O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT
ARXITEKTURA-QURILISH INSTITUTI

ME′MORCHILIK va QURILISH MUAMMOLARI

(ilmiy-texnikjurnal)

ПРОБЛЕМЫ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА

(научно-технический журнал)

PROBLEMS OF ARCHITECTURE AND CONSTRUCTION

(Scientific and technical magazine)

2020, №2 (2-қисм)
2000yildan har 3 oyda birmarta chop etilmoqda

SAMARQAND

ME'MORCHILIK va QURILISH MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА
PROBLEMS OF ARCHITECTURE AND CONSTRUCTION

(ilmiy-texnik jurnal)
(научно-технический журнал)
(Scientific and technical magazine)

2020, № 2
2000 yildan har 3 oyda
bir marta chop etilmoqda

Журнал ОАК Ҳайъатининг қарорига биноан техника (қурилиш, механика ва машинасозлик соҳалари) фанлари ҳамда меъморчилик бўйича илмий мақолалар чоп этилиши лозим бўлган илмий журналлар рўйхатига киритилган (гувоҳнома №00757. 2000.31.01)

Журнал 2007 йил 18 январда Самарқанд вилоят матбуот ва ахборот бошқармасида қайта рўйхатга олиниб 09-34 рақамли гувоҳнома берилган

Таҳририят манзили: 140147, Самарқанд шаҳри, Лолазор кўчаси, 70.
Телефон: (366) 237-18-47, 237-14-77, факс (366) 237-19-53. ilmiy-jurnal@mail.ru

Муассис (The founder): Самарқанд давлат архитектура-қурилиш институти

Обуна индекси 5549

ИНЖЕНЕРЛИК ИНШООТЛАРИ НАЗАРИЯСИ
ТЕОРИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УРАВНЕНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

Ялгашев Б.Ф., Бердиев Ш.Д. - Samarqand davlat universiteti

В работе на основе точных решений в преобразованиях трехмерной задачи теории упругости для круговой цилиндрической упругой трехслойной оболочки разработаны уравнения крутильных колебаний такой оболочки. Считается, что толщины слоев в общем случае разные и из разных материалов. Исходя из предположения, что между слоями имеет место жесткий контакт, сформулированы динамические и кинематические контактные условия задачи. Из полученных уравнений колебания, в частных случаях, можно получить уточненные и приближенные уравнения колебания, которые в случае однородной оболочки переходят в известные уравнения колебания, разработанные другими авторами. Кроме того, полученные результаты допускают частные случаи перехода в двухслойные и однородные оболочки, а также в круглый трехслойный стержень.

Ключевые слова: трехслойная оболочка, напряжения, перемещения, колебания, уточненные уравнения, трехслойный стержень, контактные условия.

Uch qatlamli doiraviy silindrik elastik qobiq buralma tebranishlari tenglamalari

Ishda elastiklik nazariyasi uch o'lchovli masalasining integral almashtirishlardagi aniq yechimidan foydalanib uch qatlamli doiraviy silindrik elastic qobiq uchun buralma tebranishlar tenglamalari ishlab chiqilgan. Qatlamlar qalinliklari umumiy holda har xil va materiallari turlicha deb hisoblanadi. Qatlamlar jrasidagi kontakt bikrligidan kelib chiqqan holda dinamik va kinematik shartlar qo'yilgan. Olingan tebranishlar tenglamalaridan, xususiy hollarda, tebranishlar aniqlashtirilgan va taqribiy tenglamalarini keltirib chiqarish mumkin. Ana shu xususiy tenglamalar , agar qobiq bir jinsli bo'lsa, boshqa avtorlarning ma'lum tenglamalariga o'tadilar.

Kalit so'zlar: uch qatlamli qobiq, kuchlanish, ko'chishlar, tebranishlar, aniqlashtirilgan tenglamalar, uch qatlamli sterjen, kontakt shartlar.

Equations of Torsional Oscillations of a Circular Cylindrical Elastic Three-Layer Shell.

In this work, based on exact solutions in the transformations of the three-dimensional problem of the theory of elasticity, equations of torsional vibrations of such a shell are developed for a circular cylindrical elastic three-layer shell. It is believed that the thicknesses of the layers are generally different and from different materials. Based on the assumption that there is hard contact between the layers, the dynamic and kinematic contact conditions of the problem are formulated. From the obtained equations of vibration, in particular cases, it is possible to obtain refined and approximate equations of vibration, which in the case of a homogeneous shell go over into the known equations of vibration developed by other authors.

Keywords: three-layer shell, stresses, displacements, oscillations, refined equations, three-layer rod, contact conditions.

1. Введение. Построение основных соотношений теории оболочек заключается в приведении трехмерной по пространственным координатам задачи к двумерной. С этой целью используют различные методы и подходы, и в качестве основных неизвестных функций берутся перемещения срединной поверхности оболочки [1]. Обыкновенно при этом применяют различного рода упрощающие гипотезы и предпосылки механического и геометрического характера. Примененные при построении теории гипотезы и предпосылки вместе с упрощениями приводят к существенным недостаткам и погрешностям [2]. Поэтому, многие исследователи и в настоящее время предпринимают попытки уточнения уравнений колебания и, в частности, цилиндрических оболочек и стержней кругового поперечного сечения [3-5].

При построении уточненной теории стараются вывести уточненные уравнения колебаний, учитывающих те или иные факторы физического, механического или геометрического характера. В зависимости от учитываемых факторов методы вывода уравнений колебания, основанные на динамической теории упругости, разделяются на несколько направления [6]. Одним из них является метод использования преобразованных точных решений задач линейной теории упругости, который развит в работах[7,8]. Существенное и успешное применение к задачам динамики цилиндрических оболочек и стержней кругового поперечного сечения этот метод получил в работах [9-11]. Он основан на применении интегральных преобразований по координате и времени, и использовании общих решений в преобразованиях трехмерных задач с последующим разложением этих решений в степенные ряды для приближенного удовлетворения динамических условий, заданных на граничных поверхностях рассматриваемой упругой системы [12,13].

Данная работа посвящена разработке метода разработки уравнений колебания трехслойной цилиндрической оболочки, который является развитием метода, предложенного в [14] для цилиндрической оболочки. Он основан на использовании точных решений трёхмерных динамических задач для каждого слоя оболочки и предусматривает последующее разложение соответствующих векторов перемещений и тензоров напряжений всех трех слоев в степенные ряды по радиальной координате, а также применении преобразований Фурье по координате и Лапласа по времени.

2. Постановка задачи и общее ее решение. Рассмотрим крутильные колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругой оболочки кругового поперечного сечения. При этом два крайних слои оболочки являются несущими слоями из более жестких материалов, а срединный слой из менее жесткого материала, он является заполнителем. Обозначения осей цилиндрической системы координат, радиусы и толщины слоев представлены (на рис.1). Движения точек слоев оболочки, при её крутильных колебаниях описываются волновыми уравнениями [1].

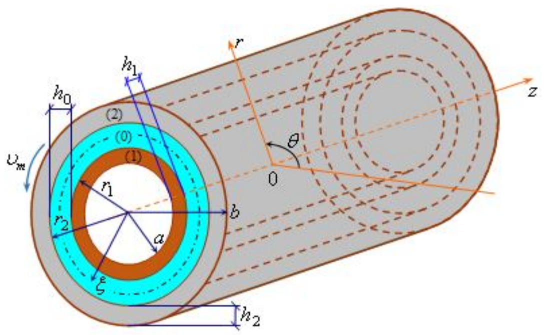

Рис.1. Трехслойная цилиндрическая оболочка

$$\mu_m \Delta\psi_m = \rho_m \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}, \qquad (m = 0,1,2) \qquad (2.1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

μ_m -коэффициент Ламе материала m -го слоя; $\psi_m(r,z,t)$ -потенциальные функции. При этом $m = 1$, когда $a \le r \le r_1$; $m = 0$, когда $r_1 \le r \le r_2$ и $m = 2$, когда $r_2 \le r \le b$. Считается, что крутильные колебания трехслойной оболочки возбуждаются внешними усилиями, действующими на граничных поверхностях оболочки, т.е. граничные условия задачи имеют вид

$$\tau_{r\theta}^{(1)}(r,z,t)\Big|_{r_1=a} = F_{r\theta}^{(1)}(z,t),\ \tau_{r\theta}^{(2)}(r,z,t)\Big|_{r_2=b} = = F_{r\theta}^{(2)}(z,t). \qquad (2.2)$$

Начальные условия считаются нулевыми, т.е. для всех трех слоев имеют места условия

$$\psi_m(r,z,t) = \frac{\partial \psi_m(r,z,t)}{\partial t} = 0.$$

Для решения волновых уравнений (2.1) потенциальные функции $\psi_m(r,z,t)$ представим в виде

$$\psi_m = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(l)} \tilde{\psi}_m e^{pt} dp. \qquad (2.3)$$

Подставив преобразования (2.3) для потенциальных функций ψ_m в волновые уравнения (2.1) будем иметь

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \beta_m^2\right)\tilde{\psi}_m = 0, \qquad (m = 0,1,2), \quad (2.4)$$

где

$$\beta_m^2 = k^2 + \left(\rho_m / \mu_m\right) p^2.$$

Обшие решения уравнений (2.4) имеют вид

$$\tilde{\psi}_m(r) = B_m^{(1)} I_0(\beta_m r) + B_m^{(2)} K_0(\beta_m r); \quad (m = 0,1,2), \qquad (2.5)$$

где $I_0(r)$, $K_0(r)$, -модифицированные функции Бесселя .

Представим напряжения $\tau_{r\theta}^{(m)}$ и функции внешних воздействий $F_{r\theta}^{(i)}(z,t)$, $(i = 1,2)$ также как (2.3) и подставим их в граничные условия (2.2). Получим

$$\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}(a,k,p) = f_{r\theta}^{(1)}(k,p), \quad \tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)}(b,k,p) = f_{r\theta}^{(2)}(k,p). \qquad (2.6)$$

С другой стороны для преобразованного напряжения имеем

$$\tilde{\tau}_{r\theta}^{(m)}(r) = \mu_m\left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\frac{d\tilde{\psi}_m}{dr}$$

подставив которого в (2.6) получим

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\frac{d\tilde{\psi}_1}{dr}\bigg|_{r=a} = = \mu_1[f_{r\theta}^{(1)}], \quad \left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\frac{d\tilde{\psi}_2}{dr}\bigg|_{r=b} = \mu_2[f_{r\theta}^{(2)}]. \qquad (2.7)$$

Общие решения (2.5) для всех трех слоев имеют одинаковую структуру, учитывающая ограниченность решений при $r \to 0$ и $r \to \infty$ одновременно. При этом границы первого слоя равны $a \le r \le r_1$. Он ограничен снизу (изнутри) поверхностью $r = a$, который в пределе может стремиться к нулю, т.е. $a \to 0$, но никак не может превысить значения r_1 , т.е. не может стремиться к бесконечности.

Поэтому, при написании общего решения потенциальной функции первого слоя- $\tilde{\psi}_1(r)$ можно ограничиться учетом её ограниченности только при $r \to 0$. Исходя из этого, общее решение (2.5) для первого слоя примет вид

$$\tilde{\psi}_1(r) = AI_1(\beta_1 r); \quad (a \le r \le r_1), \qquad (2.8)$$

где A -постоянное интегрирования .

Аналогично, границами второго, внешнего слоя являются цилиндрические поверхности $r = r_2$ и $r = b$; $r_2 \le r \le b$. Он ограничен сверху (с внешней стороны) поверхностью $r = b$, радиус которой может стремиться к бесконечности, т.е. $b \to \infty$. С другой стороны внутренняя поверхность этого слоя не может быть стянута к прямой, т.к. это привело бы к однородному стержню круглого сечения с радиусом $r = b$. Поэтому, в общем решении для потенциальной функции второго слоя- $\tilde{\psi}_2(r)$ можно ограничиться учетом её ограниченности только при $r \to \infty$. Исходя из этого, общее решение (2.5) для второго слоя, примет вид

$$\tilde{\psi}_2(r) = CK_0(\beta_2 r); \qquad (r_2 \le r \le b) \qquad (2.9)$$

Для срединного слоя примем общее решение (2.5) учитывая то, что наше решение при отсутствии двух внешних слоев, должно переходит в известное решение для однородного цилиндрического слоя, ограниченное при $r \to 0$ и $r \to \infty$ т.е.

$$\tilde{\psi}_0(r) = B_1 I_0(\beta_0 r) + B_2 K_0(\beta_0 r), \qquad r_2 \le r \le b. \quad (2.10)$$

Таким образом, число постоянных интегрирования подлежащих определению из контактных условий сокращается до двух A и C. С учетом этого обстоятельства ограничимся только двумя контактными условиями равенства перемещений, которые в выражениях через преобразованные потенциальные функции принимают вид:

$$\text{при } r = r_1 \quad \frac{d}{dr}\tilde{\psi}_1 = \frac{d}{dr}\tilde{\psi}_0,$$

$$\text{при } r = r_2 \quad \frac{d}{dr}\tilde{\psi}_0 = \frac{d}{dr}\tilde{\psi}_2, \qquad (2.11)$$

3.Уравнения колебания. Подставив решения (2.8)-(2.10) в преобразованные граничные условия (2.7) и контактные условия (2.11) , получим

$$\begin{aligned}
&[\frac{2\beta_1}{a} I_1(\beta_1 a) - \beta_1^2 I_0(\beta_1 a)]A = \tilde{R}_{\mu 1}^{-1}[f_{r\theta}^{(1)}(k,p)],\\
&-[\frac{2\beta_2}{b} K_1(\beta_2 b) + \beta_2^2 K_0(\beta_2 b)]C =\\
&= \tilde{R}_{\mu 2}^{-1}[f_{r\theta}^{(2)}(k,p)],\\
&\beta_1 I_1(\beta_1 r_1)A = \beta_0 I_1(\beta_0 r_1)B_1 - \beta_0 K_1(\beta_0 r_1)B_2,\\
&-\beta_2 K_1(\beta_2 r_2)C = \beta_0 I_1(\beta_0 r_2)B_1 - \beta_0 K_1(\beta_0 r_2)B_2.
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Из последних двух уравнений находим

$$A = \frac{\beta_0 I_1(\beta_0 r_1)B_1 - \beta_0 K_1(\beta_0 r_1)B_2}{\beta_1 I_1(\beta_1 r_1)},$$

$$C = -\frac{\beta_0 I_1(\beta_0 r_2)B_1 - \beta_0 K_1(\beta_0 r_2)B_2}{\beta_2 K_1(\beta_2 r_2)}. \qquad (3.2)$$

Далее введем следующие обозначения

$$F_1(\beta_1, a, r_1) = \frac{\frac{2}{a} I_1(\beta_1 a) - \beta_1 I_0(\beta_1 a)}{I_1(\beta_1 r_1)},$$

$$F_2(\beta_2, b, r_2) = \frac{\frac{2}{b} K_1(\beta_2 b) + \beta_2 K_0(\beta_2 b)}{K_1(\beta_2 r_2)}. \qquad (3.3)$$

Подставим (3.2) в граничные условия (3.1). Тогда, с учетом (3.3) получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
&F_1(\beta_1, a, r_1)[\beta_0 I_1(\beta_0 r_1)B_1 -\\
&-\beta_0 K_1(\beta_0 r_1)B_2] = \tilde{R}_{\mu 1}^{-1}[f_{r\theta}^{(1)}(k,p)],\\
&F_2(\beta_2, b, r_2)[\beta_0 I_1(\beta_0 r_2)B_1 -\\
&-\beta_0 K_1(\beta_0 r_2)B_2] = \tilde{R}_{\mu 2}^{-1}[f_{r\theta}^{(2)}(k,p)].
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Выразим преобразованные перемещения слоев $\tilde{v}_m$ $(m = 0,1,2)$ через решения (2.8)-(2.10) . Для этого достаточно вспомнить формулы для $\tilde{v}_m(r,k,p)$ [1]

$$\tilde{v}_m(r,k,p) = -\frac{\partial \psi_m}{\partial r}, \qquad (m = 0,1,2).$$

Подставив (2.8), (2.9) и (2.10) в последнюю формулу при $m = 0$; $m = 1$; *и* $m = 2$ получим соответственно

$$\begin{cases}
\tilde{v}_0(r,k,p) = -\beta_0 I_1(\beta_0 r)B_1 + \beta_0 K_1(\beta_0 r)B_2,\\
\tilde{v}_1(r,k,p) = -\beta_1 I_1(\beta_1 r)A, \;\; \tilde{v}_2(r,k,p) =\\
= \beta_2 K_1(\beta_2 r)C.
\end{cases} \qquad (3.5)$$

В выражении для крутильного перемещения $\tilde{v}_0(r,k,p)$ срединного слоя разложим функции Бесселя $I_1(\beta_0 r)$ и $K_1(\beta_0 r)$ в степенные ряды по аргументу $(\beta_0 r)$. Получим

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_0(r,k,p) = \frac{1}{r}B_0^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&-B_0^{(1)} + B_0^{(2)}[\ln\frac{\beta_0 r}{2} -\\
&-\frac{1}{2}(\gamma(n+1) + \gamma(n+2))]\Big\}\beta_0^{2n+2}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}.
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

Здесь $\gamma(n)$ – логарифмическая производная от Гамма- функции.

Следуя работе [6] за неизвестные величины примем значения перемещения и напряжения, вычисленных в точках некоторой “промежуточной” поверхности срединного слоя. Радиус этой поверхности определим в промежутке $\xi \in [r_1, r_2]$. При $\xi = r_1$ и $\xi = r_2$ данная “промежуточная” поверхность переходит в контактные поверхности между заполнителем и несущими слоями, а при $\xi = \frac{r_1 + r_2}{2}$ она переходит в срединную поверхность заполнителя. При $r_1 = r_2$ радиус промежуточной поверхности переходит в радиус контактной поверхности между двумя несущими слоями.

Положим $r = \xi$ в выражением преобразованного перемещения (3.6) и выделим главные его части, считая, что они определяются как первые слагаемые сходящегося степенного ряда. Получим

$$\widetilde{v}_0(\xi) = \frac{1}{\xi} B_1 + \left\{ -B_1 + B_2 [\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \gamma(1) - \frac{1}{2}] \right\} \beta_0^2 (\frac{\xi}{2}).$$

Введем следующие обозначения

$$\widetilde{v}_0^{(0)} = -\frac{1}{2}\beta_0^2 B_0, \quad \widetilde{v}_0^{(1)} = \frac{1}{\xi} B_2,$$

где $B_0 = B_1 - B_2 [\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \gamma(1) - \frac{1}{2}].$ (3.7)

Выразим преобразованное перемещение $\widetilde{v}_0(r,k,p)$ через введенные новые функции $\widetilde{v}_0^{(0)}$ и $\widetilde{v}_0^{(1)}$, получим

$$\widetilde{v}_0(r,k,p) = \frac{\xi}{r}\widetilde{v}_0^{(1)} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} \widetilde{v}_0^{(0)} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \quad (3.8)$$

$$+\xi \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n+2} \cdot \widetilde{v}_0^{(1)} \eta_1(n,r) \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

где

$$\eta_1(n,r) = \ln\frac{r}{\xi} + \frac{n}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Нетрудно также выразить граничные условия (3.4) через введенные по формулам (3.7) главные части преобразованного перемещения $\widetilde{v}_0$

$$F_1(\beta_1, a, r_1) \cdot S_n(\beta_0 r_1) = \widetilde{R}_{\mu 1}^{-1}[f_{r\theta}^{(1)}(k,p)],$$
$$F_2(\beta_2, b, r_2) \cdot S_n(\beta_0 r_2) = \widetilde{R}_{\mu 2}^{-1}[f_{r\theta}^{(2)}(k,p)]. \quad (3.9)$$

Здесь

$$S_n(\beta_0 r_i) = \frac{\xi}{r_i}\widetilde{v}_0^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} [2\widetilde{v}_0^{(0)} +$$

$$+\xi \cdot \eta(n, r_i) \beta_0^2 \widetilde{v}_0^{(1)}] \cdot \beta_0^{2n} \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

В выражениях функций $F_1(\beta_1, a, r_1)$ и $F_2(\beta_2, b, r_2)$ для комбинаций Бесселевых функций, ограничиваясь в их разложениях нулевым и первым приближениями получим

$$F_1(\beta_1, a, r_1) = -\frac{2}{r_1} \cdot \frac{1 + \frac{a^2}{4}\beta_1^2}{1 + \frac{r_1^2}{4}\beta_1^2},$$

$$F_2(\beta_2, b, r_2) = -\frac{2}{r_2} \cdot \frac{\frac{8}{b^2} - \beta_2^2}{\frac{8}{r_2^2} + (c - \frac{1}{2})\beta_2^2}, \quad (3.10)$$

Перепишем уравнения (2.1.43) в виде более удобном для дальнейшего использования

$$\left(1 + \frac{a^2}{2}\beta_1^2\right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} \left[2\widetilde{v}_0^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_1) \beta_0^2 \widetilde{v}_0^{(1)} \right] \right.$$
$$\left. \frac{(r_1/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_1}\widetilde{v}_0^{(1)} \right\} =$$
$$= -\frac{r_1}{2} \widetilde{R}_{\mu 1}^{-1} \left[\left(1 + \frac{r_1^2}{4}\beta_1^2\right) f_{r\theta}^{(1)}(k,p) \right],$$
$$\left(1 - \frac{b^2}{8}\beta_2^2\right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} \left[2\widetilde{v}_0^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_2) \beta_0^2 \widetilde{v}_0^{(1)} \right] \right. \quad (3.11)$$
$$\left. \frac{(r_2/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_2}\widetilde{v}_0^{(1)} \right\} =$$
$$= -\frac{b^2}{2r_2} \widetilde{R}_{\mu 2}^{-1} \left\{ \left[\left(1 + \left(c - \frac{1}{2}\right) \frac{r_2^{*2}}{8}\beta_2^2\right) f_{r\theta}^{(2)}(k,p) \right] \right\}.$$

Введем функции $v_0^{(0)}$, $v_0^{(1)}$ и операторы λ_m^n по формулам

$$\left[v_0^{(0)}, v_0^{(1)}\right] = \int_0^{\infty} \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(\ell)} \left(\widetilde{v}_0^{0}, \widetilde{v}_0^{(1)}\right) e^{pt} dp,$$

$$\lambda_m^n(\zeta) = \int_0^{\infty} \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(\ell)} \left(\beta_m^{2n}\zeta\right) e^{pt} dp$$

(3.12)

Обратив по p и k условия (3.11), с учетом (3.12) получим

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{a^2}{2}\lambda_1\right)\left[C_{11}v_0^{(0)} + \xi C_{12}v_0^{(1)}\right] = \\ = -\frac{r_1}{2} R_{\mu 1}^{-1} \left[\left(1 + \frac{r_1^2}{4}\lambda_1\right) F_{r\theta}^{(1)}(z,t) \right]; \\ \left(1 - \frac{b^2}{8}\lambda_2\right)\left[C_{12}v_0^{(0)} + \xi C_{22}v_0^{(1)}\right] = \\ = -\frac{b^2}{2r_2} R_{\mu 2}^{*2} \left\{ \left[1 + \left(C - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\lambda_2 \right] F_{2\theta}^{(2)}(z,t) \right\}, \end{cases} \quad (3.13)$$

где

$$C_{1i} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!};$$

$$C_{2i} = \frac{1}{r_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_1(n, r_i) \lambda_0^{n+1} \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}. \quad (3.14)$$

Полученные уравнения (3.13) являются общими уравнениями крутильных колебаний круговой цилиндрической упругой трехслойной оболочки.

4. Обсуждение результатов. На основании выражений для β_m $(m = 0,1,2)$ (2.4) нетрудно получить, что введенные по формулам (3.12) операторы λ_m^n, при обратном переходе по Фурье и Лапласу, в переменных z, t имеют следующие виды

$$\lambda_m^n(\zeta) = \left[\rho_m R_{\mu m}^{-1}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right)\right]^n, \qquad (3.15)$$

$m = 0,1,2; \quad n = 1,2,3,...$

Уравнения (3.13) в соответствии с формулами (3.15) для операторов λ_m^n $(m = 0,1,2; n = 1,2,3,...)$ являются интегро-дифференциальными уравнениями неограниченного порядка [15]. Данные уравнения содержат в себе главные части $v_0^{(0)}$ *и* $v_0^{(1)}$ крутильного перемещения v_0 точек некоторой “промежуточной” поверхности срединного слоя трехслойной цилиндрической оболочки.

Указанная “промежуточная” поверхность имеет радиус, значения которого заключена в интервале $r_1 \le \xi \le r_2$. В соответствии с числовым значением радиуса ξ данная “промежуточная” поверхность может перейти в срединную при $\xi = \frac{r_1 + r_2}{2}$ и контактные между слоями поверхности оболочки при $\xi = r_1$ *и* $\xi = r_2$. Следовательно, уравнения (3.13) в зависимости от значений радиуса ξ, могут быть уравнениями колебания трехслойной цилиндрической оболочки относительно главных частей крутильного перемещения точек срединной или контактных поверхностей срединного слоя.

Уравнения (3.13), при отсутствии внешних слоев, являются общими уравнениями крутильных колебаний [1] круговой цилиндрической упругой оболочки, относительно главных частей крутильного перемещения точек промежуточной поверхности оболочки. Полученные уравнения имеют, как указывалось выше, неограниченный порядок по производным, и поэтому, в своих структурах содержат производные любого порядка по продольной координате z и по времени t.

Кроме того, уравнения (3.13) в своих правых частях правильно учитывают усилия, действующие на внешней и внутренней поверхностях трехслойной оболочки, отражают (приближенно) взаимосвязь и взаимовлияние слоев - через срединный слой.

5. Выводы

- разработаны новые общие уравнения колебания нестационарных крутильных колебаний круговой цилиндрической трехслойной оболочки из упругого материала;

-полученные уравнения допускают частные случаи перехода к двухслойным и однородным (однослойным) оболочкам и к трехслойному стержню кругвого поперечного сечения;

-из общих уравнений можно получить типа классического и уточненного уравнений крутильных колебаний оболочки, ограничиваясь нулевым, первым и другими приближениями в бесконечных суммах.

Литература:

1. Худойназаров Х.Х. Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой. Ташкент, изд-во мед. Литер. имени Ибн Сино. 2003. - 350 с.
2. Худойназаров Х.Х., Ялгашев Б.Ф. Осесимметричные колебания вязкоупругого цилиндрического слоя, заполненного вязкой сжимаемой жидкостью. Научно-технический журнал «Проблемы Архитектуры и строительства», 2016, №4, С.119-125.
3. Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М. Математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя с учетом протекающей жидкости и вращения. Математическое моделирование и численные методы, 2017, № 4, с. 31–56.
3. DOI: https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-4-3147
4. Худойназаров Х.Х., Абдирашидов А., Буркутбоев Ш.М. Моделирование крутильных колебаний вязкоупругого круглого стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №1(9), С.38-51.
5. Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z. Symmetrical vibrations of a three-layered elastic plate. Int. J. of Advanced Research in Science, Engineering and Technology, 2018. Vol.5, Issue 10.- pp.7117-7121.
6. Filippov, I. G. & Kudainazarov, K. (1990). Refinement of equations describing longitudinal-radial vibrations of a circular cylindrical viscoelastic shell. Soviet Applied Mechanics, 26(2), 161–168. doi:10.1007/bf00887110.
7. Худойназаров Х.Х., Ялгашев Б.Ф. Взаимодействие цилиндрических слоев и оболочек с вязкой жидкостью. Изд-во LAMBERT Academic Publishing -2017, -138 с.
8. Khudoynazarov,X.X., Skripnyak,V.A., Yakhshiboyev,Sh.R. Unsteady transverse vibrations of a three-layer viscoelastic plate. Uzbek journal “Problems of Mechanics”, 2018, 2, 27-32.
9. Filippov, I. G. & Kudainazarov, K. (1990). General transverse vibrations equations for a circular cylindrical viscoelastic shell. Soviet Applied Mechanics, 26(4), 351–357. doi:10.1007/bf00887127.
10. Filippov, I. G. &Kudainazarov, K. (1998). Boundary-value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells. International Applied Mechanics, 34(12), 1204–1210. doi:10.1007/bf02700874.
11. Kh.Kh.Khudoynazarov. Transversal vibrations of thick and thin cylindrical shells, interacting with deformable medium. in: W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak (Eds.), Shell Structures: Theory and Applications,Taylor & Francis, London, 2005, pp. 343-347.
12. Khudoynazarov KH.KH., Kholmurodov R.I. Theory of axisymmetrical vibrations of circular cylindrical shells. The 7th Conference “Shell Structures, Theory and Applications”, Gdansk-Jurata (Poland),

October 9-11, 2002.- Gdansk: Gdansk University of Technology, 2002. pp.131-132.

13. Khudoynazarov, Kh.Kh. Filippov, I.G. & Zavyalov ,V.M. 1997. The boundary conditions on an end of cylindrical cover by a longitudinal oscillation. Teoretycan epodstawy budownictwa, Warszawa, 1998, 49-55 p.

14. Кудайназаров К. Продольные колебания круговой цилиндрической оболочки конечной толщины. Изв. АН УзССР, Сер. техн.наук, 1981, №5.

15. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория упругих и вязкоупругих пластин и стержней.-Кишинев: Штиинца, 1988.-190 с.