискриминанта  $D$ . Уравнение (4.10) имеет действительные корни в области, заключенной между кривыми  $C^+$  и  $C^-$  и пару комплексно-сопряженных корней вне этой области. Кривая  $C^+$  выпукла вниз и имеет минимум в начале координат, а  $C^-$  - монотонно-возрастающая кривая выпуклая вверх. Они смыкаются в точке  $C^0 (b = a^2/3, c = a^3/27)$ , в которой уравнение (4.10) имеет трехкратный корень  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -a/3$ . На полупрямой  $S$  уравнение (4.10) имеет один отрицательный и пару чисто мнимых корней. Точкам полупрямых  $B^+$  и  $B^-$  соответствует существование у уравнения (4.10) одного нулевого корня. Два других корня в случае  $B^+$  являются комплексно-сопряженными с отрицательной вещественной частью, и в случае  $B^-$  - действительными

и разных знаков. Для значений параметров, принадлежащих отрезку  $B^0$ , уравнение (4.10) имеет один нулевой и два отрицательных корня. При  $b = c = 0$  уравнение (4.10) имеет один отрицательный и два нулевых корня.

Таким образом, на плоскости  $(b, c)$  существует шесть (рис. 4.7) областей, точкам которых отвечает шесть различных типов грубого состояния равновесия  $O$ . Заметим, что область, соответствующая асимптотической устойчивости



состояния равновесия, имеет «клинообразную» форму и заключена между полупрямыми  $S$  и  $\{c = 0, b > 0\}$ .

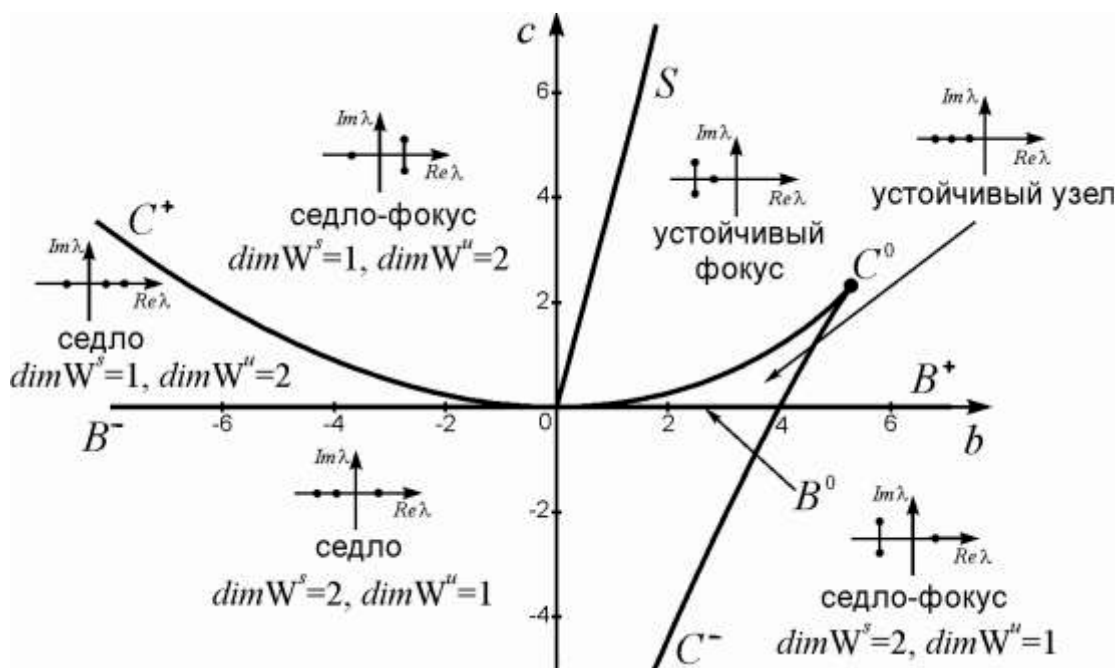


Рис. 4.7. Разбиение плоскости параметров  $(b, c)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия системы (4.4) в случаях  $a > 0$  ( $a = 4$ ).

**Случай  $a = 0$ .** При  $a = 0$  область асимптотической устойчивости отсутствует, отрезок  $B^0$  стягивается в точку – начало координат, а кривые  $C^+$  и  $C^-$  целиком расположены в области  $b < 0$  (Рис. 4.8). В этом случае на полупрямой  $B^+$  уравнение (4.10) имеет, кроме одного нулевого, еще пару чисто мнимых корней, а в начале координат – трехкратный нулевой корень. На плоскости  $(b, c)$  существует четыре области, соответствующие различным типам грубого состояния равновесия  $O$ .

**Случай  $a < 0$ .** Как и при  $a > 0$ , здесь разбиение плоскости  $(c, b)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия, осуществляют бифуркационные линии  $C^\pm, S, B^\pm$  и  $B^0$  (Рис. 4.9). Однако, расположение корней уравнения (4.10) на комплексной плоскости, когда параметры принадлежат  $B^+, B^0$  и  $S$  отличается от случая  $a > 0$ . Именно, точкам полупрямой  $B^+$  отвечает один нулевой и два комплексно-сопряженных корня с положительной вещественной частью, отрезка  $B^0$  – один нулевой и два положительных корня, а полупрямой  $S$  – один положительный и два чисто мнимых корня. Изменился также вид кривых  $C^+$  и  $C^-$ . Кривая  $C^+$  стала монотонно убывающей и выпуклой вниз, а  $C^-$  – выпуклой вверх, имеющей максимум в начале координат. При  $a < 0$  состояние равновесия всегда неустойчиво по Ляпунову и на плоскости  $(b, c)$  существуют шесть областей, отвечающих различным типам состояния равновесия  $O$ .

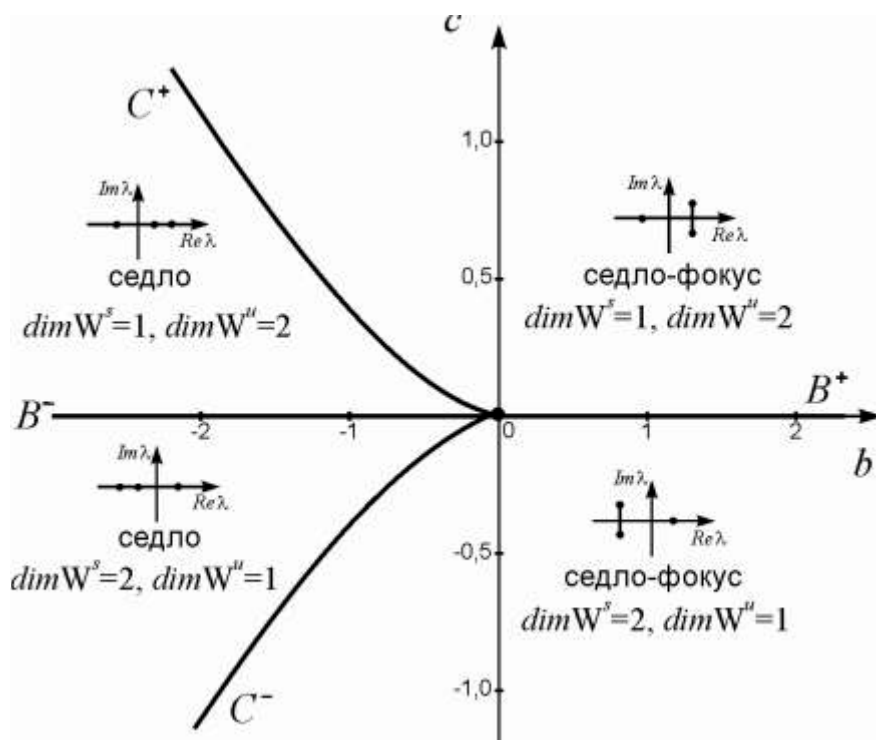


Рис. 4.8. Разбиение плоскости параметров  $(b, c)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия системы (4.4) в случае  $a = 0$ .

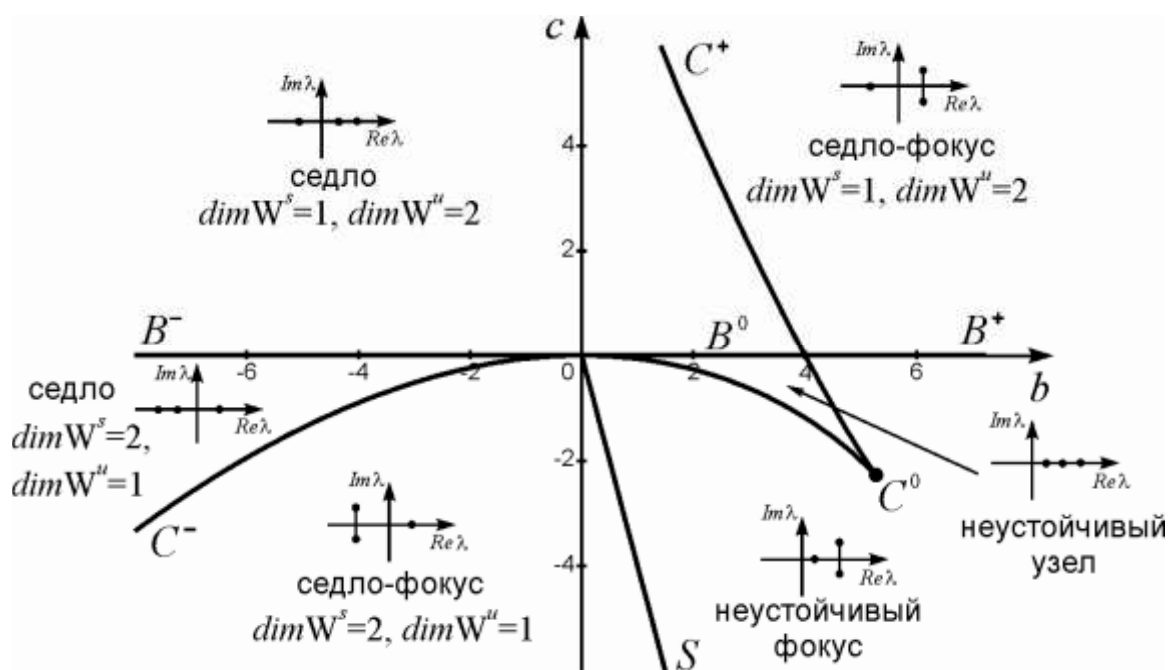


Рис. 4.9. Разбиение плоскости  $(b, c)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия системы (4.4) в случае  $a < 0$  ( $a = -4$ ).

## 4.5. Контрольные вопросы и задания

1. Рассмотрим так называемый эксперимент Рэлея-Бенара, состоящий в следующем. Слой жидкости, имеющий положительный коэффициент объемного расширения, подогревается снизу в поле тяготения. Теплая жидкость, возникающая вблизи дна, старается подняться вверх, а холодная, вблизи верхней границы слоя, - опуститься вниз. Этим процессам противодействуют вязкие силы. Результат такой «конкуренции» зависит от разности  $\Delta T$  температур между нижним и верхним слоями жидкости. Существует два пороговых значения  $\Delta T: \Delta T_1, \Delta T_2$ . При  $\Delta T < \Delta T_1$  жидкость покоится и тепло переносится постоянной теплопроводностью. Преодоление этого порога вызывает движение жидкости в форме стационарных конвективных валов. Валы теряют устойчивость при  $\Delta T = \Delta T_2$ . Дальнейшее увеличение  $\Delta T$  приводит к хаотическому движению. В 1963 году Лоренц, базируясь на экспериментах Рэлея-Бенара, построил упрощенную модель атмосферной конвекции, ориентированную на проблему долгосрочного прогноза погоды. Эта модель, получившая в дальнейшем имя Лоренца, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= bz + xy, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где  $\sigma$  - число Прандтля, характеризующее отношение кинематической вязкости и теплопроводности,  $r \sim \Delta T, b$  положительный параметр,

описывающий геометрию системы (взаимосвязь толщины слоя и размеров конвективных валов), переменная  $x$  характеризует интенсивность конвекции,  $y$  - разность температур между восходящим и нисходящим потоками,  $z$  - отклонение вертикального температурного профиля от линейного.

Найдите и классифицируйте состояние равновесия системы Лоренца, имеющие следующий физический смысл. При  $r < 1$  тривиальное состояние равновесия соответствует процессу чистой теплопроводности без конвекции, а нетривиальные состояния равновесия (при  $r > 1$ ) - стационарной конвекции. Постройте функцию Ляпунова в виде квадратичной формы и покажите, что при  $r < 1$  тривиальное состояние равновесия является устойчивым в целом.

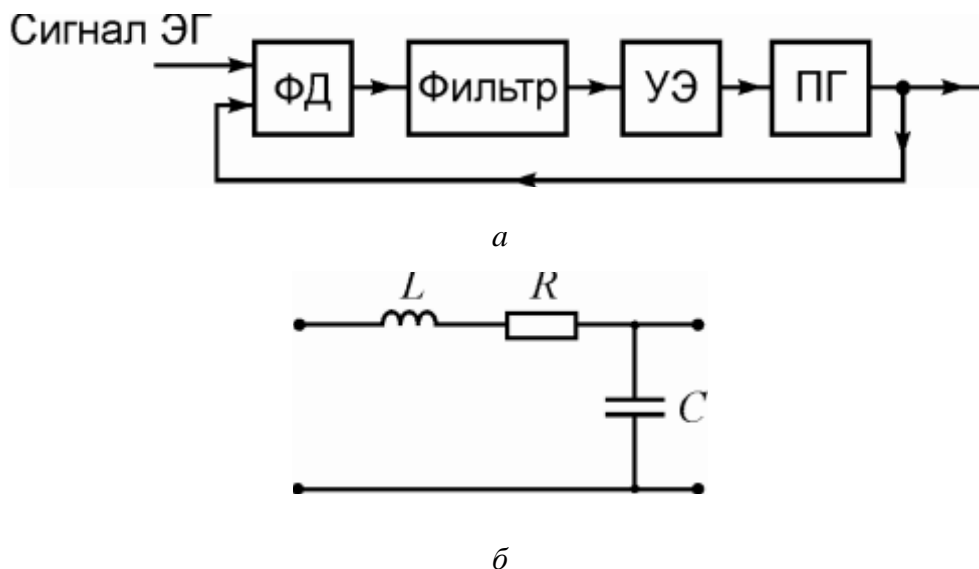
2. В современной радиотехнике и электросвязи широко распространены системы фазовой автоподстройки (ФАП), которые также часто называют системами фазовой синхронизации. Основная задача, решаемая системами ФАП, состоит в подстройке частоты одного генератора под частоту другого, выступающего в качестве эталонного генератора. Система ФАП представляет собой систему автоматического управления (Рис. 4.10а). Сигналы от эталонного (ЭГ) и подстраиваемого генераторов (ПГ) подаются на фазовый детектор (ФД), выходное напряжение которого определяется разностью фаз напряжений на его



входе. Сигнал с выхода фазового детектора через фильтр нижних частот поступает на управляющий элемент (УЭ), который изменяет частоту подстраиваемого генератора под частоту эталонного генератора. При равенстве частот генераторов, т.е. в режиме синхронизма, в системе ФАП устанавливается постоянная разность фаз между сигналами подстраиваемого и эталонного генераторов, а выходное напряжение фазового детектора постоянно. Динамические процессы, происходящие в системе ФАП, описываются дифференциальным уравнением, имеющим в операторной форме следующий вид

$$p\Pi + \Delta K(p)F(\Pi) = \Delta_H, \quad (4.23)$$

где  $p \propto d/dt$  - оператор дифференцирования,  $\Pi$  - мгновенное значение разности фаз генераторов,  $\Delta$  - максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления,  $K_p$  - коэффициент передачи фильтра нижних частот,  $F(\Pi)$  - характеристика фазового детектора,  $\Delta_H$  - начальная расстройка частот генераторов. Уравнение (4.23) имеет простой физический смысл, состоящий в «балансе» частот в системе ФАП в любой момент времени. Другими словами, сумма мгновенной разности частот  $\Pi$  и расстройки, вносимой управляющим элементом, равна начальной расстройке.



**Рис. 4.10.** Блок-схема типовой системы ФАП (а); схема RLC фильтра (б).

Найдите коэффициент передачи  $RLC$  фильтра (Рис. 4.10б). Получите систему уравнений, описывающую динамику системы ФАП с этим фильтром, полагая  $F(\Pi) = \sin \Pi$ . Исследуйте состояние равновесия полученной системы и

выделите среди них асимптотически устойчивое, соответствующее стационарному режиму синхронизма системы ФАП.





## ЛЕКЦИЯ 5

### ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

*Гармонические и затухающие колебания. Консервативный и диссипативный нелинейные осцилляторы. Изохронные и неизохронные колебания*

Осциллятор – простейшая динамическая система с двумерным фазовым пространством. Несмотря на простоту, с помощью этой системы можно описать важнейшие колебательные процессы: периодические, затухающие и нарастающие. Круг реальных задач, приводящих к модели в виде осциллятора, чрезвычайно широк и имеет самую разнообразную природу. Например, к таким задачам относятся различные механические устройства, в которых происходит взаимодействие масс и упругих сил, электрические контуры, содержащие ёмкостные и индуктивные компоненты, некоторые виды акустических резонаторов, простейшие популяционные задачи и др. Изучение динамических свойств осцилляторов мы начнём с задач, в которых нелинейные механизмы отсутствуют или пренебрежимо малы.

#### 5.1. Динамика линейного осциллятора

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых ёмкости  $C$ , индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$  (рис.5.1а). Обозначим через  $q$  заряд конденсатора  $C$ . Согласно закону Кирхгофа

$$u_R + u_L + u_C = 0, \quad (5.1)$$

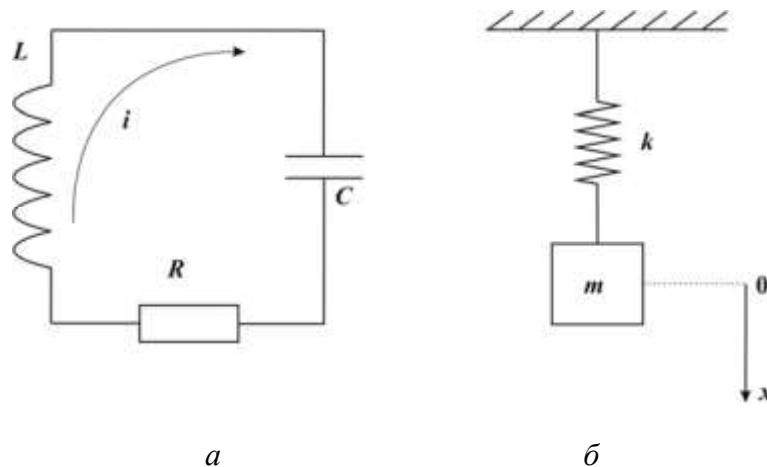


Рис.5.1. Линейные осцилляторы: электрический контур (а); груз массы  $m$  на пружине с жёсткостью  $k$ , совершающий малые колебание около положения равновесия (б).

т.е. сумма падений напряжения на элементах контура равна нулю, поскольку в цепи отсутствуют внешние источники напряжения. Пусть  $i$  – ток, протекающий в контуре, который, как известно, связан с зарядом  $q$  следующим образом

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (5.2)$$

Тогда для напряжения на элементах контура можно записать

$$u_R = Ri = R \frac{dq}{dt}, \quad u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad u_C = \frac{q}{C}. \quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в (5.1), получим уравнение

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (5.4)$$

Перепишем уравнение (5.4), для удобства дальнейшего изложения, в следующем эквивалентном виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma_0^2 x = 0, \quad (5.5)$$

где

$$2\gamma = \frac{R}{L}, \quad \gamma_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Реальные системы, динамика которых описывается уравнением (5.5), принято называть **линейными осцилляторами**. Уравнение (5.5) содержит два параметра, имеющих ясный смысл:  $\gamma_0$  – частота собственных колебаний, а параметр  $\gamma$  характеризует потери в системе.

Другим примером линейного осциллятора может служить груз на пружине (рис.5.1б), совершающий малые колебания вблизи положения равновесия при наличии силы трения пропорциональной скорости  $\dot{x}$ . Динамика такой системы также описывается уравнением (5.5), в котором  $x$  – смещение груза из положения равновесия.

### 5.1.1. Гармонический осциллятор

Предположим, что в изолированной физической системе отсутствует рассеяние энергии, вызванное переходом энергии движения в тепловую энергию. В таких идеализированных системах запас энергии остаётся постоянным, и они называются **консервативными**.

Покажем, что системы, динамика которых описывается уравнением (5.5) при  $\gamma=0$ , являются консервативными, и выясним основные свойства таких систем. При  $\gamma=0$  представим уравнение (5.5) в виде

$$\begin{cases} \spadesuit x = y, \\ \heartsuit y = \omega_0^2 x \end{cases} \quad (5.6)$$

Очевидно, что система (5.6) имеет единственное состояние равновесия в начале координат, корни характеристического уравнения которого имеют вид:  $\omega_{1,2} = \pm i \omega_0$ . Следовательно (см. лекцию 3), это состояние равновесия является центром, и на фазовой плоскости  $(x, y)$  любая траектория, отличная от состояния равновесия, представляет собой замкнутую кривую. Уравнение соответствующих интегральных кривых без труда можно найти из системы (5.6) путём её сведения к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{y^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = C, \quad C = \text{const} \geq 0. \quad (5.7)$$

Из (5.7) следует, что нетривиальные интегральные кривые системы (5.6) имеют вид эллипсов, оси которых совпадают с координатными осями. На фазовой плоскости  $(x, y)$  согласно первому уравнению в (4.6) переменная  $x$  вдоль траекторий возрастает при  $y > 0$  и убывает при  $y < 0$  (рис.4.2а). Найдём время  $T$ , за которое изображающая точка совершит один полный оборот вдоль произвольной замкнутой траектории, стартующей с произвольных начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (5.8)$$

Запишем общее решение уравнение (4.6)

$$\begin{cases} \clubsuit x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \\ \heartsuit y = \omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t), \end{cases} \quad (5.9)$$

где  $C_{1,2} = \text{const}$ . Из (4.8), (4.9) находим уравнение искомой траектории

$$\begin{cases} \clubsuit x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{y_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \\ \heartsuit y = \omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + y_0 \cos(\omega_0 t). \end{cases} \quad (5.10)$$

Очевидно, что в момент  $t = T$  должны выполняться условия

$$x(T) = x_0, \quad y(T) = y_0. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.10) в (5.11), получим систему линейных относительно  $\sin(\omega_0 T)$  и  $\cos(\omega_0 T)$  уравнений

$$\begin{cases} \clubsuit x_0 \cos(\omega_0 T) + \frac{y_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) = x_0, \\ \heartsuit y_0 \cos(\omega_0 T) - \omega_0 x_0 \sin(\omega_0 T) = y_0. \end{cases} \quad (5.12)$$

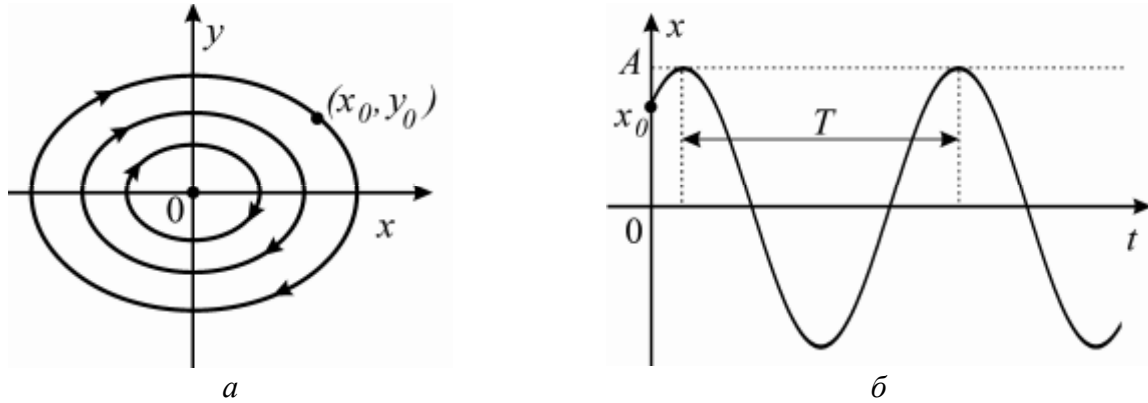


Рис.5.2. Фазовый портрет гармонического осциллятора (а); гармонические колебания периода  $T=2\pi/\omega$  (б).

Решая систему (5.12) обычным образом, находим, что

$$\cos(\omega_0 T)=1, \quad \sin(\omega_0 T)=0$$

следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.13)$$

Представим для удобства решение (5.10) в виде

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \Pi) \\ y &= \omega_0 A \sin(\omega_0 t + \Pi), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \tan \Pi = \frac{\omega_0 x_0}{y_0}.$$

Из (5.13), (5.14) вытекает, что осциллятор (5.9) при любых начальных условиях совершает **синусоидальные (гармонические)** колебания с амплитудой  $A$ , фазой  $\Pi$  и частотой  $\omega_0$ , независимой от начальных условий (рис.5.2б). Осциллятор (5.6) называется гармоническим, а совершаемые им колебания, период которых не зависит от начальных условий, – **изохронными**. При этом уравнение (5.7) представляет собой закон сохранения энергии, поскольку первое слагаемое в (5.7) есть кинетическая

$$E_K = \frac{y^2}{2} = \frac{A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \Pi)}{2}, \quad (5.15)$$

а второе – потенциальная энергия осциллятора

$$E_{II} = \frac{x^2}{2} = \frac{A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \Pi)}{2}. \quad (5.16)$$



Из (5.7), (5.15) и (5.16) следует, что полная энергия осциллятора остаётся при колебаниях постоянной

$$E = E_K + E_{\Pi} = \text{const},$$

однако переходит из одного вида в другой.

Поясним теперь связь между траекториями на фазовой плоскости осциллятора (4.6) и колебаниями в реальном пространстве. Это соотношение иллюстрирует рис. 5.3, на котором представлена замкнутая фазовая траектория

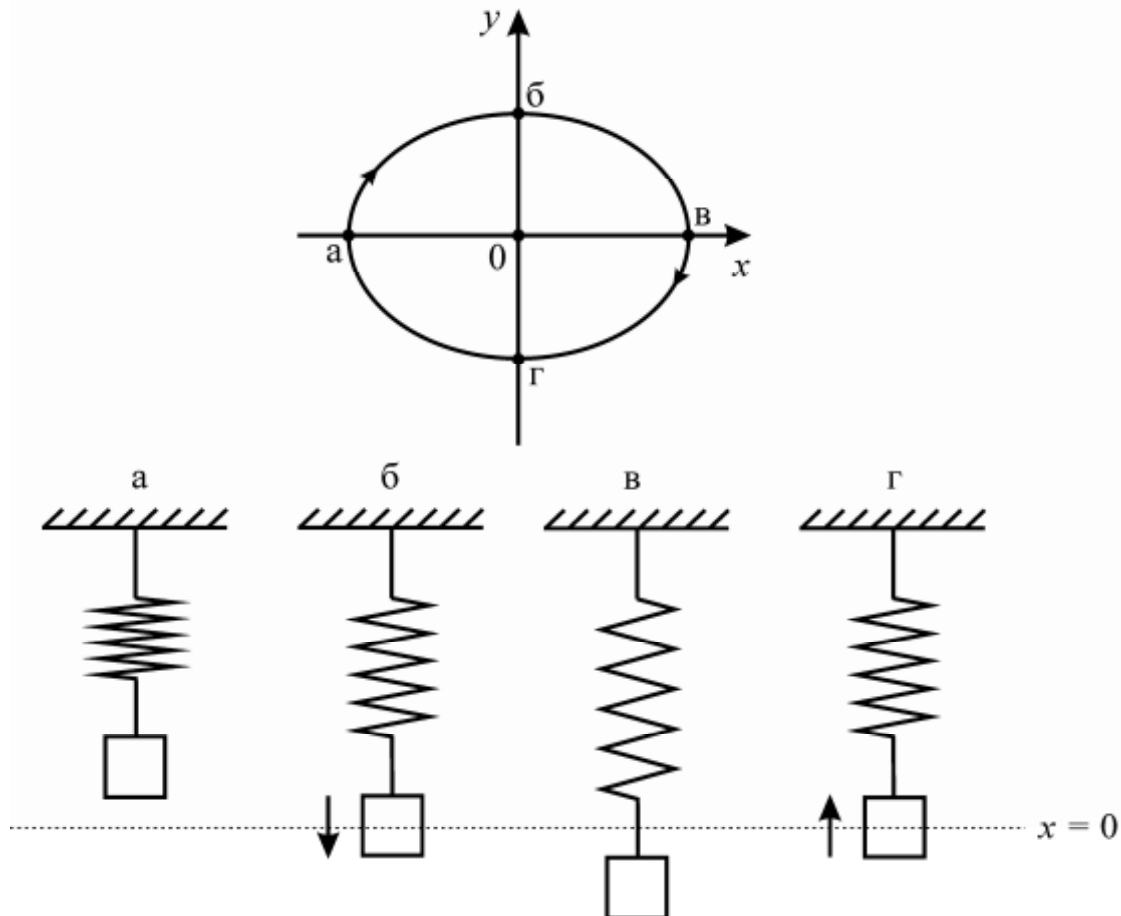


Рис.5.3. Фазовая траектория осциллятора (4.6) и четыре различных состояния груза на пружине.

осциллятора (5.6), описывающего малые колебания груза на пружине (рис.5.16), и четыре состояния груза в пространстве, соответствующие различным точкам фазовой траектории.

### 5.1.2. Линейный осциллятор при наличии потерь

В реальных системах всегда происходит рассеяние (диссипация) энергии, её потери, вызванные наличием элементов, трансформирующих энергию движения в тепловую. Например, в электрическом контуре это омическое

сопротивление, а в случае груза на пружине – сила трения (рис.5.1). Если диссипация энергии в системе (линейной или нелинейной) ничем не компенсируется, то с течением времени любые колебания затухают и система приходит в равновесное состояние. Такие системы называют диссипативными динамическими системами (см. лекцию 1), и их динамика принципиально отличается от динамики консервативных систем.

Рассмотрим динамику простейшей диссипативной системы – линейного осциллятора (5.5) при  $\gamma > 0$ . Перепишем (5.5) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \gamma y. \end{cases} \quad (5.17)$$

На фазовой плоскости  $(x, y)$  система (5.17) имеет единственное состояние равновесия  $O(x=0, y=0)$ , характеристическое уравнение для которого имеет вид

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (5.18)$$

Динамика двумерных линейных систем полностью определяются типом состояний равновесия (см. лекцию 3). Поэтому, анализируя корни уравнения (5.18), можно установить возможные колебательные процессы в линейном осцилляторе (5.17).

**Затухающий процесс.** Пусть параметры системы (5.17) удовлетворяют условиям

$$\gamma > 0, \gamma^2 < 4\omega_0^2. \quad (5.19)$$

При этих условиях уравнение (5.18) имеет комплексно-сопряжённые корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega, \quad (5.20)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Поскольку  $\text{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} < 0$  состояние равновесия  $O$  является устойчивым фокусом (см. лекцию 3), траекториям которого отвечают осцилляторно затухающие колебания. Фазовый портрет системы (5.17) представлен на рис.5.4а. Траектории пересекают ось абсцисс так, что касательные к ним в точках пересечения имеют вертикальный наклон, поскольку  $\dot{x} = 0$ , если  $y = 0$ . Кроме того,

$$\dot{y} = 0, \text{ если } y = -\frac{\gamma}{2\omega_0^2}x$$

и, следовательно, траектории пересекают эту прямую так, что в точках пересечения наклон касательных к траекториям является горизонтальным. Линии на фазовой плоскости, на которых касательные к траекториям имеют один и тот же наклон называют **изоклинами** соответствующего наклона. В

случае системы (5.17) ось абсцисс – изоклина вертикальных, а прямая  $y = -\frac{\gamma^2}{2\tau^2}x$  – горизонтальных наклонов.

Исследуем характеристики осцилляторно затухающего процесса. Аналогично (5.10), запишем уравнение траектории осциллятора (5.17), удовлетворяющей начальным условиям  $x(0)=x_0, y(0)=y_0$

$$\begin{aligned} x &= e^{-\tau^2 t} \left[ x_0 \cos(\gamma t) + \frac{y_0 + \tau^2 x_0}{\gamma} \sin(\gamma t) \right] \\ y &= e^{-\tau^2 t} \left[ y_0 \cos(\gamma t) - \frac{(\gamma^2 + \tau^2 x_0^2)}{\gamma} \sin(\gamma t) \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

или

$$\begin{aligned} x &= A e^{-\tau^2 t} \sin(\gamma t + \Pi) \\ y &= \sqrt{\tau^2 + \gamma^2} A e^{-\tau^2 t} \sin(\gamma t + \Pi + \lambda) \end{aligned} \quad (5.22)$$

+  $\Pi + \lambda$ ) где

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(y_0 + \tau^2 x_0)^2}{\gamma^2}}, \quad \tan \Pi = \frac{x_0 \gamma}{y_0 + \tau^2 x_0}, \quad \tan \lambda = -\frac{\gamma}{\tau^2}$$

Из (5.22) следует, что колебательные процессы, описываемые системой (5.17) при выполнении условий (5.19), являются непериодическими и осцилляторно затухающими. Затухание колебаний происходит по экспоненциальному закону, т.е. на плоскости  $(t, x)$  экстремумы функции  $x(t)$  лежат на экспонентах  $x = \pm A e^{-\tau^2 t}$  (рис.5.4(б)). Интервал между любыми двумя соседними экстремумами равен  $T=2\pi/\gamma$ . Благодаря этому свойству, можно ввести величину, характеризующую скорость затухания осцилляторного процесса – логарифмический декремент затухания  $d$ . Пусть  $x_1(t_1)$  и  $x_2(t_2)$ ,  $t_2 > t_1$  – значение двух соседних экстремумов, например максимумов, т.е.

$$x_1(t_1) = A e^{-\tau^2 t_1}, \quad x_2(t_2) = A e^{-\tau^2 t_2}.$$

Найдём их отношение

$$\frac{x_1(t_1)}{x_2(t_2)} = e^{\tau^2(t_2 - t_1)} = e^{\tau^2 T} = e^{\frac{2\pi \tau^2}{\gamma}}. \quad (5.23)$$

Декремент характеризует убывание амплитуды колебаний во времени, т.е. число  $1/d$  равно числу колебаний, после которого амплитуда уменьшится в  $e$  раз. Заметим, что этот закон затухания колебаний выполняется во-первых, если



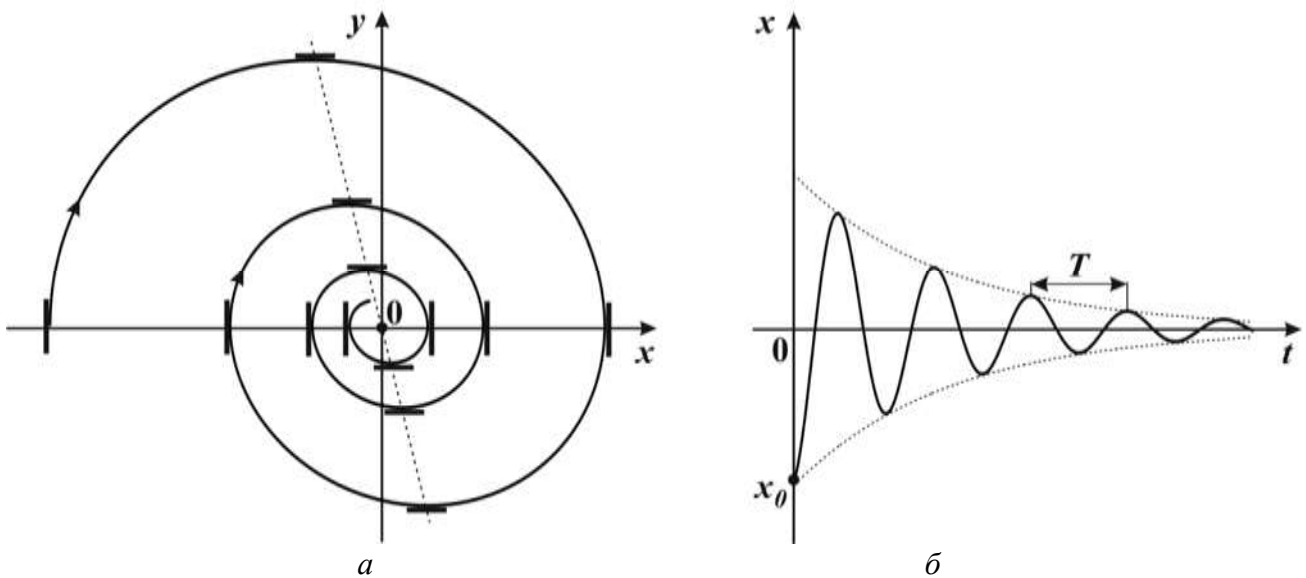


Рис.5.4. Устойчивый фокус, пунктирной линией показана изоклина горизонтальных наклонов (а); осцилляторно затухающие колебания (б).

система является линейной, а во-вторых, если потери энергии происходят линейно относительно  $\dot{x}$ . Нарушение этих условий делает соотношение (5.23) не справедливым и использование декремента для характеристики процесса требует специальных оговорок.

**Затухающий аperiodический процесс.** Предположим, что параметры системы (5.17) удовлетворяют условиям

$$\tau_M > 0, \tau_M^2 > \tau_0^2 \quad (5.24)$$

При выполнении (5.24) состояние равновесия  $O$  имеет отрицательные корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\tau_M \pm \sqrt{\tau_M^2 - \tau_0^2} \quad (5.25)$$

и, следовательно, является устойчивым узлом (рис.5.5а) каждой траекторий которого отвечает затухающий аperiodический процесс осциллятора. Несмотря на то, что при всех начальных условиях наблюдается однотипное поведение осциллятора, некоторая, не принципиальная, разница в характере установления равновесного состояния всё-таки существует. Эта разница определяется расположением начальных условий на фазовой плоскости относительно ведущего и неведущих направлений узла (см. лекцию 3). Для узла  $O$  эти направления задаются соответственно уравнениями

$$y = -\tau_1 x, y = -\tau_2 x. \quad (4.26)$$

Прямые (5.26) делят фазовую плоскость на четыре области (рис.5.5а). Для начальных условий из областей 2, 4 аperiodически затухающие процессы характеризуются монотонным изменением переменных  $x(t)$ ,  $y(t)$ , а из области

1,3 – наличием экстремумов в моменты времени, когда траектории пересекают ось абсцисс (рис.5.5).

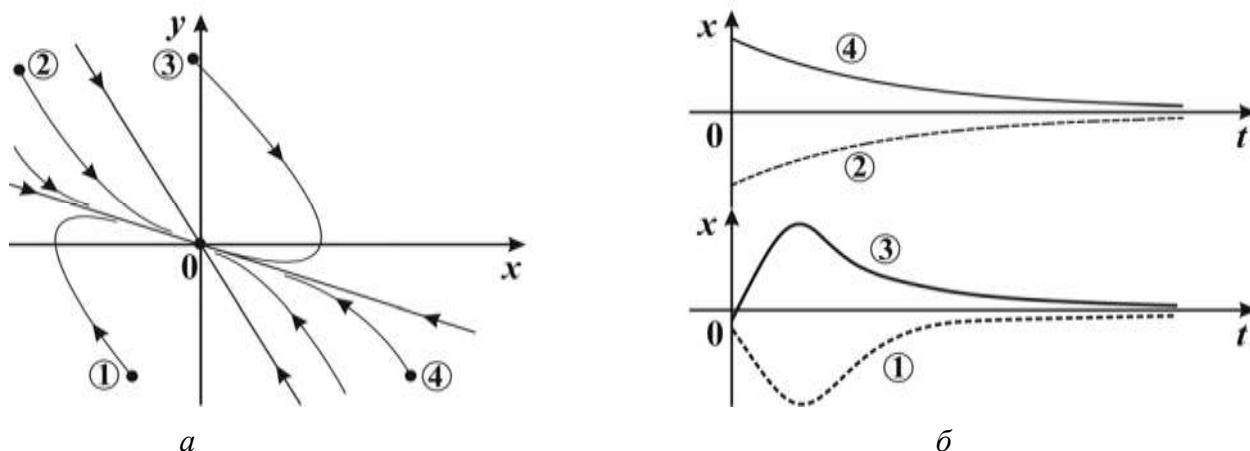


Рис.5.5. Устойчивый узел (а); аperiodические затухающие процессы, соответствующие начальным условиям из области 1-4 (б).

### 5.1.3. Линейный осциллятор с «отрицательным» затуханием

Пусть в системе (5.17) теперь параметр  $T^M < 0$ . Рассмотрим изменение во времени полной энергии осциллятора, задаваемой уравнениями (5.15), (5.16). В силу системы (5.17) имеем

$$\frac{dE}{dt} = y\dot{y} + \int_0^2 x\dot{x} = -2T^M y^2 \quad (5.27)$$

Поскольку  $T^M < 0$  из (5.27) следует, что энергия  $E$  во времени растёт. Понятно, что для этого осциллятор должен пополнять энергию из вне, так как собственного источника энергии у него нет. В некоторых системах (так называемых активных) за счёт внешних источников энергии возможно формирование таких динамических процессов с «отрицательным» затуханием (трением) или «отрицательным» сопротивлением, приводящих к временному росту энергии. Примерами подобных систем являются: в радиоэлектронике – устройства, содержащие элементы, у которых вольт-амперные характеристики имеют падающие участки, в механике – системы, в которых силы трения имеют нелинейную, с падающим участком, зависимость от относительной скорости трущихся поверхностей (например, маятники на вращающихся валах) и др. Динамика таких систем в окрестности равновесных состояний приближённо может быть описана с помощью системы (5.17) при  $T^M < 0$ .

Рассмотрим динамику системы (5.17) при  $T^M < 0$ . В этом случае из (5.20) и (5.25) следует, что состояние равновесия является неустойчивым фокусом, если

$\tau_M^2 < \tau_0^2$  (рис.5.6а) или неустойчивым узлом, если  $\tau_M^2 \geq \tau_0^2$  (рис.5.6б). Следовательно, при  $\tau_M < 0$  осциллятор (5.27) описывает нарастающие колебания,

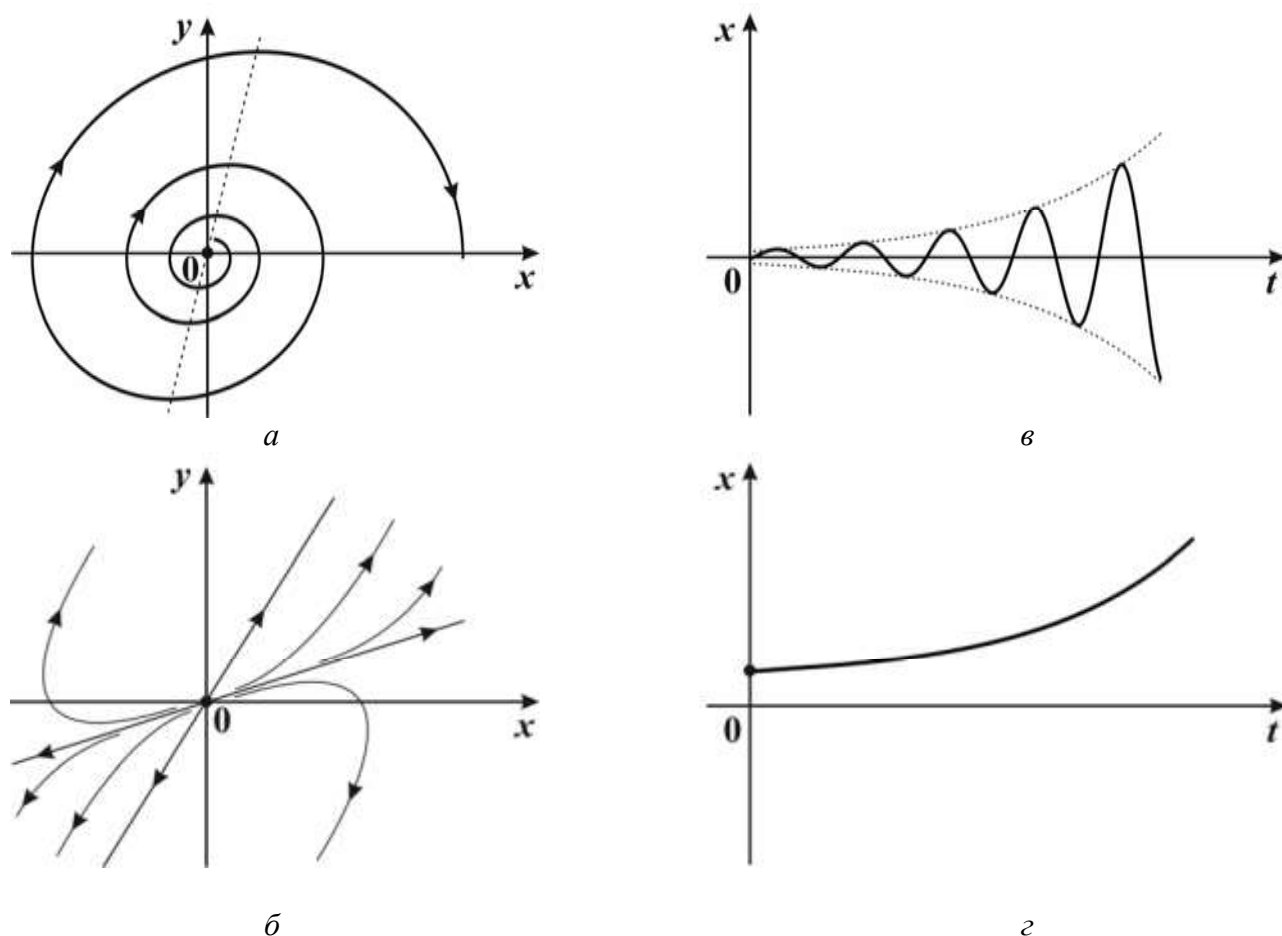


Рис.5.6. Неустойчивый фокус (а); неустойчивый узел (б); осцилляторно нарастающий процесс (в); аperiodический нарастающий процесс (г).

примеры которых даны на рис.5.6в и 5.6г. В случае фокуса колебание нарастают по экспоненциальному закону (рис.5.6в), который характеризуется так называемым логарифмическим **инкрементом** нарастания  $\tau_M^2$   
 $= \tau^2$ ,

применяемым без оговорок лишь для линейных систем. В случае узла вид нарастающих колебаний зависит от позиции на фазовой плоскости начальных условий относительно ведущего и неведущего направлений, т.е. может происходить как монотонно (рис.5.6г), так и не монотонно (с одним экстремумом) во времени.

Таким образом, «отрицательное» трение (потери) приводят к неограниченному росту колебаний, что, конечно, не может происходить в реальных системах. Этот рост является следствием линейной идеализации задачи и, как мы увидим в дальнейшем, нелинейные механизмы его ограничивают.



## 5.2. Динамика нелинейного осциллятора

Как мы уже отмечали, линейные системы представляют собой простейшие, идеализированные модели реальных процессов. Даже сильно упрощённые модели реальных систем, как правило, являются нелинейными. Например, незначительное изменение условий задач, рассмотренных в разделе 5.1, приводит к модели в виде уже нелинейного осциллятора. Так, если в задаче о колебаниях груза (рис.5.1б) не ограничиваться малыми смещениями, то сила с которой пружина действует на груз будет нелинейной функцией смещения и осциллятор становится нелинейным. Другим примером нелинейного осциллятора может служить электрический контур, представленный на рис.5.1а, в случае, если ёмкость  $C$  содержит сегнетоэлектрик.

### 5.2.1. Консервативный нелинейный осциллятор

Предположим, что рассеяние энергии в реальной системе происходит очень медленно – например, груз на пружине помещён в среду с очень малым трением, в электрическом контуре отсутствует сопротивление  $R$ , а омическое сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало и так далее. Ясно, что в этом случае диссипативные механизмы, обеспечивающие рассеяние энергии, не окажут сильного влияния (на не слишком больших временных интервалах) на динамику системы и ими можно пренебречь. Другими словами, можно считать, что в этом случае система является консервативной. Основной моделью таких систем является консервативный осциллятор, динамика которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (5.28)$$

где  $f(x)$  – нелинейная функция. В частности, к уравнению вида (5.28) могут быть сведены упомянутые выше осцилляторы. Представим для удобства уравнения (5.28) в виде системы

$$\begin{aligned} \clubsuit \dot{x} &= y, \\ \spadesuit \dot{y} &= -f(x) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Прежде всего, покажем, что динамика системы (5.29) является консервативной. Поделив второе уравнение системы (5.29) на первое и разделив переменные, имеем

$$y dy = -f(x) dx. \quad (5.30)$$

Проинтегрируем уравнение (5.30) от некоторого начального момента  $t=t_0$  до произвольного момента времени  $t$ . В результате получим



$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = - \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad (5.31)$$

где  $x_0=x(t_0)$ ,  $y_0=y(t_0)$ . Нетрудно видеть, что уравнение (5.31) можно переписать в следующем виде

$$\frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx = h, \quad (5.32)$$

где

$$h = \frac{y_0^2}{2} + \int_0^{x_0} f(x) dx. \quad (5.33)$$

Из (5.33) следует, что  $h=\text{const}$  и представляет собой полную энергию осциллятора (5.29) в момент  $t=t_0$ . В левой же части уравнения (5.32) стоит полная энергия осциллятора в момент  $t$ , состоящая из суммы кинетической  $E_K$  и потенциальной  $E_{\Pi}$  энергий, где

$$E_K = \frac{y^2}{2}, \quad E_{\Pi} = \int_0^x f(x) dx. \quad (5.34)$$

Таким образом, с одной стороны уравнение (5.32) задаёт закон сохранения энергии, а с другой – в неявном виде уравнение интегральных кривых, отвечающих данному  $h$ . Заметим, что, если для данного  $h$  из (5.32) найти действительных значений  $(x,y)$  не удастся, то это означает, что энергия осциллятора (5.29) не может принимать такого значения.

Покажем теперь как, используя уравнение (5.32), можно построить фазовый портрет системы (5.29).

Предварительно приведём некоторые свойства траекторий, вытекающие непосредственно из системы (5.29) и уравнения (5.32). Из (5.29) следует, что координаты состояний равновесия этой системы определяются системой

$$y=0, \quad f(x)=0 \quad (5.35)$$

и, следовательно, они расположены на оси абсцисс. При этом, так как  $\dot{x}=0$  при  $y=0$  во всех точках оси абсцисс, отличных от состояний равновесия, касательные к траекториям имеют вертикальный наклон, то есть ось абсцисс на этих участках является изоклиной вертикальных наклонов. Кроме того, поскольку уравнение (5.32) инвариантно относительно замены  $y \rightarrow -y$ , то фазовые траектории системы (5.29) симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому достаточно установить вид траекторий лишь на верхней полуплоскости, а поведение траекторий при  $y<0$  можно найти, используя свойство симметрии.

Рассмотрим теперь процедуру построения фазового портрета системы (5.29) с помощью уравнения (5.32). Из (5.34) вытекает, что

$$\frac{dE_n}{dx} = f(x) \quad (5.36)$$

Следовательно, в состояниях равновесия потенциальная энергия  $E_n(x)$  либо достигает экстремума, либо имеет точку перегиба. Проанализируем поведение фазовых траекторий системы (5.29) в окрестности состояний равновесия, соответствующих этим трём случаям. Для этого из (5.32) выразим  $y$  через  $E_n(x)$

$$y = \sqrt{2[h - E_n(x)]} \quad (5.37)$$

Согласно (5.37) траектории системы (5.29) соответствующие данному  $h$ , существуют на фазовой плоскости только для тех  $x$ , где  $E_n(x) \leq h$ . Причём, для  $x$ , удовлетворяющих уравнению  $E_n(x) = h$  переменная  $y = 0$ . В силу (5.37) имеем

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{dE_n}{dx}}{\sqrt{2[h - E_n(x)]}} \quad (5.38)$$

Отсюда получаем, ещё одно свойство траекторной системы (5.29)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &> 0, \quad \text{если} \quad \frac{dE_n}{dx} < 0, \\ \frac{dy}{dx} &< 0, \quad \text{если} \quad \frac{dE_n}{dx} > 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Опираясь на представленные здесь свойства траекторий, можно построить фазовый портрет системы (5.29), зная лишь вид функции  $E_n(x)$ . Рис. 5.7 иллюстрирует методику такого построения в случае, когда  $E_n(x)$  имеет локальные минимум, максимум и точку перегиба. Если функция  $E_n(x)$  имеет минимум, то на фазовой плоскости система (5.29) имеет состояние равновесия типа центр (рис.5.7а), которое устойчиво по Ляпунову. Максимуму функции  $E_n(x)$  соответствует на фазовой плоскости седло (рис.5.7б). Заметим, что в силу (5.37) у седла нелинейной системы (5.29) сепаратрисы имеют вид некоторых кривых, а не прямых, как в случае линейного осциллятора. Наконец, если  $E_n(x)$  имеет точку перегиба, то на фазовой плоскости существует сложное состояние равновесия (рис.5.7в), имеющее два нулевых корня характеристического уравнения.

Изложенный выше приём построения фазового портрета осциллятора (5.29) справедлив не только для анализа поведения траекторий в окрестности состояний равновесия, но и для построения полного фазового портрета на всей фазовой плоскости. Продемонстрируем это на примере нелинейного осциллятора, описывающего колебание математического маятника.

Рассмотрим динамику маятника, состоящего из невесомого стержня длины  $l$  и груза массы  $m$  (рис.5.8а). Маятник находится в поле силы тяжести и может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса.



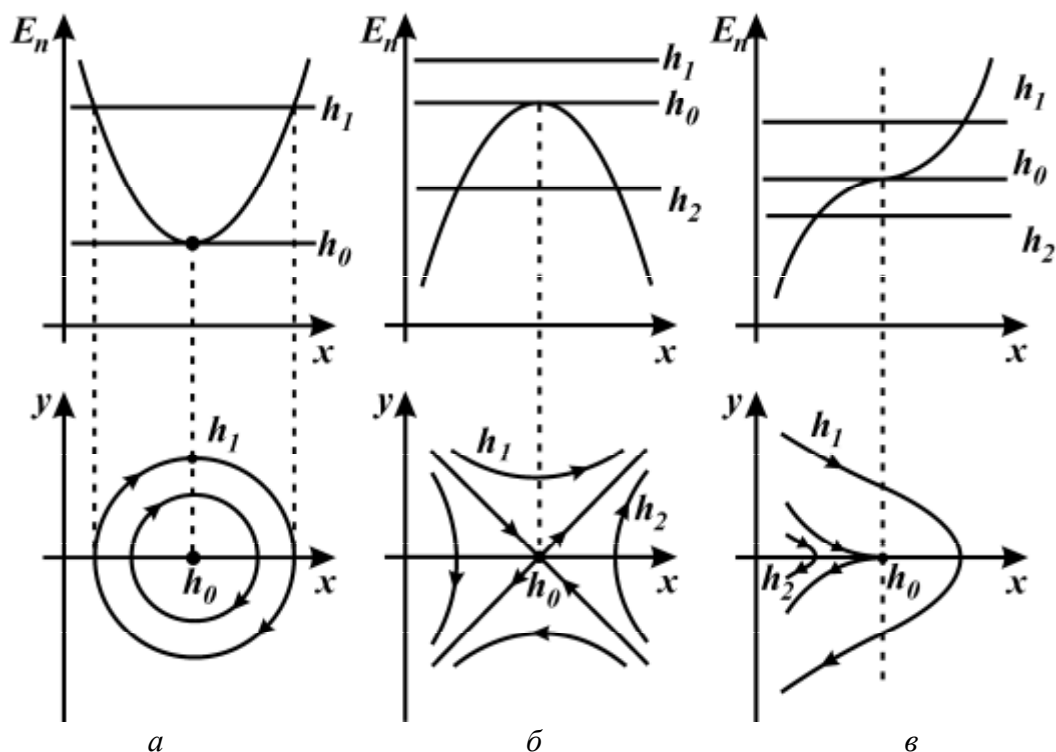


Рис.5.7. Три различных вида функции  $E_n(x)$  и отвечающие им фазовые портреты системы (5.29): состояние равновесия центр (а); состояние равновесия седло (б); сложное состояние равновесия с двумя нулевыми характеристическими корнями (в).

Пусть  $\Pi$  - угол отклонения маятника от вертикали. Запишем уравнение движения маятника

$$J \frac{d^2 \Pi}{dt^2} = \sum_k M_k, \quad (5.40)$$

где  $J$  – момент инерции груза,  $J=ml^2$ ,  $\dot{\Pi} = \frac{d\Pi}{dt}$  - угловая скорость массы  $m$ ,  $M_k$  – моменты сил, действующих на груз. На груз действует две силы – тяжести и вязкого трения, которая пропорциональна мгновенной скорости и равна  $-k l \dot{\Pi}$ ,  $k>0$ . Моменты этих сил будем вычислять относительно оси, проходящей через точку подвеса маятника перпендикулярно плоскости колебаний маятника. Они определяются следующим образом

$$M_1 = mgl \sin \Pi, \quad M_2 = -kl^2 \frac{d\Pi}{dt}, \quad (5.41)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Подставляя (5.41) в (5.40), получим

$$ml^2 \frac{d^2 \Pi}{dt^2} = mgl \sin \Pi - kl^2 \frac{d\Pi}{dt}. \quad (5.42)$$

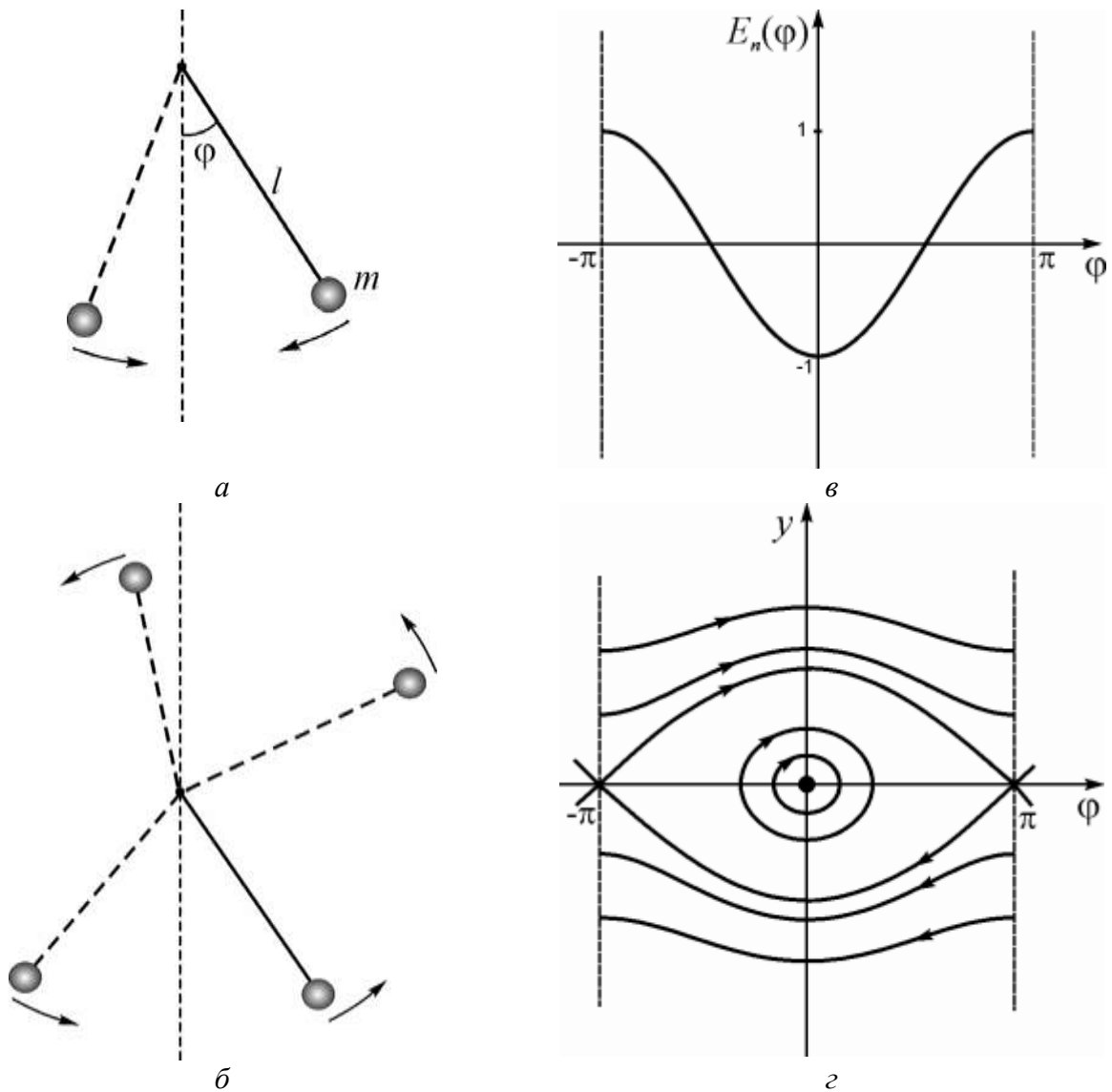


Рис.5.8. Колебательные движения маятника (а), вращательные движения маятника (б); потенциальная функция (в); фазовый портрет осциллятора (5.43) (г).

Сделаем в (5.42) замену времени  $t = \sqrt{\frac{l}{g}}|\dot{\varphi}|$ , в результате которой это уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} + \sin \varphi = 0, \quad (5.43)$$

где точкой обозначено дифференцирование по  $|\dot{\varphi}|$ , а  $\lambda = \frac{k}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}$  - безразмерный

параметр, характеризующий диссипативные потери в системе.

Исследуем сначала динамику уравнения (5.43) в случае отсутствия диссипативных потерь, т.е. в случае  $\lambda = 0$ . При  $\lambda = 0$  уравнение (5.43) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \clubsuit \Pi &= y, \\ \diamondsuit y \\ \heartsuit y \\ &= \square \sin \Pi. \end{aligned} \quad (5.44)$$

В силу периодичности по  $\Pi$  правой части системы (5.44) её фазовым пространством является цилиндр  $G=S^1 \cdot R$ . Цилиндричность фазового пространства системы (5.44) имеет ясный физический смысл – маятник может совершать движения как без вращения (рис.5.8(а)), так и с вращением вокруг точки подвеса (рис.5.8б). Для построения фазового портрета осциллятора (5.44) воспользуемся методикой изложенной выше. Рассмотрим потенциальную энергию осциллятора (5.44) –  $E_n(\Pi) = -\cos \Pi$ . Построив график функции  $E_n(x)$  (рис.5.8в) и расположив под ним развёртку фазового цилиндра, мы без труда получаем фазовый портрет осциллятора (5.44) (рис.5.8(г)). На цилиндрической фазовой поверхности существуют два состояния равновесия: центр –  $O_1(0,0)$  и седло –  $O_1(\square,0)$ . Сепаратрисы седла делят все остальные нетривиальные траектории на два различных континуальных семейства периодических траекторий. К первому семейству относятся периодические траектории из области ограниченной сепаратрисами. Эти траектории не охватывают фазовый цилиндр и определяют колебательные движения маятника, т.е. движения без проворотов вокруг оси подвеса (рис.5.8а). Второе семейство образуют периодические траектории, охватывающие фазовый цилиндр и отвечающие вращательным движениям маятника (рис.5.8б).

Перейдём к обсуждению свойств колебательных процессов осциллятора (5.44). Заметим, что система (5.44) легко сводится к одному уравнению с разделяющимися переменными, которое можно проинтегрировать и получить точные решения, дающие полную информацию о свойствах колебательных процессов. Такой путь требует привлечения теории эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби. Мы поступим по-другому – приведём здесь лишь качественные рассуждения, основанные на свойствах фазовых траекторий, которые позволяют, тем не менее, установить основные свойства колебательных процессов.

Рассмотрим сначала колебательные движения осциллятора, которые существуют, если начальная энергия  $h \in (-1,1)$ . Для траекторий, локализованных в малой окрестности состояния равновесия  $O_1$  (начальная энергия близка к значению -1), можно считать в первом приближении, что  $\sin \Pi \approx \Pi$  и колебания осциллятора (5.44) близки к колебаниям линейного осциллятора. Следовательно, малые (вблизи дна потенциальной ямы) колебания осциллятора (5.44) будут периодическими квазисинусоидальными, в которых превалирует амплитуда с основной частотой  $\omega=1$  и периодом  $T=2\pi$  (см. рис.5.9а и рис.5.10а). Пусть теперь, начальная энергия близка к единице. Траектория, отвечающая такому уровню энергии, включает вблизи седла  $O_2$ . Поэтому на этих участках изображающая точка будет сильно замедлять своё движение, что приводит к формированию на графике  $\Pi(t)$  почти горизонтальных плато (рис.5.9б). Такие колебания называются *кноидальными*. Размер этих плато и период колебаний



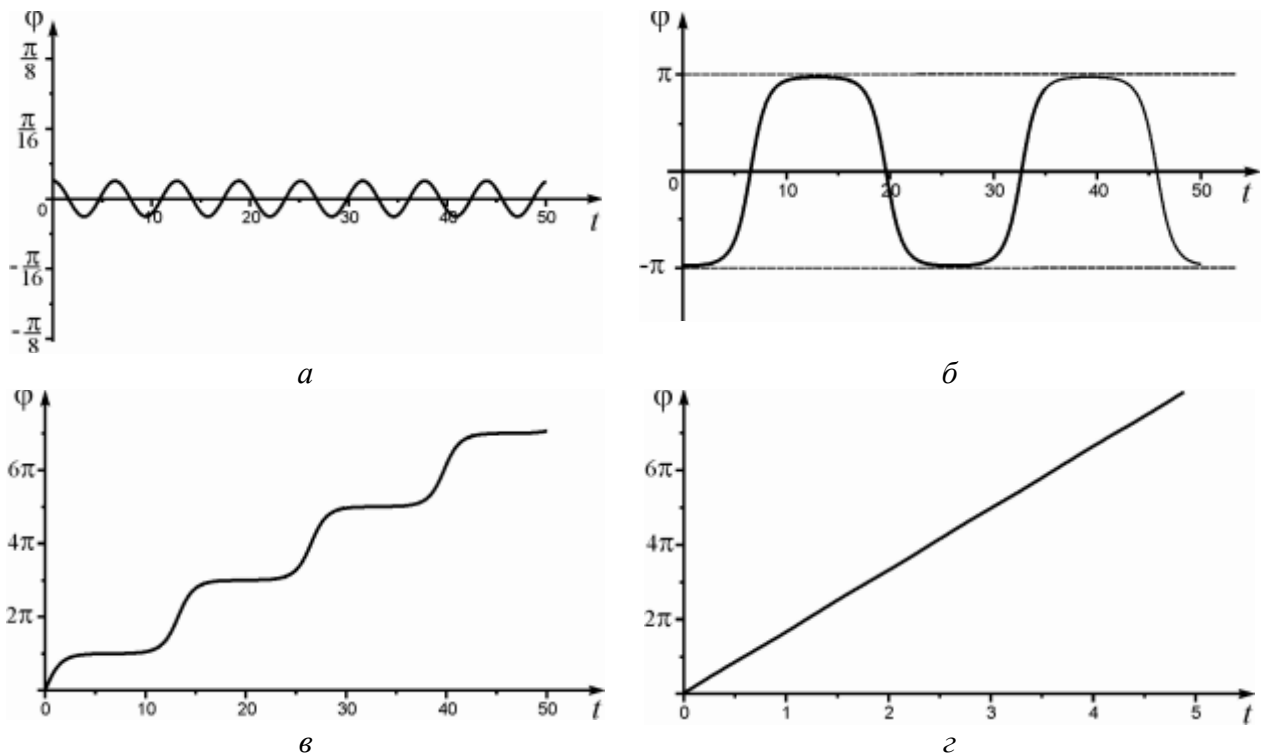


Рис.5.9. Качественный вид зависимости угловой переменной  $\Pi(t)$  для различных периодических движений осциллятора (4.44): квазисинусоидальные колебания (а); кноидальные колебания (б); зависимость  $\Pi(t)$  для двух вращательных траекторий с положительным вращением  $\Pi$  (в), (з).

будут тем больше, чем ближе начальная энергия к единице. Действительно, при  $h=1$  сепаратрисы седел охватывают фазовый цилиндр, образуя пару двоякоасимптотических (так называемых *гомоклинических*) траекторий, время движения по которым стремится к бесконечности. Отсюда и соображений непрерывности решений от начальных условий вытекает, что период колебаний траекторий, отвечающих значениям  $h$  вблизи единицы, монотонно растёт с ростом  $h$  и при  $h \rightarrow 1$  стремится к бесконечности. При этом основная частота близка к нулю, а амплитуды других гармоник имеют некоторое достаточно сложное распределение, которое приближённо описывается с использованием гиперболического косинуса (рис.5.10б).

Рассмотрим теперь вращательные движения осциллятора (5.44), которые существуют, если начальная энергия превосходит единицу. Непосредственно из вида фазовых траекторий (рис.5.8г) следует, что у таких траекторий зависимость  $\Pi(t)$  является непериодической функцией, а переменная  $y(t)$  (скорость маятника) изменяется периодически. Аналогичные предыдущему случаю рассуждения показывают, что для энергии близкой к единице как зависимость угловой переменной (рис.5.9в), так и зависимость скорости  $y(t)$  будут содержать близкие к горизонтальным линиям плато. С увеличением  $h$  эти плато уменьшаются (рис.5.9г) и для достаточно больших  $h$  график  $\Pi(t)$  близок прямой. Действительно, рассмотрим полную энергию осциллятора (5.44)

$$\frac{y^2}{2} \cos \Pi = h \quad (5.45)$$

Из (5.45) и системы (5.44), например, для вращательных движений при  $y > 0$ , имеем

$$\Gamma = \sqrt{2(h + \cos \Pi)} = \sqrt{2h \left(1 + \frac{1}{h} \cos \Pi\right)}. \quad (5.46)$$

Поскольку косинус ограниченная функция, а коэффициент  $1/h \ll 1$ , если  $h \gg 1$ , то из (5.46) получаем

$$\Gamma \approx \sqrt{2h}$$

и, следовательно, в этом случае

$$\Pi \approx \sqrt{2ht} + \Pi_0.$$

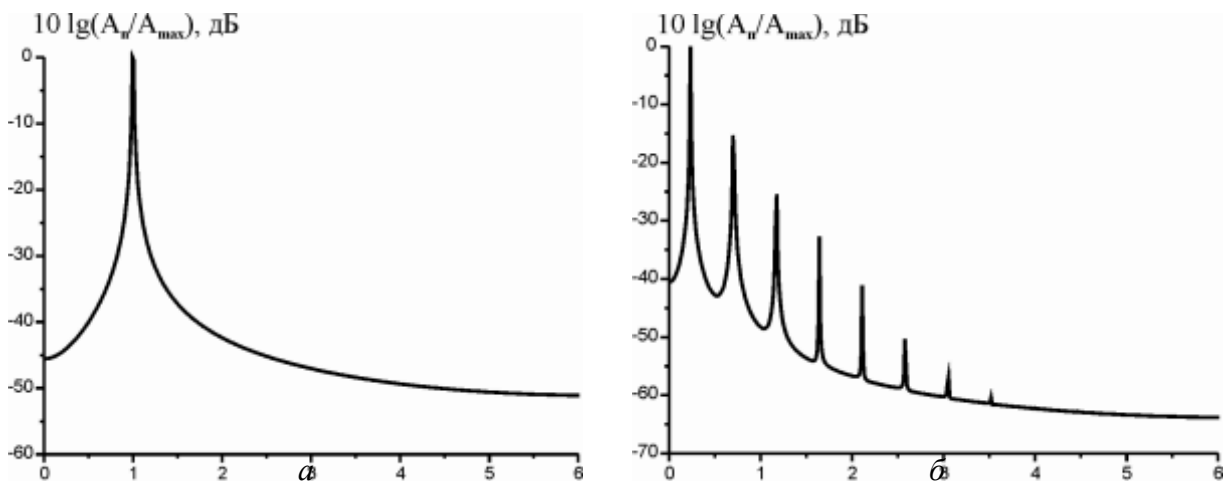


Рис.5.10. Построенные численно спектры периодических движений осциллятора (5.44): спектр квазисинусоидальных колебаний (а); спектр аperiodических колебаний (б). По оси ординат использован логарифмический масштаб, а амплитуды гармоник даны в децибелах.

Таким образом, основные динамические свойства консервативного нелинейного осциллятора вида (54.29) состоят в следующем.

- Динамика осциллятора полностью определяет величиной начальной энергии.
- Период колебаний зависит от начальных условий, т.е. периодические колебания нелинейного осциллятора **неизохронны**.
- Форма периодических колебаний может варьироваться в широких пределах – от квазисинусоидальных до кноидальных.

- Возможно одновременное сосуществование нескольких устойчивых (по Ляпунову) состояний равновесия, т.е. возможна *мультистабильность*.
- Разделение периодических траекторий на группы с принципиально различными свойствами осуществляется сепаратрисами сёдел.

### 5.2.2. Нелинейный осциллятор с диссипацией

Рассмотрим, как изменится динамика нелинейного осциллятора, если учесть в системе действия диссипативных механизмов. Как и в случае линейного осциллятора, вклад диссипативных потерь будем учитывать слагаемым пропорциональным  $\dot{x}$  (см. раздел 5.1.2 и уравнение (5.43)). При таком предположении динамика нелинейного осциллятора с диссипацией будет описываться следующей системой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y - f(x) \end{aligned} \quad (5.47)$$

где  $0 < \gamma$  - параметр, характеризующий диссипативные потери. Для исследования динамики системы (5.47) введём в рассмотрение полную энергию осциллятора (см. 5.32)

$$E = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx$$

и рассмотрим её изменения во времени под действием системы (5.47). В силу (5.47) имеем

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma y^2 \leq 0. \quad (5.48)$$

Согласно (5.48) энергия в системе (5.47) монотонно убывает и она приходит в равновесное состояние, определяемое на фазовой плоскости состояниями равновесия с координатами задаваемыми системой (5.35). Следовательно, при любых нетривиальных начальных условиях в осцилляторе (5.47) наблюдаются затухающие колебательные процессы. Величина параметра  $\gamma$  влияет лишь на характер затухания – он либо осцилляторный для достаточно малых  $\gamma$ , либо апериодический в противном случае. Описанные свойства нелинейного осциллятора иллюстрирует рис.5.11, на котором представлены фазовые портреты осциллятора (5.43), описывающего динамику маятника в вязкой среде. Заметим, что в этом случае (5.43) является глобально асимптотически устойчивой (см. лекцию 4).

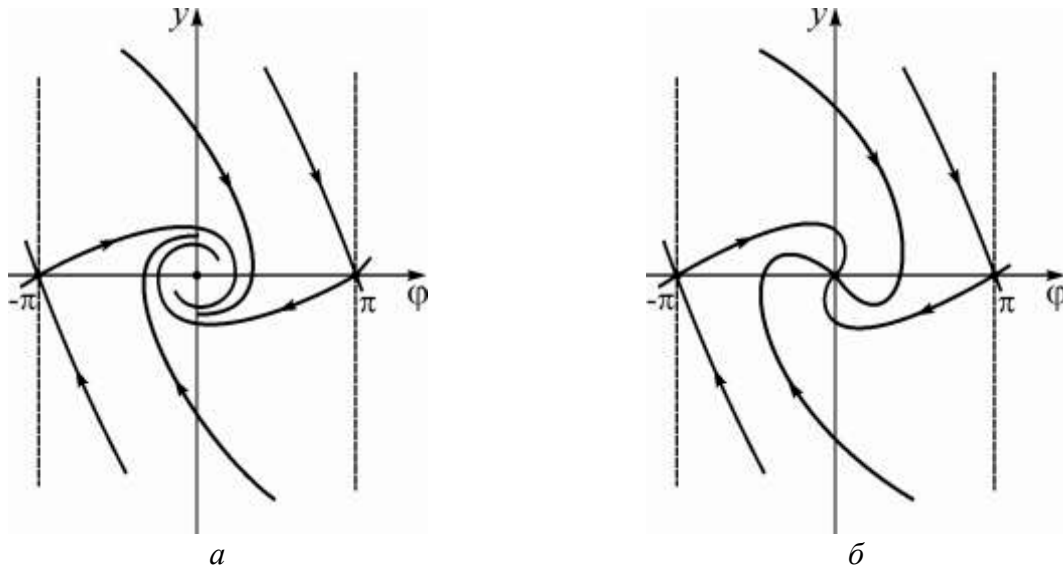


Рис.5.11. Фазовые портреты осциллятора (4.47):  $O_1$  – устойчивый фокус (а);  $O_1$  – устойчивый узел (б).

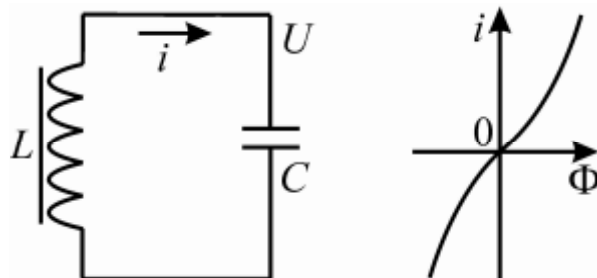
### 5.3. Контрольные вопросы и задания

1. Покажите, используя определение, что состояние равновесия центр (в линейном и нелинейном случаях) является устойчивым по Ляпунову.
2. Постройте характерные осциллограммы переменной  $y(t)$  нелинейного осциллятора (5.44).
3. Исследуйте динамику следующих осцилляторов

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x + \langle x^2 &= 0, \\ \ddot{x} + \langle x + \textcircled{R} x^3 &= 0,\end{aligned}$$

где  $\langle$  и  $\textcircled{R}$  – произвольные параметры. Постройте характерные осциллограммы колебаний.

4. Получите уравнения, описывающие динамику следующих электрических контуров: а) контура представленного на рис.5.1а, в случае когда ёмкость содержит сегнетоэлектрик; б) контура, содержащего индуктивность с ферромагнитным стержнем, представленного на следующем рисунке



Где  $\langle < 0$  – параметр,  $U = \frac{d}{dt}\sqrt{i}$ , а  $Li = \sqrt{+ \langle \sqrt{3}}$ .



## ЛЕКЦИЯ 6

### ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*Отображение Пуанкаре. Неподвижные точки. Метод линеаризации. Одномерные и двумерные линейные отображения. Отображение Бернулли*

На первой лекции мы уже сталкивались с понятием точечного отображения. Продолжим знакомство с этим важным и удивительным объектом нелинейной динамики. Можно выделить два основных сценария возникновения моделей в виде точечных отображений. Во-первых, для многих реальных систем характерно изменение их состояний лишь в некоторые моменты времени. Ясно, что наиболее адекватное описание поведения таких систем можно получить с помощью моделей с дискретным временем и, в частности, моделей в форме точечных отображений. Во-вторых, точечные отображения могут порождаться траекториями динамических систем с непрерывным временем.

#### 6.1. Точечные отображения – модели дискретных систем

В настоящее время для управления самыми различными объектами и процессами широкое распространение получили цифровые автоматические системы. Такие системы оперируют цифровыми кодами, получаемыми из непрерывных сигналов путем их квантования по уровню и времени. В частности, в радиоавтоматике, связи, телевизионных системах, радиоизмерительных устройствах используются импульсно-фазовые системы автоподстройки частоты (ИФАП). Как и непрерывная система фазовой автоподстройки частоты (см. лекцию 4), система ИФАП содержит кольцо авторегулирования. Однако в кольце обратной связи системы ИФАП используется информация об ошибке, взятая в отдельные моменты времени. Для этого в типовую структуру схемы ФАП (рис. 4.10) вводятся дополнительные элементы: формирующее устройство, преобразующее синусоидальные сигналы генераторов в короткие импульсы, запоминающее устройство, фиксирующее выходное напряжение фазового детектора, который является импульсным, в промежутке между соседними импульсами. Типовая система ИФАП с идеальным запоминанием и отсутствием фильтра в цепи управления описывается уравнением

$$P(n+1) = P(n) + \langle F(P(n)) \rangle = 0. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) связывает разность фаз  $\Pi$  сигнала подстраиваемого генератора и опорного сигнала в соседние моменты времени  $n$  и  $n+1$ , где  $n=1,2,3, \dots$  соответствует моментам времени  $t = nT_0$ , а  $T_0$  – период дискретизации. В

( ) (6.1)  $F(\Pi) = 2\sin(\Pi/2)$  – периодическая функция – характеристика фазового дискриминатора, нормированная на единицу,  $\omega_H = \omega_0$  – параметр пропорциональный начальной расстройке генераторов,  $\omega_c = \omega_0$  – параметр цепи управления.

В силу инвариантности уравнения (6.1) относительно преобразования  $\Pi \rightarrow \Pi + 2\pi$ , оно представляет собой точечное отображение окружности на себя.

Другими примерами реальных процессов, которые адекватно описываются точечными отображениями, могут служить колебания численности биологических популяций. Например, динамика некоторых популяций в замкнутой среде достаточно хорошо описывается (П.Ф. Ферхюльстом, 1845) так называемым логистическим отображением

$$x(n+1) = x(n)(1 - x(n)), \quad (6.2)$$

где  $x(n)$  – нормированная численность особей в  $n$ -й год, а  $r$  – параметр, зависящий от плодовитости особей, реальной площади для жизни и др. Согласно (6.2) численность особей в  $(n+1)$ -й год –  $x(n+1)$  пропорциональна численности в предыдущий год –  $x(n)$  и свободной части жизненного пространства, которая в свою очередь пропорциональна величине  $(1 - x(n))$ .

## 6.2. Отображение Пуанкаре

Как мы уже отмечали, в некоторых случаях точечные отображения могут генерироваться траекториями динамических систем с непрерывным временем. Такие отображения называют **отображениями Пуанкаре**. Поясним процедуру возникновения отображения Пуанкаре на простейшем примере. Рассмотрим систему с непрерывным временем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega_0^2 y - \delta^2 x, \end{cases} \quad (6.3)$$

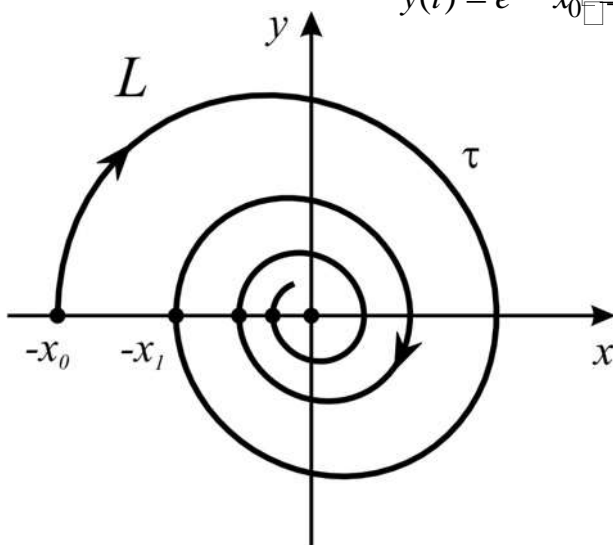
где  $\delta$  и  $\omega_0$  – положительные параметры. Система (6.3) описывает динамику линейного осциллятора с диссипацией (см. лекцию 5). Пусть  $\omega_0^2 > \delta^2$ . В этом случае на фазовой плоскости системы (6.3) существует единственное устойчивое состояние равновесия в начале координат – устойчивый фокус, который притягивает все остальные траектории системы (рис. 6.1а). Покажем, что траектории системы (6.3) порождают одномерное точечное отображение полупрямой  $N = \{y=0, x < 0\}$  на себя. Запишем общее решение системы (6.3)



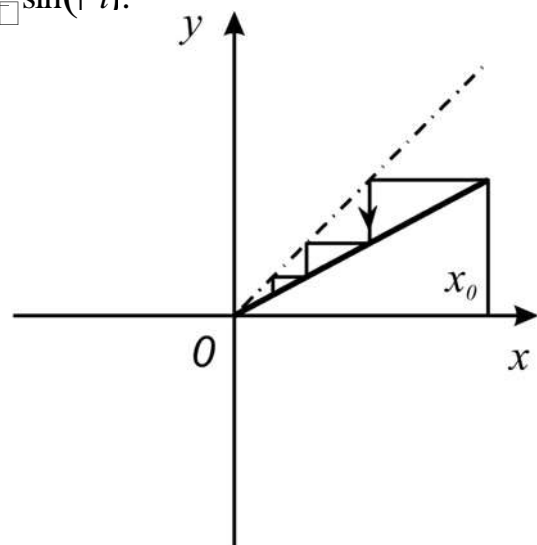
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)], \\ y(t) &= e^{-\gamma t} [(C_2 - \gamma C_1) \cos(\omega t) + (C_2 \gamma + C_1) \sin(\omega t)], \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $\gamma = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ ,  $C_{1,2}$  – произвольные константы. Рассмотрим траекторию  $L$ , выходящую при  $t=0$  из некоторой произвольной точки с координатами  $x=-x_0$  ( $x_0>0$ ),  $y=0$  (рис. 6.1а). Из (6.4) получаем уравнение траектории  $L$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} x_0 [\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)], \\ y(t) &= e^{-\gamma t} x_0 [\frac{\omega}{\gamma} + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)]. \end{aligned} \quad (6.5)$$



а



б

Рис. 6.1. Фазовый портрет системы (6.3) (а); отображение Пуанкаре (6.8) (б).

Найдем координату точки, в которой  $L$  первый раз пересекает полупрямую  $N$ . Обозначим через  $|$  время движения по траектории  $L$  между этой и начальной точками. Тогда координаты искомой точки можно найти из условий

$$y(|) = 0, \quad x(|) = -x_1. \quad (6.6)$$

Из (6.6), используя (6.5), получаем

$$| = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{и} \quad x_1 = e^{-\gamma \frac{2\pi}{\omega}} x_0. \quad (6.7)$$

Поскольку точка  $x_0$  была произвольной, уравнение (6.7) задает преобразование любой точки полупрямой  $N$ , т.е. искомое точечное отображение



$$\bar{x} = e^{-\frac{2\pi}{T}} x. \quad (6.8)$$

Отображение (6.8) – линейное точечное отображение. Качественный вид отображения представлен на рис. 6.1б. Его динамика чрезвычайно проста – любая траектория отображения асимптотически приближается к значению  $x=0$ . Прямая  $N$ , на которой определено отображение Пуанкаре, называется **секущей Пуанкаре** (термин «секущая» отражает наличие потока траекторий, проходящего через нее).

Рассмотренный пример показывает, что для секущей Пуанкаре характерны следующие свойства

- возвращаемость траекторий;
- во всех точках траектории пересекают секущую так, что наклон касательных к ним в этих точках не равен нулю (такое пересечение называется трансверсальным см. лекцию 1).

Заметим, что секущей Пуанкаре может быть не обязательно прямая, а, например, некоторая кривая (для систем на плоскости), на которой выполняются вышеперечисленные свойства. Очевидно, что в общем случае размерность секущей Пуанкаре на единицу меньше размерности фазового пространства динамической системы. Например, для систем с трехмерным фазовым пространством это двумерная поверхность. Секущая Пуанкаре может быть как локальной, когда ее пересекает лишь часть траекторий, так и глобальной, когда ее пересекают все траектории динамической системы (например, как в случае системы (6.3)). Заметим также, что отображение Пуанкаре существует далеко не всегда. Например, если на фазовой плоскости существует единственное состояние равновесия **седло**, с сепаратрисами, уходящими в бесконечность, то отображение Пуанкаре не существует.

Однако, существует важный класс динамических систем, для которого секущая Пуанкаре всегда существует и, более того, является глобальной. Это неавтономные системы с периодической правой частью (например, системы, находящиеся под действием периодического внешнего силового воздействия). Поясним ситуацию на примере неавтономной системы второго порядка

$$\begin{aligned} \clubsuit \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t), \\ \spadesuit \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

где  $f_i(x_1, x_2, t)$  – периодические функции с периодом  $T = 2\pi / \omega$ . Сделав в (6.9) замену  $t = \tau / \omega$ , получим систему



$$\begin{aligned}
 \clubsuit \quad \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \tau), \\
 \spadesuit \quad \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \tau), \\
 \heartsuit \quad \dot{\tau} &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

Система (6.10) – автономная система третьего порядка, не имеющая состояний равновесия в силу того, что  $\dot{\tau} = 1 > 0$ . Отсюда также следует, что любая траектория системы (6.9), «стартующая» с плоскости

$$\mathcal{C} = \{ t = t_0 = \text{const}, (x_1, x_2) \in R^2 \},$$

за конечное время придет на плоскость

$$\mathcal{C}_1 = \{ t = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}, (x_1, x_2) \in R^2 \} \quad (\text{рис 6.2}).$$

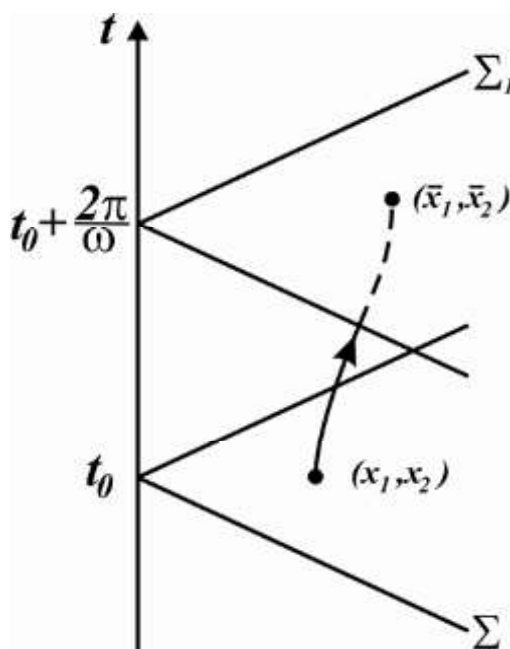


Рис. 6.2. Генерация отображения Пуанкаре системой (6.9).

В силу периодичности правых частей системы (6.9) плоскости  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{C}_1$  тождественны и, следовательно, система (6.9) порождает двумерное точечное отображение

$$P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Конечно, рассмотренный выше простейший пример (система (6.3)) введения отображения Пуанкаре не позволяет в полной мере судить о целесообразности такой процедуры. Однако, позднее на более содержательных примерах мы покажем, что исследование динамических систем с помощью



отображения Пуанкаре является одним из эффективных методов современной теории колебаний.

Перейдем к изучению свойств точечных отображений.

### 6.3. Неподвижные точки

Рассмотрим  $m$ -мерное нелинейное точечное отображение

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (6.11)$$

Напомним, что в (6.11)  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(n+1)$ , а  $\mathbf{x} \propto \mathbf{x}(n)$ , а  $n$  - дискретное время. Аналогично случаю динамических систем с непрерывным временем, для системы (6.11) также можно ввести понятие полутраектории и траектории, которые задаются соответственно следующим образом

$$\left\{ \mathbf{F}^n \mathbf{x}_0 \right\}_{n=0}^{+\infty} \text{ и } \left\{ \mathbf{F}^n \mathbf{x}_0 \right\}_{n=-\infty}^0,$$

где  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ . Очевидно, что в фазовом пространстве системы (6.11) они представляют собой последовательности точек. Простейшим видом траекторий системы (6.11) являются так называемые неподвижные точки. Неподвижными точками отображения (6.11) называются такие значения  $\mathbf{x}$ , которые не изменяются под его действием, т.е. являются решениями системы

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (6.12)$$

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  - решение системы (6.12) и, следовательно,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  - одна из неподвижных точек отображения (6.11). Для неподвижных точек, аналогично состояниям равновесия конечномерных систем с непрерывным временем, может быть введено понятие устойчивости по Ляпунову. Незначительное различие состоит в дискретности времени и траекторий. Далее, говоря об устойчивости неподвижных точек, мы будем понимать их устойчивость в смысле Ляпунова. Запишем отображение (6.11) в новых переменных

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \quad (6.13)$$

Из (6.11) и (6.13) имеем

$$\mathbf{x}^* + \bar{\xi} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \xi). \quad (6.14)$$

Разлагая правые части системы (6.14) в степенные ряды по  $\xi$ , получим

$$\bar{\xi} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \xi + \dots \quad (6.15)$$

Ограничиваясь в (6.15) линейными слагаемыми по  $\xi$ , приходим к линейному  $m$ -мерному отображению

$$\bar{\xi} = A\xi, \quad (6.16)$$

где  $A$  – постоянная  $m \cdot m$ -матрица с элементами  $a_{ik} = \left. \frac{df_i}{dx_k} \right|_{x=x^*}$ . Будем искать решение системы (6.16) в виде

$$\xi(n) = C(s)^n, \quad (6.17)$$

где  $C$  – постоянный вектор столбец. Подставляя (6.17) в (6.16), получим характеристический определитель

$$\det(A - sE) = 0, \quad (6.18)$$

где  $E$  – единичная  $m \cdot m$ -матрица. Раскрывая определитель (6.18), приходим к характеристическому уравнению. Корни этого уравнения, которые обозначим через  $s_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , называются **мультипликаторами** неподвижной точки  $x = x^*$ .

На предыдущей лекции мы отмечали, что структура траекторий в окрестности грубого состояния равновесия топологически эквивалентна ее линеаризации. Аналогичное утверждение справедливо и для неподвижных точек. Именно, если мультипликаторы неподвижной точки удовлетворяют условию  $|s_i| < 1$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , то она является грубой (структурно устойчивой) и существует гомеоморфизм, который переводит каждую траекторию из достаточно малой окрестности неподвижной точки нелинейного отображения (6.11) в траекторию из окрестности соответствующей неподвижной точки линейного отображения (6.16) с сохранением направления движения. Следовательно, грубые неподвижные точки отображения (6.11) могут быть исследованы на устойчивость и классифицированы с помощью соответствующих линейных отображений. В частности, из (6.17) следует, что неподвижная точка  $x = x^*$  отображения (6.11) будет асимптотически устойчивой  $n \rightarrow +\infty$ , если все ее мультипликаторы  $s_i$  на комплексной плоскости лежат строго внутри единичной окружности, т.е. удовлетворяют условию

$$|s_i| < 1, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (6.19)$$

Если же среди мультипликаторов  $s_i$  существует хотя бы один расположенный на комплексной плоскости вне единичной окружности, то неподвижная точка  $x = x^*$  отображения (6.11) неустойчива по Ляпунову.

#### 6.4. Одномерные линейные отображения

Рассмотрим отображения (6.16) в одномерном ( $m=1$ ) случае

$$\bar{l} = a l, \quad (6.20)$$

где  $a$  – параметр,  $a \neq 0$ . Предположим сначала, что  $a \neq 1$ . Очевидно, что  $l = 0$  – неподвижная точка отображения (6.20). Будем искать решение уравнения (6.20) в виде (6.17). Подставляя (6.17) в (6.20) находим, что множитель  $s=a$ . Следовательно, неподвижная точка  $l = 0$  является асимптотически устойчивой, если  $|a| < 1$  и неустойчивой, если  $|a| > 1$ .

Рассмотрим как переменная  $l(n)$  изменяется во времени  $n$  под действием отображения (6.20) при различных значениях параметра.

В случае одномерных отображений (отображение (6.11) в случае  $m=1$ ) и, в частности, отображения (6.20), эволюцию  $l(n)$  удобно изучать с помощью так называемой **диаграммы Ламерея**. Отображение рассматривается не в фазовом пространстве, которое является одномерным, а на вспомогательной плоскости  $(x, \bar{x})$ . На этой плоскости каждой траектории отображения соответствует некоторая ломаная линия, которая строится следующим образом. Прежде всего, на плоскости  $(x, \bar{x})$  проводится построение графика функции  $F(x)$ , которую называют **функцией последования**. При этом точки пересечения этого графика с биссектрисой  $\bar{x} = x$  соответствуют неподвижным точкам отображения. Затем из точки на оси абсцисс, соответствующей начальному условию  $x_0$ , несовпадающему с координатами неподвижных точек, проводится вертикальная прямая до пересечения с графиком функции последования  $F(x)$ . Ордината найденной таким образом точки соответствует значению  $x(1) = F(x_0)$ . Далее из этой точки проводится горизонтальная прямая до пересечения с биссектрисой. Тем самым устанавливается новая начальная точка на оси абсцисс для нахождения следующей итерации отображения, т.е.  $x(2) = F(x(1))$ . Затем процедура повторяется и на плоскости  $(x, \bar{x})$  формируется некоторая ломаная линия.

На рис. 6.3 представлены диаграммы Ламерея отображения (6.16) для различных значений параметра  $a$  и отвечающие им временные реализации переменной  $l(n)$ .

Заметим, что в случае  $a < 0$  на диаграмме Ламерея при каждой итерации изображающая точка меняет свое расположение относительно неподвижной точки и изменение переменной  $l$  во времени имеет немонотонный характер. При этом, если  $a = -1$ , все траектории отображения (6.20) являются периодическими с периодом 2 (рис. 6.3д). Действительно, в этом случае при любом начальном условии  $l(0) \neq 0$  траектория возвращается в него через две итерации. Наконец, обратим внимание на то, что при  $a = 1$  отображение (6.20) является вырожденным и имеет континуум неподвижных точек.

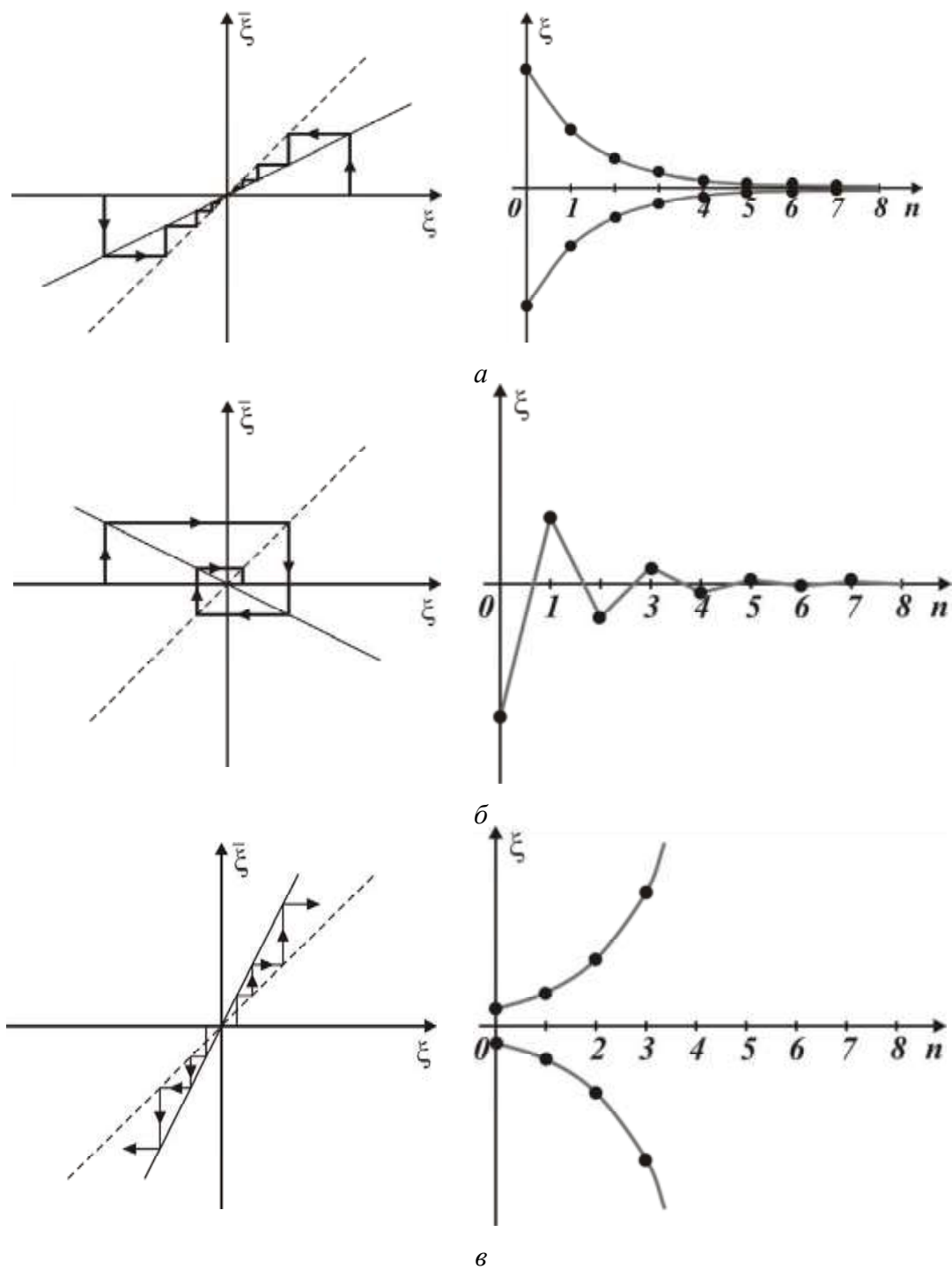


Рис. 6.3. Диаграмма Ламерея для отображения (6.20) и соответствующая эволюция переменной  $l(n)$  в случае  $0 < a < 1$  (а); в случае  $-1 < a < 0$  (б); в случае  $a > 1$  (в); в случае  $a < -1$  (г); в случае  $a = -1$  (д).

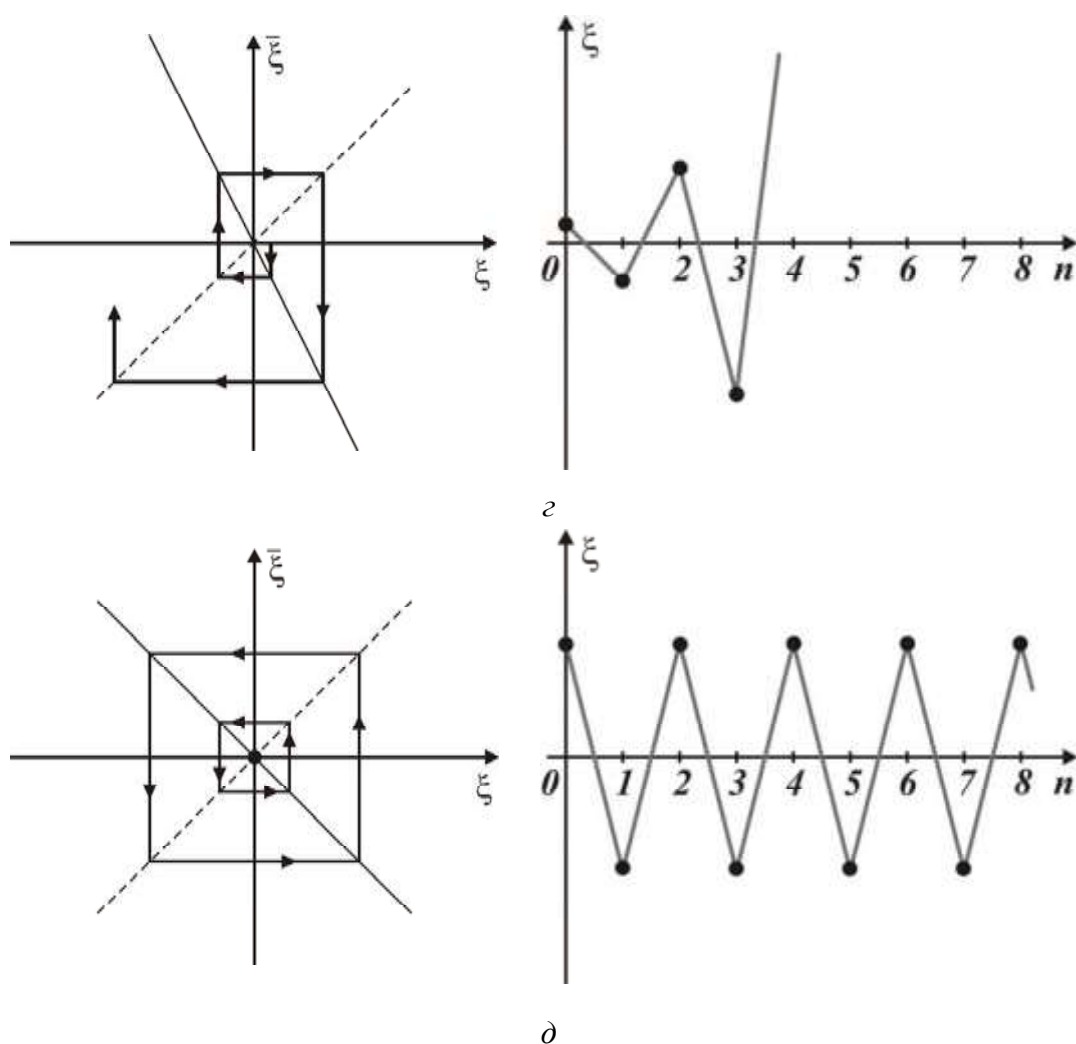


Рис. 6.3. Продолжение.

## 6.5. Двумерные линейные отображения

При  $m=2$  отображение (6.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \clubsuit t_1 &= a l_1 + b l_2, \\ \heartsuit t_2 &= c l_1 + d l_2, \end{aligned} \quad (6.21)$$

где  $a, b, c, d$  - некоторые параметры, а характеристическое уравнение, определяющее мультипликаторы  $s_{1,2}$  неподвижной точки  $\alpha(l_1 = l_2 = 0)$ , записывается следующим образом

$$s^2 - (a + d)s + (ad - bc) = 0. \quad (6.22)$$

Проведем классификацию возможных типов неподвижной точки  $O$ , считая, что ее мультипликаторы не лежат на единичной окружности, т.е.  $|s_{1,2}| \neq 1$ .

### 6.5.1. Действительные мультипликаторы

Предположим, что уравнение (6.22) имеет действительные мультипликаторы и выполнено условие  $s_1 \neq s_2$ . В этом случае, аналогично случаю линейных динамических систем с непрерывным временем, линейным невырожденным преобразованием координат (см. лекцию 3) система (6.21) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \clubsuit u_1 &= s_1 u_1, \\ \square u_2 &= s_2 u_2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Система (6.23) – нормальная форма уравнений грубой неподвижной точки с действительными мультипликаторами. Рассмотрим решение системы (6.23) с начальными условиями  $u_1(0) = u_1^0, u_2(0) = u_2^0$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit u_1(n) &= u_1^0 (s_1)^n, \\ \spadesuit u_2(n) &= u_2^0 (s_2)^n. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Непосредственно из (6.24) вытекают следующие свойства отображения (6.23).

□ Если  $|s_{1,2}| < 1$ , то при любых начальных условиях  $u_1^0, u_2^0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_i(n) = 0, \quad i = 1, 2$$

и неподвижная точка  $O$  является асимптотически устойчивой.

□ Если  $|s_1| < 1, |s_2| > 1$  или  $|s_1| > 1, |s_2| < 1$ , то неподвижная точка  $O$  является седловой.

□ Если  $|s_{1,2}| > 1$ , то при любых нетривиальных начальных условиях  $u_1^0, u_2^0$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_i(n) = \infty, \quad i = 1, 2$$

и неподвижная точка  $O$  является неустойчивой.

Рассмотрим возможные фазовые портреты отображения (6.23). Ограничимся случаем выполнения условия  $s_1 \oplus s_2 > 0$ , представляющим наибольший интерес, поскольку этому условию удовлетворяют мультипликаторы неподвижных точек отображений Пуанкаре.

#### 6.5.1.a. Неподвижная точка устойчивый узел

Как было показано выше, для устойчивости неподвижной точки ее мультипликаторы на комплексной плоскости должны быть расположены

внутри единичной окружности. В случае действительных мультипликаторов возможны два (при выполнении  $s_1 \oplus s_2 > 0$ ) варианта такого расположения.

**Положительные мультипликаторы:**  $1 > s_1 > s_2 > 0$ . Получим уравнение фазовых кривых отображения (6.23) в этом случае. Для этого возведем первое уравнение в системе (6.24) в степень  $\lg s_2$ , а второе – в степень  $\lg s_1$ . В результате получим

$$\begin{aligned}(u_1(n))^{\lg s_2} &= \binom{0}{u_1}^{\lg s_2} (s_1)^{n \lg s_2} \\ (u_2(n))^{\lg s_1} &= \binom{0}{u_2}^{\lg s_1} (s_2)^{n \lg s_1}.\end{aligned}\tag{6.25}$$

Поскольку

$$(s_1)^{n \lg s_2} = (s_2)^{n \lg s_1},$$

то из (6.25) вытекает следующее уравнение, описывающее искомые фазовые траектории

$$(u_2(n))^{\lg s_1} = C(u_1(n))^{\lg s_2},\tag{6.26}$$

где

$$C = \frac{\binom{0}{u_2}^{\lg s_1}}{\binom{0}{u_1}^{\lg s_2}}.$$

Из (6.25) следует, что в рассматриваемом случае все траектории, за исключением траекторий, отвечающих значениям  $C=0$  и  $C=\square$ , имеют параболический вид и касаются в начале координат оси абсцисс, поскольку

$$\left. \frac{du_2}{du_1} \right|_{u_1=0} = 0.$$

При  $C=0$  и  $C=\square$ , фазовые кривые выражаются в прямые  $u_2=0$  и  $u_1=0$  соответственно. Из (6.26) следует, что любая нетривиальная траектория системы (6.23) асимптотически приближается к неподвижной точке, которая называется **устойчивым узлом** (рис. 6.4), а прямые  $u_2=0$  и  $u_1=0$  его

**ведущим** и **неведущим** направлениями.

**Отрицательные мультипликаторы:**  $\square 1 < s_1 < s_2 < 0$ . В этом случае свойства неподвижной точки  $O$  аналогичны предыдущему случаю, и она также называется устойчивым узлом. Однако, стремление траекторий к неподвижной точке имеет специфику, связанную с тем, что ее мультипликаторы отрицательны. Благодаря этому, при каждой итерации изображающая точка изменяет знак своих координат на противоположный. Другими словами, траектории стремятся к неподвижной точке, поочередно перескакивая на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  с одной фазовой кривой на другую. Однако, через





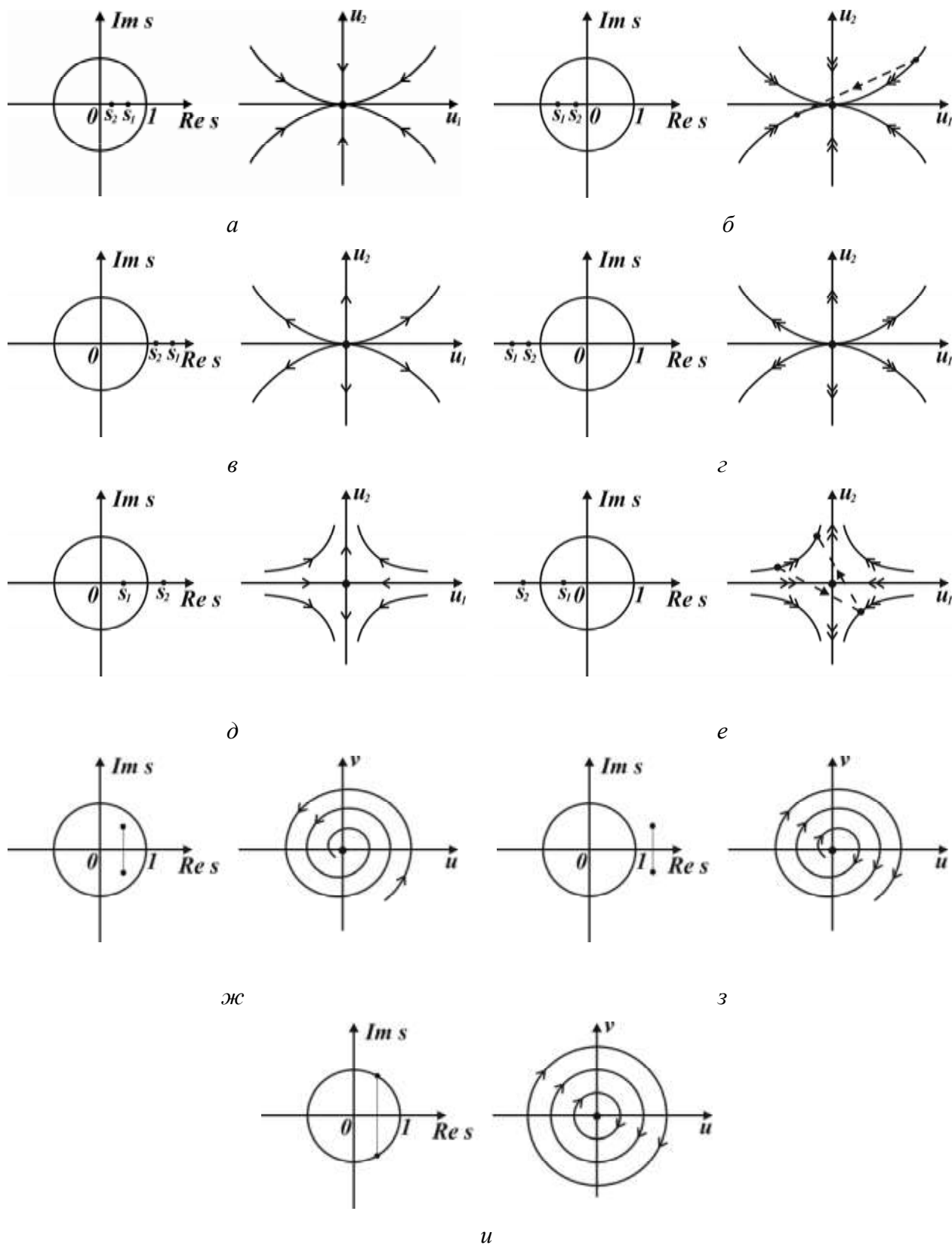


Рис. 6.4. Расположение мультипликаторов на комплексной плоскости и фазовые портреты отображения (6.23): в случае устойчивого узла (а), (б); в случае неустойчивого узла (в), (г); в случае седла (д), (е); в случае устойчивого фокуса (ж); в случае неустойчивого фокуса (з); в случае эллиптической точки (и).

одну итерацию изображающая точка вновь возвращается на первоначальную фазовую кривую, т.е. траектории отображения второй степени задаются тем же уравнением (6.26), в котором  $s_1$  и  $s_2$  нужно формально заменить на  $s_1^2$  и  $s_2^2$  соответственно.

#### 6.5.1.б. Неподвижная точка неустойчивый узел

Рассмотрим свойства отображения (6.23), когда оба мультипликатора расположены вне единичной окружности. Здесь, как и в предыдущем случае, они могут быть как положительными (рис. 6.4.в), так и отрицательными (рис. 6.4.г). В обоих случаях в силу (6.24) траектории отходят от неподвижной точки и, следовательно, она неустойчива. Такая неподвижная точка называется **неустойчивым узлом**. Фазовые кривые на плоскости по-прежнему задаются уравнением (6.26), по которым траектории отходят от неподвижной точки.

#### 6.5.1.в. Неподвижная точка седло

Пусть неподвижная точка  $O$  имеет один мультипликаторы вне, а второй – внутри единичной окружности, т.е.  $s_1, s_2$  удовлетворяют условиям:  $0 < s_1 < 1 < s_2$  (рис. 6.4.д) или  $s_2 < -1 < s_1 < 0$  (рис. 6.4.е). По-прежнему прямые  $\{\mu_2 = 0\}$  и  $\{\mu_1 = 0\}$  являются инвариантными. Прямая  $\{\mu_2 = 0\}$  состоит из  $O$  и двух траекторий асимптотически стремящихся к ней, а прямая  $\{\mu_1 = 0\}$  включает в себя, кроме неподвижной точки  $O$ , две траектории, уходящие от нее. Такая неподвижная точка называется **седлом**. Две приближающиеся к ней траектории называются устойчивыми, а две удаляющиеся траектории – неустойчивыми **сепаратрисами** неподвижной точки  $O$ . Заметим, что уравнение (6.26) остается справедливым в рассматриваемом случае и показывает, что все траектории отображения, кроме сепаратрис, имеют вид гипербол, которые проходят мимо  $O$  (рис. 6.4.д,е). При этом в случае отрицательных мультипликаторов изображающая точка двигается по траекториям со скачками. Пример такого движения показан на рис. 6.4е пунктирной линией. Обратим внимание, что на фазовой плоскости  $(l_1, l_2)$  исходной системы (6.21) сепаратрисы седловой неподвижной точки имеют в общем случае вид прямых, не обязательно совпадающих с осями координат, как это имеет место для плоскости  $(u_1, u_2)$ .

### 6.5.2. Комплексные мультипликаторы

Предположим, что неподвижная точка  $O$  имеет комплексно-сопряженные мультипликаторы

$$s_{1,2} = \langle \pm i \rangle. \quad (6.27)$$

В этом случае переменные  $u_1$  и  $u_2$  в (6.23) являются комплексными, т.е.

$$\begin{aligned} u_1 &= u + iv, \\ u_2 &= u - iv. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Подставляя (6.27), (6.28) в (6.23), получим

$$\begin{aligned} \clubsuit \bar{u} + i\bar{v} &= (\langle + i \rangle)(u + iv), \\ \spadesuit \bar{u} - i\bar{v} &= (\langle - i \rangle)(u - iv). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Из (6.29) находим

$$\begin{aligned} \clubsuit \bar{u} &= \langle u + i\bar{v} \rangle, \\ \spadesuit \bar{v} &= \langle u - i\bar{v} \rangle. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Система (6.30) является нормальной формой уравнений грубой неподвижной точки с комплексно-сопряженными мультипликаторами. Исследуем свойства фазовых траекторий системы (6.30). Представим мультипликаторы  $s_{1,2}$  в тригонометрическом виде

$$s_{1,2} = |s|(\cos \varphi \pm i \sin \varphi),$$

где

$$|s| = \sqrt{\langle^2 + \rangle^2}, \quad \langle = |s| \cos \varphi, \quad \rangle = |s| \sin \varphi. \quad (6.31)$$

При использовании (6.31) система (6.30) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \clubsuit \bar{u} &= |s|(u \cos \varphi - v \sin \varphi), \\ \spadesuit \bar{v} &= |s|(u \sin \varphi + v \cos \varphi). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Переходя в системе (6.32) к полярным координатам

$$u = \rho \cos \Pi, \quad v = \rho \sin \Pi,$$

получим

$$\begin{aligned} \spadesuit \bar{u} \cos \Pi &= |s|(\rho \cos \varphi \cos \Pi + \rho \sin \varphi \sin \Pi) = |s| \rho \cos(\Pi - \varphi), \\ \clubsuit \bar{v} \sin \Pi &= |s|(\rho \sin \varphi \cos \Pi + \rho \cos \varphi \sin \Pi) = |s| \rho \sin(\Pi - \varphi). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Разрешая систему (6.33) относительно  $\rho$  и  $\Pi$ , находим

$$\begin{aligned} \spadesuit \bar{u} &= \rho \cos(\Pi - \varphi), \\ \clubsuit \bar{v} &= \rho \sin(\Pi - \varphi). \end{aligned} \quad (6.34)$$

В системе (6.34) уравнения для переменных  $\Pi$  и  $\rho$  независимы, что позволяет легко найти их решение и получить вид траекторий отображения



$$\begin{aligned} \clubsuit \Pi(n) &= \lceil n + \Pi \\ \heartsuit \rangle(n) &= \rangle_0 s^n. \end{aligned} \quad (6.34)$$

где  $\Pi(0) = \Pi_0$ ,  $\rangle(0) = \rangle_0$  – произвольные начальные условия. Из (6.34) следует, что при любых начальных условиях

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \heartsuit(n) = \begin{cases} \heartsuit 0, & \text{если } |s| < 1, \\ \heartsuit + \heartsuit, & \text{если } |s| > 1. \end{cases}$$

Следовательно, при  $|s| < 1$  неподвижная точка  $O$  является асимптотически устойчивой, а при  $|s| > 1$  – неустойчивой.

Рассмотрим теперь отвечающие рассмотренным случаям, фазовые портреты исходного отображения (6.30). С геометрической точки зрения первое уравнение в (6.34) задает преобразование поворота на угол  $\Pi = \lceil$ , а второе – изменение в  $|s|$  раз длины полярного радиуса. Принимая это во внимание, устанавливаем, что траектории отображения (6.30) на фазовой плоскости  $(u, v)$  имеют вид спиралей, которые при  $|s| < 1$  скручиваются (рис. 6.4.ж), а при  $|s| > 1$  раскручиваются от нее (рис. 6.4.з). В первом случае неподвижная точка  $O$  называется **устойчивым**, а во втором – **неустойчивым фокусом**. При  $|s| = 1$  переменная  $\rangle$  не меняется во времени и задается начальным условием, а переменная  $\Pi$ , по-прежнему при каждой итерации увеличивается на  $\omega_0$ . Следовательно, в случае  $|s| = 1$  траектории отображения (6.30) имеют вид окружностей, радиусы которых определяются начальным условием  $\rangle_0$ . Такая неподвижная точка называется **эллиптической**, поскольку на фазовой плоскости  $(l_1, l_2)$  исходного отображения (6.21) ее траектории, вообще говоря, имеют вид эллипсов.

## 6.6. Одномерные нелинейные отображения: некоторые понятия и примеры

Рассмотрим нелинейное отображение (6.11) в одномерном случае ( $m=1$ ). В таких отображениях, в принципе, может существовать большое разнообразие самых различных траекторий. Простейшие из них, как уже знаем, это неподвижные точки. Рассмотрим (см. также лекцию 1) некоторые другие.

**Периодические траектории или циклы.** Точка  $x = x_0$  называется периодической периода  $k$  или  $k$ -циклом, если

$$F^k(x_0) = x_0 \text{ и } F^i(x_0) \neq x_0 \text{ при } 0 < i < k.$$

**Гомоклинические траектории (орбиты).** Траектория (орбита)  $\{F^n x\}_{n=-\infty}^{\infty}$  называется гомоклинической к неподвижной точке  $x = x^*$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} x(n) = x^*,$$

т.е. гомоклиническая траектория является двоякоасимптотической к неподвижной точке. Заметим, забегая несколько вперед, что наличие у отображения гомоклинической траектории может служить признаком сложной динамики системы.

**Гетероклинические траектории.** Траектория  $\{F^n x\}_{n=-\infty}^{\infty}$  называется гетероклинической, если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = x_1^*, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} x(n) = x_2^*,$$

где  $x_1^*$  и  $x_2^*$  - различные неподвижные точки.

Как мы уже отмечали выше, одномерные точечные отображения удобно изучать не в фазовом пространстве, которое является одномерным, а на плоскости  $(x, \bar{x})$  с помощью диаграммы Ламерея. Построив на этой плоскости график функции  $F(x)$ , можно достаточно просто установить ряд локальных и нелокальных свойств траекторий отображения. Например, если график функции  $F(x)$  пересекает биссектрису в некоторой точке, то эта точка является неподвижной точкой отображения. Более того, она устойчива, если наклон касательной к кривой  $F(x)$  в этой точке по модулю меньше единицы (рис. 6.5а,б) и неустойчива в противном случае (рис. 6.5в,г).

Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из определения мультипликатора  $s = F'(x^*)$ . Нетрудно видеть также, что, если на некотором интервале значения  $x$ , функция  $F(x)$  монотонно возрастает, т.е.  $dF(x) > 0$ , то траектории отображения на этом интервале монотонно возрастают, если  $F(x) > x$  (рис. 6.5а,б) или монотонно убывают, если  $F(x) < x$  (рис. 6.5а,б). В случае, когда  $F(x)$  является монотонно убывающей на некотором интервале, то каждая траектория распадается на две монотонные последовательности, одна из которых возрастает, а другая убывает (рис. 6.5б,г).

Знакомство с нетривиальными свойствами траекторий одномерных нелинейных отображений мы начнем с так называемого **отображения Бернулли**, простейшие свойства которого мы обсуждали на первой лекции. Оно задается следующим образом

$$\bar{x} = 2x \pmod{1}. \quad (6.35)$$

На рис. 6.6 представлена диаграмма Ламерея, соответствующая отображению (6.35). Заметим, что несмотря на то, что точка  $x=1/2$  делит интервал  $[0,1]$  на две части, в каждой из которых отображение (6.35) является

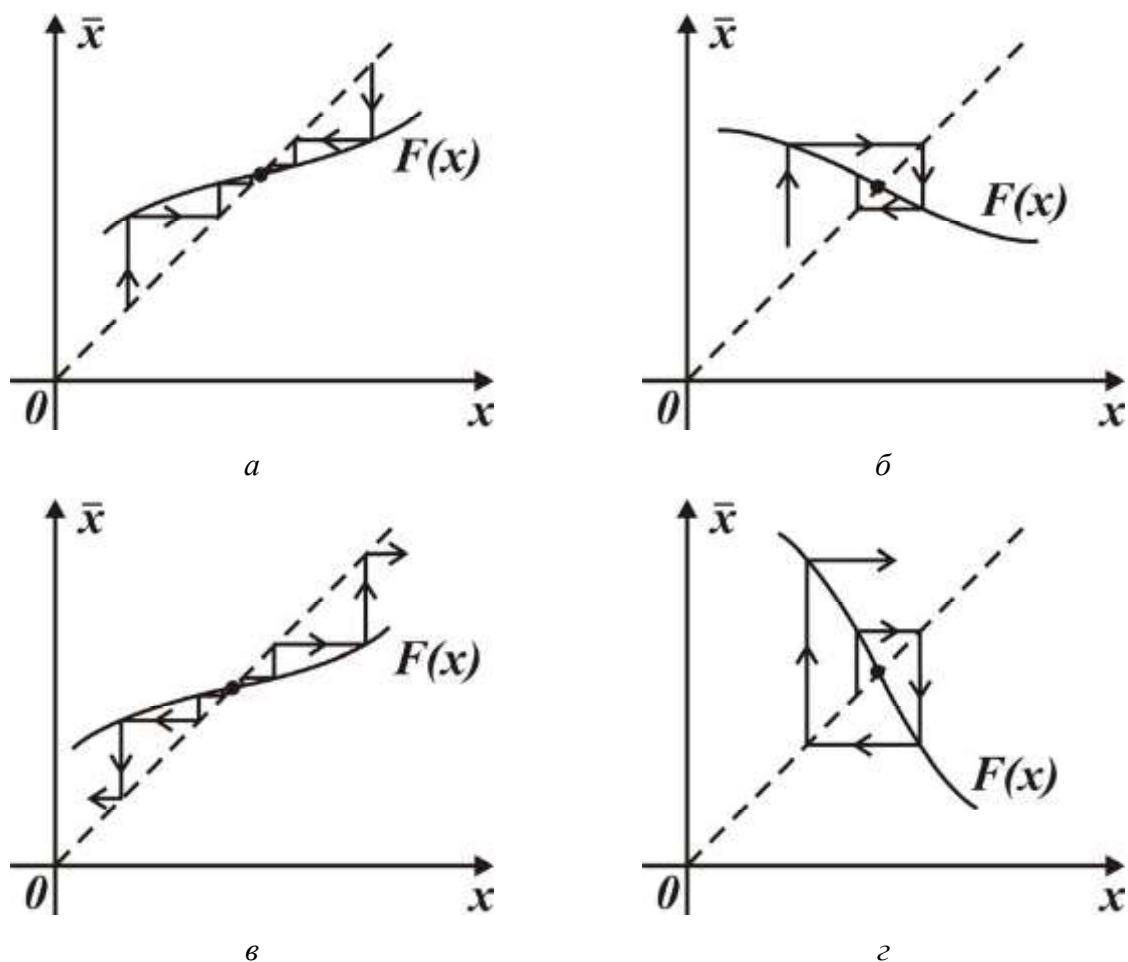


Рис. 6.5. Диаграмма Ламерея для различных видов функции последования  $F(x)$ : в случае устойчивых неподвижных точек (а) и (б); в случае неустойчивых неподвижных точек (в) и (г).

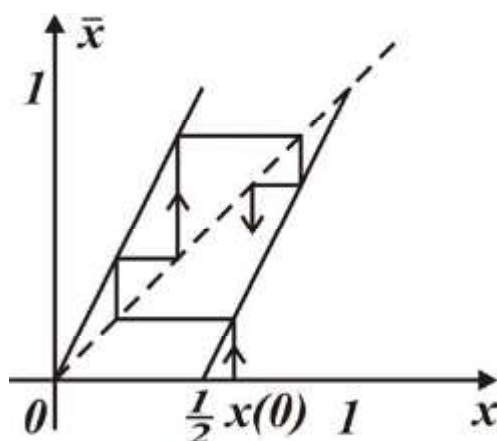


Рис. 6.6. Отображение Бернулли и несколько его итераций начального условия  $x(0)$ .

линейным, полное отображение является нелинейным (отображения такого типа называют кусочно-линейными). Нетрудно видеть, что отображение (6.35) имеет две, отождествляемые между собой, неподвижные точки  $x=0$  и  $x=1$ .



Покажем, что, несмотря на свой простой вид, отображение (6.35) может демонстрировать сложную динамику.

Запишем начальное условие  $x(0)$  в двоичной системе исчисления

$$x(0) = a_1, a_2, a_3, \dots, \quad (6.36)$$

где  $a_i \in \{0, 1\}$ . В (6.36)  $a_1 = 0$ , если  $x(0) < 1/2$  и  $a_1 = 1$ , если  $x(0) > 1/2$ . Представление (6.36) эквивалентно следующему

$$x(0) = a_1 \oplus 2^{-1} + a_2 \oplus 2^{-2} + a_3 \oplus 2^{-3} + \dots \quad (6.37)$$

Используя (6.37), находим, что

$$x(1) = 2x(0) = a_1 + a_2 \oplus 2^{-1} + a_3 \oplus 2^{-2} + \dots \quad (6.38)$$

и

$$x(1) = 0, a_2, a_3, \dots \quad (6.39)$$

Ясно, что последующие итерации отображения (6.35) происходят по аналогичному сценарию. Следовательно, действие отображения Бернулли на двоичное представление  $x$  сводится к удалению первого знака после запятой и сдвигу оставшейся последующей последовательности влево. Это свойство траекторий отображения (6.35) называется **сдвигом Бернулли**. Используя это свойство, покажем, что отображение (6.35) может демонстрировать сложную динамику.

Предположим, что двоичная последовательность (6.36) является периодической. Такой вид (6.36) имеет место, если  $x(0)$  – рациональное число. Поскольку каждое действие отображения (6.35) эквивалентно сдвигу Бернулли, то через некоторое число итераций, равное периоду двоичного кода представления (6.36), переменная  $x$  вернется в исходное состояние. Другими словами, отображение (6.35) имеет периодическую траекторию (цикл), период которой равен периоду представления (6.36). С другой стороны, на единичном интервале существует счетное множество рациональных чисел. Следовательно, отображение (6.35) имеет счетное множество циклов различного периода. Например, пусть  $x(0) = 1/3$ . В двоичной системе исчисления имеем следующую динамику

$$x(0) = 0,01010101\dots$$

$$x(1) = 0,1010101\dots$$

$$x(2) = 0,01010101\dots$$

Следовательно, отображение (6.35) имеет периодическую траекторию периода 2 или 2-цикл. Рассмотрим две траектории отображения (6.35), стартующие с двух начальных условий  $x(0)$  и  $x'(0)$ , различающихся лишь с  $(n+1)$  знака в представлении (6.36), т.е. по крайней мере,  $a_{n+1} \neq a'_{n+1}$ . Через  $n$ -итераций эти траектории будут иметь значения  $F^n(x(0))$  и  $F^n(x'(0))$ , которые будут

отличаться уже в первом знаке. Действительно, в силу действия сдвига Бернулли имеем

$$F^n(x(0)) = 0, a_{n+1} \dots$$

$$F^n(\tilde{x}(0)) = 0, \tilde{a}_{n+1} \dots$$

Следовательно, траектории отображения (6.35) обладают очень высокой чувствительностью к начальным условиям, что характерно для хаотических движений.

Кроме рассмотренных здесь свойств, отображение (6.35) обладает и другими, не менее интересными и сложными свойствами, которые мы обсудим позднее.

## 6.7. Контрольные вопросы и задания

1. Найдите и классифицируйте неподвижные точки отображений (6.1), (6.2) и

$$\begin{aligned} \clubsuit \bar{x} &= x + f(x) \square y, \\ \square \heartsuit \bar{y} &= y + \Sigma(x \square \vartheta), \end{aligned}$$

где  $a, b$  и  $\Sigma$  положительные параметры, а  $f(x) = x(1 \square x)(x \square a)$ ,  $0 < a < 1$ .

2. Рассмотрите траекторию отображения Бернулли с начальным условием  $x(0) = 1/7$ . Найдите двоичное представление этого начального условия и покажите, что траектория с таким начальным условием является 4-периодической.

3. Рассмотрите отображение

$$\bar{x} = 3x(\text{mod } 1).$$

Покажите, что действие этого отображения сводится к 3-ичному сдвигу Бернулли.

4. Найдите 2 и 3-циклы отображения (6.1).

## ЛЕКЦИЯ 7

### ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

*Понятие изолированной траектории и предельного цикла.  
Отображение Пуанкаре и устойчивость предельных циклов.  
Орбитальная устойчивость. Критерий Бендиксона-Дюлака.*

#### 7.1. Изолированные и неизолированные периодические траектории. Определение предельного цикла.

На предыдущих лекциях мы рассмотрели один из главных типов траекторий динамических систем – состояния (положения) равновесия, которым соответствуют состояния покоя реальных систем. Другой важный класс траекторий образуют так называемые **предельные циклы**, которым соответствуют периодические изменения во времени реальных систем. Рассмотрим предельные циклы динамических систем, заданных на фазовой плоскости

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Поскольку предельный цикл отображает периодические во времени процессы реальных систем, то на фазовой плоскости он должен быть представлен замкнутой фазовой траекторией. С замкнутыми фазовыми траекториями мы уже встречались при изучении динамики нелинейного осциллятора, который, если имеет на фазовой плоскости периодические траектории, то их всегда континуум. Принципиальное отличие предельных циклов от периодических траекторий консервативных систем состоит в том, что они обладают свойством изолированности. **Замкнутая фазовая траектория называется изолированной, если существует достаточно малая кольцеобразная окрестность этой траектории, внутри которой нет других замкнутых траекторий.** Поясним смысл этого свойства на примере двух следующих систем

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 \quad (7.2)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + 1 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}$$

$$= x + x_2(1 - x^2 - x_2). \tag{7.3}$$

Система (7.2) – гармонический осциллятор, фазовый портрет которого представлен на рис. 7.1а. Система (7.2) имеет континуум замкнутых траекторий вида:  $x_1^2 + x_2^2 = C$ , где  $C = \text{const} > 0$ . Ясно, что в этом случае ни одна из

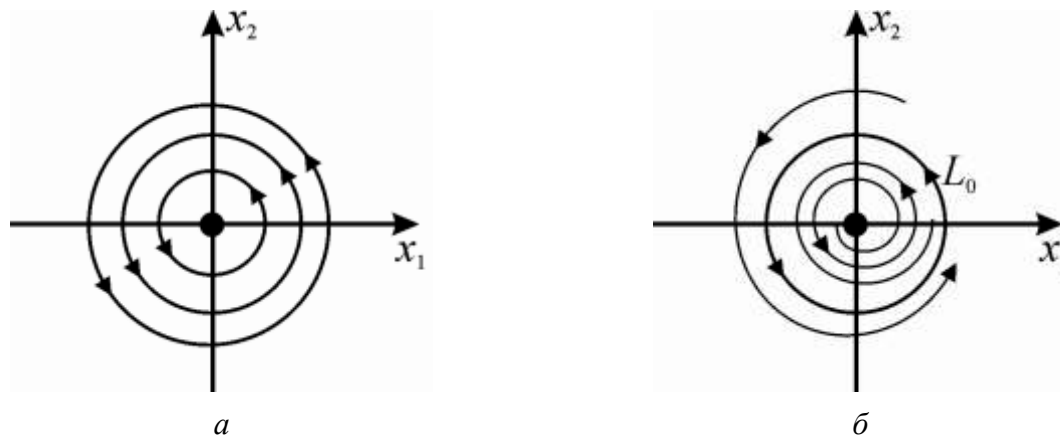


Рис. 7.1. Фазовые портреты системы (7.2) (а) и системы (7.3) (б).

замкнутых траекторий не является изолированной. Построим теперь фазовый портрет системы (7.3). Для этого перейдем в (7.3) к полярным координатам

$$x_1 = \rho \cos \Pi, \quad x_2 = \rho \sin \Pi. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.4) в систему (7.3), получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} \cos \Pi - \rho \sin \Pi \dot{\Pi} \oplus \Pi &= -\rho \sin \Pi + \rho(1 - \rho^2) \cos \Pi, \\ \dot{\rho} \sin \Pi + \rho \cos \Pi \dot{\Pi} \oplus \Pi &= \rho \cos \Pi + \rho(1 - \rho^2) \sin \Pi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Разрешая (7.5) относительно производных, находим уравнения для  $\rho$  и  $\Pi$

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2), \quad \dot{\Pi} = 1. \quad (7.6)$$

Первое уравнение в системе (7.6) имеет два состояния равновесия – неустойчивое в точке  $\rho=0$  и устойчивое в точке  $\rho=1$ , а угловая переменная изменяется в соответствии с уравнением  $\Pi = t + \Pi_0$ , где  $\Pi_0 = \text{const}$ . Принимая во внимание эти свойства, устанавливаем фазовый портрет системы (7.3), представлений на рис. 7.1б. На фазовой плоскости существует единственная замкнутая изолированная фазовая траектория – предельный цикл  $L_0$ . Пусть при  $t=t_0$  переменная  $\Pi(t_0)=0$ . Тогда из уравнения  $\Pi(t_0)=t_0+\Pi_0$  находим, что  $\Pi_0=-t_0$ .

Отсюда и (7.4) получаем, что предельный цикл  $L_0$  задается следующим образом  $L_0 = \{x_1 = \cos(t - t_0), x_2 = \sin(t - t_0)\}$  (заметим, что в неявном виде цикл  $L_0$  задается уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ). Цикл  $L_0$  притягивает все, кроме состояния равновесия  $x_1=x_2=0$ , траектории системы (7.3). Следовательно, в отличие от периодических движений консервативных систем, амплитуда которых определяется начальными условиями, периодические движения, отвечающие предельным циклам, имеют характеристики (амплитуду, период) в определенных пределах независимые от начальных условий (в случае системы



(7.3) характеристики цикла  $L_0$  вообще не зависят от начальных условий) и, как будет показано позднее, полностью определяются параметрами динамической системы.

Таким образом, **предельным циклом называется замкнутая изолированная фазовая траектория**. Предельному циклу соответствует периодическое решение системы (7.1), т.е.

$$L_0 = \{x_1 = x_1^*(t), x_2 = x_2^*(t)\}, \quad (7.7)$$

где  $x_i^*(t+T_0)=x_i^*(t)$ ,  $i=1,2$ ,  $T_0(T_0>0)$  – минимальный период. Заметим, что форма периодических колебаний, отвечающих предельным циклам, может меняться в самых широких пределах – от синусоидальной (например, как в системе (7.3)) до кноидальной.

## 7.2. Орбитальная устойчивость. Устойчивые и неустойчивые предельные циклы.

Предположим, что система (7.1) имеет предельный цикл  $L_0$  и существует такая кольцообразная окрестность цикла, что все траектории, начинающиеся в этой окрестности, асимптотически приближаются к предельному циклу  $L_0$  (рис.7.2а). Следовательно, цикл  $L_0$  обладает признаками устойчивого поведения. Однако, из-за неизохронности траекторий в окрестности  $L_0$

определение устойчивости по Ляпунову в этом случае не выполняется и является слишком жестким.

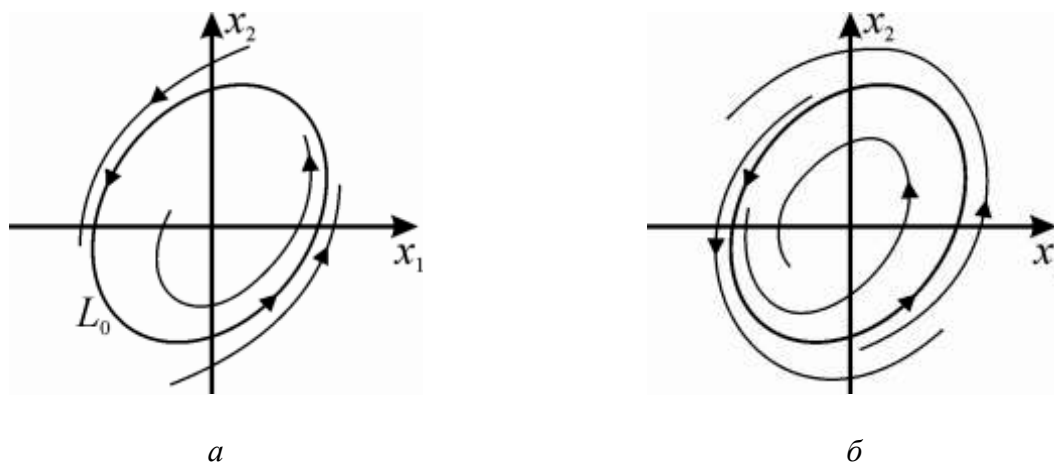


Рис.7.2. Предельные циклы: устойчивый (а); неустойчивый (б).

### 7.2.1. Определение орбитальной устойчивости

Для преодоления этого противоречия в случае периодических траекторий вводят понятие так называемой орбитальной устойчивости, обладающей менее

жесткими ограничениями. Сформулируем это определение для системы произвольной размерности (система (3.1), лекция № 3). Пусть  $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)\}$ , где  $\mathbf{x}^*(t+T_0) = \mathbf{x}^*(t)$ , – периодическая траектория системы (3.1).

**Определение 7.1.** Периодическая траектория  $L$  называется орбитально устойчивой при  $t \rightarrow +\infty$ , если для любого  $\Sigma > 0$  существует число  $\tau^{\Sigma} = \tau^{\Sigma}(t_0)$  такое, что любая полутраектория  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t_0 \leq t < +\infty$ , для которой

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \tau^{\Sigma},$$

в дальнейшем целиком содержится в  $\Sigma$ -окрестности траектории  $L$ , т.е.

$$\rho(\mathbf{x}(t), L) < \Sigma \quad \text{при } t \geq t_0,$$

где  $\rho(\mathbf{x}(t), L)$  – минимальное евклидово расстояние от  $\mathbf{x}(t)$  до траектории  $L$ :

$$\rho(\mathbf{x}(t), L) = \inf_L \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\|.$$

Кроме того, если для всех траекторий, достаточно близких к  $L$ , расстояние  $\rho(\mathbf{x}(t), L) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то траектория  $L$  называется **орбитально асимптотически устойчивой**. Если же в сколь угодно малой окрестности существует хотя бы одна фазовая траектория, покидающая окрестность  $L$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то траектория называется неустойчивой.

Очевидно, что предельный цикл  $L_0$  системы (7.3), представленный на рис. 7.2а является орбитально асимптотически устойчивым (далее для краткости устойчивым), а на рис. 7.2б – неустойчивым.

### 7.2.2. Характеристики предельных циклов

Пусть  $L_0$  – предельный цикл системы (7.1). Зафиксируем на  $L_0$  произвольную точку и проведем в этой точке касательную к  $L_0$ , а к ней – ортогональную прямую  $N$  (рис.7.3). Введем на  $N$  координату так, чтобы начало координат было в точке пересечения  $N$  и  $L_0$ . Рассмотрим поведение траекторий системы (7.1) в малой кольцеобразной окрестности предельного цикла  $L_0$ . Поскольку время движения вдоль предельного цикла  $L_0$  конечно, то в силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий любая траектория системы (7.1) из малой окрестности  $L_0$ , «стартующая» с прямой  $N$  из точки  $l$ , через конечное время вернется на прямую  $N$  в некоторой точке с координатой  $\bar{l}$ . Другими словами, прямая  $N$  является локальной секущей Пуанкаре, на которой траектории системы (7.1) порождают точечное отображение Пуанкаре

$$\bar{l} = g(l). \quad (7.8)$$



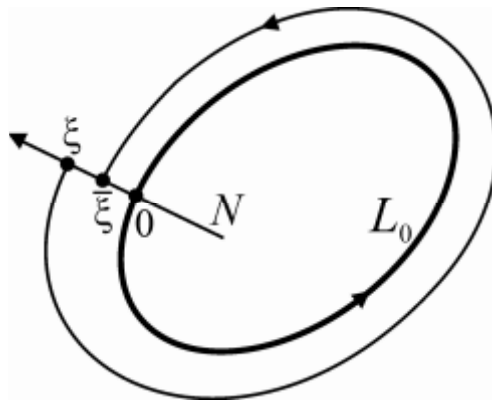


Рис.7.3. Генерация отображения Пуанкаре в окрестности предельного цикла.

Рассмотрим качественный вид функции последования  $g(l)$  в случае устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Так как из малой окрестности устойчивого предельного цикла все траектории системы (7.1) асимптотически приближаются к циклу, то траектории соответствующего точечного отображения асимптотически стремятся к неподвижной точке  $l=0$  отображения (7.8). Качественный вид отображения (7.8) в этом случае представлен на рис.7.4а. Рассуждая совершенно аналогично, устанавливаем качественный вид отображения (7.8) для неустойчивого предельного цикла

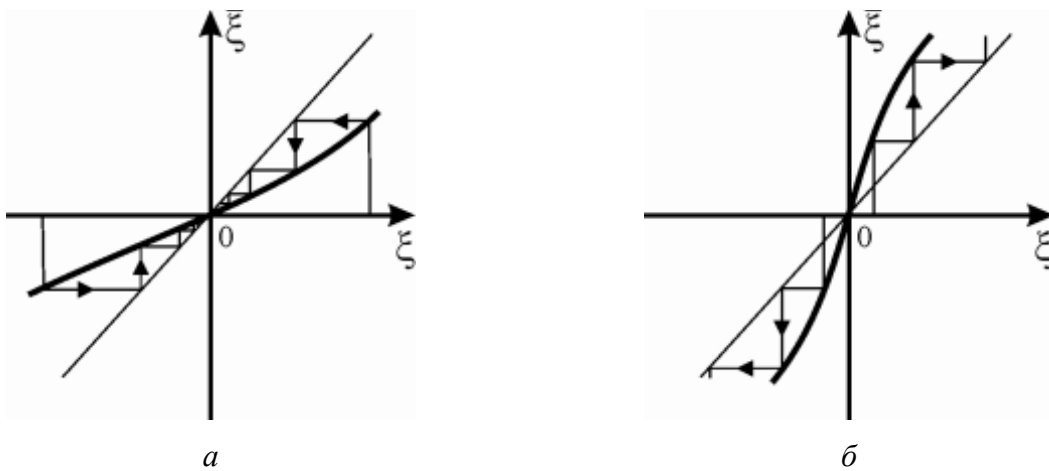


Рис. 7.4. Качественный вид отображения Пуанкаре в окрестности устойчивого (а) и неустойчивого (б) предельных циклов.

(рис.7.4б). Следовательно, между устойчивостью предельных циклов и неподвижных точек соответствующих отображений Пуанкаре существует взаимно-однозначное соответствие. Это позволяет ввести характеристику предельного цикла – **мультипликатор** предельного цикла, как мультипликатор соответствующей неподвижной точки отображения (7.16), т.е. как величину

$$s = \left. \frac{dg}{dl} \right|_{l=0} = g'(0) \quad (7.9)$$

которая для предельных циклов на плоскости всегда является положительной. Мультипликатор устойчивого предельного цикла удовлетворяет неравенству  $s < 1$ , а неустойчивого –  $s > 1$ . Заметим, что, если уравнение предельного цикла известно, его мультипликатор может быть найден следующим образом

$$s = \exp \left[ \int_0^{T_0} \left( \frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2} \right)_{x^*(t)} dt \right], \quad (7.10)$$

$0 \leq x^*(t)$

Другой характеристикой предельных циклов является так называемый **характеристический показатель**. Его можно ввести следующим образом. Линеаризуем систему (7.1) на цикле  $L_0$ , полагая  $x_i = x_i^*(t) + \bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2$  и разлагая правые части системы (7.1) в ряды по степеням  $\bar{x}_i$ . Тогда в линейном приближении получим

$$\dot{\bar{x}}_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}(t) \bar{x}_j(t), \quad i=1,2, \quad (7.11)$$

где

$$a_{ij}(t) = \left. \frac{df_i}{dx_j} \right|_{x^*(t)}, \quad a_{ij}(t+T_0) = a_{ij}(t).$$

Система (7.11) является линейной системой с периодическими коэффициентами. Общее решение системы (7.11) определяется теорией Флоке и имеет вид

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{j=1}^2 C_j \psi_{ij}(t) e^{\lambda_j t}, \quad i=1,2,$$

где  $C_j$  – const, а  $\psi_{ij}$  – периодические функции периода  $T_0$ , а  $\lambda_j$  – постоянные называемые характеристическими показателями. Согласно теореме Андронова-Понтрягина для автономных динамических систем один из характеристических показателей всегда равен нулю, другой равен

$$\lambda = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left( \frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2} \right)_{x^*(t)} dt. \quad (7.12)$$

$0 \leq x^*(t)$

Предельный цикл устойчив, если  $\lambda < 0$  и неустойчив, если  $\lambda > 0$ . Сравнивая (7.12) и (7.10), устанавливаем связь между мультипликатором и характеристическим показателем предельного цикла

$$\lambda = \frac{1}{T_0} \ln s \quad (7.13)$$



### 7.3. Вращательные и колебательные предельные циклы

Мы рассмотрели предельные циклы на фазовой плоскости. Однако существуют такие реальные системы, для адекватного описания поведения которых необходимо введение цилиндрического фазового пространства. Это системы, у которых одна из переменных является угловой. Типичным примером таких систем является обычный физический маятник. В динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством могут существовать предельные циклы двух видов – вращательные и колебательные. Первые из них охватывают фазовый цилиндр  $G = S^1 \cdot R^1$  (рис.7.5а) и угловая переменная вдоль цикла непрерывно нарастает. Колебательные циклы не охватывают фазовый цилиндр  $G$  (рис.7.5б), а лежат на поверхности цилиндра и угловая координата колеблется около некоторого среднего значения.

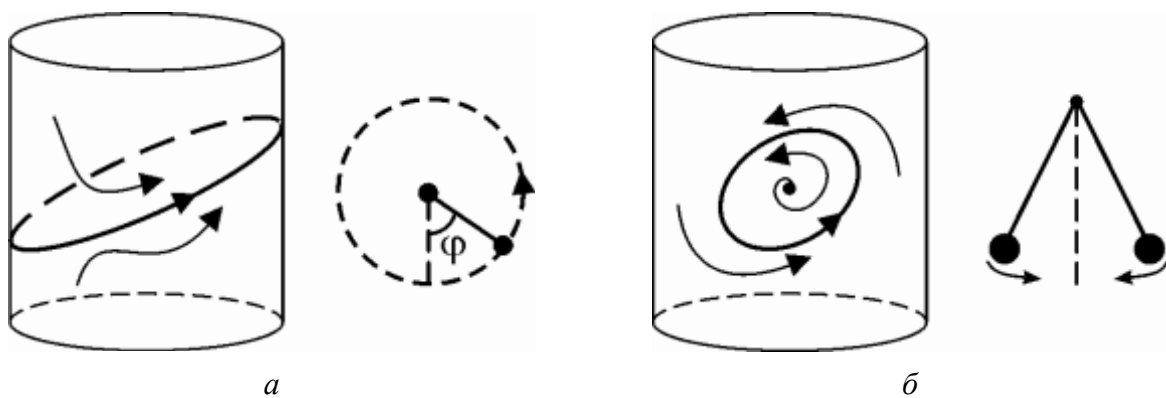


Рис. 7.5. Предельные циклы в цилиндрическом фазовом пространстве: вращательный (а); колебательный (б).

### 7.4. Критерий Бендиксона-Дюлака

Ясно, что для конкретных двумерных динамических систем задача о существовании или, наоборот, отсутствии предельных циклов является центральной. При этом доказательство отсутствия у системы предельных циклов не менее важно с практической точки зрения, чем доказательство противоположного утверждения. Действительно, если удалось установить отсутствие предельных циклов, то динамика системы полностью понятна – при любых начальных условиях система приходит в одно из равновесных состояний. Одним из эффективных критериев выделения систем без замкнутых траекторий является критерий Бендиксона-Дюлака: *если существует такая непрерывная с непрерывными производными функция  $V(x_1, x_2)$ , что в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Bf_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(Bf_2)$$

*знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (7.1).*

Заметим, что критерий Бендиксона-Дюлака дает достаточные условия отсутствия замкнутых фазовых траекторий. Этот критерий также применим и для систем с цилиндрическим фазовым пространством. В этом случае выполнение критерия Бендиксона-Дюлака в некоторой области, заключённой между двумя замкнутыми кривыми, охватывающими фазовый цилиндр, означает, что в этой области не существует колебательных предельных циклов, и не может быть более одного вращательного предельного цикла.

## 7.5. Контрольные вопросы и задания

1. Используя законы Кирхгофа, получите уравнение, описывающее динамику RC – контура с периодической внешней э.д.с.  $E=E_0\sin \omega t$  представленного на рис.7.6. Постройте отображение Пуанкаре и исследуйте динамику схемы.

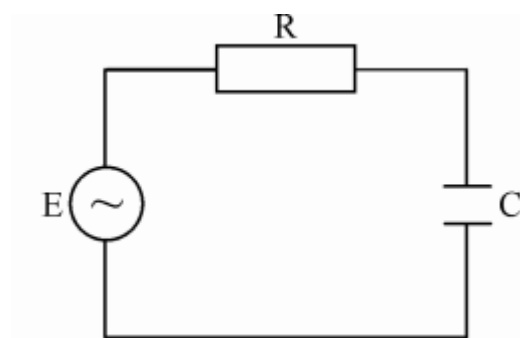


Рис. 7.6. RC – контур с периодической внешней э.д.с.

2. Докажите, что мультипликатор предельного цикла на плоскости всегда является положительным.
3. Используя определение орбитной устойчивости, докажите, что цикл представленный на рис.7.2а является орбитно устойчивым.
4. Используя определение структурной устойчивости (см. лекцию 1) динамических систем на плоскости, докажите, что устойчивый и неустойчивые циклы являются грубыми, а периодические движения осциллятора – негрубыми.
5. С помощью критерия Бендиксона-Дюлака докажите, что система

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -\sin \pi y,$$

где  $\pi$  – параметры и  $\pi > 0$ , не имеет колебательных предельных циклов.

## ЛЕКЦИЯ 8

### ОСНОВНЫЕ БИФУРКАЦИИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ НА ПЛОСКОСИ

*Бифуркационные условия. Седло-узловая бифуркация. Бифуркация Андронова-Хопфа. Первая ляпуновская величина. Динамическая бифуркация Андронова-Хопфа*

#### 8.1. Бифуркационные условия

Напомним, что параметры, при которых система является негрубой, называются бифуркационными. Для того, чтобы задать те или иные бифуркационные условия нужно нарушить условия грубости (структурной устойчивости) динамической системы. На предыдущих лекциях мы установили, что состояние равновесия систем с двумерным фазовым пространством являются грубыми, если  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0, i=1,2$ , где  $\lambda_i$  - характеристические показатели состояния равновесия, а условие грубости предельного цикла имеет вид  $s \neq 1$  ( $\lambda \neq 0$ ), где  $s$  - мультипликатор (характеристический показатель) предельного цикла. Поэтому бифуркации состояний равновесия на плоскости происходят, когда, по крайней мере, один из характеристических показателей обращается в нуль, или когда характеристические показатели становятся мнимыми. Предельные циклы совершают бифуркации при значениях параметров, при которых их мультипликатор становится равным единице. Следовательно, для того чтобы описать ту или иную бифуркацию, необходимо задать некоторое число  $k$  условий типа равенства на параметры (условие вырожденности). Ясно, что степень вырожденности (степень негрубости) системы может быть различной. Например, бифуркация состояния равновесия может происходить как в случае обращения в нуль только одного характеристического показателя, так и в случае, когда оба показателя одновременно становятся равными нулю. Поэтому, чтобы разделить бифуркации по степени негрубости, нужно ввести некоторое число условий невырожденности (условий типа неравенств). Таким образом, в пространстве параметров динамической системы бифуркационные условия задают некоторое многообразие коразмерности  $k$ , а условия невырожденности выделяют на этом многообразии области, каждой из которых отвечает одна и та же определенная качественная структура разбиения фазового пространства на траектории. При этом любая  $k$  - параметрическая система, удовлетворяющая  $k$  - бифуркационным условиям и условиям невырожденности, может быть использована для изучения данной бифуркации и описывает ее в любой конкретной системе. Ясно, что наиболее

распространенными бифуркациями являются бифуркации коразмерности 1, которые часто называют основными.

## 8.2. Седло-узловая бифуркация

Рассмотрим систему на фазовой плоскости, правые части которой зависят от параметра  $\mu$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (8.1)$$

Без ограничения общности будем считать, что система (8.1) при  $\mu=0$  имеет состояние равновесия  $O_0$  в начале координат. Будем предполагать, что у состояния равновесия  $O_0$  один из показателей равный нулю, а второй не равен нулю при всех  $\mu \in [\mu_0, \mu_0]$ , где  $0 < \mu_0 < 1$ . При этих предположениях нормальная форма для седло-узловой бифуркации на плоскости имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + \ell(\mu) u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = L_2(\mu) u_2 + \dots \end{cases} \quad (8.2)$$

Для системы (8.2) бифуркационное условие задается следующим образом

$$L_1(0) = 0, \quad (8.3)$$

а условия невырожденности –

$$L_2(\mu) \neq 0, \quad \ell(\mu) \neq 0, \quad \mu \in [\mu_0, \mu_0]. \quad (8.4)$$

Пусть для определенности  $\ell(\mu) > 0$  и  $L_2(\mu) < 0$ . Построим фазовые портреты системы (8.2) для различных значений параметра  $\mu$ . Рассмотрим сначала динамику первого уравнения системы (8.2). На рис. 8.1а представлено разбиение линии  $\{u_2=0+\dots\}$  на траектории. При  $\mu < 0$  существует два состояния равновесия, имеющие координаты  $u_1 = \pm \sqrt{-\mu/\ell} + \dots$ . При  $\mu=0$  они сливаются, образуя в начале координат двукратное состояние равновесия (см. лекцию 2), которое исчезает при  $\mu > 0$ . Второе уравнение в системе (8.2) также является уравнением первого порядка и его свойства легко устанавливаются – любая траектория с нетривиальным начальным условием асимптотически стремится к значению  $u_2=0+\dots$ . Опираясь на установленные свойства каждого из уравнений в системе (8.2), построим фазовые портреты системы (8.2). Легко видеть, что при  $\mu < 0$  система (8.2) имеет два состояния равновесия

$$O_1 \left[ \begin{matrix} u_1 = \sqrt{-\mu/\ell} + \dots, \\ u_2 = 0 + \dots \end{matrix} \right], O_2 = \left[ \begin{matrix} u_1 = -\sqrt{-\mu/\ell} + \dots, \\ u_2 = 0 + \dots \end{matrix} \right].$$





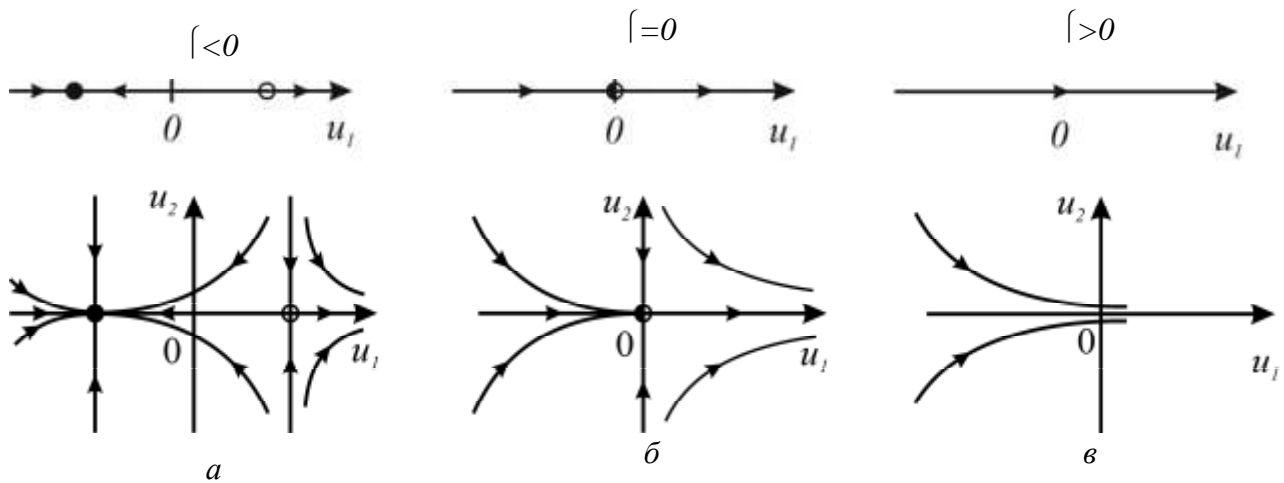


Рис. 8.1 Фазовый портрет системы (8.2) для различных значений параметра  $\Gamma$  в случае  $\ell_2(\Gamma) < 0$ ,  $\ell(\Gamma) > 0$ .

Точка  $O_1$  является устойчивым узлом, а  $O_2$  – седлом. Ведущее направление узла  $O_1$  задается уравнением  $u_2=0+\dots$ , а неведущее –  $u_1 = \sqrt{\ell_2(\Gamma)/\ell} + \dots$ .

Неустойчивые и устойчивые сепаратрисы седла имеют, соответственно следующий вид

$$\{u_1 = 0 + \dots\} \text{ и } u_2 = \sqrt{\ell_2(\Gamma)/\ell} + \dots$$

Входящие сепаратрисы седла  $O_2$  делят окрестность начала координат на две области (рис. 8.1а). Из одной из этих областей все траектории системы (8.2) с начальными условиями  $u_1(0) > \sqrt{\ell_2(\Gamma)/\ell} + \dots$ ,  $u_2(0) = 0$  покидают окрестность  $O_2$  асимптотически приближаясь к неустойчивой сепаратрисе. Все траектории системы (8.2), начинающиеся во второй области, асимптотически стремятся к устойчивому узлу  $O_1$ . При  $\Gamma=0$  состояние равновесия  $O_1$  и  $O_2$  сливаются, образуя состояние равновесия  $O_0(0,0)$  (рис. 8.1б), которое называется **седло-узлом** или **двукратным** равновесием. Седло-узел  $O_0$  состоит из седловой и узловой областей. Структура узловой области качественно повторяет поведение траекторий в окрестности устойчивого узла. Седловая область состоит из одной одномерной выходящей сепаратрисы, уравнение которой  $u_2=0+\dots$ , к которой, покидая окрестность  $O_0$ , асимптотически приближаются все остальные траектории. Разделение узловой и седловой областей осуществляется двумя траекториями вида  $u_1=0+\dots$  (рис. 8.1б). При  $\Gamma>0$  система (8.2) состояний равновесия не имеет, и все траектории покидают окрестность начала координат (рис. 8.1в).

Пусть теперь  $\ell_2(\Gamma)>0$ , а  $\ell(\Gamma)$  по-прежнему является положительной величиной. Очевидно, что поведение переменной  $u_1$  не меняется, а  $u_2$  ( $u_2(0) = 0$ ) с течением времени возрастает. Принимая во внимание эти свойства и рассуждая

аналогично предыдущему, устанавливаем фазовые портреты системы (8.2) (рис. 8.2)

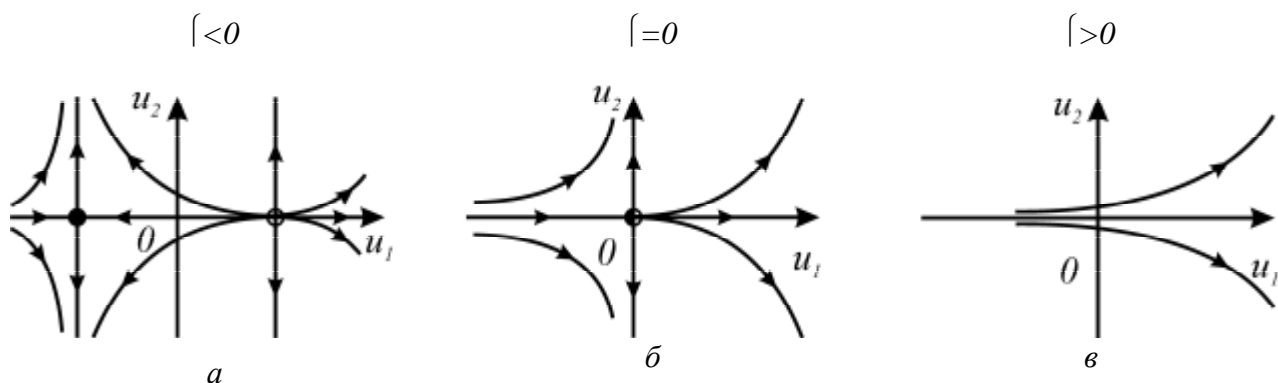


Рис. 8.2. Фазовый портрет системы (8.2) для различных значений параметра  $\gamma$  в случае  $\ell_2(\gamma) > 0$ ,  $\ell(\gamma) \neq 0$ .

В этом случае состояние равновесия  $O_1$  является седлом, а  $O_2$  - неустойчивым узлом. Как и в предыдущем случае, при  $\gamma = 0$  образуется седло-узел  $O_0$ , но в этом случае узловая область состоит из неустойчивых траекторий (рис. 8.2б), а сепаратриса седловой области является устойчивой. Кроме этой сепаратрисы и точки  $O_0$ , все траектории системы (8.2) покидают окрестность  $O_0$ . При  $\gamma > 0$  состояние равновесия  $O_0$  исчезает и все траектории покидают окрестность начала координат, удаляясь от линии  $\{u_2 = 0 + \dots\}$  (рис. 8.2в).

Таким образом, седло-узел (двукратное равновесие) – негрубое состояние равновесия, которое при сколь угодно малом изменении параметра либо распадается на два грубых, либо исчезает.

В качестве примера возникновения седло-узловой бифуркации рассмотрим динамику математического маятника в вязкой среде с приложенным внешним вращающим моментом (рис. 8.3). Динамика маятника описывается системой следующего вида

$$\begin{aligned} \ddot{\Pi} &= y, \\ \dot{y} &= -\zeta \dot{\Pi} - \sin \Pi + \gamma, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $\Pi$  - угол отклонения маятника от вертикали, параметр  $\zeta > 0$  характеризует действие внешнего вращательного момента, а  $\gamma > 0$  - вязкость среды.



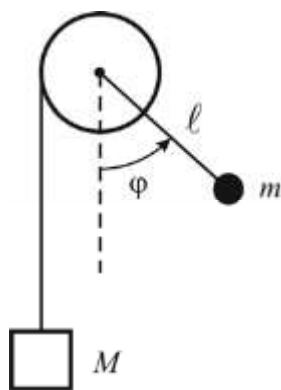


Рис. 8.3 Математический маятник с приложенным внешним вращающим моментом.

Фазовым пространством системы (8.5) является фазовый цилиндр  $G=S^1 \cdot R$ . Нетрудно видеть, что при  $\omega < 1$  система (8.5) имеет в  $G$  два состояния равновесия:  $O_1(\Pi=\Pi_1, y=0)$  и  $O_2(\Pi=\Pi_2, y=0)$ , где  $\Pi_1=\arcsin \omega$ ,  $\Pi_2=-\arcsin \omega$ . Состояние равновесия  $O_1$  имеет следующие характеристические показатели

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\ell^2 - 4}{4} \sqrt{1 - \omega^2}}. \quad (8.6)$$

Из (8.6) следует, что при  $\ell^2 \geq 4 \sqrt{1 - \omega^2}$  точка  $O_1$  является устойчивым узлом, а при  $\ell^2 < 4 \sqrt{1 - \omega^2}$  - устойчивым фокусом. Точка  $O_2$  всегда седло. При  $\omega=1$  существует одно состояние равновесия  $O_0(\Pi=\pi/2, y=0)$ , а при  $\omega>1$  система (8.5) состояний равновесия не имеет. Следовательно, при  $\omega=1$  происходит слияние точек  $O_1$  и  $O_2$  и образование двукратного равновесия  $O_0$ . Поскольку в окрестности значения  $\omega=1$  состояние равновесия  $O_1$  - устойчивый узел, а  $O_2$  - седло, то состояние равновесия  $O_0$  - седло-узел с устойчивой узловой областью и неустойчивой выходящей сепаратрисой.

### 8.3. Бифуркация Андронова-Хопфа

Предположим, что состояние равновесия  $O_0$  системы (8.1) имеет комплексно-сопряженные характеристические показатели  $\lambda_{1,2}(\gamma) = \pm i \omega(\gamma)$  и при  $\gamma=0$  выполняется бифуркационное условие

$$\omega'(0) = 0. \quad (8.7)$$

Пусть будут выполнены также следующие условия невырожденности

$$\omega''(0) \neq 0, \quad L'(0) \neq 0, \quad \frac{d\omega(\gamma)}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} \neq 0. \quad (8.8)$$



Величина  $L(\Gamma)$  называется **первой ляпуновской величиной** для  $O_0$  и от ее знака при  $\Gamma=0$  зависит структура разбиения фазовой плоскости на траектории в окрестности состояния равновесия. Нормальная форма для бифуркации Андронова-Хопфа имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \langle \Gamma \rangle u_1 + \Re(\Gamma) u_2 + L(\Gamma) (u_1^2 + u_2^2) u_1 + \dots \\ \dot{u}_2 &= \Im(\Gamma) u_1 + \langle \Gamma \rangle u_2 + L(\Gamma) (u_1^2 + u_2^2) u_2 + \dots \end{aligned} \quad (8.9)$$

Опишем кратко процедуру приведения системы (8.1) к виду (8.9). Условно ее можно разбить на несколько «шагов». Первый шаг процедуры состоит в разложении правых частей системы (8.1) в окрестности точки  $O_0$  в ряды Тейлора до третьей степени. Затем с помощью линейного преобразования координат (см. лекцию 3) матрица линейной части системы преобразуется к жордановой форме. После этого, с помощью нелинейного преобразования координат, исследуемая система приводится к виду, когда в ее правых частях отсутствуют квадратичные слагаемые. Такое преобразование координат существует при выполнении условий (8.7), (8.8).

Перейдем в системе (8.9) к полярным координатам с помощью замены  $u_1 = \rho \cos \Pi$ ,  $u_2 = \rho \sin \Pi$ . В результате получим эквивалентную (8.9) систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \Re(\Gamma) \rho + \dots \\ \dot{\Pi} &= \langle \Gamma \rangle + L(\Gamma) \rho^2 + \dots \end{aligned} \quad (8.10)$$

Анализ системы (8.10) удобнее провести, рассматривая сначала динамику первого и второго уравнений отдельно. Пусть для определенности зависимость  $\langle \Gamma \rangle$  удовлетворяет условию  $\langle \Gamma \rangle \oplus \Gamma > 0$ , если  $\Gamma \neq 0$ . Из первого уравнения в системе (8.10) имеем

$$\Pi(t) = \Re(\Gamma) t + \Pi_0 + \dots, \quad (8.11)$$

где  $\Pi_0 = \text{const}$ . Следовательно, переменная  $\Pi$  совершает вращательные движения с частотой  $\Re(\Gamma)$ . Динамика второго уравнения в (8.10) зависит от знака величины  $L(\Gamma)$ .

### 8.3.1. Первая ляпуновская величина отрицательна

Предположим, что  $L(0) < 0$ . В этом случае, кроме тривиального состояния равновесия, существующего при всех значениях параметра  $\Gamma$ , второе уравнение при  $\Gamma > 0$  имеет также нетривиальное состояние равновесия  $\rho = \sqrt{\frac{\langle \Gamma \rangle}{-L(\Gamma)}}$ . Тривиальное состояние равновесия является устойчивым при  $\Gamma < 0$  и

неустойчивым при  $\Gamma > 0$ , а нетривиальное состояние является устойчивым (рис. 8.4б). Отсюда, принимая во внимание (8.11), устанавливаем фазовый портрет системы (8.9) для различных значений параметра  $\Gamma$  (рис. 8.4в). При изменении параметра  $\Gamma$  состояние равновесия  $O_0$  теряет устойчивость, и из него рождается устойчивый предельный цикл. Обратим внимание на то, что в момент бифуркации состояние равновесия является устойчивым сложным фокусом, у которого «шаг» спирали существенно меньше, чем у обычного фокуса, поскольку при  $\Gamma = 0$  переменная  $y$  изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{y} = L(0)y^3 + \dots$$

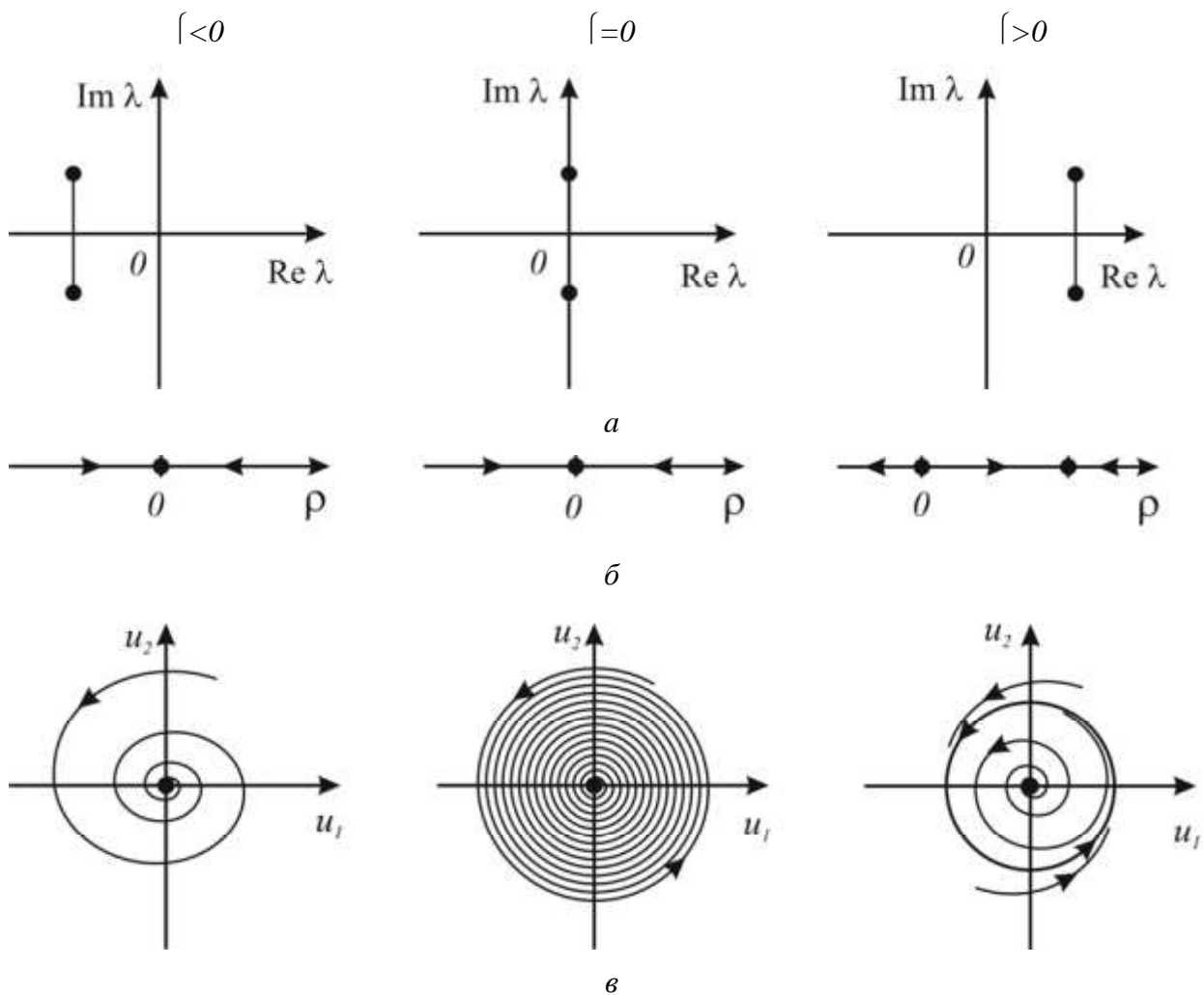


Рис. 8.4 Расположение характеристических показателей состояния равновесия  $O_0$  на комплексной плоскости (а); динамика второго уравнения системы (8.10) (б); фазовый портрет системы (8.10) для различных значений параметра  $\Gamma$  (в).

### 8.3.2. Первая ляпуновская величина положительна

Пусть теперь  $L(0) > 0$ . В этом случае нетривиальное состояние равновесия уравнения для  $\rho$  существует при  $\mu < 0$  и является неустойчивым (рис. 8.5 а). Тривиальное состояние равновесия устойчиво при  $\mu < 0$  и неустойчиво при  $\mu > 0$ . Такая динамика переменной  $\rho$  при учете (8.11) приводит к фазовому портрету системы (8.10), представленному на рис. 8.5б. В этом случае предельный цикл является неустойчивым и существует при  $\mu < 0$ . При  $\mu = 0$  цикл стягивается в точку и состояние равновесия  $O_0$  становится неустойчивым сложным фокусом.

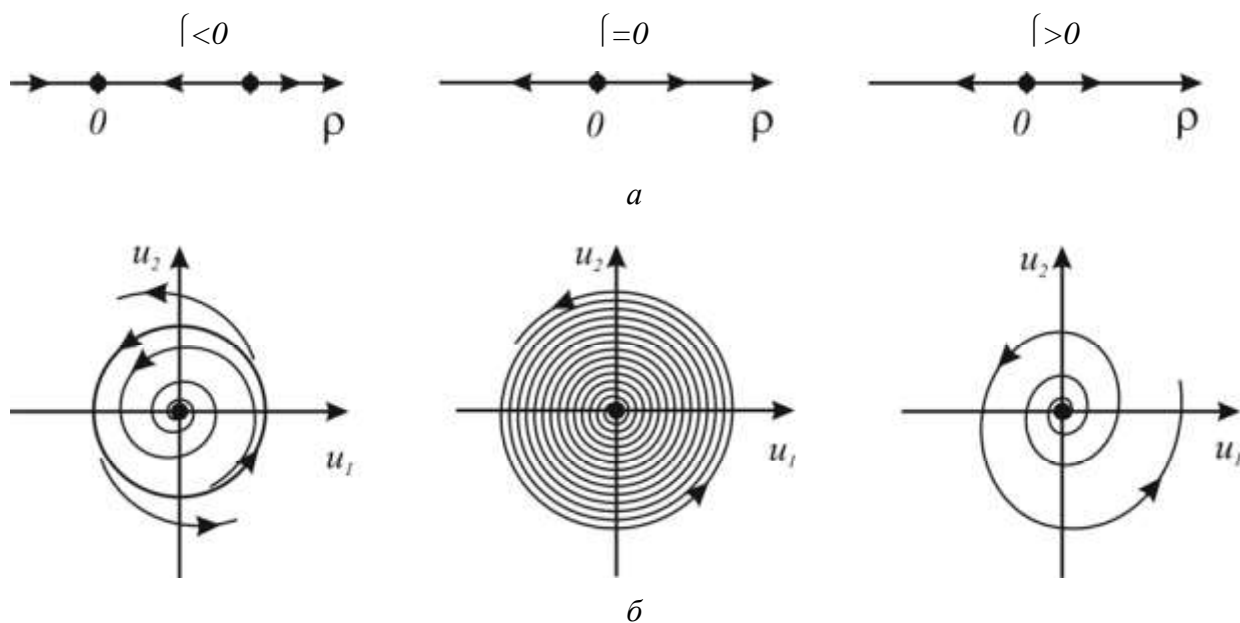


Рис. 8.5 Динамика второго уравнения системы (8.10) (а); фазовый портрет системы (8.10) (б) для различных значений параметра  $\mu$ .

### 8.3.3. «Мягкое» и «жесткое» рождение периодических колебаний

Рождение цикла в случае  $L(0) < 0$  часто называют *мягким* (в английской литературе supercritical bifurcation, отражая этим термином факт появления предельного цикла после прохождения параметром бифуркационного значения), поскольку амплитуда цикла плавно нарастает от нуля. При этом границу области устойчивости состояния равновесия  $O_0$  (значение  $\mu = 0$ ) принято называть «безопасной», так как, несмотря на потерю устойчивости при  $\mu > 0$ , состояние реальной системы сохраняется в малой окрестности точки  $O_0$ . Совершенно иная ситуация в случае  $L(0) > 0$  (это так называемая subcritical bifurcation; термин «subcritical» отражает существование предельного цикла до прохождения бифуркационного значения). Здесь при нарушении условий устойчивости все траектории из окрестности  $O_0$  переходят на другой аттрактор. Если новый аттрактор является предельным циклом, то говорят о жестком



рождении периодических колебаний. При этом граница области устойчивости называется «опасной», так как происходит резкое изменение состояния реальной системы.

Величина  $L(0)$  может быть вычислена через правые части системы (8.1) с помощью следующей формулы

$$L(0) = \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3} \right) + \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right] \right) \quad (8.12)$$

где производные вычисляются в состоянии равновесия.

Отметим, что впервые бифуркация рождения предельного цикла из состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими показателями в системах на фазовой плоскости была обнаружена в 1939 году А.А. Андроном и Е.А. Леонтович. В 1942 году Э.Хопф распространил эту теорию на случай многомерных систем. Выражение для первой ляпуновской величины было получено Н.Н. Баутиным в 1949 году.

#### 8.4. Затягивание потери устойчивости при динамической бифуркации Андронова-Хопфа

Во многих практических задачах параметры системы не являются строго постоянными, а медленно изменяются во времени. Рассмотрим влияние этого эффекта на бифуркацию Андронова-Хопфа на примере следующей системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \gamma y - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (8.13)$$

где  $\gamma$  - контрольный параметр.

Пусть сначала  $\gamma = \text{const.}$ . Нетрудно видеть, что в этом случае система (8.13) имеет вид (8.9) с  $\langle \gamma \rangle = \gamma$ ,  $\Re(\gamma) = 1$  и  $L(\gamma) = -1$ . Следовательно, система (8.13) при  $\gamma < 0$  имеет устойчивый фокус, притягивающий все остальные траектории. При  $\gamma = 0$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой на фазовой плоскости мягко появляется устойчивый предельный цикл, притягивающий все нетривиальные траектории, а состояние равновесия становится неустойчивым фокусом (рис. 8.4в).

Пусть теперь параметр  $\gamma$  растет медленно во времени, т.е. система (8.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
\clubsuit x &= [x \square y \square x(x^2 + y^2), \\
\boxplus \dot{y} &= x + [y \square y(x^2 + y^2), \\
\boxplus \dot{\Pi} &= \Sigma,
\end{aligned}
\tag{8.14}$$

где  $0 < \Sigma \ll 1$ . Прежде всего заметим, что система (8.14) имеет трехмерное фазовое пространство. Перейдем в системе (8.14) к полярным координатам  $x = \gamma \cos \Pi$ ,  $y = \gamma \sin \Pi$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
\spadesuit \dot{\gamma} &= 1, \\
\spadesuit \dot{\Pi} &= \gamma (\dot{\Pi} \square \gamma^2), \\
\spadesuit \dot{\Pi} &= \Sigma.
\end{aligned}
\tag{8.15}$$

Не будем пока принимать во внимание изменение переменной  $\Pi$  ( $\Pi = t + \Pi_0$ ), а исследуем динамику системы

$$\begin{aligned}
\clubsuit \dot{\gamma} &= \gamma (\dot{\Pi} \square \gamma^2), \\
\spadesuit \dot{\Pi} &= \Sigma.
\end{aligned}
\tag{8.16}$$

Рассмотрим поведение произвольной траектории с начальными условиями:  $\gamma(0) = \gamma_0$ ,  $\dot{\Pi}(0) = -\dot{\Pi}_0$ , где  $\dot{\Pi}_0 > 0$ , а  $\gamma_0$  выбрано вне малой (порядка  $\Sigma$ ) окрестности  $U_\Sigma$  прямой  $\gamma = 0$ , которая, очевидно, является решением первого уравнения системы (8.16). Поскольку  $\Sigma \ll 1$ , изменение переменной  $\dot{\Pi}(t)$  происходит значительно медленнее, чем переменной  $\gamma(t)$ . Следовательно, в первом приближении можно считать, что движение рассматриваемой траектории определяется в основном уравнением

$$\dot{\gamma} = \gamma (\dot{\Pi} \square \gamma^2). \tag{8.17}$$

При таком значении параметра  $\dot{\Pi} = -\dot{\Pi}_0 < 0$  переменная  $\gamma(t)$  монотонно убывает к значению  $\gamma = 0$  (см. рис. 8.4б). Переменная  $\gamma(t)$  убывает в течение некоторого конечного времени  $|t|$ , пока значение  $\gamma(t)$  не достигнет  $U_\Sigma$ . В этой окрестности уравнение (8.17) становится непригодным для описания движения исследуемой траектории, и мы должны учитывать оба уравнения системы (8.16) при начальных условиях

$$\gamma(t_0) = p, \quad \dot{\Pi}(t_0) \in [-\dot{\Pi}_0, 0], \tag{8.18}$$

где  $p$  – граничная точка окрестности  $U_\Sigma$ . Очевидно, что из второго уравнения системы (8.16) следует

$$\dot{\Pi} = \Sigma(t \square t_0) \square \dot{\Pi}_0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \dots]. \tag{8.19}$$

Рассмотрим эволюцию переменной  $\gamma$ . Из (8.16) следует, что переменная  $\gamma$  будет монотонно убывать, по крайней мере, пока переменная  $\dot{\Pi}(t)$  остается

отрицательной, т.е. до значения  $t = | + |_0/\Sigma$ . Следовательно, на временном интервале от  $|$  до  $t = | + |_0/\Sigma$  рассматриваемая траектория расположена в малой окрестности прямой  $\gamma=0$ . Оценим теперь полное время нахождения траектории в окрестности  $U_\Sigma$ . В этой окрестности член  $\gamma^2(t)$  в первом уравнении системы (8.16) пренебрежимо мал по сравнению с  $| (t)$ . Поэтому динамика переменной  $\gamma(t)$  в основном определяется уравнением

$$\dot{\gamma} = | (t) \gamma. \quad (8.20)$$

Проинтегрировав уравнение (8.20) на интервале от  $|$  до  $t$ , при учете соотношений (8.18), (8.19), получим

$$\gamma(t) = p e^{\frac{\Sigma(t-|)^2}{2} - |_0(t-|)}. \quad (8.21)$$

Из (8.21) вытекает, что переменная  $\gamma(t)$  вновь достигнет значения  $p$  в момент времени  $t = | + 2|_0/\Sigma$ , когда переменная  $| (t)$  станет равной  $|_0$ . После выхода из  $U_\Sigma$  переменная  $\gamma(t)$  начинает быстро нарастать и асимптотически приближается к значению  $\gamma = \sqrt{|_0}$  (рис. 8.4б), поскольку  $|_0 > 0$ . Следовательно, динамика системы (8.16) отличается от статического случая. Во-первых, при прохождении значения  $| (t) = 0$  принципиального изменения, как это имело место в случае  $| = const$ , в динамике не происходит, а, во-вторых, существует новое пороговое значение  $|_0 > 0$ , при котором возникает скачкообразное увеличение переменной  $\gamma(t)$ .

Вернемся теперь к исходной системе (8.14). Можно показать (доказательство базируется на грубости предельного цикла, существующего в статическом случае при  $| > 0$ ), что в трехмерном фазовом пространстве этой системы при  $| (t) > 0$  существует двумерная устойчивая инвариантная поверхность  $C^s$ , близкая к поверхности, составленной из предельных циклов системы (8.13). Как мы увидим далее, поверхность  $C^s$  играет важную роль в динамике системы (8.14). Рассмотрим движение исследуемой нами траектории в  $R^3$ . Из установленной выше динамики переменных  $\Pi$ ,  $\gamma$  и  $|$  вытекает следующее. Сначала фазовая точка скачком притянется в окрестность прямой  $x=y=0$  и будет двигаться в окрестности  $U_\Sigma$ , совершая вращательные движения до тех пор, пока переменная  $|$  не достигнет значения  $|_0$  (рис. 8.6). Только после этого произойдет срыв из окрестности прямой  $x=y=0$  и фазовая точка притянется быстро к поверхности  $C^s$  (рис. 8.6). В окрестности  $C^s$  она начнет совершать вращательные движения, амплитуда которых нарастает  $\sim \sqrt{| (t)}$ , а время их возникновения  $\sim 1/\Sigma$  является достаточно большой величиной.

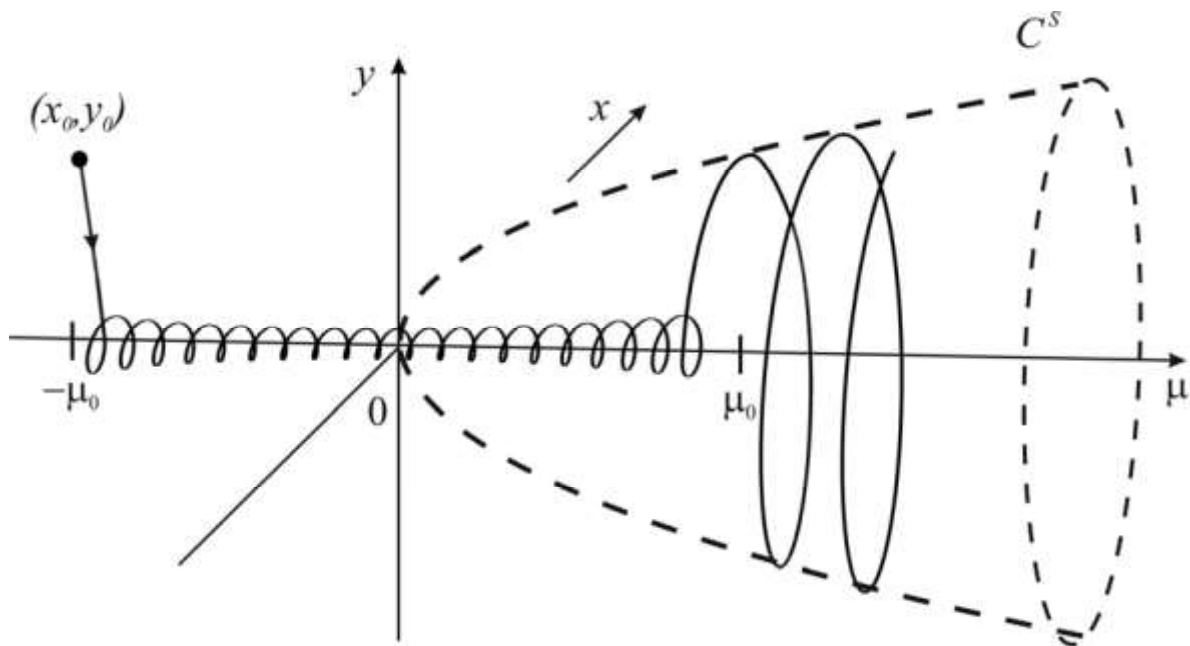


Рис. 8.6 Фазовое пространство системы (8.14): эффект затягивания потери устойчивости.

Описанный механизм возникновения колебаний называется **динамической бифуркацией Андронова-Хопфа**, для которой характерны следующие эффекты:

- затягивания потери устойчивости (колебания возникают при  $\mu = \mu_0$ , а не при  $\mu = 0$ , как в статическом случае);
- жесткого возникновения колебаний;
- памяти – колебания возникают при значении  $\mu = \mu_0$ , однозначно связанным начальным значением  $-y_0$ .

## 8.5. Контрольные вопросы и задания

1. Исследуйте седло-узловую бифуркацию в случае  $l(\mu) < 0$ .
2. Найдите и классифицируйте состояние равновесия системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\mu y \cos \Pi \oplus y \sin \Pi + \odot, \end{aligned}$$

где  $\mu > 0$ ,  $\odot \in \mathbb{R}$  – параметры. Какие бифуркации состояний равновесия возможны в этой системе.

3. Рассмотрите бифуркацию Андронова-Хопфа в случае  $\langle (\mu) \oplus \mu < 0, \mu = 0$ .
4. Исследуйте бифуркацию Андронова-Хопфа в системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x \mu + y + y(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

где  $\mu$  – контрольный параметр.

5. Исследуйте динамику системы, заданную в полярных координатах

$$\dot{\rho} = 1 + \rho^3,$$

$$\dot{\varphi} = (\rho + \rho^3 - \rho^5),$$

где  $\mu$  - контрольный параметр, удовлетворяющий условию  $\mu > -1/4$ .

## ЛЕКЦИЯ 9

### БИФУРКАЦИЯ ДВУКРАТНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА. БИФУРКАЦИЯ ПЕТЛИ СЕПАРАТРИС СЕДЛА

*Отображение Пуанкаре в окрестности двукратного предельного цикла. Полуустойчивые циклы. Функция расщепления, седловая величина. Гомоклиническая траектория. Отображение Пуанкаре в окрестности гомоклинической траектории.*

#### 9.1. Двукратный предельный цикл

Рассмотрим систему на фазовой плоскости, правые части которой зависят от управляющего параметра  $\beta$  (см. лекцию 8, система (8.1)). Предположим, что система (8.1) имеет предельный цикл  $L_0$ . В малой окрестности  $L_0$  траектории системы (8.1) порождают отображение Пуанкаре (рис.9.1), которое можно представить в следующем виде

$$\beta = g(\beta, \beta). \quad (9.1)$$

Без ограничения общности будем считать, что начало координат на секущей Пуанкаре выбрано в неподвижной точке, то есть  $g(0, \beta) = 0$ . Пусть при  $\beta = 0$  мультипликатор предельного цикла  $L_0$  удовлетворяет условию

$$s(0) = \frac{dg}{d\beta} \bigg|_{(0,0)} = 1. \quad (9.2)$$

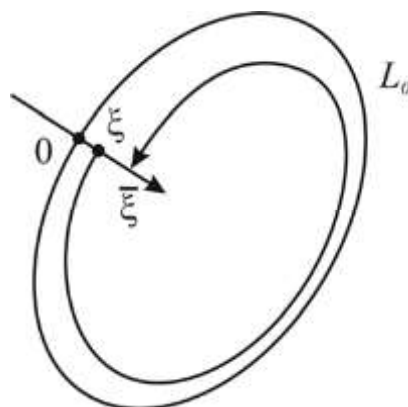


Рис. 9.1. Отображение Пуанкаре в окрестности предельного цикла  $L_0$ .

Раскладывая  $g(\beta, \beta)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(0,0)$ , получим

$$g(\xi, \eta) = g(0,0) + g_{\xi}(0,0)\xi + g_{\eta}(0,0)\eta + \frac{1}{2}g_{\xi\xi}(0,0)\xi^2 + \\ + g_{\xi\eta}(0,0)\xi\eta + \frac{1}{2}g_{\eta\eta}(0,0)\eta^2 + \dots \quad (9.3)$$

Из (9.1) – (9.3) следует следующее представление отображения Пуанкаре в окрестности  $L_0$

$$\Gamma = \langle(\xi) + \xi(1 + \mathbb{R}(\xi)) + \odot \xi^2 + \dots, \quad (9.4)$$

где

$$\langle(\xi) = g_{\xi\xi}(0,0)\xi + \dots, \quad \mathbb{R}(\xi) = g_{\xi\eta}(0,0)\xi + \dots \\ \langle(0) = \mathbb{R}(0) = 0, \quad \odot = \frac{1}{2}g_{\eta\eta}(0,0) + \dots$$

Предположим, что

$$\odot < 0 \quad (9.5)$$

Таким образом, мы имеем одно бифуркационное условие (9.2) и одно условие невырожденности (9.5), а нормальная форма для бифуркации двукратный предельный цикл задается уравнением (9.4).

Проведем исследование отображения (9.4). Рассмотрим два случая.

**Случай**  $\odot > 0$ . Прежде всего изучим свойства функции последования  $g(\xi, \eta)$  отображения (9.4). Непосредственно из (9.4) имеем

$$g_{\xi}^2 = 1 + \mathbb{R}(\xi) + 2\odot\xi + \dots \quad (9.6) \\ g_{\eta}^2 = 2\odot + \dots$$

Поскольку мы рассматриваем (9.4) в окрестности точки  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  и  $\mathbb{R}(0) = 0$ , в силу (9.6) получаем, что

$$g_{\xi}^2 > 0, \quad g_{\eta}^2 > 0.$$

Следовательно,  $g(\xi, \eta)$  – монотонно возрастающая функция, выпуклая вниз. Координаты неподвижных точек отображения (9.4) определяются уравнением

$$0 = \langle(\xi) + \mathbb{R}(\xi)\xi + \odot\xi^2 + \dots \quad (9.7)$$

Пусть для определенности функция  $\langle(\xi)$  удовлетворяет условию  $\langle(\xi) \oplus \xi > 0, \xi \neq 0$ . Тогда из (9.7) получаем, что при  $\xi = 0$  отображение (9.4) имеет единственную неподвижную точку  $O_0(\xi = 0 + \dots)$ , а при  $\xi < 0$  – две неподвижные точки:

$$O_1 \xi = -\sqrt{\frac{\langle(\xi)}{\odot} + \dots} \quad \text{и} \quad O_2 \xi = \sqrt{\frac{\langle(\xi)}{\odot} + \dots}. \quad \text{При } \xi > 0 \text{ отображение (9.4)}$$

неподвижных точек не имеет. Легко видеть, что  $O_1$  является устойчивой,  $O_2$  – неустойчивой,  $O_0$  – полустойчивой неподвижными точками. На рис. 9.2а





представлен вид отображения (9.4) для различных значений параметра  $\Gamma$ , вытекающий из установленных выше свойств этого отображения, а на рис. 9.2б, соответствующие фазовые портреты системы (8.1). При  $\Gamma=0$  существует двукратный (полуустойчивый) предельный цикл  $L_0$ , который при  $\Gamma<0$  распадается на два грубых – устойчивый  $L_1$  и неустойчивый  $L_2$ . При увеличении  $\Gamma$  от нуля в сторону  $\Gamma>0$  цикл  $L_0$  исчезает.

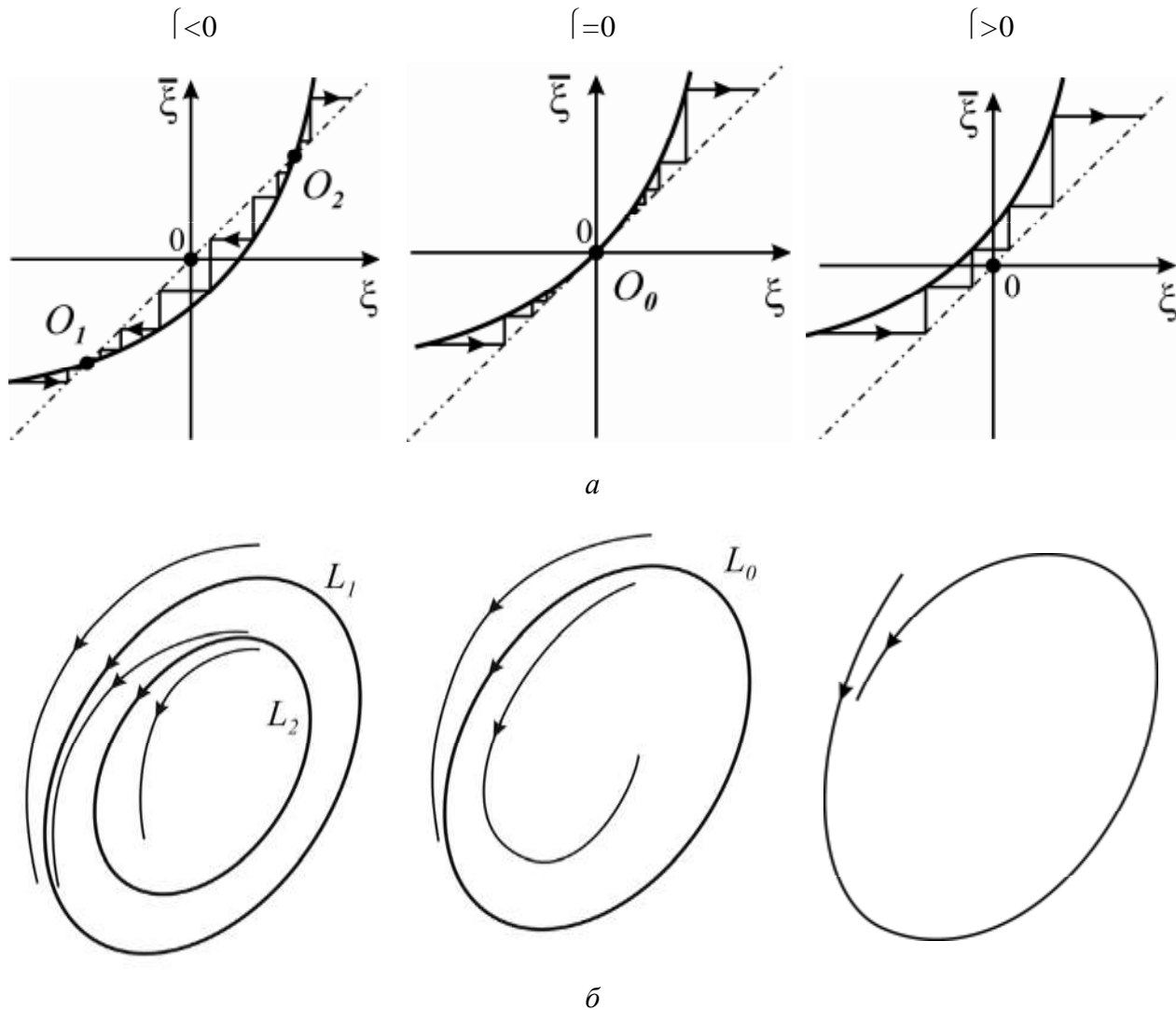


Рис. 9.2. Отображение Пуанкаре в случае  $\odot > 0$  (а); фазовые портреты системы (8.1), отвечающие этому отображению (б).

**Случай  $\odot < 0$ .** В этом случае исследование отображения (9.4) можно провести полностью аналогично предыдущему. На рис.9.3 представлен вид отображения (9.4) в этом случае и соответствующие фазовые портреты. Здесь при  $\Gamma=0$  также существует двукратный предельный цикл, однако грубые предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$  появляются на фазовой плоскости в области  $\Gamma > 0$ . При этом цикл  $L_2$  является устойчивым, а  $L_1$  – неустойчивым. В области  $\Gamma < 0$  предельные циклы не существуют.

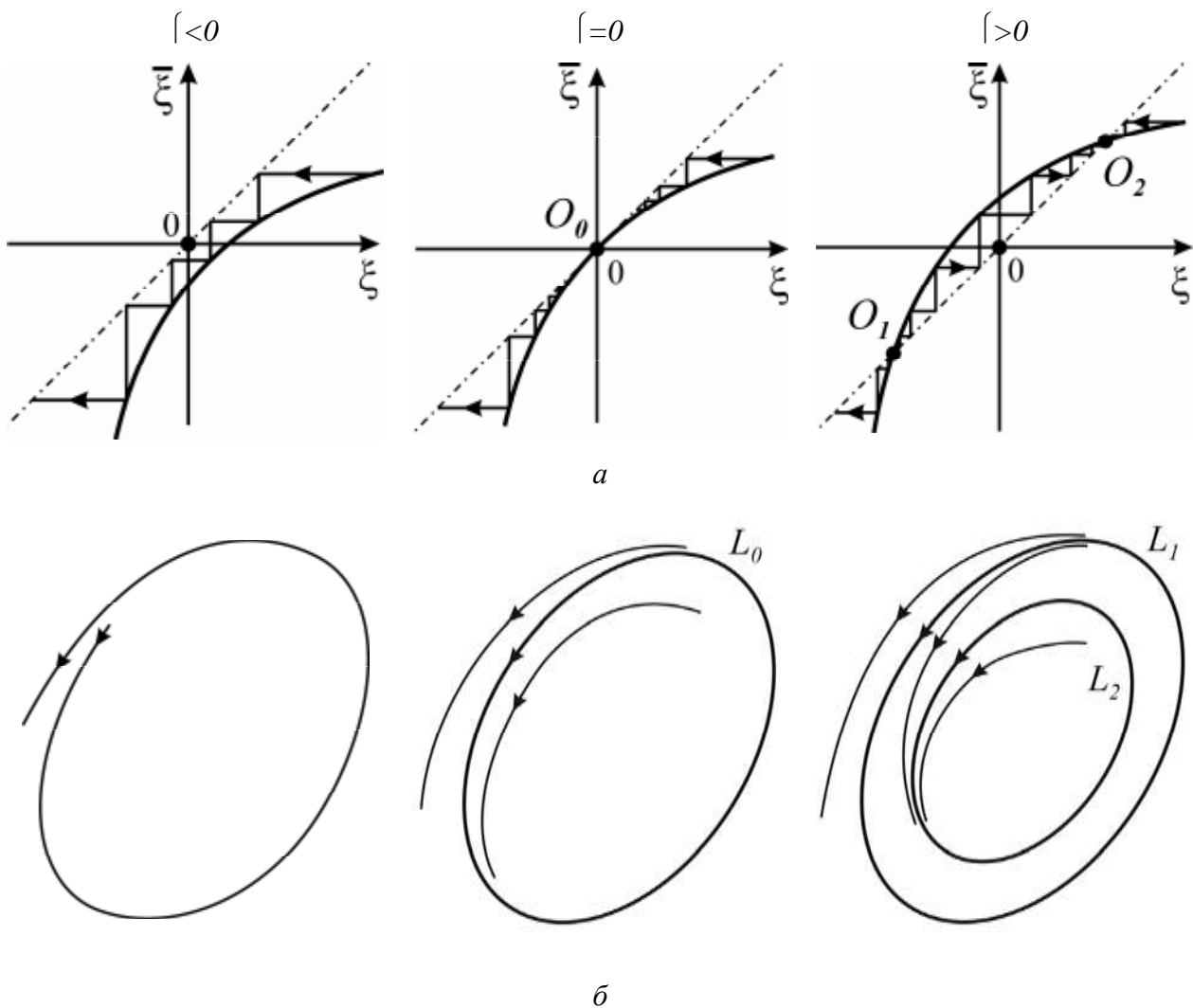


Рис. 9.3 Отображение Пуанкаре в случае  $\omega < 0$  (а); фазовые портреты системы (8.1) (б), отвечающие этому отображению

Заметим, что бифуркацию образования двукратного цикла также часто называют седло-узловой бифуркацией циклов.

**Пример.** Рассмотрим систему в полярных координатах следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho[\alpha(\rho) - 1], \\ \dot{\Pi} &= \omega, \end{aligned} \quad (9.8)$$

где параметр  $\omega > 0$ , а  $\alpha$  – контрольный параметр. Переменные в системе (9.8) разделены и их динамику можно анализировать отдельно друг от друга. Из второго уравнения следует, что переменная  $\Pi$  совершает вращательные движения с частотой  $\omega$ . Эволюция переменной  $\rho$  зависит от параметра  $\alpha$ . При  $\alpha > 0$  выполняется неравенство  $\rho < 0$  и, следовательно, любая траектория системы (9.8) на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  ( $x_1 = \rho \cos \Pi$ ,  $x_2 = \rho \sin \Pi$ ) имеет форму спирали, скручивающейся к состоянию равновесия в начале координат.

Другими словами, на фазовой плоскости существует устойчивый фокус, притягивающий все траектории системы (9.8) (рис.9.4в). При  $\Gamma=0$  уравнение для  $\dot{\gamma}$ , кроме устойчивого равновесия  $\gamma=0$ , имеет также полуустойчивое состояние равновесия  $\gamma=1$ , которому на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  соответствует полуустойчивый предельный цикл системы (9.8) (рис. 9.4б).

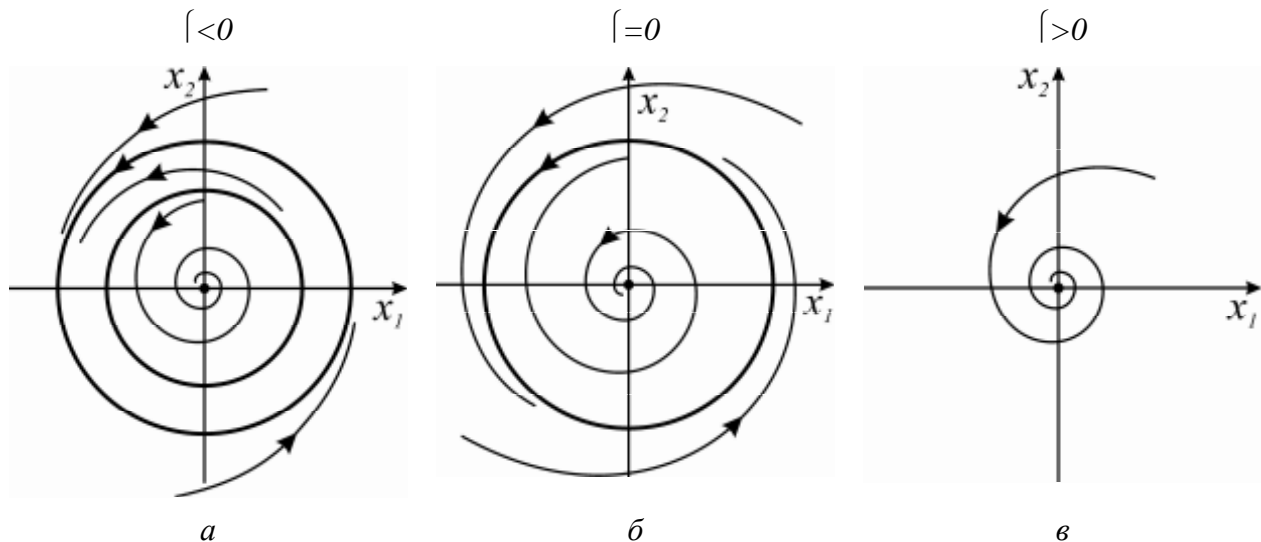


Рис. 9.4. Бифуркация двукратный предельный цикл в системе (9.8).

При  $\Gamma < 0$  этот полуустойчивый цикл разваливается на два цикла – устойчивый и неустойчивый, амплитуды которых равны соответственно  $\gamma = 1 + \sqrt{\Gamma}$  и  $\gamma = 1 - \sqrt{\Gamma}$  (рис. 9.4а).

## 9.2. Петля сепаратрис седла

Предположим, что система (8.1) является диссипативной и имеет в начале координат состояние равновесия седло  $O_0$ . Обозначим через  $\lambda_1(\Gamma) < 0$  и  $\lambda_2(\Gamma) > 0$  характеристические показатели седла  $O_0$ . Пусть при  $\Gamma=0$  одна из выходящих сепаратрис седла возвращается при  $t \rightarrow +\infty$  в точку  $O_0$ , тем самым образуя траекторию  $\Gamma_0$  двоякоасимптотическую к седлу (рис. 9.5а) – так называемую гомоклиническую траекторию. Поскольку к седлу асимптотически приближаются только две траектории – устойчивые сепаратрисы, траектория  $\Gamma_0$  может существовать только в том случае, если неустойчивая и устойчивая сепаратрисы совпадают. Поэтому траекторию  $\Gamma_0$  часто называют петлей сепаратрис. Траектория  $\Gamma_0$  является негрубой и при изменении параметра  $\Gamma$  она разрушается. Для характеристики взаимного расположения сепаратрис седла введем так называемую **функцию расщепления сепаратрис**. Обозначим через  $M^u(x_1^u(\Gamma), 0)$  – точку, в которой неустойчивая сепаратриса  $W^u$  первый раз пересекает ось абсцисс, а через  $M^s(x_1^s(\Gamma), 0)$  – точку первого пересечения с этой осью устойчивой сепаратрисы  $W^s$  (рис. 9.5б).

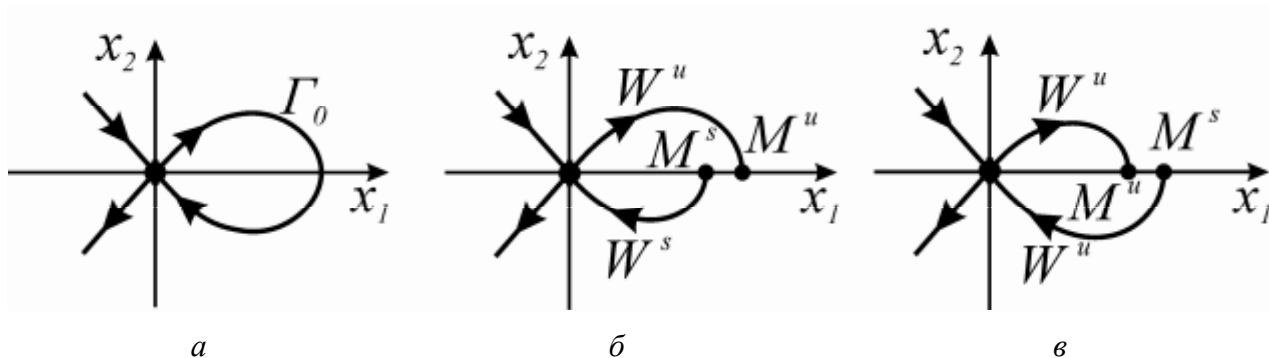


Рис. 9.5 Петля сепаратрис (гомоклиническая траектория  $\Gamma_0$ ) (а); два различных взаимных расположения сепаратрис седла (б), (в).

Введем функцию расщепления следующим образом

$$\chi(\beta) = x^u(\beta) - x^s(\beta) \quad (9.9)$$

Очевидно, что взаимному расположению сепаратрис, представленному на рис. 9.5б, соответствует  $\chi(\beta) > 0$ , а на рис. 9.5в –  $\chi(\beta) < 0$ . Функция  $\chi(\beta)$  является непрерывной функцией параметра  $\beta$ , а ее нулям отвечают гомоклинические траектории системы (8.1).

Другой важной характеристикой петли сепаратрис седла является величина

$$\hat{f}(\beta) = L_1(\beta) + L_2(\beta) \quad (9.10)$$

называемая **седловой**. Седловая величина также является функцией параметра, а ее смысл будет ясен из дальнейшего изложения.

### 9.2.1. Точечное отображение в окрестности петли сепаратрис седла

С помощью неособого линейного преобразования координат (см. лекцию 3) система (8.1) может быть приведена к следующему виду

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= L_1(\beta)u_1 + g_1(u_1, u_2, \beta) \\ \dot{u}_2 &= L_2(\beta)u_2 + g_2(u_1, u_2, \beta) \end{aligned} \quad (9.11)$$

где нелинейные функции  $g_i(0, 0, \beta) = 0$ ,  $i=1, 2$ . В этой системе координат касательные к сепаратрисам седла  $O_0(0, 0)$  совпадают с осями координат. Предположим, что система (9.11) при  $\beta=0$  имеет гомоклиническую траекторию  $\Gamma_0$  (рис.9.6). Введем в рассмотрение два, трансверсальных к траекториям системы (9.11), отрезка

$$\begin{aligned} \square_0 &= \{u_1, u_2 \mid u_1 = d_1, \quad |u_2| \leq \delta\} \\ \square_1 &= \{u_1, u_2 \mid u_2 = d_2, \quad |u_1| \leq \delta\} \end{aligned}$$

где  $d_1, d_2, \Sigma$  – достаточно малые положительные величины. Введем также функцию расщепления

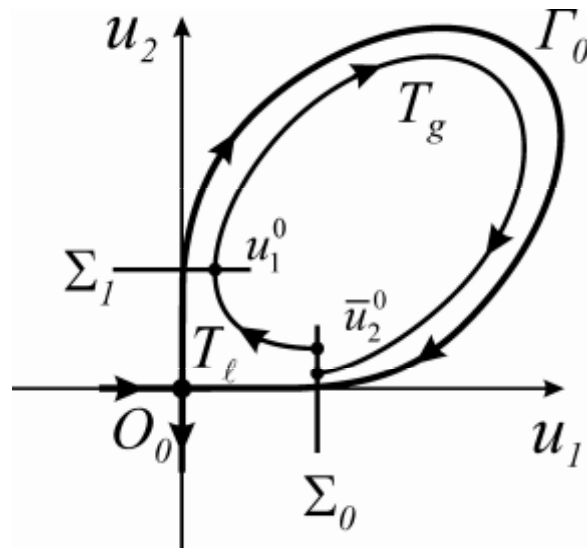


Рис. 9.6 Построение отображения Пуанкаре в окрестности гомоклинической траектории  $\Gamma_0$

$\chi(\cdot)$ , используя в качестве секущей отрезок  $\square_0$ , следующим образом

$$\chi(\cdot) = u^u(\cdot) \square u^s(\cdot),$$

где  $u_2^u$  и  $u_2^s$  – ординаты точек первого пересечения неустойчивой и устойчивой сепаратрис седла с секущей  $\square_0$ . Тогда бифуркационное условие существования траектории  $\Gamma_0$  можно записать в следующем виде

$$\chi(0) = 0 \quad (9.12)$$

Пусть будут выполнены также следующие условия невырожденности

$$\dot{\chi}(0) \neq 0 \quad (9.13)$$

$$\chi''(0) \neq 0 \quad (9.14)$$

Смысл условия (9.13) будет ясен из дальнейшего, а условия (9.14) означает, что взаимное расположение сепаратрис будет различным при  $\epsilon < 0$  и  $\epsilon > 0$ .

Построим точечное отображение в окрестности траектории  $\Gamma_0$  в виде суперпозиции двух отображений  $T = T_\ell \oplus T_g$ , где отображение  $T_\ell$  действует

в

окрестности седла  $O_0$ , а  $T_g$  – в окрестности глобальной части  $\Gamma_0$ .

**Отображение  $T_\ell$ .** Для достаточно малых значений  $d_1, d_2$  и  $\Sigma$  траектории системы (9.11) в окрестности  $O_0$  определяется в основном линейной частью системы (9.11), то есть уравнениями

$$\dot{u}_1 = L_1(\epsilon) u_1, \quad \dot{u}_2 = L_2(\epsilon) u_2 \quad (9.15)$$

и, очевидно, порождают отображение

$$T_\ell : \square_0 \rightarrow \square_1$$

Найдем вид  $T_\ell$ . В окрестности  $O_0$  систему (9.11) будем аппроксимировать системой (9.15). Пусть при  $t=0$  выполнены условия

$$u_1(0)=d_1, \quad u_2(0)=u_2^0 > 0, \quad (u_1(0), u_2(0)) \in \square_0 \quad (9.16)$$

Запишем уравнение траектории, удовлетворяющей условию (9.16)

$$\begin{aligned} u_1(t) &= d_1 e^{L_1 t} \\ u_2(t) &= u_2^0 e^{-L_2 t} \end{aligned} \quad (9.17)$$

Обозначим через  $l$  - время движения между  $\square_0$  и  $\square_1$  вдоль траектории (9.17), т.е.

$$u_2(l) = d_2 \quad (9.18)$$

Из (9.18) находим

$$l = \frac{1}{L_2} \ln \frac{d_2}{u_2^0} \quad (9.19)$$

Пусть  $u_1(l) = u_1^0$ . Тогда из (9.17), (9.19) имеем

$$u_1^0 = d_1 e^{L_1 \ln \frac{d_2}{u_2^0}} = d_1 (d_2)^{\frac{L_1}{L_2}} (u_2^0)^{-\frac{L_1}{L_2}}$$

Следовательно, отображение  $T_\ell$  задается следующим образом

$$u_1^0 = C (u_2^0)^q, \quad (9.20)$$

где  $C = d_1 (d_2)^{\frac{L_1}{L_2}} = \text{const}$ ,  $q = \frac{L_1}{L_2}$ . Заметим, что учет нелинейных слагаемых системы (9.11) вносит лишь незначительную поправку, которой можно пренебречь при построении полного отображения.

**Отображение  $T_g$ .** Покажем теперь, что траектории системы (9.11) порождают отображение

$$T_g : \square_1 \rightarrow \square_0$$

Действительно, гомоклиническая траектория  $\Gamma_0$  при  $\mu=0$  соединяет  $\square_1$  и  $\square_0$  (рис.9.6). При этом время движения вдоль  $\Gamma_0$  от  $\square_1$  до  $\square_0$  будет конечным. Отсюда и непрерывной зависимости траекторий системы (9.11) от начальных условий вытекает существование отображения  $T_g$ , которое можно представить в следующем виде

$$\overline{u_2^0} = p(u_1^0, \cdot), \quad (9.21)$$

где  $\bar{u}_2^0$  – значение  $u_2$  в момент пересечения  $\square_0$  траекторией, выходящей из точки  $(u_1^0, d_2) \in \square_1$  (рис. 9.6). Отображение  $T_g$  является диффеоморфизмом. Разложим функцию  $p(u_1^0, \varphi)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(0,0)$

$$\bar{u}_2^0 = p(0,0) + \left. \frac{\partial p}{\partial u_1^0} \right|_{(0,0)} u_1^0 + \left. \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right|_{(0,0)} \varphi + \dots = au_1^0 + b\varphi + \dots \quad (9.22)$$

где всегда  $a > 0$  (неравенство  $a < 0$  приводит к пересечению фазовых траекторий), а слагаемое  $b\varphi$  описывает функцию расщепления в окрестности  $\varphi = 0$ .

Таким образом, траектории системы (9.11) в окрестности  $\Gamma_0$  порождают точечное отображение

$$T : \square_0 \rightarrow \square_0$$

Используя (9.20) и (9.22), устанавливаем, что  $T$  задается следующим образом

$$\bar{u}_2^0 = b\varphi + aC(u_2^0)^q + \dots \quad (9.23)$$

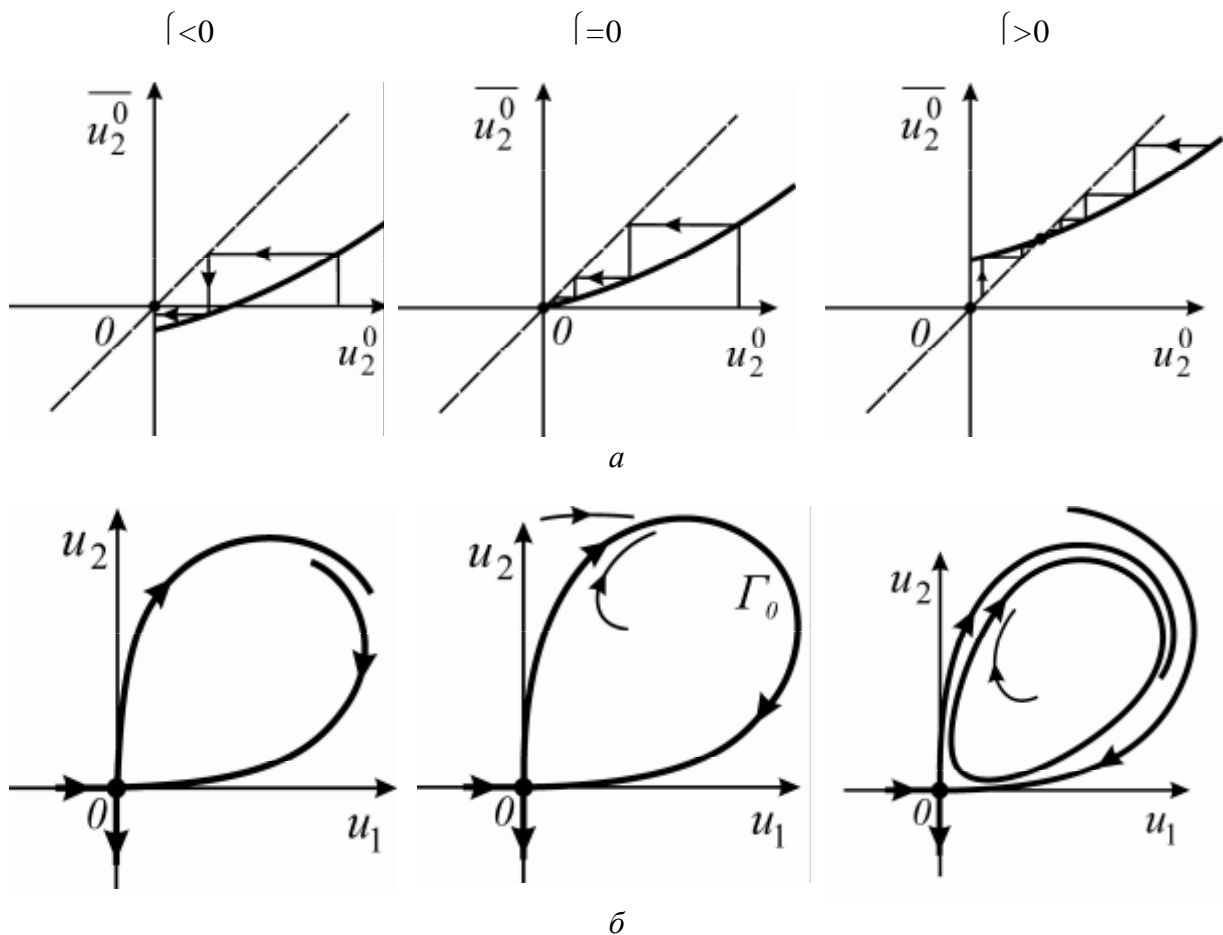


Рис. 9.7 Отображение Пуанкаре (а) и фазовые портреты (б) системы (9.11) в случае  $\dot{f}(0) < 0$ .

Функция последования отображения (9.23) имеет степенной характер, и, как известно, ее вид различен для  $q > 1$  и  $q < 1$ . Исследуем отображение (9.23) в этих двух случаях, считая для определенности, что  $b > 0$ .

**Случай**  $\dot{\Gamma}(0) = L_1(0) + L_2(0) < 0$ . В этом случае  $q(0) > 1$  и вид отображения (9.23) для различных значений  $\Gamma$  представлен на рис. 9.7а. Анализируя свойства отображения  $T$ , устанавливаем соответствующие фазовые портреты, которые представлены на рис. 9.7б. В области  $\Gamma > 0$  на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  существует устойчивый предельный цикл, который появился из траектории  $\Gamma_0$ . При этом  $\chi(\Gamma) > 0$ . Для  $\Gamma < 0$  предельный цикл не существует и  $\chi(\Gamma) < 0$ .

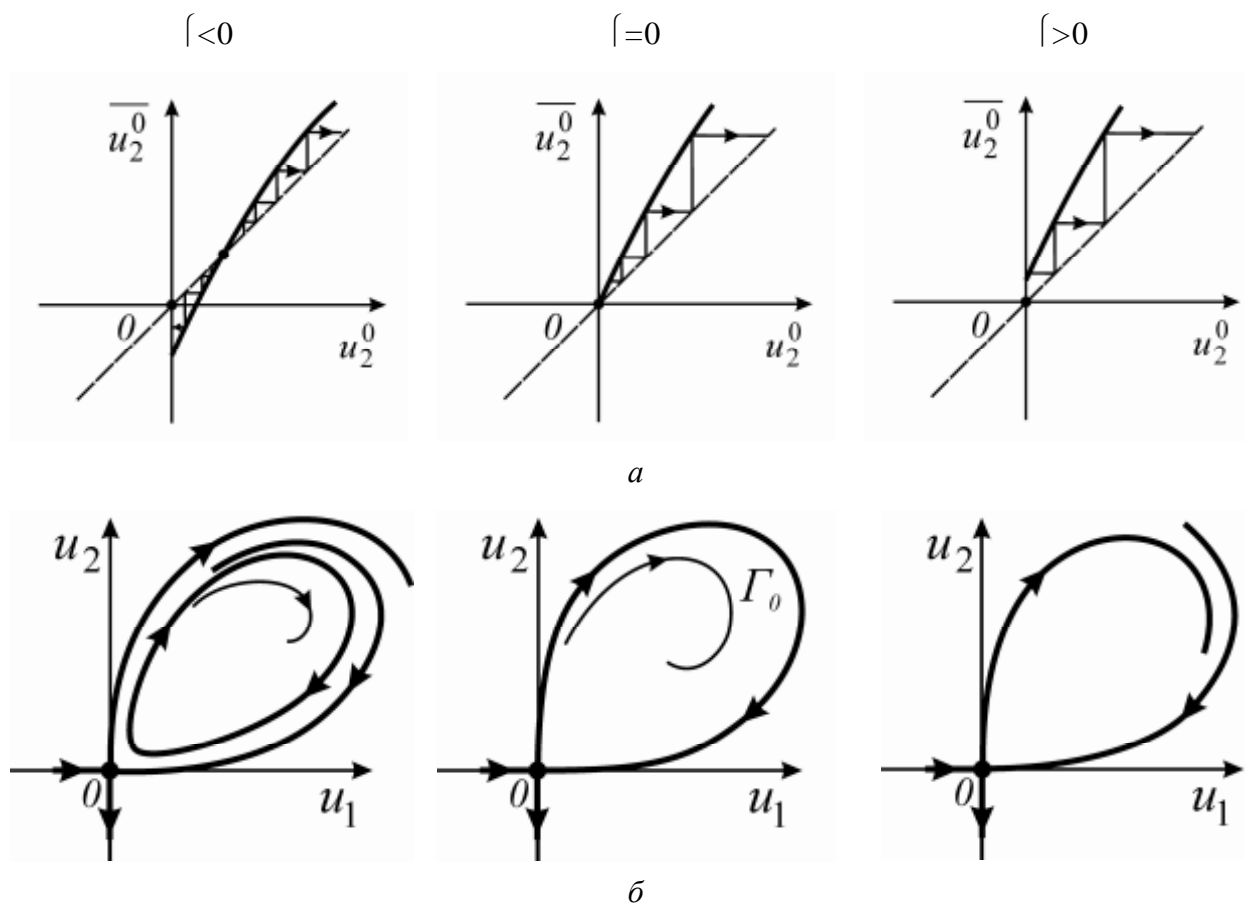


Рис. 9.8 Отображение Пуанкаре (а) и фазовые портреты (б) системы (9.11) в случае  $\dot{\Gamma}(0) > 0$ .

**Случай**  $\dot{\Gamma}(0) = L_1(0) + L_2(0) > 0$ . Этот случай отвечает значению  $q(0) < 1$ . Исследование точечного отображения (9.23) и соответствующих фазовых портретов системы (9.11) проводится полностью аналогично предыдущему. Результаты такого анализа представлены на рис. 9.8. Из траектории  $\Gamma_0$  рождается неустойчивый предельный цикл, который существует при  $\Gamma < 0$ . При  $\Gamma > 0$  система (9.11) предельных циклов не имеет.



### 9.2.2. Колебательные и вращательные петли сепаратрис

Петли сепаратрис (гомоклинические траектории) могут образовываться не только сепаратрисами седла на плоскости, но и сепаратрисами седла систем с цилиндрическим фазовым пространством. В этом случае, вообще говоря, возможно образование двух типов петель сепаратрис – колебательных, которые не охватывают фазовый цилиндр (рис. 9.9а) и вращательных, вдоль которых угловая переменная  $\Psi$  набегает  $2\pi$  и они охватывают цилиндр (рис. 9.9б).

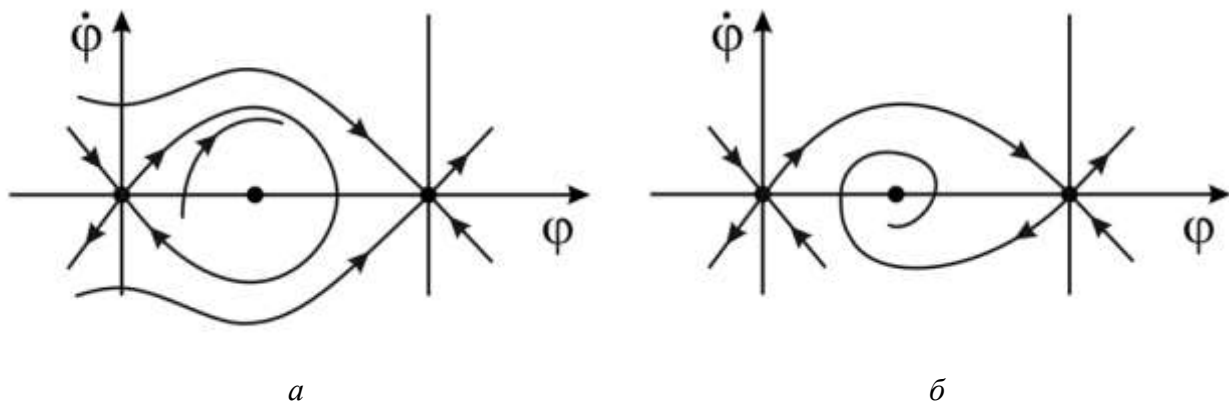


Рис. 9.9 Гомоклиническая траектория колебательного типа (а); гомоклиническая траектория вращательного типа (б)

Все утверждения раздела 9.2.1 остаются справедливыми для этих типов гомоклинических траекторий. Так, при  $f(0) < 0$  из этих петель сепаратрис седла рождаются устойчивые предельные циклы, а при  $f(0) > 0$  – неустойчивые. При этом циклы имеют тот же характер (колебательный или вращательный), что и соответствующие петли сепаратрис.

### 9.3. Контрольные вопросы и задания

1. Постройте качественный вид отображения Пуанкаре для системы (9.8).
2. Исследуйте отображение (9.4) в случае  $f(\psi) < 0$ ,  $f \neq 0$ .
3. Постройте качественную зависимость периода устойчивого предельного цикла системы (9.11), родившегося из петли сепаратрис седла, от параметра  $f$ .

## ЛЕКЦИЯ № 10

### БИФУРКАЦИЯ ПЕТЛИ СЕПАРАТРИСЫ СЕДЛО-УЗЛА. ДИНАМИКА БЫСТРО-МЕДЛЕННЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ.

*Построение отображения Пуанкаре. Рождение, устойчивых и неустойчивых циклов. Быстрые и медленные движения. Точки срыва. Системы с однократной релаксацией. Релаксационные периодические колебания.*

#### 10.1. Петля сепаратрисы седло-узла

Предположим, что система (8.1) на фазовой плоскости при  $\mu=0$  имеет в начале координат двукратное равновесие (седло-узел)  $O_0(0, 0)$ , и выполнены соответствующие (см. лекцию 8) бифуркационное условие и условия невырожденности

$$L_1(0)=0, \quad L_2(\mu) \neq 0, \quad l(\mu) \neq 0 \quad (10.1)$$

Рассмотрим нормальную форму для этой бифуркации

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \mu + l(\mu) u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 &= L_2(\mu) u_2 + \dots \end{aligned} \quad (10.2)$$

Пусть для определенности  $L_2(\mu) < 0$  и  $l(\mu) > 0$ . В этом случае седло-узел имеет устойчивую узловую область, а одномерная сепаратриса  $W_u(O_0)$  является неустойчивой. Предположим, что при  $\mu=0$  сепаратриса  $W^u(O_0)$  при  $t \rightarrow +\infty$  возвращается общим образом в точку  $O_0$ , образуя гомоклиническую траекторию  $\Gamma(0)$  (рис.10.1б) – петлю сепаратрисы седла-узла.

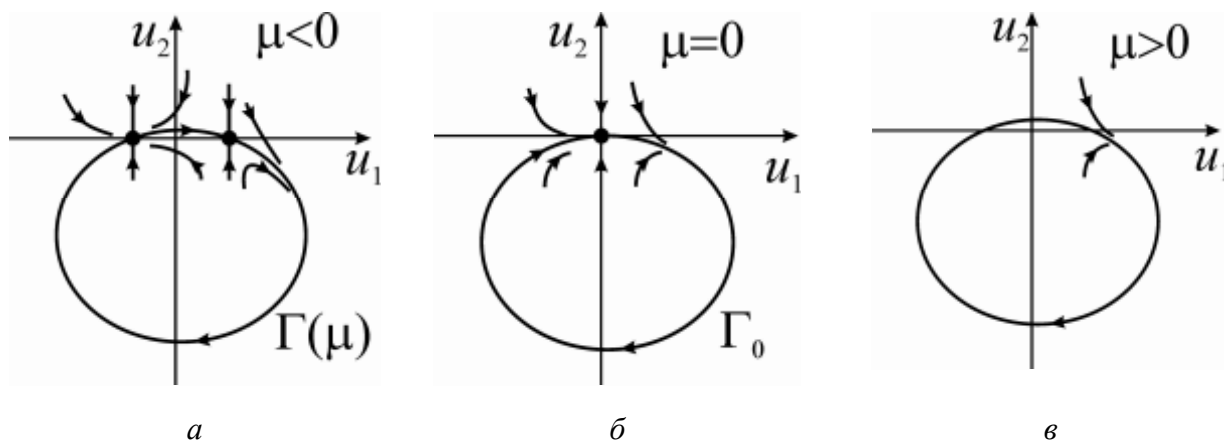


Рис.10.1. Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла.

Заметим, что, несмотря на существование траектории  $\Gamma(0)$ , система (10.2) имеет единственный негрубый элемент – двукратное равновесие  $O_0$ .

При  $\beta < 0$  состояние равновесия  $O_0$  распадается на два грубых – устойчивый узел и седло (см. лекцию 8). При этом гомоклиническая траектория  $\Gamma(0)$  трансформируется в траекторию  $\Gamma(\beta)$ , образованную сепаратрисой седла, идущей в устойчивый узел (рис.10.1а). Существование траектории  $\Gamma(\beta)$  вытекает из предположения о том, что  $\Gamma(0)$  возвращается в  $O_0$  общим образом, то есть сепаратриса  $W^u(O_0)$  не попадает в «край» узловой области.

При  $\beta > 0$  система (10.2) не имеет состояний равновесия и траектории покидают окрестность начала координат. Для исследования фазовой плоскости в этом случае построим отображение Пуанкаре. Введем в рассмотрение два отрезка, расположенные в  $\Sigma$ -окрестности начала координат

$$S_1 = \left\{ u_1, u_2 \mid u_1 = -d, \quad |u_2| \leq \sqrt{\Sigma^2 - d^2} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ u_1, u_2 \mid u_1 = d, \quad |u_2| \leq \sqrt{\Sigma^2 - d^2} \right\},$$

где  $0 < d < \Sigma \ll 1$ . Будем строить отображение Пуанкаре  $T$  в виде суперпозиции

$$T = T_l \oplus T_g \quad (10.3)$$

где  $T_l$  – локальное отображение, определяемое вдоль траекторий системы (10.2), начинающихся на  $S_1$  и заканчивающихся на  $S_2$  (рис.10.2), а  $T_g$  – глобальное отображение, определяемое траекториями, начинающимися на  $S_2$  и заканчивающимися на  $S_1$  (рис.10.2).

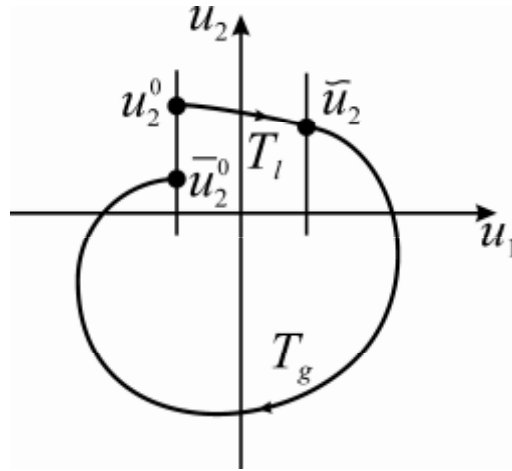


Рис.10.2. Отображение Пуанкаре системы (10.2) при  $\beta > 0$ .

**Отображение  $T_l$ .** Из первого уравнения системы (10.2) следует, что в  $\Sigma$ -окрестности начала координат выполняется неравенство  $\dot{u}_1 > 0$  и, следовательно,  $S_1$  и  $S_2$  – секущие Пуанкаре. Рассмотрим траекторию системы

(10.2), проходящую при  $t = 0$  через произвольную точку на секущей  $S_1$ , то есть траекторию, удовлетворяющую следующим начальным условиям (см. рис.10.2)

$$u_1(0) = \square d, \quad u_2(0) = u_2^0 \quad (10.4)$$

Поскольку между секущими  $S_1$  и  $S_2$  выполняется неравенство  $\dot{u}_1 > 0$  и  $\dot{u}_2 < 0$ , эта траектория через конечное время попадет на  $S_2$  (рис.10.2) в некоторой точке

$$u_1(l) = d, \quad u_2(l) = \tilde{u}_2 \quad (10.5)$$

Следовательно, траектории системы (10.2) действительно порождают отображение  $T_l$ . Установим его вид. Из второго уравнения системы (10.2) находим

$$\tilde{u}_2 = u_2^0 e^{-\dot{u}_2 l} + \dots \quad (10.6)$$

Проинтегрировав первое уравнение системы (10.2), находим время  $l$

$$l = \frac{1}{\dot{u}_1} \left( d - u_1^0 + \frac{1}{2} \frac{du_1}{dt} + \dots \right) = \frac{2}{\sqrt{\dot{u}_1}} \arctg \frac{d - u_1^0}{\sqrt{\dot{u}_1}} + \dots \quad (10.7)$$

$l$

Следовательно, отображение  $T_l$  задается системой (10.6), (10.7). Заметим, что в силу (10.7) при  $\dot{u}_1 \rightarrow 0$  время  $l \rightarrow \infty$ . Это означает, что при достаточно малом значении  $\dot{u}_1 > 0$  изображающая фазовая точка будет очень долго двигаться в окрестности начала координат.

**Отображение  $T_g$ .** Покажем сначала существование отображения  $T_g$ . Установим существование траектории  $\Gamma_1(l)$  системы (10.2), которая за конечное время переводит точку  $(u_1 = d, u_2 = \tilde{u}_2) \in S_2$  в некоторую точку  $(u_1 = \square d, u_2 = u_2^0) \in S_1$ . Существование траектории  $\Gamma_1(0)$  при  $l = 0$  следует из наличия по предположению гомоклинической траектории  $\Gamma(0)$  и теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от начальных условий. В свою очередь, из существования  $\Gamma_1(0)$  и теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметра вытекает существование  $\Gamma_1(l)$  при  $l > 0$ . Следовательно, отображение  $T_g$  существует и может быть представлено в следующем виде

$$\overline{u}_2^0 = g(\tilde{u}_2, \dot{u}_1) \quad (10.8)$$

В силу конечности времени движения вдоль  $\Gamma_1(l)$ , отображение (10.8) – диффеоморфизм. Раскладывая функцию  $g(u_2, \dot{u}_1)$  в окрестности точки  $(0, 0)$  получим

$$g(u_2, \dot{u}_1) = g(0, 0) + \left. \frac{\partial g}{\partial \dot{u}_1} \right|_{(0,0)} \dot{u}_1 + \left. \frac{\partial g}{\partial u_2} \right|_{(0,0)} u_2 + \dots = a + b \tilde{u}_2 + c \dot{u}_1 + \dots, \quad (10.9)$$



где  $b > 0$ , а знаки параметров  $a$  и  $c$  не имеют значения. Пусть для определенности  $a > 0$  и  $c > 0$ .

Из (10.9), (10.6) и (10.7) вытекает, что отображение  $T$  задается следующим образом

$$\overline{u}_2^0 = a + b e^{-\lfloor} u_2^0 + c \rfloor + \dots \quad (10.10)$$

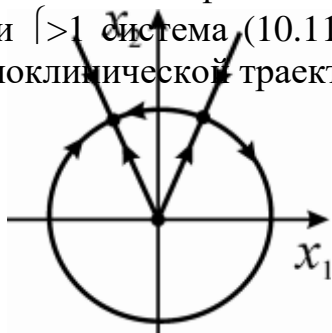
Нетрудно видеть, что отображение  $T$  имеет нетривиальную неподвижную точку. Поскольку  $\lfloor < 0$ , а  $\rfloor > 1$ , мультипликатор этой неподвижной точки меньше единицы и она устойчива. Следовательно, при  $\rfloor > 0$  система (10.2) имеет устойчивый предельный цикл (рис.10.1в), который появился на фазовой плоскости из траектории  $\Gamma(0)$ .

Совершенно аналогично проводится исследование системы (10.2) в случае  $\lfloor_2(\rfloor) > 0$ . В этом случае разрушение гомоклинической орбиты седло-узла приводит к рождению неустойчивого предельного цикла.

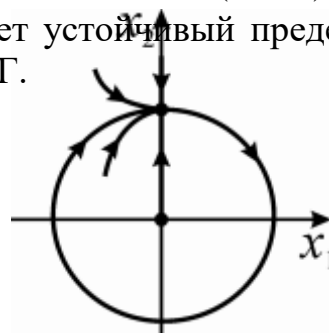
Проиллюстрируем бифуркацию рождения предельного цикла из петли сепаратрисы седло-узла следующим примером. Рассмотрим систему в полярных координатах

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\lfloor - \rho^2) \\ \dot{\Pi} &= \sin \Pi \rfloor \\ \dot{\varphi} &= \rfloor, \end{aligned} \quad (10.11)$$

где параметр  $\rfloor > 0$ . В системе (10.11) уравнения независимы и легко анализируются отдельно. Уравнение для  $\rho$  – уравнение на прямой, имеющее два состояния равновесия: неустойчивое  $\rho=0$  и устойчивое  $\rho=1$ . Уравнение для  $\Pi$  – уравнение на окружности (см. лекцию 2), которое при  $\rfloor > 1$  не имеет состояний равновесия, а при  $\rfloor < 1$  имеет два состояния равновесия: неустойчивое  $\Pi=\Pi_1=\arcsin \rfloor$  и устойчивое  $\Pi=\Pi_2=\pi-\arcsin \rfloor$ . При  $\rfloor=1$  эти состояния равновесия сливаются, образуя полуустойчивое состояние равновесия  $\Pi=\pi/2$ . Объединяя эти свойства уравнений системы (10.11), устанавливаем фазовые портреты системы (10.11) представленные на рис. 10.3. При  $\rfloor > 1$  система (10.11) имеет устойчивый предельный цикл, родившийся из гомоклинической траектории  $\Gamma$ .



а



б



в

Рис.10.3. Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла системы (10.11).

## 10.2. Заключительные замечания о бифуркациях систем на плоскости

Таким образом, мы рассмотрели все особые траектории (состояния равновесия, предельные циклы, сепаратрисы седел), определяющие структуру разбиения фазовой плоскости на траектории и основные (кратности 1) бифуркации, вызывающие перестройку этого разбиения. Представим сведения об основных бифуркациях систем на плоскости в виде следующей таблицы, в которой для краткости приведён один из возможных вариантов каждой бифуркации. В таблице локальные бифуркации помечены цифрой I, а нелокальные – цифрой II.

Таблица 10.1. Основные бифуркации систем на плоскости.

| Значение параметра |  | $\mu < 0$        | $\mu = 0$ | $\mu > 0$ |
|--------------------|--|------------------|-----------|-----------|
| Бифуркация         |  | Фазовые портреты |           |           |
| I                  | Седло-узловая<br>состояния<br>равновесия   |                  |           |           |
|                    | Андропова-Хопфа  |                  |           |           |
|                    | Двукратный<br>предельный цикл<br>(седло-узловая<br>циклов)                       |                  |           |           |
| II                 | Петля сепаратрис<br>седла (седловая<br>гомоклическая<br>бифуркация)              |                  |           |           |
|                    | Петля сепаратрис<br>седло-узла<br>(седло-узловая<br>гомоклическая<br>бифуркация) |                  |           |           |



Возникает естественный вопрос – как для конкретной нелинейной системы установить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории и как выяснить какие именно бифуркации в ней происходят? Ответа на этот вопрос для произвольной нелинейной системы не существует и исследование каждой системы требует, вообще говоря, индивидуального подхода. Другими словами, не существует единого универсального метода исследования динамики произвольной нелинейной системы. Однако, существуют некоторые классы систем, для которых развиты методы и приемы исследования, позволяющие регулярным образом получить ответ на поставленный вопрос. Знакомство с методами исследования нелинейных систем мы начнем с изучения так называемых релаксационных колебаний.

### 10.3. Динамика быстро-медленной системы

Во многих системах, самой различной природы, параметры, строго говоря, не являются постоянными величинами, а медленно эволюционируют с течением времени. Естественно возникает вопрос – могут или нет такие медленные изменения параметров привести к принципиальному изменению состояния системы? Если да, то при каких условиях это произойдет? Медленные изменения параметра можно описать, например, с помощью дифференциального уравнения, где в роли переменной выступает этот параметр, а в правой части в виде сомножителя присутствует постоянный малый параметр (см. лекцию 8, раздел 8.4). В результате мы получим систему, у которой часть переменных будет изменяться во времени значительно медленнее других переменных, не содержащих в правой части малых постоянных сомножителей. Для таких систем характерно присутствие двух масштабов времени и двух скоростей и ассоциирующихся с ними так называемых быстрых и медленных движений. Наличие таких видов движения может привести к режиму, когда после кратковременного быстрого изменения части переменных в системе наступает квазиравновесное (по отношению к быстрым движениям) состояние, соответствующее медленным движениям. Такой процесс быстрого установления квазиравновесного состояния называется релаксацией (термин введен Ван-дер-Полем). Если процессы релаксации повторяются, сменяя квазиравновесный режим, то в системе могут возникнуть колебания, которые называются релаксационными.

Рассмотрим релаксационные колебания в системах второго порядка вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (10.12)$$

где  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$  – однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, а  $\varepsilon$  – малый положительный параметр. В (10.12)  $x$  – медленная, а  $y$  – быстрая переменные<sup>□</sup>.

### 10.3.1. Медленные и быстрые движения

Предположим, что переменная  $y$  изменяется так, что  $y$  является ограниченной функцией. В этом случае при  $\varepsilon=0$  изменение медленной переменной  $x$  будет описываться системой

$$\dot{x} = P(x, y), \quad Q(x, y) = 0 \quad (10.13)$$

Система (10.13) называется системой медленных движений. Установим условия, при которых при достаточно малом  $\varepsilon$  движения системы (10.12) можно аппроксимировать системой (10.13), т. е. когда малый параметр  $\varepsilon$  можно не учитывать в первом приближении. Фактически нужно найти условия ограниченности  $\dot{y}$ . Из второго уравнения системы (10.12) имеем

$$\dot{y} = \frac{Q(x, y)}{\varepsilon} \quad (10.14)$$

Пусть  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  – точка на линии  $Q(x,y)=0$ , т.е.  $Q(\tilde{x}, \tilde{y})=0$ , а  $(x,y)$  – точка на фазовой плоскости, лежащая вне этой линии. Введем разности

$$l = x - \tilde{x} \quad \text{и} \quad | = y - \tilde{y}$$

Раскладывая функцию  $Q(x,y)$  в ряд Тейлора по степеням  $l$  и  $|$ , из (10.14) получим

$$\dot{y} = \frac{Q_x(\tilde{x}, \tilde{y})l + Q_y(\tilde{x}, \tilde{y})| + \dots}{\varepsilon} \quad (10.15)$$

Из (10.15) следует, что лишь внутри малой (порядка  $\varepsilon$ ) окрестности линий  $Q(x,y) = 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $\dot{y}$  будет ограниченной функцией. Следовательно, только в этой малой окрестности линии  $Q(x,y) = 0$  для описания движений системы (10.12) можно использовать систему (10.13).

Вне малой окрестности линии  $Q(x,y) = 0$  величина  $\dot{y} \rightarrow \infty$ , а  $\dot{x}$  остается ограниченной и при  $\varepsilon \rightarrow 0$

<sup>□</sup> В этом легко убедиться, введя в (10.12) новое время  $\tau | = t$ . В результате система (10.12) преобразуется к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon P(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = Q(x, y)$$

Отсюда при  $\varepsilon=0$  имеем  $x = \text{const}$  и, очевидно, что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  переменная  $x$  действительно изменяется медленно по сравнению с переменной  $y$ .

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \neq 0 \quad (10.16)$$

Из (10.16) следует, что в данной области фазовой плоскости фазовые траектории системы (10.12) близки к прямым  $x = x^0 = \text{const}$ . Вдоль этих траекторий изображающая точка движется с большими скоростями изменение переменной  $y$ . Такие движения называются быстрыми. Приблизительно быстрые движения можно описать с помощью системы

$$\dot{y} = Q(x^0, y), \quad x^0 = \text{const}, \quad (10.17)$$

которая называется системой быстрых движений. Заметим, что на фазовой плоскости  $(x, y)$  состояния равновесия системы (10.17) расположены в точках пересечения линии  $Q(x, y) = 0$  с прямыми  $x = x^0 = \text{const}$ .

Таким образом, исследование системы второго порядка (10.12) сводится к изучению двух систем первого порядка: системы медленных движений (10.13) в малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$  и системы быстрых движений (10.17) вне этой окрестности.

### 10.3.2. Системы с однократной релаксацией

Рассмотрим систему (10.17), которую перепишем в виде

$$\frac{dy}{d\tau} = Q(x^0, y), \quad \text{где } \tau = \frac{t}{\epsilon}. \quad (10.18)$$

Предположим, что при каждом значении  $x^0$  уравнение  $Q(x^0, y) = 0$  имеет единственное решение  $y = y^0$ , т.е. для любого  $x^0$  уравнение (10.18) имеет единственное состояние равновесия. Как известно (см. лекцию №2), состояние равновесия  $y = y^0$  будет устойчивым, если

$$Q'_y(x^0, y^0) < 0 \quad (10.19)$$

Пусть это условие выполняется при любом  $x^0$ . В этом случае любая траектория системы (10.18), начинающаяся вне линии  $Q(x, y) = 0$ , имеет форму прямой  $x = x^0$ , вдоль которой изображающая точка быстро приближается к состоянию равновесия  $y = y^0$ , расположенному на  $Q(x, y) = 0$ . (рис.10.4а).

Как было установлено выше, при достаточно малом  $\epsilon > 0$  траектории системы (10.12) близки к прямым  $x = x^0$  только вне слоя медленных движений (рис.10.4б), а для описания движений внутри слоя нужно использовать систему (10.13). При выполнении (10.19) тонкий слой медленных движений притягивает все быстрые движения, т.е. медленные движения устойчивы по отношению к быстрым. Фактически, в этом случае все установившиеся режимы в системе (10.12) могут быть исследованы лишь с использованием одной системы медленных движений (10.13), т.е. без учета малого параметра  $\epsilon$ .



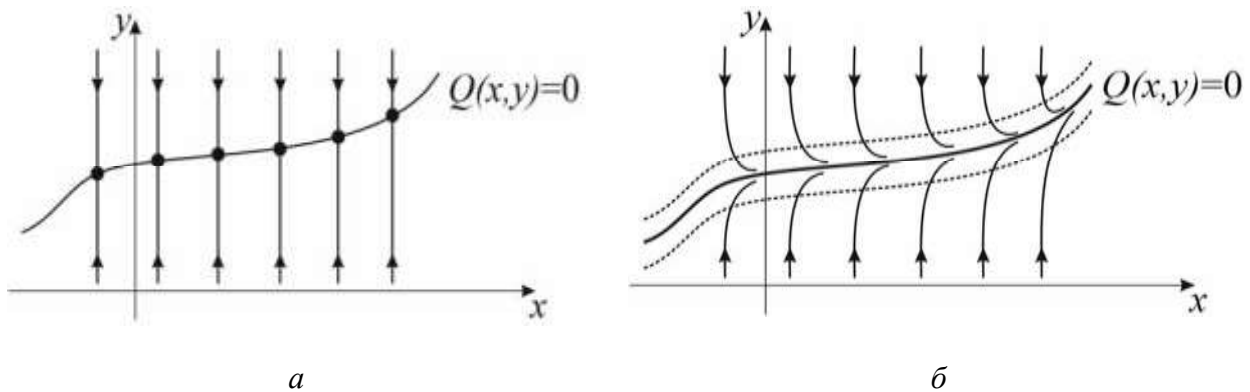


Рис.10.4. Фазовые портреты в случае  $Q_y < 0$  системы (10.18) (а) и системы (10.12) (б).

Если для любого состояния равновесия системы (10.17) выполняется неравенство

$$Q_y(x^0, y^0) > 0, \quad (10.20)$$

медленные движения будут неустойчивы по отношению к быстрым движениям. В этом случае тонкий слой медленных движений отталкивает траектории быстрых движений и внутри слоя динамика вновь определяется системой (10.13). Следовательно, здесь, как и в предыдущем случае, параметр  $\varepsilon$  можно не учитывать.

Проиллюстрируем изложенную теорию примером. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\Pi} + \gamma \dot{\Pi} + \sin \Pi = \omega^2, \quad (10.21)$$

описывающее динамику математического маятника в вязкой среде, находящегося под действием внешнего вращательного момента (см. лекцию 8). Сделав в (10.21) замену времени  $\tau = t/\varepsilon$ , получим уравнение

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 \Pi}{d\tau^2} + \frac{d\Pi}{d\tau} + \sin \Pi = \omega^2 \varepsilon^2. \quad (10.22)$$

Предположим, что среда обладает сильной вязкостью  $\gamma \gg 1$ . В этом случае можно ввести малый параметр  $\varepsilon = 1/\gamma^2 \ll 1$  и представить (10.22) в виде системы

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\Pi}{d\tau} &= y \\ \varepsilon \left[ \frac{dy}{d\tau} + \gamma y \right] &= -\sin \Pi - y \end{aligned} \quad (10.23)$$

Система (10.23) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $G = S^1 \cdot \mathbb{R}$ . Проведем исследование системы (10.23) в случае достаточно сильного вращательного момента  $\omega^2 > 1$ .

Система медленных движений имеет вид

141

$$\dot{\Gamma} = y, \quad \ddot{\Gamma} + \sin \Gamma = 0 \quad (10.24)$$

На линии медленных движений  $y = \ddot{\Gamma} + \sin \Gamma$  определено уравнение на окружности

$$\dot{\Gamma} = \omega + \sin \Gamma \quad (10.25)$$

При  $\omega > 1$  выполняется неравенство  $\dot{\Gamma} > 0$  и любая траектория уравнения (10.25) совершает вращательные движения.

Быстрые движения системы (10.23) задаются уравнениями

$$\dot{y} = \omega + \sin \Gamma^0 + y, \quad \dot{\Gamma} = \Gamma^0 = \text{const} \quad (10.26)$$

Из (10.26) следует, что  $Q_2 = -1 < 0$  и, следовательно, кривая медленных движений устойчива по отношению к быстрым.

Принимая во внимание установленные свойства быстрых и медленных движений, получаем фазовые портреты системы (10.23) представленные на рис.10.5. На фазовом цилиндре  $G$  системы (10.23) существует единственный устойчивый предельный цикл вращательного типа. Следовательно, под действием внешнего вращательного момента маятник совершает периодическое вращение вокруг точки подвеса.

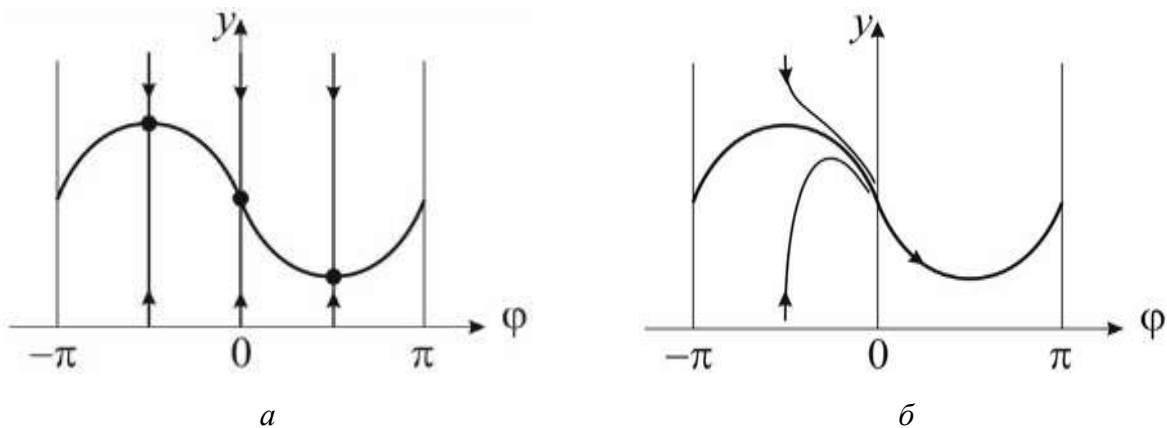


Рис.10.5. Фазовые портреты в случае  $\omega > 1$ : системы (10.26) (а) и системы (10.23) (б).

### 10.3.3. Релаксационные колебания

Предположим, что уравнение (10.17) для некоторых значений  $x^0$  имеет одновременно не одно, а несколько состояний равновесия. При этом для части из них выполнено неравенство (10.19), а для остальных – (10.20), т.е. одни состояния равновесия являются устойчивыми, а другие – неустойчивыми. В этом случае линия  $Q(x,y) = 0$  распадается на некоторое число устойчивых и неустойчивых по отношению к быстрым движениям компонент. Для примера на рис. 10.6а представлен случай, когда существуют две устойчивые компоненты –  $Q^+_1$  и  $Q^+_2$  и одна неустойчивая –  $Q^-$ . Понятно, что устойчивые и неустойчивые компоненты разделяются точками, в которых

$$Q_{\dot{y}}(x^0, y^0) = 0. \quad (10.27)$$

Например, на рис.10.6, а таких точек две – А и В. Пусть  $(x^0=x^*, y^0=y^*)$  – координаты одной из точек, в которой выполняется (10.27). При  $x^0 = x^*$  в уравнении (10.17), описывающем быстрые движения, происходит бифуркация состояний равновесия. Рассмотрим наиболее типичный случай – пусть в точке  $x^0 = x^*$  происходит основная (кратности 1) бифуркация для состояний равновесия – двукратное равновесия. С геометрической точки зрения это означает, что на фазовой плоскости к точке  $(x^*, y^*)$  примыкают лишь две компоненты кривой  $Q(x, y) = 0$  (на рис.10.6а в точке А –  $Q_1^+$  и  $Q_2^+$ , а в точке В –  $Q_1^-$  и  $Q_2^-$ ).

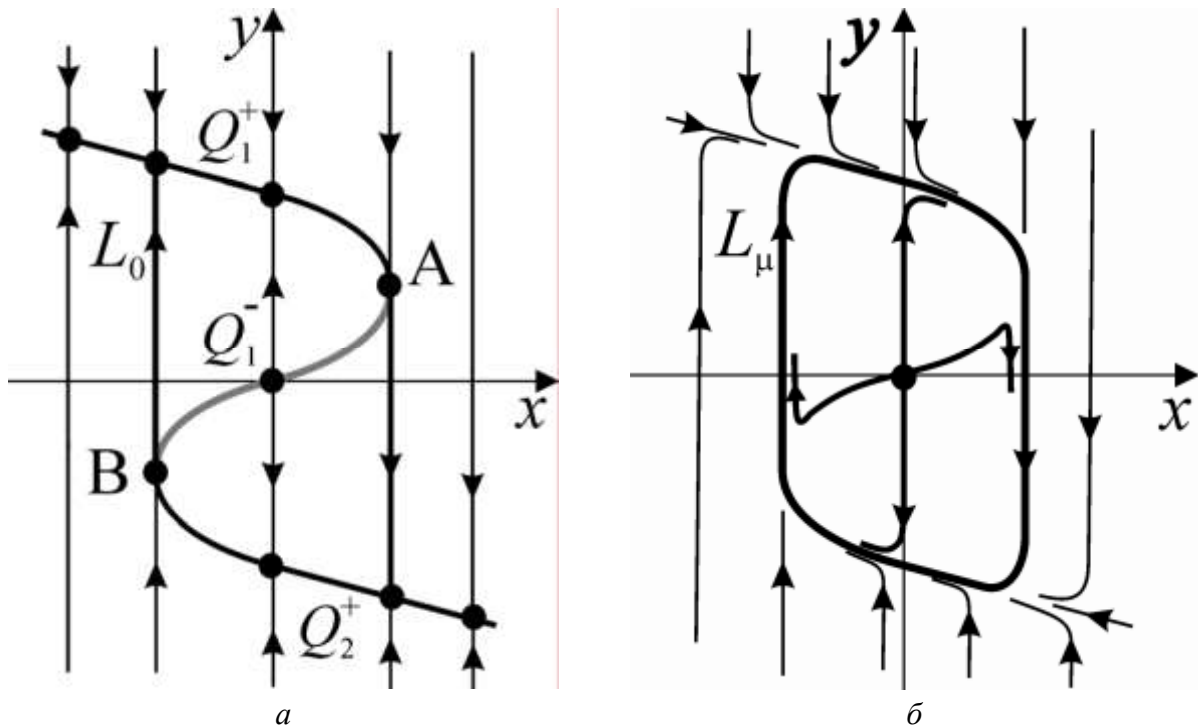


Рис.10.6. Фазовые портреты: систем (10.13), (10.17) (а) и системы (10.12) (б).

Разложим функцию  $Q(x^0, y)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x^*, y^*)$

$$Q(x^0, y) = Q(x^*, y^*) + Q_{x0}(x^*, y^*)(x^0 - x^*) + Q_{y0}(x^*, y^*)(y - y^*) + \frac{1}{2}Q_{xx}(x^*, y^*)(x^0 - x^*)^2 + \dots \quad (10.28)$$

Принимая во внимание (10.28) и равенство  $Q(x^*, y^*) = 0$ , получаем, что при  $x^0 = x^*$  уравнение (10.17) может быть записано в следующем виде

$$\dot{y} = a(y - y^*)^2 + \dots, \quad (10.29)$$

где  $a = \frac{1}{2}Q_{yy}(x^*, y^*) \neq 0$ , поскольку в точке  $x=x^*$  имеет место бифуркация двукратного равновесия. Из (10.27) следует, что в окрестности  $y=y^*$  при  $|x - x^*| \ll 1$



$|\dot{y}| \ll 1$ . Следовательно, точка  $(x^*, y^*)$  является точкой стыковки медленных и быстрых фазовых траекторий. В точках такого вида происходит «срыв» движения с одной из устойчивых компонент медленного движения (на рис.10.6а с  $Q_1^+$  в точке  $A$  и с  $Q_2^+$  в точке  $B$ ) и релаксация к другой устойчивой компоненте. Далее процесс может повториться и в результате, в системе могут возникнуть периодические релаксационные колебания. Точнее, если в результате таких релаксационных переходов в вырожденном случае будет образована замкнутая фазовая кривая  $L_0$  (рис.10.6а), то существует такое число  $\epsilon_0 > 0$ , что при каждом значении параметра  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  найдется малая окрестность траектории  $L_0$ , в которой лежит единственный цикл  $L_\epsilon$  системы (10.12) (рис.10.6б). При  $\epsilon \rightarrow 0$  цикл  $L_\epsilon$  стремится к  $L_0$ .

В качестве примера рассмотрим систему ФитцХью-Нагумо, которая описывает электрическую активность нервной клетки – нейрона. Тело клетки нейрона окружено биологической мембраной. Одна из важнейших функций биологической мембраны – генерация и передача биопотенциалов. Мембранный биопотенциал возникает из-за градиента концентрации ионов по разную сторону мембраны и возникающего в следствии этого переноса ионов через ионные каналы мембраны. Нейроны могут генерировать биопотенциалы в виде как одиночных электрических импульсов возбуждения (спайков), так серий импульсов. С физической точки зрения биомембрану можно рассматривать как электрический конденсатор, в котором пластинами является электролиты наружного и внутреннего растворов. Через биомембрану по ионным каналам протекают ионные токи – калиевый, натриевый и др. Каждый ионный ток определяется разностью мембранного потенциала и равновесного потенциала, создаваемого диффузией ионных токов. Простейшей системой, описывающей эти процессы является модель ФитцХью-Нагумо, имеющая вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u) - v, \\ \dot{v} &= \epsilon(u - I), \end{aligned} \quad (10.30)$$

где  $u$  описывает динамику мембранного потенциала,  $v$  – совокупное действие всех ионных токов, нелинейная функция имеет вид  $f(u) = u(1-u)(u-a)$ ,  $0 < a < 1$ , параметр  $I$  контролирует уровень деполяризации мембраны, а параметр  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon \ll 1$ ) определяет характерные временные масштабы импульсов возбуждения. Следовательно, в (10.28)  $v$  – медленная, а  $u$  – быстрая переменные.

Пусть параметр  $I \in (u_{\min}, u_{\max})$ , где  $u_{\min}$  и  $u_{\max}$  – координаты минимума и максимума функции  $f(u)$  соответственно. Запишем системы медленных и быстрых движений

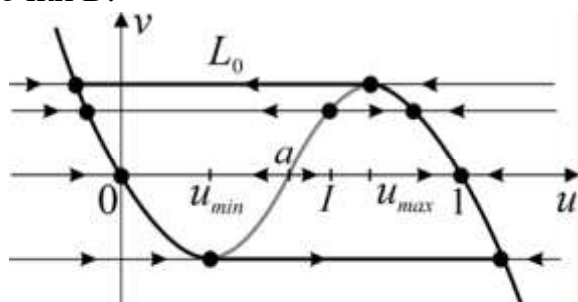
$$\dot{v} = u - I, \quad v = f(u) \quad (10.31)$$

$$\dot{u} = f(u) - v^0, \quad v = v^0 = \text{const} \quad (10.32)$$

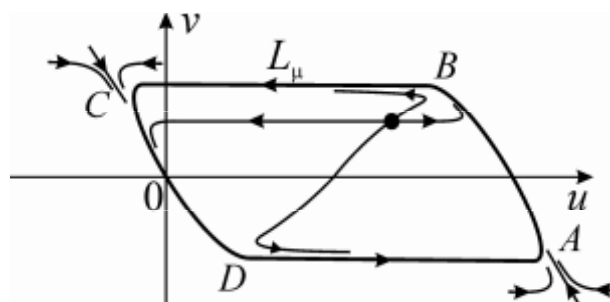


Анализируя (10.31), (10.32), устанавливаем представленные на рис. 10.7 фазовые портреты системы (10.30). На фазовой плоскости существует

устойчивый предельный цикл  $L_1$ , соответствующий периодическому изменению мембранного потенциала. Рассмотрим изменение переменной  $u(t)$ , отвечающей циклу  $L_1$ . Пусть в начальный момент времени изображающая точка находилась на цикле и значение  $u$  было максимальным – точка  $A$  (рис.10.7б). В начале точка двигается по циклу медленно пока не достигнет точки  $B$ .



а



б

Рис.10.7. Фазовые портреты: систем (10.31), (10.32) (а) и системы (10.30) (б)

После этого следует очень быстрое прохождение участка ВС и снова медленное движение вдоль участка CD, которое вновь сменяется быстрым движением на участке DA. В результате в системе реализуются периодические колебания потенциала  $u$ , качественный вид которых представлен на рис. 10.8.

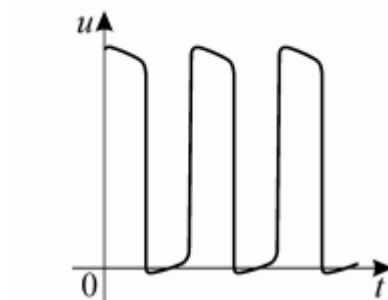


Рис.10.8. Периодические релаксационные колебания мембранного потенциала в модели ФитцХью-Нагумо.

#### 10.4. Контрольные вопросы и задания

1. Постройте фазовые портреты системы (10.2) в случае  $I_1(\infty) > 0, I_2(\infty) > 0$ .
2. Нарисуйте качественный вид временной реализации переменной  $u_1$ , отвечающий устойчивому предельному циклу системы (10.2) в случае  $I_1(\infty) > 0, I_2(\infty) < 0$ .
3. Найдите приближенно период релаксационных колебаний в модели ФитцХью-Нагумо.

4. Исследуйте динамику системы Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 + x, \\ \dot{y} &= -\mu x,\end{aligned}$$

где  $0 < \mu \ll 1$ .

## ЛЕКЦИЯ 11

### ДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО КОНТАКТА

*Стационарный и нестационарные эффекты Джозефсона. Качественное исследование модели. Вольт-амперная характеристика контакта.*

Сверхпроводимость – это свойство некоторых материалов обладать нулевым электрическим сопротивлением, когда их температура достигает значения ниже некоторого критического. Такое свойство демонстрируют несколько десятков чистых элементов, керамик и сплавов.

Рассмотрим систему, состоящую из двух сверхпроводников разделенных тонким (толщина порядка  $10^{-7}$  см) изолирующим слоем, образованным, например, нормальным металлом. В 1962 г. 22-х летний студент-дипломник Б.Джозефсон (Brian Josephson) опубликовал статью, в которой, опираясь на экспериментальные результаты Гиавера, пришел к выводу о том, что через такой контакт возможно протекание сверхпроводящих токов. В частности, протекание постоянного тока даже в случае отсутствия разности потенциалов между сверхпроводниками. С точки зрения классических представлений такой эффект невозможен. Джозефсон показал, что протекание сверхпроводящих токов является следствием туннелирования так называемых куперовских пар через контакт. Куперовская пара представляет собой квазичастицу, образованную за счет взаимодействия и связывания двух электронов в сверхпроводнике. Поток куперовских пар и формирует ток при сверхпроводимости. Состояние куперовской пары можно описать с помощью волновой функции. Оказывается, что в сверхпроводнике куперовские пары не могут двигаться независимо друг от друга. Взаимодействие таких пар приводит к их взаимной упорядоченности, в следствие которой состояние куперовских пар в сверхпроводнике характеризуется **единой волновой функцией**. Другими словами, куперовские пары скапливаются в одном и том же квантовом состоянии и поэтому описываются одной и той же волновой функцией.

#### 11.1 Стационарный и нестационарный эффекты

Предположим, что волновые функции куперовских пар в сверхпроводниках не зависят от пространственных координат и изменяются только во времени. В таком приближении волновые функции задаются следующим образом

$$J_i = \sqrt{\lambda_i} e^{i\Pi_i}, \quad i=1,2, \quad (11.1)$$

где  $\lambda_i$  – плотность зарядов электронов в сверхпроводниках, а  $\Pi_i$  – общая для всех частиц фаза в  $i$  – ом сверхпроводнике. При достаточном сближении сверхпроводников их волновые функции начинают перекрываться в области изолирующего зазора (барьера), формируя туннельный контакт. Возникает процесс переноса куперовских пар через барьер, который описывается следующей системой для волновых функций

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial J_1}{\partial t} &= E_1 J_1 + K J_2, \\ i\hbar \frac{\partial J_2}{\partial t} &= E_2 J_2 + K J_1, \end{aligned} \quad (11.2)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $E_1, E_2$  – энергии основных состояний каждого из проводников,  $K$  – амплитуда взаимодействия двух состояний контакта, зависящая от его специфики (геометрии электродов, параметров барьера и др.). Приложим к контакту постоянную разность потенциалов  $V$ , которая приведет к сдвигу

$$E_1 \rightarrow E_2 = 2eV. \quad (11.3)$$

Без ограничения общности будем считать, что энергия отсчитывается от среднего между величинами  $E_1$  и  $E_2$  значения. Тогда из (11.2) и (11.3) имеем

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial J_1}{\partial t} &= eV J_1 + K J_2, \\ i\hbar \frac{\partial J_2}{\partial t} &= -eV J_2 + K J_1. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Подставляя в (11.4) выражения  $J_1$  и  $J_2$  из (11.1) и разделяя в полученных уравнениях действительные и мнимые части, находим

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = 2K \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \sin \Pi, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = -2K \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \sin \Pi, \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial t} &= \frac{eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cos \Pi, \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial t} &= \frac{eV}{\hbar} + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cos \Pi, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где  $\Pi = \Pi_2 - \Pi_1$ . Обозначим через  $I_s$  ток куперовских пар, так называемый сверхток, который задается через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  следующим образом



$$I_s = \frac{\langle \rangle_1}{\langle t} = \frac{\langle \rangle_2}{\langle t}. \quad (11.7)$$

Принимая во внимание (11.7), получаем из (11.6), что

$$I_s = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\langle \rangle_1 \langle \rangle_2} \sin \Pi. \quad (11.8)$$

Включим контакт во внешнюю цепь с источником постоянного тока  $I > 0$ . За счет действия этого источника значения величин  $\langle \rangle_1$  и  $\langle \rangle_2$  могут поддерживаться постоянными, поскольку он непрерывно компенсирует потери куперовских пар уже протуннелированных через барьер. Предположим для простоты, что  $\langle \rangle_1 = \langle \rangle_2 = \langle \rangle = \text{const}$ . Тогда из (11.8) имеем

$$I = I_{\max} \sin \Pi, \quad (11.9)$$

где  $I_{\max} = \frac{2K}{\hbar} \langle \rangle$ . Из (11.9) следует, что при  $I < I_{\max}$  существует разность фаз  $\Pi$ , при которой через контакт будет протекать постоянный ток. Заметим, что в (11.9) никак не входит напряжение на контакте. Постоянный ток через контакт протекает при нулевой разности потенциалов! Этот эффект называют **стационарным эффектом Джозефсона**. Он был подтвержден экспериментально Андерсоном и Роуэлом через год после теоретической работы Джозефсона.

Рассмотрим теперь систему (11.6) для фаз волновых функций. При сделанных выше предположениях из (11.6) следует, что

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (11.10)$$

Уравнение (11.10) описывает еще один удивительный эффект, предсказанный Джозефсоном. При постоянном напряжении на контакте через него протекает высокочастотный переменный ток. Это явление называют **нестационарным эффектом Джозефсона**. Заметим, что частота переменного тока пропорциональна величине приложенного напряжения. Однако, даже при очень малых напряжениях эта частота, оказывается, может лежать в очень широких пределах. Например, для некоторых типов сверхпроводников при напряжении  $V=1\text{мВ}$  достигнута генерация переменного тока с частотой  $4,85 \cdot 10^{11}$  Гц.

## 11.2 Эквивалентная схема контакта

Кроме сверхтока, задаваемого выражением (11.9), через Джозефсоновский контакт протекает и обычный (нормальный) ток, вызванный туннелированием отдельных электронов. Контакт обладает также и емкостными свойствами, связанными со специфической конфигурацией





контакта. Принимая эти свойства во внимание, получим электрическую схему контакта, представленную на рис. 11.1.

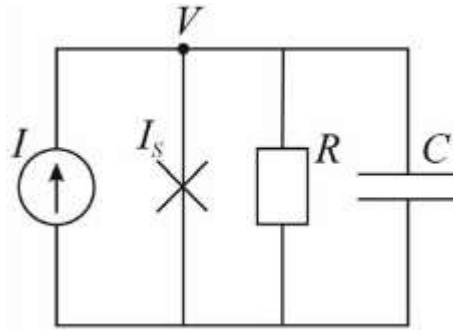


Рис. 11.1. Эквивалентная электрическая схема Джозефсоновского контакта.

Запишем закон Кирхгофа для полного тока через контакт

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + I_{\max} \sin \Pi = I. \quad (11.11)$$

Исключая в (11.11), с помощью соотношения (11.10), переменную  $V$ , получим следующее уравнение

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \Pi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\Pi}{dt} + I_{\max} \sin \Pi = I. \quad (11.12)$$

Введем в (11.12) новое время и параметры

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt{\frac{2eI_{\max}}{\hbar C}} t, & \odot &= \frac{I}{I_{\max}}, & \mathcal{L} &= \sqrt{\frac{\hbar}{C2eI_{\max}}} \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

В результате уравнение (11.11) примет следующий эквивалентный вид

$$\ddot{\Gamma} + \mathcal{L} \dot{\Gamma} + \sin \Pi = \odot, \quad (11.13)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $\Gamma$ .

Заметим, что уравнение (11.13) описывает также динамику совершенно далеких от теории сверхпроводимости физических систем – механического маятника в вязкой (параметр  $\mathcal{L}$ ) среде, находящегося под действием постоянного внешнего момента  $\odot$  (см. лекцию 8), и системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), содержащую в цепи управления линейный фильтр, постоянную времени которого характеризует параметр  $\mathcal{L}$  (см. лекцию 4). В случае маятника переменная  $\Pi$  – угол отклонения от равновесия, а в случае системы ФАПЧ – разность фаз двух генераторов, имеющих начальную расстройку по частоте  $\odot$ . Поэтому полученные ниже результаты исследования

динамики уравнения (11.13) можно использовать для понимания поведения и этих физических объектов.



### 11.3. Динамика модели

Перепишем уравнение (11.13) в виде эквивалентной системы

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin \Pi - \lambda y. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Будем рассматривать систему (11.14) в области параметров  $D = \{\lambda, \lambda \in 0, \lambda \in 0\}$ . Система (11.14) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $G = S^1 \cdot \mathbb{R}$ , поскольку ее правая часть  $2\pi$ -периодична по переменной  $\Pi$ .

#### 11.3.1. Консервативный случай

При  $\lambda = 0$  система (11.14) принимает форму нелинейного консервативного осциллятора, полная энергия которого сохраняется и задается следующим образом

$$E = E_K + E_n = \text{const}, \quad (11.15)$$

где

$$E_K = \frac{y^2}{2}, \quad E_n = \int_{\Pi_0}^{\Pi} (\sin \xi - \lambda \xi) d\xi,$$

где константа  $\Pi_0$  задает уровень, относительно которого отсчитывается потенциальная энергия. Из соображений удобства построения графика функции  $E_n(\Pi)$ , необходимого в дальнейшем, выберем  $\Pi_0$  следующим образом

$$\Pi_0 = \begin{cases} \arcsin \lambda, & \text{если } \lambda \leq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } \lambda > 1 \end{cases}$$

Для построения фазовых портретов осциллятора воспользуемся стандартной процедурой (см. лекцию 5), основанной на свойствах функции  $E_n(\Pi)$ . На рис. 11.2 представлен качественный вид функции  $E_n(\Pi)$  и соответствующие фазовые портреты для различных значений параметра  $\lambda$ .

Заметим, что рассматриваемый осциллятор имеет на одном периоде «угловой» переменной  $\Pi$  два состояния равновесия при  $\lambda < 1$ , одно из которых седло, а другое – центр, при  $\lambda = 1$  – одно состояние равновесия с двумя нулевыми характеристическими показателями. При  $\lambda > 1$  состояний равновесия нет.

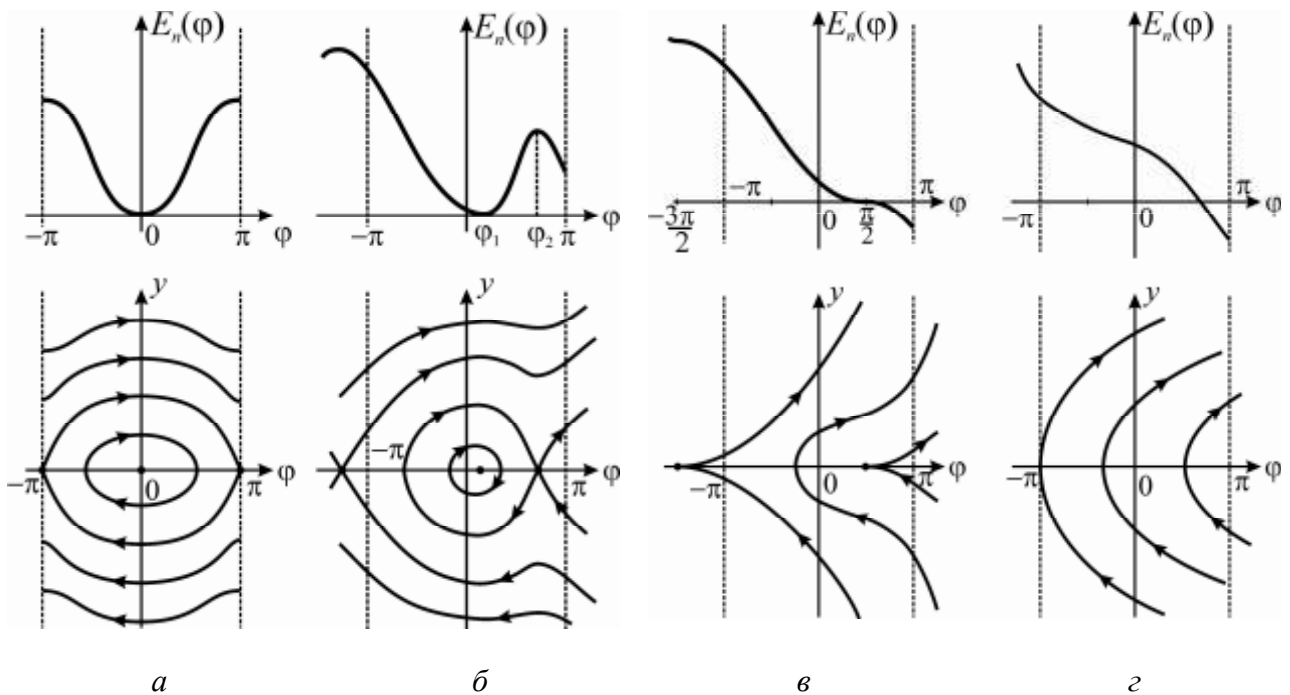


Рис. 11.2. Качественный вид функции  $E_n(\varphi)$  и соответствующие фазовые портреты для различных значений параметра  $\odot$ :  $\odot=0$  (а);  $\odot \in (0,1)$  (б);  $\odot=1$  (в);  $\odot > 1$  (г).

### 11.3.2. Диссипативный случай

Исследование системы (11.14) при  $\lfloor > 0$  начнем с установления важного свойства, связанного с ее диссипативностью.

#### 11.3.2.а. Поглощающая область

Непосредственно из системы (11.14) имеем

$$\dot{y} = \odot \sin \Pi \lfloor y \delta \odot + 1 \lfloor y. \quad (11.16)$$

Из (11.16) следует, что  $y < 0$  при любых значениях переменной  $\Pi \in S$ , если  $y > \frac{1+\odot}{\lfloor}$ . Следовательно, любая траектория системы (11.14) с начальными

условиями  $\Pi(0) \in S^1, y(0) > \frac{1+\odot}{\lfloor}$  с течением времени приходит в область на

фазовом цилиндре  $G$ , расположенную при  $y < \frac{1+\varepsilon}{L}$ . При этом, для  $y > \frac{1+\varepsilon}{L}$

переменная  $y$  монотонно убывает вдоль любой траектории. Аналогично,

$$\dot{y} = \sin \Pi \sqrt{1 - y^2} \quad (11.17)$$

В силу (11.17) имеем

$$\dot{y} > 0, \text{ если } y < \frac{\sin \Pi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Pi}}.$$

Отсюда следует, что любая траектория системы (11.14) с начальными условиями  $\Pi(0) \in S^1, y(0) < \frac{\sin \Pi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Pi}}$  с течением времени попадает в область на

фазовом цилиндре  $G$ , расположенную при  $y > \frac{\sin \Pi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Pi}}$ , а переменная  $y$  при  $y < \frac{\sin \Pi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Pi}}$  монотонно возрастает. Суммируя установленные выше свойства траекторий системы (11.14), получаем, что область

$$G^+ = \{ \Pi, y \mid \Pi \in S^1, \frac{\sin \Pi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Pi}} \leq y \leq \frac{\sin \Pi + 1}{\sqrt{1 - \sin^2 \Pi}} \}$$

притягивает все траектории этой системы с начальными условиями вне этой области. Другими словами,  $G^+$  – поглощающая область (см. лекцию 1). Заметим, что границу области  $G^+$  траектории системы (11.14) пересекают в одну сторону – снаружи внутрь. Поэтому траектории с начальными условиями из области  $G^+$  остаются в ней при любом  $t > 0$ . Далее будем рассматривать систему (11.14) в области  $G^+$ , содержащей все ее неблуждающие траектории.

### 11.3.2.6. Состояние равновесия и их локальные свойства

Из (11.14) следует, что координаты состояний равновесия определяются следующей системой

$$y = 0, \sin \Pi \sqrt{1 - y^2} = 0. \quad (11.18)$$

Решая систему (11.18), устанавливаем, что система (11.14) имеет при  $0 < \sin \Pi < 1$  два состояния равновесия –  $O_1(\Pi = \Pi_1, y = 0)$  и  $O_2(\Pi = \Pi_2, y = 0)$ , где  $\Pi_1 = \arcsin \sin \Pi, \Pi_2 = \pi - \arcsin \sin \Pi$ , при  $\sin \Pi = 1$  – одно ( $O_0(\Pi = \pi/2, y = 0)$ ), а при  $\sin \Pi > 1$  состояний равновесия нет. Несложно показать (предлагаем читателю проделать это самостоятельно) с помощью метода линеаризации (см. лекцию 4), что состояние равновесия  $O_1$  является асимптотически устойчивым, а  $O_2$  – седлом. Состояние равновесия  $O_1$  – устойчивый фокус, если  $\sqrt{1 - \sin^2 \Pi} < 2(1 - \sin \Pi)^{1/4}$  и устойчивый узел в противном случае (рис. 11.3а).

Найдем критические направления сепаратрис седла  $O_2$ . Для этого линеаризуем систему (11.14) в окрестности точки  $O_2$ .

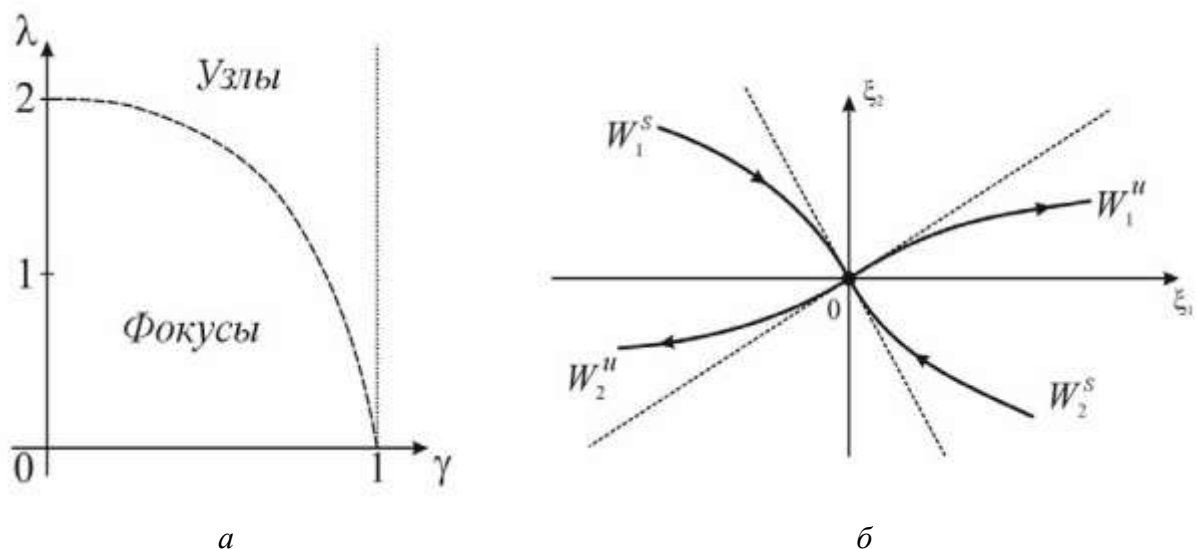


Рис. 11.3. Качественное разбиение плоскости параметров  $D$  на области, отвечающие различным типам состояния равновесия  $O_1$  (а); качественное представление критических направлений седла  $O_2$  (б).

В результате получим линеаризованную систему следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{l}_1 &= l_2 \\ \dot{l}_2 &= \sqrt{1 - \alpha^2} l_1 - l_2 \end{aligned} \quad (11.19)$$

Перепишем (11.19) в виде одного эквивалентного уравнения

$$\frac{dl_2}{dl_1} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2} l_1 - l_2}{l_2}. \quad (11.20)$$

Как известно (см. лекцию 4), у линейных систем сепаратрисы седел представляют собой прямые. Поэтому будем искать уравнения сепаратрис седла системы (11.19) в виде

$$l_2 = k l_1, \quad (11.21)$$

где  $k$  – коэффициент, который требуется найти. Подставляя (11.21) в (11.20), получим

$$\left. \frac{dl_2}{dl_1} \right|_{l_2 = k l_1} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2} l_1 - k l_1}{k l_1} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2} - k}{k}. \quad (11.22)$$

С другой стороны, из (11.21) следует, что

$$\frac{dl_2}{dl_1} = k. \quad (11.23)$$





Приравнивая теперь правые части (11.22) и (11.23), получаем для нахождения  $k$  квадратное уравнение, корни которого и определяют искомые коэффициенты

$$k_{1,2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \sqrt{1 - \sigma^2}}. \quad (11.24)$$

Поскольку  $k_1 > 0$ , а  $k_2 < 0$ , то в силу первого уравнения системы (11.14) в точке  $O_2$  неустойчивые сепаратрисы касаются прямой с наклоном  $k_1$ , а устойчивые – с наклоном  $k_2$ . Неустойчивую сепаратрису, выходящую в область  $l_2 > 0$ , обозначим через  $W_1^u$ , а в область  $l_2 < 0$  – через  $W_2^u$ . Аналогично, устойчивую сепаратрису, приближающуюся к точке  $O_2$  со стороны  $y > 0$ , обозначим через  $W_1^s$ , а со стороны  $l_2 < 0$  – через  $W_2^s$  (рис. 11.3б).

При  $\sigma = 1$  состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  сливаются в точке  $O_0$ , которая исчезает при  $\sigma > 1$ . Точка  $O_0$  – седло-узел с устойчивой узловой областью и неустойчивой сепаратрисой (см. лекцию 8). Таким образом, при  $\sigma = 1$  происходит бифуркация коразмерности 1 – образование седло-узла.

### 11.3.2.в. Функция Ляпунова

При  $0 < \sigma < 1$  введем в рассмотрение функцию

$$V(l, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^y (\sin(l - \sigma \sin l)) dl. \quad (11.25)$$

Найдем производную этой функции в силу системы (11.14)

$$\dot{V} = y \oplus \dot{y} + (\sin l - \sigma \sin l) \cdot = y(\sigma - \sin l - \sigma \sin l) + (\sin l - \sigma \sin l)y = -l y^2 \leq 0. \quad (11.26)$$

Из (11.26) следует, что вдоль траекторий системы (11.14) при увеличении времени  $l$  линии уровня  $V(l, y) = C = \text{const}$  убывают. Заметим, что условие

$\dot{V}|_{y=0} = 0$  не нарушает этого свойства. В точках пересечения линий уровня

$(V)l, y = C$  с прямой  $y=0$  траектории системы (11.14), хотя и касаются этих

линий, но продолжают свое движение в сторону их убывания. Рассмотрим вид линий уровня функции  $V(l, y)$  на фазовом цилиндре, который, очевидно,

зависит от параметра  $\sigma$ .

**Пусть  $\sigma = 0$ .** В этом случае линии уровня качественно имеют вид интегральных кривых, представленных на рис. 11.2а. Действительно, функция  $V(l, y)$  совпадает с полной энергией осциллятора (11.14), при  $l = 0$  (сравните

(11.25) и (11.15)). Свойства представленных на рис. 11.2(а), линий уровня и неравенство (11.26) показывают, что функция  $\Psi(u)$  является  $2\pi$ -

периодической функцией Ляпунова (лекция 4). Следовательно, при  $\odot = 0$  система (11.14) является глобально асимптотически устойчивой (рис. 11.4а). Все траектории системы (11.14), за исключением двух устойчивых сепаратрис седла  $O_2$ , асимптотически стремятся к устойчивому состоянию равновесия  $O_1$ .

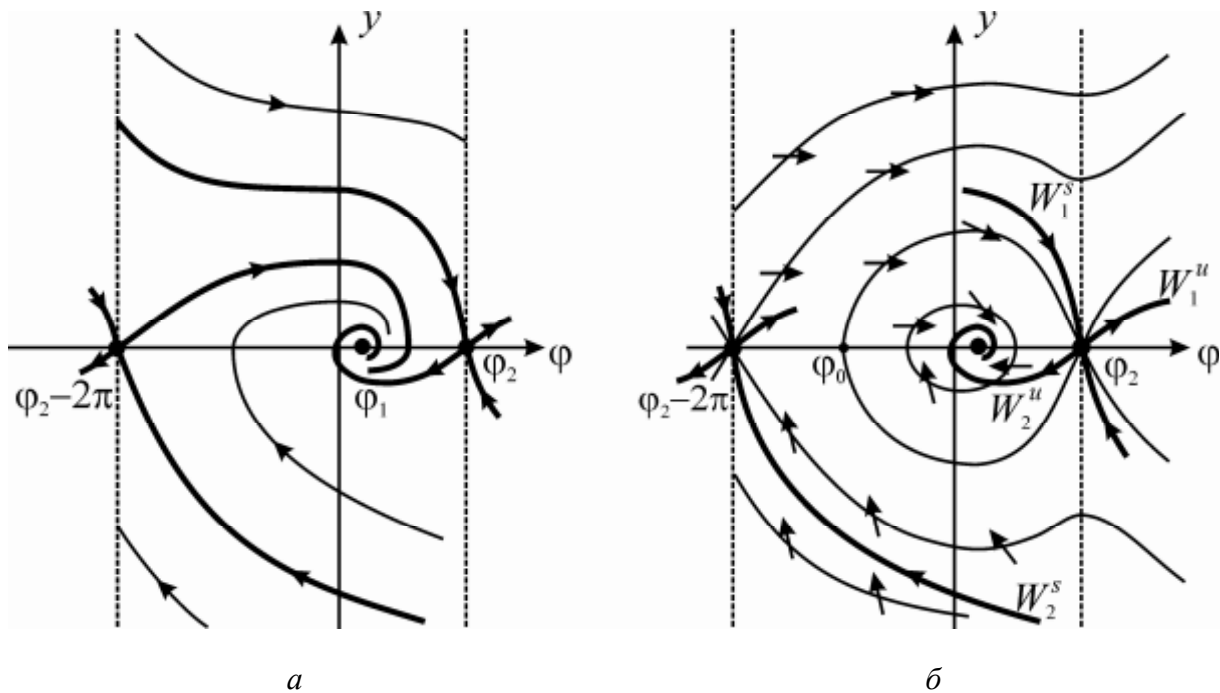


Рис. 11.4. Качественный фазовый портрет системы (11.14) при  $\odot = 0$  (а) и качественный вид линий уровня  $V(\Pi, y) = C$  при  $0 < \odot < 1$  с ориентацией векторного поля (11.14) на них (б).

Заметим, что на рис. 11.4а состояние равновесия  $O_1$  для определенности изображено в случае, когда оно устойчивый фокус, хотя, конечно,  $O_1$  может быть и устойчивым узлом, если  $\lfloor > 2$  (см. рис. 11.3(а)).

**При**  $0 < \odot < 1$  функция  $V(\Pi, y)$  теряет свойство  $2\pi$ -периодичности. Однако, траектории системы (11.14) по-прежнему пересекают линии уровня  $( ) V(\Pi, y) = C$  в одну сторону, что позволит, как будет показано ниже, получить

ряд их важных нелокальных свойств. На рис. 11.4б представлены некоторые линии уровня функции  $V(\Pi, y)$ , а стрелками показана ориентация векторного поля (11.14) на них. Рассмотрим линии уровня функции  $V(\Pi, y)$ , удовлетворяющие условию  $C < C_s$ , где константа  $C_s$  определяет линию уровня, проходящую через седло  $O_2$ , т.е.

$$C_s = \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} (\sin \lfloor - \odot) d\lfloor.$$

Все линии уровня при  $C < C_s$  являются замкнутыми и, следовательно,  $V(\Pi, y)$  - функция Ляпунова в  $\wedge^+$ , где

$$\wedge^+ = \{ \Pi, y \mid V(\Pi, y) < C_s, \Pi_0 < \Pi < \Pi_2 \},$$

а  $\Pi_0$  - наименьший корень уравнения  $\cos \Pi + \odot \Pi = \cos \Pi_2 + \odot \Pi_2$  (см. рис. 11.4б). Следовательно, система (11.14) не имеет предельных колебательных циклов, целиком расположенных в области  $\wedge^+$ . Все траектории с начальными

условиями на границе этой области, за исключением седла  $O_2$ , асимптотически приближаются к состоянию равновесия  $O_1$ , целиком оставаясь в  $\wedge^+$ . Более того, неустойчивая сепаратриса  $W_2^u$  также выходит в эту область и стремится к  $O_1$ , оставаясь в  $\wedge^+$  при всех значениях параметров. Рассмотрим теперь поведение сепаратрисы  $W_2^s$ . Прежде всего, заметим, что коэффициент  $k_2$ , характеризующий наклон  $W_2^s$  в седле  $O_2$ , удовлетворяет условию

$$k_2|_{y>0} < k_2|_{y=0}. \quad (11.27)$$

В силу (11.27) сепаратриса  $W_2^s$  в окрестности точки  $O_2$  расположена при  $y < 0$  ниже линии уровня  $V(\Pi, y) = C_s$ . С другой стороны, при  $y < 0$  траектории пересекают эту линию уровня всегда в одну сторону – в сторону возрастания координаты  $y$  (рис. 11.4б). Следовательно, сепаратриса  $W_2^s$  на фазовом цилиндре всегда расположена ниже линии  $V(\Pi, y) = C_s$ . Поскольку  $V(\Pi, y) = C_s$  уходит при  $y < 0$  в бесконечность, то она обязательно пересечет прямую  $y = \frac{\odot \Pi_1}{\Gamma}$ , т.е. границу поглощающей области  $G^+$ . Отсюда и установленный

выше свойств сепаратрисы  $W_2^s$  следует, что она также пересечет границу области  $G^+$  при  $y < 0$ . Таким образом, **при всех значениях параметров сепаратриса  $W_2^s$  целиком расположена на фазовом цилиндре при  $y < 0$  и пересекает границу поглощающей области.** Более того, такое поведение сепаратрисы  $W_2^s$  автоматически означает отсутствие у системы (11.14) вращательных (т.е. охватывающих цилиндр) предельных циклов целиком расположенных при  $y < 0$ .

Из существования функции  $V(\Pi, y)$  следует еще одно важное свойство системы (11.14) – отсутствие колебательных предельных циклов. Действительно, колебательный предельный цикл должен охватывать состояние равновесия  $O_1$  и, следовательно, пересекать отрезок

$$l_K = \{ y = 0, \Pi_1 < \Pi < \Pi_2 \}, \text{ (рис. 11.4б). С другой стороны, } l_K \subset \wedge^+ \text{ и поэтому}$$

все стартовые с него траектории асимптотически стремятся к состоянию равновесия  $O_1$ . Отсюда и вытекает отсутствие у системы (11.14) колебательных предельных циклов.

Выше было показано, что при  $\odot = 0$  система (11.14) является глобально асимптотически устойчивой. Покажем, используя свойства функции  $V(\Pi, y)$ ,



что система (11.14) глобально асимптотически устойчива в некоторой области параметров и при  $\omega > 0$ . Рассмотрим уравнение границы области  $\Lambda^+$ , расположенной при  $y > 0$ . Из (11.25) имеем

$$y = \sqrt{2C_s \int_0^{\pi} (\sin \varphi - \omega) d\varphi} \quad (11.28)$$

Нетрудно видеть, что максимальное значение функции (11.28) достигается при  $\pi = \pi_1$  и оно равно

$$y = \sqrt{2C_s}.$$

Потребуем, чтобы

$$\sqrt{2C_s} > \frac{1+\omega}{L}, \quad (11.29)$$

т.е. чтобы граница области  $\Lambda^+$  выходила за поглощающую область  $G^+$ . Если неравенство (11.29) выполняется, сепаратриса  $W_1^s$  также пересекает прямую  $y = \frac{1+\omega}{L}$ , поскольку всегда расположена при  $y > 0$  над областью  $G^+$  (см. рис. 11.4б). Следовательно, при выполнении (11.29) сепаратриса  $W_1^s$  «соединяет» верхнюю границу поглощающей области  $G^+$  с седлом  $O_2$ . Очевидно, что при таком расположении  $W_1^s$  система (11.14) не может иметь вращательных предельных циклов при  $y > 0$ , а неустойчивая сепаратриса  $W_1^u$  асимптотически приближается к состоянию равновесия  $O_1$ . Отсюда и из отсутствия у системы (11.14) колебательных и вращательных циклов при  $y < 0$  вытекает глобальная асимптотическая устойчивость системы (11.14) при выполнении (11.29). Решая неравенство (11.29), находим

$$L > \frac{1+\omega}{\sqrt{4\sqrt{1-\omega^2} + 4\omega \arcsin \omega + 2\omega}}. \quad (11.30)$$

Следовательно, система (11.14) является глобально асимптотически устойчивой, для значений параметров из области

$$\omega^+ = \left[ \frac{1}{2}, \omega \mid 0 < \omega < 1, \right. \quad \left. L > \frac{1+\omega}{\sqrt{4\sqrt{1-\omega^2} + 4\omega \arcsin \omega + 2\omega}} \right]^{1/2}.$$

Заметим, что для этой области параметров система (11.14) имеет фазовый портрет качественно подобный представленному на рис. 11.4а.

Совершенно аналогично доказательству отсутствия у системы (11.4) колебательных предельных циклов можно показать, что она не имеет петель сепаратрис колебательного типа.





### 11.3.2.г. Кривые без контакта и управляющие «русла» для сепаратрис

В этом разделе мы покажем, как с помощью достаточно простых кривых, однако обладающих определенной ориентацией векторного поля системы (11.14) на них, можно изучить нелокальные свойства сепаратрис седла  $O_2$  и седло-узла  $O_0$ . Эти свойства вместе с другими, ранее установленными, результатами позволят в некоторых случаях полностью установить качественное разбиение фазового цилиндра  $G$  на траектории. Построим на фазовой плоскости управляющие «русла», контролирующие нелокальное расположение сепаратрис седла  $O_2$  и седло-узла  $O_0$ . Эти русла будем строить с помощью так называемых кривых без контакта – кривых, пересекаемых траекториями трансверсально.

Для удобства будем рассматривать поведение траекторий системы (11.14) при  $y > 0$  на развертке фазового цилиндра  $G$ , расположенной при  $\Pi \in [\Pi_2 - 2\pi, \Pi_2]$ .

Пусть  $0 < \epsilon < 1$ . Введем в рассмотрение функцию

$$W_1(\Pi, \epsilon) = y \sqrt{2F_1(\Pi)},$$

где

$$F_1(\Pi) = \cos \Pi \cos(\Pi_2 - 2\pi) + \epsilon \Pi \Pi_2 + 2\pi.$$

Нетрудно видеть, что функция  $F_1(\Pi)$  определена при всех  $\Pi \in \Pi_2 - 2\pi$  и, более того,  $F_1(\Pi) \geq 0$  при этих значениях  $\Pi$ . Следовательно, функция  $W_1(\Pi, y)$  также определена для этих  $\Pi$ . Производная функции  $W_1(\Pi, y)$  в силу системы (11.14) на кривой  $W_1(\Pi, y) = 0$  при  $\Pi > \Pi_2$  удовлетворяет условию

$$\dot{W}_1|_{W_1=0} = \epsilon \sin \Pi \left[ y \frac{dF_1}{d\Pi} \right]_{W_1=0} = -\sqrt{2F_1(\Pi)} < 0. \quad (11.31)$$

В силу (11.31) траектории системы (11.14) при  $\Pi \in \Pi_2 - 2\pi$  пересекают  $W_1(\Pi, y) = 0$  без контакта в сторону области фазового цилиндра, где выполняется неравенство  $W_1(\Pi, y) < 0$ . Введем теперь вторую функцию

$$W_2(\Pi, y) = y \sqrt{2F_2(\Pi)},$$

где

$$F_2(\Pi) = \cos \Pi \cos \Pi_2.$$

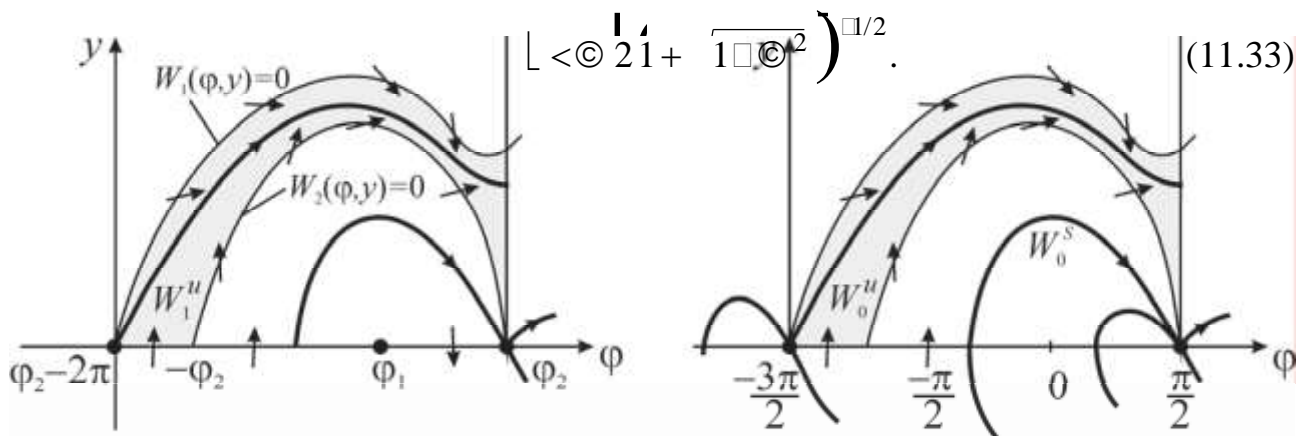
Функция  $K_2(\Pi)$ , а, следовательно,  $\Pi$  и  $W_2(\Pi, y)$  определены при  $\Pi \in [\Pi_2, \Pi_2]$ . Найдем производную функции  $W$   $\Pi, y$  в силу системы (11.14) на кривой  $W_2(\Pi, y) = 0$  при  $\Pi \in (\Pi_2, \Pi_2)$ .

$$\dot{W}_2|_{W_2=0} = \left( \sin \Pi \left[ y \frac{dF_2}{d\Pi} \right] - \frac{d\Pi}{\sqrt{2F_2(\Pi)}} \right) \Big|_{W_2=0} = \left( \sin \Pi \sqrt{2F_2(\Pi)} \right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\dot{W}_2(\Pi, y) \Big|_{W_2=0} = \sqrt{2F_2(\Pi)} \varepsilon \left( \sin \Pi \sqrt{2(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})} \right). \quad (11.32)$$

Из (11.32) следует, что  $\dot{W}_2(\Pi, y) > 0$ , если



а

б

Рис. 11.5. Качественный вид направляющих русел для сепаратрис: седла (а) и седло-узла (б).

Следовательно, при выполнении (11.33) траектории системы (11.14) пересекают кривую  $W_2(\Pi, y) = 0$  в сторону области фазового цилиндра  $G$ , где  $W_2(\Pi, y) > 0$ . На

рис. 11.5а представлен качественный вид управляющего русла для неустойчивой сепаратрисы  $W_1^u$  седла  $O_2$  - область, заключенная между кривыми  $W_i(\Pi, y) = 0$ , выделенная серым тоном. Поскольку сепаратриса  $W_1^u$  выходит из седла  $O_2$ , касаясь прямой с наклоном  $k_1$ , а касательная в седле  $O_2(\Pi_2 \in \Pi_2, 0)$  к кривой  $y = \sqrt{2F_1(\Pi)}$  имеет наклон

$$\left(1\Box\odot^2\right)^{1/4}>k_1,$$

то сепаратриса  $W_1^u$  локально ориентирована внутрь управляющего русла (см. рис. 11.5а). Далее сепаратриса  $W_1^u$  целиком остается в этом русле, поскольку на его границе векторное поле (11.14) ориентировано внутрь. В силу первого уравнения системы (11.14) в направляющем русле выполняется неравенство  $\dot{\Pi} > 0$  и, следовательно, сепаратриса  $W_1^u$ , двигаясь по руслу, пересечет прямую

$\Pi = \Pi_2$  в некоторой точке с положительной ординатой (рис. 11.5а).

Рассмотрим теперь поведение сепаратрисы  $W_1^s$  при  $y > 0$ . Поскольку касательная к  $W_1^s$  в седле  $(O_2, \Pi = \Pi_2, 0)$  имеет наклон  $k_1$ , а касательная к кривой  $W_2(\Pi, y) = 0$  в этой точке вертикальна, то  $W_1^s$  локально расположена ниже кривой  $W_2(\Pi, y) = 0$ . Сепаратриса  $W_1^s$  и далее остается ниже кривой  $W_2(\Pi, y) = 0$ , так как траектории системы (11.14) пересекают ее в сторону  $W_2(\Pi, y) > 0$  (рис. 11.5а) и поэтому при  $y > 0$  сепаратриса  $W_1^s$  не может иметь общих точек с  $W_2(\Pi, y) = 0$ . При этом, принимая во внимание ориентацию поля (11.14) на прямой  $y = 0$ , устанавливаем, что сепаратриса  $W_1^s$  уходит в область  $y < 0$ , пересекая прямую  $\Pi = \Pi_1$  в точке с положительной ординатой (рис. 11.5а). **Таким образом, с помощью кривых без контакта установлено нелокальное поведение сепаратрис  $W_1^u$  и  $W_1^s$  и их взаимное расположение при выполнении условия (11.33).**

Все представленные выше рассуждения справедливы и **в случае**  $\odot = 1$ . В этом случае  $W_i(\Pi, y) = 0$ ,  $i = 1, 2$  также являются кривыми без контакта и контролируют положение на фазовом цилиндре сепаратрисы  $W_0^u$  и траектории  $W_0^s$ , определяющей границу устойчивой узловой области в области  $y > 0$  седло-узла  $O_0$ . (см. рис. 11.5б). Следовательно, при условии (11.33) сепаратриса  $W_0^u$  расположена на фазовом цилиндре выше траектории  $W_0^s$ .

Покажем теперь, что на плоскости параметров  $(\odot, \dot{\Pi})$  существует область, для точек которой устойчивая и неустойчивая сепаратрисы седла  $O_2$  (седло-узла  $O_0$ ) имеют взаимное расположение сепаратрис противоположное, представленному на рис. 11.5.

**При**  $0 < \odot < 1$  введем функцию

$$W_3(\Pi, y) = y + \frac{\dot{\Pi}}{2}(\Pi - \Pi_2),$$

имеющую производную в силу системы (11.24) следующего вида

$$\dot{W}_3|_{W_3=0} = \dot{\Pi}(\sin \Pi - \odot) + \frac{\dot{\Pi}^2}{4}(\Pi - \Pi_2) \quad (11.34)$$

Легко видеть, что при  $\dot{\Pi} \in 2$  имеет место неравенство

$$\dot{W}_3|_{W_3=0} < 0, \quad \text{при } \Pi < \Pi_2. \quad (11.35)$$

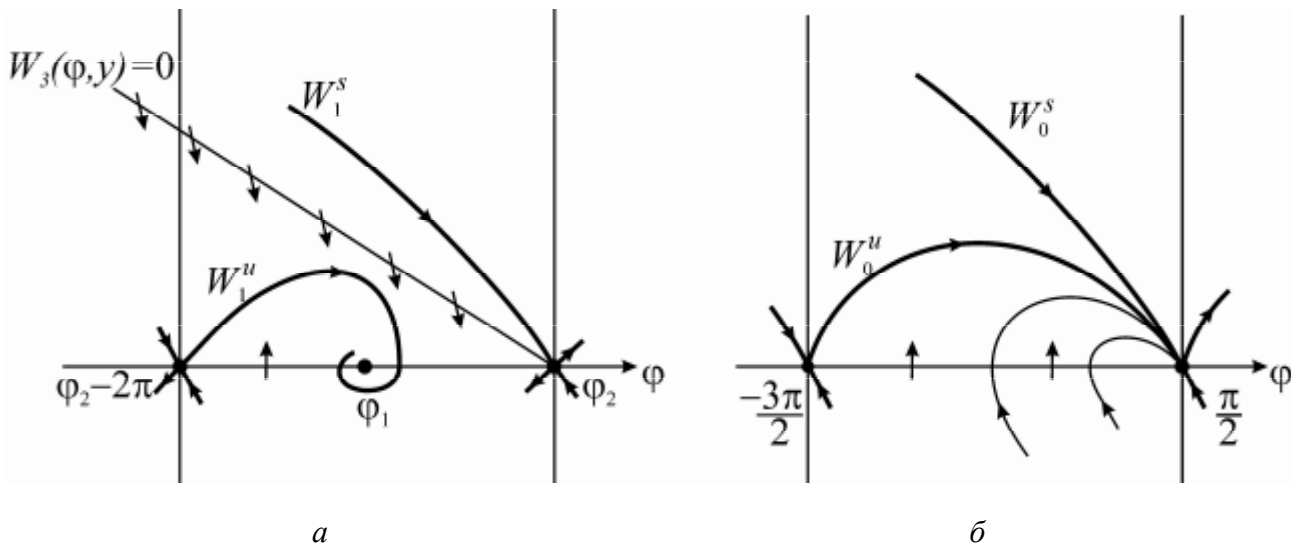


Рис. 11.6. Прямая без контакта  $W_3(\Pi, y) = 0$  и взаимное расположение сепаратрис седла для значений параметров из области  $\{\omega < 1, \ell \in 2\}$  (а). Фазовый портрет системы (11.14) для параметров из области  $\{\omega = 1, \ell \in 2\}$  (б).

Из (11.35) следует, что при  $y > 0$  траектории системы (11.14) пересекают прямую  $W_3(\Pi, y) = 0$  без контакта в сторону  $W_3(\Pi, y) < 0$  (рис. 11.6а). В свою очередь из существования такой прямой без контакта вытекает отсутствие у системы (11.14) вращательных предельных циклов в области  $y > 0$ . Действительно, если бы такие циклы существовали, они должны были бы пересечь прямую  $W_3(\Pi, y) = 0$  в сторону  $W_3(\Pi, y) > 0$ , что противоречит неравенству (11.35). Кроме того, из-за существования безконтактной прямой  $W_3(\Pi, y) = 0$  сепаратриса  $W_1^u$  пересекает первый раз ось абсцисс в точке с координатой  $\Pi > \Pi_1$ , принадлежащей области  $\wedge^+$  (см. раздел 11.3.2.6). С другой стороны,  $\wedge^+$  принадлежит области притяжения состояния равновесия  $O_1$  и, следовательно, в этом случае сепаратриса  $W^u$  при  $\square \rightarrow +\square$  асимптотически приближается к  $O_1$ .

Рассмотрим теперь поведение устойчивой сепаратрисы  $W_1^s$ . Сепаратриса  $W_1^s$  стремится в  $O_2$ , имея в этой точке наклон касательной, удовлетворяющей условиям

$$k_1 < \square \frac{\ell}{2} < 0.$$

Отсюда вытекает, что в окрестности  $O_2$  сепаратриса  $W_1^s$  расположена над прямой  $W_3(\Pi, y) = 0$ . Такое взаимное расположение сепаратрисы  $W_1^s$  и прямой  $W_3(\Pi, y) = 0$  сохраняется и при всех других значениях  $\Pi$ , поскольку в силу



(11.35) они не могут иметь общих точек (рис. 11.6а). Из установленного поведения сепаратрис  $W_1^u$  и  $W_1^s$ , а также сепаратрис  $W_2^u$  и  $W_2^s$  (см. раздел 11.3.2.в) следует, что для значений параметров из области

$$\otimes_2^+ = \{ \lfloor, \odot \mid \lfloor \in 2, 0 < \odot < 1 \}$$

система (11.14) является глобально асимптотически устойчивой и имеет качественный фазовый портрет, представленный на рис. 11.4а.

Представленное выше исследование легко переносится с помощью функции  $W_2$   $\Pi, y = 0$  на случай  $\odot = 1$  (предлагаем читателю выполнить такое исследование самостоятельно). В этом случае для значений параметров из области

$$\otimes_0^\square = \{ \lfloor, \odot \mid \lfloor \in 2, \odot = 1 \}$$

сепаратриса  $W_0^u$  седло-узла  $O_0$  приходит в его узловую область и при  $\lfloor \rightarrow +\square$  асимптотически стремится к  $O_0$  (рис. 11.6б). Заметим, что в этом случае сепаратриса  $W_0^u$  охватывает цилиндрическую поверхность  $G^+$  и образует гомоклиническую орбиту (петлю сепаратрис седло-узла).

#### 11.3.2.д. Гомоклинические орбиты и их бифуркации

Напомним, что гомоклиническими орбитами систем на плоскости называются траектории двоякоасимптотические  $\lfloor \square \pm \square$  к седлу или к седло-узлу (лекции 9,10).

**Существование гомоклинической орбиты седла.** В разделе 11.3.2.3. мы установили, что система (11.14) не имеет гомоклинических орбит колебательного типа и, если такие траектории существуют, то они должны быть вращательными, т.е. охватывающими  $G^+$ . Поскольку при всех рассматриваемых параметрах неустойчивая сепаратриса  $W_2^u$  при  $\lfloor \square \rightarrow +\square$  асимптотически стремится к устойчивому состоянию равновесия  $O_1$ , а устойчивая сепаратриса  $W_2^s$  пересекает границу в области  $G^+$  и целиком расположена при  $y < 0$  (см раздел 11.3.2.в), то гомоклинические орбиты могут формироваться лишь двумя оставшимися сепаратрисами  $W_1^u$  и  $W_1^s$ . Рассмотрим поведение этих сепаратрис при различных значениях параметров. Для характеристики их взаимного расположения введем функцию расщепления. На рис. 11.7а изображена развертка фазового цилиндра  $G^+$ , на которой качественно представлены изоклины горизонтальных  $\lfloor y = \frac{\odot \square \sin \Pi}{\lfloor \square}$  и вертикальных наклонов ( $y = 0$ ).

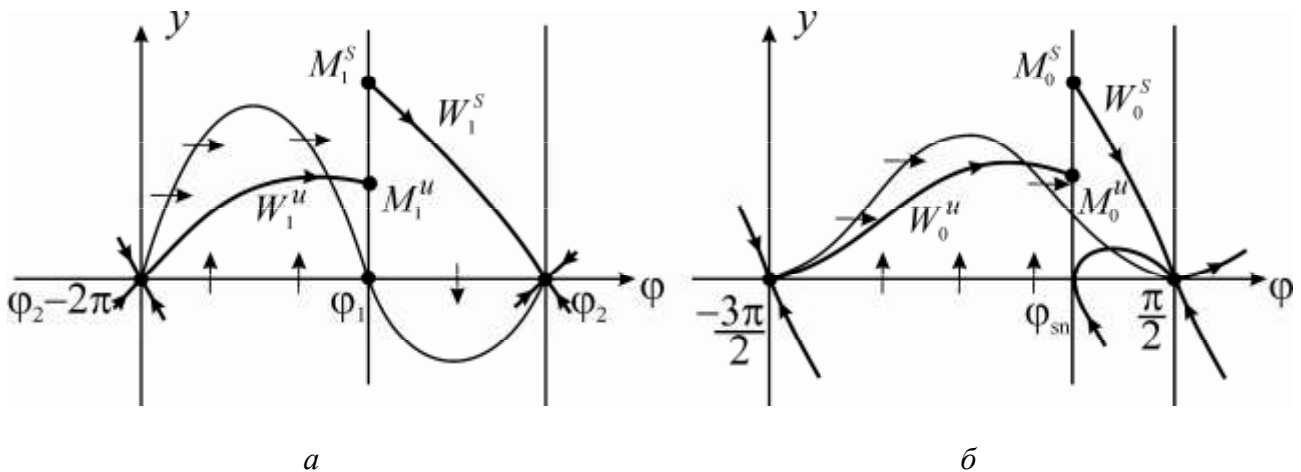


Рис. 11.7. Взаимное расположение сепаратрис  $W_1^u$  и  $W_1^s$  (а). Взаимное расположение неустойчивой сепаратрисы  $W_0^u$  и устойчивой траектории  $W_0^s$  седло-узла (б).

Принимая во внимание ориентацию векторного поля системы (11.14) на этих линиях, получаем, что сепаратриса  $W^u$  всегда пересекает прямую  $\{\Pi = \Pi_1\}$  в некоторой точке  $M_u(\Pi_1, y_u)$ , а  $W^{ls}$  - в точке  $M_s(\Pi_1, y_s)$ , где  $y^s, y^u > 0$ . Введем в рассмотрение функцию расщепления

$$\mathbb{R}_s(\mathbb{L}, \odot) = y^s \square y^u. \quad (11.36)$$

Заметим, что  $\mathbb{R}_s(\mathbb{L}, \odot)$  является **функцией параметров**, а не переменных. Поскольку точки  $M_u^u, M_s^s$  существуют при всех рассматриваемых параметрах, то  $\mathbb{R}_s(\mathbb{L}, \odot)$  - непрерывная функция своих аргументов. Более того, она является

монотонно-возрастающей функцией параметра  $\mathbb{L}$ , т.е.  $\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbb{L}} > 0$ . Действительно, в силу системы (11.14) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{L}} \left[ \frac{dy}{d\mathbb{L}} \right] = 1. \quad (11.37)$$

Из (11.37) вытекает, что

$$\frac{\partial y_1^u}{\partial \mathbb{L}} < 0, \quad \frac{\partial y_1^s}{\partial \mathbb{L}} > 0. \quad (11.38)$$

Из неравенств (11.38) и следует монотонный рост функции  $\mathbb{R}_s(\mathbb{L}, \odot)$  при увеличении  $\mathbb{L}$ .

Рассмотрим свойства функции  $\mathbb{R}_s(\mathbb{L}, \odot)$  для различных значений параметров. Из свойств траекторий, установленных в разделах 11.3.2.в и 11.3.2.г вытекает, что



$$\begin{aligned} \mathbb{R}_s(\lambda, \epsilon) &> 0, \quad \text{если } (\lambda, \epsilon) \in \mathbb{X}^+ = \mathbb{X}_1^+ * \mathbb{X}_2^+ \\ \mathbb{R}_s(\lambda, \epsilon) &< 0, \quad \text{если } (\lambda, \epsilon) \in \mathbb{X}^-, \end{aligned} \quad (11.39)$$

где (см. формулу (11.33))

$$\mathbb{X}^\pm = \{(\lambda, \epsilon) \mid 0 < \lambda < \epsilon^2, 0 < \epsilon < 1\}.$$

Зафиксируем параметр  $\epsilon$  из интервала  $(0,1)$  и будем увеличивать параметр  $\lambda$  от значений из области  $\mathbb{X}^-$  к области  $\mathbb{X}^+$ . При таком изменении монотонно-возрастающая непрерывная функция  $\mathbb{R}_s(\lambda, \epsilon)$  меняет знак и, следовательно, существует единственное значение параметра  $\lambda$ , удовлетворяющее уравнению

$$\mathbb{R}_s(\lambda, \epsilon) = 0$$

Обозначим это значение через  $\lambda^*(\epsilon)$ . Следовательно, на плоскости  $(\epsilon, \lambda)$  существует бифуркационная кривая  $\lambda = \lambda^*(\epsilon)$ , соответствующая

существованию гомоклинической орбиты вращательного типа, образованной сепаратрисами  $W_1^u$  и  $W_1^s$ . При пересечении такой бифуркационной кривой, гомоклиническая орбита разрушается (см. лекцию 9), и на фазовом цилиндре  $G^+$  рождается вращательный предельный цикл, устойчивость которого определяется седловой величиной

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – характеристические показатели седла  $O_2$  (см. лекцию 8, соотношение (8.8)). В случае системы (11.14) седловая величина  $\sigma = \lambda_1$  и, следовательно, предельный цикл является устойчивым и существует при значениях параметров из окрестности кривой  $\lambda = \lambda^*(\epsilon)$ , для которой  $\mathbb{R}(\lambda, \epsilon) < 0$ . При этом сепаратриса  $W_1^u$  асимптотически приближается к циклу.

**Существование гомоклинической орбиты седло-узла.** Для характеристики взаимного расположения неустойчивой сепаратрисы  $W_0^u$  и устойчивой траектории  $W_0^s$  седло-узла  $O_0$  введем функцию расщепления  $\mathbb{R}_{sn}(\lambda)$ . Для этого выберем в качестве секущей полупрямую  $\{\lambda = \lambda_{sn}, y > 0\}$ , где  $0 < \lambda_0 < \lambda_{sn} < 1$ . Принимая во внимание расположение на  $G^+$  изоклин горизонтальных и вертикальных наклонов, устанавливаем, что при всех  $\lambda$  сепаратриса  $W_0^u$  пересекает прямую  $\lambda = \lambda_{sn}$  в некоторой точке

$M_0^u(\lambda_{sn}, y_0^u)$ , где  $y_0^u > 0$  (см. рис. 11.7б). С другой стороны, поскольку касательные к траектории  $W_0^s$  в точке  $O_0$  имеют наклон  $k_2 = \lambda < 0$ , то  $W_0^s$



также пересекает  $\{\Pi = \Pi_{sn}\}$  в некоторой точке  $M_0^s (\Pi = \Pi_{sn,0} y^s)$  (рис. 11.76), где  $y^s > 0$ . Введем функцию расщепления седло-узла  $O_0$  как

$$\mathbb{R}_{sn}(\mathbb{L}) = y_0^s \square y_0^u.$$

Функция  $\mathbb{R}_{sn}(\mathbb{L})$  является непрерывной и монотонно-возрастающей функцией (см. (11.37)). Заметим, что для значений параметров из области  $\otimes_0$  функция  $\mathbb{R}_{sn}(\mathbb{L}) > 0$ . Несмотря на это, для всех  $\mathbb{L} \square \otimes_0$  существует гомоклиническая

орбита вращательного типа, образованная сепаратрисой  $W_0^u$  асимптотически стремящейся к состоянию равновесия  $O_0$  (рис. 11.6) по его узловой области. Другими словами, функция  $\mathbb{R}_{sn}(\mathbb{L})$  характеризует взаимное расположение  $W_0^u$  и «крайней» траектории  $W_0^s$ , ограничивающей узловую область. В разделе 11.3.2г показано, что при  $\mathbb{L} < \odot / \sqrt{2}$  (см. (11.33)) сепаратриса  $W_0^u$  расположена над траекторией  $W_0^s$  (рис. 11.56). Поэтому

$$\mathbb{R}_{sn}(\mathbb{L}) < 0, \text{ если } \mathbb{L} < \odot / \sqrt{2}. \quad (11.40)$$

Таким образом, непрерывно-возрастающая функция  $\mathbb{R}_{sn}(\mathbb{L})$  меняет знак и, следовательно, существует единственное значение  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0$ , удовлетворяющее условию

$$\mathbb{R}_{sn}(\mathbb{L}_0) = 0. \quad (11.41)$$

При  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0$  на фазовом цилиндре  $G^+$  существует вращательная гомоклиническая орбита (петля сепаратрисы), образованная траекториями  $W_0^u$  и  $W_0^s$ . Это бифуркация коразмерности 2, поскольку она существует при одновременном выполнении двух бифуркационных условий -  $\odot = 1$  и (11.41). Заметим, что при  $\mathbb{L} > \mathbb{L}_0$  система (11.14) имеет качественный фазовый портрет, представленный на рис. 11.6б, а при  $\mathbb{L} < \mathbb{L}_0$  - на рис. 11.5б. Следовательно, полупрямая  $\{\odot = 1, \mathbb{L} > \mathbb{L}_0\}$  является бифуркационным множеством коразмерности 1, соответствующем существованию вращательной гомоклинической орбиты седло-узла. При пересечении этой полупрямой в сторону  $\odot > 1$ , гомоклиническая орбита разрушается и из нее рождается устойчивый предельный цикл вращательного типа, так как ненулевой собственное значение седло-узла  $\mathbb{L}_0 = \square \mathbb{L} < 0$  (см. лекцию 10).

### 11.3.2.е. Предельные циклы и бифуркационная диаграмма

Выше мы установили существование гомоклинических орбит седла и седло-узла и показали, что при их разрушении рождается вращательные устойчивые предельные циклы. Установим теперь как долго они продолжают существовать при изменении параметров, т.е. области параметров, для значений из которых эти циклы существуют.

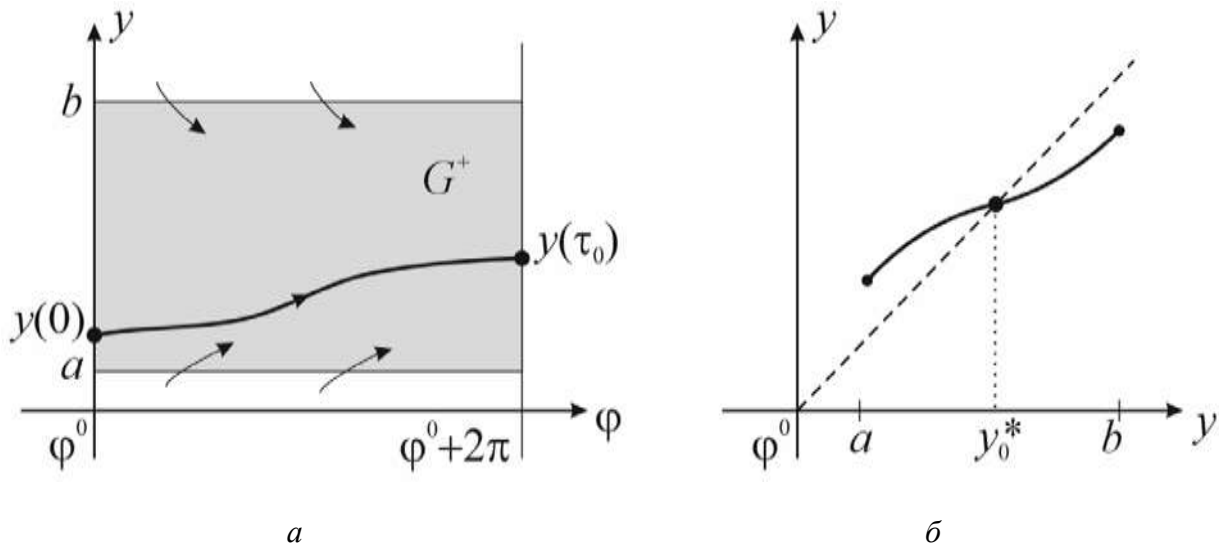


Рис. 11.8. Область  $G^+$  для значений параметров из области  $d_1$  (а); вид функции последования  $f_0(y)$  отображения  $F_0$  (б).

Прежде всего покажем, что система (11.14) имеет предельный цикл в области  $d_1 = \{\odot, \lfloor \odot > 1, \lfloor > 0\}$ . В этом случае поглощающая область  $G^+$  целиком расположена при  $y > 0$  (рис. 11.8а). Рассмотрим поведение траектории системы (11.14) с начальными условиями

$$\Pi(0) = \Pi^0 = \text{const}, y(0) \in I_0,$$

где

$$I_0 = [a, b], \quad a = \frac{1 \ominus \odot}{\lfloor}, \quad b = \frac{1 + \odot}{\lfloor}$$

Поскольку векторное поле системы (11.14) на границе  $G^+$  (прямые  $y=a$ ,  $y=b$ ) ориентировано внутрь этой области (рис. 11.8а) и для всех точек  $G^+$  выполняется неравенство  $\lfloor = y > 0$ , то эта траектория за конечное время  $t_0$  достигает прямой  $\Pi = \Pi_0 + 2\lfloor$  в точке с ординатой  $y = y(t_0)$ , где  $a < y(t_0) < b$ . ( )

Отсюда следует, в силу произвольности выбора  $y(0)$  из интервала  $I$ , что траектории системы (11.14) преобразуют любую точку интервала  $I$  в соответствующую единственную точку интервала  $I$  на прямой  $\Pi = \Pi_0 + 2\lfloor$ . В



силу тождественности прямых  $\Pi = \Pi_0$  и  $\Pi = \Pi_0 + 2\pi$  в это означает  $G^+$  существование точечного отображения Пуанкаре

$$F_0 : I_0 \rightarrow I_0, \quad (11.42)$$

порожденного траекториями системы (11.14), которое задается соотношением

$$\bar{y} = f_0(y), \quad (11.43)$$

где  $y \in I_0$ , а  $f_0(y)$  – непрерывная функция. Исследуем отображение (11.43). Принимая во внимание ориентацию векторного поля системы (11.14) на границе  $G^+$ , устанавливаем, что

$$f_0(a) > a, \quad f_0(b) < b. \quad (11.44)$$

Из (11.44) и непрерывности функции  $f_0(y)$  следует существование по крайней мере одного значения  $y = y_0^*$ , являющегося корнем уравнения

$$y = f_0(y) \quad (11.45)$$

Другими словами, отображение  $F_0$  имеет хотя бы одну неподвижную точку  $y = y_0^* \in I_0$ , которой в системе (11.14) отвечает вращательный предельный цикл. С другой стороны нетрудно показать (предлагаем читателям проделать это самостоятельно), что для системы (11.14) выполнен критерий Бендиксона-Дюлака с функцией  $B(\Pi, y) \propto 1$  (см. лекцию 7). Согласно этому критерию, если система (11.14) имеет вращательный предельный цикл в поглощающей области, то он единственный. Следовательно, функция последования  $f(y)$  на плоскости  $(y, \bar{y})$ , пересекая биссектрису в единственной точке  $y = y_0^*$  (рис. 11.8б), в которой в силу (11.44) выполняется неравенство

$$f'_0(y_0^*) < 1. \quad (11.46)$$

Неравенство (11.46) означает, что мультипликатор предельного цикла меньше единицы и он устойчив. Таким образом, в области параметров  $\odot > 1, \lfloor > 0$

**система (11.14) имеет единственный устойчивый вращательный предельный цикл, который притягивает все другие траектории.**

Рассмотрим область параметров  $d_2 = \{\odot, \lfloor \mid 0 < \odot < 1, \textcircled{R}(\odot, \lfloor) < 0\}$ . Для этих

значений параметров взаимное расположение сепаратрис  $W_1^u$  и  $W_1^s$  такое как представлено на рис. 11.9а. Нетрудно показать, используя рассуждения аналогичные предыдущему, что траектории системы (11.14) порождают отображение

$$F_1 : I_1 \rightarrow I_1,$$

где

$$I_1 = \{\Pi = \Pi_2 \pm 2\pi, 0 < y \leq b\}.$$

Отображение  $F_1$  задается соотношением

$$\bar{y} = f_1(y), \quad y \in I_1.$$

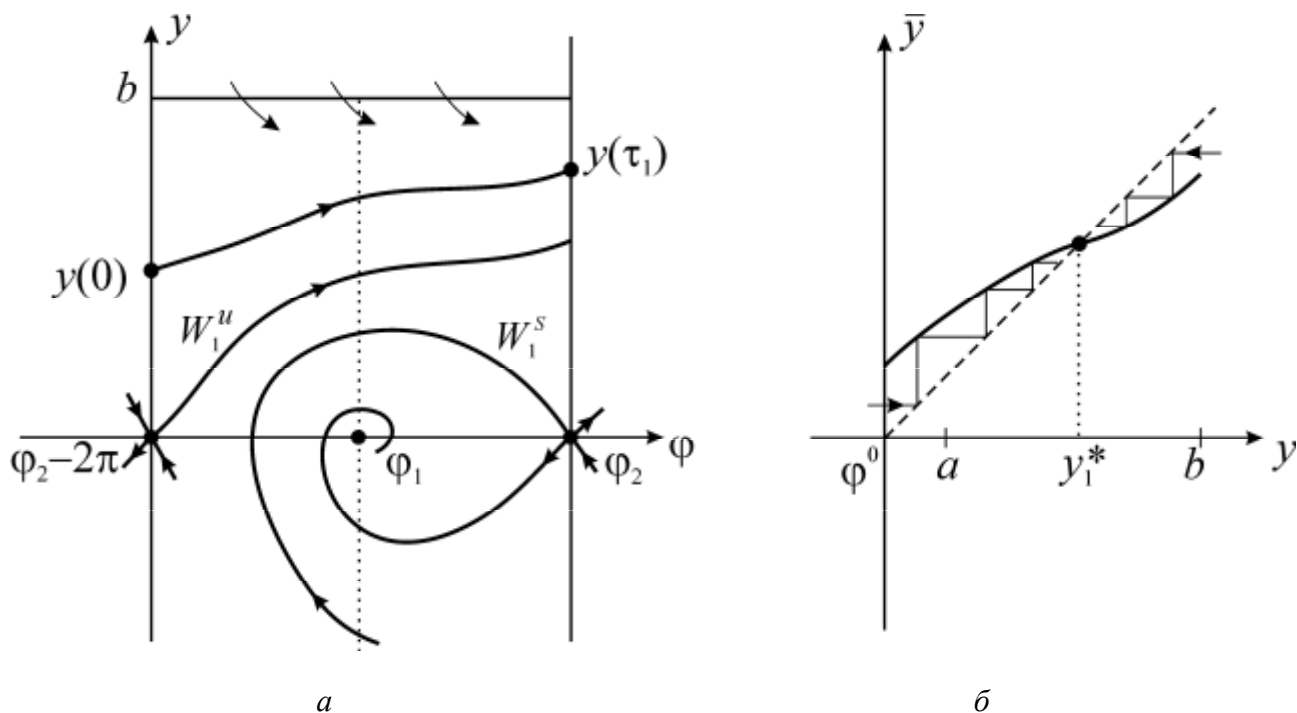


Рис. 11.9. Взаимное расположение сепаратрис  $W_1^u$  и  $W_1^s$  для точек области  $d_2$  (а); функция последования  $f_1(y)$  отображения  $F_1$  (б).

Принимая во внимание свойства траекторий системы (11.14) (рис. 11.9а), получаем, что непрерывная функция  $f_1(y)$  удовлетворяет следующим условиям (рис. 11.9б)

$$\begin{aligned} f_1(y_0) &> y_0, \text{ где } 0 < y_0 \ll 1 \\ f_1(b) &> b \end{aligned} \quad (11.47)$$

Из (11.47) и непрерывности функции последования  $f_1(y)$  вытекает существование у отображения  $F_1$  по крайней мере одной устойчивой неподвижной точки, которой отвечает в системе (11.14) устойчивый вращательный предельный цикл. Как и для значений параметров из области  $d_1$ , единственность предельного цикла вытекает из выполнения и в этом случае критерия Бендиксона-Дюлака. Следовательно, для точек области  $d_2$  на фазовом цилиндре  $G^+$  существует единственный устойчивый вращательный предельный цикл, к которому асимптотически стремится сепаратриса  $W_1^u$ .

Таким образом, разбиение области параметров  $D$  на области, соответствующие различными структурно устойчивым фазовым портретам

системы (11.14) осуществляется бифуркционной кривой  $\lambda = \lambda^*(\gamma)$  и прямой  $\gamma = 1$ . Эти бифуркационные линии делят  $D$  на три области  $d_1, d_2, d_3$  и  $d_3 = \{\gamma > 1, \lambda > 0\}$ . Для точек области  $d_3$  система (11.14) является глобально асимптотически устойчивой, а для точек области  $d_2$  - устойчивой вращательный предельный цикл сосуществует с устойчивым состоянием равновесия, область притяжения которого ограничивается устойчивыми сепаратрисами седла  $O_2$ . При значениях параметров из области  $d_1$  устойчивый вращательный предельный цикл притягивает все другие траектории.

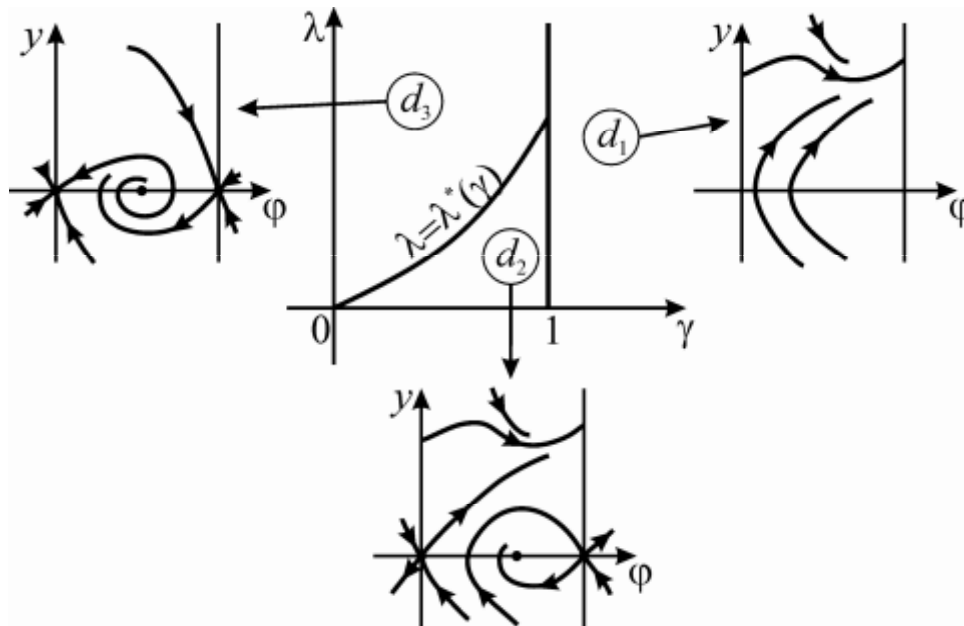


Рис. 11.10. Бифуркационная диаграмма и структурно устойчивые фазовые портреты системы (11.14).

### 11.3.3. Вольт-амперная характеристика контакта

В силу соотношения (11.10) среднее напряжение на контакте определяется следующим образом

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar}{2e} \left\langle \frac{d\Pi}{dt} \right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar I_{\max}}{d\Pi 2eC}}, \quad (11.48)$$

где

$$\left\langle \frac{d\Pi}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\Pi}{dt} dt,$$



где  $T$  – период предельного цикла. Усреднение проводится на аттракторах системы. Очевидно, что в случае состояния равновесия  $\left\langle \frac{\dot{P}}{d} \right\rangle = 0$  и  $\dot{V} = 0$ , а

В

случае предельного цикла  $\left\langle \frac{d\Pi}{dI} \right\rangle = \frac{2\pi}{T}$ . Усредненной по времени вольтамперной

характеристикой (ВАХ) Джозефсоновского контакта называется зависимость нормированного тока  $\mathbb{C} = \frac{I}{I_{\max}}$  от нормированного напряжения

$$\frac{I_{\max}}{V} = \left\langle \frac{I}{V} \right\rangle = \frac{2\pi}{T} \frac{\Pi R I_{\max}}{d} \quad (11.49)$$

Для построения качественного вида ВАХ воспользуемся результатами исследования динамики системы (11.14)

**ВАХ контакта конечной емкости.** Проведенное исследование динамики системы (11.14) показало, что рождение предельного цикла происходит по двум различным сценариям. Очевидно, что это обстоятельство находит свое отражение и в ВАХ контакта.

**Случай**  $\left[ \varepsilon \right]_* 1$ . При отсутствии тока ( $\mathbb{C} = 0$ ) система (11.14) является глобально асимптотически устойчивой и, следовательно, состояние контакта описывается устойчивым состоянием равновесия  $O_1$ . Очевидно, что в этом

случае  $\frac{d\Pi}{dI} = 0$  и падение напряжения на контакте не происходит. Такая ситуация

сохраняется и при увеличении тока до значения  $\mathbb{C} = 1$ , поскольку система

(11.14) глобально асимптотически устойчива для всех значений из области  $d_3$ . При  $\mathbb{C} = 1$  в системе (11.14) происходит бифуркация петли сепаратрис седлоузла  $O_0$ , из которой при  $\mathbb{C} > 1$  рождается вращательный предельный цикл. Период этого цикла  $T(\mathbb{C}, \left[ \varepsilon \right])$  удовлетворяет условию

$$\lim_{\mathbb{C} \rightarrow 1+0} T(\mathbb{C}, \left[ \varepsilon \right]) = +\infty.$$

Следовательно, в соответствии с соотношением (11.49) падение напряжения на контакте начинает плавно нарастать от значения  $\mathbb{C} = 1$ . С увеличением  $\mathbb{C}$  предельный цикл монотонно поднимается по цилиндрической поверхности  $G^+$ , поскольку

$$\frac{d}{d\mathbb{C}} \left[ \frac{dy}{d\Pi} \right] = \frac{1}{y} > 0, \text{ если } y > 0 \quad (11.50)$$

Поэтому в силу первого уравнения в системе (11.14) скорость изменения переменной  $\Pi$  монотонно нарастает, что приводит к монотонному уменьшению периода  $T(\mathbb{C}, \left[ \varepsilon \right])$  предельного цикла. Таким образом, с увеличением

нормированного тока  $\beta$  от  $\beta = 1$  падение напряжения на контакте монотонно возрастает и ВАХ имеет вид представленный на рис. 11.11а.

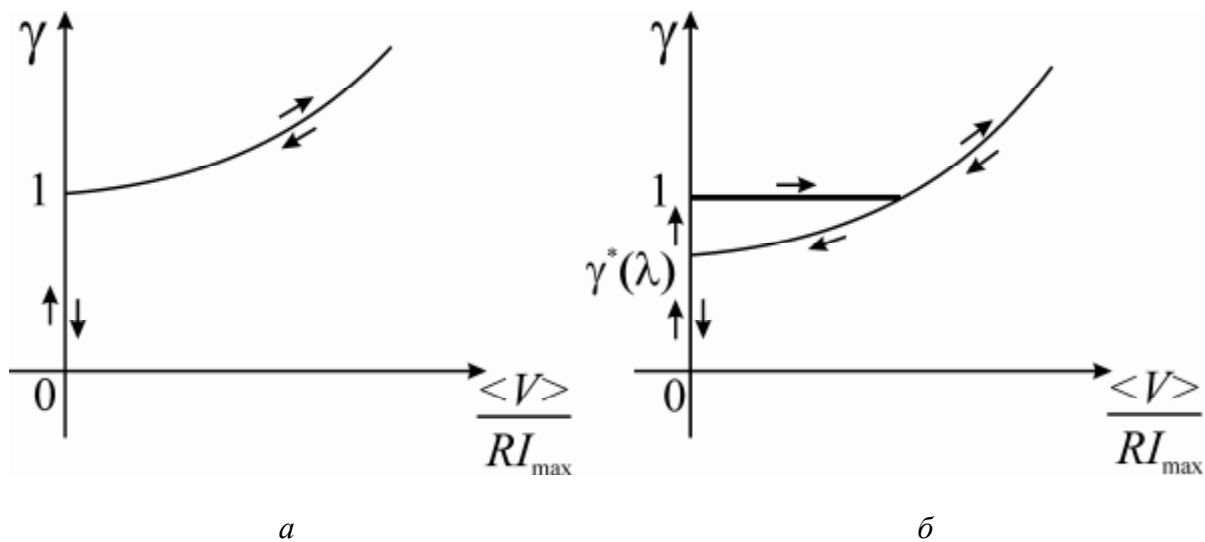


Рис. 11.11. Качественный вид ВАХ контакта конечной емкости: для значений  $\lfloor \varepsilon \rfloor^*(1)$  (а); для значения  $0 < \lfloor < \rfloor^*( )$  (б).

При уменьшении тока  $\odot$  падение напряжения на контакте монотонно убывает и становится равным нулю при  $\odot \delta 1$

**Случай  $\lfloor < \rfloor^*(1)$ .** В этом случае при увеличении тока  $\odot$  происходит последовательный переход через области  $d_3 \square d_2 \square d_1$ . (рис. 11.10). Поскольку при таком переходе устойчивое состояние равновесия  $O_1$  существует и устойчиво при всех  $\odot < 1$ , то падение напряжения на контакте не происходит до тех пор, пока ток  $\odot$  не достигнет критического значения  $\odot = 1$ . При  $\odot = 1$  в системе (11.14) образуется седло-узел  $O_0$ , который исчезает при  $\odot > 1$  и состояние контакта описывается уже вращательным предельным

циклом. В отличие от предыдущего случая этот предельный цикл появился на  $G^+$  через бифуркацию петли сепаратрис седла  $O_2$  при значении тока  $\odot = \odot^*(\lfloor) < 1$ , где  $\odot^*(\lfloor)$  - функция обратная к функции  $\lfloor^*(\odot)$ . Поэтому

к моменту достижения критического значения  $\odot = 1$ , предельный цикл уже достаточно «высоко» поднялся по цилиндрической поверхности (см. свойство (11.50)), а его период  $T(\odot, \lfloor)$  имеет некоторое конечное значение. Это приводит к тому, что напряжение на контакте появляется скачком (рис. 11.11б). Дальнейшее увеличение тока  $\odot$ , как и в предыдущем случае, приводит к монотонному росту напряжения на контакте. С уменьшением тока  $\odot$  напряжение также уменьшается, но остается конечным до тех пор, пока ток  $\odot$  не уменьшится до значения  $\odot = \odot^*(\lfloor)$ , а не до значения  $\odot = 1$ , как в предыдущем

случае. Такое поведение ВАХ объясняется тем, что в рассматриваемом случае предельный цикл в системе (11.14) рождается при значении параметра  $\odot = \odot^*(\lfloor)$  (рис. 11.11б). Таким образом, в случае  $\lfloor < \lfloor^*(1)$  ВАХ контакта имеет



принципиальной иной, чем в случае  $L \ll L^*$  (1), вид, для которого характерен гистерезис. Заметим, что при  $L \ll 0$  гистерезисный характер ВАХ становится все более полным, поскольку величина  $C^*(L) \ll 0$ .

В заключение отметим, что представленные на рис. 11.11 возможные качественные виды ВАХ, полученные на основе исследования динамики системы (11.14), нашли свое подтверждение и в реальных физических экспериментах. Интерес к исследованию и применению разнообразных устройств, основанных на эффекте Джозефсона, возникший со времен его открытия, не ослабевает и в наше время. Это связано с большими потенциальными возможностями таких контактов. Например, с использованием эффекта Джозефсона удалось измерить с очень высокой точностью (менее  $10^{-4}$  %) фундаментальную константу  $e/h$ , основываясь на том, что соотношение (11.10) связывает эту величину с хорошо измеряемыми макроскопическими величинами – частотой и напряжением. Джозефсоновские контакты применяются при построении высокочувствительных детекторов электромагнитного излучения, смесителей, параметрических усилителей и др.

#### 11.4. Контрольные вопросы и задания

1. Постройте ВАХ в случае малой емкости контакта ( $L \gg 1$ ). Для этого покажите, используя метод релаксационных колебаний, что в этом случае период предельного цикла задается следующим образом:

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{C_2 - C_1}}.$$

2. Для случая ( $L \gg 1$ ) постройте качественный вид изменения сверхтока  $I_{\max} \sin \Pi$  во времени для значения  $I/I_{\max} \gg 1$  и значения  $I/I_{\max}$ , слегка превышающего 1.
3. Покажите, что в случае  $I \gg I_{\max}$  период предельного цикла  $T = 2\pi \frac{L}{C}$ , а ВАХ контакта описывается обычным законом Ома  $\langle V \rangle = IR$ .
4. Проанализируйте возможное поведение математического маятника в вязкой среде, находящегося под действием постоянного внешнего момента. В частности, постройте эскизы мгновенных значений переменных  $\Pi(t)$  и  $y(t)$  для различных значений параметров  $L$  и  $C$ . Используйте результаты исследования динамики системы (11.14).
5. Проведите исследование динамики системы (11.14) в случае  $C < 1$ .
6. Покажите, что динамика системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с RLC-фильтром (см. лекцию 4, задача 2) описывается системой (11.14). Опишите возможные режимы работы системы ФАП.

## ЛЕКЦИЯ 12

### МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ. АВТОКОЛЕБАНИЯ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

*Укороченная система. Динамика маятниковых часов. Мягкое и жесткое возбуждение автоколебаний.*

#### 12.1. Понятие об асимптотических методах

В этой лекции мы рассмотрим один из самых известных асимптотических методов исследования нелинейных систем, использующих так называемую процедуру усреднения. Эти методы применимы к системам вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{Y}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{Y}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon),\end{aligned}\tag{12.1}$$

где  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  - некоторые векторы, а  $\varepsilon$  - малый параметр. Характерной особенностью этого класса систем является то, что переменные  $\mathbf{x}$  изменяются во времени значительно медленнее, чем переменные  $\mathbf{y}$ . Истоком асимптотических методов принято считать результаты голландского инженера Ван-дер-Поля (начало 20-х годов прошлого века), который разработал эффективный подход исследования квазилинейных систем с одной степенью свободы. Основная идея Ван-дер-Поля состояла в приведении квазилинейной системы с помощью замены переменных к виду (12.1) и аппроксимации полученной системы некоторой усредненной системой. Однако, предложенный Ван-дер-Полем метод носил интуитивный характер и не был строго обоснован. Такое обоснование было сделано в конце 20-х годов прошлого века Л.И. Мандельштамом, Н.Д. Папалекси и А.А. Андроновым. Дальнейшее развитие и обоснование асимптотических методов исследования нелинейных систем связано с именами Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, В.В. Волосова и др. Отправным положением этих исследований является предложенный Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым общий подход исследования систем вида (12.1). Основная их идея состояла в процедуре построения замены переменных, с помощью которой быстрые и медленные переменные отделялись бы друг от друга. При этом решение системы (12.1) имеет вид асимптотического ряда, первый член которого совпадает с представлением, полученным методом Ван-дер-Поля.

Рассмотрим метод Ван-дер-Поля. Мы не будем давать его строгого обоснования, а изложим основные идеи и положения, ограничиваясь простыми рассуждениями, подтверждающими справедливость метода.

### 12.1.1. Приведение системы к стандартному виду

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}), \quad (12.2)$$

которое представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + f(x, y), \end{cases} \quad (12.3)$$

где  $0 < \epsilon \ll 1$ . Без ограничения общности будем считать, что система (12.3) имеет состояние равновесия в начале координат, т.е.  $f(0, 0) = 0$ .

При  $\epsilon = 0$  система (12.3) – гармонический осциллятор и на фазовой плоскости  $(x, y)$  существует состояние равновесия типа центр (см. лекцию 5). Решение системы (12.3) в этом случае можно записать в виде

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ y = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \end{cases} \quad (12.4)$$

где  $A$  и  $\varphi$  – *const*, определяемые начальными условиями.

Пусть теперь  $\epsilon \neq 0$ . Будем искать решение системы (12.3) в виде (12.4), считая  $A$  и  $\varphi$  неизвестными функциями времени. В силу первого уравнения в (12.3) получим

$$-A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \dot{\varphi} = 0. \quad (12.5)$$

Подстановка (12.4) во второе уравнение системы (12.3) дает уравнение

$$-A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \dot{\varphi} = f(A \cos(\omega_0 t + \varphi), -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)). \quad (12.6)$$

Уравнения (12.5), (12.6) образуют систему линейных относительно  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{A}$  неоднородных уравнений. Решая эту систему обычным образом и вводя для удобства новую переменную  $\Pi = \omega_0 t + \varphi$ , получим

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -\frac{f(A \cos \Pi, -A \omega_0 \sin \Pi) \sin \Pi}{\omega_0 A}, \\ \dot{A} = \frac{f(A \cos \Pi, -A \omega_0 \sin \Pi) \cos \Pi}{\omega_0 A}. \end{cases} \quad (12.7)$$

Система (12.7) эквивалентна исходной системе (12.3), но представлена в форме (12.1). В (12.7) переменная  $A$  имеет смысл амплитуды, а переменная  $\Pi$  – фазы колебаний.



### 12.1.2. Усреднённая (укороченная) система

В силу первого уравнения в (12.7) переменная  $\psi$  меняется медленно, поскольку ее производная имеет порядок  $\epsilon$ . Поэтому за один период изменение фазы  $\Pi$  на  $2\pi$  амплитуда  $\psi$  изменится незначительно. Следовательно, вполне логично попытаться аппроксимировать исходную систему (12.7) системой, в которой правые части представляют собой средние за  $2\pi$  значения, т.е. системой

$$\dot{\psi} = \epsilon \int_0^{2\pi} F_1(\psi) d\Pi, \quad (12.8)$$

$$\dot{\Pi} = \int_0^{2\pi} \left[ \epsilon \int_0^{2\pi} F_2(\psi) d\Pi \right] d\Pi, \quad (12.9)$$

где

$$F_1(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi \cos \Pi, \epsilon \psi \sin \Pi) d\Pi$$

$$F_2(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi \cos \Pi, \epsilon \psi \sin \Pi) \cos \Pi d\Pi.$$

Система (12.8)-(12.9) называется усредненной или укороченной. Заметим, что, хотя система (12.8)-(12.9), как и система (12.7), является нелинейной, но ее исследование значительно проще. Действительно, уравнение (12.8) не зависит от переменной  $\Pi$  и может быть изучено самостоятельно.

### 12.1.3. Усреднение и структурно устойчивые фазовые портреты

Динамика переменной  $\psi$  описывается уравнением (12.8) на фазовой прямой. Разбиение фазовой прямой на траектории определяют состояние равновесия, координаты которых задаются уравнением

$$F_1(\psi) = 0. \quad (12.10)$$

Предположим, что уравнение (12.10) имеет некоторое конечное число корней  $\psi = \psi_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , т.е. уравнение (12.8) имеет состояние равновесия в точках  $\psi = \psi_k$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\psi_0 = 0$  и соответствует состоянию равновесия исходной системы (12.3). Как известно (см. лекцию 2), состояние равновесия систем на прямой могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. В случае уравнения (12.8) состояния равновесия будут устойчивыми, если  $F_1'(\psi_k) > 0$  и неустойчивыми, если  $F_1'(\psi_k) < 0$ . Предположим, что для всех состояний равновесия уравнения (12.8) выполнено условие  $F_1'(\psi_k) > 0$ , т.е. уравнение (12.8) является структурно устойчивым. Очевидно, что в этом случае в зависимости от начального условия  $\psi(0) = \psi_k$



переменная  $\gamma(t)$  стремится либо к одному из устойчивых состояний равновесия, либо неограниченно нарастает. Подставим теперь значение  $\gamma = \gamma_k$  в уравнение (12.9) и проинтегрируем его. В результате получим

$$\Pi = \gamma_0 \int_{\gamma_0}^{\gamma_k} \frac{F_2(\gamma)}{\gamma_k} d\gamma + \Pi_0, \quad (12.11)$$

где  $\Pi_0 = \text{const}$ . Подставляя (12.11) и  $\gamma = \gamma_k$  в (12.4), устанавливаем, что каждому  $\gamma = \gamma_k$  на фазовой плоскости  $(x, y)$  системы (12.3) соответствует предельный цикл  $L_k$ , уравнение которого задается следующим образом

$$\begin{aligned} x &= \gamma_k \cos \left( \gamma_0 \int_{\gamma_0}^{\gamma_k} \frac{F_2(\gamma)}{\gamma_k} d\gamma + \Pi_0 + \dots \right), \\ y &= \gamma_k \sin \left( \gamma_0 \int_{\gamma_0}^{\gamma_k} \frac{F_2(\gamma)}{\gamma_k} d\gamma + \Pi_0 + \dots \right), \end{aligned} \quad (12.12)$$

где точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости по  $\gamma$ , которые могут быть установлены при использовании следующих членов асимптотического ряда. При этом цикл  $L_k$  асимптотически устойчив в случае  $F_1(\gamma_k) > 0$  и неустойчив, если  $F_1(\gamma_k) < 0$ . В силу уравнения (12.9) все другие траектории, отличные от состояния равновесия и предельных циклов асимптотически накручиваются на соответствующие циклы, если для циклов выполняется условие  $F_1(\gamma_k) > 0$  и раскручиваются с них, если  $F_1(\gamma_k) < 0$ . Заметим, что в случае, когда для цикла выполняется условие  $F_2(\gamma_k) = 0$ , то периодические колебания, соответствующие этому циклу, происходят с частотой  $\gamma_0$  (на самом деле поправка к частоте существует, но она имеет порядок  $\gamma^2$ , и метод Ван-дер-Поля в рассматриваемом приближении не позволяет ее установить), а в случае  $F_2(\gamma_k) \neq 0$  - к частоте  $\gamma_0$  имеется поправка  $\Delta \gamma_k = \frac{F_2(\gamma_k)}{\gamma_k}$ .

## 12.2. Автоколебания и автоколебательные системы

На предыдущих лекциях мы познакомились (см. лекцию 5) с системами, которые могут совершать незатухающие колебания. Это консервативные системы. Независимо от того, являются эти системы линейными или нелинейными, амплитуды и период их колебаний полностью определяются начальными условиями. Такие системы являются идеализированными и учет сколь угодно малых диссипативных эффектов, которые всегда присутствуют в реальных системах (например, трение в маятнике, сопротивление в колебательном контуре и т.д.) приводит к разрушению таких периодических

колебаний. В этом случае возникают затухающие колебания, и система приходит в равновесное состояние. Однако, представим себе ситуацию, когда наряду с диссипативными потерями в системе существуют внутренние механизмы, позволяющие компенсировать потери. Тогда можно ожидать, что в таких системах при некоторых условиях может возникнуть «баланс» между действием диссипативных потерь и этих механизмов, в результате которого в системах возникнут незатухающие колебания. Такие системы, демонстрирующие незатухающие колебания, действительно существуют в природе и их принято называть **автоколебательными**. К автоколебательным системам относятся все духовые и смычковые музыкальные инструменты, часы с маятником, генераторы, лазеры и многие другие системы. Отличительной особенностью автоколебательных систем является то, что они сами являются источником колебаний. Этим они принципиально отличаются от систем, совершающих **вынужденные** колебания, в которых колебания подводятся извне. Например, воздух в органной трубе совершает незатухающие колебания под действием равномерного потока воздуха. В ламповом генераторе происходят незатухающие колебания не под действием внешнего воздействия, а за счет источника постоянного напряжения, существующего в самом генераторе. Механические часы с маятником совершают периодические незатухающие колебания за счет энергии, деформируемой при их заводе пружины.

Под автоколебательной системой принято понимать диссипативную систему, совершающую незатухающие колебания при отсутствии колебательного воздействия извне. Колебания, происходящие в автоколебательных системах, называются автоколебаниями. Термины автоколебательные системы и автоколебания были введены А.А. Андроновым в знаменитой работе «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний», представленной им на IV съезде физиков в 1928 году. В своем докладе он впервые показал, что адекватным математическим образом периодических автоколебаний являются предельные циклы Пуанкаре. Это позволило не только дать строгое определение автоколебаний как незатухающих колебаний, свойства которых в определенных пределах не зависят от начальных условий и полностью определяются параметрами системы, но и перейти к систематическому изучению практически важных реальных систем. Несмотря на то, что понятие автоколебаний было введено достаточно давно, оно остается базовым и востребованным в современной нелинейной науке. Например, в последнее время возрастающий интерес вызывают автоколебательные модели, возникающие при исследовании процессов в нейронных структурах мозга.

Отметим, что автоколебания могут быть не только периодическими. Возможны колебания, содержащие несколько независимых частот, которые соотносятся между собой иррационально. Такие колебания называют квазипериодическими. Более того, существует широкий класс систем, в которых происходят так называемые хаотические автоколебания,

характеризуемые сплошным спектром и случайным изменением во времени. Изучение таких автоколебаний является одним из важных направлений современной теории колебаний.

Таким образом, автоколебаниями называются незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, форма и свойства которых, по крайней мере в конечных пределах, не зависят от начальных условий и определяются параметрами самой системы.

### 12.2.1. Динамика простейшей модели маятниковых часов

Главный принцип работы часов с маятником (балансом) состоит в следующем. Маятник в основном совершает свободные затухающие колебания, за исключением коротких (по сравнению с характерным масштабом собственных колебаний) моментов времени, когда он, проходя через определенные положения, подвергается воздействию со стороны ходового колеса. В эти моменты маятник получает короткий импульс влево или вправо, через определенный механизм связанный с заведенной пружиной. Простейшая модель, описывающая динамику маятниковых часов, имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= y, \\ \dot{y} &= M(\varphi, \dot{\varphi}) - \gamma y \\ \varphi &\in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (12.13)$$

где  $\varphi$  - угол отклонения маятника, а  $\dot{\varphi}$  - его угловая скорость,  $\gamma$  - параметр, характеризующий диссипативные потери (трение на оси, в среде и т.д.), а  $M(\varphi, \dot{\varphi})$  - момент действующий на маятник со стороны ходового колеса. Обратим внимание, что функция  $M(\varphi, \dot{\varphi})$  является нелинейной, и только в этом

случае в системе могут возникнуть автоколебания. В случае, когда воздействие на маятник со стороны ходового колеса отсутствует (в уравнении (12.13) член  $M(\varphi, \dot{\varphi}) \equiv 0$ ) на фазовой плоскости  $(\varphi, y)$  существует асимптотически

устойчивое состояние равновесия в начале координат, притягивающее все остальные траектории системы (12.13). Предположим, что потери в системе (12.13) достаточно малы и выполняется неравенство  $\gamma^2 < 4$ . В этом случае состояние равновесия будет устойчивым фокусом (убедитесь в этом самостоятельно) и стремящиеся к нему траектории имеют вид скручивающихся спиралей. Следовательно, в течение превалирующего временного интервала в системе (12.13) происходит затухающий колебательный процесс. Предположим теперь, что маятник при прохождении значения  $\varphi = 0$  испытывает короткие толчки. Идя вправо – толчок вправо, в результате которого скорость маятника мгновенно увеличится на некоторую величину  $y^+ > 0$ , а угловая переменная останется равной нулю. Аналогично, идя влево, маятник испытает толчок влево, а его скорость  $y$  мгновенно уменьшится на величину  $y^-$  при сохранении значения  $\varphi = 0$ . Исследуем фазовую плоскость системы (12.13) при наличии



толчков. Пусть при  $t = 0$  начинается фаза свободных колебаний и система (12.13) имеет следующие начальные условия

$$\Pi(0) = 0, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad (12.14)$$

Решение системы (12.13) с такими начальными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{y_0}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin(\omega t), \\ y &= y_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \frac{\gamma}{2} \sin(\omega t) \right], \end{aligned} \quad (12.15)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ . Из (12.15) нетрудно видеть, что через время  $t = \frac{\pi}{\omega}$  переменная  $\Pi(t)$  станет равной нулю, и в этот момент маятник испытает толчок, который в соответствии с нашими предположениями может быть описан следующим образом

$$\begin{aligned} y_{\Pi=0} + 0 &= y_{\Pi=0} \\ \Pi(0+0) &= \Pi(0) \end{aligned} \quad (12.16)$$

, где в силу (12.15)

$$y_{\Pi=0} = y_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \quad (12.17)$$

После толчка вновь наступает фаза свободных колебаний, которая описывается системой (12.13) при  $M \neq 0$  и решение имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{y_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} + \frac{\gamma}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2} t}}{\omega} \sin(\omega t), \\ y &= \left[ y_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} + \frac{\gamma}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2} t} \right] \cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (12.18)$$

где  $t \in 0$ . Из первого уравнения системы (12.18) следует, что свободные колебания маятника заканчиваются через время  $t = \frac{\pi}{\omega}$ , когда  $\Pi(t = \frac{\pi}{\omega}) = 0$  и маятник вновь испытывает толчок, который описывается как





$$\begin{aligned} \clubsuit y(\frac{\pi}{\omega} + 0) &= y \frac{\pi}{\omega} + \tau_m, \\ \heartsuit \Pi(0 + 0) &= \Pi(0) \end{aligned} \quad (12.19)$$

Из (12.18), (12.19) следует, что переменная  $y$  примет новое значение  $y_1$ , которое имеет вид

$$y_1 = e^{-\frac{\pi}{\omega}} y_0 e^{-\frac{\pi}{\omega}} + \tau_m + \tau_m. \quad (12.20)$$

Соотношение (12.20) устанавливает связь между ординатой  $y_0$  произвольной начальной точки, полупрямой  $\{x=0, y>0\}$  и ординатой  $y_1$  точки, которая описывает состояние маятника после одного полного колебания. Поскольку  $y_0$  была выбрана произвольно, то (12.20) фактически представляет собой одномерное точечное отображение полупрямой  $\{x=0, y>0\}$  на себя, которое имеет вид

$$\bar{y} = e^{-\frac{\pi}{\omega}} y + \tau_m + e^{-\frac{\pi}{\omega}} \tau_m. \quad (12.21)$$

Отображение (12.21) является линейным и его динамика полностью зависит (см. лекцию 6) от устойчивости единственной неподвижной точки  $y = y^*$ , где

$$y^* = \tau_m + e^{-\frac{\pi}{\omega}} y^*.$$

Эта неподвижная точка имеет мультипликатор  $s = e^{-\frac{\pi}{\omega}} < 1$  и, значит, является асимптотически устойчивой. Все остальные траектории отображения (12.21) асимптотически приближаются к неподвижной точке (рис. 12.1а).

Следовательно, на фазовой (плоскости  $\Pi, y$  системы (12.13) существует

единственный устойчивый предельный цикл (рис 12.1б), к которому стремятся все траектории системы (12.13), за исключением неустойчивого состояния равновесия в начале координат. Таким образом, независимо от начальных условий в часах устанавливаются незатухающие периодические колебания, амплитуда и период которых  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  не зависят от начальных условий и полностью определяются параметрами, характеризующими часы.

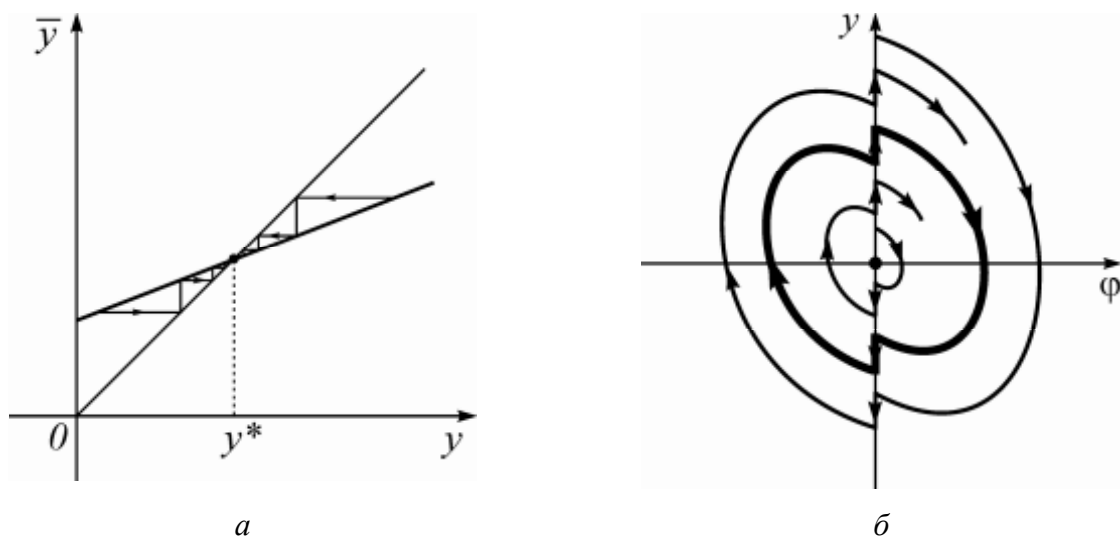


Рис. 12.1. Диаграмма Ламерея отображения (12.21) (а) и фазовая плоскость системы (12.13) (б)

### 12.2.2. Автоколебания в системе с активным элементом

Рассмотрим динамику системы, электрическая схема которой представлена на рис. 12.2. Кроме классических линейных электрических элементов  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , схема содержит также элемент  $N$ , у которого связь между протекающим через него током  $i$  и приложенным напряжением  $u$  задается нелинейной функцией  $\Pi(u)$ . Мы не будем пока конкретизировать вид функции  $\Pi(u)$ , а отметим лишь ее главное свойство, наличие которого мы предполагаем, - существование у функции  $\Pi(u)$  падающего участка (участка, где  $\Pi'(u) < 0$ ). Например, такими характеристиками обладают туннельные диоды, многосеточные электронные лампы, тиристоры и др. Запишем уравнение Кирхгофа для токов в рассматриваемом контуре

$$\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt + \Pi(u) = 0 \quad (12.22)$$

После дифференцирования уравнения (12.22) получим

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{C} \left( \frac{1}{R} + \Pi'(u) \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0, \quad (12.23)$$

где  $\Pi'(u)$  - так называемая дифференциальная проводимость нелинейного элемента  $\Pi(u)$ . Поскольку функция  $\Pi(u)$  имеет падающий участок, такие элементы содержат

нелинейные элементы часто называют элементами с отрицательной дифференциальной проводимостью. Рассмотрим динамику уравнения (12.23) при двух видах нелинейной функции.



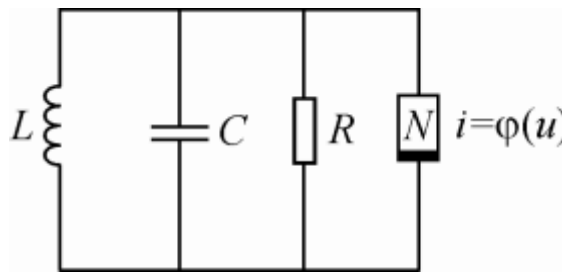


Рис. 12.2. Схема системы с нелинейным активным элементом

**Случай 1.** Пусть функция  $\Pi(u)$  имеет вид

$$\Pi(u) = \frac{S_2}{3} u^3 + S_1 u, \quad (12.24)$$

где коэффициенты  $S_1, S_2 > 0$ . Нетрудно видеть, что для  $u \in \left( -\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}, \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \right)$  производная  $\Pi'(u) < 0$  и элемент с характеристикой (12.24) действительно

обладает отрицательной дифференциальной проводимостью. Подставляя (12.24) в (12.23) и вводя новое время  $\tau = \tau_0 t$ , переменную  $x = \sqrt{\frac{S_2}{C \tau_0}}$  и параметры  $\tau_0^2 = LC$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{S_1}{R}}$  получим следующую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + (\tau_0^2 - x^2) y, \end{aligned} \quad (12.25)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $\tau$ . Система (12.25) является одной из базовых моделей теории колебаний и называется системой Ван-дер-Поля. В частности, она описывает динамику лампового автогенератора, изучение которого восходит к пионерским работам Ван-дер-Поля. Нетрудно видеть, что система (12.25) имеет единственное состояние равновесия  $O(x = y = 0)$ , которое локально является асимптотически устойчивым при  $\tau_0^2 < 0$  и неустойчивым при  $\tau_0^2 > 0$ .

Покажем, что при  $\tau_0^2 \neq 0$  состояние равновесия  $O$  не только локально устойчиво, но и устойчиво в целом. Введем в рассмотрение функцию

$$V_1(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2},$$

Производная которой в силу системы (12.25) имеет вид

$$\dot{V}_1 = \tau_0^2 - x^2 y^2 \leq 0. \quad (12.26)$$



Очевидно, что функция  $V_1(x, y)$  является функцией Ляпунова (см. лекцию 4) и, следовательно, при  $\odot < 0$  состояние равновесия  $O$  устойчиво в целом, т.е. все другие траектории системы (12.25) асимптотически приближаются к нему.

Пусть теперь параметр  $\odot > 0$ . Прежде всего заметим, что в этом случае для всех линий уровня  $V_1(x, y) = C$ , где  $C \delta \frac{\odot}{2}$ , в силу (12.26) выполняется неравенство  $\dot{V}_1(x, y) > 0$ . Следовательно, любая траектория системы (12.25) отличная от  $O$ , с начальными условиями из области  $D$ , ограниченной на фазовой плоскости окружностью  $S$ :

$$x^2 + y^2 = \odot, \quad (12.27)$$

покидает эту область. При этом векторное поле системы (12.25) на окружности  $S$  ориентировано во внешность области  $D$ .

Построим на фазовой плоскости кольцообразную область  $K$ , внутренней границей которой будет служить окружность  $S$ , а внешней – некоторая замкнутая кривая  $H$ , которую нам предстоит найти. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$V_2(x, y) = \frac{y^2}{2} \square \lambda xy + \Sigma x^3 y + \Sigma \frac{x^6}{6} + (1 + \lambda \odot) \frac{x^2}{2},$$

где  $\lambda$  и  $\Sigma$  – произвольные неотрицательные параметры. Производная функции  $V_2$  в силу системы (12.25) имеет вид

$$V_2(x, y) = \square (\lambda \square \odot) y^2 \square (\square 3\Sigma) x^2 y^2 + (\lambda + \Sigma \odot) x^3 y \square \Sigma x^4 + \lambda x^2 \quad (12.28)$$

Выберем параметр  $\lambda = \odot$ . Тогда (12.28) можно записать в виде

$$\dot{V}_2(x, y) = \square x^2 \sqrt{(x, y)}, \quad (12.29)$$

где

$$\sqrt{(x, y)} = (1 \square 3\Sigma) y^2 \square \odot (\lambda + \Sigma) xy + \Sigma x^2 \square \odot.$$

Найдем условие на параметр  $\Sigma$ , при котором квадратичная форма  $\sqrt{(x, y)} = 0$

будет определять на фазовой плоскости  $(x, y)$  эллипс. Несложный анализ показывает, что  $\sqrt{(x, y)} = 0$  будет эллипсом, если  $\odot^2 < \frac{1}{4}$  и  $\Sigma \square (\Sigma_2, \Sigma_1)$ , где

$$\Sigma_{\pm} = \frac{2 \square \odot^2}{1 \square 4 \odot^{2 \pm 1,2}} \frac{\sqrt{\odot^2}}{\odot^2} + 12$$

Выберем  $\Sigma$  из этого интервала, положив

$$\Sigma = \frac{2\Box\odot^2}{12+\odot}.$$

Из (12.29) следует, что в этом случае для всех точек фазовой плоскости  $(x, y)$ , лежащих вне эллипса  $\sqrt{\Phi(x, y)} = 0$ , т.е. принадлежащих области  $\sqrt{\Phi(x, y)} > 0$ , выполняется неравенство  $\dot{V}_2 < 0$ . Кроме того, при выбранных значениях параметров  $\gamma$  и  $\Sigma$  функция  $V_2(x, y)$  является положительно определенной. Действительно, ее можно представить в виде

$$V_2(x, y) = \left( y^2 + \gamma x + \Sigma x^3 \right) + \frac{\gamma(1 - 3\Sigma)}{3} x^6 + 2\Sigma \gamma x^4 + x^2 \varepsilon 0.$$

Следовательно, (см. лекцию 4) линии уровня этой функции  $V_2(x, y) = h = \text{const} > 0$  являются замкнутыми, которые уменьшаются с уменьшением  $h$ , а при  $h=0$  вырождаются в точку. Поскольку эллипс  $\sqrt{\Phi(x, y)} = 0$  не зависит от  $h$ , то, очевидно, существует такое значение  $h = h^*(\odot)$ , что все линии уровня  $V_2(x, y) = h$ ,  $h > h^*(\odot)$  охватывают этот эллипс, не имея с ним общих точек. Значение  $h > h^*(\odot)$  соответствует случаю касания эллипса  $\sqrt{\Phi(x, y)} = 0$  и линии  $H = V_2(x, y) = h^*(\odot)$  (рис. 12.3а).

Следовательно, линии уровня  $V_2(x, y) = h$ , где  $h > h^*(\odot)$  расположены в области  $\sqrt{\Phi(x, y)} > 0$  и в силу (12.29) на них выполняется условие  $\dot{V}(x, y) < 0$ . Поскольку на этих кривых  $V_2(x, y) = 0$  лишь на прямой  $x=0$ , это означает, что траектории системы (12.25) пересекают линии уровня  $V_2(x, y) = h$ ,  $h \in h^*(\odot)$  снаружи внутрь (рис. 12.3а). Рассмотрим на фазовой плоскости область  $K$ , границы которой состоят из окружности  $S$  и линии  $H$  (рис. 12.3б).

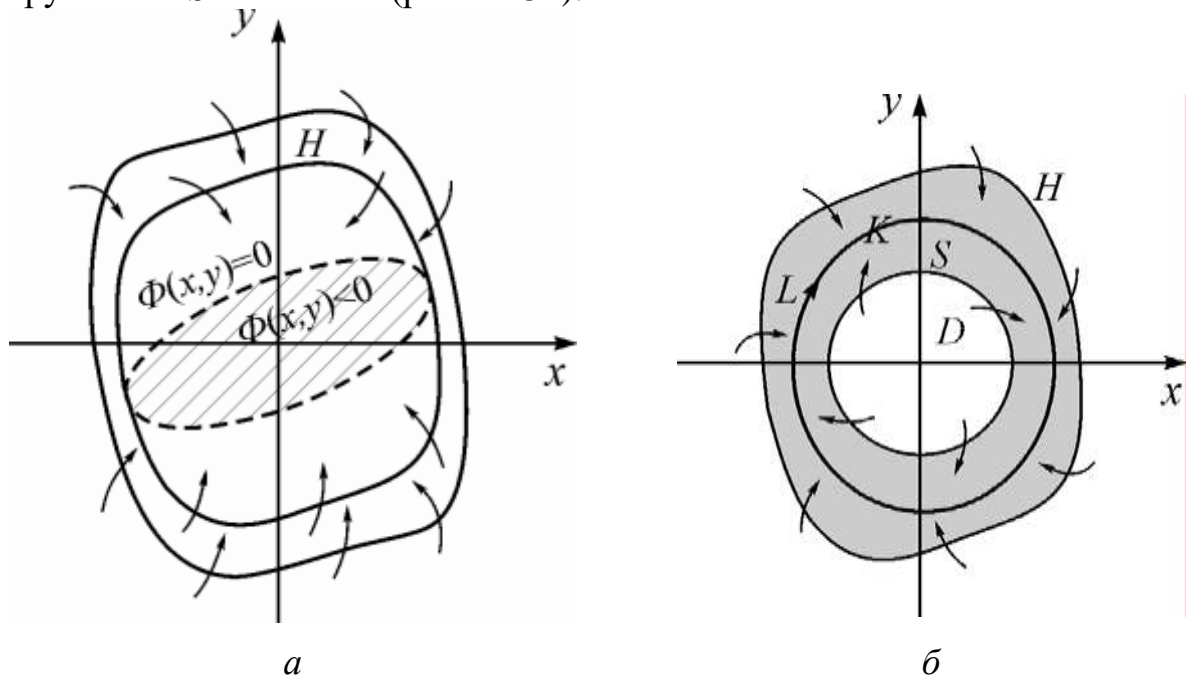


Рис. 12.3. Эллипс  $\sqrt{\Phi(x, y)} = 0$  и линии уровня функции  $V(x, y) = h$ ,  $h > h^*(\odot)$  (а);  
кольцеобразная область  $K$  (б)





На границе области  $K$  векторное поле системы (12.25) ориентировано внутрь этой области. Поскольку в области  $K$  нет состояний равновесия, то, очевидно, в ней содержится по крайней мере один устойчивый предельный цикл  $L$  системы (12.25). Численное моделирование системы показало (12.25), что цикл  $L$  единственный. На рис. 12.4 представлена зависимость амплитуды  $A$  периодических автоколебаний, соответствующих предельному циклу  $L$ , от параметра  $\odot$  (сплошная линия). С другой стороны, существование на фазовой плоскости безконтактных линий  $S$  и  $H$  позволяет получить эффективные аналитические оценки величины  $A$ .

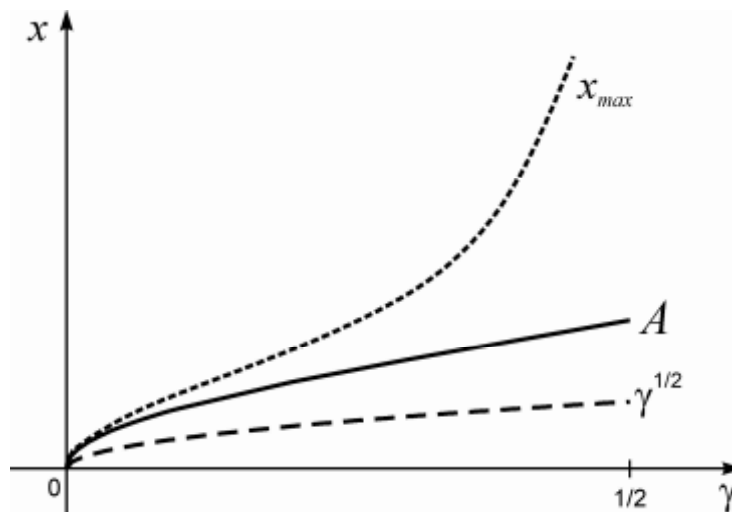


Рис. 12.4. Бифуркационная диаграмма системы (12.25). Зависимость амплитуды  $A$  автоколебаний от параметра  $\odot$ : сплошная линия – численный результат, а пунктирные линии – ее оценки, вытекающие из существования линий  $S$  и  $H$ .

Поскольку предельный цикл  $L$  заключен между этими линиями, то, очевидно, справедливы неравенства

$$\sqrt{\odot} < A < x_{\max},$$

где  $x_{\max}$  – наибольшее значение переменной  $x$ , принимаемое на линии  $H$ .

Несложный анализ показывает, что при  $0 < \odot \ll 1$ ,  $h^*(\odot) \approx 3\odot$   
величина и

$x_{\max} \approx \sqrt{6\odot}$ . Заметим, что для случая  $0 < \odot \ll 1$  зависимость амплитуды  $A$  от параметра  $\odot$  может быть уточнена с помощью метода Ван-дер-Поля. Действительно, сделав в системе (12.25) замену переменных  $x = \sqrt{\odot}v$ ,  $y = \sqrt{\odot}w$ , получим эквивалентную ей систему вида

$$\begin{aligned} \dot{v} &= w, \\ \dot{w} &= -v + \odot(1 - v^2)w. \end{aligned} \quad (12.30)$$



При  $\zeta \ll 1$  система (12.30) принадлежит классу систем вида (12.3) и, следовательно, для ее исследования можно воспользоваться методом Ван-дер-Поля. Находя для системы (12.30) функции  $F(\varphi)$  и  $F_2(\varphi)$ , получаем укороченную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\zeta}{8} \left( 4\varphi^2 - 1 \right) \\ \dot{\psi} &= 1. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Из (12.31) вытекает, что амплитуда устойчивого цикла  $L$  равна  $\varphi=2$  (в переменных  $v$  и  $w$ ), а в исходных переменных он задается следующим образом

$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{\zeta} \cos(\varphi + \Pi_0) + \dots \\ y &= 2\sqrt{\zeta} \sin(\varphi + \Pi_0) + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, аналитическая оценка амплитуды  $A$ , полученная с помощью безконтактных кривых, является достаточно хорошей и справедлива, в отличие от метода Ван-дер-Поля, не только при  $\zeta \ll 1$ , но и для всех  $\zeta \in (0, 1]$ .

Рассмотрим режимы работы схемы, представленной на рис. 12.2, в зависимости от значения параметра  $\zeta$ . Согласно бифуркационной диаграмме (рис. 12.4) при  $\zeta < 0$  автоколебания в схеме отсутствуют. Значение  $\zeta = 0$  соответствует суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа (первая ляпуновская величина является отрицательной). При  $\zeta > 0$  состояние равновесия становится неустойчивым, а на фазовой плоскости появляется единственный устойчивый предельный цикл, и в схеме возникают автоколебания. При увеличении  $\zeta$  от нуля амплитуда цикла  $L$  плавно (при  $\zeta \ll 1$ , амплитуда  $A \approx 2\sqrt{\zeta}$ ) и монотонно возрастает. Такой режим возбуждения автоколебаний называют **мягким**, а границу устойчивости состояния равновесия ( $\zeta = 0$ ) – **безопасной**. Напомним (см. лекцию 8), что такое название границы устойчивости отражает тот факт, что при ее нарушении, хотя система и переходит в качественно новое состояние (режим автоколебаний), она не покидает при  $0 < \zeta \ll 1$  окрестности предыдущего состояния (режима покоя).

**Случай 2.** Рассмотрим динамику схемы, когда функция  $\Pi(u)$  имеет вид

$$\Pi(u) = S_1 u + S_2 u^3 + S_3 u^5, \quad (12.32)$$

где коэффициенты  $S_2, S_3 > 0$ . Подставляя (12.32) в уравнение (12.23), вводя новое время  $\tau = \tau_0 t$  и параметры  $\bar{L} = \frac{1}{S_3} \frac{1}{R} S_1$ ,  $\bar{R} = \frac{S_2}{S_3}$ ,  $\bar{C} = \frac{S_3}{C \tau_0}$ , получим систему вида

$$\begin{aligned} \clubsuit \dot{u} &= y, \\ \spadesuit \dot{y} &= \lrcorner u + \left( \heartsuit u^2 \lrcorner u^4 \right) y \end{aligned} \quad (12.33)$$

Исследуем динамику системы (12.33) в случае  $0 < \lrcorner \ll 1$ . Очевидно, что в этом случае система (12.33) принадлежит к системам вида (12.3) и для изучения ее динамики можно применить метод Ван-дер-Поля. Будем использовать этот метод в комплексной форме записи, т.е. будем искать решение системы (12.33) в виде

$$\begin{aligned} x &= z e^{i\lrcorner t} + z^* e^{-i\lrcorner t}, \\ y &= i \begin{pmatrix} z e^{i\lrcorner t} \lrcorner z^* e^{-i\lrcorner t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.34)$$

где  $i^2 = -1$ , а  $z$  и  $z^*$  комплексная и комплексно-сопряженная переменные, удовлетворяющие условию

$$\dot{z} e^{i\lrcorner t} + \dot{z}^* e^{-i\lrcorner t} = 0 \quad (12.35)$$

Заметим, что условие (12.35) представляет собой комплексную форму записи условия (12.5). Подставляя (12.34) в систему (12.33) и усредняя полученную систему, находим (при учете (12.35)) вид усредненного уравнения

$$2\dot{z} = \left( z \lrcorner + \heartsuit z z^* \lrcorner 2z^2 (z^*)^2 \lrcorner \right) e^{i\lrcorner t}, \quad (12.36)$$

где параметр  $\heartsuit > 0$ , а параметр  $\lrcorner$  будем рассматривать как контрольный. Перейдем в (12.36) к действительным переменным. Подставляя в (12.36)  $z = r e^{i\cup}$  и разделяя действительную и комплексную части, получим

$$\begin{aligned} \lrcorner 2\dot{r} &= \left( r \lrcorner + \heartsuit r^2 \lrcorner 2r^4 \right), \\ \spadesuit \dot{\cup} &= 0. \end{aligned} \quad (12.37)$$

В (12.37) уравнения для переменных  $r$  и  $\cup$  не зависят друг от друга и поэтому легко исследуются. Из второго уравнения следует, что  $\cup = \cup_0 = \text{const}$  и колебания в системе (12.33) будут происходить на частоте, близкой к  $\lrcorner_0 = 1$ . Уравнение для  $r$  - уравнение на прямой, разбиения которой определяют состояния равновесия. Нетрудно видеть, что это уравнение при всех значениях параметров имеет состояние равновесия в начале координат  $r_0 = 0$ , а также может иметь еще от одного до двух состояний равновесия (рис.12.5а). Координаты нетривиальных состояний равновесия равны

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\heartsuit \pm \sqrt{\heartsuit^2 + 8\lrcorner}}.$$

Результаты исследования усредненной системы (12.37) позволяют построить (см. раздел 12.1.3) фазовые портреты исходной системы (12.33), которые



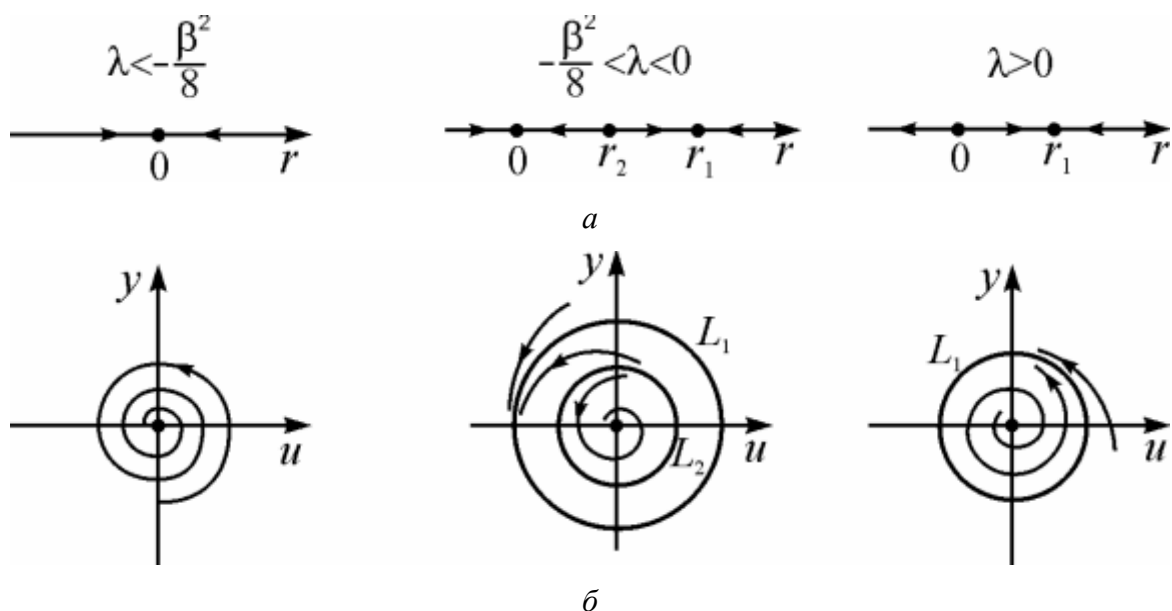


Рис. 12.5. Разбиение фазовой прямой  $r$  для различных значений параметра  $l$  (а); структурно устойчивые фазовые портреты системы (12.33) (б).

представлены на рис. 12.5б. Кроме состояния равновесия в начале координат, которое может менять свою устойчивость, при  $-\frac{\beta^2}{8} < l < 0$  на фазовой плоскости  $(u, y)$  могут существовать также предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$ . Из (12.34) находим их уравнение

$$\begin{aligned} u &= 2r_j \cos(l + \Pi_0) + \dots, \\ y &= 2r_j \sin(l + \Pi_0) + \dots, \end{aligned} \quad (12.38)$$

где  $j=1,2$ . Значения параметра  $l = -\frac{\beta^2}{8}$  и  $l=0$  являются бифуркационными. В первом случае образуется двукратный предельный цикл, а во втором – субкритическая бифуркация (случай положительной первой ляпуновской величины) Андронова-Хопфа, при которой неустойчивый цикл  $L_2$  стягивается в состояние равновесия, и оно становится неустойчивым.

Рассмотрим режимы возбуждения автоколебаний в схеме, вытекающие из установленной динамики системы (12.33). Будем варьировать параметр  $l$ . Пусть сначала значение  $l$  удовлетворяет неравенству  $l < -\frac{\beta^2}{8}$ . В этом случае состояние схемы описывается устойчивым состоянием равновесия и автоколебания в схеме отсутствуют. При квазистатическом увеличении параметра  $l$  такая ситуация сохранится при всех  $l < 0$ , поскольку при этих  $l$  состояние равновесия является локально устойчивым. При  $l=0$  оно теряет устойчивость, и в схеме возникают автоколебания, соответствующие циклу  $L_1$  (см. рис. 12.6). Поскольку амплитуда предельного цикла  $L_1$  равна  $\sqrt{\beta}$ ,

автоколебания возникают скачком. Такой режим возбуждения автоколебаний называется **жестким**. Дальнейший рост параметра  $\lambda$  приводит к монотонному возрастанию амплитуды автоколебаний. Будем теперь квазистатически уменьшать параметр  $\lambda$ , стартуя от значений  $\lambda > 0$ . Сначала в схеме реализуется режим автоколебаний, соответствующий предельному циклу  $L_1$ . Так как цикл  $L_1$  сохраняет свое существование и локальную устойчивость при  $-\frac{\beta^2}{8} < \lambda < 0$ ,

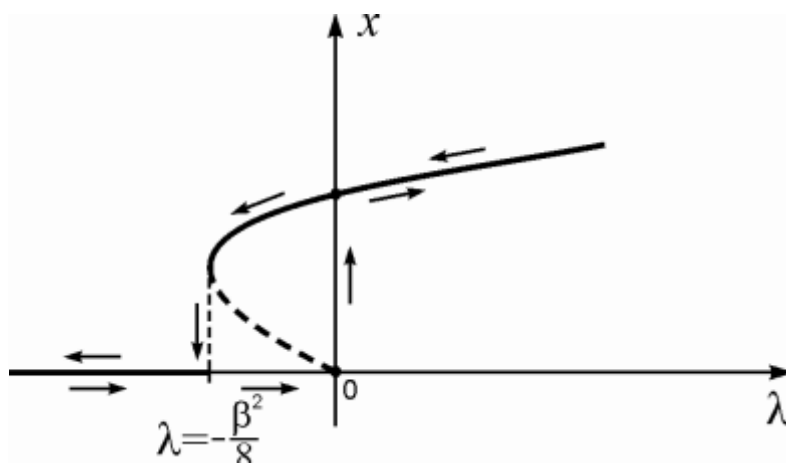


Рис. 12.6. Бифуркационная диаграмма системы (12.33) и последовательность возникновения и исчезновения автоколебаний при изменении параметра  $\lambda$ . Пунктирной линией показана амплитуда неустойчивого цикла.

то в схеме автоколебания продолжают существовать и для этих значений параметра  $\lambda$ . Нетрудно видеть, что амплитуда автоколебаний монотонно убывает при уменьшении  $\lambda$ . Автоколебания исчезают скачком при  $\lambda < -\frac{\beta^2}{8}$  и при дальнейшем уменьшении  $\lambda$  они больше не возникают. Следовательно, рождение и исчезновение автоколебаний в рассматриваемой схеме происходит при различных значениях  $\lambda$  и сопровождается гистерезисом. Заметим, что граница устойчивости состояния равновесия – значение  $\lambda = 0$  – обладает совершенно иными, чем в случае мягкого режима возбуждения, свойствами. При переходе через значение  $\lambda = 0$  состояние системы резко изменяется, поскольку она переходит в новое состояние, локализованное «вдали» от предыдущего, т.е. переход в новое состояние носит «взрывной» характер. В связи с этим границу устойчивости состояния равновесия называют **опасной** (см. также лекцию 8).

Таким образом, можно выделить следующие основные и характерные свойства автоколебаний и автоколебательных систем:



- ☐ *Источник энергии, за счет которого происходит компенсация диссипативных потерь, является постоянным и находится внутри самой системы.*
- ☐ *Система содержит колебательную подсистему и активный нелинейный элемент.*
- ☐ *В изолированной колебательной системе происходят затухающие колебательные процессы, а активный элемент может осуществлять усиление и нелинейное ограничение колебаний.*
- ☐ *Между колебательной подсистемой и активным элементом существует обратная связь, которая регулирует поступление энергии от источника.*
- ☐ *Автоколебания в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяются параметрами системы.*
- ☐ *Математическим образом периодических автоколебаний является устойчивый предельный цикл.*

### 12.3. Контрольные вопросы и задания

1. Оцените при  $0 < \zeta \ll 1$  амплитуду предельного цикла системы Ван-дер-Поля, используя нормальную форму для бифуркации Андронова-Хопфа.
2. Постройте качественный вид отображения Пуанкаре для системы Ван-дер-Поля для отрицательных и положительных значений параметра  $\zeta$ .
3. Для различных значений параметра  $\zeta$  постройте качественный вид отображения Пуанкаре для системы (12.33).
4. Нарисуйте качественный вид осциллограмм переменной  $x(t)$  системы (12.33) при квазистатическом увеличении и уменьшении параметра  $\zeta$ .

## ЛЕКЦИЯ №13

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

*Глобальное отображение Пуанкаре. Периодические и квазипериодические вынужденные колебания. Резонанс и резонансные кривые. Биения. Добротность*

На предыдущих лекциях мы рассматривали колебания в системах, не подверженных воздействию внешних по отношению к ним сил. Такие колебания обусловлены начальными отклонениями от положения равновесия и называются свободными или собственными. В этой лекции мы познакомимся с другим видом колебаний, которые называются вынужденными. Вынужденные колебания – это колебания, возникающие в результате действия на систему внешнего (силового) воздействия. Характерной особенностью вынужденных колебаний является то, что их свойства зависят не только от параметров системы, но и от параметров внешней силы. Простейшим примером такого сорта систем является линейный осциллятор, на который действует гармоническая сила (рис. 13.1).

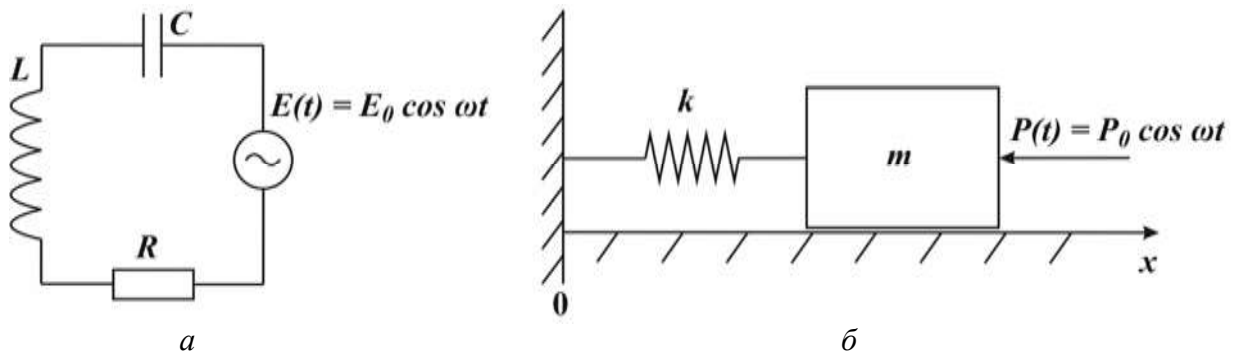


Рис. 13.1. Примеры линейного осциллятора, находящегося под действием внешних силовых воздействий: электрический колебательный контур (а) и механическая колебательная система (б).

Динамика такого осциллятора описывается линейной системой следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + F_0 \cos \omega t, \end{cases} \quad (13.1)$$

где  $\omega_0$  – собственная частота осциллятора,  $F_0, \omega$  – амплитуда и частота внешней силы соответственно, параметр  $\gamma > 0$  характеризует диссипативные потери



системе. Система (13.1) является неавтономной и имеет трехмерное фазовое пространство  $G = \mathbb{R}^2 \cdot S^1$ .

### 13.1. Динамика системы и глобальное отображение Пуанкаре

Поскольку правая часть системы (13.1) периодична с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , её траектории порождают (см. лекцию 6) отображение Пуанкаре

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma,$$

где  $\Sigma = \{t = t_0 = \text{const}, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Найдем вид отображения  $P$ . Ограничим наше рассмотрение областью параметров  $\omega^2 < \omega_0^2$ . При этом условии в случае  $F_0 \neq 0$  система (13.1) имеет в начале координат состояние равновесия устойчивый

фокус  $L_{1,2} = \omega^{\pm i} \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ , если  $\omega^2 > 0$  или центр, если  $\omega^2 = 0$ .

Система (13.1) является линейной, и ее общее решение представляет собой суперпозицию общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\omega t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t] + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ y(t) &= e^{\omega t} [(C_2 \omega - C_1) \cos \omega t - (C_1 \omega + C_2) \sin \omega t] + \\ &\quad + A \sin \omega t + B \cos \omega t, \end{aligned} \quad (13.2)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ , а

$$A = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2\omega_0^2}, \quad B = \frac{2\omega F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2}.$$

Из (13.2) следует, что траектория  $L_0$  системы (13.1), удовлетворяющая начальному условию  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , задается следующим образом

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\omega t} [(x_0 - A) \cos \omega t + \frac{[y_0 + \omega(x_0 - A) - B]}{\omega} \sin \omega t] + A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ y(t) &= e^{\omega t} [(y_0 - B) \cos \omega t - \frac{[(x_0 - A)\omega + (y_0 - B)]}{\omega} \sin \omega t] + \\ &\quad + A \sin \omega t + B \cos \omega t \end{aligned} \quad (13.3)$$

Подставляя в (13.3) значение  $t = 2\pi/\omega$ , получим, что координаты точки, в которой траектория  $L_0$  пересекает секущую Пуанкаре, имеют вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2\pi}{\omega} = e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}} \left[ \cos 2\pi\omega + \frac{\gamma}{\omega} \sin 2\pi\omega \right] (x_0 - A) + \frac{\sin 2\pi\omega}{\omega} (y_0 - B) + A, \\ y(t) &= \frac{2\pi}{\omega} = \infty \\ &= e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}} \left[ \frac{\gamma^2 \sin 2\pi\omega}{\omega} (x_0 - A) + \left[ \cos 2\pi\omega + \frac{\gamma}{\omega} \sin 2\pi\omega \right] (y_0 - B) + B \right], \end{aligned} \quad (13.4)$$

где  $\omega = \omega/\gamma$ . Поскольку при выводе (13.4) начальное условие было произвольным, то (13.4) устанавливает связь любой точки секущей  $\square$  и ее образа через период  $T = 2\pi/\omega$  внешней силы, т.е. задает отображение  $P$ . Полагая  $x_0 = x$ ,  $y_0 = y$ , и  $x(t = 2\pi/\omega) = \bar{x}$ ,  $y(t = 2\pi/\omega) = \bar{y}$ , перепишем (13.4) для удобства в виде

$$\begin{aligned} \clubsuit x &= a_0 x + b_0 y + p, \\ \heartsuit \bar{y} &= c_0 x + d_0 y + q, \end{aligned} \quad (13.5)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}} \left[ \cos 2\pi\omega + \frac{\gamma}{\omega} \sin 2\pi\omega \right], b_0 = e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}} \frac{\sin 2\pi\omega}{\omega}, \\ c_0 &= e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}} \frac{\gamma^2 \sin 2\pi\omega}{\omega}, d_0 = e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}} \left[ \cos 2\pi\omega + \frac{\gamma}{\omega} \sin 2\pi\omega \right], \\ p &= A(a - 1) + Bb, q = B(bA + B)(\gamma - d) \end{aligned}$$

Отображение  $P$ , определяемое системой (13.5), является линейным и, как мы покажем ниже, его свойства существенно отличаются в диссипативном и консервативном случаях.

**Диссипативный случай.** При  $\gamma > 0$  система (13.5) при всех значениях параметров имеет неподвижную точку  $O(x=A, y=B)$ , мультипликаторы которой имеют вид

$$s_{1,2} = e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}} (\cos 2\pi\omega \pm i \sin 2\pi\omega) \quad (13.6)$$

Поскольку  $|s_{1,2}| = e^{-\frac{2\gamma}{\omega}} < 1$  неподвижная точка  $O$  является (см. лекцию 6) устойчивым фокусом, притягивающим все другие траектории отображения  $P$  (Рис. 13.2а). В фазовом

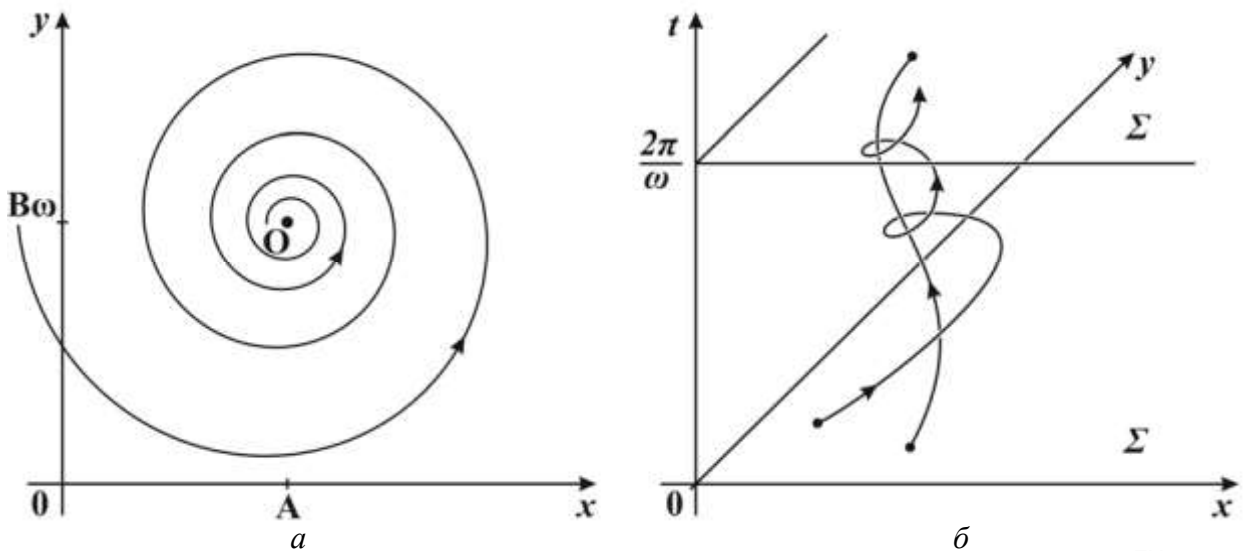


Рис. 13.2. Качественный вид фазовой плоскости отображения  $P$  при  $\gamma > 0$  (а), периодическая траектория в фазовом пространстве  $G$ , соответствующая неподвижной точке  $O$  (б).

пространстве  $G$  неподвижной точке  $O$  отвечает периодическая траектория, период которой  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (рис. 13.2б). Подставляя в (13.3) координаты неподвижной точки, находим, что эта траектория задается следующим образом

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\gamma t - \Pi), \\ y(t) &= \frac{\gamma F_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \sin(\gamma t - \Pi), \end{aligned} \quad (13.7)$$

где

$$\Pi = \arctg \frac{2\gamma \omega}{\gamma_0}. \quad (13.8)$$

Таким образом, при  $\gamma > 0$  действие гармонической внешней силы на линейный осциллятор приводит к возникновению при любых начальных условиях вынужденных гармонических колебаний, которые происходят с некоторым сдвигом фазы  $\Pi$  относительно фазы (для простоты мы полагали ее равной нулю) внешней силы.

**Консервативный случай.** Пусть сначала частоты внешней силы  $\gamma$  не совпадают с частотой собственных колебаний  $\gamma_0$ , т.е.  $\gamma \neq \gamma_0$ . В этом случае отображение (13.5), в котором  $\tau^m=0$ , остается определенным и имеет единственную неподвижную точку  $O: x=A, y=0$  с мультипликаторами  $s_{1,2} = \exp(\pm i 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0})$ , где  $\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Отсюда и линейности отображения (13.5) вытекает, что  $O$  – центр (см. лекцию 6). Следовательно, в фазовом пространстве  $G$  системы (13.1) существует единственное периодическое движение (период  $T = 2\pi \frac{\gamma_0}{\gamma}$ ), отвечающее неподвижной точке  $O$ , и континуум двумерных инвариантных торов. Это периодическое движение описывается уравнениями (13.7), (13.8) при  $\tau^m=0$  и является гармоническим. Рассмотрим теперь движение, происходящее на инвариантных торах. Перейдем в (13.5) к полярным координатам, положив

$$\begin{aligned} x &= A + \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \gamma_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Подставляя (13.9) в (13.5), получим

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi &= \sin 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0} \rho \cos \varphi + \cos 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0} \rho \sin \varphi \\ \rho \sin \varphi &= \cos 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0} \rho \cos \varphi - \sin 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0} \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad (13.10)$$

и

$$\begin{aligned} \rho \sin \varphi &= \rho \sin(\varphi + 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0}) \\ \rho \cos \varphi &= \rho \cos(\varphi + 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0}). \end{aligned}$$

Поделив первое уравнение системы (13.10) на второе, находим, что  $\tan \varphi = \tan(\varphi + 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0})$  или

$$\varphi = \varphi + 2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad (13.11)$$

а из (13.10), при использовании (13.11) получим

$$\varphi = \varphi. \quad (13.12)$$

Очевидно, что отображение (13.12) имеет решение  $\varphi = \varphi_0 = \text{const} > 0$ . Для каждого  $\varphi_0$  уравнение (13.11) задает непрерывное отображение окружности (13.11) – поворот на угол  $2\pi \frac{\gamma}{\gamma_0}$ . Динамика этого отображения зависит от параметра  $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ .

□ Если параметр  $\Theta$  является рациональным числом, т.е. частоты  $\omega_0$  и  $\omega_1$  рационально зависимы, т.е.  $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{k_1}{k_2}$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — взаимно простые



целые числа, то отображение (13.11) имеет континуум циклов кратности  $k_2$ .

- Если параметр  $\odot$  является иррациональным числом, то образы любой точки на окружности при действии отображения (13.11) образуют множество, всюду плотное на этой окружности.

Следовательно, в случае рациональных  $\odot$  в системе (13.1) при любых начальных условиях происходят периодические вынужденные колебания, соответствующие периодической траектории, лежащей в  $G$  на поверхности двумерного инвариантного тора. Для иррациональных значений  $\odot$  любая траектория всюду плотна на соответствующем инвариантном торе в  $G$  и вынужденные колебания в системе (13.1) являются квазипериодическими. Они имеют специфическую форму и называются **биениями**.

Поясним различие этих двух случаев на примере двух частных значений  $\odot$ :  $\odot = 2$  и  $\odot = \sqrt{2}$ . Пусть для определенности начальные условия будут в обоих случаях одни и те же:  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ . Из (13.3) следует, что переменная  $x$

соответствующей траектории изменяется следующим образом:

$$x(t) = \sqrt{\frac{F_0}{2}} (\cos t - \cos t_0). \quad (13.13)$$

При  $\odot = \frac{2}{1}$  соотношение (13.13) может быть переписано в виде

$$x(t) = \frac{F_0}{3} (\cos t - 2 \cos^2 t + 1). \quad (13.14)$$

Согласно (13.14) в системе (13.1) действительно существуют периодические колебания с периодом  $T = 2\pi$ .

Пусть теперь  $\odot = \frac{\sqrt{2}}{1}$ . Для такого  $\odot$  соотношение (13.13) принимает вид

$$x(t) = 2F_0 \sin \frac{\sqrt{2}-1}{2} t \sin \frac{\sqrt{2}+1}{2} t. \quad (13.15)$$

График функции  $x(t)$ , соответствующий (13.15) представлен на рис. 13.3. Приблизительно его можно рассматривать как гармонические колебания с

частотой  $\omega \sim \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ , «амплитуда» которых изменяется во времени с периодом  $\tilde{T} \sim \frac{4\pi}{\sqrt{2}-1}$ . Как мы отмечали выше, такие колебания

называются биениями и характеризуются частотой биений  $\omega_{\text{бм}} = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}$ .

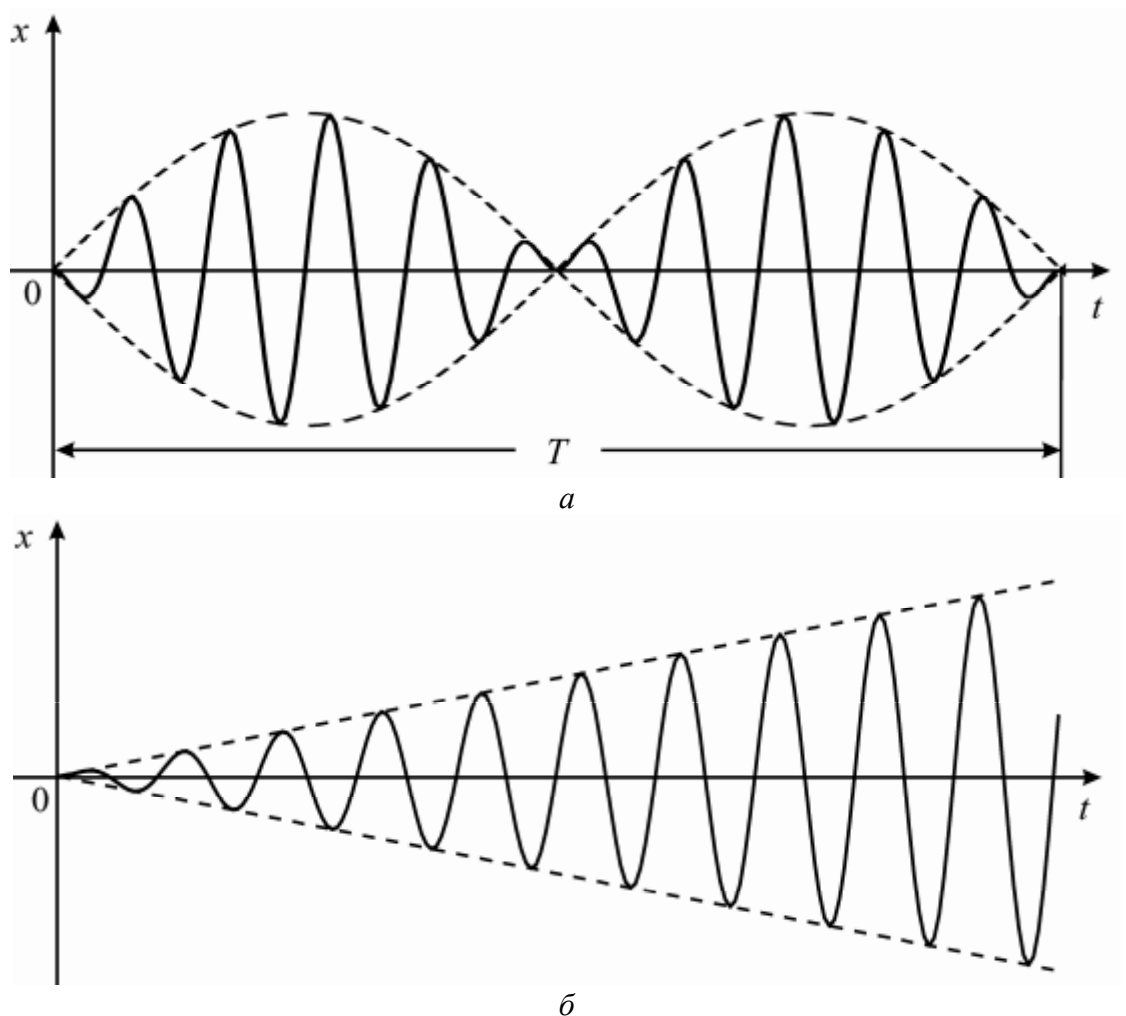


Рис. 13.3. Качественный вид колебаний, соответствующий режиму биений (а): неограниченное нарастание колебаний в случае  $\omega = \omega_0$  (б).

Рассмотрим теперь случай  $\omega = \omega_0$ . Решая систему (13.1) стандартным образом, находим, что траектория, удовлетворяющая начальным условиям  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{y_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + t \frac{F_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ y(t) &= -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + y_0 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{2\omega_0} (\sin \omega_0 t + t \omega_0 \cos \omega_0 t). \end{aligned} \quad (13.16)$$

Из (13.16) следует, что при  $\omega = \omega_0$  ограниченных движений в системе (13.1) не существует, и при любых начальных условиях переменные  $x(t)$  и  $y(t)$  неограниченно нарастают при  $t \rightarrow +\infty$ . Например, для нулевых начальных условий  $x_0 = y_0 = 0$  имеем

$$x(t) = t \frac{F_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (13.17)$$

График  $x(t)$ , определяемый (13.17), представлен на рис. 13.3б. В системе (13.1) реализуются неограниченно нарастающие во времени колебания.

Заметим, что неограниченный рост колебаний и существование континуума инвариантных торов есть следствие принятой нами идеализации – консервативности системы. Как было показано выше, учет сколь угодно малой величины диссипации приводит к исчезновению этих режимов и установлению при любых начальных условиях устойчивых гармонических вынужденных колебаний.

### 13.2. Резонансные кривые

Выясним теперь, как изменяется амплитуда вынужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего воздействия.

**Консервативный случай.** Пусть для определенности начальные условия будут следующими:  $x(0) = y(0) = 0$ . Из (13.13) следует, что в этом случае амплитуда вынужденных колебаний переменной  $x(t)$  при  $\omega = \omega_0$  равна

$$a = \frac{F_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}. \quad (13.18)$$

На плоскости параметров  $(\omega, a)$  формула (13.18) задает две кривые, имеющие общую вертикальную асимптоту  $\omega = \omega_0$ . Обе кривые выпуклы вниз. Кривая, расположенная при  $\omega < \omega_0$ , имеет минимум в точке  $\omega = 0$ , а кривая в области  $\omega > \omega_0$  – монотонно убывает и асимптотически приближается к значению  $a = 0$  (рис. 13.4а). Рис. 13.4а показывает, что любому фиксированному значению частоты внешнего воздействия  $\omega \neq \omega_0$  соответствует единственное значение амплитуды вынужденных колебаний, которая стремится в бесконечность при  $\omega \rightarrow \omega_0$ . Следовательно, при совпадении частоты внешнего воздействия  $\omega$  с частотой собственных колебаний  $\omega_0$  наступает неограниченный рост амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется **резонансом** (от латинского *resono* – звучу в ответ, откликаюсь), а кривые, представленные на рис. 13.4а, – резонансными. При резонансе изменение переменных во времени является непериодическим (см. рис. 13.3б) и описывается формулой (13.17). При этом в силу (13.8) вынужденные колебания происходят в случае  $\omega < \omega_0$  в фазе, а в случае  $\omega > \omega_0$  – в противофазе с внешним воздействием (рис. 13.4б).

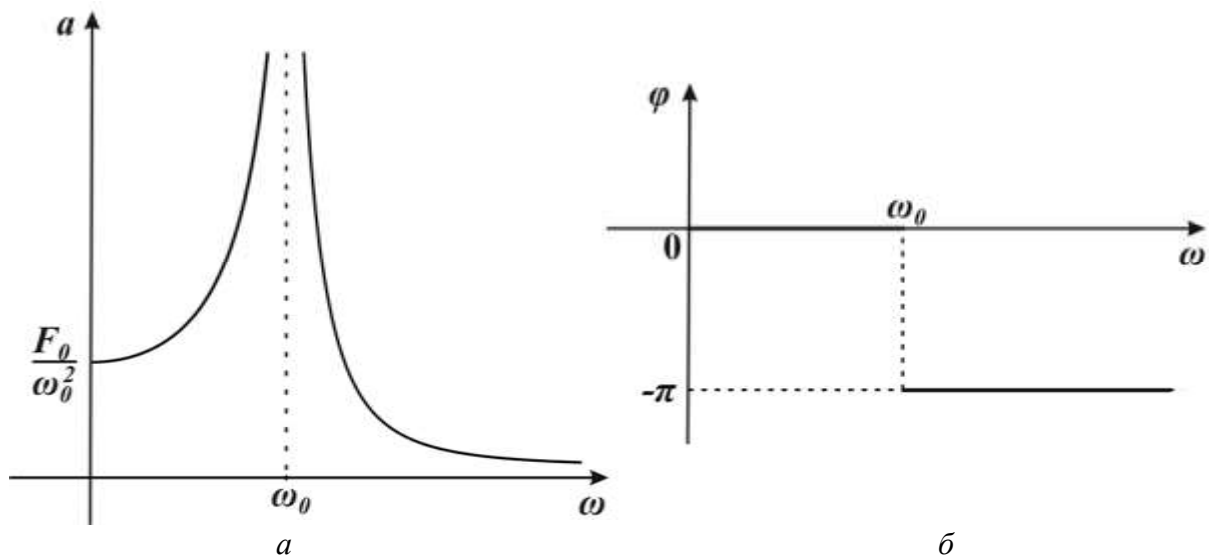


Рис. 13.4. Резонансные кривые (а) и сдвиг фаз между внешним воздействием и вынужденным колебанием (б) в случае  $\gamma_{\text{TM}} = 0$ .

**Диссипативный случай.** В разделе 13.1 мы показали, что в этом случае при любых начальных условиях в системе (13.1) устанавливается один и тот же единственный режим вынужденных колебаний. В силу (13.7) амплитуда этих колебаний равна

$$a = \frac{F_0}{\sqrt{(\gamma_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma_{\text{TM}}^2 \gamma^2}}. \quad (13.19)$$

Несложный анализ показывает, что для фиксированного  $\gamma_{\text{TM}}$  формула (13.19) задает на плоскости  $(\gamma, a)$  единственную кривую, принимающую при точном резонансе  $\gamma = \gamma_0$  некоторое уже **конечное** значение. Вид этой кривой зависит от величины параметра  $\gamma_{\text{TM}}$ . При  $\gamma_{\text{TM}}^2 < \gamma_0^2/2$  она имеет два экстремума – минимум при  $\gamma=0$  и максимум при  $\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 - 2\gamma_{\text{TM}}^2} \propto \gamma_{\text{max}}$ , значение которого равно

$$a = \frac{F_0}{2\gamma_{\text{TM}} \sqrt{\gamma_0^2 - 2\gamma_{\text{TM}}^2}} \propto a_{\text{max}}. \quad (13.20)$$

Следовательно, в этой области параметров возможен резонанс. Однако максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний достигается уже не при точном равенстве частот  $\gamma = \gamma_0$ , а в точке  $\gamma = \gamma_{\text{max}} < \gamma_0$  (рис. 13.5а). Каждому фиксированному значению  $\gamma$  соответствует единственное значение амплитуды вынужденных колебаний, которые происходят с некоторым сдвигом фазы относительно внешнего воздействия (рис. 13.5б).

Наиболее ярко явление резонанса проявляется для достаточно малых значений параметра  $\tau^M$ , поскольку в силу (13.20) с уменьшением  $\tau^M$  острота

резонансной кривой вблизи максимума увеличивается, а  $a_{\max}$   $\rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Наоборот, с увеличением  $\gamma$  пик резонансной кривой становится ниже и шире, и при  $\gamma^2$  близких к значению  $\frac{\gamma_0^2}{2}$  говорить о резонансе можно лишь условно.

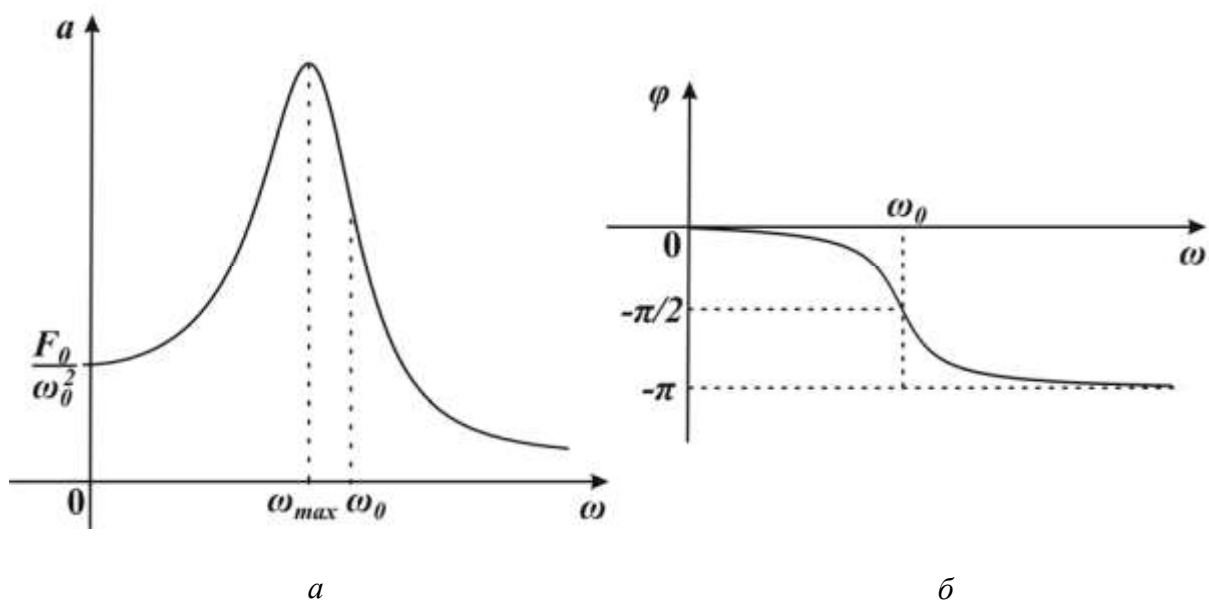


Рис. 13.5. Резонансная кривая (а) и сдвиг фаз между внешним воздействием и вынужденным колебанием (б) в случае  $0 < \gamma < \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}}$ .

При  $\gamma^2 \in [\frac{\gamma_0^2}{2}, \gamma_0^2]$  формула (13.19) для каждого фиксированного  $\gamma$  задает на плоскости  $(\gamma, a)$  монотонно убывающую при  $\gamma > 0$  кривую. Следовательно, в этом случае резонанс в системе (13.1) не происходит, а существуют вынужденные гармонические колебания, амплитуда которых монотонно убывает с увеличением частоты внешнего воздействия.

Обычно для характеристики резонансных свойств линейных колебательных систем используют величину  $Q$ , называемую **добротностью осциллятора**

$$Q = \frac{\omega_0}{d},$$

где  $d$  – логарифмический декремент затухания (см. лекцию 5). Поскольку

$$d = \gamma T = \frac{\gamma}{\omega_0}, \quad \text{выражение для добротности может быть представлено}$$

в

следующем эквивалентном виде

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$





Как было показано выше, чем меньше значение параметра  $T_M$ , т.е. больше значение добротности  $Q$ , тем больше значение  $a_{\max}$  и острее пик резонансной кривой. Поэтому отклики линейного осциллятора, имеющего достаточно большое значение  $a$ , на одинаковые по амплитуде внешние воздействия, могут сильно различаться в зависимости от близости их частот к значению  $\omega_{\max}$ . Следовательно, добротность системы характеризует ее избирательность (селективность).

В заключение отметим, что явление резонанса играет важную роль в природе, технике и науке. С одной стороны, в некоторых случаях оно является нежелательным и может вызвать негативные последствия. Например, если частота собственной килевой качки корабля будет несколько больше частоты набегающих на него волн, то возникает резкое увеличение амплитуды колебаний корабля, фаза которых такова, что его нос «зарывается» в волну. Другой пример – вибрирующие машины, станки, двигатели внутреннего сгорания и др. В процессе работы этих устройств резонансные эффекты могут вызвать, если не принять специальных мер, слишком сильное давление на фундамент или опору, приводящее к их разрушениям. С другой стороны, эффект резонанса лежит в основе работы большого числа разнообразных приборов и устройств. Например, – радиоконтур, СВЧ и оптические резонаторы, амортизирующие устройства.

### 13.3. Контрольные вопросы и задания

1. Возможен ли резонанс в системе (13.1) для значений добротности  $Q < 1/2$ ?
2. Постройте качественный вид осциллограммы переменной  $x(t)$  системы (13.1) в диссипативном случае. Начальные условия  $x(0) = y(0) = 0$ .
3. Получите уравнение, описывающее динамику электрического контура, представленного на рис. 13.1а. Постройте резонансные кривые для тока и напряжений на элементах контура  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Сравните резонансные значения.

## ЛЕКЦИЯ 14

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

*Стандартная форма метода усреднения. Резонанс в нелинейном осцилляторе. Динамика системы укороченных уравнений. Резонансные кривые.*

#### 14.1. Приведение системы к стандартной форме

Рассмотрим неавтономное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, y, t).$$

$(x, y, t)$  эквивалентное системе

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1, \\ \dot{y} &= \varepsilon \omega_1^2 x + f(x, y, t), \end{aligned} \quad (14.1)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\omega_0$  – собственная частота колебательной системы, а функция  $f$  имеет по  $t$  период  $T = 2\pi/\omega_1$ . Система (14.1) моделирует динамику колебательной системы, находящейся под действием внешнего периодического силового воздействия с частотой  $\omega_1$ . Примерами таких систем является электрические нелинейные контура с переменной э.д.с., маятник под воздействием периодически меняющегося вращающего момента, Джозефсоновские сверхпроводящие контакты в случае переменного тока возбуждения и др. Колебания, возникающие в системах в результате такого силового воздействия, как мы знаем, называются вынужденными. С вынужденными колебаниями мы уже встречались при изучении внешнего воздействия на простейшую колебательную систему – линейный осциллятор. Основным явлением, возникающим в такой системе является резонанс. Ясно, что эффект резонанса важен и представляет большой интерес и для нелинейных систем.

Система (14.1) имеет трёхмерное фазовое пространство  $\mathbb{R}^2 \cdot S^1$ , где угловая компонента  $S^1$  отражает периодичность функции  $f$  по переменной  $t$ . В этом пространстве любая плоскость  $t=t_0=const$  является секущей Пуанкаре и траектории системы (14.1) порождают (см. лекцию 6) отображение плоскости

$$\Pi = \{t = t_0, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

на себя через время  $t = T$ , т.е. отображение  $\nabla : \Pi \rightarrow \Pi$ .

Пусть частота внешнего воздействия удовлетворяет условию  $\omega_1 \approx m\omega_0$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Если для какого-либо значения  $m$  в системе (14.1) наблюдается

резонанс, то его называют резонансом порядка  $m^{\text{н}}$ . При этом в системе могут возникнуть периодические колебания как на частоте внешней силы (или близкой к ней,  $m = 1$ ) – гармонические колебания, так и колебания с частотами  $1/m$  (или близкими к ним,  $m = 2, 3, \dots$ ) – субгармонические колебания.

Введём системе (14.1) новые переменные  $a$  и  $b$  следующим образом

$$\begin{aligned} x &= a \cos \frac{t}{m} + b \sin \frac{t}{m}, \\ y &= \frac{a}{m} \sin \frac{t}{m} + \frac{b}{m} \cos \frac{t}{m}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Подставляя (14.2) в (14.1), получим относительно производных  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{db}{dt}$  систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} \cos \frac{t}{m} \frac{da}{dt} + \sin \frac{t}{m} \frac{db}{dt} &= 0, \\ \frac{1}{m} \sin \frac{t}{m} \frac{da}{dt} + \frac{1}{m} \cos \frac{t}{m} \frac{db}{dt} &= \frac{1}{m^2} \left[ \gamma_0^2 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 \right] a \cos \frac{t}{m} + b \sin \frac{t}{m} + f, \end{aligned} \quad (14.3)$$

где в нелинейной функции  $f$  переменные  $x$  и  $y$  также выражены через новые переменные  $a$  и  $b$  с помощью (14.2). Решая систему (14.3) обычным образом, находим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{m}{\gamma_0^2 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2} \left[ \gamma_0^2 a \cos \frac{t}{m} + b \sin \frac{t}{m} + f \sin \frac{t}{m} \right], \\ \frac{db}{dt} &= \frac{m}{\gamma_0^2 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2} \left[ \gamma_0^2 a \cos \frac{t}{m} + b \sin \frac{t}{m} + f \cos \frac{t}{m} \right]. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Из (14.4) следует, что в случае  $\gamma_0^2 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 \neq 0$  система (14.4) имеет стандартную для асимптотических методов форму, к которой применима процедура усреднения, в результате которой получаются укороченная система вида

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= P(a, b), \\ \frac{db}{dt} &= Q(a, b) \end{aligned} \quad (14.5)$$

□ В неавтономных периодических системах, вообще говоря, возможны резонансы и при других соотношениях частот:  $n \omega \approx m \omega_0$ , где  $n$  и  $m$  – некоторые целые взаимно простые числа.

В отличие от системы (14.1), которая является неавтономной, система (14.5) – автономная система на фазовой плоскости. В соответствии с методом усреднения, грубым состояниям равновесия системы (14.5) отвечают грубые периодические траектории системы (14.1) той же устойчивости. С другой стороны, поскольку периодические траектории неавтономной системы соответствуют неподвижным точкам отображения Пуанкаре (см. лекцию 6), то, фактически, метод усреднения можно использовать для изучения этого отображения. Более того, показано, что метод усреднения позволяет исследовать не только неподвижные точки, но и глобальную структуру отображения Пуанкаре. Существует следующее соответствие между траекториями системы (14.5), траекториями отображения Пуанкаре и траекториями системы (14.1). Состояниям равновесия системы (14.5) соответствуют неподвижные точки той же устойчивости отображения Пуанкаре, координаты которых близки к соответствующим координатам состояний равновесия. В частности, седлу системы (14.1) отвечает седловая неподвижная точка отображения Пуанкаре, которой соответствует седловая периодическая траектория системы (14.1). При этом сепаратрисы седла системы (14.5) достаточно хорошо аппроксимируют (с точностью порядка  $O(\epsilon)$ ) инвариантные кривые седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре. Грубому предельному циклу системы (14.5) соответствует замкнутая инвариантная кривая отображения Пуанкаре, которой в системе (14.1) отвечает грубый двумерный инвариантный тор. Устойчивость тора совпадает с устойчивостью предельного цикла.

## 14.2. Резонанс в нелинейном осцилляторе

Рассмотрим динамику слабо диссипативного осциллятора с малой нелинейностью, возникающую под действием малой гармонической силы. Уравнения движений такого осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma_0^2 x = -\epsilon [L_0 \cdot \dot{x} + \beta_0 x^3 + A_0 \cos(\omega t)] \quad (14.6)$$

где параметр  $L_0$  характеризует затухание,  $0 < \beta_0$  – нелинейность, а  $A_0$  – амплитуду внешнего воздействия. Исследуем основной резонанс, т.е.  $\omega \approx \gamma_0$  ( $m=1$ ). В этом случае, вводя новое время  $\tau = \gamma_0 t$  и расстройку частот  $\lambda$ , как

$$\frac{\gamma_0^2}{\omega^2} = 1 + \lambda, \quad (14.7)$$

из (14.4) получим для (14.6) следующую систему в стандартном для метода усреднения виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \left[ \gamma (a \cos \varphi + b \sin \varphi) + \frac{f}{\gamma^2} \sin \varphi \right], \\ \frac{db}{dt} &= \left[ \gamma (a \cos \varphi + b \sin \varphi) + \frac{f}{\gamma^2} \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (14.8)$$

где

$\infty$

$$f \propto \gamma (a \sin \varphi - b \cos \varphi) + \mathbb{R}_0 (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^3 + A_0 \cos \varphi$$

Усредняя систему (14.8), получим следующую систему укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \gamma (b + \mathbb{R} (a^2 + b^2)) - \mathbb{L} a, \\ \dot{b} &= \gamma (a - \mathbb{R} (a^2 + b^2)) - \mathbb{L} b + A, \end{aligned} \quad (14.9)$$

где для удобства введены следующие обозначения

$$\mathbb{R} = \frac{3\mathbb{R}_0}{4\gamma^2}, \quad \mathbb{L} = \frac{\mathbb{L}_0}{2\gamma}, \quad A = \frac{A_0}{\gamma^2},$$

а точкой обозначено дифференцирование по  $t = \tau / 2$ .

#### 14.2.1. Динамика системы укороченных уравнений.

**Консервативный случай.** При  $\mathbb{L}=0$  систему (14.9) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$\dot{a} = \frac{\partial H}{\partial b}, \quad \dot{b} = -\frac{\partial H}{\partial a}, \quad (14.10)$$

где

$$H(a, b) = \frac{\mathbb{R}}{4} (a^2 + b^2)^2 - \frac{\mathbb{L}}{2} (a^2 + b^2) - Aa$$

Представление (14.10) означает, что при  $\mathbb{L} = 0$  система (14.9) является гамильтоновой, а  $H(a, b)$  – функция Гамильтона. Координаты состояний равновесия системы (14.10) задаются следующими уравнениями

$$b = 0, \quad F(a) = 0, \quad (14.11)$$

где

$$F(a) = a^3 - \frac{\mathbb{L}a}{\mathbb{R}} - \frac{A}{\mathbb{R}}$$

Анализируя дискриминант кубического уравнения (14.11), устанавливаем, что при  $\mathbb{L} < 3\mathbb{R}^{-1/3} (A_2)^{2/3}$  система (14.9) имеет единственное состояние равновесия



$O_1(a_1, 0)$ , а при  $\lambda > 3\mathbb{R}^{1/3}(\mathcal{A}_2)^{2/3}$  - три состояния равновесия:  $O_1(a_1, 0)$ ,  $O_2(a_2, 0)$  и  $O_3(a_3, 0)$ , где  $F(a_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  и

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\mathbb{R}}} < a_3 < \sqrt{\frac{\lambda 3}{\mathbb{R}}} < a_2 < 0, \quad a_1 > \sqrt{\frac{\lambda}{\mathbb{R}}}, \quad (14.12)$$

Линеаризовав систему (14.9) в состояниях равновесия, получаем следующее характеристическое уравнение

$$s^2 + \mathbb{R}F''(a_i)(\mathbb{R}q^2 \mp \lambda) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14.13)$$

Из (14.11), (14.12) следует, что состояние равновесия  $O_1$  и  $O_2$  – центры, а  $O_3$  – седло. Принимая это во внимание, анализируя гамильтониан  $H(a, b)$  и векторное поле системы (14.9) на прямых  $a = 0$  и  $b = 0$  устанавливаем вид возможных фазовых портретов (рис.14.1). Обратим внимание на то, что в случае трёх состояний равновесия сепаратрисы седла  $O_3$  образуют две гомоклинические траектории, которые разбивают фазовую плоскость  $(a, b)$  на три различных семейства периодических траекторий (рис.14.1, б). Траектории первого семейства охватывают состояние равновесия  $O_1$ , второго –  $O_2$ , а третьего – все три состояния равновесия.

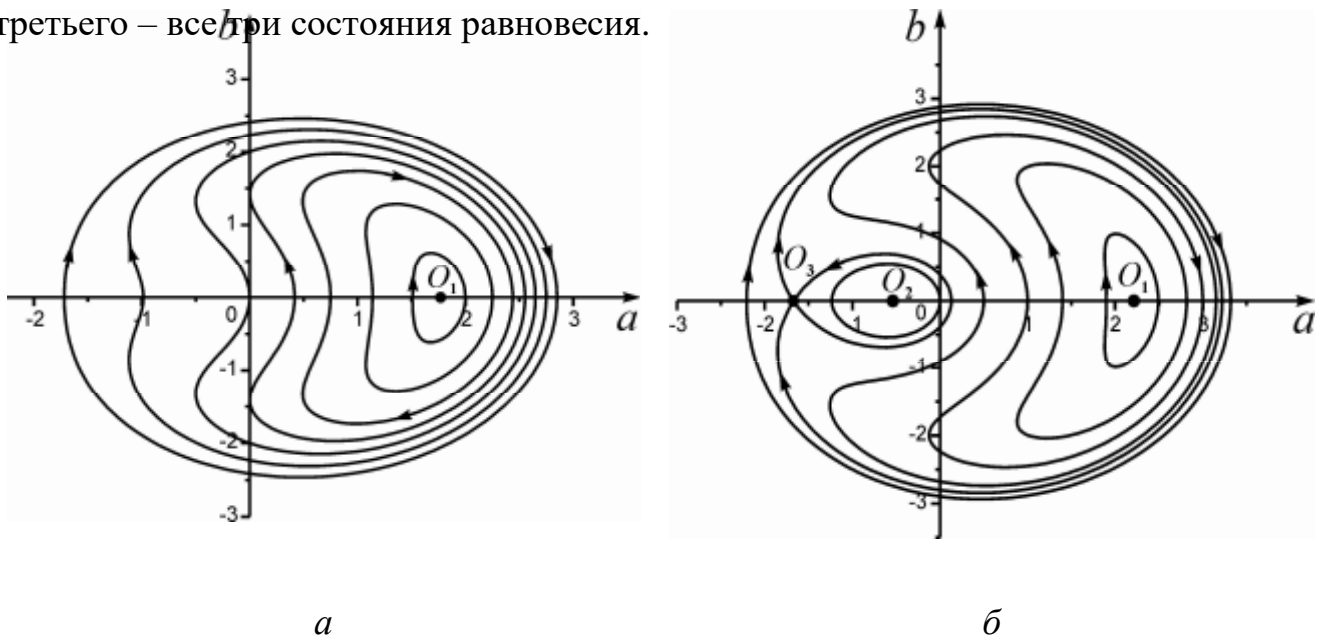


Рис. 14.1. Фазовые портреты системы (14.9): для значений  $\lambda < 3\mathbb{R}^{1/3}(\mathcal{A}_2)^{2/3}$  (а), и для значений  $\lambda > 3\mathbb{R}^{1/3}(\mathcal{A}_2)^{2/3}$  (б). Параметры:  $\mathbb{R} = 1$ ,  $A = 2$ ,  $\lambda = 2$  (а) и  $\lambda = 4$  (б)

**Диссипативный случай.** Нетрудно видеть, что для системы (14.9) выполняется критерий Бендиксона-Дюлака и, следовательно, система (14.9) не имеет (при  $\lambda > 0$ ) предельных циклов. Таким образом, разбиение фазовой плоскости  $(a, b)$  на траектории осуществляют лишь состояния равновесия.





Координаты состояний равновесия системы (14.9) определяются системой нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b + \mathbb{R}(a^2 + b^2) - A = 0, \\ a - \mathbb{R}(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \quad (14.14)$$

Введём новую переменную  $\gamma = a^2 + b^2$  (квадрат амплитуды колебаний) и выразим из системы (14.14) переменные  $a$  и  $b$  через  $\gamma$

$$b = \frac{\sqrt{\gamma}}{A}, \quad a = \frac{\mathbb{R}\gamma^2 - \sqrt{\gamma}}{A} \quad (14.15)$$

Подставляя (14.15) в выражение для  $\sqrt{\gamma}$ , получим следующее уравнение для нахождения координат состояний равновесия

$$\sqrt{\gamma}(\gamma) = 0, \quad (14.16)$$

где

$$\sqrt{\gamma}(\gamma) = \gamma^3 - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\mathbb{R}} + \frac{(\mathbb{R}^2 + \sqrt{\gamma}^2)\gamma - A^2}{2}$$

Анализ дискриминанта кубического уравнения (14.16) показывает, что в зависимости от значений параметров система (14.9) может иметь либо одно, либо три грубых состояний равновесия. При фиксированных  $\mathbb{R}$  и  $A$  полуплоскость  $(\mathbb{R} \in 0, \sqrt{\gamma})$  линиями  $N^+$  и  $N^-$ , где

$$N^\pm = \{(\mathbb{R}, \sqrt{\gamma}) \mid \mathbb{R} > 0, 2\sqrt{\gamma}(\mathbb{R}^2 + \sqrt{\gamma}^2) - 27\mathbb{R}A^2 \mp 2(\mathbb{R}^2 - 3\sqrt{\gamma}^2)^{3/2} = 0\},$$

разбивается на две области (рис.14.2). Линия  $N^+$  является монотонно убывающей функцией и имеет вертикальную асимптоту, а линия  $N^-$  достигает максимума при  $\mathbb{R}=0$ . Линии  $N^+$  и  $N^-$  смыкаются в точке  $N^0$  с координатами

$\mathbb{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{R}^{1/3}A^{2/3}$ ,  $\sqrt{\gamma} = \frac{3}{2}\mathbb{R}^{1/3}A^{2/3}$ . В области 1 система (14.9) имеет единственное состояние равновесия, а в области 2 – три состояния равновесия:  $P_i(a_i, b_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $a_i, b_i$  определяются соотношениями (14.15), в которых  $\gamma = \gamma_i$  – корни уравнения (14.16), удовлетворяющие условием

$$0 < \gamma_2 < \gamma_{\max} < \gamma_3 < \gamma_{\min} < \gamma_1, \quad (14.17)$$

где

$$\gamma_{\min, \max} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{3\mathbb{R}^\pm} \frac{\sqrt{\mathbb{R}^2 - 3\sqrt{\gamma}^2}}{3\mathbb{R}}.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для состояний равновесия  $P_i$ , которое имеет следующий вид (получить самостоятельно)

$$s^2 + 2\zeta s + \omega^2 \sqrt{2}(\gamma_i) = 0 \quad (14.18)$$

Из (14.17) следует, что  $\sqrt{2}(\gamma_1) > 0$ ,  $\sqrt{2}(\gamma_3) < 0$ ,  $\sqrt{2}(\gamma_2) > 0$  и, следовательно, точка  $P_3$  является седлом, а  $P_1$  и  $P_2$  – асимптотически устойчивыми состояниями равновесия. Состояние равновесия  $P_1$  – устойчивый фокус для параметров на

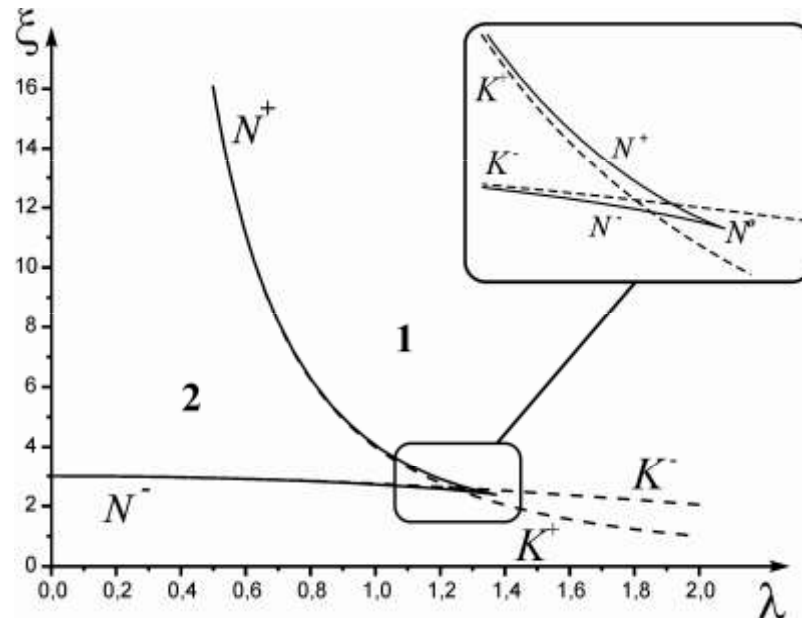


Рис.14.2. Разбиение полуплоскости параметров  $\zeta$  и  $\omega$  на области с различным числом состояний равновесия системы (14.9). Параметры:  $A = 2$ ,  $\omega = 1$ .

плоскости  $(\zeta, \omega)$  ниже линии

$$K^+ = \{ (\zeta, \omega) \mid \omega > 0, \zeta = A^2 \omega^2 \}$$

и устойчивый узел над этой линией (рис.14.2). Состояние равновесия  $P_2$  устойчивый фокус для параметров выше линии

$$K^- = \{ (\zeta, \omega) \mid \omega > 0, 4\zeta^3 + 9\omega^2 \zeta - 27A^2\omega = 0 \}$$

и устойчивый узел ниже этой линии (рис. 14.2). Принимая во внимание взаимное расположение линий  $K^+, K^-$  и  $N^+, N^-$  устанавливаем, что линии  $N^+$  и  $N^-$  являются бифуркационными и соответствуют образованию седло-узловых состояний равновесия. Точка  $N^0$  является бифуркационной точкой коразмерности 2, соответствующей образованию на фазовой плоскости трёхкратного равновесия от слияния двух устойчивых узлов  $P_1$  и  $P_2$  и седла  $P_3$ .

Поскольку система (14.9) не имеет предельных циклов, то проведённое исследование состояний равновесия позволяет полностью установить динамику этой системы. Для значений параметров из области 1 существует единственное

состояние равновесия, которое притягивает все траектории системы (14.9) (рис. 14.3а). Для значений параметров из области 2 система (14.8) является бистабильной – в зависимости от начальных условий в системе устанавливается либо состояние равновесия  $P_1$ , либо  $P_2$  (рис. 14.3, б – г). Области притяжения этих состояний равновесия, имеющие достаточно сложную форму, отделяются входящими сепаратрисами седла  $P_3$ . Неустойчивые сепаратрисы седла  $P_3$  стремятся к состоянию равновесия  $P_1$  и  $P_2$ .

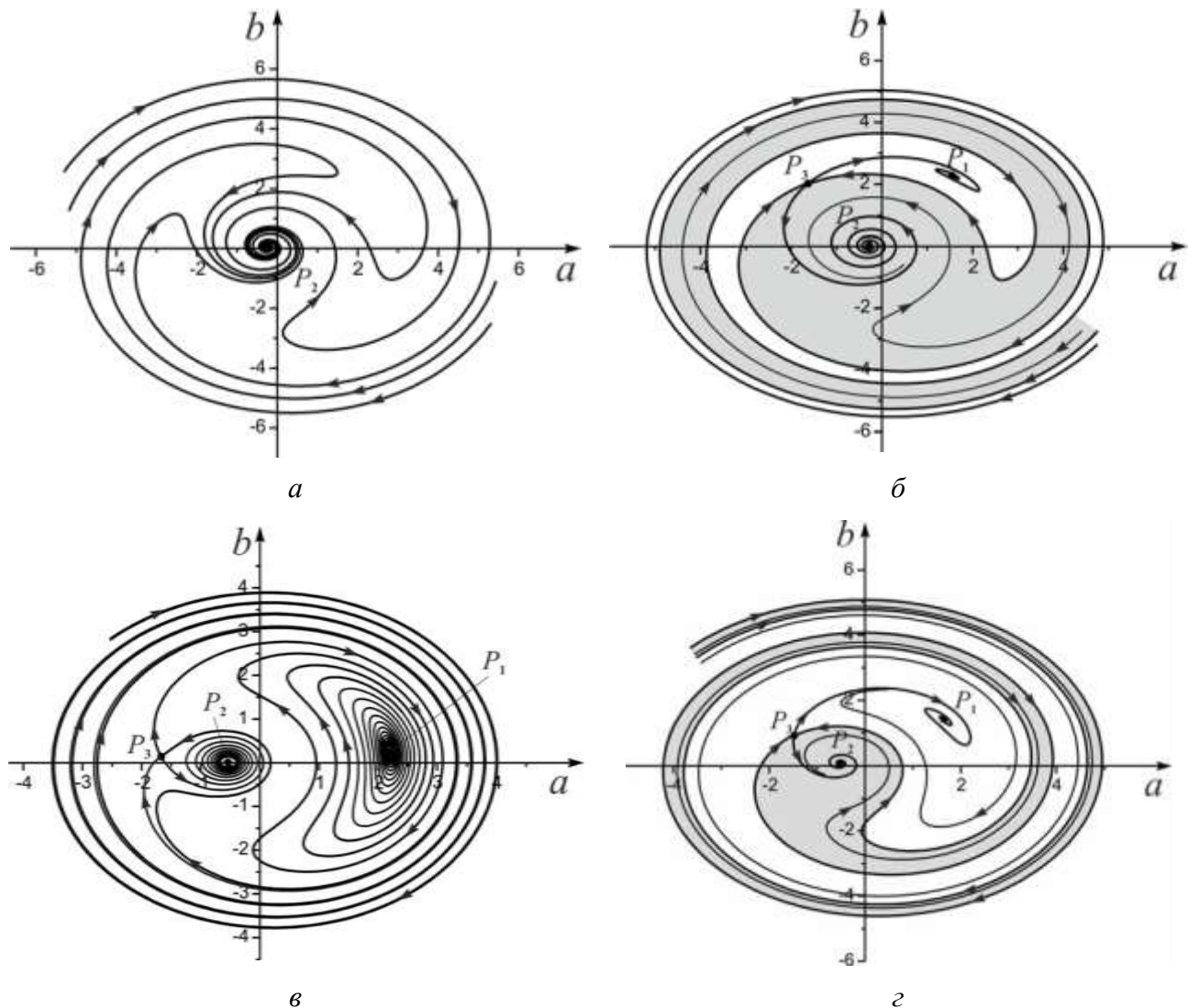


Рис.14.3. Фазовые портреты системы (14.8) в случае  $\lambda > 0$ : для значений параметров из области 1 (а); из области 2 (б) – (г). Параметры:  $\lambda = 1.2$ ,  $\mu = 8$  (а),  $\lambda = 0.6$ ,  $\mu = 7.2$  (б),  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu = 4$  (в),  $\lambda = 0.6$ ,  $\mu = 4$  (г).

## 14.2.2. Вынужденные колебания и резонансные кривые

Состоянием равновесия системы (14.8) отвечают неподвижные точки отображения Пуанкаре и, следовательно, периодические движения исходной неавтономной системы (14.5).

Поскольку координаты неподвижных точек близки к координатам соответствующих состояний равновесия усредненной системы (14.9), сохраним для них обозначения  $P_i, i=1,2,3$ . В силу (14.2) частота этих периодических колебаний равна частоте внешнего гармонического воздействия, т.е. возникшие колебания являются вынужденными. Рассмотрим возможный вид резонансных кривых, определяемых вынужденными колебаниями нелинейного осциллятора.

**Консервативный случай.** Из (14.16) следует, что при  $\ell = 0$  существует два вида резонансных кривых

$$R^\pm = \langle \rangle, \ell = 0 \rangle \pm \frac{A}{\sqrt{\gamma}}$$

На плоскости  $(\gamma, \ell)$  кривые  $R^+$  и  $R^-$  имеют одну и ту же наклонную ( $\ell = 0$ ) и вертикальную ( $\gamma = 0$ ) асимптоты. Нетрудно получить, что кривая  $R^-$  является монотонно возрастающей функцией, а кривая  $R^+$  имеет минимум в точке  $\gamma = \gamma_{\min}$ ,  $\ell = \ell_{\min}$ , где

$$\ell_{\min} = 3\sqrt{\frac{A^2}{\gamma_{\min}}}, \quad \gamma_{\min} = \frac{A^2}{2\ell_{\min}^2}$$

Из результатов раздела 14.2.1 следует, что всем точкам кривой  $R^-$  соответствуют устойчивые вынужденные колебания осциллятора, а кривая  $R^+$  состоит из двух частей. Части кривой  $R^+$ , расположенной при  $\gamma < \gamma_{\min}$ , соответствуют устойчивые, а части расположенной при  $\gamma > \gamma_{\min}$  — неустойчивые вынужденные колебания (рис. 14.4а) осциллятора (14.5).

**Диссипативный случай.** Как и в предыдущем случае, при  $\ell > 0$  резонансные кривые задаются двумя линиями

$$R^\pm = \langle \rangle, \ell = 0 \rangle \pm \sqrt{\frac{A^2}{\gamma} - \ell^2}$$

определёнными при  $\gamma \geq A^2/\ell^2$ . При  $\gamma = A^2/\ell^2$  линии  $R^+$  и  $R^-$  имеют общую точку  $\ell = A^2/\ell^2$  (рис. 14.4б), в которой касательная к этим линиям имеет

вертикальный наклон  $\frac{d\ell}{d\gamma} = \infty$ . Линии  $R^+$  и  $R^-$  имеют вертикальную

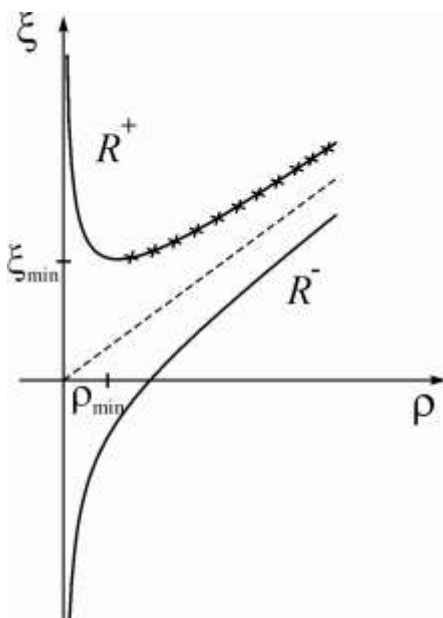
касательную  $\gamma = 0$ . Нетрудно видеть, что линия  $R^-$  является монотонно возрастающей функцией. Линия  $R^+$  в зависимости от величины амплитуды  $A$  может как иметь экстремумы, так и быть монотонной. Действительно, для линии  $R^+$  имеем



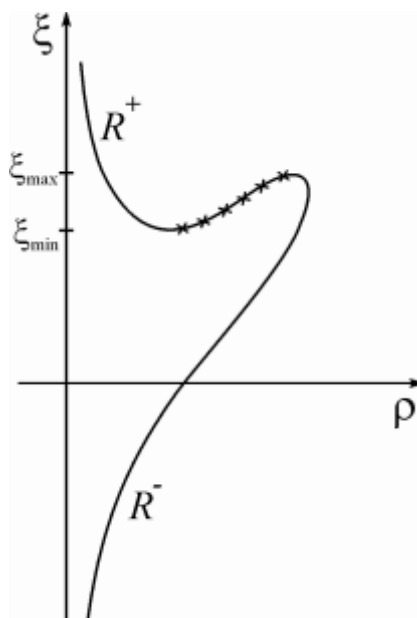
$$\frac{d\langle \rangle}{d\langle \rangle} = \frac{2\langle \rangle J(\langle \rangle) A^2 / 2\langle \rangle}{2J(\langle \rangle)}, \quad (14.19)$$

где

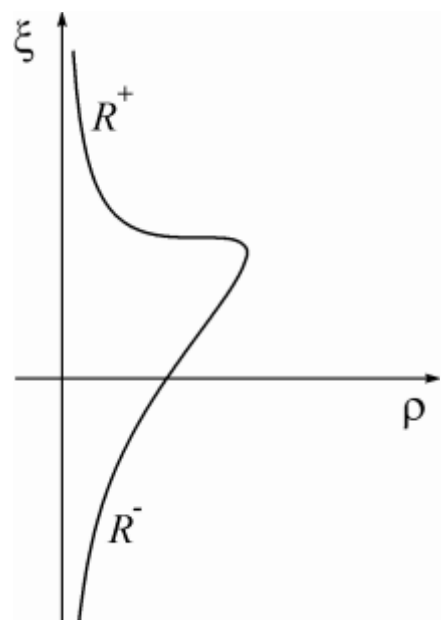
$$J(\langle \rangle) = \sqrt[3]{A^2 \langle \rangle^2}.$$



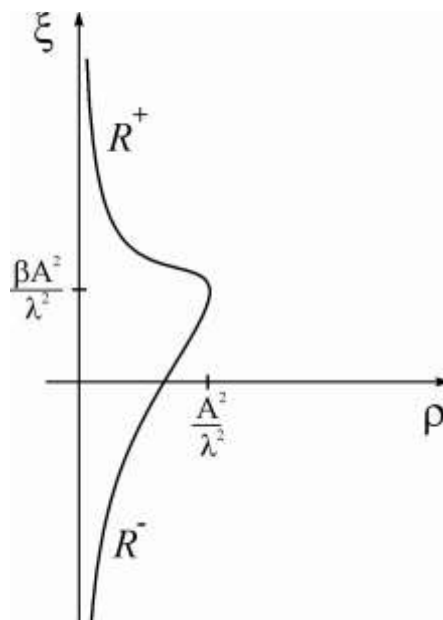
*a*



*б*



*в*



*г*

Рис.14.4. Резонансные кривые нелинейного осциллятора (14.5): в случае  $l=0$  (*a*); в случае  $l>0$  для значений  $A>A^0$  (*б*),  $A=A^0$  (*в*),  $A<A^0$  (*г*). Неустойчивые ветви отмечены крестиками.

Очевидно, что

$$J(0) = J\left[\frac{A^2}{4}\right] = 0$$

и  $J(\gamma)$  имеет единственный экстремум – максимум при  $\gamma = \frac{3A^2}{4}$  и

$$J\left[\frac{3A^2}{4}\right] = \frac{3^{\frac{3}{2}} A^4}{16^{\frac{3}{2}}}$$

Принимая во внимание эти свойства функции  $J(\gamma)$ , устанавливаем следующее

$$\begin{aligned} J(\gamma) &< \frac{A^2}{2\mathbb{R}} \quad \text{если } A < A^0 \\ J\left(\gamma, \frac{A^2}{2\mathbb{R}}\right) &= \frac{3A^2}{4\mathbb{L}^2}, \quad \text{если } A = A^0 \\ J(\gamma) &> \frac{A^2}{2\mathbb{R}} \quad \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max} \\ J(\gamma_{\min}) &= J(\gamma_{\max}) = \frac{A^2}{2\mathbb{R}}, \quad \text{если } A > A^0 \\ J(\gamma) &< \frac{A^2}{2\mathbb{R}} \quad \gamma < \gamma_{\min}, \gamma > \gamma_{\max} \end{aligned} \quad (14.20)$$

где  $A^0 = \frac{(2\mathbb{L})^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}\mathbb{R}^{\frac{1}{2}}}$ . В силу (14.19) из (14.20) следует, что на плоскости  $(\gamma, \mathbb{L})^3$  линия  $R^+$  при  $A < A^0$  монотонно убывает (рис. 14.4г), при  $A = A^0$  она имеет точку перегиба и также убывает при всех  $\gamma$  (рис. 14.4в), а при  $A > A^0$  – имеет два экстремума (рис. 14.4б). В предыдущем разделе мы установили, что в осцилляторе (14.6) возможны как устойчивые, так и неустойчивые вынужденные колебания. Выделим среди резонансных кривых, ветви, соответствующие устойчивым колебаниям. Легко показать, что

$$\sqrt{2}_{R^+} > 0, \quad \sqrt{2}_{R^+} = \frac{2\Upsilon}{\mathbb{R}} \frac{A^2}{2\mathbb{R}} J'(\gamma) \quad (14.21)$$

Из характеристического уравнения (14.18), при учёте (14.20) и (14.21), получаем, что при  $A \leq A^0$  обеим линиям  $R^+$  и  $R^-$  соответствуют устойчивые колебания осциллятора (рис. 14.4в–г), а при  $A > A^0$  на  $R^+$  имеется неустойчивая ветвь (рис. 14.4б).



### 14.3. Режим вынужденных колебаний

Для достаточно «слабых» амплитуд внешнего воздействия,  $A \delta A^0$ , при любых начальных условиях в нелинейном осцилляторе (14.6) устанавливается режим вынужденных колебаний. При этом, для каждого значения расстройки  $\lambda$  однозначно определена единственная амплитуда колебаний (рис. 14.4в–г). Такое же поведение демонстрирует осциллятор (14.5) и в случае  $A > A^0$ , но лишь, когда расстройка  $\lambda$  удовлетворяет неравенствам  $\lambda > \lambda_{\max}$ ,  $\lambda < \lambda_{\min}$  (рис. 14.4б). Если же  $\lambda \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ , то в осцилляторе одновременно существуют два устойчивых режима вынужденных колебаний –  $L_1$  и  $L_2$ , отвечающих периодическим движением соответствующим неподвижным точкам  $P_1$  и  $P_2$  отображения Пуанкаре. Области притяжения режимов  $L_1$  и  $L_2$  в фазовом пространстве осциллятора (14.6) разделены устойчивыми многообразиями седлового периодического движения, отвечающего неподвижной точке  $P_3$  (рис. 14.3в–г). Следовательно, для  $\lambda \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$  в осцилляторе (14.6), в зависимости от начальных условий, реализуется один из двух режимов вынужденных колебаний –  $L_1$  или  $L_2$ . Однако, если в начальный момент расстройка  $\lambda$  принадлежит одному из интервалов  $\lambda > \lambda_{\max}$  или  $\lambda < \lambda_{\min}$ , эта неоднозначность в выборе режима вынужденных колебаний исчезает. Действительно, пусть для определённости в начальный момент  $\lambda > \lambda_{\max}$ . В соответствии с диаграммой, представленной на рис. 14.4б, в осцилляторе устанавливается режим вынужденных колебаний  $L_2$ , амплитуда которого задаётся линией  $R^+$ . Будем теперь уменьшать квазистатически расстройку  $\lambda$ . Поскольку режим  $L_2$  остаётся устойчивым для всех  $\lambda > \lambda_{\min}$ , при таком изменении  $\lambda$  амплитуда вынужденных колебаний будет плавно нарастать вплоть до значения  $\lambda = \lambda_{\min}$ . При  $\lambda = \lambda_{\min}$  происходит седло – узловая бифуркация периодических движений и режим  $L_2$  разрушается. При  $\lambda > \lambda_{\min}$  в осцилляторе (14.5) «скачком» возникает режим вынужденных колебаний  $L_1$ . При дальнейшем квазистатическом уменьшении расстройки  $\lambda$  амплитуда колебаний плавно изменяется. Рассмотрим теперь эволюцию режимов вынужденных колебаний при увеличении расстройки  $\lambda$ . Пусть в начальный момент  $\lambda < \lambda_{\min}$ . В этом случае в осцилляторе (14.5) при любых начальных условиях устанавливается режим  $L_1$ . При увеличении расстройки  $\lambda$  режим  $L_1$  продолжает существовать до значения  $\lambda = \lambda_{\max}$ , при котором он исчезает через седло – узловую бифуркацию периодических движений. Это приводит к скачкообразному уменьшению амплитуды вынужденных колебаний, поскольку в осцилляторе реализуется режим  $L_2$ . Дальнейшее уменьшение амплитуды вынужденных колебаний происходит плавно.

Таким образом, нелинейность модели существенно изменила динамику неавтономного осциллятора. В системе стало возможным одновременное существование двух режимов вынужденных колебаний. Рождение и исчезновение этих режимов при вариации расстройки носит гистерезисный характер и происходит в виде скачка амплитуды колебаний.

#### **14.4. Контрольные вопросы и задания**

1. Построить резонансные кривые для случая  $\mathcal{R} < 0$ .
2. Найти, используя (14.18), уравнение линий  $K^+$  и  $K^-$ .
3. Возможно ли скачкообразное изменение амплитуды вынужденных колебаний в консервативном случае?

## ЛЕКЦИЯ 15

### ВЫНУЖДЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*Динамика укороченной системы. Отображение Пуанкаре. Режим синхронизма и его характеристики.*

Синхронизация автоколебаний – фундаментальное явление естествознания и техники, лежащее в основе формирования ритмических соотношений в нелинейных системах. Это явление широко распространено как в природе и повседневной жизни человека, так и в науке и технике. Например, синхронная генерация звуковых колебаний духовыми и смычковыми музыкальными инструментами, вызванная управлением дирижера игрой музыкантов оркестра, синхронные движения танцоров ансамбля и марширующих солдат, синхронные взмахи крыльев птиц, летящих в стае и др. Принято считать, что первое научное описание явления синхронизации было сделано Х.Гюйгенсом еще в XVII веке. Он изобрел и изготовил маятниковые часы с достаточно точным ходом. Изучая их свойства, Гюйгенс обнаружил явление, которое его поразило. Вот как он описал свои наблюдения: «Двое таких часов висели на одной и той же балке, покоящейся на двух опорах. Оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, а колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тиканье обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если искусственно нарушалось это совпадение, то оно само восстанавливалось в короткое время».

В настоящее время явление синхронизации обнаружено в системах самой различной природы и нашло практическое применение при построении систем и устройств во многих областях науки и техники. Например, ключевую роль эффекты синхронизации играют в процессах обработки и передачи информации, осуществляемых центральной нервной системой. Эти процессы сопровождаются формированием и разрушением синхронных паттернов активности, образованных группами нейронов, одновременно находящихся в состоянии генерации так называемых потенциалов действия (электрических импульсов). В энергетике явление синхронизации используется для обеспечения совпадения частот нескольких электрогенераторов переменного тока, работающих параллельно на общую нагрузку. Явление синхронизации применяется также для стабилизации частоты генераторов, демодуляции сигналов, в системах точного времени и др. В современных системах радиолокации и радиосвязи находят широкое применение системы автоматической синхронизации, в которых синхронизация генератора осуществляется сигналом через петлю обратной связи, реализующей автоматическое управление по фазе и частоте (подробнее см. лекции 4 и 6).

Несмотря на столь широкое разнообразие систем, в которых происходят процессы синхронизации, динамические механизмы этого явления обладают большой общностью. В этой лекции мы познакомимся с одним из них.

По способу взаимодействия автоколебательных систем различают вынужденную (принудительную) и взаимную синхронизации. Вынужденная – синхронизация в автоколебательной системе, вызванная действием внешнего сигнала, который осуществляет на нее однонаправленное воздействие. Взаимная – синхронизация, возникающая в процессе обоюдного действия систем друг на друга (например, явление синхронизации, описанное Гюйгенсом, возникающее за счет взаимодействия маятниковых часов через балку, на которой они подвешены). Здесь мы рассмотрим основы теории вынужденной синхронизации, которые были заложены в работах Ван-дер-Поля, Андронова и Витта.

Рассмотрим автоколебательную систему, т.е. систему, в фазовом пространстве которой существует устойчивый предельный цикл. Пусть на эту систему действует внешнее периодическое воздействие, частота которого близка к частоте автоколебаний. Примерами таких систем являются ламповый генератор Ван-дер-Поля с гармоническим источником питания в колебательном контуре, генератор на полевом транзисторе с контуром в цепи затвора при внешнем гармоническом воздействии и др. Рассмотрим для определенности явление вынужденной синхронизации на примере генератора Ван-дер-Поля, динамика которого в безразмерных переменных и параметрах описывается системой следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \left[ \left( x + \left( \frac{1}{2} x^2 \right) y + E_0 \cos t \right) \right], \end{cases} \quad (15.1)$$

где  $0 < \epsilon \ll 1$ ,  $\epsilon$  – расстройка,  $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 + \epsilon$ ,  $\omega_0$  – частота собственных автоколебаний, а  $\omega$  и  $E_0$  – соответственно частота и амплитуда внешнего воздействия. В автономном случае ( $\epsilon = 0$ ,  $E_0 = 0$ ) на фазовой плоскости  $(x, y)$  существует (см. лекцию 12) устойчивый предельный цикл, которому отвечают автоколебания с амплитудой близкой к значению, равному 2 и частотой  $\omega_0$  и 1.

Исследуем теперь динамику неавтономной системы. Система (15.1) имеет трехмерное фазовое пространство  $G = \mathbb{R}^2 \cdot S^1$ . Траектории системы (15.1) порождают (см. лекцию 6) отображение Пуанкаре  $P$  глобальной секущей

$$\Sigma = \{t = t_0 = \text{const}, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

в себя. Установим структуру отображения  $P$ , используя метод усреднения.

## 15.1. Динамика укороченной системы

Для исследования динамики системы (15.1) воспользуемся методом Вандер-Поля (см. лекцию 12) в комплексной форме записи. Будем искать решение системы (15.1) в виде

$$\begin{aligned} x &= z e^{it} + z^* e^{-it}, \\ y &= i(z e^{it} - z^* e^{-it}) \end{aligned} \quad (15.2)$$

где  $i^2 = -1$ , а  $z$  и  $z^*$  - комплексная и комплексно-сопряженные переменные, удовлетворяющие условию

$$\dot{z} e^{it} + \dot{z}^* e^{-it} = 0. \quad (15.3)$$

После подстановки (15.2) в (15.1) стандартных выкладок метода усреднения, получим укороченное уравнение следующего вида

$$2\dot{z} = i(z + z^2 z^*) - \frac{iE_0}{2} \quad (15.4)$$

Сделаем в (15.4) замену времени  $t = \frac{\tau}{2}$  и перейдем к действительным переменным  $\varphi$  и  $\psi$ , которые определим как  $z = \varphi e^{i\psi}$ . В результате уравнение (15.4) перепишется в виде следующей эквивалентной системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \varphi + E \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= \varphi^2 + E \sin \psi, \end{aligned} \quad (15.5)$$

где  $E = \frac{E_0}{2}$ , а  $\psi$  и  $\varphi$  характеризуют соответственно фазу колебаний автоколебательной системы по отношению к внешнему воздействию и их амплитуду. Система (15.5) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $g = S^1 \cdot \mathbb{R}$  и содержит два параметра  $\varphi$  и  $E$ . Исследуем динамику системы (15.5) в области  $E^2 < \frac{4}{27}$ , т.е. в наиболее интересном случае достаточно слабого внешнего воздействия, когда автоколебательные свойства системы должны в наибольшей степени проявиться. Будем рассматривать систему (15.5) лишь на верхнем полуцилиндре  $g^+$ , поскольку  $\varphi > 0$ , и, за редким исключением, при  $\varphi \rightarrow 0$ , поскольку она инвариантна относительно замены  $\psi = \pi - \psi$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi$ .

Прежде всего исследуем состояния равновесия системы (15.5), координаты которых определяются системой

$$\begin{aligned} \varphi + E \cos \psi &= 0, \\ \varphi^2 + E \sin \psi &= 0 \end{aligned} \quad (15.6)$$



Исключая из системы (15.6) переменную  $\Pi$ , получим уравнения

$$F(r) = 0, \quad (15.7)$$

где  $r = \lambda^2$  и  $F(r) = r^3 - 2r^2 + (1 + \lambda^2)r - E^2$ . Найдем дискриминант кубического уравнения (15.7)

$$Q = \frac{\left(\lambda^2 - \frac{1}{3}\right)^3}{27} + \frac{\frac{1}{27} + \frac{2\lambda^2}{3} - E^2}{4}. \quad (15.8)$$

Как известно, кубическое уравнение будет иметь три действительных корня, если  $Q < 0$  и один действительный корень, если  $Q > 0$ . Из уравнения  $Q = 0$  находим, что разбиение области параметров  $\lambda \in 0, 0 < E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$  на подобласти, соответствующие различному числу действительных корней уравнения (15.7) осуществляется кривой

$$E_{1,2} = \lambda, E \mid E = \sqrt{\frac{2}{27} \left(1 + 9\lambda^2 - \left(\lambda^2 - \frac{1}{3}\right)^3\right)^{1/2}} \quad (15.9)$$

Стандартный анализ этой кривой показывает, что она состоит из двух ветвей, выходящих из начала координат. Одна из ветвей, расположенная при  $\lambda > 0$ , является монотонно возрастающей, а другая, расположенная при  $\lambda < 0$ , - монотонно убывающей функцией (рис. 15.1a). При этом касательные к  $E_{1,2}$  в точке  $\lambda = 0$  имеют соответственно наклон плюс и минус единица. Следовательно, на плоскости  $(\lambda, E)$  существует область  $S$  (рис. 15.1a), для точек которой уравнение (15.7) имеет три действительных корня, а вне  $S$  - один действительный корень. Несложное исследование функции  $F(r)$  показывает, что в случае  $(\lambda, E) \in S$  все действительные корни  $r = r_i(\lambda, E)$ ,  $i = 1, 2, 3$  уравнения (15.7) являются положительными. Введем для определенности следующее упорядочение корней

$$r_1(\lambda, E) > r_2(\lambda, E) > r_3(\lambda, E) > 0. \quad (15.10)$$

Получим ряд, необходимых в дальнейшем, свойств корней уравнения (15.7). Непосредственно из определения функции  $F(r)$  имеем

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{4}{27} - E^2 + \frac{\lambda^2}{3} > 0, \quad r_{\max} > \frac{1}{3}; \\ r_{\min} &> \frac{1}{2}; \quad F(1) &= \lambda^2 - E^2. \end{aligned} \quad (15.11)$$





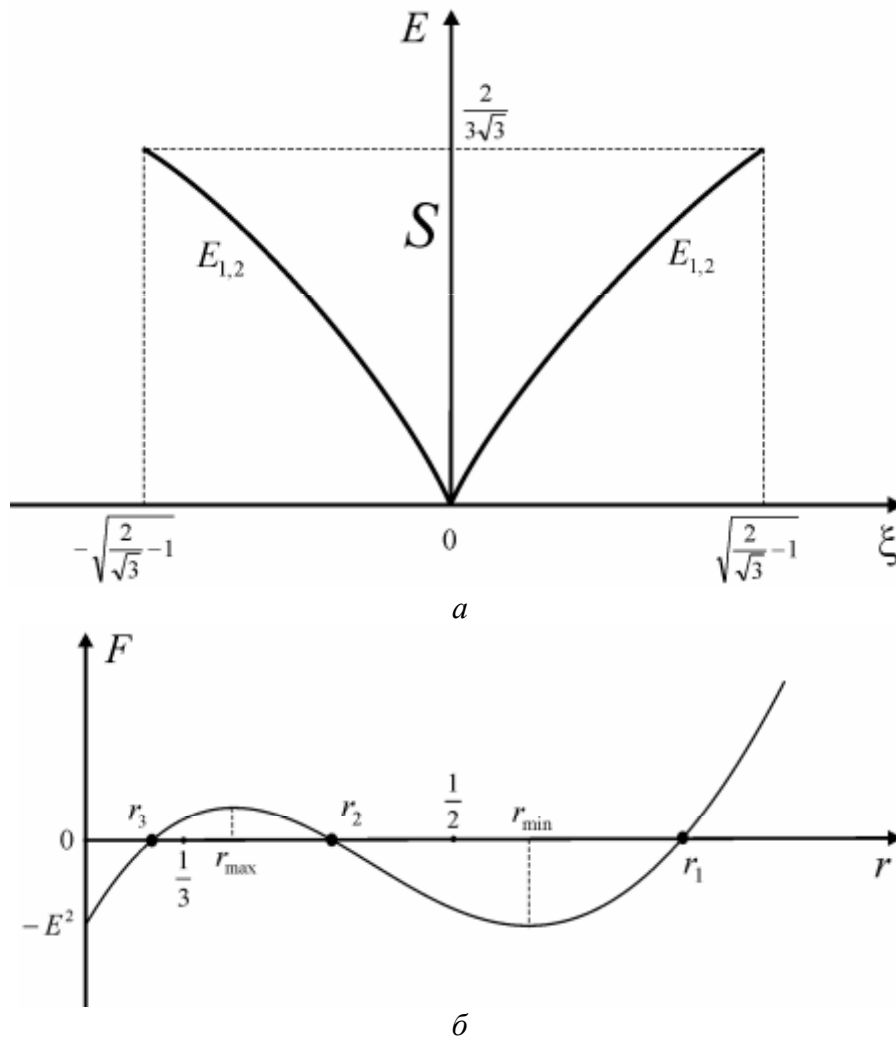


Рис. 15.1. Область  $S$  на плоскости  $(\ell, E)$  (а) и качественный вид функции  $F(r)$  для

значений параметров  $(\ell, E) \in S$ , где  $r_{\max} = \frac{2 \mp \sqrt{1 \mp 3\ell^2}}{3}$  (б)

Из (15.11), очевидно (см. рис. 15.1б), вытекают следующие свойства корней

$$\begin{aligned}
 r_3(\ell, E) &< 1/3 < r_2(\ell, E); \quad r_1(\ell, E) > 1/2; \\
 r_1(\ell, E) &< 1, \text{ если } E < \ell, \\
 r_1(\ell, E) &= 1, \text{ если } E = \ell, \\
 r_1(\ell, E) &> 1, \text{ если } E > \ell.
 \end{aligned}
 \tag{15.12}$$

При  $(\ell, E) \in E_{1,2}$  корни  $r = r_1(\ell, E)$  и  $r = r_2(\ell, E)$  сливаются, образуя двукратный корень, который затем исчезает и для параметров вне области  $S$  уравнение (15.7) имеет единственный действительный корень  $r = r_3(\ell, E)$ .

Подставляя теперь корни  $r = r_i(\ell, E)$  в систему (15.6), находим значения переменной



$$\Pi = \Pi(\lambda, E) \alpha + \arctg \frac{1 - r(\lambda, E)}{\lambda}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (15.13)$$

Таким образом, система (15.5) в зависимости от значения параметров может иметь от одного до трех состояний равновесия, которые обозначим через  $O_1(\lambda_1, \gamma_1)$ ,  $O_2(\lambda_2, \gamma_2)$  и  $O_3(\lambda_3, \gamma_3)$ , где  $\gamma_i(\lambda, E) = r(\lambda, E)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Исследуем устойчивость состояний равновесия. Линеаризовав систему (15.5), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p(O_i)\lambda + q(O_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15.14)$$

где

$$\begin{aligned} p(O_i) &= \frac{E}{\gamma_i} \sin \Pi_i - (1 - 3\gamma_i^2) \\ q(O_i) &= \frac{E}{\gamma_i^2} \cos^2 \Pi_i - \frac{E}{\gamma_i} \sin \Pi_i (1 - 3\gamma_i^2) \end{aligned} \quad (15.15)$$

Подставляя в (15.15) значение  $\Pi$  из (15.13), получим,

$$\begin{aligned} \text{что } p(O_i) &= 2\gamma_i(1 - \gamma_i^2) = 2(2r - 1) \\ q(O_i) &= \lambda^2 - (3\gamma_i^2) \lambda_i^2 + 1 = F_2(r) \end{aligned} \quad (15.16)$$

Из (15.16), в силу условий (15.12), следует, что  $p(O_1) > 0$ , и, следовательно, состояние равновесия  $O_1$  является асимптотически устойчивым;  $q(O_2) < 0$  и, следовательно, состояние равновесия  $O_2$  - седло;  $p(O_3) < 0$ ,  $q(O_3) > 0$  и, следовательно, состояние равновесия  $O_3$  является либо неустойчивым узлом, либо неустойчивым фокусом.

Перейдем теперь к исследованию нелокальных свойств траекторий системы (15.5). Покажем, что в  $g^+$  существует инвариантная область. Непосредственно из (15.5) имеем

$$\dot{\gamma} = \gamma(1 - \gamma^2 + E \sin \Pi) \delta \gamma(1 - \gamma^2 + E) \quad (15.17)$$

Потребуем, чтобы

$$\gamma(1 - \gamma^2 + E) < 0 \quad (15.18)$$

Нетрудно показать, что неравенство (15.18) выполняется для всех  $\gamma > \gamma_1(0, E)$ , где, напомним,  $\gamma_1(0, E)$  - наибольший действительный корень уравнения (15.7) в случае  $\lambda = 0$ . Следовательно, в области  $\gamma > \gamma_1(0, E)$  для любых траекторий выполняется неравенство  $\dot{\gamma} < 0$  и поэтому с течением времени они приходят в область  $\gamma \in (\gamma_1(0, E), 1)$  и из неё не выходят. С другой стороны,

$$\dot{\gamma}|_{\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} + E \sin \Pi > 0, \quad \text{если} \quad E < \frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (15.19)$$

Введем в  $g^+$  область (см. рис. 15.2)

$$A = \left\{ \Pi \in [0, 2\pi], \rho \in \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \rho_1(0, E) \right] \right\}$$

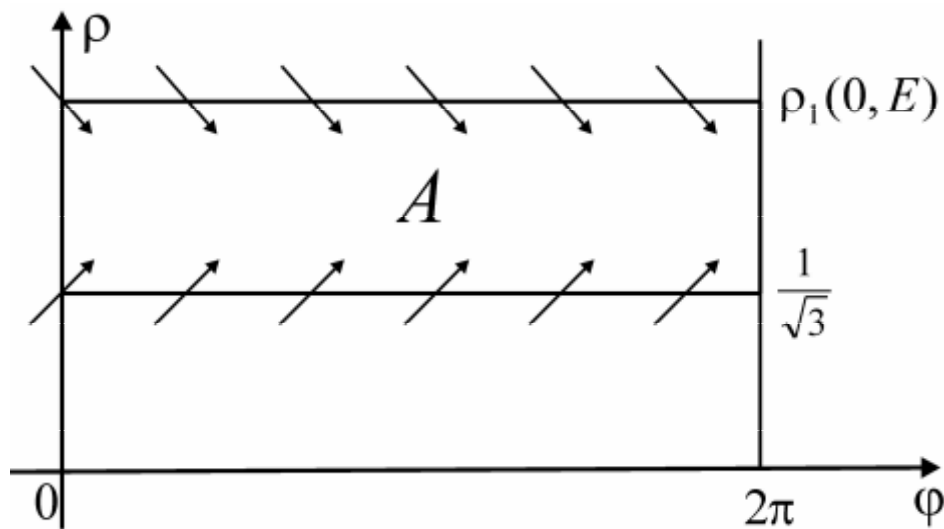


Рис. 15.2. Качественный вид инвариантной области  $A$  при  $\ell > 0$ .

В силу (15.17)-(15.19) любая траектория системы (15.5) с начальными условиями  $(\Pi(0), \dot{\Pi}(0)) \in A$  остается в  $A$  при любом  $t > 0$ , т.е.  $A$  инвариантная область системы (15.5). В частности, в силу условий (15.12) области  $A$  принадлежат состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$ .

### 15.1.1. Динамика при отсутствии расстройки

При  $\ell = 0$  из первого уравнения в (15.5) следует, что прямые  $\Pi = \pi/2$  и  $\Pi = 3\pi/2$  (мы рассматриваем фазовое пространство  $g^+$ , отождествляя прямые  $\Pi = 0$  и  $\Pi = 2\pi$ ) являются инвариантными прямыми системы (15.5), на которых определены соответствующие уравнения первого порядка. На прямой  $\Pi = \pi/2$  определено уравнение

$$\dot{\rho} = \rho \left( \left( \frac{\rho}{\sqrt{3}} \right)^2 - E \right) \quad (15.20)$$

Из условий (15.12), (15.13) вытекает, что уравнение (15.20) имеет единственное устойчивое состояние равновесия  $\rho = \rho_1(0, E)$  к которому асимптотически приближаются все другие траектории. Динамика на прямой  $\Pi = 3\pi/2$  определяется уравнением

$$\dot{\rho} = \rho \left( 1 - \left( \frac{\rho}{\sqrt{3}} \right)^2 - E \right). \quad (15.21)$$

Согласно (15.12), (15.13) уравнение (15.21) имеет два состояния равновесия, одно из которых -  $\gamma = \gamma_2(0, E)$  является устойчивым, а другое -  $\gamma = \gamma_3(0, E)$  - неустойчивым. Учтем теперь динамику переменной  $\Pi$ . Несложный анализ первого уравнения системы (15.5) показывает, что

$$\begin{aligned} \Gamma > 0, \quad \text{если} \quad 0 < \Pi < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{2} < \Pi < 2\pi, \\ \Gamma < 0, \quad \text{если} \quad \frac{\pi}{2} < \Pi < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Принимая во внимание условия (15.22), существование инвариантных прямых  $\Pi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Pi = \frac{3\pi}{2}$  и динамику переменной  $\gamma$  на них, устанавливаем фазовый

портрет, представленный на рис. 15.2.

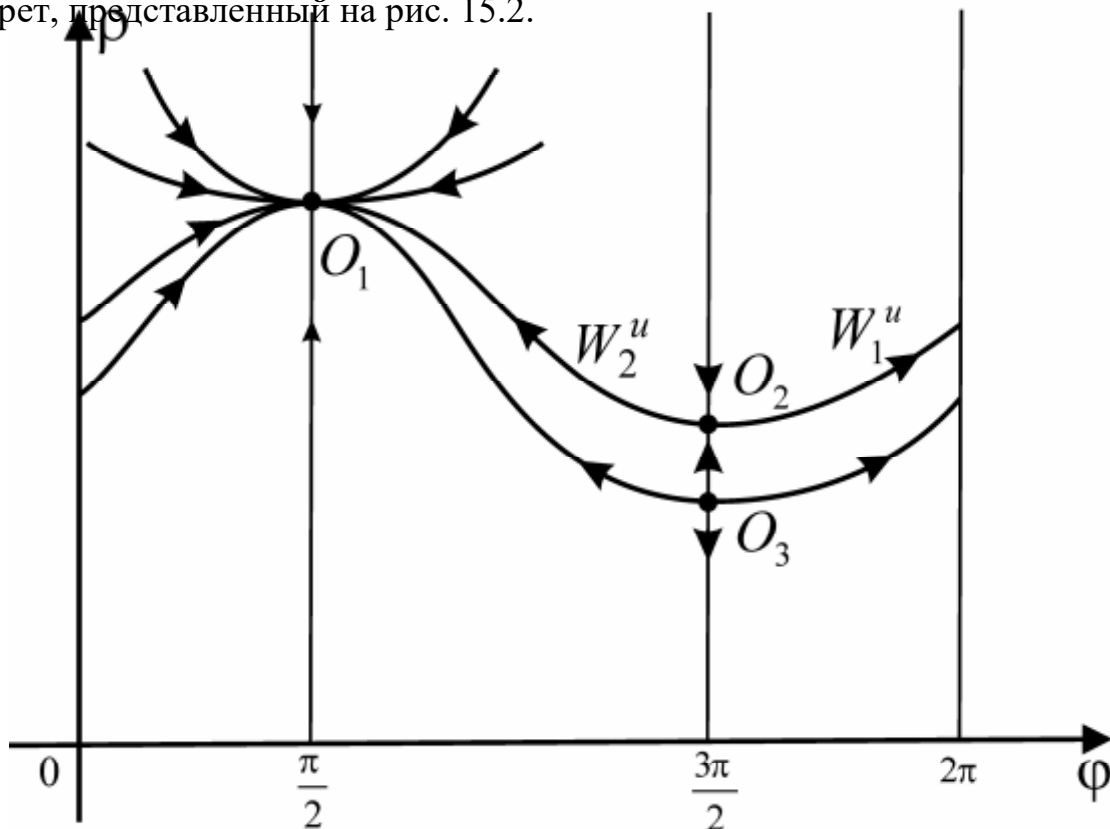


Рис. 15.3. Фазовый портрет системы (15.5) при  $\ell=0$

Заметим, что каждый из узлов  $O_1$  и  $O_3$  имеет ведущее направление параллельное оси абсцисс, а неведущее направление совпадает соответственно с прямыми  $\Pi = \frac{\pi}{2}$  и  $\Pi = \frac{3\pi}{2}$ . Устойчивые сепаратрисы седла  $O_2$  принадлежат



прямой  $\Pi = \frac{3}{2}$ , а неустойчивые -  $W_1''$  и  $W_2''$  стремятся в устойчивый узел  $O_1$ , касаясь при выходе из  $O_2$  прямой  $\gamma = \gamma_2(0, E)$ , которое лежит на границе инвариантной области  $A$ . Следовательно, на поверхности  $g^+$  существует контур  $K$ , образованный состояниями равновесия  $O_1$ ,  $O_2$  и сепаратрисами  $W_1''$  и  $W_2''$ . Контур  $K$  охватывает фазовый полуцилиндр  $g^+$  и целиком лежит в инвариантной области  $A$ .

### 15.1.2. Динамика при наличии расстройки

Зафиксируем параметр  $E$  и рассмотрим трансформацию структуры разбиения полуцилиндра  $g^+$  на траектории при увеличении параметра  $\lambda$  от нуля. Прежде всего, напомним, что состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  существуют при  $\lambda < \lambda_s(E)$  где  $\lambda_s(E)$  - положительный корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{27} \frac{1}{1+9\lambda^2} (1+3\lambda^2)^{\frac{3}{2}} E}, \quad (15.23)$$

т.е. при фиксированном значении  $E$ ,  $\lambda = \lambda_s(E)$  - точка кривой  $E_{1,2}$  (рис. 15.1а). При этом состояния равновесия  $O_1$ ,  $O_2$  расположены в инвариантной области  $A$ , а  $O_3$  - вне этой области. Из вышеприведенных свойств траекторий и того, что контур  $K$  также целиком лежит в  $A$ , следует, что он будет существовать при всех  $\lambda < \lambda_s(E)$ . Следовательно, при  $0 < \lambda < \lambda_s(E)$  система (15.5) имеет фазовый портрет, представленный на рис. 15.4а, который эквивалентен изображенному на рис. 15.3. При  $\lambda = \lambda_s(E)$  состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  сливаются, образуя седло-узел  $O_0$  с устойчивой узловой областью и неустойчивой сепаратрисой  $W_0''$  (рис. 15.4б), которая возвращается в  $O_0$ , охватывая  $g^+$ . Другими словами, при  $\lambda = \lambda_s(E)$  сепаратриса  $W_0$  образует гомоклиническую траекторию  $\gamma_0$

вращательного типа. Дальнейшее увеличение параметра  $\lambda$  приводит к разрушению  $\gamma_0$  и рождению (см. лекцию 10) из нее единственного устойчивого вращательного предельного цикла  $C$  (рис. 15.4в). Заметим, что цикл  $C$  расположен в инвариантной области  $A$ , поскольку контур  $K$ , а следовательно, и траектория  $\gamma_0$  принадлежат этой области. Покажем теперь, что система (15.5) будет иметь, по крайней мере, один устойчивый вращательный предельный

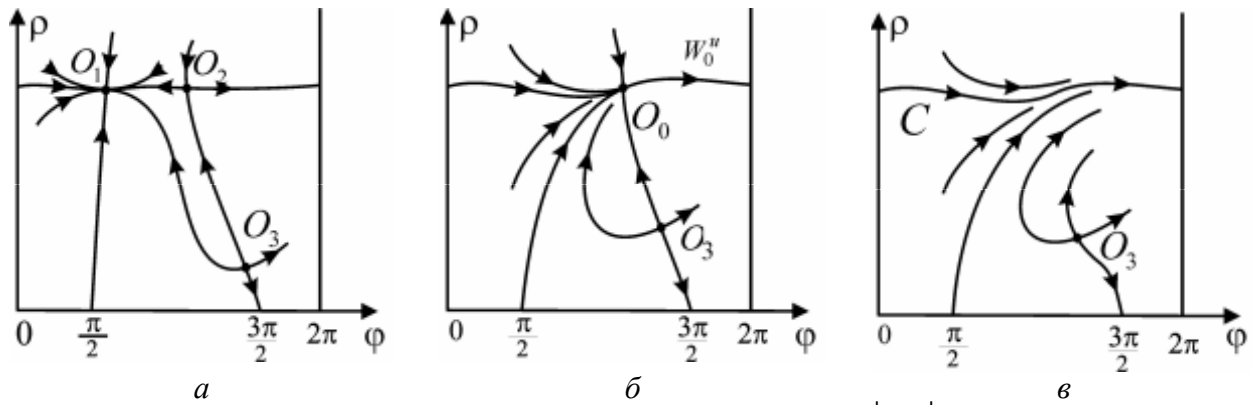


Рис. 15.4. Фазовые портреты системы (15.5): для значений  $0 < \lambda < \lambda_s(E)$  (а); для значений  $\lambda = \lambda_s(E)$  (б); для значений  $\lambda > \lambda_s(E)$  (в).

цикл и при всех  $\lambda > \lambda_s(E)$ . Поскольку для этих значений  $\lambda$  система (15.5) в  $A$  не имеет состояний равновесия и  $\prod_{\Pi=0}^+ > 0$ , любая траектория с начальным условием  $(\Pi(0), y(0)) \in I_0$ , где

$$I_0 = \left\{ \Pi = 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq y \leq \lambda_1(0, E) \right\},$$

является вращательной и расположена в  $A$  при любом  $t > 0$ . Следовательно, траектории системы (15.5) порождают взаимнооднозначное отображение

$$F_0 : I_0 \rightarrow I_0,$$

которое задается соотношением

$$\bar{y} = f_0(y),$$

где  $y \in I_0$ , а  $f_0(y)$  - взаимнооднозначная непрерывная функция. Принимая во внимание ориентацию траекторий на границе области  $A$ , устанавливаем, что

$$f_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f_0(\lambda_1(0, E)) < \lambda_1(0, E) \quad (15.24)$$

Из (15.24) и непрерывности  $f_0(y)$  следует, что при  $\lambda > \lambda_s(E)$  отображение  $F_0$  имеет по крайней мере одну устойчивую неподвижную точку, которой соответствует устойчивый вращательный цикл системы (15.5) в области  $A$ .

Докажем, что при  $\lambda > \lambda_s(E)$  система (15.5) не имеет колебательных предельных циклов. Заметим, что такие циклы, если они существуют, должны во-первых, охватывать состояние равновесия  $O_3$ , а, во-вторых, располагаться на  $g^+$  ниже прямой  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , поскольку на этой прямой векторное поле системы

(15.5) ориентировано всегда в одну сторону. Воспользуемся теперь критерием Бендиксона-Дюлака (см. лекцию 7) с функцией  $B(\Pi, y) = y$  и найдем величину



$$D = \frac{\partial(BF_1)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(BF_2)}{\partial \psi} = 2\psi(1 - \psi^2)^2, \quad (15.26)$$

где

$$F_1 = \psi + \frac{E \cos \Pi}{\psi},$$

$$F_2 = \psi(1 - \psi^2) + E \sin \Pi.$$

Очевидно, что при  $\psi < \frac{1}{\sqrt{3}}$  величина  $D > 0$  и согласно критерию Бендиксона-Дюлака система (15.5) не имеет предельных колебательных циклов.

Таким образом, разбиение  $g^+$  на траектории при  $\psi > \psi_s(E)$  определяют неустойчивое состояние равновесия и, вообще говоря, вращательные предельные циклы, поскольку вышеприведенные рассуждения не доказывают единственность устойчивого предельного цикла, существование которого мы установили. Однако, для некоторых значений параметра  $E$  можно установить единственность этого цикла с помощью критерия Бендиксона-Дюлака. Действительно, при  $E < \frac{1}{2\sqrt{2}}$  непосредственно из системы (15.5) следует, что

$$\dot{\psi} > 0 \text{ для всех } \psi \in \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (15.27)$$

В силу (15.27) предельный цикл расположен в части области  $A$ , локализованной выше прямой  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , для точек которой выполняется неравенство  $D < 0$ , что

согласно критерию Бендиксона-Дюлака свидетельствует о единственности этого цикла. Аналогично, цикл будет единственным и в случае его расположения целиком в части области  $A$ , заключенной в  $g^+$  между прямыми

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Единственная логическая возможность, когда с помощью критерия Бендиксона-Дюлака с  $B(\Pi, \psi) = \dot{\psi}$  не удаётся установить единственность устойчивого предельного цикла, состоит в случае, когда значения  $E$  такие, что предельный цикл пересекает прямую  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Далее,

представляя фазовый портрет системы (15.5) при  $\psi > \psi_s(E)$  (рис. 15.4в), мы не будем учитывать эту возможность, поскольку она никак не влияет на описание возможных физических процессов в рассматриваемой системе.

## 15.2. Отображение Пуанкаре и синхронный режим

Как было отмечено на предыдущей лекции, результаты исследования укороченной системы позволяют устанавливать структуру отображения Пуанкаре. Воспользуемся этой связью и установим структуру отображения  $P$ , опираясь на результаты исследования системы (15.5). Выберем для определенности секущую  $\Pi$  при  $t_0=0$ . Согласно результатам исследования укороченной системы (15.5) при  $0 < \lambda < \lambda_s(E)$  на  $\Pi$  существует три грубые неподвижные точки  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i=1,2,3$ , где

$$\begin{aligned} x_i &\approx 2\sqrt{r_i} \cos \Pi_i, \\ y_i &\approx 2\sqrt{r_i} \sin \Pi_i, \end{aligned} \quad (15.28)$$

и при этом  $x_j < 0$ ,  $y_j < 0$ ,  $j=2,3$ . Точка  $P_1$  является асимптотически устойчивой,  $P_3$  - неустойчивой, а  $P_2$  - седловой (см. лекцию 6). Инвариантные кривые седла  $P_2$  близки к соответствующим сепаратрисам состояния равновесия  $O_2$ . Поскольку неподвижные точки  $P_1$  и  $P_2$  близки, соответственно, к  $O_1$  и  $O_2$ , то с точностью порядка  $O(\epsilon)$  седло-узловая бифуркация неподвижных точек происходит на кривой  $E_{1,2}$ . Следовательно, в зависимости от значения параметра  $\lambda$ , при  $E=const$ , отображения  $P$  демонстрирует динамику представленную на рис. 15.5. При  $0 < \lambda < \lambda_s(E)$  на фазовой плоскости  $(x, y)$  отображения  $P$  существует замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma_{1,2}$ , представляющая собой объединение неустойчивого многообразия седловой неподвижной точки  $P_2$  и устойчивой неподвижной точки  $P_1$ . При  $\lambda = \lambda_s(E)$  точки  $P_1$  и  $P_2$  сливаются и на фазовой плоскости  $(x, y)$  образуется седло-узловая неподвижная точка  $P_0$ . Неустойчивая сепаратриса седло-узла  $P_0$  возвращается в его узловую область. Другими словами в этом случае существует замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma_0$ , которая представляет собой объединение этой сепаратрисы и точки  $P_0$ . Дальнейшее увеличение  $\lambda$  приводит к исчезновению точки  $P_0$  и рождению замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma$ , существующей при  $\lambda > \lambda_s(E)$ . В фазовом пространстве  $G$  вышеприведенной динамике отображения  $P$  соответствует следующее поведение траекторий неавтономной системы (15.1). При  $0 < \lambda < \lambda_s(E)$  в  $G$  существуют двумерная устойчивая тороидальная поверхность  $T^2$ , соответствующая  $\Gamma_{1,2}$  и три периодические траектории  $L_i$ , отвечающие неподвижным точкам  $P_i$ ,  $i=1,2,3$ , частота которых равны частоте внешней силы  $\omega=1$ . Две периодические траектории -  $L_1$  и  $L_2$  лежат на поверхности тора  $T^2$ , а третья -  $L_3$  - вне этой поверхности. При  $\lambda = \lambda_s(E)$  седловая  $L_2$  и устойчивая  $L_1$  периодические траектории сливаются, образуя негрубое периодическое движение  $L_0$ , которое исчезает при  $\lambda > \lambda_s(E)$ . В результате этой бифуркации периодические траектории  $L_1$  и  $L_2$  на  $T^2$  исчезают, но сам он сохраняется.

Таким образом, при  $0 < \lambda < \lambda_s(E)$  в фазовом пространстве  $G$  существует

единственная устойчивая периодическая траектория

227

$$L_1 = \left\{ x \approx 2\sqrt{r_1} \cos(t - \Pi_1) \quad y \approx 2\sqrt{r} \sin(t - \Pi_1) \right\}, \quad (15.29)$$

которая притягивает все отличные от  $L_3$  и  $L_2$  другие траектории системы (15.1).

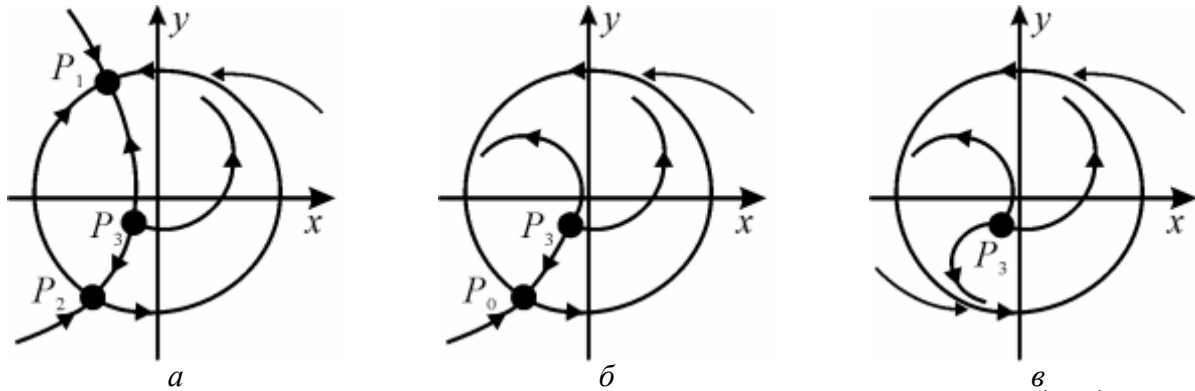


Рис. 15.5. Структура отображения Пуанкаре: для значений параметров  $0 < \lambda < \lambda_s(E)$  (а); для  $\lambda = \lambda_s(E)$  (б); для  $\lambda > \lambda_s(E)$  (в).

Следовательно, под действием внешней силы в автоколебательной системе возникли колебания на частоте внешней силы  $\lambda=1$ , т.е. возник режим вынужденной синхронизации. Поскольку траектория  $L_1$  существует при значениях параметров  $\lambda$  и  $E$  из области  $S$  (рис.15.1а), то эту область называют областью синхронизации, а значение расстрой  $|\lambda| < \lambda_s(E)$  при фиксированном значении  $E$  – полосой синхронизма. Рассмотрим теперь характер движений на торе  $T^2$ , возникающих при выходе из области  $S$ . После пересечения кривой  $E_{1,2}$  траектории на торе  $T^2$  начинают совершать вращательные движения (переменная  $\Pi(t)$  непрерывно нарастает). В результате в автоколебательной системе возникает двухчастотный режим, в котором одна из частот – частота внешнего воздействия, а другая – частота вращательных движений. Заметим, что вблизи кривой  $E_{1,2}$  частота вращательных движений достаточно мала, поскольку замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma$  рождается из петли сепаратрисы седло-узловой неподвижной точки  $P_0$  (рис. 15.4б). Следовательно, при выходе из области синхронизма  $S$  в автоколебательной системе «жестко» возникают слегка модулированные по амплитуде колебания (в момент появления амплитуда имеет некоторое конечное значение, задаваемое тором  $T^2$ ). При иррациональном соотношении частот двухчастотного режима он имеет вид квазипериодических колебаний и, следовательно, является режимом биений.

### 15.3. Амплитудно-частотная характеристика автоколебательной системы

Установим зависимость амплитуды синхронных колебаний от расстройки  $\lambda$  при фиксированном значении  $E$ . Согласно (15.29) эта амплитуда  $a = 2\sqrt{r_1}(\lambda, E)$  и, следовательно,

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{dr_1}{\sqrt{r_1}}. \quad (15.30)$$

С другой стороны, значения  $r = r_1(\varphi, E)$  обращает уравнение (15.7) в тождество, дифференцирование которого по  $\varphi$  дает

$$\frac{dr_1}{d\varphi} = \frac{2\varphi r_1}{F_2(r_1)}. \quad (15.31)$$

Подставляя (15.31) в (15.30) получим

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{2\varphi \sqrt{r_1}}{F_2(r_1)}. \quad (15.32)$$

Поскольку  $F_2(r_1) > 0$  (см. рис. 15.1б) из (15.32) вытекает, что амплитуда  $a$  достигает максимума при  $\varphi = 0$  (рис. 15.5). Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что при фиксированной расстройке  $\varphi$  производная  $\frac{dr_1}{dE} = \frac{2E}{F_2(r_1)} > 0$  и, следовательно, с увеличением параметра  $E$  кривая  $a(\varphi, E)$  на плоскости  $(\varphi, E)$  смещается вверх, а полоса синхронизма увеличивается.

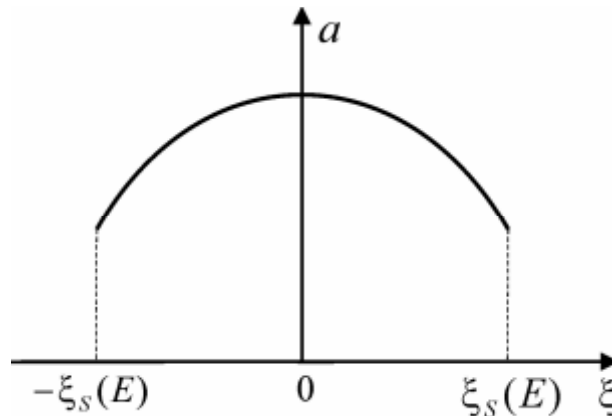


Рис. 15.6. Качественный вид амплитудно-частотной характеристики системы (15.1)

Таким образом, режим вынужденной синхронизации системы (15.1) обладает (см. рис. 15.1а, 15.6) следующими основными свойствами.

- С увеличением амплитуды  $E$  внешнего воздействия полоса синхронизма увеличивается
- Режим вынужденной синхронизации существует при сколь угодно малой амплитуде  $E$  внешнего воздействия
- Наибольшее значение амплитуды синхронных колебаний достигается при  $\varphi = 0$ .

Заметим, что установление режима вынужденной синхронизации можно трактовать как **захват частоты и фазы** автоколебательной системы внешней силой, поскольку частота автоколебательной системы становится равной частоте внешнего воздействия, а фаза - постоянной.

#### 15.4. Контрольные вопросы и задания

1. Постройте качественный вид изменения переменной  $\Pi$  во времени для значений параметров из области  $S$  и вне ее.
2. Постройте качественный вид изменения переменной  $x$  во времени для значений параметров из области  $S$  и вне ее.
3. Проверьте исследование системы (15.5) в приближении малых амплитуд внешнего воздействия в рамках лишь фазового описания, считая, что амплитуда установившихся колебаний  $\gamma=1$ . При сделанных предположениях найдите границу области  $S$  и сравните ее с кривой  $E_{1,2}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Учебники и задачки по теории колебаний

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959, 915 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981, 586 с.
3. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Физматгиз, 1959, 572 с.
4. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972, 470 с.
5. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964, 437 с.
6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И., Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984 (1 изд.), 1992 (2 изд.), 2002 (3 изд.), 432 с.
7. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978 (1 изд.), 1988 (2 изд.), 392 с.
8. Горяченко В.В. Элементы теории колебаний. – Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1995, 430 с.
9. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987, 383 с.
10. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. – М.: Физматлит, 2002, 292 с.
11. Белых В.Н. Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем. – Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1980, 98 с.
12. Сборник задач по теории колебаний. Под ред. В.И. Королева, Л.В. Постникова. – М.: Наука, 1987, 271 с.
13. Кузнецов А.П., Рожнев А.Г., Трубецков В.И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. – М.: Физматлит, 2001, 128 с.
14. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. – Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2010, 256 с.

### Специальная литература

1. А.А. Андронов. Собрание трудов. – М.: Изд-во АН СССР, 1956, 537 с.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966, 568 с.
3. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967, 487 с.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976, 496 с.
5. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1972, 472 с.

6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974, 503 с.
7. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967, 223 с.
8. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 560 с.
9. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. – Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 с.
10. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. – Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009, 548 с.
11. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003, 508 с.
12. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. – М.-Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2008, 144 с.



Адхам Камолович Амонов

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЕ И ВОЛНЫ**

*Курс лекции*

*Самаркандский госуниверситет*