МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

Ж. ЖУМАЕВ

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПАКЕТАХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Бухара - 2020

УДК 004.434, 330.4

Жумаев Ж.

Решение математических задач в пакетах математических программ [Текст]: учебное пособие/Жумаев Ж.-Бухара:

Данное учебное пособие составлено на основе программы дисциплины «Решение математических задач в пакетах математических программ», утвержденной Казанским федеральным университетом.

Пособие содержит теоретические данные, необходимые для решения задач, и их практическое применение, методы получения решений в математической программе Maxima, а также необходимые задания для закрепления полученных теоретических знаний при прохождении аудиторных практических занятий, а также внеаудиторной самостоятельной работе.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 - «Экономика» в рамках совместных программ образования. Пособие также можно использовать при прохождении занятий по предметам «Экономико-математические модели», «Моделирование экономических процессов», для самостоятельного изучения математической программы Maxima.

Рецензенты:

Тешаев М.Х. - профессор кафедры «Высшая математика» Бухарского инженерно технологического института, д.ф.-м.н. (D.Sc.)

Дурдиев Д.К. – профессор кафедры «Математика» Бухарского государственного университета, д.ф.-м.н.

Утверждено к печати Министерством Высшего и средне-специального образования Республики Узбекистан приказ № 359 от 30.07.2020.

Ushbu o’quv qo’llanma Qozon federal universiteti o'quv metodik komissiyasi tomonidan tasdiqlangan “matematik dasturlar yordamida matematik masalalarni yechish” fani dasturi asosida tayyorlangan.

Qo’llanmada masalalrni yechish uchun kerak bo’lgan nazariy ma’lumotlar va ularning amaliy tadbiqlari, Maxima matematik dasturida yechimlarni olish usullari bilan bir qatorda olingan nazariy bilimlarni auditoriyada va mustaqil ravishda mustahkamlash uchun kerakli topshiriqlar ham keltirilgan.

O’quv qo’llanma qo’shma dasturlar doirasidagi 38.03.01 – “Iqtisod” yo’nalishida ta’lim olayotgan talabalar uchun mo’ljallangan. Ushbu qo’llanmadan shuningdek “Iqtisodiy matematik usullar”, “Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish” fanlarini o’tishda, Maxima matematik dasturini mustaqil o’rganishda ham foydalanish mumkin.

Taqrizchilar:

Teshayev M.X. – Buxoro muxandislik texnologiyalari instituti Oliy matematika kafedrasi professori, f.m.-f.d.(DSc).

Durdiyev D.Q. – Buxoro davlat universiteti Matematika kafedrasi professori, f.m.-f.d.

This educational textbook is based on the discipline program "Solving mathematical problems in mathematical software", approved by the Kazan Federal University.

The textbook includes the necessary theoretical information used in solving problems, detailed solutions to typical problems both by traditional methods and using the Maxima mathematical program, as well as professionally oriented practical tasks that can be used in classroom and as extracurricular for students.

The study textbook is intended for students studying in joint programs of the field of training direction 38.03.01 "Economics". In can also be used for conducting classes on the subjects "Economic-mathematical models", "Modeling of economic processes", with independent study of the mathematical program Maxima.

Reviewers:

Teshayev M.Kh.(D.Sc.) – Buchara Enjineering and Technology Institute, Professor of the department of Higher Mathematics

Durdiyev D.Q.(D.Sc.) – Buchara State University, professor of the department Of Mathematics.

ОГЛАВЛЕНИЕ

MUNDARIJA

CONTENT

ВВЕДЕНИЕ

В концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года, который был утвержден Президентом Республики Узбекистан указом № УП-5847 8 октября 2019 г., приведены целы повышения качества подготовки специалистов, модернизации высшего образования для развития социальной сферы и отраслей экономики на основе передовых образовательных технологий.

Одна из основных задач профильного обучения заключается в подготовке студентов к успешной профессиональной деятельности. Применение математического инструментария является важной частью профессиональной компетентности будущего специалиста.

Многие экономические задачи могут быть решены с помощью табличного процессора EXCEL, входящего в пакет Microsoft Office. Процесс решения, заключающийся в заполнении данными задачи ячеек таблиц, внесении в них формул, выполнении команд и заполнении диалоговых окон, не является до конца автоматическим. Поэтому он не оптимален при решении больших потоков данных экономических задач.

Круг задач, решаемых с помощью математических пакетов, очень широк, а их использование во многом соответствует активной и ритмичной работе студентов, повышению эффективности учебного процесса, качества образования в целом.

Вычислительные средства Maxima обеспечивают расчеты по сложным математическим формулам, включая численные методы и аналитические преобразования. Maxima имеет большой набор встроенных математических функций, позволяет вычислять ряды, суммы, произведения, интегралы, производные, решать линейные и нелинейные уравнения, а также дифференциальные уравнения и системы, проводить минимизацию и максимизацию функций, выполнять векторные и матричные операции, статистический анализ и т.д. Maxima – специализированный математический пакет, которым пользуются профессиональные математики во всем мире.

Математический пакет “Maxima” используется в учебном процессе Казанского федерального университета как дружественный математический инструментарий для специальности Экономика.

Учебное пособие «Решение математических задач в пакетах математических программ», ориентированные для направления подготовки совместных программ «Экономика» с применением программы Maxima» направлено на изучение прикладных вопросов математического анализа в экономической области и выработку у обучающихся опыта применения моделей корреляционного и регрессионного анализа к решению такого типа задач.

Каждый параграф данного учебного пособия содержит краткие теоретические сведения, примеры к изложенному теоретическому материалу, примеры приложения рассматриваемой темы в экономике, задания для самостоятельной работы. Задачи и решения задач прямо скопированы с экрана Maxima, когда при копировании произошло искажение, эти фрагменты скопированы с экрана Maxima как рисунки.

Решение задач с экономическим содержанием предложено несколькими способами, а именно традиционным способом, а также с помощью меню программы Maxima. Эти примеры призваны сформировать у студентов понимание значимости математического анализа в будущей профессиональной деятельности, а также навыки математического моделирования, математической статистики и использования информационных технологий.

Данное учебное пособие составлено на основании программы дисциплины «Решение математических задач в пакетах математических программ», утвержденное в Казанском федеральном университете.

1- МОДУЛЬ. ОСНОВЫ MAXIMA

1.1. Достоинства программы.

Первые ЭВМ изначально создавались для того, чтобы проводить сложные расчеты, на которые человек тратил очень много времени. Следующим шагом развития ЭВМ стали ПК. Эти машины могут проводить вычисления разной сложности (от самых простых до самых сложных), и такая особенность стала использоваться в разных областях знаний. Развитие компьютерных математических систем привело к появлению отдельного класса программ, который получил названия Системы Компьютерной Алгебры (CAS).

Главная задача CAS обработки математических выражений в символьной форме. Символьные операции обычно включают в себя: вычисление символьных либо числовых значений для выражений, преобразование, изменение формы выражений, нахождение производной одной или нескольких переменных, решение линейных и нелинейных уравнений, решение дифференциальных уравнений, вычисление пределов, вычисление определенных и неопределенных интегралов, работу с множествами, вычисление и работу с матрицами.

В дополнение к перечисленному, большинство CAS поддерживают разнообразные численные операции: расчет значений выражений при определенных значениях переменных, построение графиков на плоскости и в пространстве. Большинство CAS включают в себя высокоуровневый язык программирования, который позволяет реализовать свои собственные алгоритмы. Наука, которая изучает алгоритмы, применяемые в CAS, называется компьютерной алгеброй.

CAS были созданы в 70-ые годы и развивались в рамках проектов, связанных с искусственным интеллектом. Поэтому сфера их применения достаточно широкая и разнообразная. Первыми популярными системами были Reduce, Derive, Macsyma. Некоторые из них до сих пор находятся в продаже. Свободно распространяемая версия Macsyma_Maxima.

В настоящее время Maxima — это система компьютерной математики, которая предназначена для выполнения математических расчетов (как в символьном, так и в численном виде) таких как: - упрощение выражений; - графическая визуализация вычислений; - решение уравнений и их систем; - решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем; - решение задач линейной алгебры; - решение задач дифференциального и интегрального исчисления; - решение задач теории чисел и комбинаторных уравнений и др. В системе имеется большое количество встроенных команд и функций, а также возможность создавать новые функции пользователя. Система имеет свой собственный язык. Она также имеет встроенный язык программирования высокого уровня, что говорит о возможности решения новых задач и возможности создания отдельных модулей и подключения их к системе для решения определенного круга задач.

Основными преимуществами программы Maxima являются:

-возможность свободного использования (Maxima относится к классу свободных программ и распространяется на основе лицензии GNU);

-возможность функционирования под управлением различных ОС (в частности Linux и Windows);

-небольшой размер программы (дистрибутив занимает порядка 23 мегабайт, в установленном виде со всеми расширениями потребуется около 80 мегабайт);

-широкий класс решаемых задач;

-возможность работы как в консольной версии программы, так и с использованием одного из графических интерфейсов (xMaxima, wxMaxima или как плагин (plug-in) к редактору TexMacs);

-расширение wxMaxima (входящее в комплект поставки) предоставляет пользователю удобный и понятный интерфейс, избавляет от необходимости изучать особенности ввода команд для решения типовых задач;

- интерфейс программы на русском языке;

- наличие справки и инструкций по работе с программой (русскоязычной версии справки нет, но в сети Интернет присутствует большое количество статей с примерами использования Maxima).

1.2. Установка и запуск программы

Скачать последнюю версию программы можно с ее сайта в сети Интернет: http://maxima.sourceforge.net/.

Русская локализация сайта: http://maxima.sourceforge.net/ru/.

Рассмотрим установку программы на компьютер под управлением OS Windows (наиболее популярный вариант операционной системы). Дистрибутив последней версии программы скачивается одним файлом в exe-формате maxima-5.28.0-2.exe с сайта разработчиков программы http://sourceforge.net/projects/maxima/files/. Заметим, что на сайте имеются также более ранние версии программы. Для установки программы на компьютер необходимо иметь права администратора.

Установка программы стандартна и доступна начинающему. На первом этапе тут же после запуска инсталлятора будет задан вопрос о том, какие компоненты программы необходимо установить (рис. 1.1).

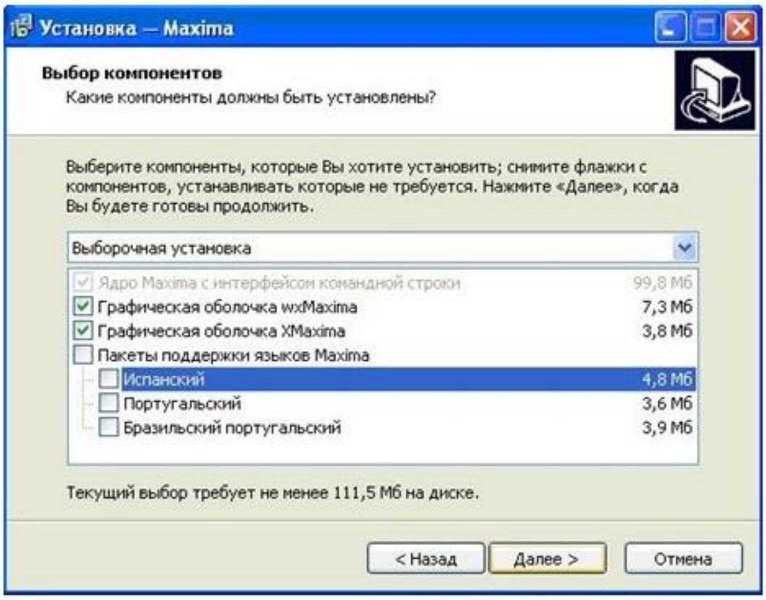

Рис. 1.1. Инсталяция программы Maxima.

Можно не выбирать Пакеты поддержки языков Maxima и выбрать оба варианта графической оболочки: wxMaxima и XMaxima.

После установки Maxima появляется в меню Пуск(рис.1.2).

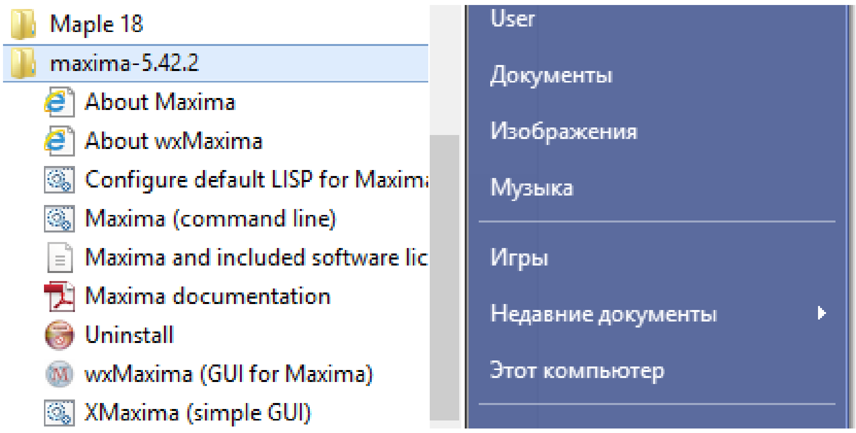

Рис.1.2. Пакет Maxima в меню Пуск.

1.3. Интерфейс wxMaxima.

Для удобства обратимся к графическому интерфейсу wxMaxima, т. к. он является наиболее дружественным для начинающих пользователей системы.

Рассмотрим рабочее окно программы(рис.1.3). Сверху вниз располагаются: текстовое меню программы - доступ к основным функциям и настройкам программы. В текстовом меню wxMaxima находятся функции для решения большого количества типовых математических задач, разделенные по группам: уравнения, алгебра, анализ, упростить, графики, численные вычисления. Ввод команд через диалоговые окна упрощает работу с программой.

Окно можно разделить на шесть зон. В первой зоне указана строка заголовка, представляющая версию оболочки и имя документа wxMaxima. Вторая зона содержит главное меню. Третья зона содержит рабочие инструменты 6 оболочки. Для появления подсказки о предназначении инструмента нужно задержать на нем курсор. Четвертая зона представляет собой рабочее пространство, здесь записываются программы и комментарий к ним. В пятой зоне находятся командные кнопки для выполнения основных команд. И, наконец, последняя зона содержит статусную строку, здесь отображается информация о нынешнем состоянии программы.

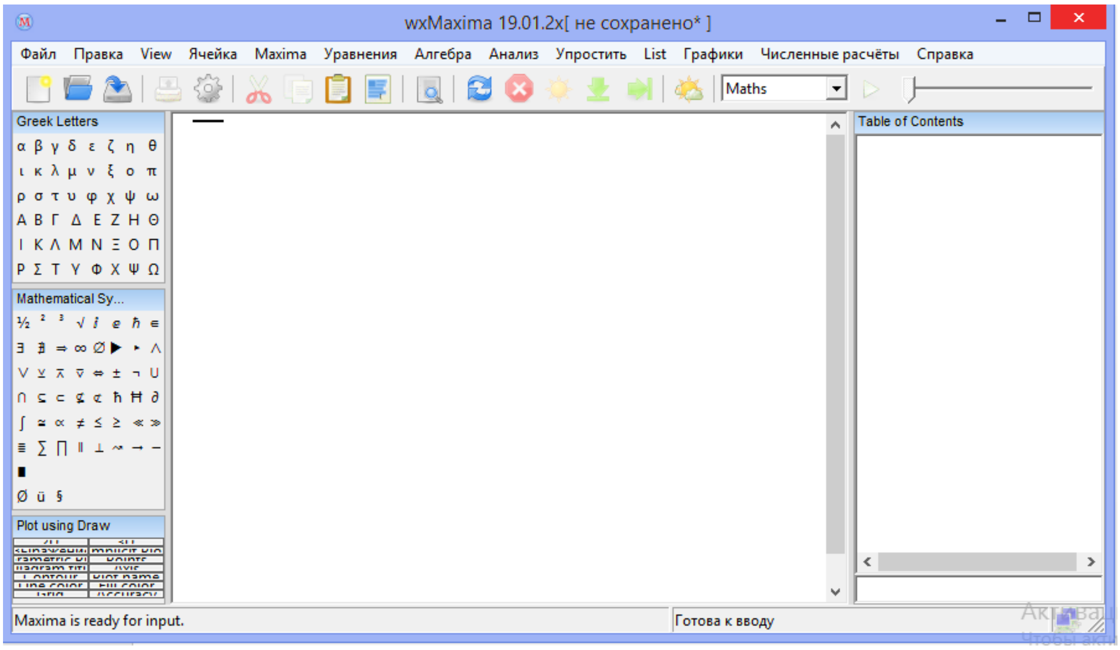

Рис. 1.3. Рабочее окно программы.

Строка главного меню расположена внизу строки заголовка. В строке меню сгруппированы действия, которые выполняются в окне wxMaxima. Нажимая на любой пункт главного меню, можно открыть список первого уровня. Некоторые пункты меню первого уровня содержат подменю второго уровня. Такие пункты помечены треугольником с правой стороны. Рассмотрим более подробно пункты главного меню. В меню Файл обозначены те действия, которые связаны с открытием, сохранением, загрузкой пакетов, печатью документов, выходом из программы. Также показаны «быстрые клавиши» для вызова команд расположенные справа от их названия. Команды, выделенные серым цветом, в данный момент недоступны. В меню Правка сгруппированы действия, которые связанны с редактированием текста, копированием и поиском. Название команд в данном меню простые и обозначают результат действия, которые выполняются при нажатии на соответствующие пункты меню. Например, команды Уменьшить (Alt+O) и Увеличить (Alt+I) позволяют изменить размер шрифта в рабочем пространстве окна wxMaxima.

Интерфейс wxMaxima имеет много достоинств:

1. При записи команд можно вставлять дополнительные пробелы для повышения читабельности.

2. Длину строки с командой можно брать любой, можно переносить текст команды на новую строку.

3. Интерпретатор Maxima выполняет вычисления и тут же выводит результат. Вызов интерпретатора производится нажатием клавиш *Shift+Enter*, если даже не записан последний терминальный символ **;** – точка с запятой. При вызове интерпретатора символ (**;**) добавляется автоматически. Можно сэкономить время и, не записывая символа (**;**), нажать клавишу *Enter*, придерживая нажатой клавишу *Shift* курсор при вызове интерпретатора может находиться в любом месте, даже в начале строки.

4. В одну группу можно объединить несколько команд, разделяя их символами ; или $. Каждая команда получит свой номер, но только для первой из них номер будет указан в окне wxMaxima. Команды будут выполняться в том порядке, в которой они записаны. Каждый результат будет иметь номер, соответствующий номеру введённой команде, но напечатаны будут ответы тогда, когда терминальным символом у соответствующей команды была записана точка с запятой (**;**) и не напечатаны в том случае, если терминальным символом служил $.

5. Тексты команд можно копировать, вставлять и редактировать как обычный текст в обычном текстовом редакторе. Можно вставлять текст примеров из других источников, например из файлов, открытых в Word’е или Блокноте, или в других текстовых редакторах. При вставке только одной строки никаких дополнительных действий не потребуется. Но при вставке нескольких строк из другого источника придется удалять символ перевода строки, который кодируется в Maxima иначе.

6. Можно повторно выполнить ранее записанную команду или серию команд: поднять курсор вверх и на записанной строке вызвать интерпретатор нажатием *Shift+Enter*. Выполненная строка получит новый (очередной) номер.

7. Нумерацию команд можно снова начать с номера (%i1), если выполнить команду kill(all). При этом будут сброшены значения всех ранее использованных переменных, kill(x) – сбрасывает значение переменной x.

8. При ссылке на последний полученный результат можно не приводить номер строки полностью, достаточно указать только символ %.

9. Ссылка на последнюю введенную команду имеет вид _ (подчерк).

10. Строки ввода вместе со строками вывода в окне wxMaxima соединены специальной квадратной скобкой и образуют блок, состоящий из блока ввода и блока вывода. При необходимости можно скрыть (hide) все строки, кроме первой, если щелкнуть мышью на треугольнике в верхнем углу квадратной скобки.

11. Строки вывода (они имеют номер вида %o*N*) удалять не нужно, они тут же останутся в истории, если исправить текст команды и исполнить команду повторно.

12. Чтобы удалить блок целиком, его сначала нужно выделить: щелкнуть, например, левой кнопкой мыши по квадратной скобке блока, а затем удалить с клавиатуры. Или щелкнуть правой кнопкой мыши по квадратной скобке указателя блока (вызывает контекстное меню) и выбрать Delete Selection (удалить выделение).

13. Среди набираемых команд может быть использован комментарий – текст, набранный в скобках /* */, в то же время блок ввода не может заканчиваться комментарием – последний (комментарий) не должен быть в блоке ввода последним.

1.4. Ввод простейших команд Maxima.

После того, как система загрузилась, можно приступать к вычислениям. Для этого следует добавить так называемую ячейку ввода, в которую вводится команда системе выполнить какое-либо действие.

Нажимаем на клавиатуре клавишу Enter. В результате в рабочей области будет сформирована ячейка ввода

Все команды вводятся в поле ВВОД. В конце команды нужно ставить символ « ; » или « $ ». В первом случае результат печатается, а во втором –

нет. После ввода команды нужно нажать клавишу Enter для ее обработки и вывода результата.

Maxima использует ':' для присвоения значений ('a : 3;') и ':=' для определения функций ('f(x) := x^2;').

Например:

(%i1) a:3;

(a) 3

(%i2) 2+3;

(%o2) 5

(%i3) 5+6$

В последних версиях символ “;” в конце выражения необязательно, система его ставить самостоятельно, это символ означает конец выражения. Если в одной строке надо вводит несколько выражений, после выбора первого выражения и символа “;” можно выбрать и следующее выражение, как показано ниже:

(%i6) a:5;b:6;

(a) 5

(b) 6

Здесь в переменной a присвоено значение 5, а в переменной b присвоено значение 6. Завершение ввода символом $ (вместо точки с запятой) позволяет вычислить результат введённой команды, но не выводить его на экран. В случае, когда выражение надо отобразить, а не вычислить, перед ним необходимо поставить знак ’ (одинарная кавычка).

(%i9) d:'a+b;

(d) $a + 6$

(%i10) e:a+b;

(e) 11

После ввода, каждой команде присваивается порядковый номер. В рассмотренном примере (см. выше), введенные команды имеют номера 1-10 и обозначаются соответственно *(%i1), (%i2)* и т.д.

Результат вычисления также имеет порядковый номер, например *(%o1), (%o2)* и т.д., где i -сокращение от англ. input (ввод), а o - англ. output (вывод). Этот механизм позволяет избежать в последующих вычисления повторения полной записи уже выполненных команды, например *(%i1)+(%i2)* будет означать добавление к выражению первой команды - выражения второй и последующего вычисления результата. Также можно использовать и номера результатов вычислений, например *(%o1)*(%o2)*.

(%i11)	4+5;

(%o11)	9

(%i12)	(%o2)·(%o11);

(%o12)	45

Самый последний результат вычисления обозначается '%'. Результат любого другого предыдущего вычисления обозначается '%on', где n - порядковый номер вычисления.

Например

(%i24)	25;

(%o24)	25

(%i25)	%o24·5;

(%o25)	125

Когда присваивается значение переменной, можно вычислять значение выражения, например

(%i61)	a:2$b:3$3·a+7/b;

(%o61)	$\frac{25}{3}$

А также для вычисления какого-либо выражения можно воспользоваться функцией ev.

Она имеет следующий синтаксис:

ev(выражение, переменная1=значение1, переменная2=значение2,...)

Тогда задаем предыдущую команду в следующем виде:

*Ev(3*a+7/b,a=2,b=3);*

На экране Maxima это имеет вид:

(%i62) ev(3·a+7/b,a=2,b=3);

(%o62) $\frac{25}{3}$

Значения имен переменных сохраняются на протяжении всей работы с документом. Если необходимо снять определение с переменной , то это можно сделать с помощью функции *kill()*. Для этого нужно набрать *kill(name)*, где *name* — имя уничтожаемого выражения; причем это может быть как имя, назначенное вами, так и любая ячейка ввода или вывода. Точно так же можно очистить всю память и освободить все имена, введя команду *kill(all)* (или выбрать меню *Maxima->Очистить память*). В этом случае очистятся в том числе и все ячейки ввода-вывода, и их нумерация опять начнется с единицы.

1.5. Числа, операторы и константы.

Правила ввода чисел в Maxima точно такие, как и для многих других подобных программ. Целая и дробная часть десятичных дробей разделяются символом точка. Перед отрицательными числами ставится знак минус. Числитель и знаменатель обыкновенных дробей разделяется при помощи символа / (прямой слэш). Надо отметить, что если в результате выполнения операции получается некоторое символьное выражение, а необходимо получить конкретное числовое значение в виде десятичной дроби, то решить эту задачу позволит применение флага numer. В частности он позволяет перейти от обыкновенных дробей к десятичным. Преобразование к форме с плавающей точкой осуществляет также функция float.

(%i13) 3/7+5/3;

(%o13) $\frac{44}{21}$

(%i14) 3/7+5/3,float;

(%o14) 2.095238095238095

(%i15) 3/7+5/3,numer;

(%o15) 2.095238095238095

(%i16) float(5/7);

(%o16) 0.7142857142857143

Есть еще одна встроенная в Maxima полезная операция –нахождение факториала числа. Эта операция обозначается восклицательным знаком. Например, 6!=1. 2. 3. 4. 5. 6=120.

(%i103) 6!;

(%o103) 720

В Maxima можно работать и с большими числами, например:

(%i9) 28!;

(%o9) 304888344611713860501504000000

Для нахождения приближенного значения $\sqrt{2}$ следует воспользоваться командой sqrt(2), numer, результатом которой будет 1.414213562373095. Полученный ответ содержит 16 значащих цифр. Если требуется большая точность, то применяют команду bfloat, предварительно установив количество значащих цифр с помощью переменной fpprec.

Пример. Найти 60 верных значащих цифр числа $\sqrt{3}$

Решение. Сначала следует с помощью команды fpprec:60 установить требуемую точность вычислений, а затем ввести команду bfloat(sqrt(3)). Ответ выводится в экспоненциальной форме:

(%i12) fpprec:60;

(fpprec) 60

(%i13) bfloat(sqrt(3));

(%o13

1.73205080756887729352744634150587236694280525381038062805581b0

Символ B0 в конце этой записи означает, что Maxima не отбрасывает «лишние» цифры, а округляет числа до требуемого количества знаков.

Пример. Найдите 40 верных знаков числа π.

Решение. В программе Maxima число π записывается как %pi, а число e – как %e. Для получения их приближенных значений с нужной степенью точности можно также использовать команды fpprec и bfloat. После установки нужной точности fpprec:40 зададим команду bfloat(%pi) и найдем

(%i22) fpprec:40;

(fpprec) 40

(%i23) bfloat(%pi);

(%o23) 3.141592653589793238462643383279502884197b0

Для увеличения приоритета операции, как и в математике, при записи команд для Maxima используют круглые ( ) скобки.

В **Maxima** для удобства вычислений имеется ряд встроенных констант. Самые распространённые из них показаны в табл. 1.1:

Таблица 1.1. Основные константы Maxima

Название	Обозначение
слева (в отношении пределов)	$minus$
справа (в отношении пределов)	$plus$
плюс бесконечность	inf
минус бесконечность	$\min f$
число π	$\%pi$
е (экспонента)	$\%e$
Мнимая единица $\sqrt{-1}$	$\%i$
Истина	$true$
Ложь	$false$
Золотое сечение $(1+\sqrt{5})/2$	$\%phi$

1.6. Арифметические операции.

Обозначение арифметических операций в **Maxima** ничем не отличается от классического представления: + , — , * , /. Возведение в степень можно обозначать несколькими способами: ^, ^^, **. Извлечение корня степени n записываем, как степень $\frac{1}{n}$. Операция нахождение факториала обозначается восклицательным знаком, например 5!. Для увеличения приоритета операции, как и в математике, используются круглые скобки: (). Список основных арифметических и логических операторов приведён в табл. 1.2 и табл. 1.3 ниже.

Таблица 1.2.

+	оператор сложения
−	оператор вычитания или изменения знака
*	оператор умножения
/	оператор деления
^ или **	оператор возведения в степень

Таблица 1.3.

<	оператор сравнения меньше
>	оператор сравнения больше
<=	оператор сравнения меньше или равно
>=	оператор сравнения больше или равно
#	оператор сравнения не равно
=	оператор сравнения равно
and	логический оператор и
or	логический оператор или
not	логический оператор не

1.7. Переменные и функции

Для хранения результатов промежуточных расчётов применяются переменные. Заметим, что при вводе названий переменных, функций и констант важен регистр букв, так переменные x и X — две разные переменные. **Присваивание** значения переменной осуществляется с использованием символа **: (двоеточие),** например x:5. Если необходимо удалить значение переменной (очистить её), то применяется метод $kill$:

$kill(x)$— удалить значение переменной x;

$kill(all)$— удалить значения всех используемых ранее переменных.

Зарезервированные слова, использование которых в качестве имён переменных вызывает синтаксическую ошибку:

`integrate, next, from, diff, in, at, limit, sum, for, and, elseif, then, else, do, or, if, unless, product, while, thtu, step.`

Названия переменных в программе Maxima принято писать латинскими буквами, причём прописные буквы необходимо отличать от строчных. В имени переменной (идентификаторе) могут присутствовать также цифры, символ подчёркивания «_» и знак процента «%». Русские буквы и русские тексты Maxima тоже частично понимает, если их записывать в двойных кавычках, но все же, как видим из следующего, примера, полной эквивалентности нет.

Понятие функции

Если каждому числу x из некоторого множества X по определенному правилу f поставлено в соответствие единственное число y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, где x называется независимой переменной или аргументом, а y – зависимой переменной.

Для записи функции в **Maxima** необходимо указать её название, а затем, в круглых скобках записать через запятую значения аргументов. Если значением аргумента является список, то он заключается в квадратные скобки, а элементы списка также разделяются запятыми.

В **Maxima** имеется достаточно большой набор встроенных математических функций. Перечень основных классов встроенных функций приведён ниже:

– тригонометрические функции: sin(синус), cos(косинус),tan (тангенс), cot(котангенс);

-обратные тригонометрические функции: *asin* (арксинус), *acos* (арккосинус), *atan* (арктангенс), *acot* (арккотангенс); *sec* (секанс, *sec* x = 1/*cos x*), *csc* (косеканс, *csc* x = 1/*sin x*);

-*sinh* (гиперболический синус), *cosh* (гиперболический косинус), *tanh* (гиперболический тангенс), *coth* (гиперболический котангенс), *sech* (гиперболический секанс), *cosh* (гиперболический косеканс);

-*log* (натуральный логарифм);

-*sqrt* (квадратный корень);

-*mod* (остаток от деления);

-*floor*(целочисленное деление);

-*abs* (модуль);

Для нахождения частного при целочисленном делении следует использовать функцию *floor*, а для нахождения остатка от деления - функцию *mod*.

Примеры:

(%i2) floor(100/3);

(%o2) 33

(%i3) mod(100,3);

(%o3) 1

Следует помнить, что некоторые математические функции имеют отличное от привычного выражение, например, tg заменен на *tan*, ctg – на *cot*, arctg – на *atan*. Функция ln имеет представление *log*, а логарифмы по основаниям, отличным от числа e, не рассматриваются, либо должны быть приведены к основанию e. Замечательные числа, такие как то же e, записываются со значком % перед ними. То есть, e записывается как %e, – как %pi. Все функции записываются с маленькой буквы и переменные в функциях вводятся в скобках. Например, sin x запишется как *sin(x)*. Знак умножения вводится знаком *. Степень вводится при помощи значка ^.

Пользователь может задать собственные функции. Для этого сначала указывается название функции, в скобках перечисляются названия аргументов, после знаков := (двоеточие и равно) следует описание функции. После задания пользовательская функция вызывается точно так, как и встроенные функции **Maxima.**

(%i17) f(x):=x²;

(%o17) $(f(x)) := x^2$

(%i18) f(6);

(%o18) 36

В системе Maxima имеется множество встроенных функций. Заметим, что в системе Maxima нет четкого разграничения между операторами и функциями. Более того, каждый оператор — это на самом деле функция. Так, например, арифметический оператор «+» можно задать привычным для нас способом: 1+2+3+4, а можем задать как функцию в виде «+»(1,2,3,4). Результат вычислений будет один и тот же.

Например

(%i63) "+"(1,2,3,4);

(%o63) 10

Здесь имена функций-операторов берутся в кавычки лишь потому, что содержат символы, нестандартные для имен функций. Это похоже на работу в командной оболочке UNIX, где, если в имя файла входят управляющие символы, мы можем либо взять это имя в кавычки, либо экранировать каждый такой символ обратным слэшем. В Maxima допустимы те же два варианта: например, вместо "+" можно было бы написать \+.

Пример использования функции.

Вычислить $\dfrac{4\cdot\sin 25^0 sin65^0}{cos40^0}$

Особенностью системы Maxima является то, что по умолчанию она работает с углами, выраженными в радианах. В нашем же примере угол выражен в градусах. Поэтому для корректного решения нам необходимо вспомнить формулу перехода от градусов к радианам.

$$n^0 = \frac{\pi}{180} \cdot n$$

Тогда зададим функцию пользователя, которая будет вычислять значение угла в радианах по формуле:

(%i27) a(n):=%pi·n/180;

(%o27) $(a(n)) := \frac{\pi n}{180}$

Теперь зададим само выражение

(%i28) 4·sin(a(25))·sin(a(65))/cos(a(40));

(%o28) $\dfrac{4\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{36}\right)\cdot\left(\frac{13\cdot\pi}{36}\right)}{\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)}$

Как видим, система сразу не вывела нам результат в виде числа, поэтому попросим ее это сделать.

(%i66) float(%), numer;

(%o66) 2.0

Ключевые слова:

Компьютерные математические системы, системы компьютерной алгебры, *wxMaxima*, *xMaxima*, интерфейс *wxMaxima*, главное меню, очистить память, *numer*, *float*, встроенные константы, *inf*, переменные, функции, *floor*, *mod*, *ev*, *input*, *output*, выражение, целая часть, дробная часть, *bfloat*, *fpprec*, арифметические операторы, большая точность, *log*, *sqrt*.

Вопросы для контроля:

1.Каковы преимущества программы wxMaxima?

2.Охарактеризуйте рабочее окно программы wxMaxima.

3.Как осуществляется ввод простейших команд в wxMaxima?

4.Перечислите правила ввода числовой информации.

5.Отличаются ли обозначения арифметических операций в программе wxMaxima от математической записи? В чем отличия?

6.Какая формула перехода с угла на радианы?

7. Какую функцию выполняют команды fpprec и bfloat?

8. Как можно разложит на простые множители число?

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить выражения:

1) $11\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$

2) $3\frac{3}{4}-\frac{4}{5}$

3) $\frac{1}{3}\div\frac{5}{12}$

4) $\frac{4}{5}-2.5$

5) $\frac{1}{5}+2\frac{1}{9}$

6) $8\frac{1}{2}*\frac{7}{14}$

7) $\frac{7}{9}\div\frac{13}{17}$

8) $\frac{1}{25}\div\frac{4}{5}$

9) $1\frac{1}{7}+2\frac{1}{5}$

10) $\frac{5}{7}\div\frac{4}{21}$

11) $\frac{5}{6}*2.4$

12) $3\frac{1}{11}+\frac{1}{3}$

13) $5\frac{2}{3}*\frac{9}{17}$

14) $34.5-\frac{2}{7}$

2. Вычислить значения функции в указанных точках.

1) f(x)= $e^{x+\sqrt{x}}+\dfrac{x^3}{|x|+3}$, f(2)=? ; f(4)=? ; f(1)+f(3)=?

2) f(x,y)= $x^{\frac{y}{3}}+\dfrac{y^x}{x!+\dfrac{\sin x}{\cos^2 y}}+e^{\sqrt[x]{y+x}}$, f(3,2)=? ; f(4,2)=?

3) f(x)= $e^{x+\sqrt{x}}+\dfrac{x^3}{|x|+3}$, f(2)=? ; f(4)=? ; f(1)+f(3)=?

4) f(x)= $\dfrac{ax^4+\cos x}{\sin x+\sqrt[b]{x}}$, a=3 ; b= 4 ;

5) f(x,y)= $x^y+\dfrac{y^x}{x+\dfrac{\cos x}{\cos y}}+e^{\sqrt[x]{y}}$, f(1,2)=? ; f(4,5)=?

6) f(x,y)= $x^{\frac{y}{3}}+\dfrac{y^x}{x!+\dfrac{\sin x}{\cos^2 y}}+e^{\sqrt[x]{y+x}}$, f(3,2)=? ; f(4,2)=?

3. Выполните указанные действия:

$$\frac{(7-6{,}35)\cdot 6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}-19\frac{1}{4}.$$

$$\left(\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+0{,}43+\frac{11}{50}$$

$$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7}+\frac{10}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}\right)}$$

4.Найти приближенные значения и периоды следующих десятичных дробей:

$$\frac{1}{7}+\frac{4}{23};\ \left(\frac{1}{7}+\frac{4}{23}\right)^5;\ \ 13\frac{1}{4}+12\frac{5}{6}.$$

6. Найдите десятичную запись числа $\sqrt{5}$, содержащую 25 верных знаков.

7. Вычислить значение выражения

$$h=\frac{\sqrt{c+x^2\cdot(cos^5(x)-c)}+\sqrt[3]{sinx+lny}}{c+y}$$

При следующих исходных данных: $x=3.981$, $y=1.625$; $c=0.512$.

8. Вычислить значение выражения

$$b=\frac{x^3+z}{cos^2x+1}+tgx^2-\sqrt{sinx-a}+\frac{e^x}{3x^2}$$

При следующих исходных данных: $x=-6.251$; $a=0.827$; $z=25.001$

Использованная литература:

1.Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. Казань: Казанский университет, 2012. – 57с.

2.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казан.федер.ун-т, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012. 80 с.

3.Методическое пособие по изучению математического пакета Maxima: http://kit.znu.edu.ua/iLec/9sem/CAB/LIT/maxima2-met1.pdf

4. Перепечко С.Н., Воропаев А.Н. Основы работы в системах компьютерной алгебры. Сборник задач. Петрозаводск, 2013. 64 с.

5. Чичкарёв Е.А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. М.: ALT Linux. 2012.-384 с.

6.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник/М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: ИНФРА-М, 2011. -472 с. http://www/znanium.com/bookread.php?book=221082

7. Установка программы – http://maxima.sourceforge.net/ru/index.html

2- МОДУЛЬ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ И ПОВЕРХНОСТЕЙ В MAXIMA

Для вывода графиков на экран или на печать при помощи Maxima существуют несколько вариантов форматов и, соответственно, программ вывода графики, а именно:

• openmath (Tcl/Tk программа с графическим интерфейсом пользователя; элемент xMaxima)

• gnuplot (мощная утилита для построения графиков, обмен с Maxima - через канал);

• mgnuplot (Tk-интерфейс к gnuplot с рудиментарным графическим интерфейсом пользователя, включён в дистрибутив Maxima);

• wxMaxima (встроенные возможности frontend-а к Maxima).

Все варианты интерфейса (кроме wxMaxima) для построения графиков используют две базовых функции: *plot2d*(построение двумерных графиков) и *plot3d*(построение трехмерных графиков). При использовании wxMaxima кроме них используются ещё две аналогичные команды: *wxplot2d* и *wxplot3d*. Все команды позволяют либо вывести график на экран, либо (в зависимости от параметров функции) в файл.

2.1. Построение графика функции по точкам (табуляция функций).

В Maxima можно рисовать графики функций, заданных таблично. Для этого ей нужны два списка: один – для значений абсцисс дискретных точек, второй – для значений ординат этих точек. Синтаксис команды: *plot2d([['discrete, [x1,x2,x3,x4], [y1,y2,y3,y4]]], [x,a,d],[style,[points,3,2,6]]);*

Можно строить графики в разных стилях. Стили бывают: точечный график (*points*), сплошная линия (*lines*) и линии с точками (*linespoints*). [points,3,2,6] означает следующее:

3 – толщина маркеров;

2 – номер цвета;

6 – тип маркера.

[*lines*,2,1] означает:

2 – толщина линии;

1 – цвет линии.

[*linespoints*,1,2,3,4] означает:

1 – толщина линии;

2 – толщина маркеров;

3 – номер цвет;

4 – тип маркера. Предусмотрено 13 типов маркеров:

1– заполненные кружочки;

2 – незаполненные кружочки;

3 – знак +;

4 – крестик;

5 – звездочка;

6, 7– заполненный и незаполненный квадратик;

8, 9 – заполненный и незаполненный треугольник;

10,11 – повернутые заполненные и незаполненные треугольник;

12,13 – заполненные и незаполненные ромбик.

Для удобства выполнения команды можно заполнить две формы: после щелчка по кнопке «*Графики → Plot2d …*»(рис.2.1) появляется окно диалога Двумерный график(рис.2.2), затем нажимаем на кнопку Дополнительно, на этой форме появляется второе окно *Дискретный график*(рис.2.3).

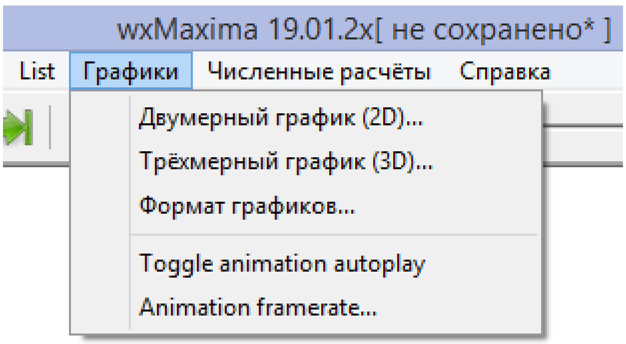

Рис. 2.4. Диалоговое окно «графики».

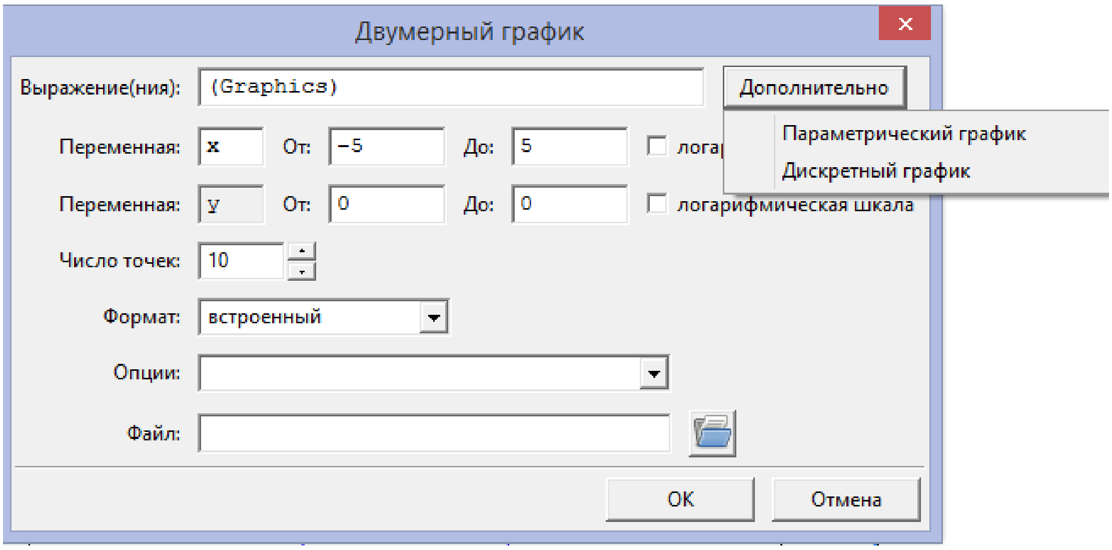

Рис.2.2. Диалоговое окно двухмерного графика, где нажата пункт «Дополнительно».

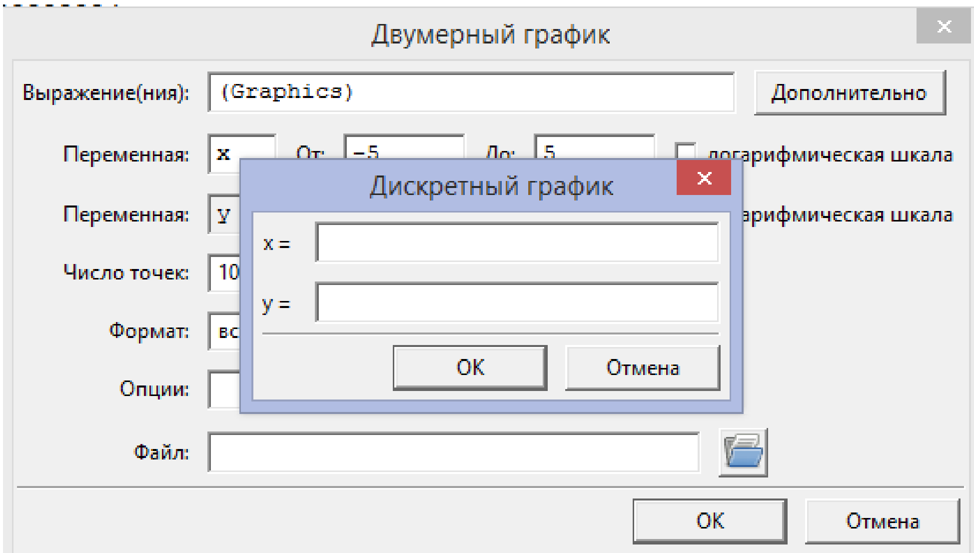

Рис.2.3. Окно, где нажата пункт «*Дискретный график*».

Пример: Построим пятиконечную звезду. Заполняем формы(рис.2.4):

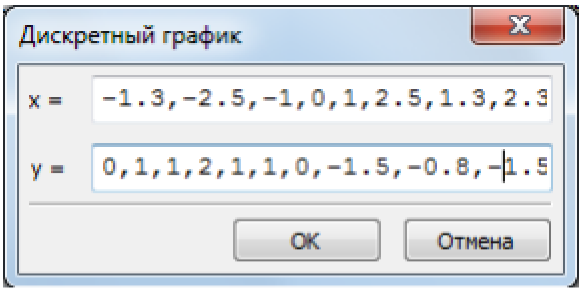

Рис.2.4. Заполнение формы.

После нажатия кнопок Ок на экране появиться график(рис.2.5).

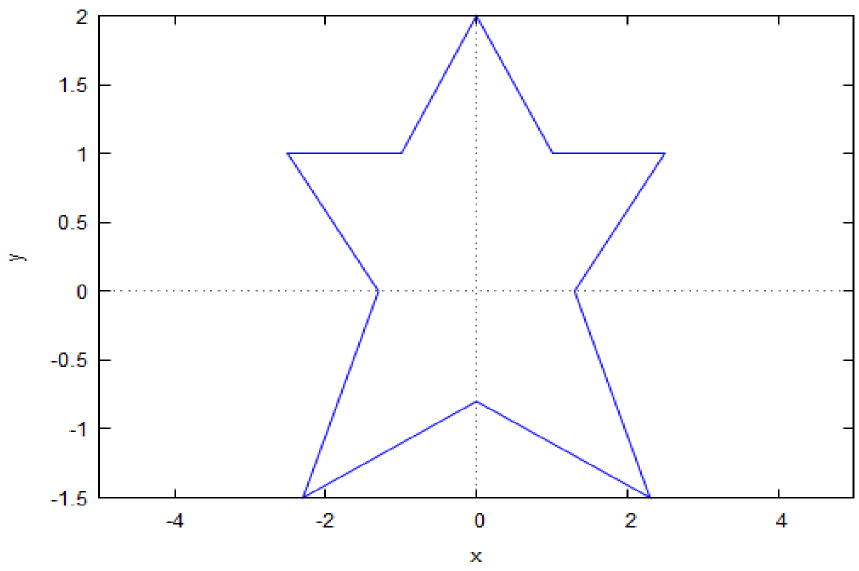

Рис.2.5. График функции по точкам.

Теперь попробуем построить такую же пятиконечную звезду, но с определенными условиями. Пусть вершины будут в форме звездочек, соединенные между собой линиями, цвет рисунка – голубой. Запишем команду в рабочее поле:

(%i5) plot2d([['discrete, [-1.3,-2.5,-1,0,1,2.5,1.3,2.3,0,-2.3,-1.3], [0,1,1,2,1, 1,0,-1.5,-0.8,-1.5,0]]], [x,-5,5],[style,[linespoints,1,3,0,5]],[plot_format, gnuplot], [gnuplot_preamble, "set grid;"])$

Здесь *style,[linespoints,1,3,0,5]* означает:

Стиль – линия с точками, 1 – толщина линии, 3 – толщина звезд, 1 – номер цвета, 5 – тип маркера.

Нажимаем на Enter и получаем график(рис.2.6):

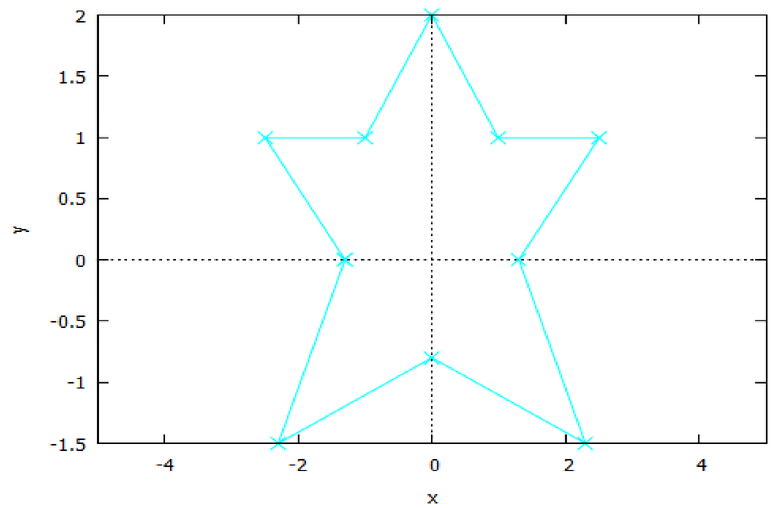

Рис. 2.6. График с определенными условиями:

Построение непрерывных графиков осуществляет команда *plot2d* с аргументами в виде списка функций, координат и необязательных опций построения:

plot2d ([f1, f2], [x, xmin, xmax], [y, ymin, ymax], [опция 1], [опция 2], [и т.д.])

График выводится в новом окне средствами утилиты *gnuplot*. Чтобы построить нескольких графиков внутри документа *wxMaxima*, служит другая команда *wxplot2d* с теми же опциями.

Функции *f* могут быть:

-явными выражениями вида *f(x)*;

-зависящими от параметра вида [*parametric, x(t), y(t), [t, tmin, tmax]*];

-дискретным набором точек *[discrete, point_list]*.

Опции указываются в виде аргументов в квадратных скобках. Возможна установка следующих основных параметров графика:

• **Легенда.** Настройка легенды производится опцией

[legend, "Text 1" , "Text 2"].

Обычно количество текстовых пояснений соответствует количеству графиков. Если легенда не нужна, то выставляем опцию [legend,false].

Названия осей OX и OY выставляются опциями [xlabel,"Text x»] и [ylabel,"Text y"] соответственно.

Цвет и стиль линии графика оформляется опцией [style, style1, style2].

– Стиль каждой отдельной линии задается следующим образом

[lines,N,M],

Здесь N – цвет линии в числовом формате (см. таблица 1), M – толщина линии.

– Стиль точки задается опцией [points, N, M, K].

здесь M размер точек, N – цвет точки, K – стиль прорисовки точек

(см. таблица 2).

– Стиль «точки, соединенные линией» оформляется опцией [linespoints,N,M],

здесь M – толщина линии, N – стиль прорисовки точек.

Линии сетки задаются опцией [grid, N, M],

здесь N и M – количество линий по оси OX и OY соответственно.

• Опция ntics=N указывает число точек N , по которым проводится кривая.

• Можно выводить график функции в определенном формате с помощью

Опции [gnuplot_term, V],

здесь V формат вывода графика. Он может принимать значения ps, "png size 1000,1000", ... (ps – тип, png тип размера 1000 на 1000 точек). При этом График можно сохранять в файл с именем Name.eps с помощью опции

[gnuplot_out_file, "Name.eps"].

2.2. Построение графика явной функции y=f(x)

Функция называется явной (или заданной в явном виде), если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^3 + 7x + 5$y.

Функция y аргумента x называется неявной (или заданной в неявном виде), если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y (y ≥ 0), заданная уравнением

$$x^3 + y^2 - x = 0$$

График функции *y=f(x)* на отрезке *[a, b]* можно построить с помощью функции *plot2d(f(x), [x,a,b]*, опции) или *plot2d(f(x), [x,a,b], [y,c,d]*, опции). Опции не обязательны, однако, для изменения свойств графика их нужно задавать. Параметр [y,c,d] можно не задавать, тогда высота графика выбирается по умолчанию.

Построим график функции *y=sinx* на отрезке [–4π, 4π].

(%i2) *plot2d(sin(x), [x, -4*%pi, 4*%pi]);*

При задания этой команды после нескольких секунд на отдельном окне появляется график функции(рис. 2.7).

(%i1) f(x):=sin(x);

(%o1) $f(x) := \sin(x)$

plot2d([sin(x)], [x,-4%pi,4*%pi])$*

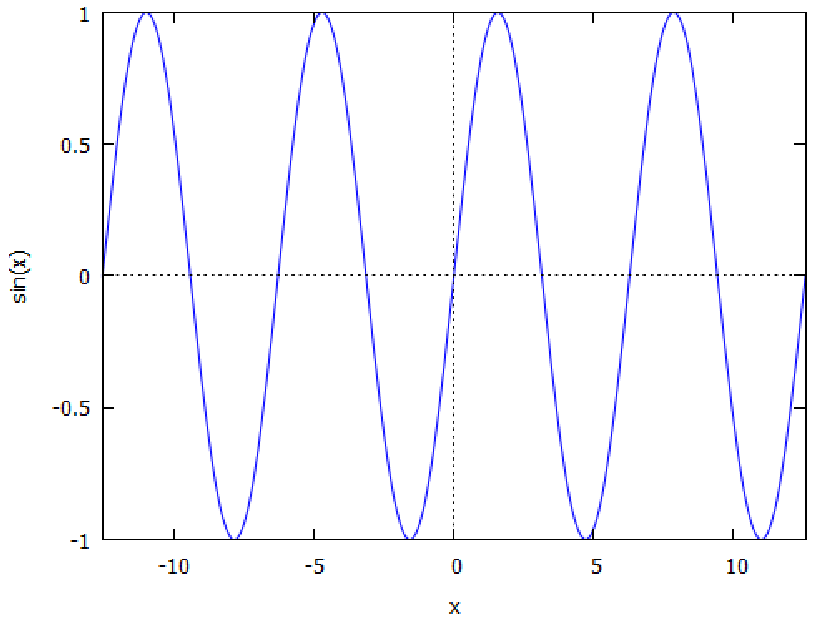

Рис.2.7. График функции *y=sinx* на отрезке [–4π, 4π] без задания высоты.

Теперь составим график функции заданием высоты(рис.2.8).

(%i3) *plot2d(sin(x), [x, -4*%pi, 4*%pi],[y,-2,2]);*

Чтобы выходил график этой функции, надо удалить с экрана первое окно графика нажатием на кнопку 

Иногда нужно на одной координатной плоскости построить несколько графиков. Для этого вместо *f(x)* нужно написать массив функций, заключенный в квадратные скобки: «*plot2d([f(x),g(x),h(x),...],[x,a,b]);*»

Например, чтобы построить на одной координатной плоскости графики функций *sin(x)* и *cos(2x)* на отрезке [-2π,2π], дадим команду(рис.2.9):

*plot2d([sin(x),cos(2*x)],[x,-2*%pi,2*%pi])*$

При построении графиков можно воспользоваться диалоговое окно «графики»(рис.2.4).

(%i6) plot2d([f(x)],[x,−4·%pi,4·%pi],[y,−2,2])$

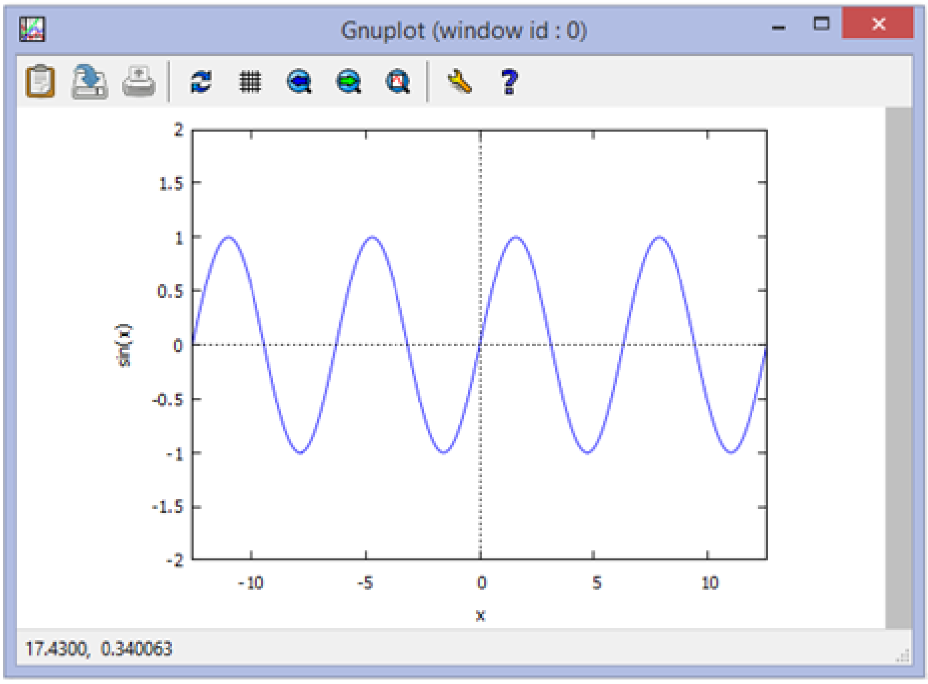

Рис.2.8. График функции *y=sinx* на отрезке [–4π, 4π] с заданием высоты.

(%i8) plot2d([sin(x),cos(2·x)], [x,−2·%pi,2·%pi])$

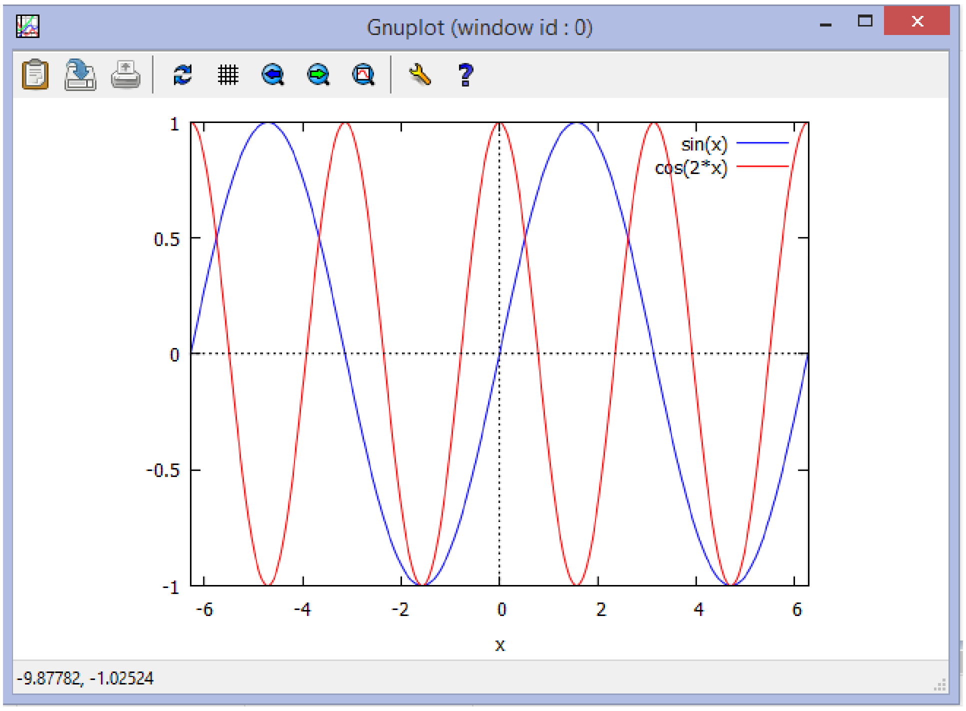

Рис.2.9. Два графика на одной плоскости.

Чтобы не вводить длинный вызов функции *plot2d* со всеми её параметрами, заполним вспомогательные формы для построения графика. Для этого в меню выбираем команду «*Графики → Plot2d* ...» После выполнения данной команды появляется окно с формой, которую необходимо заполнить.

Например, после выбора «*двумерный график*», на экране появляется диалоговое окно(рис.2.10), которое заполняем.

В первой строке нужно ввести уравнение функции. Если функций несколько, то они отделяются запятыми. Графики автоматически нарисуются разными цветами. При помощи кнопки Дополнительно можно выбрать либо параметрический, либо дискретный график.

Во второй строчке формы задается диапазон изменения переменной x. В строке Формат можно выбрать один из методов построения графиков функций. В поле Опции можно выбрать некоторые параметры графика.

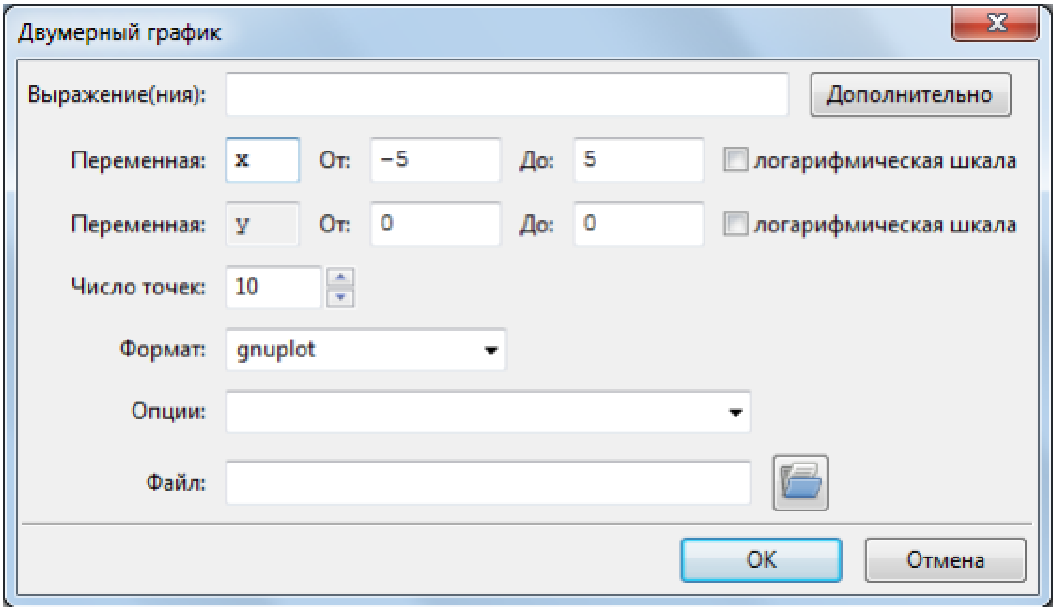

Рис.2.10. Диалоговое окно двухмерного графика.

Возможные Форматы:

I) встроенный – график нарисуется в том же окне, что и командная строка;

II) gnuplot – график нарисуется в отдельном окне, и его можно масштабировать (изменять размеры за счет изменения размеров окна). При движении мышки внизу слева отображаются координаты положения указателя.

III) openmath – в этом формате график может видоизменяться в интерактивном режиме, в частности его можно масштабировать не только за счет изменения размеров окна, но и с помощью кнопок;

IV) по-умолчанию – графики строятся в *gnuplot*. Возможные Опции: I) *set zeroaxis*; – проводит оси через начало координат; II) *set grid*; – прорисовывает сетку; III) *set size ratio* 1; – выравнивает масштабы по осям координат, чтобы круг на мониторе выглядел круглым, а не в виде овала.

На примере сначала построим одну функцию на окне(рис.2.11).

После соответствующего заполнения и нажатия «Ок» на экране появляется соответствующие команда и график(рис.2.12).

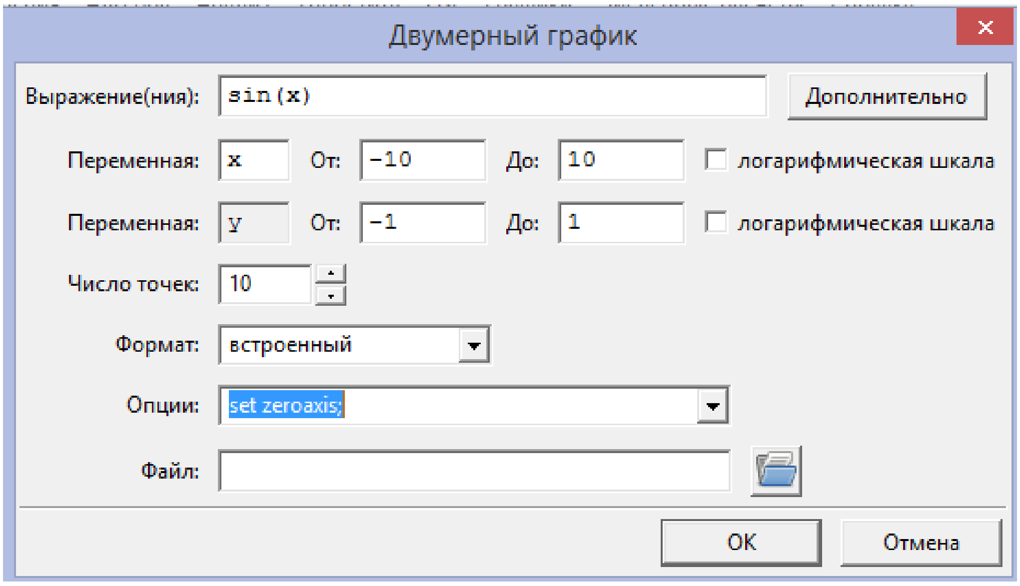

Рис.2.11. Диалоговое окно «двумерный график».

(%i9) wxplot2d([sin(x)], [x,−10,10], [y,−1,1],
[gnuplot_postamble, "set zeroaxis;"])$

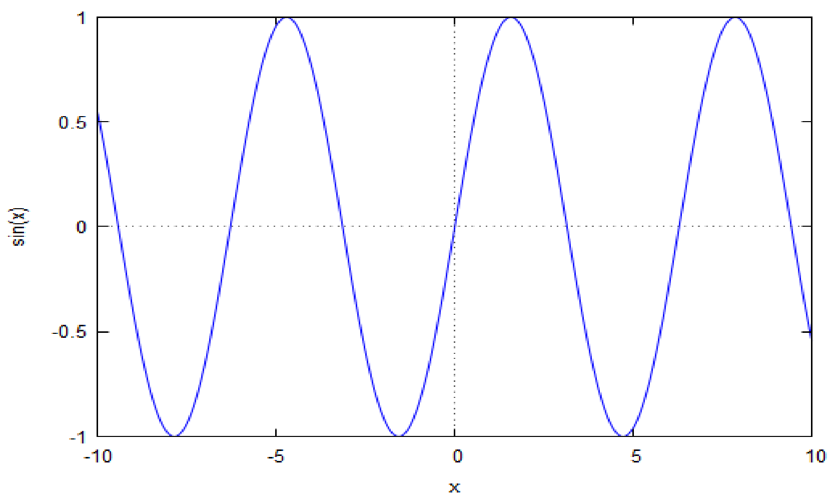

Рис. 2.12. Построение графика через диалоговое окно.

Чтобы задать два графика на одном окне через диалоговое окно, надо эти функции задать через запятую (рис.2.13 и рис.2.14).

Таким же образом можно построить и график трех функций на одном окне (рис. 2.15 и 2.116).

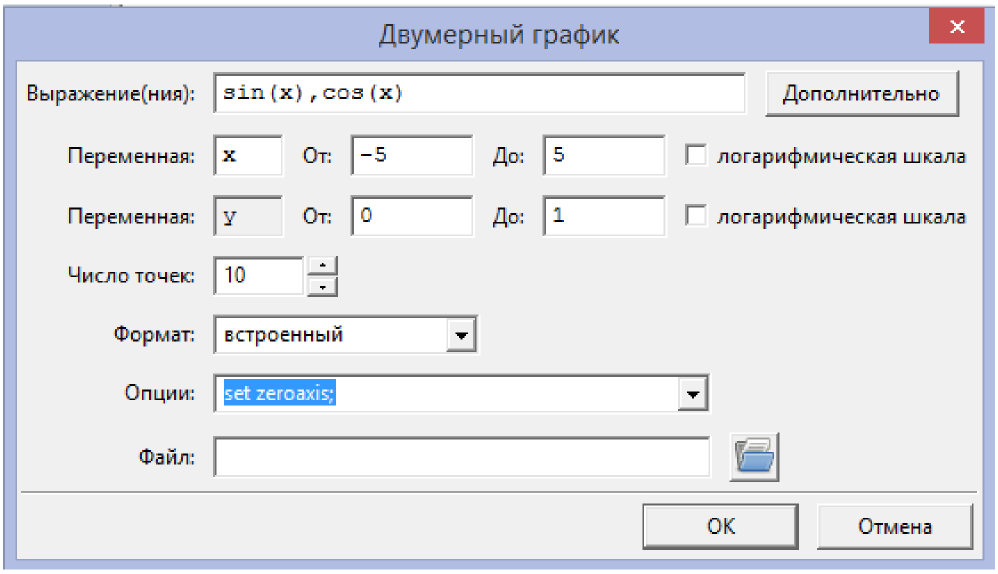

Рис.2.13. Задания две графики на одном окне через диалоговое окно.

(%i10) wxplot2d([sin(x),cos(x)], [x,−5,5], [y,0,1], [gnuplot_postamble, "set zeroaxis;"])$

plot2d: some values were clipped. plot2d: some values were clipped.

(%t10)

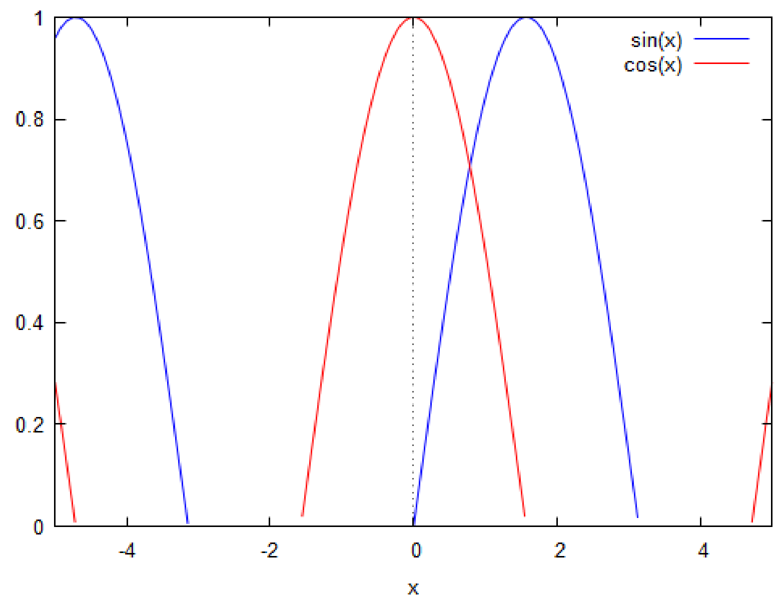

Рис. 2.14. Построение графика нескольких функций через диалоговое окно.

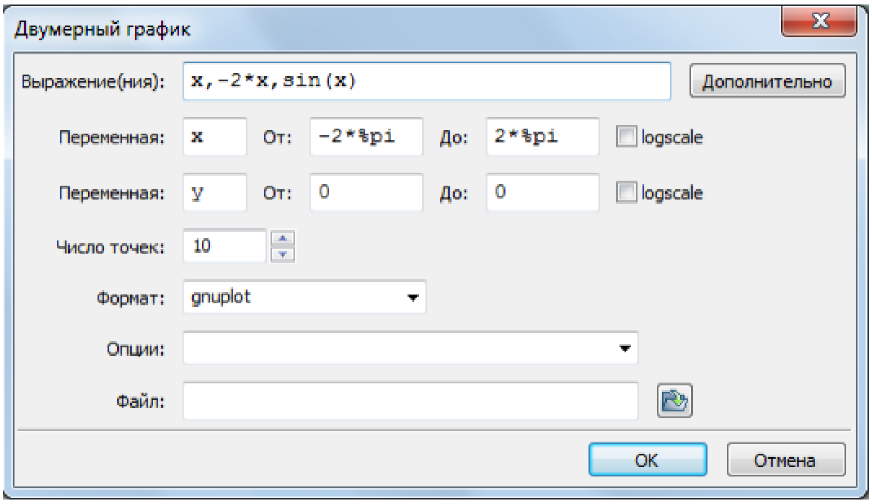

Рис.2.15. Диалоговое окно для построения графика трех функций на одном окне.

(%i12) plot2d([x,−2·x,sin(x)], [x,−2·%pi,2·%pi], [plot_format, gnuplot])$

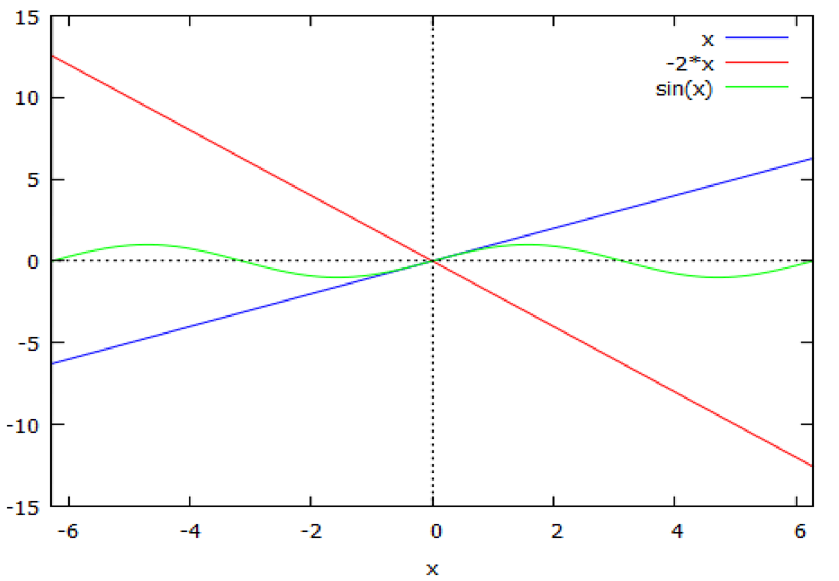

Рис.2.16. График трех функций на одном окне.

2.3. Построение трехмерных графиков

Для построения трехмерных графиков также можно использовать диалоговое окно «*Plot3d…*» или ручной ввод с клавиатуры. В общем виде команда построения графика выглядит так:

plot3d([f1(x,y),f2(x,y),f3(x,y)], [x,a,b], [y,c,d], [grid,n,k]);

где *f1(x,y), f2(x,y), f3(x,y)* – функции, a, b– отрезок по оси X, c,d – отрезок по Y, *[grid,n,k]* – сетка разбиения поверхности на n отрезков по вертикальной и на k – по горизонтальной плоскостям. Например, для построения графика листа

Мёбиуса команда выглядит следующим образом(рис.2.17):

```
(%i80) wxplot3d([cos(x)·(3+y·cos(x/2)),sin(x)·(3+y·cos(x/2)),y·sin(x/2)],[x,−%pi,%pi],[y,−1,1],[grid,40,15])$
```

Можно построить трехмерный график с помощью меню. Для этого используем команду меню «*Графики – трехмерный график 3D…*»

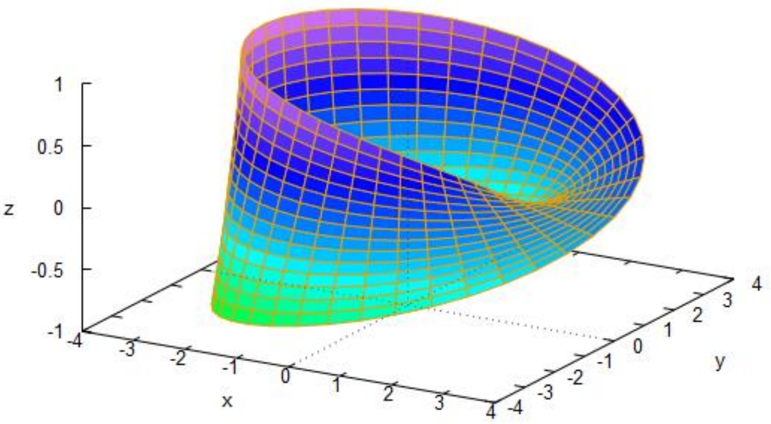

Рис.2.17. Построение трехмерного графика.

Пример: создаем график трехмерной функции $z = 9 - x^2 - y^2$

Вызываем меню трехмерной графики «*Графики – трехмерный график 3D…*»(рис.2.18).

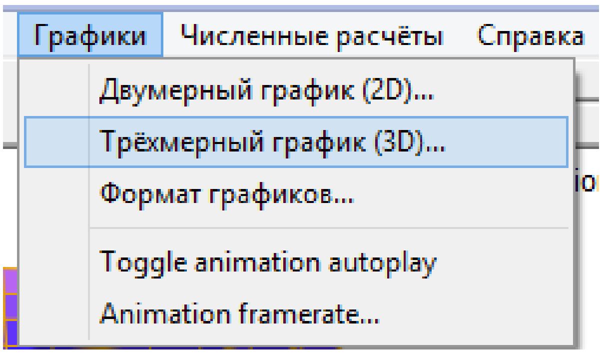

Рис.2.18. Вызов меню «Графики – трехмерный график 3D…»

Выходит диалоговое окно, которое заполняем(рис.2.19).

На экране выходит команда:

```
(%i13) plot3d(9−x^2−y^2, [x,−6,6], [y,−6,6], [plot_format,gnuplot])$
```

После него выходит сама график(рис.2.20).

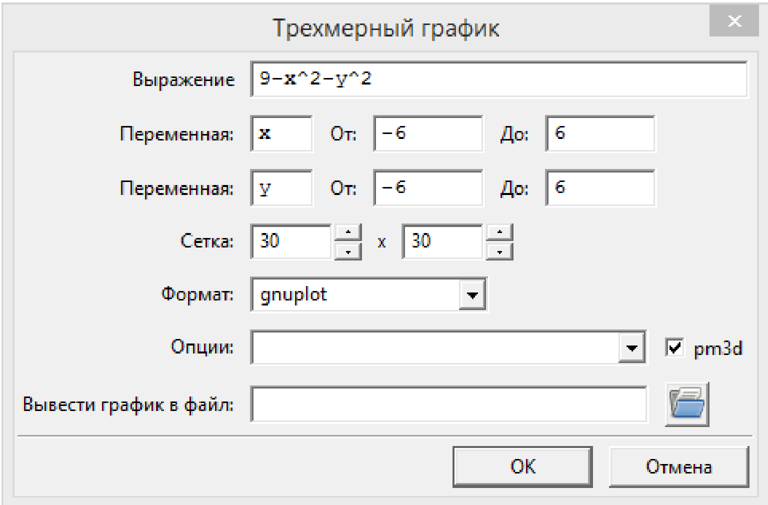

Рис.2.19. Заполнение диалогового окна трехмерного графика.

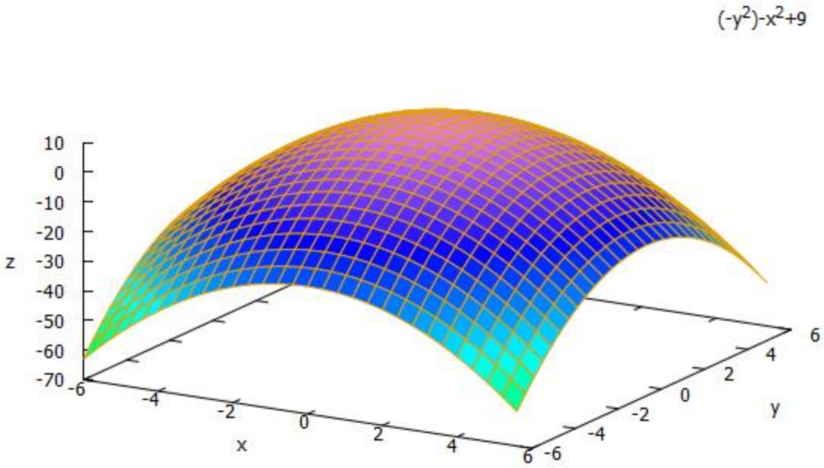

Рис.2.20. График функции $z = 9 - x^2 - y^2$.

После нажатия Ок на экране появиться команда plot3d

plot3d(9-x^2-y^2, [x,-6,6], [y,-6,6], [plot_format,gnuplot])$

и на отдельной окне график(рис.2.20).

2.4. Построение двухмерных графиков функций, заданных параметрическом виде.

Для построения графика функции, заданных параметрическими уравнениями, используется команда:

plot2d([parametric, x-выражение, y-выражение, [t, t1,t2],[nticks, количество]]);

где *x-выражение и y-выражение* задают зависимость вида *x=x(t), y=y(t)*, где *t* – переменная параметризации; *[t, t1, t2]* - t изменяется от *t1* до *t2*; *nticks* определяет количество кусочков, на которые будет разбит интервал изменения параметра при построении графика.

После щелчка по кнопке ***«Графики → Plot2d …»*** появляется окно диалога *Двумерный график*, затем нажимаем на кнопку ***Дополнительно***, на этой форме появляется второе окно ***Параметрический график***.

Пример: Построить окружность с радиусом 1.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Сначала заполняем форму:

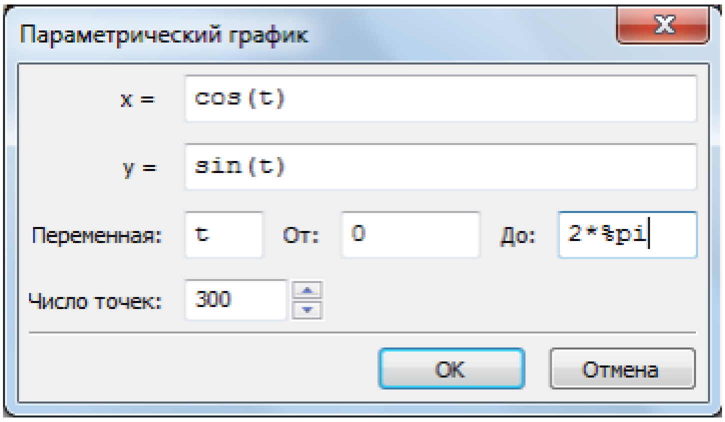

Рис. 2.21. Заполнение формы для графика параметрических функций.

Выбираем опцию *set size ratio 1*, для выравнивания масштаба по осям координат. Для этого после нажатия Ок появляется окно(рис. 2.22).

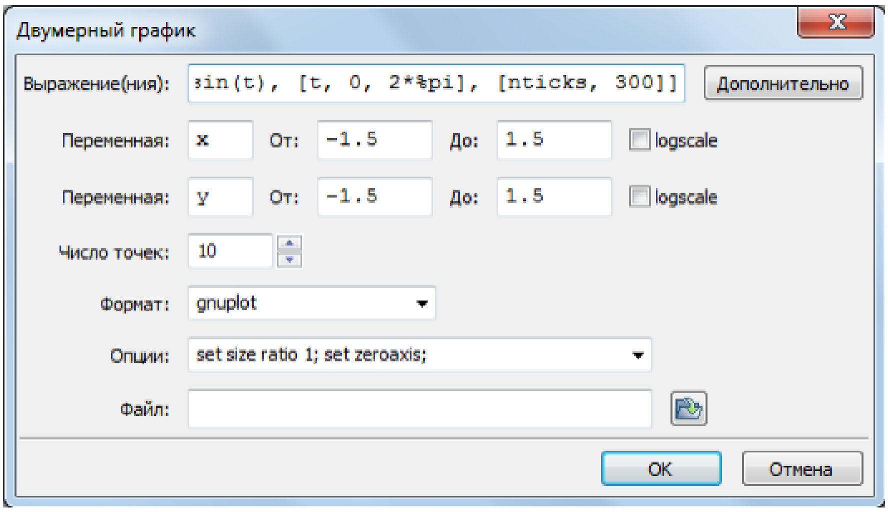

Рис. 2.22. Дополнительное окно для графика параметрической функции.

Нажимаем на ОК и получаем график(рис.2.23):

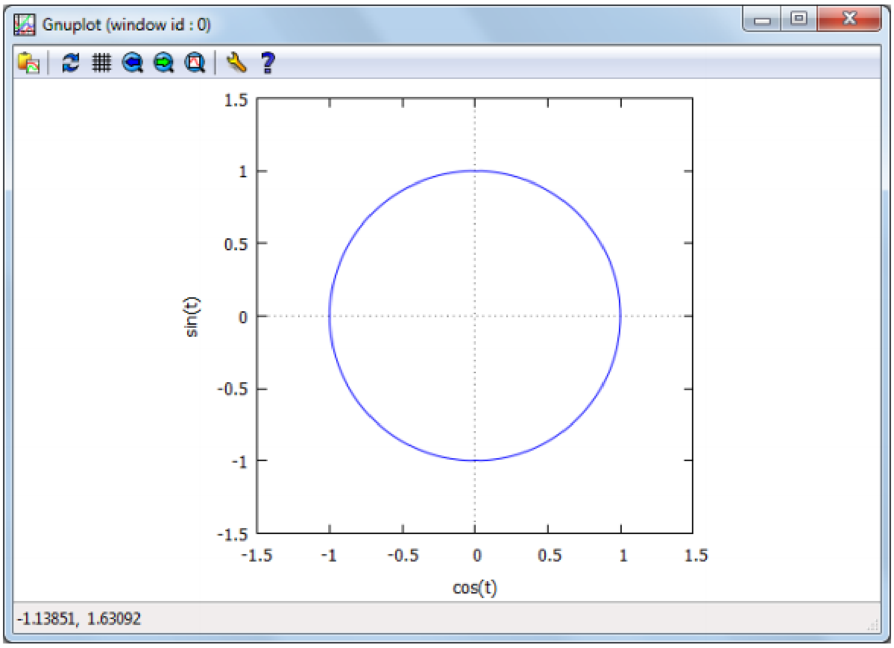

Рис.2.23. Построение графика параметрической функции.

2.5. Построение трехмерных графиков функций, заданных в параметрическом виде.

Для построения трехмерной графики функции, заданной в параметрическом виде, используется библиотека Draw.

Пример: Постройте параболоид вращения $\begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\sin t, t \in [0, 2\pi]. \\ z = s^2 \end{cases}$

Пример. Постройте параболоид вращения

$$\begin{cases} x = s \cdot \cos t \\ y = s \cdot sint, \quad t \in [0,2\pi]. \\ z = s^2 \end{cases}$$

Для начала необходимо подключить пакет draw:

load(draw)$

Запишем команду в рабочее поле:

(%i60) draw3d(parametric_surface(s·cos(t),s·sin(t),s^2,s,0,3,t,0,2·%pi));

(%o60) [gr3d($parametric\_surface$)]

Получим параболоид вращения(рис.2.24):

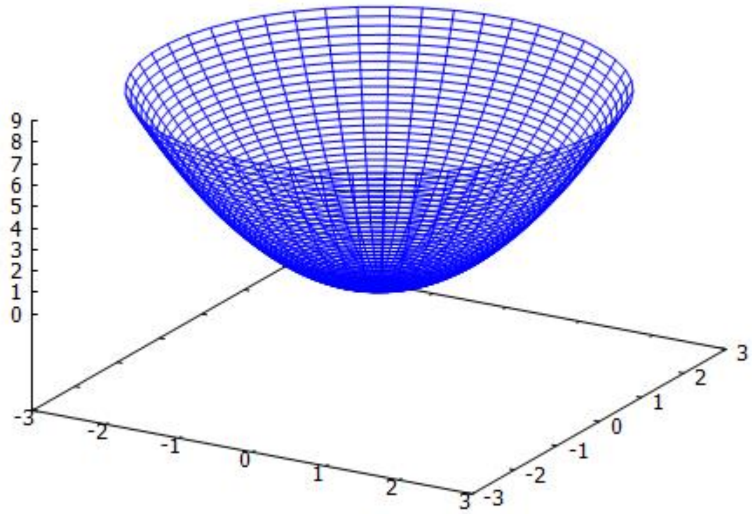

Рис.2.24. Параболоид вращения.

2.6. Построение двумерных графиков функций, заданных неявно.

Для построения графика функции, заданной неявно используется команда:

implicit_plot (выражение, [x,a,b],[y,c,d]) implicit_plot ([выражение1, выражение2, ...], [x,a,b],[y,c,d])

где выражение – это уравнение, задающее неявную функцию, a,b и c,d – промежутки изменения переменных x и y. Для того, чтобы можно было использовать функцию *implicit_plot*, нужно подключить пакет, содержащий эту функцию, с помощью команды *load(implicit_plot)*.

Пример: Построить окружность с радиусом 1. Для начала подключим пакет:

(%i2) load(implicit_plot)$

Затем вводим команду:

(%i3)implicit_plot(x^2+y^2-1,[x,-1.2,1.2],[y,-.2,1.2],[gnuplot_preamble, "set size ratio 1;set zeroaxis"]);

(%o3) done

Получим график(рис.2.25).

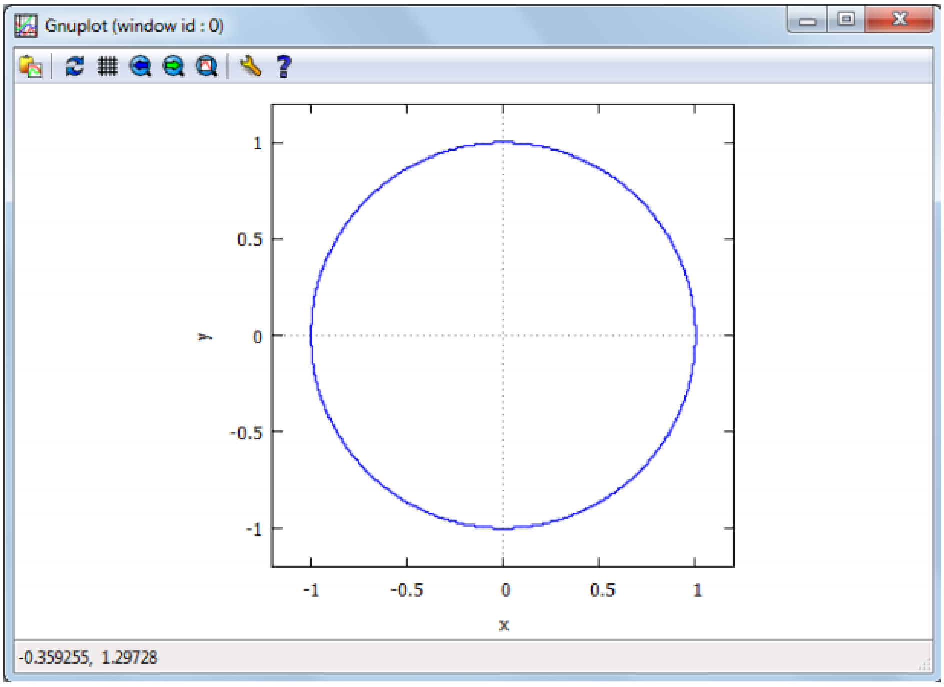

Рис.2.25. Построение графика неявной функции.

Пример. Найти точки пересечения функций $y = x^2, y = 2x + 1$.

Решение. Вызываем диалоговое окно и заполняем(рис.2.26).

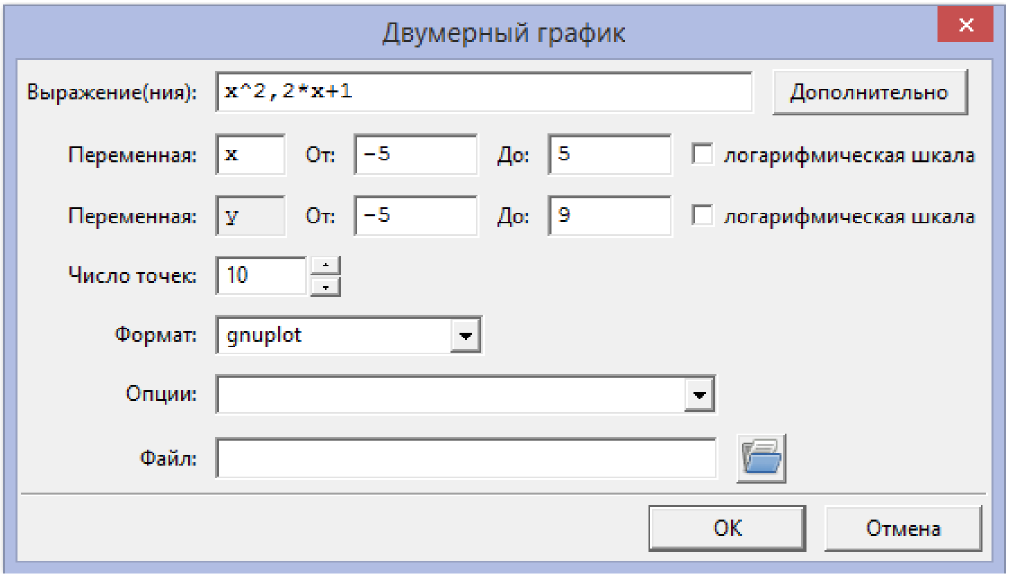

Рис.2.26. Заполнение диалогового окна для функций

$$y = x^2, y = 2x + 1.$$

После нажатия Ок на экране появится команда

(%i20) plot2d([x^2,2·x+1], [x,−5,5], [y,−5,9], [plot_format, gnuplot])$

plot2d: some values were clipped. plot2d: some values were clipped.

А также появится график(рис. 2.27).

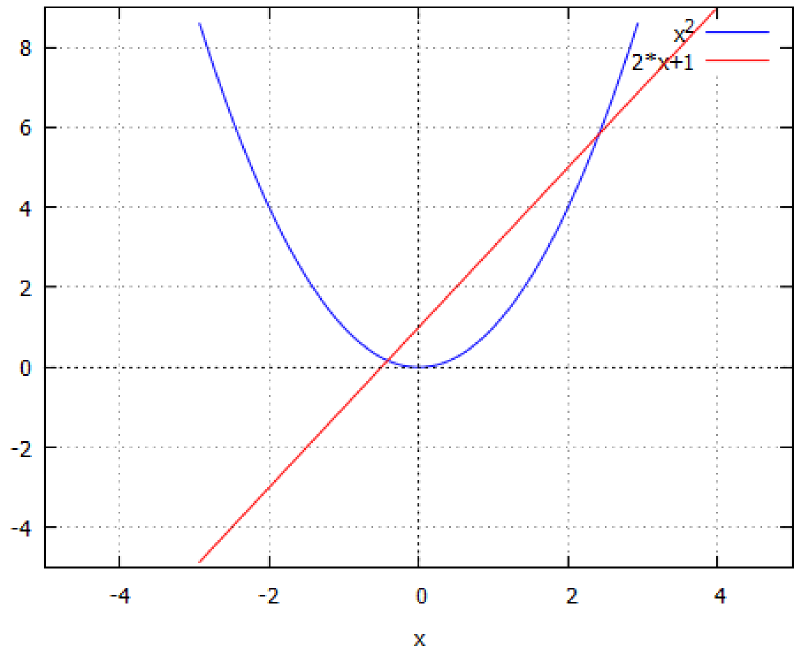

Рис. 2.27. График функций $y = x^2, y = 2x + 1$ на одном окне.

Из графика можно приблизительно узнать точки пересечения двух линий. Для точного определения точки пересечений воспользуемся диалоговым окном «Уравнения-solve algebraic system», после вызова который, спрашивает число уравнений, после которого, заполняем диалоговое окно(рис.2.28).

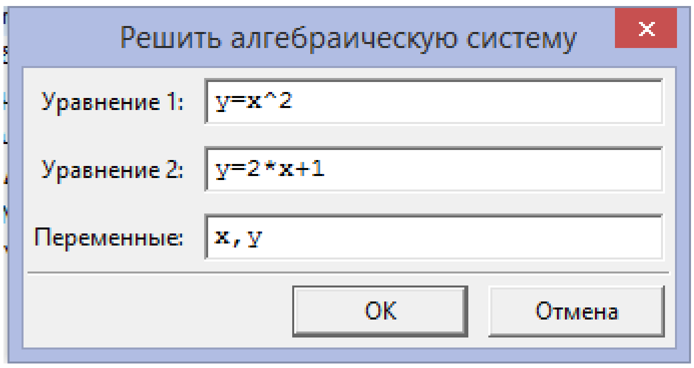

Рис. 2.28. Диалоговое окно для решения системы двух алгебраических уравнений.

На экране Maxima появится решение уравнений:

(%i26) algsys([y=x^2, y=2·x+1], [x,y]);

(%o26) $[[1-\sqrt{2}, 3-2^{\frac{3}{2}}], [\sqrt{2}+1, 2^{\frac{3}{2}}+3]]$

2.7. Построение двумерных графиков функций в полярных координатах.

Пример: Построить график кривой, заданной в полярной системе координат $r = 2\sin 2\varphi$. Входим в меню График 2D. В поле опции выбираем параметр *set polar*, после этого заполняем поле Выражение(рис.2.29).

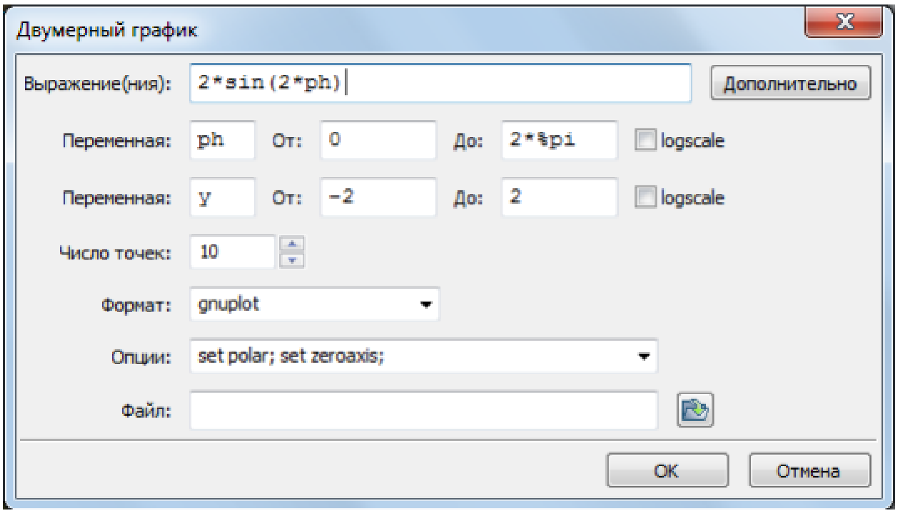

Рис.2.29. Заполнение диалогового окна для построения графика в полярных координатах.

После нажатия Ок на экране появиться график(рис.2.30).

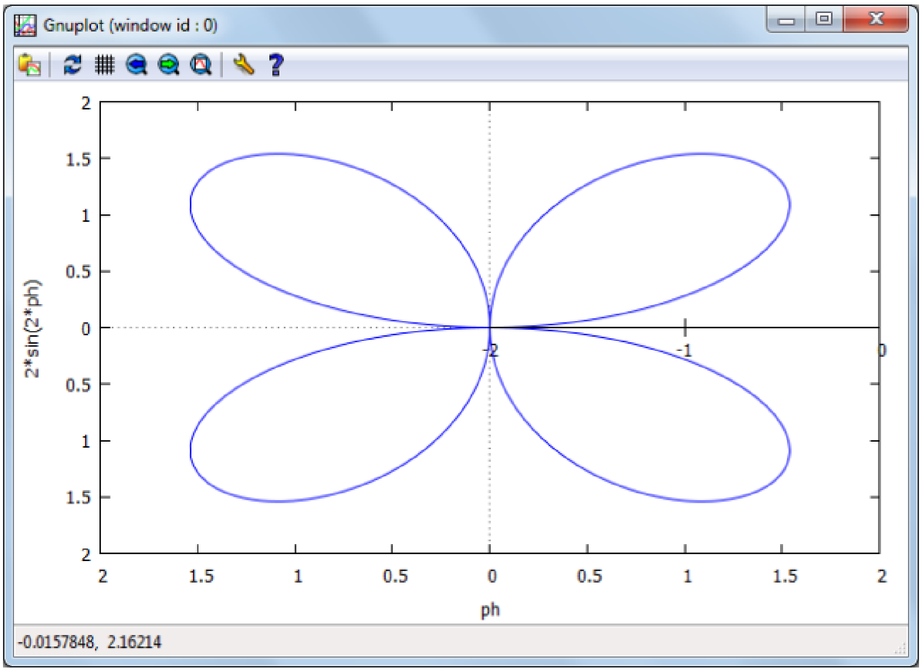

Рис.2.30. Построение графика функции в полярных координатах.

Ключевые слова:

Openmath, gnuplot, mgnuplot, wxMaxima, plot2d, plot3d, построение двухмерных графиков, построение трехмерных графиков, *wxplot2d, wxplot3d,* график функции по точкам, точечный график, сплошная линия, линии с точками, дискретный график, легенда, названия осей, цвет и стиль линии, линии сетки, график явной функции, координатная плоскость, диалоговое окно двухмерного графика, сетка разбиения поверхности, график параметрически заданной функции, построение трехмерных графиков функции, заданных в параметрическом виде, *draw3d*, график функции, заданных неяно, *implicit_plot*, график функции в полярных координатах.

Контрольные вопросы:

1.Как можно построить график функции?

2. Какой формат необходимо использовать, чтобы строить график функции в отдельном окне?

3. Как построить график функции в полярных координатах?

4.Какой стиль определяет линию с точками при построении графика функции?

5.Какую опцию нужно использовать при построении графика, чтобы круг на мониторе выглядел круглым, а не в виде овала?

6.Чему отвечает опция set polar при построении графика?

7. Как построить поверхность в пространстве?

8.Какой формат необходимо использовать, чтобы строить график функции в отдельном окне?

9. Как построить график функции в полярных координатах?

10. Какой стиль определяет линию с точками при построении графика функции?

Задачи для самостоятельной работы:

Построить графики двумерных функций, заданных по точкам.

1) (2,0), (4,0), (4,7), (6,7), (6,0).
2) (2,0), (6,7), (5,8), (7,3), (9,8), (8,2), (12,0), (7,-1).

3) (2,0), (3,2), (4,0), (6,5), (8,0), (11,8), (14,0).

4) (-11,0), (-2,4), (0,6), (2,4), (11,0), (2,-4), (0,-6), (-2,-4).

5) (-5,-2), (-1,2), (-4,2), (0,7), (4,2), (1,2), (5,-2).

Построить графики функций:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = -x + 2$; 3) $y = 2x$;

4) $y = x^2 - 1$; 5) $y = x^2 - 8x + 2$; 6) $y = \frac{2}{-x}$;

7) $y = \frac{x-3}{x+2}$; 8) $y = x^2 - 8x + 2$; 9) $y = \frac{2x}{x-1}$;

10) $y = \sqrt{x}$; 11) $y = 3^x$; 12) $y = log_{\frac{1}{2}} x$;

Построить графики следующих функций на заданном отрезке.

a) $f(x) = e^x + e^x$; $[0; 10]$;

b) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$; $[-5; 5]$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + \frac{1}{x}}$; $[0, 10]$;

d) $f(x) = sin^2 x + e^{cosx}$; $[-5; 5]$;

e) $f(x) = \frac{sinx + e^x}{cosx + x}$; $[-10; 10]$;

7. Построить графики следующих функций на одном окне.

a) $f(x) = e^x + e^{-x}$; $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$

b) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + \frac{1}{x}}$; $y(x) = sin^2(x) + e^{cosx}$

c) $f(x) = \frac{sinx + e^x}{cosx + x}$; $y(x) = tg(x)$; $g(x) = cosx$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 3$; $y(x) = sinx$; $g(x) = tgx$

e) $f(x) = e^x$; $y(x) = |x + 3|$; $g(x) = sinx$

f) $f(x) = sin^2(x)$ $y(x) = \cos(x)$

g) $y(x) = x$; $f(x) = 2x$; $g(x) = 4x$

h) $f(x) = x$; $y(x) = 1 + x$; $g(x) = 2 + x$

i) $f(x) = x^2$; $y(x) = 2x^2$; $g(x) = 3x^2$

Найдите графически корни нелинейных уравнений

1	$ln^2(x-1) = 3\cos(2x) + 1$	6	$\sqrt{25 - x^2} = arctg2x$
2	$\frac{3\pi}{2} cosx = arcctg(2x)$	7	$sinx \cdot \sqrt{81 - x^2} = 5xarctgx$
3	$10e^{-x^2} = \sqrt{2\pi x} + sinx$	8	$arctg2x - 0.2(x-1)^4 + sinx = 0$
4	$\sqrt{ln^2(x-1)}e^{sin3x} = 10e^{-0.1x^2}$	9	$sin3x \cdot \sqrt{64 - x^2} = 5xe^{0.1x}$
5	$\sqrt{36 - x^2}lgx = sin4x$	10	$arctg2x - \frac{(x-1)^4}{5} + sin^2 5x = 0$

Использованная литература:

1.Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. Казань: Казанский университет, 2012. – 57с.

2.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казан.федер.ун-т, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012. 80 с.

3.Методическое пособие по изучению математического пакета Maxima: http://kit.znu.edu.ua/iLec/9sem/CAB/LIT/maxima2-met1.pdf

4. Перепечко С.Н., Воропаев А.Н. Основы работы в системах компьютерной алгебры. Сборник задач. Петрозаводск, 2013. 64 с.

5. Чичкарёв Е.А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. М.: ALT Linux. 2012.-384 с.

3- МОДУЛЬ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В MAXIMA

3.1. Решение уравнений с одной неизвестной.

Если в выражении с неизвестным (или неизвестными) стоит знак равенства, то его называют уравнением. Если найти значение неизвестного (или неизвестных), то говорят, что нашли корень (или корнями) данного уравнения.

Корнем уравнения $f(x) = 0$ называется значение $x = \bar{x}$, подстановка которого в уравнение превращает его в верное числовое равенство. Например, если в уравнение $x^2 + 5x + 4$ =0 подставить x = -1 , то получим $0 = 0$ (верно).

Р е ш и т ь уравнение — значит найти его корни. Далеко не каждое уравнение допускает аналитическое решение:

1) трансцендентные уравнения, как правило, не решаются аналитически, за исключением специальных случаев («школьного» типа), когда уравнение можно удачной подстановкой свести к алгебраическому, например, $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$;

2) даже для алгебраического уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ степени выше четвертой не существует формулы, выражающей корни через коэффициенты уравнения при помощи конечного числа арифметических операций и извлечения корней (в частных случаях, например для уравнения $x^{42} - 5x^{21} + 4 = 0$ такие формулы могут существовать, но в общем случае нет).

Таким образом, большое значение имеет задача приближенного, численного отыскания корней уравнений, для этого:

а) определяют количество корней уравнения и изолируют (отделяют) каждый из них. Отрезком изоляции называется отрезок, на котором лежит только один корень уравнения;

б) вычисляют каждый корень с требуемой точностью.

Уравнения и системы уравнений решаются в *Maxima* с помощью функции ***solve***.

solve([уравнение1,уравнение2,…],[переменная1,переменная2]) – решение алгебраических уравнений и их систем (в качестве параметров в первых квадратных скобках указывается список уравнений через запятую, во-вторых - список переменных через запятую).

Интерфейс *wxMaxima* позволяет упростить процедуру использования функции *solve*: после нажатия на кнопку ***Уравнения***(рис.3.1) появится дополнительное окно ***Решить или Solve(to_poly)***, в котором необходимо записать данное уравнение и имя переменной, относительно которой нужно ее решить(рис.3.2).

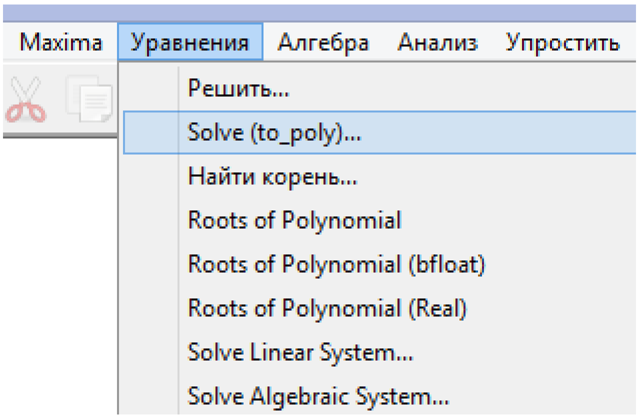

Рис.3.1. Меню для решения уравнений.

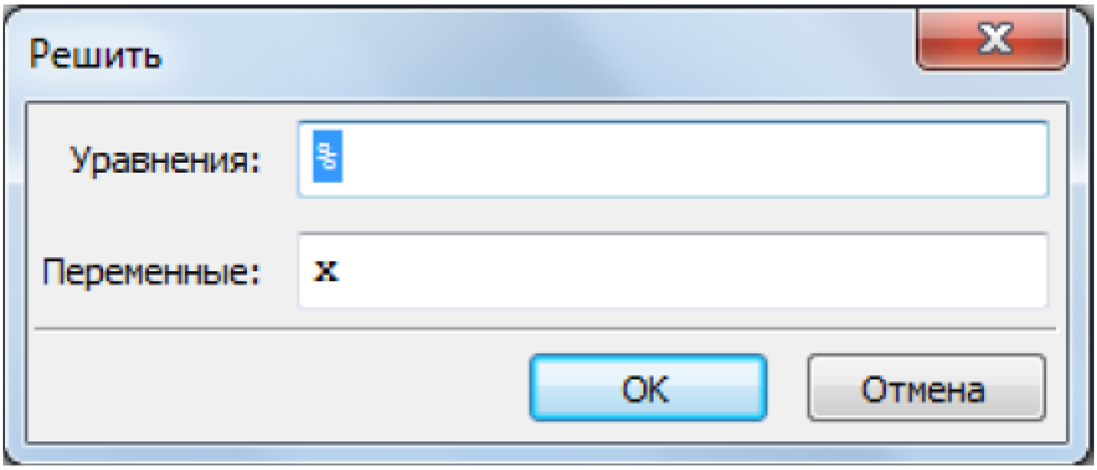

Рис.3.1. Диалоговое окно для нахождения корня уравнения.

Пример: Решите уравнение $x^2 + 7x + 5 = 0$.

Для решения этого уравнения нажимаем на кнопку ***Уравнения*** и вводим в первое поле данное уравнение, а во второе – имя переменной, по которой нужно решить уравнение(рис.3.2). Для возведения в степень воспользуемся знаком ^.

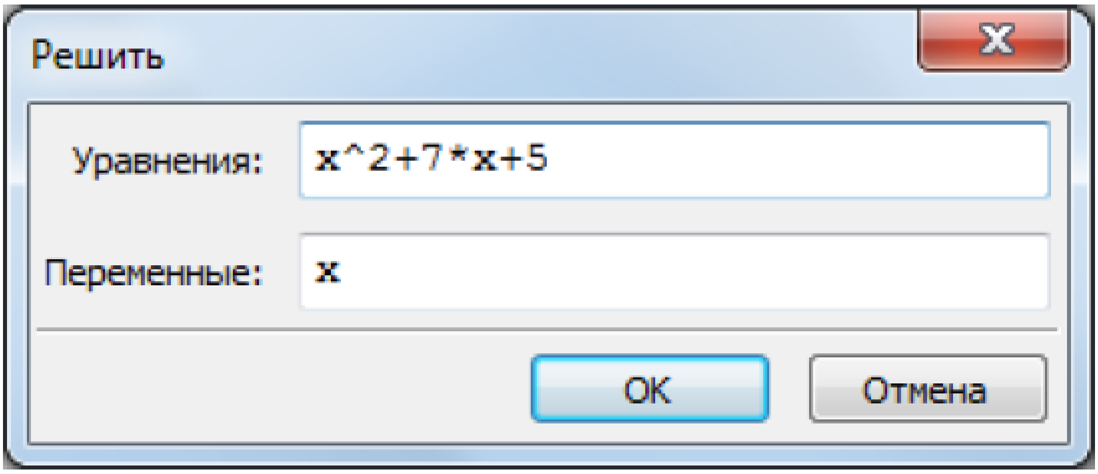

Рис.3.2. Заполнение диалогового окна для нахождения корней уравнения.

Получаем решение уравнения:

(%i1) solve([x^2+7·x+5],[x]);

(%o1) $[\frac{\sqrt{297}}{2}, \frac{\sqrt{297}}{2}]$

Если у тригонометрических уравнений много решений, то выдается соответствующее сообщение и одно из решений.

Пример: Решите уравнение $\cos(x) = 0$

Заполняем окно(рис.3.3):

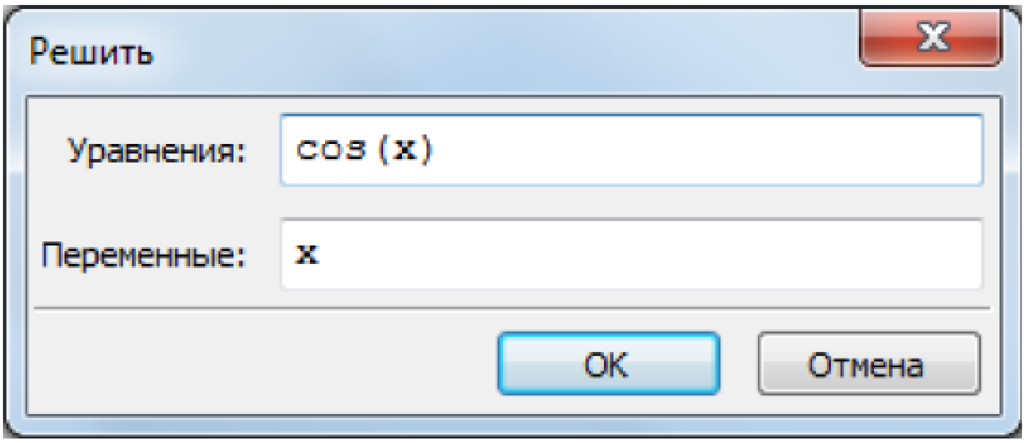

Рис.3.3. Заполнение окна для нахождения тригонометрического уравнения.

Получаем решение уравнения:

(%i2) solve([cos(x)=0],[x]);

solve: using arc

− trig functions to get a solution. Some solutions will be lost.

(%o2) $[\frac{\pi}{2}]$

Также *Maxima* позволяет находить комплексные корни.

Пример: Решите уравнение $x^2 + x + 1 = 0$.

После заполнения окна и нажатия кнопки Ок появляется решение:

(%i3) solve([x^2+x+1=0],[x]);

(%o3) $[\frac{\sqrt{3}\%i+1}{2},\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}]$

В системе Maxima для решения линейных и нелинейных уравнений можно воспользоватся встроенной функцией *solve*, имеющая следующий синтаксис:

solve(expr, x) – решение алгебраического уравнения expr относительно переменной x;

solve(expr) – решение алгебраического уравнения expr относительно неизвестной переменной, входящей в уравнение(простейший вариант).

Функция *solve* в своем простейшем варианте, для решения одиночного уравнения, в качестве аргументов никаких списков не принимает (а принимает либо уравнение и символ, относительно которого его надо решать, либо только уравнение, если символ в нем всего один). А возвращает список, состоящий из всех корней заданного уравнения.

Например, находим корни уравнения $5 \cdot x + 8 = 0$. Для этого набираем команду и получим решение

(%i5) solve([5·x+8=0]);

(%o5) $[\frac{8}{5}]$

Можно сначала уравнение можно присвоит к какому то переменную, а потом это переменное использовать при решении.

Например

(%i27) eq:5·x+8=0;

(eq) $5x + 8 = 0$

(%i28) solve(eq);

(%o28) $[x = -\frac{8}{5}]$

Это решение можно получить действительном числе:

(%i29) float(solve(eq));

(%o29) [1.6]

Теперь рассмотрим решение уравнений с двумя корнями. Пусть надо решить уравнение $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$. На экране Maxima получаем

(%i30) eq:x^2−5·x+6=0;

(eq) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(%i31) solve(eq);

(%o31) $[x = 3, x = 2]$

Функция Solve кроме действительных корней, находит и комплексные корни. Рассмотрим следующий пример.

(%i32) eq:(x+1)/(x^2+1)=x^2/(x+2);

(eq) $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x+2}$

(%i33) solve(eq);

(%o33) $[-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{7}\%i+1}{2}, \frac{\sqrt{7}\%i-1}{2}]$

Как видно из полученного решения, функция solve нашла не только действительные корни, но и все комплексные корни уравнения и записала их в виде списка из четырех элементов.

К конкретному элементу полученного списка можно обратиться с помощью тех же квадратных скобок, указав в них номер элемента после имени списка. Вот так, например, мы можем осуществить проверку решения, подставив первый корень из выданного списка в исходное уравнение.

(%i34) eq,%[1];

(%o34) $$\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4\left(2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

(%i35) ratsimp(%);

(%o35) $$\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-5}=\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-5}$$

Здесь в равенство (eq), переданное в качестве дополнительного параметра функции *ev,* подставляется значение переменной, указанной в последнем (%) результате (%o2) в списке под номером один. Точно таким же образом можно обратиться ко второму, третьему и четвертому элементу списка:

(%i40) eq,%o33[2],ratsimp;eq,%o33[3],ratsimp;eq,%o33[4],ratsimp;

(%o38) $$\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+5}=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+5}$$

(%o39) $11=11$

(%o40) $11=11$

Все корни полинома(действительные и комплексные) можно найти при помощи функции *alroots*. Способ представления решения определяется переменной *polufactor*(по умолчанию *false;*если установить в *true,* то функция возврашает результат факторизации). Алгоритм поиска корней получисленный.

Пример:

Найти все корни уравнения:

$$x^3 + 3 \cdot x^2 - 5 = 0$$

(%i13) allroots(x^3+3·x^2−5);

(%o13) [1.103803402735536,0.5652358516771705i − 2.051901701367768, 0.5652358516771705i − 2.051901701367768]

3.2. Решение систем алгебраических уравнений.

Для решения системы уравнений можно воспользоваться двумя способами: через меню или через команду.

Чтобы решить систему уравнений через меню воспользуемся следующей командой меню(Рис.3.4):

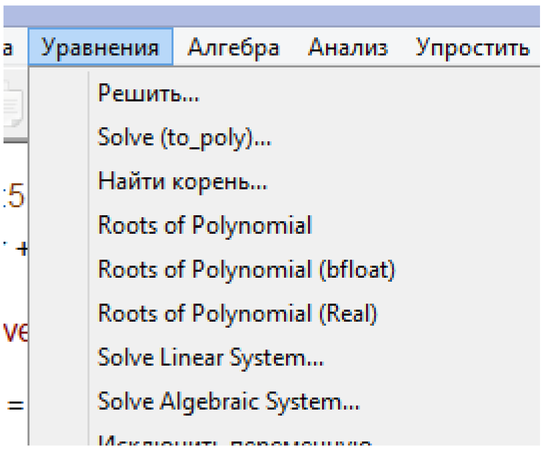

Рис.3.4. Вызов меню Уравнения.

Например, если выбираем “*Solve Linear System…*”, то на экране появляется диалоговое окно, определяющее число уравнений(рис.3.5).

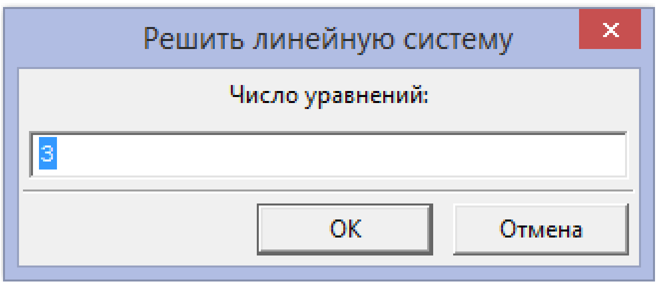

Рис.3.5. Введение числа уравнений.

После нажатия Ок появляется окно для введения уравнений системы(рис.3.6).

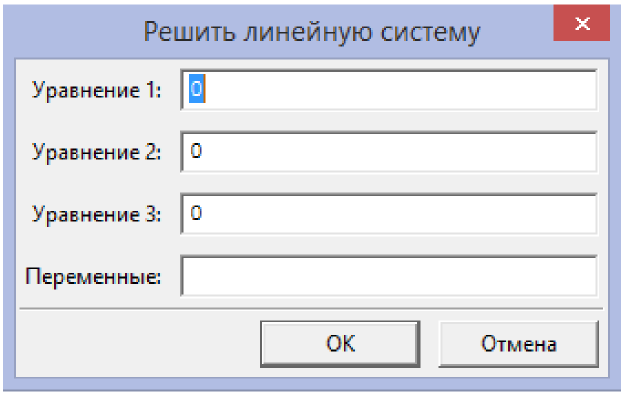

Рис.3.6. Окно ввода уравнений системы.

Например, надо решит систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + z = 23 \\ y + z = 13 \end{cases}$$

Откроем окно ввода уравнений системы, у нас число уравнений 3, и записиваем уравнения(рис.3.7). В разделе Переменные введем переменные x,y,z.

После нажатия Ок на экране Maxima появиться команда с системой уравнения и его решение:

(%i42) linsolve([x+y=10,3·x+2·y+z=23,y+z=13],[x,y,z]);

(%o42) $[x = 0, y = 10, z = 3]$

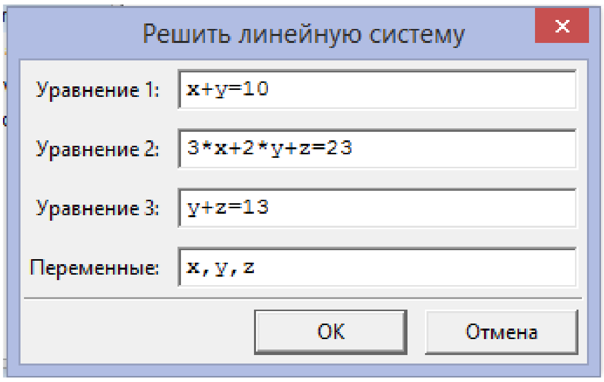

Рис.3.7. Ввод уравнений системы.

Введя команду linsolve в окне Maxima, как приведенное выше, можно получить решение системы. Как видим, использование диалогового окна облегчает работу.

Для решения систем нелинейных уравнений можно воспользоваться командой algsys. Например, найдем решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 16 \cdot y = 9 \\ 25 \cdot x + 9 \cdot y^2 = 16 \end{cases}$$

Воспользуемся пунктом меню Уравнениям-*Solve algebraic system*.

Появившемся диалоговом окне вводим сами уравнения и искомые переменные(рис.3.8)

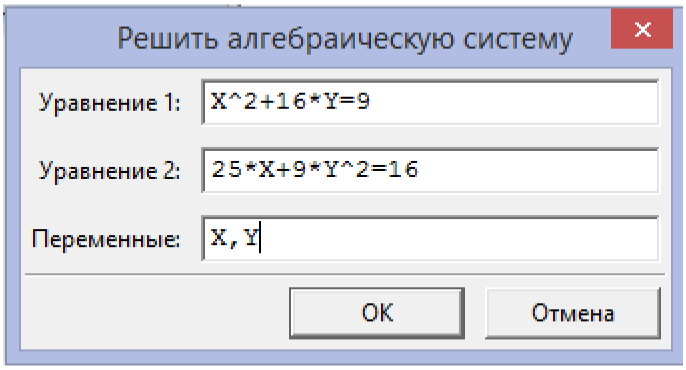

Рис.3.8. Ввод системы алгебраических уравнений.

После нажатия на кнопку *OK* получим решения:

(%i1) algsys([X^2+16·Y=9, 25·X+9·Y^2=16], [X,Y]);
(%o1)

$$[[0.5331758642903156, 0.5447327219861329], [9.743068391866913, 5.370461538461538], [7.12820884061665 i + 4.604946339770822], [2.412864405204793 - 4.103127401214957\%i], [4.604946339770822 - 7.12820884061665\%i, 4.103127401214957\%i + 2.412864405204793]]$$

3.3. Упрощение выражений

Функции, работающие с рациональными выражениями, описаны в разделе документации «*Polynomials*»; потому как рациональные функции с математической точки зрения рассматриваются как расширение многочленов (полиномов) — примерно так же, как рациональные числа считаются расширением целых (многочлены, кстати, тоже иногда называют целыми функциями; хотя общий математический смысл этого термина несколько шире).

Имена всех функций *Максимы* по обработке рациональных выражений содержат буквосочетание rat, но не от слова *крыса*, а от слова *rational*.

Во многих случаях для получения наиболее простого результата требуется записать выражение в виде суммы простейших дробей. Такую задачу решает функция *partfrac()*, ей только нужно указать имя переменной, относительно которой она сделает таки преобразования.

Пусть дано выражение $\frac{x}{x^3+4x^2+5x+2}$

(%i44) partfrac(−x/(x^3+4·x^2+5·x+2),x);

(%o44) $\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$

Следующая функция раскрывает скобки в рациональном выражении и называется *ratexpand*();

(%i45) ((x+1)^2·(%e^x−1))/((x+2)·(2·x+1));

(%o45) $\frac{(x+1)^2\cdot(\%e^x-1)}{(x+2)\cdot(2x+1)}$

(%i46) ratexpand(%),ratdenomdivide:false;

(%o46) $\frac{x^2\cdot e^x+2x\cdot e^x+\%e^x-x^2-2x-1}{2\cdot x^2+5x+2}$

Функция rat приводит выражение к каноническому представлению. Она упрощает любое выражение, рассматривая его как дробнорациональную функцию, т.е. работает с операциями "+", "-", "*", "/" и с возведением в целую степень.

(%i47) rat(%);

(%o47)/R/ $\frac{(x^2+2x+1)\%e^x-x^2-2x-1}{2\cdot x^2+5x+2}$

(%i48) ratexpand(%);

(%o48) $\frac{x^2\cdot e^x}{2\cdot x^2+5x+2}+\frac{2x\%e^x}{2\cdot x^2+5x+2}+\frac{\%e^x}{2\cdot x^2+5x+2}-\frac{x^2}{2\cdot x^2+5x+2}-\frac{2x}{2\cdot xx^2+5x+2}-\frac{1}{2\cdot x^2+5x+2}$

(%i49) combine(%);

(%o49) $$\frac{x^2\%e^x+2\cdot x\cdot e^x+\%e^x-x^2-2x-1}{2\cdot x^2+5x+2}$$

Как видно, функция combine() собирает воедино дроби с одинаковыми знаменателями.

Записать анализируемое выражение как произведение сомножителей, то есть максимально повыносить все за скобки делается это с помощью функции *factor();*

(%i50) factor(x^2+2·x+1);

(%o50) $(x+1)^2$

Если функции *factor();* передать целое число, она разложит его на простые множители; если же передать рациональное число, на множители будут разложены его числитель и знаменатель:

(%i52) factor(25);

(%o52) 5^2

(%i53) factor(50);

(%o53) $2\cdot 5^2$

Функция *ratsimp(выражение);* упрощает выражение за счет рациональных преобразований, но, в отличие от остальных функций по обработке рациональных выражений, работает в том числе и «вглубь», то есть иррациональные части выражения не рассматриваются как атомарные, а упрощаются, в том числе и все рациональные элементы внутри них:

(%i54) a/(5·x)+b/x−c/x;

(%o54) $$-\frac{c}{x}+\frac{b}{x}+\frac{a}{5x}$$

(%i56)	ratsimp(a/(5·x)+b/x−c/x);

(%o56) $-\frac{5c-5b-a}{5x}$

Приводим ещё несколько функций для упрощения выражений:

divide – нахождение частного и остатка от деления одного многочлена на другой

(%i57)	divide(x^3−2,x−1);

(%o57) $[x^2+x+1,-1]$

Первый элемент полученного массива – частное, второй – остаток от деления.

expand – раскрытие скобок выражений.

Пример. Раскройте скобки алгебраического выражения (2+3·x)·(3·y+5·x) и приведите подобные слагаемые.

Для этого воспользуемся функцией *expand*, в скобках запишем данное выражение:

(%i58)	expand((2+3·x)·(3·y+5·x));

(%o58) $9\cdot xy+6y+15x^2+10x$

radcan(выражение) – преобразует выражения, содержащие логарифмические, показательные и степенные функции.

Пример: Упростите выражение $\frac{\sqrt{(x-b)^3}-\sqrt{x-b}(x+b)}{\sqrt{(x-b)}(x+b)}$

Для начала запишем выражение:

(%i2)	(%i19) (sqrt((x−b)^3)−(x+b)·sqrt(x−b))/sqrt((x−b)·(x+b));

(%o2) $$\frac{\left((x-b)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x-b}(x+b)\right)}{\sqrt{(x-b)(x+b)}}$$

После этого запишем функцию radcan, в скобке – символ % (ссылка на предыдущий результат): (%i2) radcan(%); результат:

(%i5) radcan(%);

(%o5) $-\frac{2b}{\sqrt{x+b}}$

gcd – наибольший общий делитель многочленов

(%i59) gcd(x^3−1,x^2−1,x−1);

(%o59) $x-1$

trigsimp – упрошает тригонометрическое выражения

Пример: Упростите тригонометрическое выражение

$$cos^3x - 3cosx \cdot sin^2x.$$

Для этого сначала запишем выражение:

(%i6) cos(x)^3−3·cos(x)·sin(x)^2;

(%o6) $\cos(x)^3 - 3cos(x) \cdot \sin(x)^2$

Затем воспользуемся функцией trigsimp, в скобках запишем символ % (ссылка на предыдущий результат):

(%i7) trigsimp(%);

(%o7) $4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$

Ещё один пример:

(%i60) tan(x)·sec(x)^2+((1−sin(x)^2)·cos(x))/cos(x)^2;

(%o60) $sec(x)^2 \tan(x) + \frac{1-\sin(x)^2}{cos(x)}$

(%i61) trigsimp(%);

(%o61) $\frac{sin(x)+cos(x)^4}{cos(x)^3}$

3.4. Задачи на использование процентов.

Пропорции. Частное от деления двух чисел называется отношением.

Отношение обозначается как a :b или $\frac{a}{b}$.

Равенство двух отношений называется пропорцией.

Пропорция записывается как a :b = c : d или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Читается: a относится к b также, как c относится к d.

a и b – называются крайними членами пропорции;

c и d – называются средними членами пропорции.

Свойства пропорций:

1.Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

2. В пропорции можно поменять местами крайние члены, или средние члены, или и те и другие одновременно.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Пример. Масса 18 одинаковых деталей составила 82,8 кг. Какова масса 12 таких деталей?

Решение: обозначим за x массу 12 деталей и составим пропорцию:

$$\frac{82{,}8}{18} = \frac{x}{2};$$

Воспользуемся свойством пропорции:

$$x = \frac{12 \cdot 82{,}8}{18} \Rightarrow x = 55{,}2$$

Вычисление производим в Maxima:

(%i35) (12·82.8)/18;

(%o35) 55.2

Ответ: масса 12 деталей составляет 55,2 кг.

Две величины называются пропорциональными, если при изменении одной из них в несколько раз другая изменяется в такое же количество раз. В этом случае говорят, что между величинами установлена прямая пропорциональность. Две величины называются обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз, другая уменьшается во столько же раз. В этом случае говорят, что между величинами установлена обратная пропорциональность.

Пример. На некотором участке газопровода трубы длинной 5 м заменили на трубы длинной 4 м. Сколько нужно новых труб для замены 100 старых?

Составим пропорцию: $\frac{5}{4} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 100}{4} = 125.$

Вычисление производим в Maxima:

(%i30) float(5·100/4);

(%o30) 125.0

Отношение между пропорциональными величинами называется коэффициентом пропорциональности.

Пример. Одна сторона прямоугольника равна 12 м, другая – 16 м. Найти коэффициент пропорциональности сторон прямоугольника.

Решение: отношение сторон прямоугольника равно $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

(%i27) 16/12;

(%o27) $\frac{4}{3}$

В этом случае говорят, что величины относятся друг к другу как 4 к 3.

Проценты

Процентом называется сотая часть. Целая часть считается равной ста процентам. Обозначается: 100%. Простейшие задачи на проценты решаются с помощью составления пропорции:

$\frac{A}{100\%} = \frac{a}{x\%}$, где A – целая часть, a – часть от целого, x – процент от целого.

В зависимости от того, какой параметр нужно найти, различают три основных задачи на проценты:

1. Найти указанный процент от данного числа (найти a).

2. Найти число по данной величине указанного его процента (найти A).

3. Найти выражение одного числа в процентах другого (найти x).

Примеры. 1) Аэропорт Шереметьево состоит из нескольких терминалов общей площадью 500 тыс. кв. м. Площадь терминала D 172 тыс. кв. м. Какой процент от всей площади аэропорта занимает терминал D?

Решение: всю площадь аэропорта примем за 100%, площадь терминала D обозначим за x%, тогда:

$$\frac{500}{100} = \frac{172}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 172}{500} = 34{,}4\%$$

Вычисление в Maxima:

(%i28) (100·172)/500;

(%o28) $\frac{172}{5}$

(%i29) float(%);

(%o29) 34.4

Ответ: Терминал D занимает 34,4% (около трети) всей площади аэропорта Шереметьево.

2) Пассажиропоток Шереметьево на внутренних воздушных линиях в 2015 году вырос на 5,6% по сравнению с 2014 годом и достиг 13 млн 809 тыс. пассажиров. Каков был пассажиропоток в 2014 году?

Решение: в 2015 году пассажиропоток вырос, значит 13 809 000 соответствует 105,6% относительно 2014 года. Составим пропорцию:

$$\frac{A}{100}=\frac{13809000}{105,6}\Rightarrow A=\frac{13809000\cdot 100}{105,6}\approx 13076704.$$

Вычисление производим в Maxima:

(%i34) (13809000·100)/105.6,numer;

(%o34) $1.307670454545455\cdot 10^{7}$

Ответ: в 2014 году пассажиропоток Шереметьево составил около 13 млн 77 тыс.

Ключевые слова:

Уравнение, корень уравнения, аналитическое решение, трансцендентное уравнение, алгебраическое уравнение, приближенное решение уравнение, количество корней уравнения, отрезок изоляции, solve, интерфейс wxMaxima «Уравнение», комплексные корни, *ratsimp(), alroots(), polufactor(), linsolve(), algsys(), polynomials()*, упрощение выражений, *partfrac(), ratexpand(), combine(), factor(), expand(), radcan().*

Вопросы для контроля:

1. Расскажите этапы приближенного численного отыскания корней уравнений.
2. Какие параметры имеет функция solve?
3. Как можно решить уравнение через главное меню Maxima?
4. Находить ли комплексные корни функция Solve?
5. Как решается система уравнений средствами Maxima?
6. Какие функции имеет Maxima для упрощения выражений?

7. Раскройте команды меню Упростить, которые позволяют выполнять вычисления с числами. Какие это вычисления?
8. Какая команда используется для решения уравнений? Каков ее синтаксис?
9. Какие возможности имеются в программе wxMaxima для решения алгебраических систем?
10. Как работает команда меню «Уравнения» в Maxima?

Задачи для самостоятельного решения:
Проверить работу функций:

Divide – нахождение частного и остатка от деления одного многочлена на другой.

Factor – разложение на множители.

Expand – раскрытие скобок.

Gcd – наибольший общий делитель многочленов.

Ratsimp – упрощение выражений.

Partfrac – преобразование в простые дроби по заданной переменной.

Trigsimp – тригонометрическое упрощение.

Trigexpand – тригонометрическое ракрытие скобок.

Упростите выражение *(1 + sin(2x) + cos(2x))/(1 + sin(2x) - cos(2x)).*

Разложите на множители многочлен x^3-4x^2+5x-2.

Найдите численное решение уравнения *cos x=x.*

Решите уравнение $x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

Разложите на простые множители числа 123456, 12345678, 12345678910, 1234567891011, 1234567891011121314 и 12345678910111213141516.

Разложите на множители выражение $x^5 - 1$.

Найдите наибольший общий делитель следующих пар чисел: 12345 и 123456, 1234 и 4321, 77777 и 333333,102448 и 10241024. 5.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Решите уравнения:

1. x^4-2x^3+ x^2-12x+20=0
2. x^4+x^3-17x^2-45x-100=0
3. x^4+6x^3+ x^2-4x -60=0
4. x^4-5x^3+ x^2-15x+50=0
5. x^4-14x^2-40x-75=0
6. x^4-4x^3-2x^2-20x+25=0
7. x^4- x^3+x^2-11x+10=0
8. x^4+5x^3+7x^2+7x-20=0
9. x^4- x^3-29x^2-71x-140=0
10. x^4-7x^3+7x^2-5x+100=0

Решите следующие трансцендентные уравнения:

1. $x^2 - e^x = 0$

2. $\sin 2x - x^2 + 6 = 0$

3. $\dfrac{1}{1 + x^2} - 0{,}1x^4 = 0$

4. $\ln(2 + x) - 0{,}4x^3 = 0$

5. $x \cdot tg\left(\dfrac{x}{2}\right) - sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$

6. $9 - x^2 - e^x = 0$

Разложите алгебраические выражения на множители

1) $-x^4 - 5x + 12x^3 + 10 - x^5 - 5x^2$
2) $3x^3 + 19x^2 + 57x + 90$
3) $-6x^2 + 58x + 120 - 4x^3$
4) $4x^4 + 14x^3 + 22x^2 + 35x + 30$
5) $x^6 + 5x^3 - 64x + 23$

Решите алгебраические системы уравнений

1. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18 \\ x + y = 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x + y = -5 \\ x^2 - y^2 = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = 2x^2 - 4 \end{cases}$

Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x - y + 5z = -7 \\ 5x - y + 2z = -4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8x + 2y - 7z = 3 \\ x - 3y + 5z = 3 \\ 5x - 2y + 4z = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 \\ 3x + 4y - 3z = 2 \\ x - 3y + 7z = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x + 5y - z = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7x - 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = -4 \\ 3x + y - z = -3 \end{cases}$

6) $\begin{matrix} 7x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = -7 \\ x - 5y + z = 7 \end{matrix}$

7) $\begin{cases} 5x + y + 6z = -3 \\ 4x + 3y - z = 2 \\ x + 2y - 5z = 3 \end{cases}$

8) $\begin{matrix} x - 4y - z = -3 \\ 3x + 7y + z = -1 \\ 2x + 3y - z = -4 \end{matrix}$

9) $\begin{cases} 5x - 3y + z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 5y + z = 1 \end{cases}$

10) $\begin{matrix} x + y + z = 3 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 5x + 2y - 7z = 0 \end{matrix}$

Использованная литература:

1.Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. Казань: Казанский университет, 2012. – 57с.

2.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казан.федер.ун-т, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012. 80 с.

3.Методическое пособие по изучению математического пакета Maxima: http://kit.znu.edu.ua/iLec/9sem/CAB/LIT/maxima2-met1.pdf

4. Перепечко С.Н., Воропаев А.Н. Основы работы в системах компьютерной алгебры. Сборник задач. Петрозаводск, 2013. 64 с.

5. Чичкарёв Е.А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. М.: ALT Linux. 2012.-384 с.

6.Высшая математика: Учебник/Л.Т. Ячменев.-М.:ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. -752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

7.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник/М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: ИНФРА-М, 2011. -472 с. http://www/znanium.com/bookread.php?book=221082

4- МОДУЛЬ. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В MAXIMA.

4.1. Матрицы. Простейшие операции над матрицами.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица mn действительных чисел, записываемая в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Если строк матрицы A равно числу ее столбцов, то есть $m = n$, то матрицу называют квадратной порядка n и обозначают A_{nn}. Элементы a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют главную диагональ. Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной матрицей. Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, называется единичной матрицей и обозначается через E.

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, стоящие ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Транспонированием матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ называется такое ее преобразование, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров и порядком следования элементов. Матрица, полученная транспонированием матрицы A, называется транспонированной и обозначается A′. Таким образом, $A' = \left(a'_{ij}\right)_{mxn}$, где $a'_{ji} = a_{ij,}\ i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n.$

Суммой двух матриц $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ и $B = (b)_{mxn}$ называется такая матрица $\mathrm{C} = \left(\mathrm{c}_{ij}\right)_{mxn}$, в которой $\mathrm{c}_{ij} = a_{ij} + b_{ij}(i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$. Кратко записывают $\mathrm{C} = A + B$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{mxn}$ на число α называется такая матрица $B = (b)_{mxn}$, в которой $b = \alpha \cdot a_{ij} (i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$. Кратко пишут $B = A \cdot \alpha$ или $B = \alpha \cdot A$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{mxn}$ на матрицу $B = (b)_{mxn}$ справа(или матрицы B на матрицу A слева) называется такая матрица

$\mathrm{C} = (\mathrm{c})_{mxn}$, в которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$.

Произведение матрицы A на матрицу B справа обозначается $C = AB$ (так же обозначается произведение матрицы B на матрицу A слева). Правило умножения матриц формулируется следующим образом: чтобы получить элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C = AB$, нужно элементы i -й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Для задания матрицы в Maxima можно пользоваться через меню или через команд.

Если пользуемся командами меню, то выберем «Алгебра-Ввести матрицу»(рис.4.1).

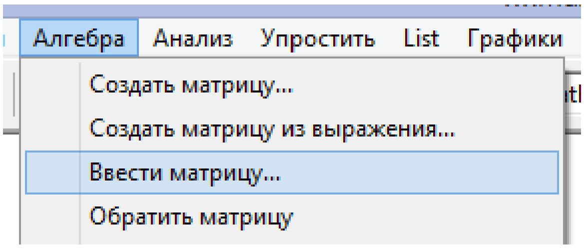

Рис. 4.1. Введение матрицы через меню.

При выборе «Алгебра-Ввести матрицу» выходить окно «Создать матрицу», который спрашивает число строк и столбцов матрицы, а также имя матрицы(рис.4.2).

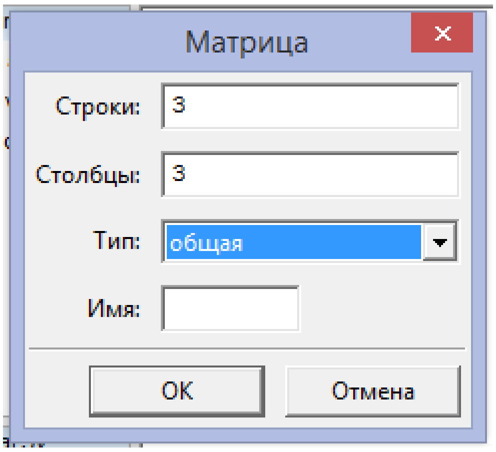

Рис. 4.2. Запрос числа строк и столбцов матрицы.

После заполнения ячеек окна и нажатия Ок выходит окно для введения элементов матрицы(рис.4.3).

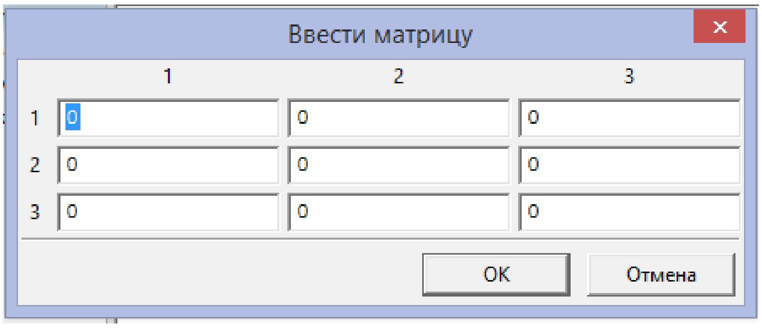

Рис.4.3. Окно для введения элементов матрицы.

После заполнения таблицу числами и нажатия Ок на экране Maxima появляется команда и заполненная матрица:

```
(%i47)          a: matrix(
[1,2,3],
[4,5,6],
[7,8,9]
);
```

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Для непосредственного задания матрицы используется функция matrix:

```
(%i38)        matrix([15,2],[7,10]);
```

(%o38) $\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

Здесь командой (%i38) записывается матрица $\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ и в строке (%o38) записан ответ.

Рассмотрим основные действия с матрицами на примере. Для этого зададим две матрицы: A и B.

--> a: matrix([15,2], [−7,10]);

(a) $\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

--> b: matrix([−6,4], [5,13]);

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$

Поэлементное сложение, вычитание матриц:

(%i50) a+b;

(%o50) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 23 \end{pmatrix}$

(%i51) a–b;

(%o51) $\begin{pmatrix} 21 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

Умножение матриц и умножение марицы на число:

(%i53) a·b;

(%o53) $\begin{pmatrix} 90 & 8 \\ 35 & 130 \end{pmatrix}$

(%i54) 2·a;

(%o54) $\begin{pmatrix} 30 & 4 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$

Вычисление матрицы, обратной данной

(%i55) a^^−1;

(%o55) $\begin{pmatrix} \frac{5}{82} & \frac{1}{82} \\ \frac{7}{164} & \frac{15}{164} \end{pmatrix}$

Также обратную матрицу можно получить с помощью функции invert.

(%i56) *invert*(a);

(%o56) $\begin{pmatrix} \frac{5}{82} & \frac{1}{82} \\ \frac{7}{164} & \frac{15}{164} \end{pmatrix}$

4.2. Функции работы с матрицами.

determinant – нахождение определителя матрицы:

--> a: matrix([15,2], [−7,10]);

(a) $\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$

(%i57) determinant(a);

(%o57) 164

eigenvalues – нахождение собственных значений матрицы

(%i63) eigenvalues(a);

(%o63) $[[-\frac{\sqrt{31}\%i-25}{2},\frac{\sqrt{31}\%\%i+25}{2}],[1,1]]$

rank – ранг матрицы

(%i61) rank(matrix([15,2],[−7,10]));

(%o61) 2

transpose – транспонирование матрицы

(%i62) transpose(matrix([15,2],[−7,10]));

(%o62) $\begin{pmatrix} 15 & -7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

4.3. Решение матричных уравнений

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=21 \\ 4x-2y+3z=42 \\ 3x+4y-2z=21 \end{cases}$$

Решение.

(%i80) A:matrix([2,−3,4],[4,−2,3],[3,4,−2]);

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Командой (%i80) записывается матрица A – матрица, составленная из коэффициентов при незвестных x , y , z .

(%i81) B:matrix([21],[42],[21]);

(B) $\begin{pmatrix} 21 \\ 42 \\ 21 \end{pmatrix}$

Командой (%i81) записывается матрица B – матрица, составленная из свободных членов.

(%i82) A^^(−1);

(%o82) $\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{10}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{17}{21} & \frac{16}{21} & \frac{10}{21} \\ \frac{22}{21} & \frac{17}{21} & \frac{8}{21} \end{pmatrix}$

Командой (%i82) записывается матрица, обратная данной матрице A.

(%i95) A^^(−1).B;

(%o95) $\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Командой (%i95) обратная матрица умножается на матрицу B.

Ответ: (11; -5; -4).

4.4. Решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью методом Гаусса

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - 8z = 14 \\ 2x + 4y - 7z = 13 \\ 5x + 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

Решение. Введем расширенную матрицу A

(%i1) A:matrix([1,2,−8,14],[2,4,−7,13],[5,3,4,−2]);

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 14 \\ 2 & 4 & 7 & 13 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

и приведем ее к треугольному виду

(%i4) *echelon*(A);

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{44}{7} & \frac{72}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

решим, получим искомые значения

(%i6) *solve*([x+2·y−8·z=14,y−(44/7)·z=72/7,z=−5/3],[x,y,z]);

(%o6) $[[\frac{22}{21},\frac{4}{21},\frac{5}{3}]]$

Ответ: $\frac{22}{21},\frac{4}{21},\frac{5}{3}$.

4.5. Решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью метода Крамера.

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 10z = -15, \\ 2x + 4y - z = 12, \\ x + y - 3z = 9. \end{cases}$$

Решение. Вычислим основной определитель системы:

(%i63) D:matrix([1,2,10],[2,4,−1],[1,1,−3]);

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(%i64) *determinant*(D);

(%o64) 21

Командой (%i63) записываются коэффициенты при неизвестных x , y , z и вычисляется этот определитель, следующей в строке записан матрица и вычислен его определитель в строке (%o64).

Так как $D = -21 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Чтобы получить его, необходимо вычислить дополнительные определители D_x, D_y, D_z и используя формулу Крамера $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, \ z = \frac{D_z}{D}$ найти неизвестные x, y, z.

Вычислим дополнительные определители

(%i65) Dx:matrix([−15,2,10],[12,4,−1],[9,1,−3]);

(Dx) $\begin{pmatrix} 15 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Командой (%i65) задается определитель D_x, составленный следующим образом: - первая строка записывается на основе коэффициентов первого уравнения системы, взятых в следующем порядке: свободный член, коэффициент при неизвестном y , коэффициент при неизвестном z , - вторая и третья строки записываются аналогично из коэффициентов второго и третьего уравнений соответственно.

(%i67) Dx:determinant(Dx);
(Dx) 21

(%i73) x=Dx/D;
(%o73) 1

В строке 67 вычислим определитель детерминанта D_x, в строке 73 находим неизвестную x=1.

(%i74) Dy:matrix([1,−15,10],[2,12,−1],[1,9,−3]);

(Dy) $\begin{pmatrix} 1 & 15 & 10 \\ 2 & 12 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

(%i75) Dy:determinant(Dy);
(Dy) 42
(%i76) y=Dy/D;
(%o76) 2

Командой (%i74) записывается определитель Dy , составленный следующим образом: - первая строка (из первого уравнения) – коэффициент при неизвестном x , свободный член, коэффициент при неизвестном z , - вторая и третья строки записываются аналогично (из второго и третьего уравнения). В строке (%o75) вычисляется дополнительный определитель Dy=42, в строке (%o76) находим неизвестную y = 2 .

(%i77) Dz:matrix([1,2,−15],[2,4,12],[1,1,9]);

(Dz) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

(%i78) Dz:determinant(Dz);

(Dz) 42

(%i79) z=Dz/D;

(%o79) −2

Командой (%i77) записывается определитель Dz , составленный следующим образом: - первая строка (из первого уравнения) – коэффициент при неизвестном x , свободный член, коэффициент при неизвестном y , - вторая и третья строки записываются аналогично (из второго и третьего уравнения). В строке (%o78) вычисляется дополнительный определитель Dz=42, в строке (%o79) находим неизвестную z = -2 .

Ответ: (1;2; -2).

Любую из трех выше приведенных систем можно с помощью команды solve:

solve([уравнение1, уравнение2, ...],[переменная1, переменная2, ...]).

Пример:

(%i7) solve([x+2·y−8·z=14,2·x+4·y−7·z=13, 5·x+3·y+4·z=−21],[x,y,z]);

(%o7) $[[\frac{92}{21},\frac{53}{21},\frac{5}{3}]]$

Ответ: $\frac{22}{21},\frac{4}{21},\frac{5}{3}$.

Ключевые слова:

Матрица, прямоугольная таблица, главная диагональ, единичная матрица, треугольная матрица, транспонирование матрицы, сумма матриц, произведение матриц, умножение матрицы на число, команда меню *«Алгебра-Ввести матрицу», matrix, обратная матрица, insert(), determinant(), eigenvalues(), rank(), transpose(), echelon(),* метод Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы.

Вопросы для контроля:

1.Какие действия над матрицами возможно выполнить в программе wxMaxima?

2.Как складываются матрицы? Опишите синтаксис.

3.Как умножить матрицу на число?

4.Как выполнить умножение двух матриц?

5.Какая команда позволяет транспонировать матрицу?

6.Как с помощью программы wxMaxima вычислить определитель матрицы?

7.Какая команда позволяет найти обратную матрицу? Каким образом можно проверить правильность ее нахождение?

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти транспонированную матрицу A^T

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Найти сумму матриц A+B

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Найти разность матриц A-B

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Найти произведение матриц A x B

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

5. Найти транспонированную матрицу A^T

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

6. Найти определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

7. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Найти обратную матрицу A-1

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

10.Найти $A - 2B + 3C$, если

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 4 & 1 \\ 1/2 & 5/2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Найти A^2, если $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

Решите алгебраические системы уравнения с помощью метода Крамера, обратной матрицы и Гаусса.

1) $\begin{cases} 5x - 3y + z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 5y + z = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 5x + y - 3z = 5 \\ 7x - 4y - 3z = -5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y + 7z = -3 \\ 2x + y - 5z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ 2x + 3y - 7z = 1 \\ 5x + 3y - 4z = 7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x + y - 5z = 1 \\ 3x + 3y - 4z = 7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = -4 \\ 5x + 3y - z = 7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 3y - 4z = -1 \\ 3x - 2y + 5z = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x - 5y + 2z = 9 \\ 3x - y + z = 3 \\ 7x - 2y - z = -3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 8x - 6y + 5z = 15 \\ 13x - 10y + z = 32 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 7x + 9y + z = 8 \\ 13x + 15y + 9z = 6 \\ 2x + 3y + z = 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x + 9y - 8z = 13 \\ 7x + 15y - 6z = 22 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

14) $\begin{cases} -14x + 9y + 5z = -5 \\ -17x + 15y + z = -2 \\ -4x + 3y + z = -1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 5x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

Использованная литература:

1.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казанский федеральный университет, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012. 80 с.

2.Методическое пособие по изучению математического пакета Maxima: http://kit.znu.edu.ua/iLec/9sem/CAB/LIT/maxima2-met1.pdf

3. Перепечко С.Н., Воропаев А.Н. Основы работы в системах компьютерной алгебры. Сборник задач. Петрозаводск, 2013. 64 с.

4. Чичкарёв Е.А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. М.: ALT Linux. 2012.-384 с.

5.Высшая математика: Учебник/Л.Т. Ячменев.-М.:ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. -752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

6.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник/М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: ИНФРА-М, 2011. -472 с. http://www/znanium.com/bookread.php?book=221082

7. Математика: Учебное пособие/Н.А. Березина, Е.Л. Максина.-М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2013.-175 с. // http://www/znanium.com/bookread.php?book=369492

5- МОДУЛЬ. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В MAXIMA

5.1. Вычисление пределов последовательностей, пределов функций.

Предел последовательности

Понятие предела последовательности возникает на интуитивном уровне уже на самом раннем этапе изучения математики. В качестве примера обратимся к задаче о нахождении площади круга радиуса r с помощью геометрических построений.

Пусть в окружность вписан треугольник или квадрат. Понятно, что площадь такой фигуры имеет мало общего с площадью круга. Если же увеличивать и увеличивать число сторон вписанного правильного многоугольника, то его контуры постепенно станут приобретать очертания окружности.

Обозначим площадь вписанного многоугольника символом x_n, где индекс n указывает число сторон многоугольника. Выражаясь формально, можно сказать, что x_n представляет собой общий член монотонно возрастающей ограниченной последовательности площадей вписанных многоугольников. При неограниченном возрастании n элементы этой последовательности все точнее и точнее описывают площадь круга. Несколько забегая вперед, можно сказать, что последовательность x_n имеет своим пределом площадь круга.

Рассмотрим теперь последовательность, n-ей элемент которой равен площади описанного многоугольника, имеющего n сторон. В этом случае мы имеем дело с монотонно убывающей ограниченной последовательностью площадей описанных многоугольников, которая при неограниченном возрастании n все точнее и точнее описывает площадь круга.

Число А называется пределом последовательности $\{\boldsymbol{y_n}\}$, если разность $y_n - A = \alpha_n$ является бесконечно малой величиной. Другими словами, число A является пределом последовательности $\{\boldsymbol{y_n}\}$, если переменную $\{\boldsymbol{y_n}\}$ можно представить в виде $y_n = A + \alpha_n$ где α_n – некоторая бесконечно малая величина. Символически такое утверждение записывают в виде

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A$$

Говорят также, что переменная $\boldsymbol{y_n}$ стремится к числу A:

$$y_n \to A \text{ при } n \to \infty$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, то любая ε-окрестность точки A содержит все точки y_n, начиная с некоторого номера. Вне этой окрестности может находиться разве что конечное число точек y_n.

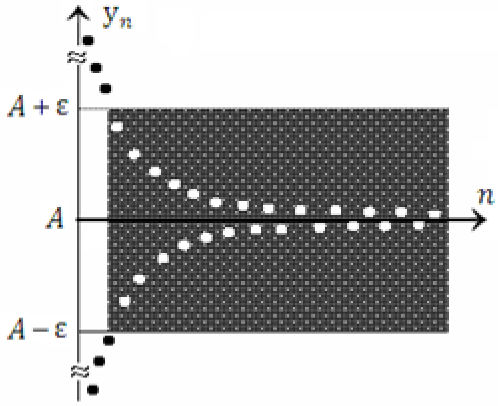

Рис. 5.1. Последовательность y_n имеет своим пределом число А.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**. В противном случае последовательность называется **расходящейся.**

На практике последовательность обычно задаётся формулой общего члена, например:

$x = 2 \cdot n$– последовательность положительных чётных чисел:

$$x_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$x_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$x_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\dots$$

$$x_n = 2 \cdot n = 2 \cdot n$$

Таким образом, запись $x_n = 2 \cdot n$ однозначно определяет все члены последовательности – это и есть то правило (формула), по которому натуральным значениям $1, 2, 3, 5 \dots, n$ в соответствие ставятся числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ .... Поэтому последовательность часто коротко обозначают общим членом.

Если у последовательности x_n существует конечный предел $\boldsymbol{a}$, то они пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Предел функции в точке.

Пусть функция y= $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\varepsilon > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию 0 < |x − a| < δ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$|. Условие |x − a|>0 означает, что $x \neq 0$.

Предел функции обозначается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Предел функции f (x) при x → a вычисляется в Maxima с помощью оператора

limit(f (x), x, a);

Пример: Вычислить $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

(%i8) limit(sin(x)/x,x,0);

(%o8) 1

Командой (%i8) находится предел от функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ и в строке (%o8) записан ответ 1.

Возможен другой вариант ввода команды нахождения предела. Используя меню, щелкнуть по кнопкам «*Анализ→Найти предел*».

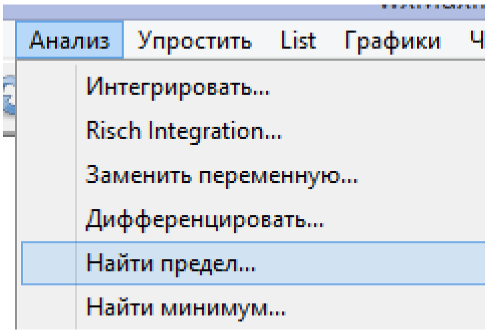

Рис.5.2. Вызов команды меню *Анализ-Найти предел*.

Появится окно, которое нужно заполнить.

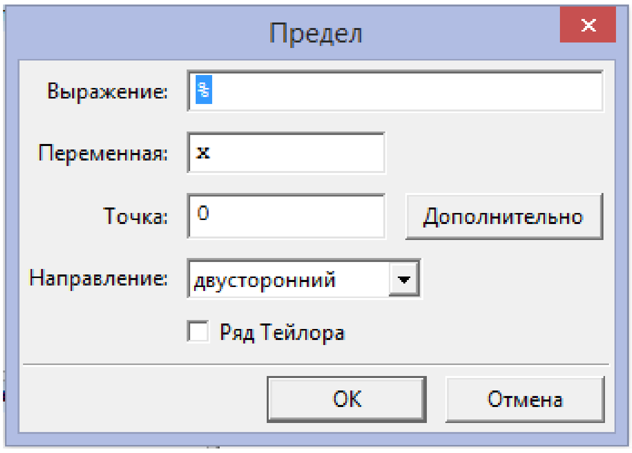

Рис.5.3. Диалоговое окно для ввода предела.

Здесь в строке «*Выражение*» пишется функция для предела, в строке «*Переменная*» пишется переменное, которое берется предел, в строке «*Точка*» пишется значение, куда стремится значение, всплывающей строке «*Направление*» можно выбрать значения «*двусторонний*», «*слева*», «*справа*».

Заполняем это диалоговое окно(рис.5.4)

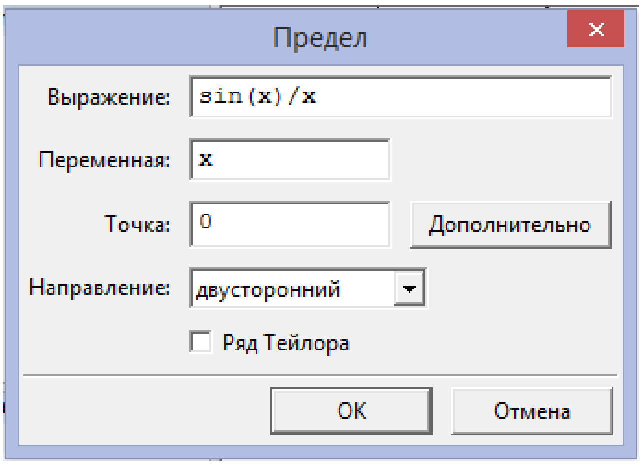

Рис.5.4. Заполнение диалогового окна «предел».

При нажатии кнопки Ок на экране Maxima выводится команда Limit и ответ:

(%i9) limit(sin(x)/x, x, 0);

(%o9) 1

Примеры: Вычислить пределы функций

$$\lim_{x\to\infty} e^x$$

(%i65) 'limit(exp(x),x,inf);

(%o65) $\lim\limits_{x\to\infty} \%e^x$

(%i64) limit(exp(x),x,inf);

(%o64) ∞

Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to-\infty} e^x$$

(%i66) 'limit(exp(x),x,minf);

(%o66) $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \%e^x\right)$

(%i67) limit(exp(x),x,minf);

(%o67) 0

Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$$

(%i68) y(x):=(x^3−3·x−2)/(x^2−x−2)^2;

(%o68) $y(x):=\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$

(%i69) 'limit(y(x),x,−1);

(%o69) $\lim\limits_{\to 1} \frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$

(%i70) limit(y(x),x,−1);

(%o70) $-\frac{1}{3}$

С помощью Maxima можно вычислять односторонние пределы, для этого опять зайдем в меню в «*Анализ→найти предел*». В появившемся окне в строке направление нужно выбрать

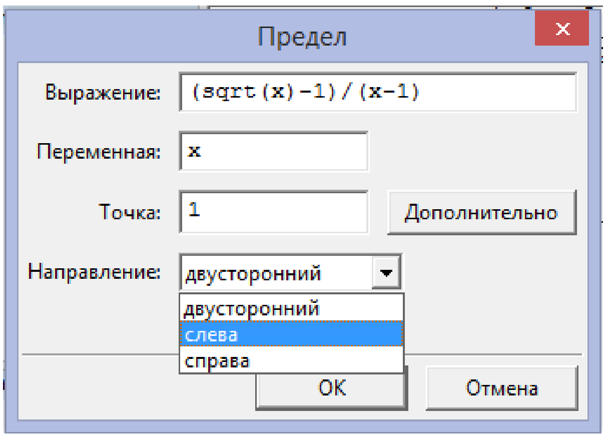

Рис.5.5. Диалоговое окно предел слева.

После нажатия кнопки Ок на экране Maxima появиться лимит и ответ:

(%i20) limit((sqrt(x)−1)/(x−1), x, 1);

(%o20) $\frac{1}{2}$

5.2. Вычисление производных и дифференциалов функции одной переменной.

Дифференциальное исчисление - широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение связей экономических величин, записанных в виде функций.

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 при соответствующем приращении Δx аргумента x называется разность(рис.5.6)

$$\Delta y(x_0; \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0;\Delta x)}{\Delta x}$, то его значение называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, а сама функция

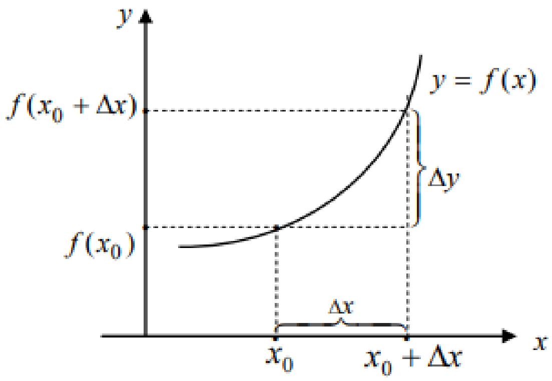

Рис.5.6. Приращение функции.

называется дифференцируемой в точке x_0 .

Для производной используются следующие обозначения: $y'(x_0), f'(x_0)$.

Производная функции f(x) вычисляется с помощью оператора

diff(f(x), x, n);. Здесь n – это порядок производной.

Пример: Вычислить производную функции $\sin(x^2)$

(%i71) diff(sin(x^2),x,1);

(%o71) $2\, x \cos(x^2)$

Возможен другой вариант ввода команды интегрирования. Используя меню, щелкнуть по кнопкам «*Анализ→Дифференцировать*»(рис.5.7).

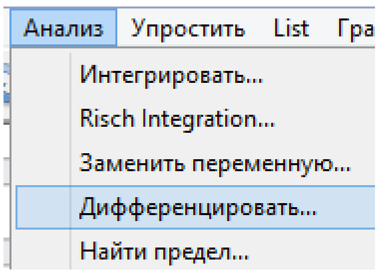

Рис.5.7. Диалоговое окно «*Анализ-дифференцировать*».

Появится окно, которое нужно заполнить и по команде «ОК» получить результат.

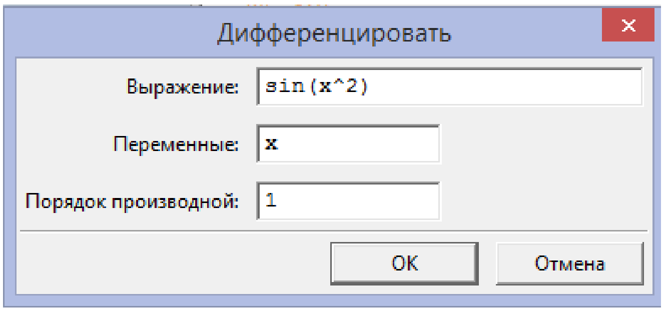

Рис.5.8. Заполнение диалогового окна «*Анализ-дифференцировать*».

После нажатия Ок на экране Maxima появиться ответ:

(%i71) diff(sin(x^2),x,1);

(%o71) $2\,x\cos(x^2)$

С помощью команды *diff* можно вычислять производные высших порядков. При этом команда имеет следующий формат:

diff(<функция>,<переменная>,<порядок>);

где <порядок> - порядок вычисляемой производной.

Для вычисления производных различного порядка удобно создать пользовательскую функцию (в примере ниже - f(x)):

$$f(x) := 9x^2$$

(%i72) f(x):=sin(9·x^2);

(%o72) $f(x):=\sin(9x^2)$

(%i73) diff(f(x),x);

(%o73) $18\,x\cos(9x^2)$

Пример взятия второго и третьего порядков производного:

(%i74) diff(f(x),x,2);

(%o74) $18\cos(9x^2)-324x^2\,sin(9x^2)$

(%i75) diff(f(x),x,3);

(%o75) $972\,x\sin(9x^2)-5832\,x^3\,cos(9x^2)$

Пример вычисления дифференциала (*del(x)* равноценно dx, не указана явно переменная дифференцирования):

(%i76) diff(log(x));

(%o76) $\frac{dell(x)}{x}$

Аналогичный подход применим и для функции нескольких переменных. Функция *diff* с единственным аргументом - дифференцируемой функцией - возвращает полный дифференциал.

Пример:

(%i77) diff(exp(x·y));

(%o77) $\mathrm{x}\,\%e^{\mathrm{x}\,\mathrm{y}}\,\mathrm{dell}(y) + \mathrm{y}\,\%e^{\mathrm{x}\,\mathrm{y}}\,\mathrm{dell}(x)$

5.3. Приложение производных.

1.Нахождение точек экстремума функции.

В экономике очень часто требуется найти наилучшее или оптимальное значение показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, минимальные издержки и т. д. Каждый показатель представляет собой функцию от одного или нескольких аргументов. Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума функции.

При решении подобных задач следует придерживаться предлагаемой схемы:

1. Изобразить рассматриваемый объект.
2. Вычислить первую производную функции, приравнять ее к нулю, решить полученное уравнение, т.е. найти критические точки функции.

3.Вычислить вторую производную функции в каждой из критических точек. По знаку второй производной определить, какая из точек является максимум, а какая минимумом функции.

4. Записать координаты этих точек.

Примеры: 1.Найти экстремумы функции $x(x-1)^3$.

Решение: Зададим функцию и построим график

(%i78) f(x):=x·(x−1)^3;

(%o78) $f(x) := \mathrm{x}(\mathrm{x}-1)^3$

(%i24) wxplot2d([f(x)],[x,−5,6],[y,−5,5])$

plot2d: some values were clipped.

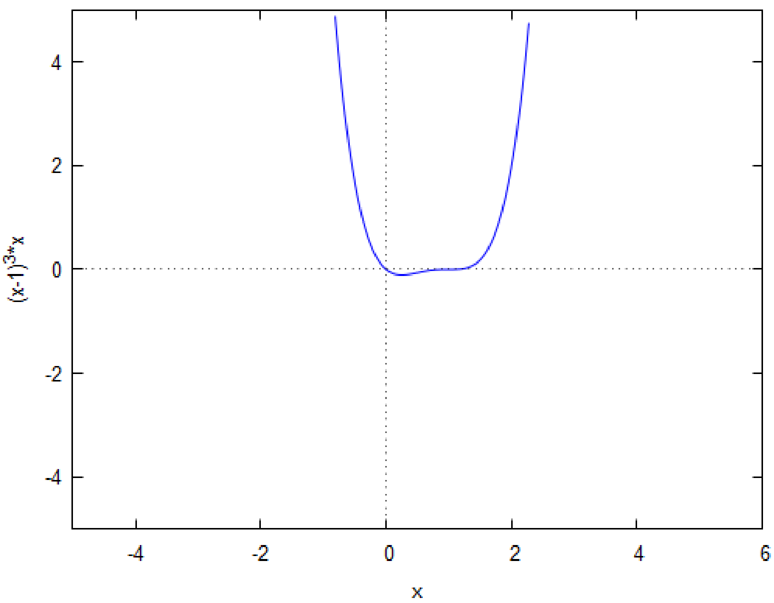

Рис.5.9. График уравнения $(x) := \mathrm{x}(\mathrm{x}-1)^3$.

Найдем первую производную данной функции, приравняем к нулю и решим уравнение:

(%i25) solve(diff(f(x),x,1)=0);

(%o25) $[\frac{1}{4}, 1]$

В результате решения уравнения получились две точки, которые являются критическими.

Вычислим вторую производную

(%i79) g(x):=diff(f(x),x,2);

(%o79) $g(x):=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$

(%i80) g(x);

(%o80) $6(x-1)\,x+6(x-1)^2$

и посчитаем ее значение в критических точках

(%i81) at(%o80,x=1/4);

(%o81) $\frac{9}{4}$

(%i82) at(%o80,x=1);

(%o82) 0

В точке $x = 1/4$ вторая производная больше нуля, значит это точка минимума, в точке x=1 вторая производная равна нулю, значит, это точка перегиба.

Сравним с графиком, построенным ранее. Действительно на графике есть точка минимума и точка перегиба.

Найдем значение функции в этих точках:

(%i83) f(1/4);

(%o83) $-\frac{27}{256}$

(%i84) f(1);

(%o84) 0

Ответ: Точка $\left(\frac{1}{4},-\frac{27}{256}\right)$ является точкой минимума.

2. Найти экстремумы функции двух переменных

$z = e^{-x^2-y^2}(3x^2+y^2)$

Решение: Зададим функцию

(%i85) z:%e^(−x^2−y^2)·(3·x^2+y^2);

(z) $(y^2+3x^2)\%e^{-y^2-x^2}$

Найдем стационарные точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума функции:

(%i86) solve([diff(z,x)=0,diff(z,y)=0],[x,y]);

(%o86) $[[x=0,y=0],[x=-1,y=0],[x=1,y=0],[x=0,y=-1],$
$[x=0,y=1]]$

В результате получено пять точек. Для каждой из них проверим выполнение достаточного условия экстремума. Проделаем это только для точки (1,0).

(%i87)d:determinant(matrix([diff(z,x,2),diff(z,x,1,y,1)],[diff(z,x,1,y,1),diff(z,y,2)])
);

$$\left(4x^2(y^2+3x^2)\%e^{-y^2-x^2}-2(y^2+3x^2)\%e^{-y^2-x^2}-24x^2\%e^{-y^2-x^2}+6\%e^{-y^2-x^2}\right)$$

$$\left(4y^2\left(y^2+3x^2\right)\%e^{-y^2-x^2}-2\left(y^2+3x^2\right)\%e^{-y^2-x^2}-8y^2\%e^{-y^2-x^2}+2\%e^{-y^2-x^2}\right)$$

$$-\left(4xy\left(y^2+3x^2\right)\%e^{-y^2-x^2}-16xy\%e^{-y^2-x^2}\right)^2$$

(%i88) at(d,[x=1,y=0]);

(%o88) $48\%e^2$

(%i89) at(z,[x=1,y=0]);

(%o89) $3\%e^{-1}$

Так как значение определителя в этой точке $\frac{48}{e^2}$ положительно, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}<0$

а значение e отлично от нуля,

то точка (1,0) является точкой максимума и $z_{max}=\frac{3}{e}$.

Построим график

plot3d(%e^(-x^2-y^2)(3*x^2+y^2),[x,-3,3],[y,-3,3]);*

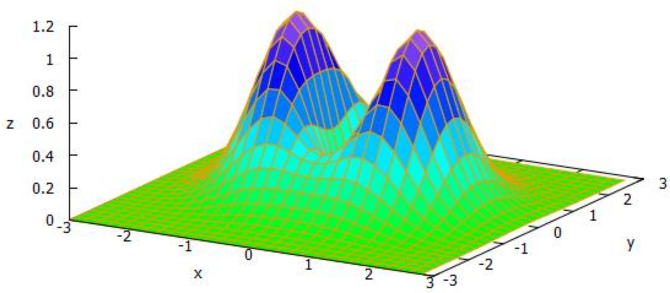

Рис.5.10. Трехмерный график в Maxima/

Ответ: Точка $\left(\frac{1}{4}, -\frac{27}{256}\right)$ является точкой минимума.

Ключевые слова:

Предел последовательности, площадь круга, площадь вписанного многоугольника, бесконечно малая величина, сходящейся предел, расходящейся предел, предел функции в точке, *limit(f(x),x,a)*, «Анализ-найти предел», односторонние пределы, двусторонние пределы, дифференциальное исчисление, приращение функции, конечный предел, производной функции, *diff(f(x),x,n)*, «Анализ-дифференцировать», функция нескольких переменных, лимит тригонометрических функций, экстремум функции.

Контрольные вопросы:

1. Раскройте пункт меню Анализ. Какие задачи с его помощью можно решат?
2. Опишите, как вычислять пределы функций.
3. Какая команда позволяет найти производную функции? Каков ее синтаксис?
4. Производные какого порядка можно находить в программе wxMaxima? Каким образом?
5. С помощью каких средств Maxima исследуется экстремум функции?
6. Как можно вычислять лимит тригонометрических функций средствами Maxima?

Задачи для самостоятельного решения.

Найти следующие пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+1}{3n^3+7}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n}-1}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{6n+1}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+1}{3n^3+7}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+5}{2n^2-2n^3+7}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+5)^4}{1-5n^4}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n-3}-\frac{2}{3n-1}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

11) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 12) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

13) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 14) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 15) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Найти производные следующих функций:

1) $y=x^3+3$; 2) $y=3x-x^3$; 3) $y=x^4$;

5) $y=x^5$; 6) $y=x^3-x^2$; 7) $y=x^3-3x+3$;

8) $y=\frac{1}{4}x^4-8x$; 9) $y=x^4-5x^2+4$; 10) $y=x+\frac{1}{x}$;

11) $y=x^3+3$; 12) $y=3x-x^3$; 13) $y=x^3-x^2$;

14) $y=2x^3+3x^2-2$; 15) $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$;

16) $y=2x^3-3x^2+5$; 17) $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$; 18) $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$;

Найти экстремумы функций:

1) $y=x^2-x$; 2) $y=x^2+3$;

3) $y=x^2-8x+12$; 4) $y=x^2-4x+3$;

3) $y = x^2 - 4x + 5$;

4) $y = 3 + 8x - 2x^2$;

5) $y = 3x^4 - 4x^3 + 3$;

6) $y = 32x - x^4$;

7) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 2$;

8) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1$;

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

1. $f(x) = x^3 - 12x + 7$; $[0; 3]$
2. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$; $[0; 2]$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(x)$; $[0; \pi/2]$
4. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ $[-3; 1]$
5. $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$
6. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$; $[-2; 2]$
7. $f(x) = x^3 - 12x + 7$; $[0; 3]$
8. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$; $[0; 2]$

Показать на графике следующие функции и определить экстремумы через дифференцирование:

1) $y = \frac{2}{x+2}$;

2) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$;

3) $y = \frac{5}{x^2-25}$;

4) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

5) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$

6) $y = \dfrac{1}{1-e^x}$

7) $y = 2x^2 - 3$;

8) $y = x^2 - 2x$;

9) $y = 2x^2 - 5x + 2$;

10) $y = -x^2 + 4x$;

Использованная литература:

1.Воронцова В.Л., Махмутова Д.И., Опокина Н.А. Профессионально ориентированные задачи по дисциплине «Математический анализ» с применением программы *Maxima* для студентов, обучающихся по специальности «Экономика». Учебно-методическое пособие, Казань: КФУ, 2019 г. – 151 с.

2.Методическое пособие по изучению математического пакета Maxima: http://kit.znu.edu.ua/iLec/9sem/CAB/LIT/maxima2-met1.pdf

3. Перепечко С.Н., Воропаев А.Н. Основы работы в системах компьютерной алгебры. Сборник задач. Петрозаводск, 2013. 64 с.

4. Чичкарёв Е.А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. М.: ALT Linux. 2012.-384 с.

5.Высшая математика: Учебник/Л.Т. Ячменев.-М.:ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. -752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

6.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник/М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: ИНФРА-М, 2011. -472 с. http://www/znanium.com/bookread.php?book=221082

7.Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р.Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун-т, 2009, - 576 с.

6- МОДУЛЬ. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Экономика – основа жизни, а в ней важное место занимает дифференциальное исчисление (это раздел математического анализа, связанный главным образом с понятиями производной и дифференциала функции).

В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин? Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию? В какой пропорции дополнительное оборудование может заменить выбывающих работников? Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

В экономике очень часто требуется найти наилучшее или оптимальное значение показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, минимальные издержки и т. д. Каждый показатель представляет собой функцию от одного или нескольких аргументов. Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к исследованию и нахождению экстремума функции.

6.1. Общая схема исследования функции для построения графика.

Для исследования функции и построения ее графика может использоваться следующая схема:

1) найти область определения функции;

2) определить четность (нечетность) функции, ее периодичность;

3) найти точки разрыва функции, ее вертикальные асимптоты;

4) найти точки пересечения с осями координат;

5) найти интервалы возрастания, убывания функции и ее экстремумы;

6) найти интервалы выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба;

7) найти наклонные асимптоты графика функции;

8) построить график функции.

Для выяснения области определения функции вспомним понятие функции, которые было дано в модуле 1.

Если каждому числу x из некоторого множества X по определенному правилу f поставлено в соответствие единственное число y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, где x называется независимой переменной или аргументом, а y – зависимой переменной.

Множество X называется **областью определения** данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, - областью значений (изменения) функции и обозначается $E(f)$.

Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется значением функции в точке x_0(или при $x = x_0$).

Пример. Найти область определения и область значений функции

$$f(x) = \lg(4 - 3x - x^2).$$

Логарифмическая функция определена, если $4 - 3x - x^2 > 0$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -4, x_2 = 1$. Записанное выше неравенство равносильно неравенству $-(x+4)(x-1) > 0$, решая которое выясняем, что область определения $D(f)$ данной функции есть интервал $(-4; 1)$. Поскольку в области определения имеет место неравенство $0 < 4 - 3x - x^2 \leq \frac{7}{4}$, то область значений $E(f)$ функции будет интервал $\left(-\infty; lg\frac{7}{4}\right)$.

Исследование возрастания и убывания функции. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на отрезке [a, b], если для любых x_1 и $x_2 > x_1$ на этом отрезке $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Интервалы возрастания и убывания функции называются интервалами монотонности.

Достаточное условие возрастания(убывания) функции. Если функция дифференцируема на этом отрезке и $f'(x) > 0$, то функция возрастает. Если $f'(x) < 0$ то функция убывает.

Нахождение точек экстремума функции. Точка $x = x_0$ называется точкой максимума (минимума) для функции $y = f(x)$, если $f()$ является наибольшим (наименьшим) значением функции в некоторой окрестностx_0и этой точки. Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках – ее экстремумами.

Необходимым условием экстремума является равенство нулю или отсутствие первой производной функции в точке x_0, т.е. $f'(x) = 0$ или не существует. Эти точки называются критическими.

Первым достаточным условием экстремума в точке x_0 является смена знака у первой производной функции при переходе х через точку x_0. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум, в противном случае – минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то экстремума нет.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в критической точке x_0. Если $f''(x) > 0(< 0)$, то точка x_0 является точкой минимума (максимума).

Исследование выпуклости функции. Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b), если касательные к графику функции на этом интервале расположены выше (ниже) графика функции.

Достаточное условие выпуклости функции. Если функция дважды дифференцируема на этом отрезке и $f''(x) > 0$, то функция является выпуклой вниз. Если $f''(x) < 0$, то функция является выпуклой вверх. Точки, в которых выпуклость переходит в вогнутость, или наоборот, называются точками перегиба функции. При переходе через эти точки вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

Асимптоты к графику функции. Прямая называется асимптотой к графику функции, если при стремлении к бесконечности расстояние от графика до прямой стремится к нулю.

Асимптоты бывают вертикальными, они показывают поведение функции в окрестности особой точки, когда у → ±∞, и наклонными, дающими представление о поведении функции при х → ±∞. Если а – особая точка, то уравнение вертикальной асимптоты $x = a$.

Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при х → ∞, уравнение которой $y = kx + b$, если существуют пределы:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b.$$

В случае $k = 0$ асимптота называется горизонтальной, ее уравнение

$y = b = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Пример . Исследовать функцию $y = \frac{4x}{x^2+1}$ и построить её график.

1. Область существования функции – вся числовая ось, то есть (−∞, ∞). Следовательно, у этой кривой нет особых точек и вертикальных асимптот.

2. Найдем предел функции при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Следовательно, $y = 0$ - горизонтальная асимпота.

3. $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{4x}{x^2+1} = -f(x)$. Значить, функция является нечетной и ее график симметричен относительно начала координат.

4. $f(x) = \frac{4(x)}{x^2+1} = 0 \to x = 0$ – нуль функции. Функция отрицательна при $x \in (-\infty, 0)$ и положительна при $x \in (\infty, 0)$.

5. $f'(x) = -\frac{4(x^2-1)}{(x+1)^2} = 0 \to x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1$.

У функции две критические точки. При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ производная $f'(x) < 0$, следовательно, на этих интервалах функция убывает. При $x \in (-1,1)$ $f'(x) > 0$ и функция возрастает. Точка $x = -1$ – это точка минимума функции, точка $x = -1$ – точка максимума.

6. $f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = \pm 3.$ При

$x \in (infty, -sqrt3) \cup (0, \sqrt{3})$ вторая производная $f''(x) < 0$, на этих интервалах функция выпукла вверх. На интервалах

$x \in (sqrt3{,}0) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$ $f''(x) > 0$ и функция выпукла вниз.

Строим график функции, учитывая точки максимума и минимума, три точки перегиба и горизонтальную асимптоту(рис.6.1):

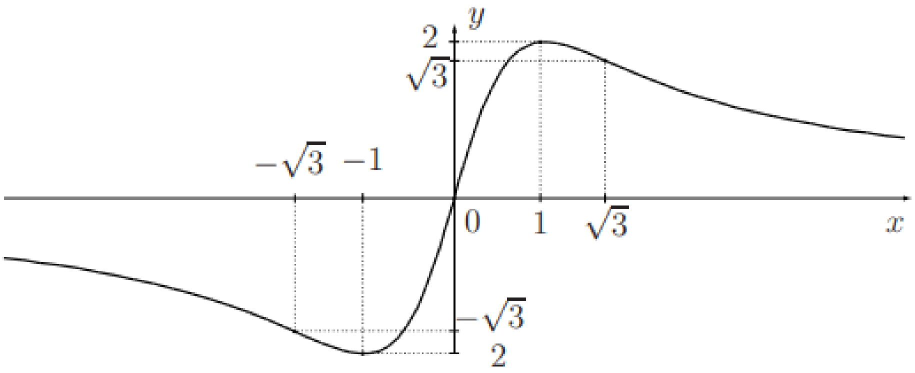

Рис.6.1. График функции $y = \frac{4x}{x^2+1}$.

Пример: Исследовать на наличие экстремума следующую функцию

$$y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

На экране Maxima задаём исследуемую функцию

```
(%i1)       f(x):=x^3−3·x^2+3·x+2;
```

(%o1) $f(x) := x^3 - 3\,x^2 + 3\,x + 2$

Производную в форме функции определяем **явно**, используя функцию Define

(%i2) define(df(x),diff(f(x),x));

(%o2) $df(x) := 3\,x^{-2} 6\,x + 3$

Решая уравнение $df(x) = 0$ (т.е.$f'(x) = 0$, находим критические точки

(%i3) solve(df(x)=0,x);

(%o3) $[x = 1]$

В данном случае критическая точка одна — $x = 1$.

Продолжим исследование функции

$$(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

Как установлено выше, имеется одна критическая точка: $x = 1$.

Задаёмся функцией $d^2 f(x)$

(%i4) define(d2f(x),diff(df(x),x));

(%o4) $d2f(x) := 6\,x - 6$

Вычисляем значение второй производной в критической точке:

(%i6) map(d2f,%o3);

(%o6) $[6\,x - 6 = 0]$

В данном примере невозможно определить, является ли точка $x = 1$ экстремумом исследуемой функции, т.к. вторая производная в ней оказалась равной 0. Следует обратить внимание на способ вычисления — функция $d^2 f(x)$ применяется ко всем элементам списка, полученного при решении уравнения $f'(x) = 0$ (используется встроенная функция **Maxima map**).

Воспользуемся первым достаточным признаком наличия экстремума

(%i35) df(0);

(%o35) 3

(%i36) df(2);

(%o36) 3

Как видно из приведенного результата, первая производная не изменяет знак в критической точке, что свидетельствует об отсутствии экстремума в ней.

Полученный результат иллюстрируется графиком исследуемой функции и её производных

(%i54) plot2d([x^3−3·x^2+3·x+2,3·x^2−6·x+3,6·x−6],[x,−0.5,2])$

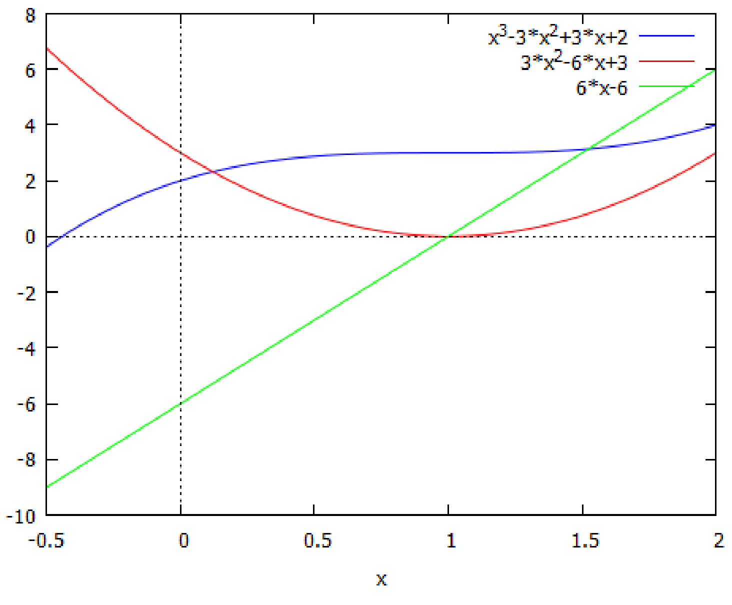

Рис. Графики трех функций на одной координатной плоскости.

6.2. Схема исследования функции y = f(x) на экстремум

1. Найти производную $y' = f(x)$.

2. Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.

3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.

4. Найти вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке.

5. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x(x-1)^3$.

1. *y' = (x - 1)^3 + 3x(x - 1)^2 = (x - 1)^2(4x - 1).*
2. Критические точки $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{4}$.
3. Изменение знака производной при переходе через точку x_1 не происходит, поэтому в этой точке нет экстремума.
4. $y'' = 2(x-1)(4x-1) + 4(x-1)^2 = 2[(x-1)(6x-3)]$

$y''(x_2) > 0$, поэтому в этой точке наблюдается минимум функции

$y = x(x-1)^3$.

5. $y_{min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$

Выполним тот же расчёт при помощи **Maxima.**

(%i7) f(x):=x·(x−1)^3;

(%o7) $f(x) := x(x-1)^3$

(%i8) define(df(x),diff(f(x),x));

(%o8) $df(x) := 3(x-1)^2x + (x-1)^3$

(%i9) solve(df(x)=0,x);

(%o9) $[x = \frac{1}{4}, x = 1]$

(%i10) define(d2f(x),diff(df(x),x));

(%o10) $d2f(x) := 6(\mathrm{x}-1)\,\mathrm{x} + 6(\mathrm{x}-1)^2$

(%i15) map(d2f,%o9);

(%o15) $[6(x-1)\,x+6\,(x-1)^2=\frac{9}{4}, 6\,(x-1)\,x+6x-(1)^2=0]$

В точке $x=1$ вторая производная равна 0, поэтому вычисляем значения первой производной слева и справа от $x=1$:

(%i16) df(2);

(%o16) 7

(%i17) df(1/3);

(%o17) $\frac{4}{27}$

Производная в окрестности точки $x=1$ не меняет знак, поэтому экстремум у исследуемой функции один — точка $x=\frac{1}{4}$. Так как $d^2f\left(\frac{1}{4}\right)>0, x=\frac{1}{4}$ — точка минимума. Иллюстрация полученного результата — на рис.

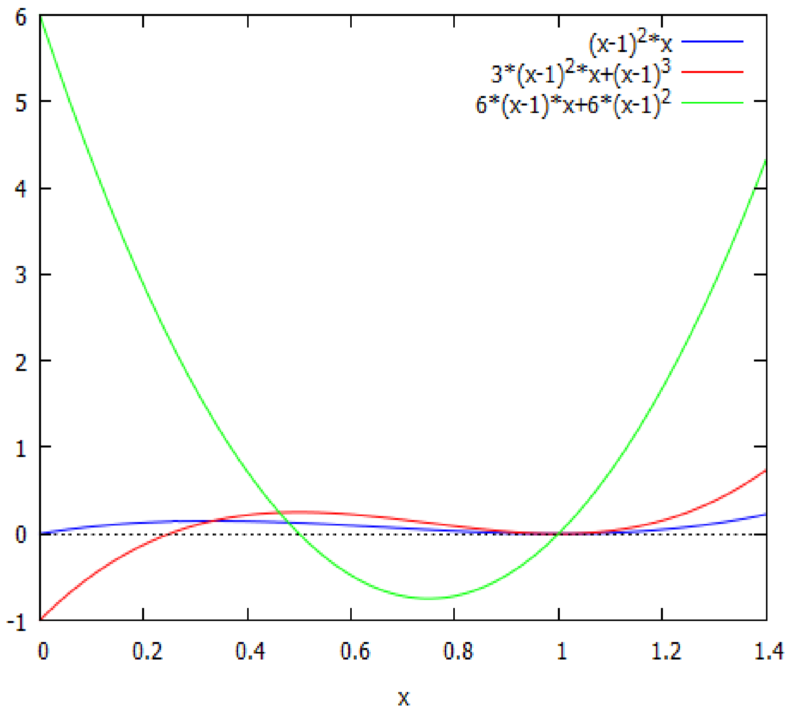

Рис. Графики функции и его производных.

6.3. Исследование динамики производственных функций.

Определение. Производственной функцией называется экономико-математическое выражение, связывающее результаты производственной деятельности с влияющими на эти результаты показателями.

Определение. Для функции $y = f(x)$, имеющей экономическое содержание, область определения $(x \geq 0, y \geq 0)$ называется экономически обусловленной областью определения.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость спроса на данный товар от его цены, называется функцией спроса и обозначается

$D = f(p)$.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость цены товара от спроса на данный товар, называется функцией цен спроса и обозначает

$p = g(D)$.

Приведенная зависимость определяет функцию цены в зависимости от спроса на товар.

Определение. Зависимость предложения S какого-либо товара от его цены p называют функцией предложения $s = f(p)$.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость цены товара от предложения на данный товар называют функцией цен предложения $p = g(S)$.

Применение в экономике.

Пример . Формула сложных процентов имеет вид

$$Q = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad (6.1)$$

где Q_0 - первоначальная сумма вклада в банк, p – процент начисления за определенный период времени (месяц, год), n – количество периодов времени хранения вклада, Q – сумма вклада по истечении n периодов времени. Формулы типа (6.1) используются также в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта). Пусть первоначальный депозит Q_0 помещен в банк под $p = 100\%$ годовых, тогда через год сумма депозита составит $2Q_0$.

Предположим, что через полгода счет закроется с результатом $Q_1 = Q_0\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}Q_0$ и эта сумма будет вновь помещена в качестве депозита в том же банке. В конце года депозит будет составлять Будем уменьшать срок размещения депозита в банке при условии его последующе$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25Q_0$го размещения после изъятия. При ежеквартальном повторении этих операций депозит в конце года составит $Q_4 = Q_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44Q_0$. Если повторять операцию изъятие размещение в течение года сколько угодно раз, то при ежемесячном манипулировании сумма за год составит

$Q_{12} = Q_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61Q_0$; при ежедневном посещении банка

$Q_{365} = Q_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}71$; при ежечасном

$$Q_{8720} = Q_0\left(1+\frac{1}{8720}\right)^{8720} \approx 2{,}718Q_0$$

и т.д. Нетрудно видеть, что последовательность значений возрастания первоначального вклада $\{q_n\} = \{Q_n/Q_0\}$ как раз совпадает с последовательностью, пределом которой является число е при $n \to \infty$ согласно (6.1). Таким образом, доход, который можно получить при непрерывном начислении процентов, может составить за год не более чем

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n - Q_0)\cdot 100\%/Q_n = (e-1)100\% \approx 172\%$$

В общем случае, если p – процент начисления и год разбит на n частей, то через t лет сумма депозита достигнет величины

$$Q = Q_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Где $r = p/100$. Это выражение можно преобразовать:

$$Q = Q_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}$$

Мы можем ввести новую переменную $m = \frac{n}{r}$ при $n \to \infty$ получим $m \to \infty$, или

$$Q = Q_0 \lim_{n\to\infty} Q_0 \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt} = Q_0 e^{rt}$$

Расчеты, выполненные по этой формуле, называют вычислениями по непрерывным процентам.

Пример. Пусть темп инфляции составляет 1% в день. Насколько уменьшится покупательная способность первоначальной суммы через полгода?

Решение. Применение формулы сложных процентов дает

$$Q = Q_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182}$$

Где Q_0 - первоначальная сумма, 182 – число дней в полугодии. Преобразуя это выражение, получаем

$$Q = Q_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-182/100} \approx Q_0/e^{1,82},$$

т.е. инфляция уменьшит покупательную способность первоначальной суммы примерно в 6 раз.

Ключевые слова:

Доход государства, наилучшее значение показателя, оптимальное значение показателя, производительность труда, максимальный прибыл, минимальные издержки, экстремум функции, область определения функции, четность(нечетность) функции, периодичность функции, точки разрыва функции, вертикальные асимптоты, точки пересечения функции с осями координат, интервалы возрастания, убывания функции, интервалы выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба, наклонные асимптоты функции, график функции, область определения функции, область значений функции, достаточное условие возрастания(убывания) функции, первое достаточное условие экстремума, второе достаточное условие экстремума, достаточное условие выпуклости функции, схема исследования функции на экстремум, производственная функция.

Вопросы для контроля:

1. Дайте определение понятию функция.
2. Что называется графиком функции?
3. Перечислите способы построения графиков.
4. Перечислите команды, используемые для построения графиков на плоскости и в пространстве.
5. Для построения каких графиков используются команды plot2d, plot3d.
6. Как построить в одной системе координат несколько графиков функций?
7. Какая схема исследования функции?
8. Как можно построить график по точкам?
9. Какой формат необходимо использовать, чтобы строить график функции в отдельном окне?
10. Перечислите последовательность действий при нахождении экстремума функции.

Задачи для самостоятельного решения:

Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y = x^2 + 4x + 5$ 2. $y = 4x - \frac{x^3}{3}$ 3. $y = \frac{1}{1+x^2}$

4. $\frac{x^2-6x+13}{x-3}$ 5. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$ 6. $y = x^2 e^{-x}$

7. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ 8. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ 9. $y = xe^{-x^2/2}$

10. Зависимость уровня потребления некоторого товара первой необходимости от доходов семьи выражается формулой:

$$y = 22{,}4 - \frac{169}{x+15}$$

Установите уровень насыщения при потреблении указанного товара с неограниченным ростом доходов. (О насыщении потребности говорят, если потребление данного товара перестает увеличиваться при любом увеличении дохода. Достигнутый предел называется уровнем или точкой насыщения.)

11. Исследовать поведение функции спроса $D(p) = \frac{100}{3p+5}$ при увеличении цены.

12. Имея сумму 50000 руб., вкладчик обратился в банк, выплачивающий 5,8% годовых при непрерывном начислении процентов. Найти размер вклада через 5 лет.

13. Даны функции спроса на некоторые товары в зависимости от дохода:

1) $y = \frac{3x}{x+4}$;

2) $y = \frac{12x^2-6x}{x+1}$;

3) $y = \frac{8x^2+16x}{x^2+2}$;

4) $y = \frac{2x-4}{x+3}$

Найти асимптоты этих функций. Указать точки насыщения и группы, к которым принадлежат товары (товары первой, второй необходимости, предметы роскоши).

14. Функция спроса на товар имеет вид:

1) $D(p) = \frac{7-p}{2}$;

2) $D(p) = \frac{100}{p+8} - 3$;

3) $D(p) = 5p^{-2} + 10$;

4) $D(p) = 10e^{-3p^2}$.

Изобразить области определения этих функций.

15. Пусть имеется запас некоторого сырья, составляющий 30 тонн, которого должно хватить на 20 дней. Расход материала должен быть равномерным, т. Е. ежедневно расходуется одинаковое количество сырья. Составить уравнение,

выражающее зависимость неизрасходованного сырья у от количества прошедших дней х.

16. Вычислите значение производной функции $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + \cos(x^2)$ в точке $x = 7$.

Использованная литература:

1.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казан.федер.ун-т, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012. 80 с.

2.Воронцова В.Л., Махмутова Д.И., Опокина Н.А. Профессионально ориентированные задачи по дисциплине «Математический анализ» с применением программы *Maxima* для студентов, обучающихся по специальности «Экономика». Учебно-методическое пособие, Казань: КФУ, 2019 г. – 151 с.

3.Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р.Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун-т, 2009, - 576 с.

4.Высшая математика: Учебник/Л.Т. Ячменев.-М.:ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. -752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

7- МОДУЛЬ. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

7.1. Схема отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Одним из важных приложений производной является использование ее при решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. В процессе решения четко выступают три этапа построения и использования математической модели:

-формализация (составление функции, описанной в условии задачи);

-решение формализованной задачи (решение получившейся математической задачи с помощью производной);

-перевод решения на термины, в которых задана задача (перевод решения задачи с математического на естественный язык).

Приведем решение математической задачи.

Задача.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = -x^2$ на отрезке [–3, 1].

Решение.

Введем исходную функцию $f(x) = -x^2$.

Найдем производную функции $diff(f(x), x)$.

Найдем точки экстремума – решим уравнение $solve(f(x), x)$.

Вычислим значения функции в точках экстремума и на концах заданного отрезка $f(0); f(-3); f(1)$.

Получили значения $f(-3) = -9; f(0) = 0; f(1) = -1$.

Сделаем вывод: наибольшее значение равно 0 при $x = 0$, наименьшее значение равно –9 при $x = -3$.

График функции $f(x) = -x^2$ на отрезке [–3, 1] приведена на рис.7.1.

Итак, решение задачи в системе Maxima реализуется по следующему алгоритму:

Задание функции $f(x)$.

2. Нахождения производной функции $f(x)$.

```
wxplot2d([-x^2], [x,-3,1])$
```

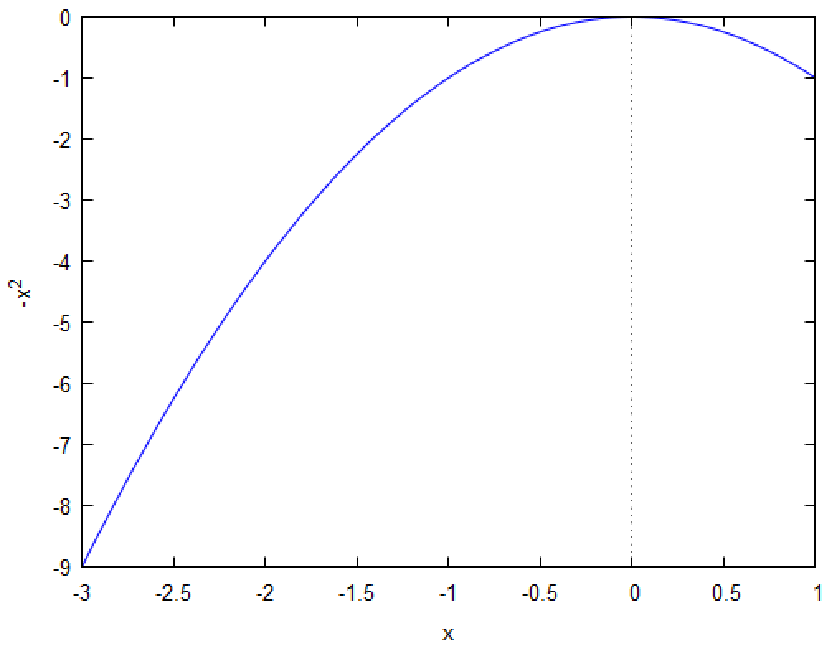

Рис.7.1. График функции $f(x) = -x^2$ на отрезке [–3, 1].

3. Нахождение точек экстремума – нулей производной, решение уравнения $f'(x) = 0$. Выполнение команды solve для производной функции.

4. Вычисление значения функции в критических точках.

5. Анализ результатов.

Благодаря простому алгоритму система позволяет использовать на уроках для решения текстовых задач на наибольшее и наименьшее значение с учетом того, что основные алгоритмы нахождения наибольшего и наименьшего значения с помощью производной на отрезке, интервале и промежутке студентами будет усвоены. Приведем алгоритм решения текстовой задачи.

1. Выявить величину, о наибольшем (наименьшем) значении которой говорится в задаче. Выбрать аргумент (неизвестную величину). Указать интервал изменения аргумента.

2. Выразить величину из пункта 1 как функцию независимой переменной.

3. Найти искомое наибольшее или наименьшее значение функции на заданном интервале или на отрезке.

7.2. Решение задач.

Пример:

Из квадратного листа картона со стороной а нужно сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по краям квадраты и загнув образовавшиеся края. Какова должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

Решение.

Пусть x– искомая высота коробки, причем $x \leq a/2$, иначе коробку нельзя будет сделать. Составим формулу зависимость объема коробки от высоты как формулу объема параллелепипеда, основание которого квадрат со стороной $a - 2x$, и высотой x. То, что верхнего основания нет, не повлияет на формулу:

$$V(x) = (a - 2 \cdot x)^2 \cdot x$$

Для нахождения решения используем Maxima.

Введем формулу как функцию от x в окно ввода

(%i18) V(x):=(a−2·x)^2·x;

(%o18) $V(x) := (a - 2\,x)^2 x$

Найдем производную функции V(x) diff(V(x), x).

Найдем нули производной как функции от x

(%i19) solve(diff(V(x), x), x);

(%o19) $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{2}\right]$

Так как по условию задачи $x \leq \frac{a}{2}$, то решение $x = \frac{a}{6}$

Наибольшее или наименьшее значение функции на некотором отрезке может достигаться как в точках экстремума, так и в точках на концах отрезка. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$.

Нахождение наибольших и наименьших значений функций происходит по следующей схеме.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции, в которых $f''(x_0) = 0$ или не существует.
3. Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее f_{max} и наименьшее f_{min} значения. Это и будут наибольшее и наименьшее значение функции на исследуемом отрезке.
4. Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^2 - 6x$ на отрезке [0, 3].

Аналитический расчёт:

1. $y' = 6x - 6; y'' = 6$.
2. $x_0 = 1$.
3. $y(1) = -3; y(0) = 0; y(3) = 9$.

В точке $x = 1$ наименьшее значение функции, а в точке $x = 3$ — наибольшее.

График функции $y = 3x^2 - 6x$ на отрезке [0, 3] приведена на рис. 7.2.

```
wxplot2d([3·x^2−6·x], [x,0,3])$
```

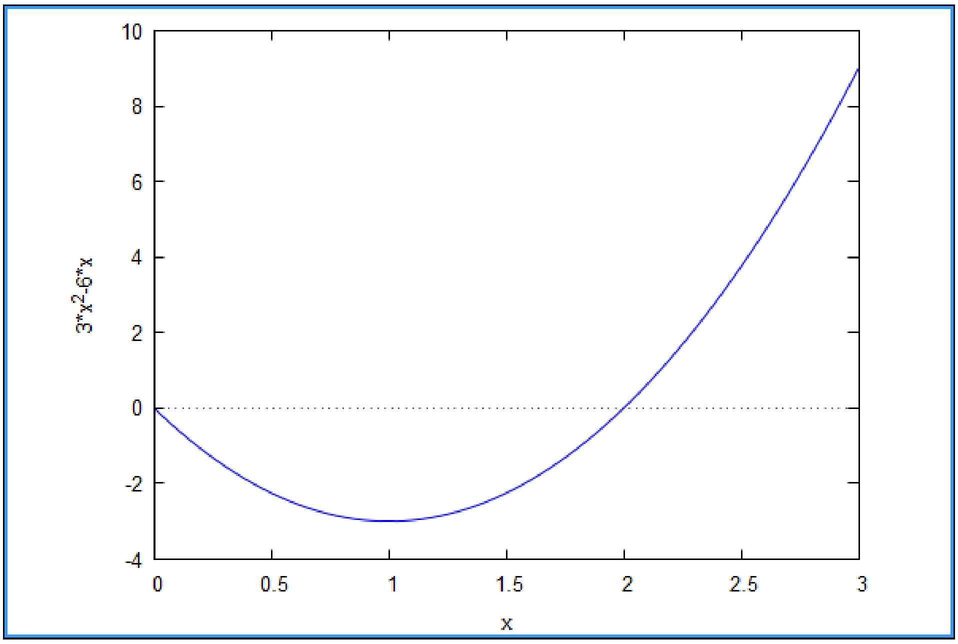

Рис.7.2. График функции $y = 3x^2 - 6x$ на отрезке [0, 3] .

Расчёт с использованием **Maxima**:

Находим критические точки исследуемой функции

(%i20) f(x):=3·x^2−6·x;

(%o20) $f(x) := 3x^2 - 6\,x$

(%i21) define(df(x),diff(f(x),x));

(%o21) $df(x) := 6x - 6$

(%i22) solve(df(x)=0,x);

(%o22) $[x = 1]$

Результат расчёта — список, включающий один элемент ($[x = 1]$). Создаём новый список, включающий граничные значений и критические точки:

(%i23) L:[%o22[1],x=0,x=3];

(L) $[\mathrm{x} = 1, \mathrm{x} = 0, \mathrm{x} = 3]$

Применяем функцию $f(x)$ к каждому элементу списка L :

(%i24) map(f,L);

(%o24) $[3x^2 - 6x = -3, 3x^2 - 6x = 0, 3x^2 - 6x = 9]$

Результат — наибольшие и наименьшие значения — находим в списке полученных значений.

Ключевые слова:

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, формализация, решение формализованной задачи, перевод решения задачи с математического на естественный язык, значение функции в точках экстремума, значение функции на концах заданного отрезка, наибольшее значение функции, наименьшее значение функции, нахождение точек экстремума, вычисление значения функции в критических точках, геометрический смысл первой производной, геометрический смысл второй производной.

Вопросы для контроля:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите операции, выполнимые для производной. На основании чего мы можем их выполнить?
3. Какие команды используются для вычисления производной в программе Maxima?
4. Объясните геометрический смысл первой производной?
5. Что означает геометрический смысл второй производной?
6. Расскажите последовательность отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке?

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решеткой длиной 120м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

2. В треугольник с основанием а и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определите его площадь.

3. Из квадратного листа картона со стороной а вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезанного квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

4. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10см. При каком большем основании ее площадь будет наибольшей?

5. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения равен 18м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

6. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определите его размеры.

7. Из круга вырезан сектор, содержащий угол α, а затем свертывается в конус. При каком угле α объем конуса будет наибольшим.

Использованная литература:

1.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казан.федер.ун-т, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012. 80 с.

2. Перепечко С.Н., Воропаев А.Н. Основы работы в системах компьютерной алгебры. Сборник задач. Петрозаводск, 2013. 64 с.

3.Высшая математика: Учебник/Л.Т. Ячменев.-М.:ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. -752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

4.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник/М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: ИНФРА-М, 2011. -472 с. http://www/znanium.com/bookread.php?book=221082

5.Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р.Ш. Марданова.-Казань: Казан. Гос. Ун-т, 2009, - 576 с.

6.Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Сборник научных трудов/Казарян М.Л., Музаев И.Д., Гиоева Е.Г. – М.:НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 150 с.: 60x90 1.16 ISBN 978-5-16-106772-7 (online) – Режим доступа: http ://znanium.com/catalog/product/972756

8- МОДУЛЬ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В MAXIMA

8.1. Вычисление неопределенных интегралов.

Определение. Пусть на интервале (a, b) задана функция $f(x)$. Если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$, где $x \in (a;\ b)$, то функция $F(x)$ называется первообразной функцией $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$.

Геометрический смысл – неопределенный интеграл есть семейство интегральных кривых, получаемых при непрерывном параллельном переносе одной из них вдоль оси Oy.

Всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную величину C.

Определение. Совокупность первообразных $F(x) + C$(где C- произвольная постоянная) функции $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется неопределенным интегралом функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением. Нахождение неопределенного интеграла называется интегрированием функции. Функция $f(x)$ называется интегрируемой в интервале, если в этом интервале для нее существует $\int f(x)dx$.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ вычисляется с помощью команды $integrate(f, x)$, где f –подынтегральная функция, x – переменная интегрирования.

Например

$$\boldsymbol{integrate(sin(x), x)};$$

При наборе этой команды на экране Maxima будем иметь

(%i25) integrate(sin(x),x);

(%o25) $-cos(x)$

Эту же команду можно выполнить из вклада меню **Анализ - пункт Интегрировать.** В разделе «Определенное интегрирование» не будем вставить флажка.

Пример(рис.8.1):

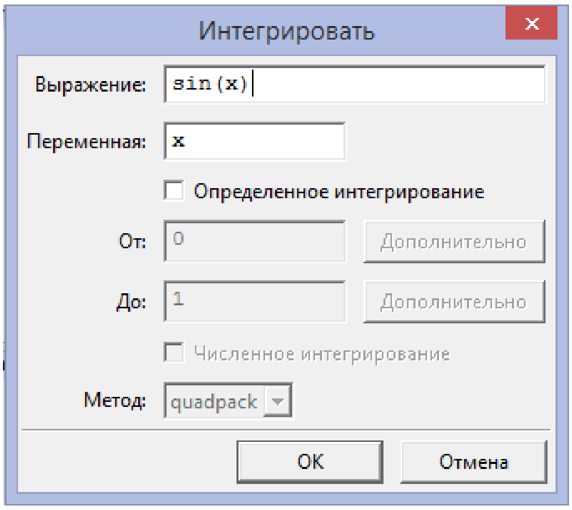

Рис.8.1. Диалоговое окно «интегрировать».

При нажатии Ок приходим к вышеприведенному результату.

8.2. Вычисление определенных интегралов.

Определение.

Предположим, что функция $f(x)$ – произвольная, ограниченная на отрезке [a; b] (то есть положительная или отрицательная, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва 1-го рода).

1. Разобьем отрезок [a; b] на n частей точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$
2. Длины отрезков, на которые разбивается отрезок [a;b], обозначим через Δx_k: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.
3. На каждом из полученных отрезков Δx_k возьмем произвольную точку $t_k, x_k \le t_k \le x_{k+1}$ и подсчитаем значение функции $f(t_k)$ в этих точках.
4. Составим сумму произведений функции $f(t_k)$ на длины соответствующих частичных отрезков Δx_k. Обозначим ее через

5. $S_n = f(t_0)\Delta x_0 + \ f(t_0)\Delta x_0 + \ldots + \ f(t_0)\Delta x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_0)\Delta x_k$

Определение. Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} f(t_0)\Delta x_k$ называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

6. Рассмотрим множество интегральных сумм S_n для данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Обозначим длину наибольшего из отрезков разбиения $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ через $\lambda = max \Delta x_k$ и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$.
7. Определение. Если существует такое число J, что при любых способах разбиения и при любом выборе точет t_k величина S_nстремиться к числу J при $\lambda \to 0$,то это число называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается:

$$J = \int_a^b f(x)dx.$$

где a – нижняя граница(нижный предел) интегрирования; b – верхняя граница(верхнкй предел) интегрирования.

Геометрическое истолькование определенного интеграла: определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции(прямоуголников), то есть

$$S_{aABb} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Как видно, при нахождении значения определенного интеграла помимо функции и переменной интегрирования указываются пределы интегрирования. В качестве пределов интегрирования могут фигурировать бесконечность (inf) и минус бесконечность (minf).

Синтаксис: integrate(функция, переменная, нижний предел, верхний предел);

Таким образом, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в команде $integrate$ добавляются пределы интегрирования, например

$$integrate(f(x), x, 0, a);$$

или во вкладке главного меню **Анализ - пункт Интегрировать**. Выведется окно для ввода выражения и уточнения пределов, как показано на рисунке 8.1.

На этом диалоговом окне еще на разделе «Определенное интегрирование» не поставлена флажка. После поставки флажка будет доступны разделы «От» и «До», которые заполняются. Заполненное окно приведена на рисунке(8.2).

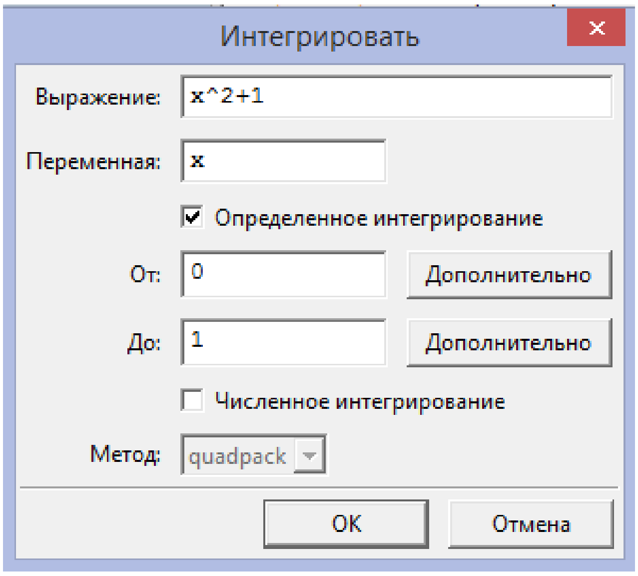

Рис.8.2. Диалоговое окно с флажком

И его результат на экране Maxima:

(%i26) integrate(x^2+1,x,0,1);

(%o26) $\frac{4}{3}$

В случаях, когда интеграл не выражается через элементарные функции, используются методы численного интегрирования. Для этого в том же окне нужно установить флажок в окошечке численное интегрирование и выбрать один из методов «romberg» или «quadpack» (предпочтительнее первый). В приведенном ниже примере вычислено значение интеграла $\int_0^1 sinx^2dx$.

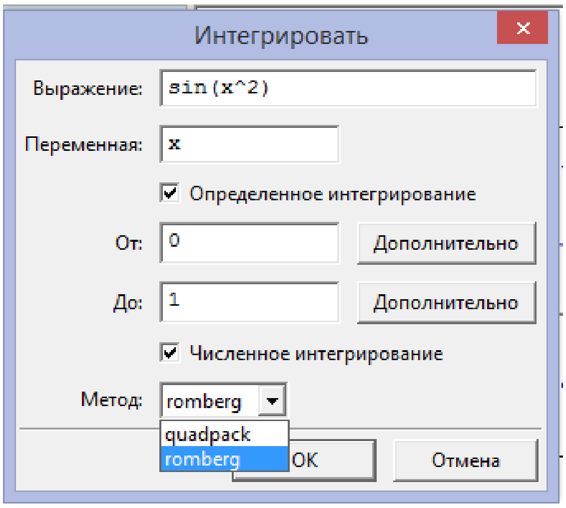

Рис.8.3. Численное интегрирование.

Нажатие Ок приводит к результату

(%i19) romberg(sin(x^2), x, 0, 1);

(%o19) 0.3102688408316687

Можно и символьно решить интеграл, подобнее интегралу

$$\int_0^a (x^2 + a)dx$$

(%i27) integrate(x^2+a,x,0,a);

(%o27) $\frac{a^3 3+a^2}{3}$

Но иногда знак подынтегрального уравнения будет зависеть от значения, подобнее интегралу

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Подынтегральное выражение не зависит от знака параметра a, но значение интеграла — зависит, так как параметр a может быть записан или как верхний предел или как нижний предел.

При решении подобных интегралов в Maxima задается запрос.

(%i28)

integrate(x^2·sqrt(a^2−x^2),x,0,a);Is positive, negative or zero?

p;

(%o28) $\frac{\pi a^4}{16}$

На вопрос Maxima Is a positive, negative, or zero? мы ответили p (positive) и получили положительное значение. В случае отрицательного знака у параметра a значение интеграла (%o52) будет отрицательное, а численное значение интеграла по модулю будет тем же.

8.3. Интегралы, зависящие от параметра. Ограничения для параметров.

Если требуется вычислить интеграл, зависящий от параметра, то его значение может зависеть от знака этого параметра или каких-либо других ограничений. Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx,$$

который, как известно из математического анализа, сходится при a>0 и расходится при a<0. Если вычислить его сразу, то получится:

(%i29) integrate(exp(−a·x),x,0,inf);Is positive, negative or zero?

p;

(%o29) $\frac{1}{a}$

Результат аналитического интегрирования

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = \lim_{x\to\infty} -\frac{e^{(-ax)}-1}{a}$$

Для получения явного аналитического результата вычислений следует сделать какие-либо предположения о значении параметров, то есть наложить на них ограничения. Это можно сделать при помощи команды assume(expr1), где expr1 – неравенство. Описание наложенных ограничений параметра a можно вызвать командой properties(a).

```
(%i6) assume (a > 1)$ integrate (x··a/(x+1)··(5/2), x, 0, inf);
      Is a an integer ?no;
      Is 2 a-1 positive, negative or zero?neg;
```

(%o6) $\mathrm{beta}\left(\frac{3}{2}-a, a+1\right)$

```
(%i7) properties(a);
(%o7) [database info, a>1]
```

Вернемся к вычислению интеграла с параметром $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$, которое следует производить в таком порядке:

```
(%i9) assume(a>0); integrate(exp(-a·x),x,0,inf);
(%o8) [redundant]
```

(%o9) $\frac{1}{a}$

Отменить принятые ограничения на значения параметров можно, используя функцию forget.

Пример:

```
(%i11) assume(n+1>0); integrate((a+b)·x^(n+1),x);
(%o10) [n>-1]
```

(%o11) $\frac{(b+a)\,x^{n+2}}{n+2}$

Отмена ограничения влечёт за собой вопрос о значениях параметров подинтегральной функции:

```
(%i31)    forget(n+1>0);integrate((a+b)·x^(n+1),x);
    (%o30) [n > 1]
    Is n+1 equal to 1?
```

yes;

(%o31) $(b+a)\log(x)$

Результат, который получен, совершенно другой!

Пример. Найти $\int x^2 \cdot \sin(ax)\,dx$ и результат проверить дифференцированием

```
(%i14) f:x^2·sin(a·x);
```

(f) $x^2 \sin(a\,x)$

```
(%i15) integrate(f,x);
```

(%o15) $\dfrac{2\,a\,x\sin(a\,x)+(2-a^2\,x^2)\cos(a\,x)}{a^3}$

```
(%i18) factor(diff(%o15,x));
```

(%o18) $x^2 \sin(a\,x)$

В приведенном решении команда (%i14) присваивает переменной f значение под интегральной функции, команда (%i15) вычисляет интеграл от f по переменной x и команда (%i18) производит два действия внутренняя функция diff вычисляет производную от полученного интеграла (%o15), а внешняя factor упрощает найденное выражение производной. Полученный результат (%o18) совпадает со значением f, что подтверждает правильность вычислений.

8.4. Геометрическое приложение определенного интеграла. Площадь плоской фигуры.

Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)\, f(x) \geq 0, x \in [a,b]),$ то площадь плоской фигуры, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a, x = b$ и осью Ox (рис.8.4), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

причем $S \geq 0$.

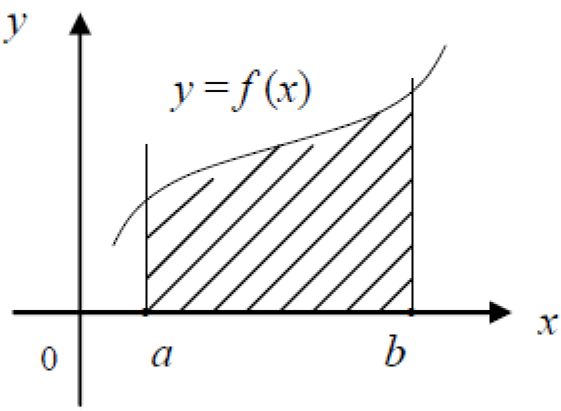

Рис. 8.4. площадь плоской фигуры, ограниченной $y = f(x)$ $f(x) \geq 0$, прямыми $x = a, x = b$ и осью Ox.

Если $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$)(рис.8.5), то в этом случае

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx \ .$$

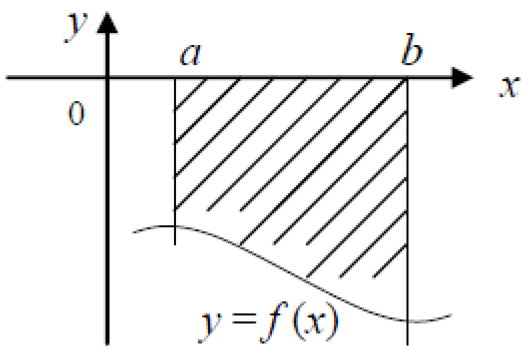

Рис. 8.5. площадь плоской фигуры, ограниченной $y = f(x)$ $f(x) \leq 0$, прямыми $x = a, x = b$ и осью Ox.

Если площадь области располагается между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, которые пересекаются в точках $[a, b]$, то в этом случае(рис.8.6)

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

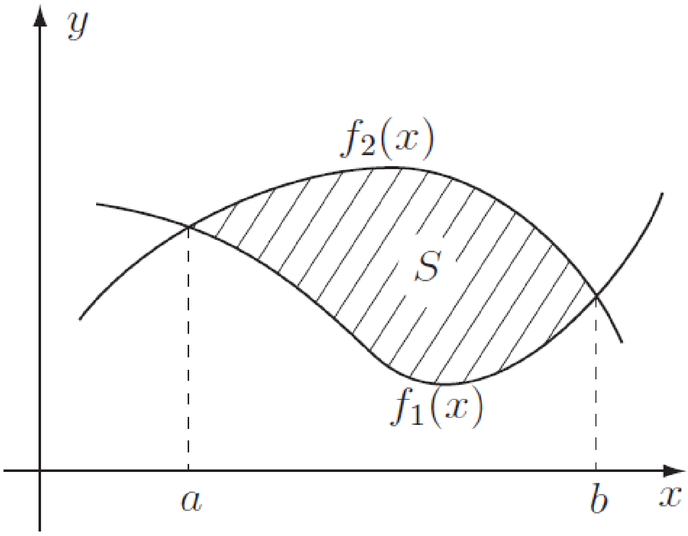

Рис.8.6. площадь плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми

$$y = f_1(x) \text{ и } y = f_2(x),$$

Примеры:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = 3x - x^2 \text{ и } y = x^2 - x$$

Решение: Зададим функции и построим их графики

(%i32) f(x):=3·x−x^2;

(%o32) $f(x) := 3x - x^2$

(%i33) g(x):=x^2−x;

(%o33) $g(x) := x^2 - x$

(%i34) plot2d([f(x),g(x)],[x,−1,3])$

Из графика(рис.8.7) видно, что функции пересекаются в двух точках, и область является простой, т.е. ее не нужно делить на подобласти(рис.8.6).

Найдем точки пересечения кривых, для этого решим уравнение:

(%i7) solve([f(x)=g(x)],[x]);

(%o7) [0,2]

Теперь составим и вычислим определенный интеграл, результат которого и есть площадь данной фигуры:

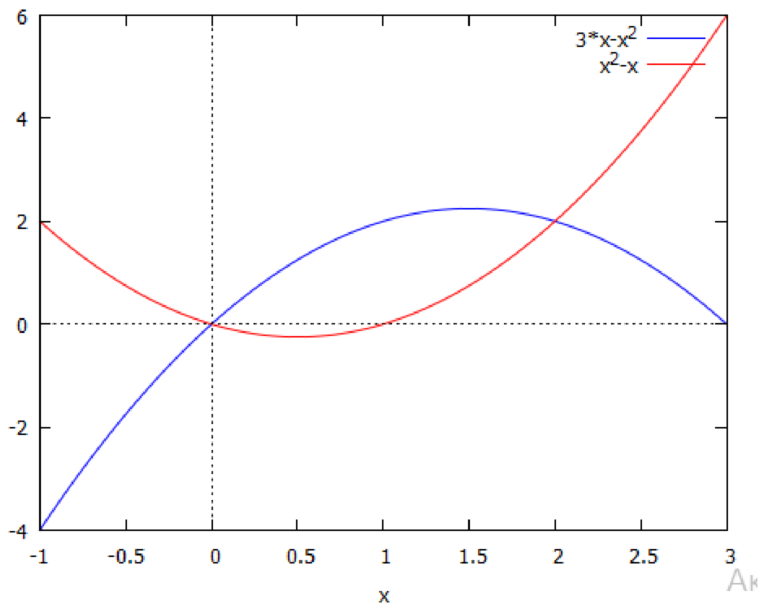

Рис.8.7. График функций $y = 3x - x^2$ и $y = x^2 - x$

(%i35) integrate(f(x)−g(x),x,0,2);

(%o35) $\frac{8}{3}$

Ответ: Площадь искомой фигуры равна 8/3.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = x^2, y = 2 - x^2$$

Решение: Построим графики этих функций

(%i17) plot2d([x^2,2−x^2], [x,−5,5], [y,−20,20],
[plot_format, gnuplot])$

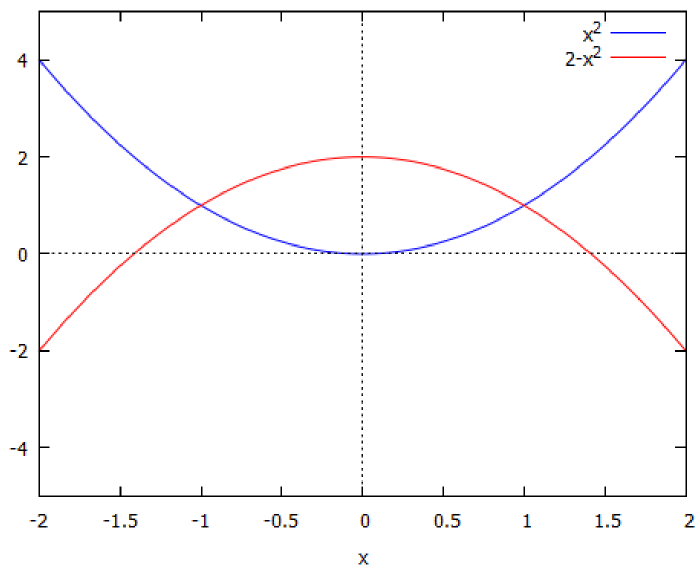

Рис.8.8. Графики функций $y = x^2$, $y = 2 - x^2$

Найдем точки пересечения кривых, для этого решим уравнение:

(%i19) solve([x^2=2−x^2],[x]);

(%o19) $[-1,1]$

Вычислим интеграл средствами Maxima:

(%i21) integrate(2−x^2−x^2,x,−1,1);

(%o21) $\frac{8}{3}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = \frac{4}{x}, y = 0, y = 4, x = 0, x = 4.$$

Решение: Зададим функции $y = \frac{4}{x}, y = 0, y = 4$

(%i38) f1(x):=4/x; f2(x):=0; f3(x):=4;

(%o36) $f1(x) := \frac{4}{x}$

(%o37) $\mathrm{f2}(x) := 0$

(%o38) $\mathrm{f3}(x) := 4$

Вертикальные прямые $x = 0, x = 4$ в Maxima можно построить только, представив их уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = t \end{cases} \text{и} \begin{cases} x = 0, \\ y = t. \end{cases}$$

(%i40) r1(t):=4; r2(t):=t;

(%o39) $r1(t) := 4$

(%o40) $r2(t) :=$

(%i42) h1(t):=0; h2(t):=t;

(%o41) $h1(t) := 0$

(%o42) $h2(t) :=$t

Теперь построим графики всех этих функций(рис.8.9):

(%i16) plot2d([f1(x),f2(x),f3(x)],[x,−5,5],[y,−5,5]);

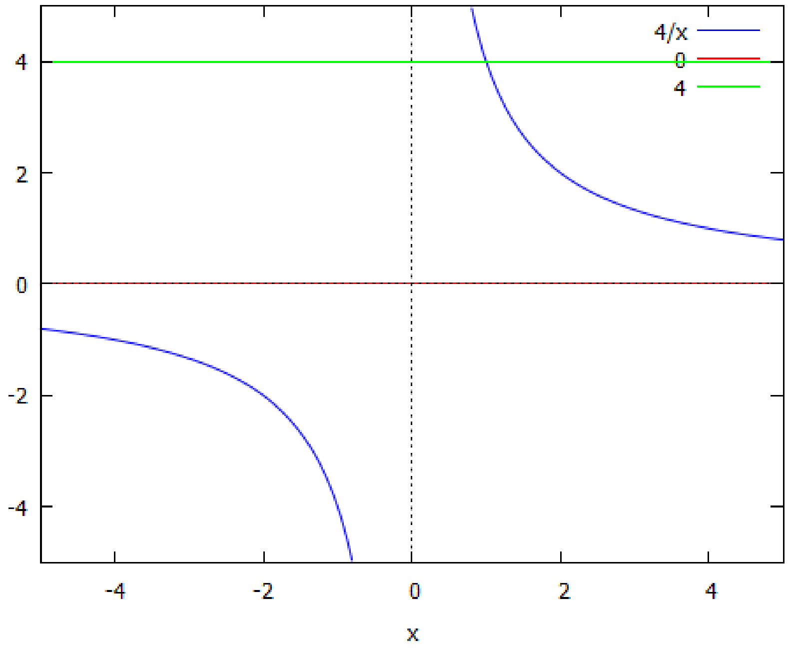

Рис.8.9. Графики функций f1(x):=4/x; f2(x):=0; f3(x):=4;

Чтобы вычислить площадь интересующей нас фигуры, необходимо поделить область на две части(рис.8.10).

Первая фигура является прямоугольником, ее площадь равна .$S_1 = 4 \cdot 1 = 4$.

Площадь второй фигуры вычисляем с помощью определенного интеграла:

(%i43) integrate(4/x,x,1,4);

(%o43) $4 + \log(4)$

Ответ: Площадь искомой фигуры равна $(4 + \ln(4))$.

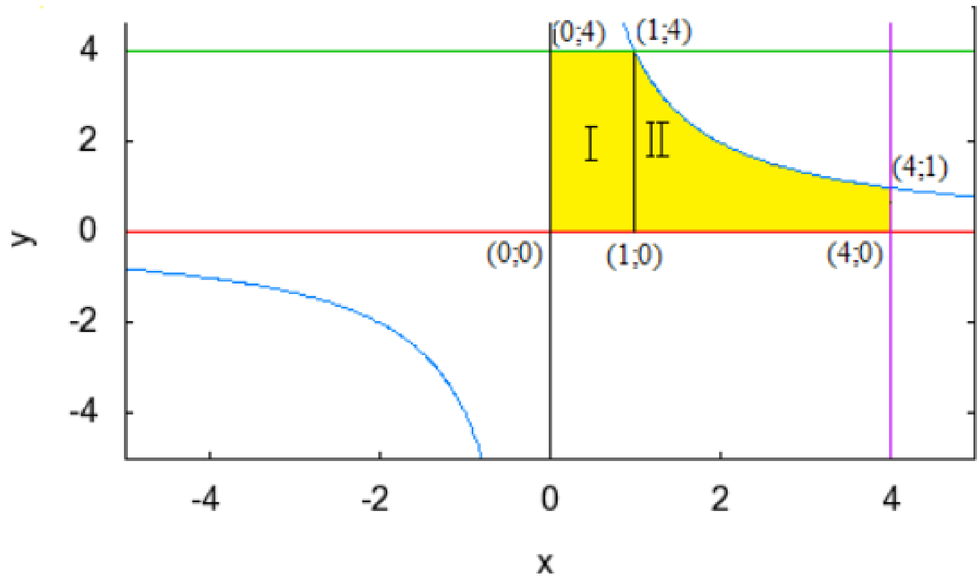

Рис.8.9. Выделение части интегрирования.

Длина дуги

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)(a \leq x \leq b)$ и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в промежутке $[a, b]$, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Для решения подобных задач в Maxima следует выполнить следующие действия:

1. Построить кривую.
2. Вычислить производные функции.
3. В зависимости от способа задания кривой, составить и вычислить определенный интеграл.
4. Записать ответ.

Пример

Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos x)$, отнесенной прямыми

$$x = 0, x = \frac{\pi}{6}$$

Решение:

Зададим функцию и построим ее график(рис.8.11).

(%i44) f(x):=log(cos(x));

(%o44) $\mathrm{f}(x) := \log(cos(x))$

(%i45) wxplot2d([f(x)],[x,0,%pi/6])$

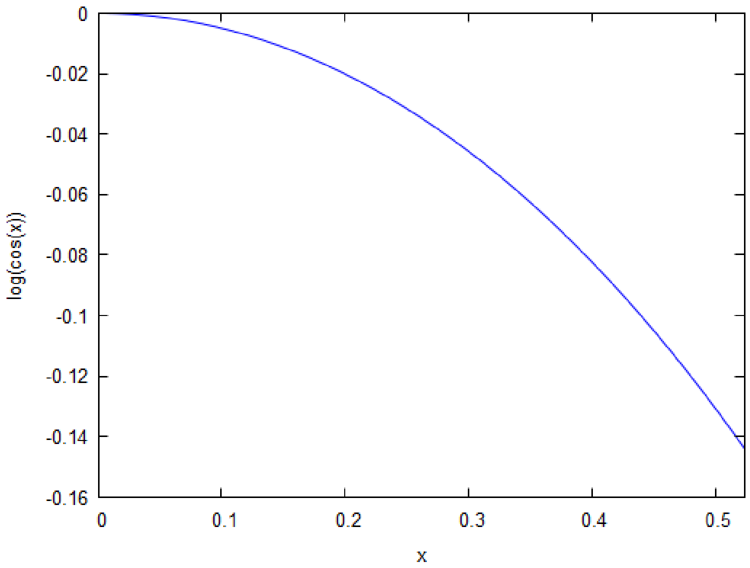

Рис.8.11. График интегрирования функции $y = \ln(\cos x)$.

Вычислим первую производную от данной функции:

(%i45) h(x):=diff(f(x),x,1);

(%o45) $h(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%i46) h(x);

(%o46) $-\frac{sin(x)}{cos(x)}$

Теперь вычислим определенный интеграл:

(%i47) q(x):=sqrt(1+h(x)^2);

(%o47) $q(x) := \sqrt{1+h(x)^2}$

(%i48) integrate(q(x),x,0,%pi/6);

Is $\cos(x)$ positive or negative?

При вычислении интеграла на мониторе появляется вопрос о знаке функции $\cos x$. Интегрирование мы проводим на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, а здесь $\cos x > 0$, значить, набираем *positive*.

(%i48) integrate(q(x),x,0,%pi/6);

Is $\cos(x)$ positive or negative?

pozitive;*is* $cos(x)$ positive or negative?

positive;

(%o48) $\operatorname{asinh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

В ответе мы получили $\operatorname{asinh}(\frac{1}{\sqrt{3}})$ или $arsh(\frac{1}{\sqrt{3}})$, которая называется ареа-синус. Это обратная функция к гиперболическому синусу.
Ответ: длина дуги кривой $y = \ln(\cos x), x = 0, x = \frac{\pi}{6}$ равна $arsh(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Ключевые слова:

Неопределенный интеграл, геометрический смысл неопределенного интеграла, подынтегральная функция, переменная интегрирования, $integrate(sin(x), x)$, *«Анализ-Интегрировать»*, определенное интегрирование, геометрический смысл определенного интеграла, интегральная сумма, нижняя граница интегрирования, верхняя граница интегрирования, площадь криволинейной трапеции, предел интегрирования, *integrate(функция, переменная, нижний предел, верхний предел),* численное интегрирование, интегралы, зависящие от параметра, геометрическое приложение определенного интеграла, площадь плоской фигуры, длина дуги.

Вопросы для контроля:

1.Как в программе wxMaxima можно решать задачи на нахождение неопределенных интегралов?

2.Раскройте вычисление определенных интегралов в программе wxMaxima.

3. Как при помощи определенного интеграла определить площадь фигуры.

Задания для самостоятельной работы:

Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{5x^8 + 6}{x^4} dx$; 2. $\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right) dx$; 3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$

4. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 3x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 5. $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right) dx$; 6. $\int \left(5^x + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx$;

7) $\int \frac{5+3tg^2x}{sin^2x}dx$; 8) $\int \left(\frac{4}{9+x^2}-\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$; 9) $\int \frac{dx}{x^2-49}$;

10) $\int \frac{dx}{x^2+16}$; 11) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx$; 12) $\int \frac{7}{x^2+7}dx$.

Интегрируйте рациональные функции:

1) $\int \frac{x^3}{x-3}dx$; 2) $\int \frac{x^4}{x^2+25}dx$; 3) $\int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)}dx$; 4) $\int \frac{2x+9}{x^2+x+2}dx$;

5) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$; 6) $\int \frac{5x-1}{2x^2+x-3}dx$; 7) $\int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)}dx$;

8) $\int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$.

Интегрируйте иррациональные интегралы:

1) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$; 2) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$; 3) $\int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; 5) $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$.

Интегрируйте определенные интегралы:

1. $\int_2^4 (x^3+x)\,dx$. 2. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}$. 4. $\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

5. $\int_{-5}^{2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$. 6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. 7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. 8. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$.

9. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. 10. $\int_{\pi}^{0} x\cos x\,dx$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

1. $y=(x+2)^3$, $y=12x+8$.

2. $y=(x-2)^2$, $y^2=x-1$.

3. $y=3+2x-x^2$, $y=4x+2$.

4. $y=x^3$, $y^2=x^2$.

5. $y=x^4$, $y=2x^2-3$.

6. $y=2x-x^2$, $y=0$.

7. $y = 3x + 18 - x^2, \quad y = 0.$

8. $y = x^2 + 1, \quad y = 2.$

9. $y = x^2, \quad y = x + 2.$

10. $y = x^2 - x, \quad y = 3x.$

Использованная литература:

1.Воронцова В.Л., Махмутова Д.И., Опокина Н.А. Профессионально ориентированные задачи по дисциплине «Математический анализ» с применением программы *Maxima* для студентов, обучающихся по специальности «Экономика». Учебно-методическое пособие, Казань: КФУ, 2019 г. – 151 с.

2.Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. Казань: Казанский университет, 2013. – 61с.

3.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник/М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: ИНФРА-М, 2011. -472 с. http://www/znanium.com/bookread.php?book=221082

4.Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р.Ш. Марданова.-Казань: Казан. Гос. Ун-т, 2009, - 576 с.

5.Высшая математика: Учебник/Л.Т. Ячменев.-М.:ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. -752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

9- МОДУЛЬ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

9.1. Постановка задачи.

Последовательность n значений $x_1, x_2, \ldots x_n$, полученных в результате наблюдения (эксперимента) некоторого процесса, мы будем рассматривать как совокупность значений распределенных независимых случайных величин представляющих собой n экземпляров одного и того же признака X .

Система Maxima дает возможность рассчитать основные статистические величины, с помощью которых описываются наиболее общие свойства эмпирических данных. К основным описательным статистикам относят среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, медиану, моду, максимальное и минимальное значение, размах вариации и квартили.

Так, например, средняя величина вычисляется по формуле:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Где n – число наблюдений(экспериментов).

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Самым простым способом расчета статистических описательных статистик является использование палитры "*Statistics*" *(Статистика*)(рис.9.1). Его можно активизировать через "*View-статистика*".

Панель содержит ряд инструментов, сгруппированных в четыре группы.

Статистические показатели (описательные статистики):

-*mean* (средняя арифметическая);

-*median* (медиана);

-*variance* (дисперсия);

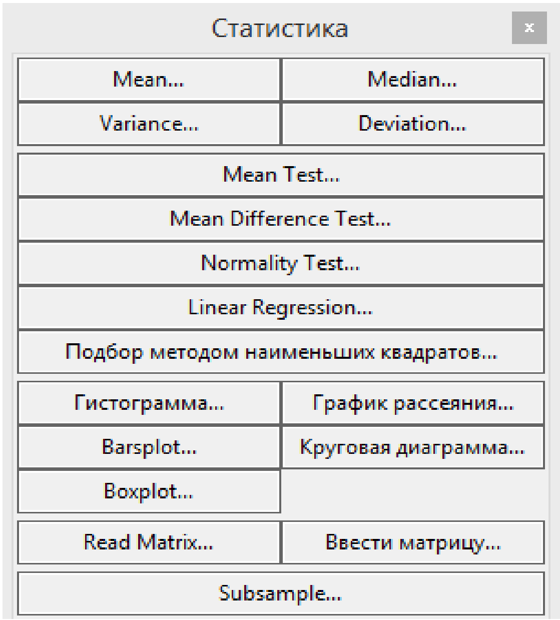

Рис.9.1. Палитра «Статистика».

-*deviation* (среднее квадратичное отклонение).

Например, если нажимаем на кнопку Mean…, то на экране появиться диалоговое окно, и его заполняем(рис.9.2).

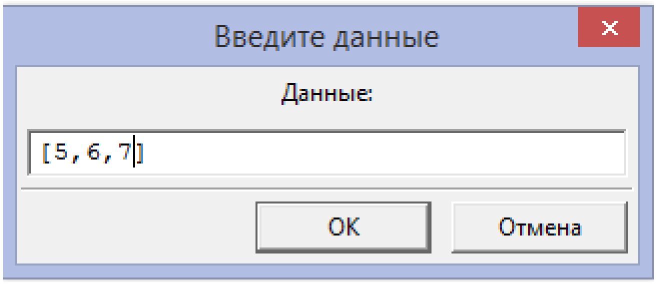

Рис.9.2. Заполнение диалогового окна числами.

На экране Maxima появится команда и ответ:

(%i7) mean([5,6,7]);

(%o7) 6

Если нажимаем на кнопку Variance…, то на экране появиться диалоговое окно, подобные рис.9.2, если ввести те же данные, которые имеется на этой рисунке, то на экран выводится:

(%i25) var([5,6,7]);

(%o25) $\frac{2}{3}$

Можно в экране образовать массив и вычислить его среднее:

(%i1) x:[5,6,7,8];

(x) [5,6,7,8]

(%i3) float(mean(x));

(%o3) 6.5

Вычисление медианы

(%i78) mean([2,2,3,3,4,4,5]);

(%o78) $\frac{23}{7}$

(%i79) float(%);

(%o79) 3.285714285714286

Вычисление выборочной дисперции

(%i82) var([2,2,3,3,4,4,5]);

(%o82) $\frac{52}{49}$

(%i83) float(%);

(%o83) 1.061224489795918

Вычисление среднеквадратического отклонения

(%i84) std([2,2,3,3,4,4,5]);

(%o84) $\frac{2\sqrt{13}}{7}$

(%i85) float(%);

(%o85) 1.030157507275425

Корреляционный анализ определяет степень связи между переменными.

Метод экстраполяции – это один из главных способов прогноза, который основывается на прогнозировании событий, учитывая анализ показателей, например, которые имели место в прошлые годы (при этом, не меньше чем за 5 – 8 лет).

Пусть нам даны некоторые данные из эксперимента в следующей таблице:

Таблица 9.1.

X	1	2	3	4	5
Y	1	2	3	5	7

Сформируем массив xy:

```
(%i1)     xy:[1,2,3,5,7];
(xy)      [1,2,3,5,7]
```

С помощью команды plot2d эти точки будем расставлять в координатной плоскости(рис.9.3).

```
(%i6)   plot2d([discrete, xy], [x,0,6],[style, points]);
```

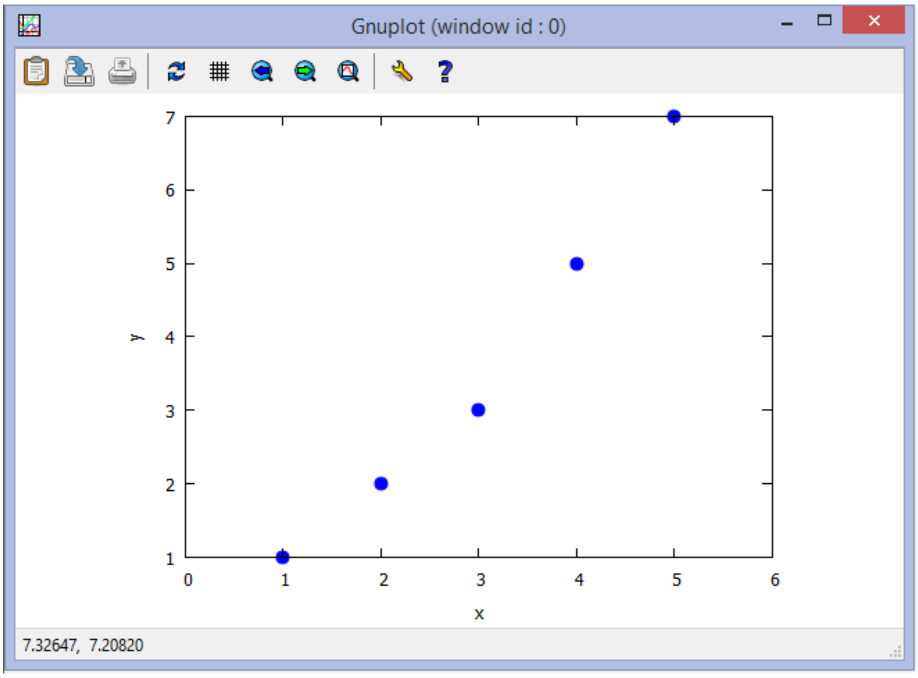

Рис.9.3. Расстановка значений таблицы 1 в координатной плоскости.

Как видим, точки лежать поближе к прямой линии $y = ax + b$.

Метод подбора функций - один из распространенных методов экстраполяции. Главным этапом экстраполяции является выбор оптимального вида функции, описывающей эмпирический ряд. Для этого существует множество методов. Один из самый распространённых из них является метод наименьших квадратов. С помощью метода наименьших квадратов находиться уравнение регрессии, который проходит из близкой расстоянии экспериментальных точек.

9.2. Суть метода и графическая иллюстрация.

В таких случаях задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных a и b принимает наименьшее значение.

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$$

То есть, при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. В этом вся суть метода наименьших квадратов.

Составляется и решается система из двух уравнений с двумя неизвестными. Находим частные производные функции

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$$

По переменным a и b приравниваем эти производные к нулю.

$$\begin{cases}\frac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0\\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=0\\ -2\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-(ax_i+b)\big)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}b=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_ii\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений любым методом(например методом подстановка или методом Крамера) и получаем формулы для нахождения коэффициентов по методу наименьших квадратов(МНК).

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

При данных a и b функция

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

принимает наименьшее значение.

Пакет программ MAXIMA содержит команду, реализующий метод наименьших квадратов. Для того, чтобы решить ту же задачу при помощи компьютера, следует сначала ввести координаты точек на плоскости: записать ***load (lsquares);***

Потом сформулируем матрицу из экспериментальных данных, приведенных выше.

M : matrix ([1,1], [2,2], [3,3], [4,5], [5,7]) и нажимаем Shift+Enter.

Компьютер выведет на экран и запомнит 5 заданных точек в виде матрицы из двух столбцов.

(%i49) M:matrix([1,1],[2,2],[3,3],[4,5],[5,7]);

(M) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Далее введем команды

lsquares_estimates **(M, [x,y], y = A*x+B, [A,B])**и нажмем Shift+Enter. Компьютер выведет на экран ответ.

Процесс на экране Maxima будет иметь вид:

(%i52) load(lsquares);

(%o52) C:\maxima – 5.42.2\share\maxima\5.42.2\share\lsquares\lsquares.mac

(%i53) M:matrix([1,1],[2,2],[3,3],[4,5],[5,7]);

$$(M)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i57) lsquares_estimates(M,[x,y],y=A·x+B,[A,B]);

$$(\%o57)\quad [[A=\frac{3}{2}, B=-\frac{9}{10}]]$$

Таким образом, коэффициенты уравнения $y = ax + b$ имеет вид:

$$a = \frac{3}{2}; b = -9/10$$

Теперь можно рисовать прямую линию с экспери-ментальными точками в Maxima.

На экране Maxima пишем команду, используя найденные коэффициенты уравнения:

plot2d([[discrete, xy], 3/2*x-9/10], [x,0,6],[style, points, lines]);

После нажатия Shift+Enter на экране появиться график(рис.9.4).

Как видим, точки лежать как минимум ближе к линии.

Если экспериментальные точки лежать ближе к другим функциям, можно применить функцию ***lsquares_estimates*.**

Пакет Maxima включает мощный модуль для линейного и нелинейного оценивания параметров различных моделей с использованием метода наименьших квадратов — пакет lsquares. Основная функция пакета lsqares — это функция lsquares_estimates. Синтаксис вызова:

lsquares_estimates(D,x,e,a) или lsquares_estimates(D,x,e,a,initial = L,tol = t)

Функция предназначена для оценки параметров, лучше всего соответствующих уравнению e в переменных x и a по набору данных D, которые определяются методом методом наименьших квадратов. Функция lsquares_estimates сначала пытается отыскать точное решение, и если это не удаётся, ищет приблизительное решение. Возвращаемое значение — список вида [a = ... , b = ... , c = ...]. Элементы списка обеспечивают минимум среднеквадратичной ошибки. Данные D должны быть матрицей. Каждый ряд — одна запись или один случай, каждый столбец соответствует значениям некоторой переменной.

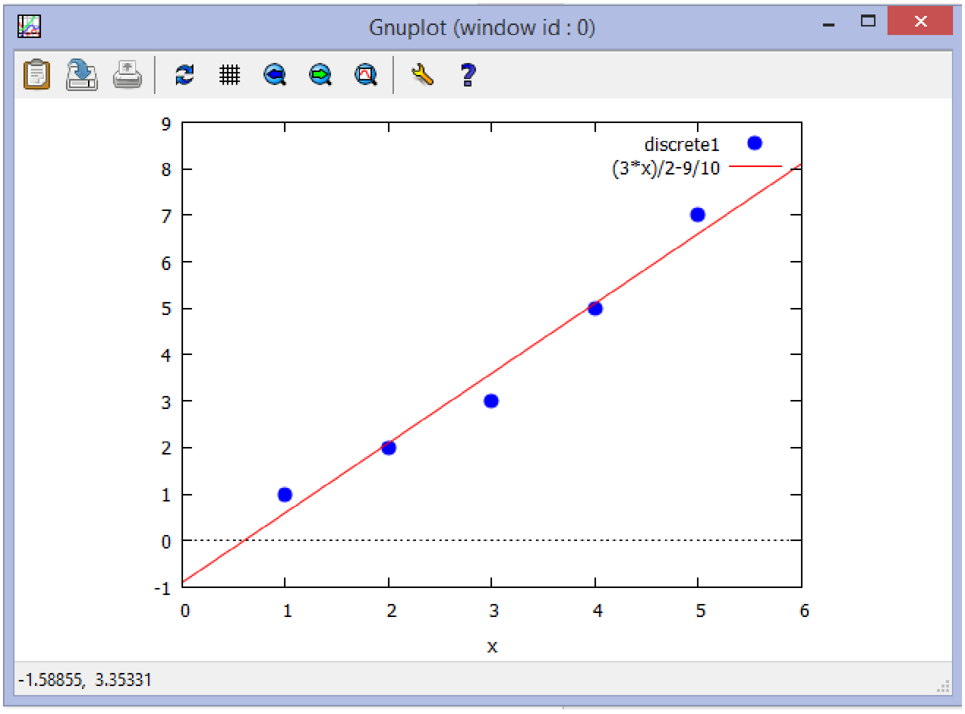

Рис.9.4. График линейной функции с экспериментальными точками.

Например, экспериментальные точки будет иметь вид, как приведено в таблице 9.2.

Таблица 9.2.

X	1	2	3	4	5
Y	1	4	10	17	24

Сформулируем матрицу

(%i17) N:matrix ([1,1], [2,4], [3,10], [4,17], [5,24]) ;

(N) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 10 \\ 4 & 17 \\ 5 & 24 \end{pmatrix}$$

Вызываем функцию *lsquares_estimates*

(%i19) lsquares_estimates (N, [x,y], y = A·x^2+B, [A,B]);

(%o19) $[[\frac{33}{34}, \frac{89}{170}]]$

Вызывая эту функцию, мы нашли коэффициенты уравнения $y = A \cdot x^2 + B$

$$A = \frac{33}{34},\ B = \frac{89}{170}.$$

Теперь используя эти данные, составим график(рис.9.5).

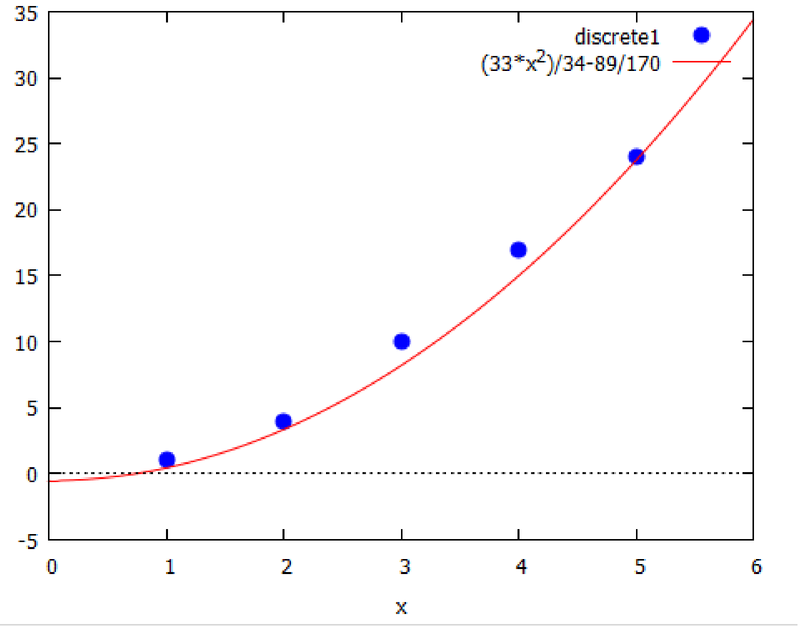

Рис.9.5. График показательной функции с экспериментальными точками.

Обращение к методу наименьших квадратов можно и через меню Maxima “View-статистика”. В диалоговом окне имеется пункт «Подбор методом наименьших квадратов…»(рис.9.1).

После выбора этого пункта на экран выходит диалоговое окно ввода данных, который заполняем данными таблицы 9.2(рис.9.6).

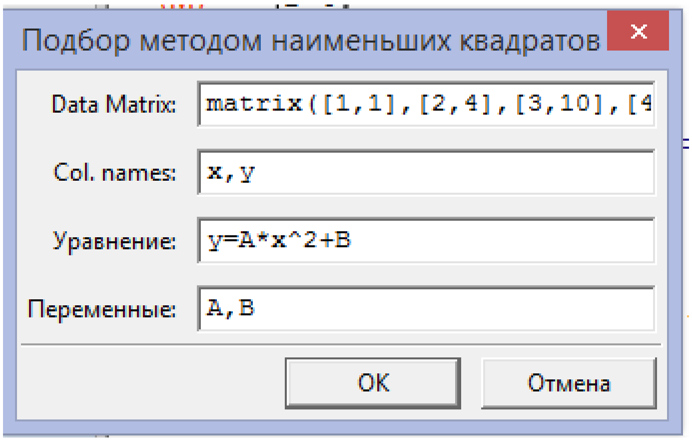

Рис.9.6. Диалоговое окно «Подбор методом наименьших квадратов».

После нажатия кнопки Ок на экран выходит решение задачи:

(%i93) lsquares_estimates(matrix([1,1],[2,4],[3,10],[4,17],[5,24]), [x,y], y=A·x^2+B, [A,B], iprint=[−1,0]);

(%o93) $[[A=\frac{33}{34}, B=\frac{89}{170}]]$

(%i94) float(%);

(%o94) [[0.9705882352941176,0.5235294117647059]]

Коэффициенты и оценка статистической значимости для простейшей линейной регрессии могут оцениваться при помощи функции *simple_linear_regression* из пакета *stats*. Функция вычисляет коэффициенты и параметры линейной регрессии $y = a_0 + a_1 x$ (т.е. только простейшей).

Рассматриваемая функция выводит большое количество статистических параметров:

1. '*model*: полученное уравнение регрессии;
2. '*means*: среднее;
3. '*variances*: дисперсии обоих переменных;
4. '*correlation*: коэффициент корреляции;
5. '*adc:* коэффициент детерминации;
6. '*a_estimation*: оценка параметра a ;
7. '*a_conf_int*: доверительный интервал для a ;

8. $'b_e stimation$: оценка параметра b;
9. '*b_conf_int*: доверительный интервал для b;
10. '*hypotheses:* нулевая и альтернативная гипотеза относительно параметра b ;
11. '*statistic*: статистические характеристики выборки, использованные для проверки нулевой гипотезы;
12. '*distribution*: распределение выборки;
13. '*p_value*: величина вероятности для проверки гипотезы о статистической значимости b ;
14. '*v_estimation*: оценка остаточной дисперсии;
15. '*v_conf_int*: доверительный интервал для остаточной дисперсии
16. '*cond_mean_conf_int*: доверительный интервал для среднего;
17. '*new_pred_conf_int:* доверительный интервал для нового предсказания;
18. '*residuals:* список, содержащий остатки.

На экране Maxima сформулируем матрицу входных данных:

(%i8) M : matrix ([1,1], [2,2], [3,3], [4,5], [5,7]) ;

(M) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Вызываем функцию simple_linear_regression с параметрами:

z:simple_linear_regression(M,conflevel=0.99);

На экране Maxima результат выполнения будет иметь вид:

(%i58) z:simple_linear_regression(M,conflevel=0.99);

$$
\text{(z)} \quad \begin{pmatrix} \text{SIMPLE LINEAR REGRESSION} \\ 1.5x - 0.8999999999999999 \\ \text{correlation} = 0.9847982464479191 \\ v_{estimation} = 0.2333333333333334 \\ \text{b}_{\text{conf}_{\text{int}}} = [0.6077863661228362, 2.392213633877164] \\ \text{H0: b} = 0\text{, H1: b \# 0} \\ \text{statistik} = 9.819805060619656 \\ \text{distribution} = [student_t, 3] \\ p_{value} 0.002244820403552117 \end{pmatrix}
$$

Ключевые слова:

Случайная величина, наблюдение некоторого процесса, статистическая величина, эмпирические данные, средняя, дисперсия, стандартное отклонение, медиана, мода, размах вариации, квартиль, *"Viev – статистика", mean, median, variance, deviation,* корреляционный анализ, экстраполяция, эмпирический ряд, уравнение регрессии, метод наименьших квадратов, *lsquares_estimates(),* оценка статистической значимости, *simple_linear_regression.*

Вопросы для контроля:

1. Какими путями можно определить статистические показатели экспериментальных данных в Maxima?
2. В чем заключается суть метода наименьших квадратов?
3. Какова особенность оценок, полученных с помощью метода наименьших квадратов?
4. В каких случаях можно применять метод наименьших квадратов?
5. Как можно оценить погрешность параметров зависимости, аппроксимированной прямой линией, если эти параметры получены методом наименьших квадратов?
6. Как можно пользоваться диалоговым окном при использовании метода наименьших квадратов?

Задачи для самостоятельного решения.

Приведены некоторые данные из эксперимента в следующих таблицах:

1. Для значений строки Y нижеприведенных таблиц вычислить статистические показатели.

2. Определить вид уравнения регрессии и используя метода наименьших квадратов определить коэффициенты уравнений.

1.

X	1	2	3	4	5
Y	1	5	9	15	26

2.

X	1	2	3	4	5
Y	5	7	9	11	14

3.

X	1	2	3	4	5
Y	5	7	9	11	14

4.

X	1	2	3	4	5
Y	4	5	6	7	8

5.

X	1	2	3	4	5
Y	7	9	11	13	15

6.

X	1	2	3	4	5
Y	5	8	11	14	18

7.

X	1	2	3	4	5
Y	1	5	9	15	26

8.

X	1	2	3	4	5
Y	1	4	8	15	24

9.

X	1	2	3	4	5
Y	1	4	8	15	24

10.

X	1	2	3	4	5
Y	2	4	8	16	32

11.

X	1	2	3	4	5
Y	2	4	7	9	12

12.

X	1	2	3	4	5
Y	9	7	5	3	1

Использованная литература:

1.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казан.федер.ун-т, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012. 80 с.

2. Чичкарев, Е. А. Компьютерная математика с Maxima: руководство для школьников и студентов / Е. А. Чичкарев. — Москва : ALT Linux, 2012. — 384 с.

3.Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Сборник научных трудов/Казарян М.Л., Музаев И.Д., Гиоева Е.Г. – М.:НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 150 с.: 60x90 1.16 ISBN 978-5-16-106772-7 (online) – Режим доступа: http ://znanium.com/catalog/product/972756

4.Солодовников, А.С. Математика в экономике [Текст]: учеб. / А.С. Солодовников [и др.]. – Ч. 2. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2013. – 560 с.

5.Акишин Б.А., Галабурдин А.В. Экономико-математические расчеты на персональном компьютере. Ч.2. Эконометрические модели. Учебное пособие. Ростов-на-Дону: РАС ЮРГУЭС, 2008.-60 с.

6. Учебное пособие в сети «Интернет»: File:///C:/Windows/system32/config/systemprofile/Downloads/MalakaevM.S..Sekaeva.L.R..Tjuleneva.O.N..pdf

ГЛОССАРИЙ

Арифметические операции в Maxima

обозначения арифметических операций в Maxima не отличаются от классического представления, используются те же математические знаки: + – * /. Возведение в степень можно обозначать тремя способами: ^ , ^^ , **.

Аргумент функции

- это переменная x, от значений которой зависят значения функции *y =f(x).*

Асимптота

- прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность

Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при x → ∞, уравнение которой $y = kx + b$, если существуют пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b.$$

В случае $k = 0$ асимптота называется горизонтальной, ее уравнение

$$y = b = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Вариационный ряд

- это выборка, в которой значения исследуемого признака расположены в порядке их возрастания.

Возрастающая функция

- это функция $y = f(x)$ для которой, для любых Значений $x_1, x_2 \in D(f)$,таких что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

Вторая производная

- это производная от первой производной некоторой функции $y = f(x)$.

Вычисление второй производной средствами Maxima

Вторая производная функции f(x) вычисляется с помощью оператора *diff(f(x), x, 2);*. Здесь 2 – это порядок производной.

Выборочная дисперсия

мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания

Выборочное среднее

- это среднее результатов наблюдений некоторого признака. Обозначение: $\bar{x}$

средняя величина вычисляется по формуле:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Где n – число наблюдений(экспериментов).

Вычисление среднего значения в Maxima

mean([<список>]);

Среднее квадратическое отклонение

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Вычисление среднего квадратического отклонения в Maxima

mean_deviation, median_deviation

Гаусса метод

- это метод последовательного исключения переменных, заключающийся в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно находят значения неизвестных

Вычисление системы алгебраических уравнений методом Гаусса

Введем расширенную матрицу A

(%i1) A:matrix([1,2,−8,14],[2,4,−7,13],[5,3,4,−2]);

(A) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 14 \\ 2 & 4 & 7 & 13 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к треугольному виду

(%i4) *echelon*(A);

(%o4) $$\begin{pmatrix}1 & 2 & 8 & 14\\ 0 & 1 & \frac{44}{7} & \frac{72}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

решим, получим искомые значения

(%i6) *solve*([x+2·y−8·z=14,y−(44/7)·z=72/7,z=−5/3],[x,y,z]);

(%o6) $$[[\frac{22}{21},\frac{4}{21},\frac{5}{3}]]$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен площади криволинейной трапеции

Горизонтальная асимптота

- это прямая $x = a$ графика функции $y = f(x)$ если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$

График функции y=f(x)

-это множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, где каждая прямая, параллельная оси оу, пересекает это множество точек не более чем в одной точке.

Детерминант матрицы

- это определитель квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

$$detA = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Вычисление определителя детерминанта матрицы в Maxima:

determinant – нахождение определителя матрицы:

--> a: matrix([15,2], [−7,10]);

(a) $$\begin{pmatrix}15 & 2\\ -7 & 10\end{pmatrix}$$

```
(%i57)	determinant(a);
(%o57)	164
```

Дисперсия

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Дисперсия в Maxima вычисляется с помощью функции

```
var(matrix);
```

Достаточное условие вогнутости функции f(x)

Если $f(x)$ имеет вторую производную на интервале (a, b) и $f''(x) \geq 0$ на этом интервале, то $f(x)$ вогнутая на нем.

Достаточное условие выпуклости функции $f(x)$

Если $f(x)$ имеет вторую производную на интервале (a, b) и $f''(x) \leq 0$ на этом интервале, то $f(x)$ выпуклая на нем.

Достаточное условие интегрируемости

Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке [a; b], то она интегрируема на этом отрезке

Достаточное условие существования экстремума (первое)

- это условие, позволяющее проверить, имеет ли функция экстремум в критических точках с помощью первой производной:

Производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку, а именно, максимум (max), если с «+» на «–»; минимум (min), если с «–» на «+».

Достаточное условие существования экстремума (второе)

- это условие, позволяющее проверить, имеет ли функция экстремум в критических точках с помощью второй производной:

Если $f''(x)$ в критической точке больше нуля: $f''(x)$, то в критической точке функция $f(x)$ имеет минимум, если $f''(x)$ в критической точке меньше нуля: $f''(x) < 0$, то в критической точке функция имеет максимум.

Достаточное условие точки перегиба (первое)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет вторую производную в окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0), и при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0– точка перегиба.

Достаточное условие точки перегиба (второе)

Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно, и $f''(x) > 0$, $f'''(x) \neq 0$, то x_0– точка перегиба функции.

Корреляционный анализ

- раздел математической статистики, занимающийся исследованием степени тесноты зависимости между переменными.

Коэффициент корреляции

- это числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин X и Y, выражающая их взаимосвязь. Обозначение: $\rho(x, y)$.

Коэффициенты регрессии

- это коэффициенты при независимых переменных в уравнении регрессии.

Крамера формулы

- это формулы для нахождения неизвестных совместной и определенной системы $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ– определитель матрицы системы Δ_k- определитель, получающийся из Δ заменой k–го столбца на столбец свободных членов системы.

Линейная регрессия

- это корреляционная зависимость между переменными X и Y, при которой регрессия X и Y описывается линейными уравнениями.

Математическая статистика

- раздел математики, посвященный математическим сборам сбора, систематизации и обработки статистических данных для научных и практических целей.

Maxima

— свободная система компьютерной алгебры, написанная на языке Common Lisp. Maxima имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высочайшей степенью переносимости: может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных и вплоть до самых мощных.

Название переменных в Maxima

Название переменных в Maxima принято писать латинскими буквами, причём прописные буквы необходимо отличать от строчных. В имени переменной(идентификаторе) могут присутствовать также цифры, символ подчёркивания «_» и знак процента «%».

Матрица

Числовой матрицей в Maxima размера nxn называется квадратная таблица чисел, содержащая n строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называется ее элементами. Через a_{ij} обозначается элемент, находящийся в i –ой строке и j –ой столбце.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

В Maxima определены прямоугольные матрицы. Основной способ создания матриц — использования функции matrix.

Синтаксис вызова: matrix(row1,... ,rown).

Каждая строка — список выражений, все строки одинаковой длины. На множестве матриц определены операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Пример определения матрицы:

```
(%i61)	M:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);
```

(M) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Метод наименьших квадратов

задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных a и b принимает наименьшее значение.

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

То есть, при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. В этом вся суть метода наименьших квадратов.

Составляется и решается система из двух уравнений с двумя неизвестными. Находим частные производные функции

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

По переменным a и b приравниваем эти производные к нулю.

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} b = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений любым методом(например методом подстановка или методом Крамера) и получаем формулы для нахождения коэффициентов по методу наименьших квадратов(МНК).

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

При данных a и b функция $F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$ принимает наименьшее значение.

Реализация метода наименьших квадратов в Maxima

Пакет программ MAXIMA содержит команду, реализующий метод наименьших квадратов. Для того, чтобы решить ту же задачу при помощи компьютера, следует сначала ввести координаты точек на плоскости: записать *load (lsquares);*

Потом сформулируем матрицу из экспериментальных данных, приведенных выше.

M : matrix ([1,1], [2,2], [3,3], [4,5], [5,7]) и нажимаем Shift+Enter.

Компьютер выведет на экран и запомнит 5 заданных точек в виде матрицы из двух столбцов.

(%i1) M:matrix([1,1], [2,2], [3,3], [4,5], [5,7]) ;

(M) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Далее введем команды

lsquares_estimates **(M, [x,y], y = A*x+B, [A,B])**и нажмем Shift+Enter. Компьютер выведет на экран ответ.

Процесс на экране Maxima будет иметь вид:

```
(%i7) load (lsquares);
(%o7) C:\maxima-5.42.2\share\maxima\5.42.2\share\lsquares\lsquares.mac
```

```
(%i8) M : matrix ( [1,1], [2,2], [3,3], [4,5], [5,7]) ;
```

$$(M)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) lsquares_estimates (M, [x,y], y = A·x+B, [A,B]);
```

$$(\%o9)\quad [[A=\frac{3}{2}, B=-\frac{9}{10}]]$$

Таким образом, коэффициенты уравнения $y = ax + b$ имеет вид:

$a = \frac{3}{2}; b = -9/10$

Неопределенный интеграл функции $f(x)$

Если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx,$ где $x \in (a;\ b),$ то функция $F(x)$ называется первообразной функцией $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$. Совокупность первообразных $F(x) + C$ (где C - произвольная постоянная) функции $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется неопределенным интегралом функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция определения неопределенного интеграла в Maxima:

integrate(f(x),x);

Неявная функция.

- это функция, определенная на множестве D(f), когда каждому значению $x \in D(f)$ соответствует значение функции y, удовлетворяющее некоторому (одному и тому же) уравнению F(x,y)=0.

Область определения функции y=f(x)

- это множество тех значений аргумента x , при которых функция y имеет смысл. Обозначение: D(f)

Область значений функции y=f(x)

- это множество значений y, принимаемых функцией y=f(x) для всех x из области определения $D(f)$, т. е. при $x \in D(f)$. Обозначение: E(f)

Определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

- это предел интегральных сумм при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx стремиться к нулю. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Функция определения определенного интеграла в Maxima:

integrate(функция, переменная, нижний предел, верхный предел);

Предел последовательности $\{y_n\}$

Число *A* называется **пределом последовательности** $\{y_n\}$, если разность $y_n - A = \alpha_n$ является бесконечно малой величиной. Другими словами, число A является пределом последовательности $\{y_n\}$, если переменную $\{y_n\}$ можно представить в виде $y_n = A + \alpha_n$ где α_n – некоторая бесконечно малая величина. Символически такое утверждение записывают в виде

$$\lim_{n \to \infty} y_n = A$$

Говорят также, что переменная y_n стремится к числу A:

$$y_n \to A \text{ при } n \to \infty$$

Предел функции y=f(x)

Число A называется пределом функции f(x) при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\delta > 0$, найдется такое положительное число δ > 0, что для всех x, удовлетворяющих условию 0 < |x − a| < δ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \delta$|.

Предел функции обозначается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Предел функции f (x) при x → a вычисляется в Maxima с помощью оператора

limit(f (x), x, a);

Присвоение значения переменным

Задать переменную можно с помощью знака ":". Например

(%i23) a:2;
(a) 2

Построение графика явной функции в Maxima

График функции *y=f(x)* на отрезке *[a, b]* можно построить с помощью функции *plot2d(f(x), [x,a,b]*, опции) или *plot2d(f(x), [x,a,b], [y,c,d]*, опции). Опции не обязательны, однако, для изменения свойств графика их нужно задавать. Параметр [y,c,d] можно не задавать, тогда высота графика выбирается по умолчанию.

Построение графика неявной функции в Maxima

Для построения графика функции, заданной неявно используется команда:

implicit_plot (выражение, [x,a,b],[y,c,d])

implicit_plot ([выражение1, выражение2, ...], [x,a,b],[y,c,d])

Построение трехмерных графиков

Для построения трехмерных графиков также можно использовать диалоговое окно «*Plot3d…*» или ручной ввод с клавиатуры. В общем виде команда построения графика выглядит так:

plot3d([f1(x,y),f2(x,y),f3(x,y)], [x,a,b], [y,c,d], [grid,n,k]);

где *f1(x,y), f2(x,y), f3(x,y)* – функции, a, b– отрезок по оси X, c,d – отрезок по Y, *[grid,n,k]* – сетка разбиения поверхности на n отрезков по вертикальной и на k – по горизонтальной плоскостям.

Построение графика функции в полярных координатах

Для построения надо определить связь между полярными радиусом r и углом φ, а также использовать опцию gnuplot set polar:

(%i1)

r(ph):=sin(4*ph);

(%i2)

plot2d([r(ph)],[ph,0,2*%pi],[x,-1,1],[y,-1,1],[gnuplot_preamble,"set polar"]);

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ на число α называется такая матрица $B = (b)_{mxn}$, в которой $b = \alpha \cdot a_{ij} (i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$. Кратко пишут $B = A \cdot \alpha$ или $B = \alpha \cdot A$.

Произведение матрицы на матрицу

Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ на матрицу $B = (b)_{mxn}$ справа(или матрицы B на матрицу A слева) называется такая матрица

$\mathrm{C} = (\mathrm{c})_{mxn}$, в которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$.

Производная функции

— понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке. Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

Производная в Maxima находится с помощью функции

Diff(f(x),x,n); где n- порядок производной.

Регрессия

- это зависимость математического ожидания (среднего значения) случайной переменной от значения другой случайной переменной или других случайных переменных.

Регрессионный анализ

- это раздел математической статистики, занимающейся исследованием вида корреляционной зависимости между переменными.

Системы компьютерной алгебры (СКА, англ. computer algebra system, CAS)

— это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме.

Сумма двух матриц

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{mxn}$ и $B = (b)_{mxn}$ называется такая матрица $C = (c_{ij})_{mxn}$, в которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$. Кратко записывают $C = A + B$.

Транспонирование матрицы

Транспонированием матрицы $A = (a_{ij})_{mxn}$ называется такое ее преобразование, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров и порядком следования элементов. Матрица, полученная транспонированием матрицы A, называется транспонированной и обозначается A′. Таким образом, $A' = (a'_{ij})_{mxn}$, где $a'_{ji} = a_{ij,}$ $i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n.$

Транспонирование матрицы в Maxima

Transpose(<матрица>);

Функция

-это правило, которое каждому числу x из некоторого множества D ставит в соответствие одно и только одно число y из множества E. Обозначение: $y = f(x)$где x- независимая переменная, называемая аргументом ; D-область определения функции; D-область значений функции.

Вычисление значения пользовательской функции

Пользователь может задать собственные функции. Для этого сначала указывается название функции, в скобках перечисляются названия аргументов, после знаков := (двоеточие и равно) следует описание функции.

После задания пользовательская функция вызывается точно так, как и встроенные функции **Maxima.**

(%i17) f(x):=x²;

(%o17) $(f(x)) := x^2$

(%i18) f(6);

(%o18) 36

Функция решения уравнений с одной переменной

solve([уравнение],[переменная])

Функция решения системы уравнений

solve([уравнение1], [уравнение2],…, [переменная1, [переменная2],…)

Функция упрощения выражений

ratsimp(выражение)

Функция раскрытия скобок

expand(выражение)

Функция приведения матрицы к треугольному виду

echelon(<квадратная матрица>);

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Основная литература:

1.Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. Казань: Казанский университет, 2012. – 57с.

2.Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima:для студентов, обучающихся по специальности «социология»: учебно-методическое пособие/[Д.Ф. Абзалилов, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова]; Казан.федер.ун-т, Ин-т математики и механики, Каф. Общ. Математики. Казань:[КФУ], 2012.

3.Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Сборник научных трудов/Казарян М.Л., Музаев И.Д., Гиоева Е.Г. – М.:НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 150 с.: 60x90 1.16 ISBN 978-5-16-106772-7 (online) – Режим доступа: http ://znanium.com/catalog/product/972756

4.Методическое пособие по изучению математического пакета Maxima: http://kit.znu.edu.ua/iLec/9sem/CAB/LIT/maxima2-met1.pdf

5.Высшая математика: Учебник/Л.Т. Ячменев.-М.:ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. -752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

6.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник/М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: ИНФРА-М, 2011. -472 с. http://www/znanium.com/bookread.php?book=221082

Дополнительная литература:

1.Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р.Ш. Марданова.-Казань: Казан. Гос. Ун-т, 2009, - 576 с.

2. Математика: Учебное пособие/Н.А. Березина, Е.Л. Максина.-М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2013.-175 с. //
http://www/znanium.com/bookread.php?book=369492

3.Высшая математика: Практикум/И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова.- М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2013.-160 с. // http://www/znanium.com/bookread.php?book=368074
5. Чичкарев, Е. А. Компьютерная математика с Maxima: руководство для школьников и студентов / Е. А. Чичкарев. — Москва : ALT Linux, 2012. — 384 с.
6. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2016 – 909 с.
7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: Учебно-справочное пособие / под общ. ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2014. – 724 с.
8. Солодовников, А.С. Математика в экономике [Текст]: учеб. / А.С. Солодовников [и др.]. – Ч. 2. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2013. – 560 с.
9. Акишин, Б. А. Решение математических задач с помощью пакета Maxima: учебное пособие / Б. А. Акишин, Л. В. Черкесова, А. В. Галабурдин — Ростов–на–Дону : Издательский центр ДГТУ, 2015. — 100 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины(модуля)

Руководство к решению задач – file:///Windows/system32/config/systemprofile/Downloads/book_new_style.pdf

Установка программы – http://maxima.sourceforge.net/ru/index.html

Учебное пособие – File:///C:/Windows/system32/config/systemprofile/Downloads/MalakaevM.S..Sekaeva.L.R..Tjuleneva.O.N..pdf