

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИИ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2020 Issue: 05 Volume: 85

Published: 30.05.2020 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecturer of Department of
Theoretical and Applied Mechanics,
xudoyberdiyevz@mail.ru

Sherzod Rustamkulovich Yaxshiboyev
Samarkand State University
Researcher

SYMMETRICAL VIBRATIONS OF A PIVOTALLY SUPPORTED OF AN ELASTIC TWO-LAYER PLATE

Abstract: The equations of vibration of a two-layer plate are written, as a special case of the equations of vibration of a three-layer plate. The formulas are derived that allow, in the field of the auxiliary functions introduced, uniquely and with a given accuracy to calculate the fields of displacements and stresses in an arbitrary section of the plate. Solved the problem of symmetrical vibrations two-layer plate, of a pivotally supported.

Key words: two-layer and three-layer plate, vibrations, displacements, stresses.

Language: Russian

Citation: Khudayberdiyev, Z. B., & Yaxshiboyev, S. R. (2020). Symmetrical vibrations of a pivotally supported of an elastic two-layer plate. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (85), 619-625.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-85-113> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS>

Scopus ASCC: 2200.

СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ УПРУГОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Аннотация: Выписаны уравнения колебания двухслойной пластинки, как частный случай уравнений колебания трехслойной пластинки. Выведены формулы позволяющие, по полю введенных вспомогательных функций, однозначно и с заданной точностью вычислить поля перемещений и напряжений в произвольном сечении пластинки. Решена задача о симметричных колебаниях двухслойной пластинки, шарнирно опертой по краям.

Ключевые слова: двухслойная и трехслойная пластинки, колебания, перемещения, напряжения.

Введение

Двухслойные, трехслойные и многослойные пластинчатые элементы широко используются в различных областях техники, начиная с сороковых годов прошлого столетия. Двухслойные и трехслойные структуры хорошо удовлетворяли этим требованиям и почти идеально соответствовали сочетанию функциональных требований и механических характеристик. Все более широкое использование двухслойных, трехслойных и многослойных структур способствовало рождению

потребности в эффективных методах расчета таких элементов. Поэтому, наравне с началом применения трехслойных и многослойных пластин появились и теории расчета. В связи с этим над пластинками одновременно проводится несколько исследовательские работы. К этим исследовательским работам можно отнести многих статьи, в том числе эти статьи приведены в работах [1-5].

В данной статье рассмотрены плоские уравнение колебание двухслойные пластические

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 РИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

композиционные пластинки эти уравнение получены как плоской задачи.

Постановка задачи и метод решения.

В данной статье в декартовой системе координат рассматривается двухслойная пластинка. Этом ось Ox направлен вдоль средней линии продольного сечения, а ось Oz - вертикально вверх.

Пронумеруем слои пластинки как показано на рис.1, т.е. верхний слой назовем первым слоем, нижний слой вторым слоем. Пусть h_1 и h_2 толщины первого и второго слоев,

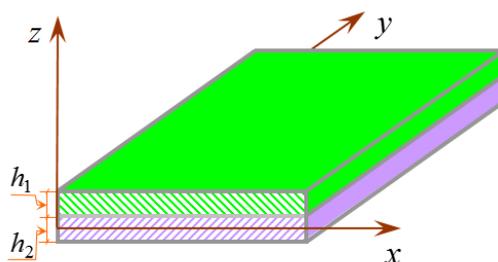


Рис.1. Объект исследования.

Зависимости напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ от деформаций $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ в точках слоев пластинки описываются законом Гука для каждого слоя ($k = 1, 2$). Уравнения движения точек составляющих слоев в декартовой системе координат

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} = \rho_k \ddot{U}_i^{(k)} \quad (1)$$

значительно упрощаются введением потенциалов φ_k и $\vec{\psi}_k$ продольных и поперечных волн по формуле

$$\vec{U}^{(k)} = \text{grad}\varphi_k + \text{rot}\vec{\psi}_k \quad (2)$$

и принимают вид волновых уравнений.

$$\begin{cases} \lambda_{k1}(\Delta\varphi_k) = \rho_k \ddot{\varphi}_k; \\ \mu_k(\Delta\vec{\psi}_k) = \rho_k \ddot{\vec{\psi}}_k, \end{cases} \quad (3)$$

где Δ - дифференциальный оператор Лапласа;

В случае плоской деформации учитывая, что векторы перемещений точек слоев равны

$$\vec{U}^k = U_k \cdot \vec{i} + W_k \cdot \vec{k}, \quad U_k = U_k(x, z, t); \\ W_k = W_k(x, z, t), \quad (4)$$

где \vec{i} , \vec{k} - единичные орты осей координат достаточно положить

$$\varphi_k = \varphi_k(x, z, t); \quad \vec{\psi}_k = \psi_k(x, z, t)\vec{j}, \quad (5)$$

соответственно; λ_k, μ_k - упругие постоянные материалов слоев т.е. коэффициенты Ляме; ρ_k - объёмные плотности слоев ($k = 1, 2$). Пластинку, будем считать, шарнирно опертой в продольном направлении по двум $x = 0$ и $x = l$ краям. В качестве разрешающих уравнений примем уравнения колебания в безразмерных переменных [6].

где \vec{j} - единичный орт оси Oy , чтобы уравнения движения точек слоев пластинки приобрели вид

$$(\lambda_k + 2\mu_k)(\Delta\phi_k) = \rho_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t^2}; \quad (6)$$

$$\mu_k(\Delta\psi_k) = \rho_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2},$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

В силу теоремы Гельмгольца при отсутствии внутренних источников векторные потенциалы $\vec{\psi}_m$ поперечных волн должны удовлетворять условиям соленоидальности векторных полей

$$\text{div}\vec{\psi}_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

которые в случае (2) выполняются автоматически.

Предполагается, что при $t < 0$ пластинка находилась в покое, а в момент $t = 0$ к её граничным поверхностям прикладываются динамические воздействия

при $z = \frac{h_2}{2} + h_1$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(i)}(x, z, t) &= F_x^{(i)}(x, t); \\ \sigma_{zz}^{(i)}(x, z, t) &= F_z^{(i)}(x, t); \\ \sigma_{yz}^{(i)}(x, z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

при $z = -\frac{h_2}{2}$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(i)}(x, z, t) &= -F_x^{(i)}(x, t); \\ \sigma_{zz}^{(i)}(x, z, t) &= -F_z^{(i)}(x, t); \\ \sigma_{yz}^{(i)}(x, z, t) &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Кроме того, на поверхностях вторым слоем $z = \frac{h_2}{2}$ имеют места динамические и кинематические контактные условия

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)}(x, z, t) &= \sigma_{zz}^{(2)}(x, z, t); \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x, z, t) &= \sigma_{xz}^{(2)}(x, z, t); \\ \sigma_{yz}^{(0)}(x, z, t) &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

и

$$\begin{aligned}U_1(x, z, t)\Big|_{z=\frac{h_2}{2}} &= U_2(x, z, t)\Big|_{z=\frac{h_2}{2}}; \\ W_1(x, z, t)\Big|_{z=\frac{h_2}{2}} &= W_2(x, z, t)\Big|_{z=\frac{h_2}{2}}\end{aligned}\quad (10)$$

Начальные условия задачи считаются нулевыми, т.е. при $t = 0$

$$\varphi_k = \psi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = 0.\quad (11)$$

Таким образом, при общей постановке задачи о нестационарных колебаниях пластинки, задача приводится к решению для каждого слоя двух уравнений – (6), при граничных (7), (8) и контактных – (9), (10) и нулевых начальных условиях – (11).

Для решения задачи выберем потенциальных функций ψ_k и φ_k в виде приведенной работе [4]. Перемещение точки слоев двухслойной пластинки также опишем как в работе [4]. После этого эти выражения перемещений, приравнявая к выражениям потенциальных функций, приходим к новым неизвестным функциям, подлежащим определению. Используя контактные условия получим систему, представляющая общие уравнения колебания. Из полученной системы получим следующую систему уравнений для симметричных колебаний двухслойной пластинки.

$$\begin{aligned}\left\{A_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + A_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + A_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ \left. A_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{16}\right\} \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} + \\ + \left\{B_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + B_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + B_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} +\right.\end{aligned}$$

$$B_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big\} U_0^{(0)} = \quad (12)$$

$$= \left\{C_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + C_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + C_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} +\right.$$

$$C_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + C_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{16}\Big\} f_x^{(i)}(k, p);$$

$$\left\{A_{21} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{23}\right\} W_0^{(0)} +$$

$$\left\{B_{21} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{23}\right\} \frac{\partial U_0^{(0)}}{\partial x} = C_{21} f_z^{(i)}(k, p).$$

Здесь $W_0^{(0)}$ и $U_0^{(0)}$ искомые функции, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} ($i, j = 1, 2$) - постоянные связанные с упругими характеристиками слоев и их размерами. Например,

$$\begin{aligned}A_{11} &= -\left(\frac{q_0}{a_1^2 b_1^2} + \frac{1 - q_1}{a_0^2 a_1^2}\right) \frac{z_1 h_0^4}{12} - \\ &\left(\frac{2q_1}{a_1^2 b_0^2} + \frac{3(1 + q_1 - 3q_0 q_1)}{a_1^2 b_1^2} + \frac{2q_0 q_1}{a_0^2 a_1^2} + \frac{3q_0(1 - q_1)}{a_1^4} + \right. \\ &\left. + \frac{1 + q_1}{b_0^2 b_1^2} + \frac{q_0(1 + q_1)}{a_0^2 b_1^2}\right) \frac{z_1^3 h_0^2}{36} \text{ и т.д.}\end{aligned}$$

Систему уравнений колебания двухслойной пластинки (12) приведем к безразмерному виду. Для этого вводим следующие безразмерные величины.

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad z^* = \frac{z}{l}, \quad h_m^* = \frac{h_m}{l},$$

$$t^* = \frac{t \cdot b_0}{l}, \quad a_m^* = \frac{a_m}{b_0}, \quad b_m^* = \frac{b_m}{b_0}, \quad \mu_m^* = \frac{\mu_m}{\mu_0},$$

$$U_0^{(0)*} = \frac{U_0^{(0)}}{l}, \quad W_0^{(0)*} = \frac{W_0^{(0)}}{l}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{l}.\quad (13)$$

Вводя безразмерные величины (13) в (12), затем выполняя некоторые математические преобразования, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\left\{A^*_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} + A^*_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + A^*_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} + \right. \\ \left. A^*_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + A^*_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + A^*_{16}\right\} \frac{\partial}{\partial x^*} W_0^{*(0)} + \\ + \left\{B^*_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} + B^*_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + B^*_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} + \right. \\ \left. B^*_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + B^*_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\right\} U_0^{*(0)} = \quad (14)\end{aligned}$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$= \left\{ C_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} + C_{12}^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + C_{13}^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} + C_{14}^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + C_{15}^* \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + C_{16}^* \right\} f_x^{*(1)}(k, p);$$

$$\left\{ A_{21}^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + A_{22}^* \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + A_{23}^* \right\} W_0^{*(0)} + \left\{ B_{21}^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + B_{22}^* \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + B_{23}^* \right\} \frac{\partial U_0^{*(0)}}{\partial x} =$$

$$= C_{21}^* f_z^{*(1)}(k, p)$$

Здесь

$$A_{11}^* = - \left(\frac{q_0}{a_1^{*2} b_1^{*2}} + \frac{1-q_1}{a_0^{*2} a_1^{*2}} \right) \frac{z_1^* h_0^{*4}}{12} - \left(\frac{2q_1}{a_1^{*2} b_0^{*2}} + \frac{3(1+q_1-3q_0q_1)}{a_1^{*2} b_1^{*2}} + \frac{2q_0q_1}{a_0^{*2} a_1^{*2}} + \frac{3q_0(1-q_1)}{a_1^{*4}} + \frac{1+q_1}{b_0^{*2} b_1^{*2}} + \frac{q_0(1+q_1)}{a_0^{*2} b_1^{*2}} \right) \frac{z_1^{*3} h_0^{*2}}{36}$$

и т.д.

Далее на основе уравнений (14) решим задачу о симметричных колебаниях двухслойной пластинки размер по оси, которой равна l . При $x=0$ и $x=l$, т.е. граничные условия задачи, в соответствии с условиями крепления краев пластинки [7-10], имеют вид:

$$\frac{\partial U_0^{*(0)}(x,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 U_0^{*(0)}(x,t)}{\partial x^3} = 0; \quad (15)$$

$$W_0^{*(0)}(x,t) = 0; \quad \frac{\partial^2 W_0^{*(0)}(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Решения системы уравнений (14) ищутся в виде суммы гармонических решений по координате, т.е. в виде сумм тригонометрических функций. Такими решениями, удовлетворяющие граничные условия (15), будут

$$W_0^{*(0)} = W_1(t) \sin \frac{\pi x}{l}; \quad U_0^{*(0)} = U_1(t) \cos \frac{\pi x}{l}; \quad (16)$$

В этом случае функции $f_x(x,t)$ и $f_z(x,t)$ следует также представить как

$$f_x = f_{x1}(t) \cos \frac{\pi x}{l}; \quad f_z = f_{z1}(t) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (17)$$

Далее, подставляя (16) и (17) в систему уравнений (14) получена система уравнений относительно функций $U_m(t)$ и $W_m(t)$

$$\left\{ T_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + T_{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + T_{13} \right\} W_1(t) + \left\{ N_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + N_{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N_{13} \right\} U_1(t) = H_{11}; \quad (18)$$

$$\left\{ T_{21} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + T_{22} \right\} W_1(t) + \left\{ N_{21} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N_{22} \right\} U_1(t) = H_{21}.$$

где

$$T_{11} = \tilde{A}_{11} \frac{\pi}{l}; \quad T_{12} = \tilde{A}_{14} \frac{\pi}{l} - \tilde{A}_{12} \left(\frac{\pi}{l} \right)^3 \dots$$

и т.д.

$$H_{11} = \left[C_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \left(C_{14} - C_{12} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + C_{13} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 - C_{15} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + C_{16} \right] f_{1x}(t).$$

$$H_{21} = C_{21} f_{1z}(t).$$

Начальные условия для функций $U_1(t)$ и $W_1(t)$ имеют вид

$$U_1(x,t) = \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 U_1(x,t)}{\partial t^3} = 0; \quad (19)$$

$$W_1(x,t) = \frac{\partial W_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 W_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 W_1(x,t)}{\partial t^3} = 0.$$

Таким образом, исходная задача приведена к интегрированию системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (18) с начальными условиями (19).

Результаты расчетов.

Система уравнений решена численно, с помощью пакета прикладных программ Maple-17. Для расчетов приняты следующие значения геометрических и физико-механических характеристик слоев:

$$l = 0.5 \text{ m}; \quad h_1 = 0.004 \text{ m}; \quad h_2 = 0.05 \text{ m};$$

$$\xi = 0.3 h_0; \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.33;$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3; \quad E_1 = E_2 = 69 \cdot 10^9 \text{ Pa};$$

$$f_x^{(1)} = f_z^{(2)} = 50 \text{ N}.$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

По результатам решения системы дифференциальных уравнений (14), по формулам (16) вычислены главных частей поперечного - $W_0^{*(0)}$ и продольного - $U_0^{*(0)}$ продольное перемещения точек плоскости $\xi = 0.3h_0$ срединного слоя в зависимости от координаты. Полученные результаты приведены на рис.2а,б.

Затем перемещения выражены через свои же главные части $W_0^{*(0)}$ и $U_0^{*(0)}$, которые являются искомыми функциями системы уравнений (14), по следующим формулам:

$$U_0^* = \frac{1-q_0}{a_0^{*2}} \frac{z^{*2}}{2} \frac{\partial^2 U_0^{(0)*}}{\partial t^{*2}} - (1-q_0) \frac{z^{*2}}{2} \frac{\partial^2 U_0^{(0)*}}{\partial x^{*2}} + U_0^{(0)*} - \frac{1}{\xi^*} q_0 \frac{z^{*2}}{2} \frac{\partial}{\partial x^*} W_0^{(0)*};$$

$$W_0^* = \frac{1}{\xi^*} \left(1 + \frac{q_0}{a_0^{*2}} \right) \frac{z^{*3}}{6} \frac{\partial^2 W_0^{(0)*}}{\partial t^{*2}} - (1+q_0) \frac{z^{*3}}{6} \frac{1}{\xi^*} \frac{\partial^2 W_0^{(0)*}}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\xi^*} z^* W_0^{(0)*} + \frac{q_0}{a_0^{*2}} \frac{z^{*3}}{6} \frac{\partial^3 U_0^{(0)*}}{\partial t^{*2} \partial x^*} - q_0 \frac{z^{*3}}{6} \frac{\partial^3 U_0^{(0)*}}{\partial x^{*3}}. \quad (20)$$

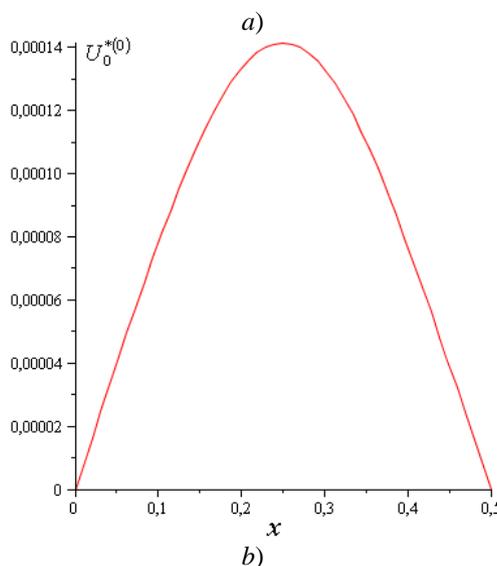
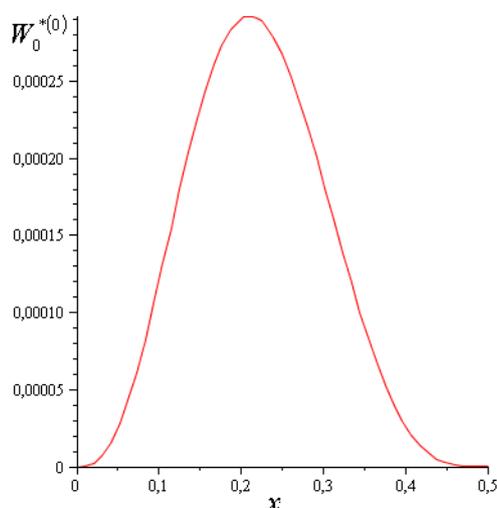


Рис. 2. Графики функций $W_0^{*(0)}$ (а) и $U_0^{*(0)}$ (б).

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Данные формулы позволяют вычислить перемещения по результатам решения системы уравнений колебания (14). Полученные результаты представлены на рис.3, из которых

следует, что характер изменения перемещений носит синусоидальный характер

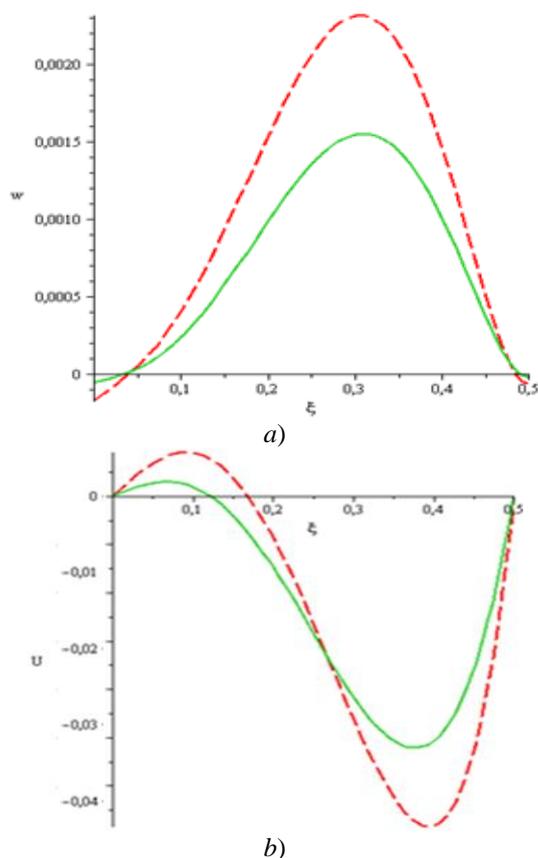


Рис. 3. Графики поперечного W_0^* (a) и продольного U_0^* (б). перемещений точек пластинки при $z_1^* = h/2$ - штриховая линия; - $z_1^* = h/3$ сплошная линия.

При этом значения продольного перемещения на порядок выше, чем соответствующие значения поперечного перемещения. Такой результат вполне соответствует физической сущности задачи, так как рассматриваются симметричные (продольные) колебания пластинки.

Выводы.

Разработана теория нестационарных симметричных колебаний двухслойной упругой пластинки в плоской постановке свободной от гипотез и предпосылок. В частном случае, когда пластинка однородная, уравнения колебания (12)

переходят в известные [9-10] уравнения колебания однослойной упругой пластинки;

При симметричных колебаниях двухслойной пластинки появление незначительных поперечных перемещений, вызвано действием продольных внешних нагрузок $f_x^{(1)}$, на лицевой и обратной сторонах пластинки. Эти перемещения незначительны и на порядок меньше по сравнению с продольными перемещениями. Поэтому, можно пренебречь поперечными перемещениями точек слоев.

Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHHI (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

References:

1. Lexniskiy, S.G. (1977). *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela.* (p.416). Moscow: Nauka.
2. Sarrera, E. (2001). Developments ideas and evaluations based upon the Reissner's mixed theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Rev.* 54(4), pp. 301-329.
3. Ambarsumyan, S.A. (1987). *Teoriya anizotropnix plastin.* (p.493). Moscow: Nauka.
4. Reissner, E. (1984). On a certain mixed variational theory and a proposed application. *Int. Z. Numer. Methods Eng.* 20, pp. 1366-1368.
5. Ren, Z.G. (1986). Bending theory of laminated plates. *J.Comp.Sci. Technol.*, 27, pp. 225–239.
6. Khudoynazarov, Kh., & Khudoyberdiyev, Z. (2018). Symmetrical vibrations of a three-layered elastic plate//*Int. J. of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, 5(10), pp.7117-7121.
7. Volmir, A.S. (1972). *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek.* (p.432). Moscow: «Nauka».
8. Xalmuradov, R.I., Xudoynazarov, X.X., & Xudoyberdiyev, Z. (2018). Nestasionarniye kolebaniya trexslonnoy vyazkouprugoy plastinki. *Nauchniy vestnik SamGU*, 1(107), pp.30-39.
9. Xalmuradov, R.I., Xudoynazarov, X.X., & Xudoyberdiyev, Z. (2017). Svobodniye kolebaniya uprugoy trexslonnoy plastinki. *Uzbekskiy jurnal Problemi mexaniki*, 2, pp. 46-52.
10. Petrashen, G.I. (1966). *Problemi injenernoy teorii kolebaniy virojdennix system.* Issledovaniya uprugosti i plastichnosti. (pp.3-33). L.: Izd-vo LGU, 5.