

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika –matematika fakulteti

“Fizika” kafedrasi

5440100 - “Fizika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr darajasini olish uchun

Baratova Maxliyo Ilhom qizining

“Boze-Eynshteyn kondensatida tarqaluvchi to’lqinlar” mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko’rildi va himoyaga

ruxsat berildi”

Kafedra mudiri __ __ Sh.Sh. Fayziyev

“ ____ ” ____ 2019 y.

Ilmiy rahbar: ____ Sh.Sh. Fayziyev

“ ____ ” ____ 2019 y.

Taqrizchi: ____ D.E. Hayitov

“ ____ ” ____ 2019 y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani _____ dots. M.I. Daminov

“ ____ ” ____ 2019 y.

Buxoro-2019y.

Mundarija

Kirish.	3
I- BOB. BOZE -EYNSHTEYN GAZINING ASOSIY XUSUSIYATLARI	8
1.1 Boze - Eynshteyn ideal gazining holat tenglamasi	9
1.2 Tashqi maydonlar ta'siridagi Boze - Eynshteyn gazining muvozanat sharti	21
1.3 Kuchli o'zaro ta'sirlashuvchi zarralardan iborat Boze -Eynshteynining xossalari	27
I bobning xulosasi.	35
II - BOB. BOZE - EYNSHTEYN KONDENSATIDA TARQALUVCHI TO'LQINLAR	36
2.1 Boze - Eynshteyn kondensatida yuzaga keluvchi kollektiv harakatlar	36
2.2 Boze - Eynshteyn kondensatida tarqaluvchi nochizig'iy tovush to'lqinlari	41
2.3 Boze - Eynshteyn kondensatini tavsiflovchi nochizig'iy to'lqin funksiya	54
II- bobning xulosasi.	63
Xotima.	64
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.	65

KIRISH.

“Yoshlarimizning mustaqil fikrlaydigan, yuksak intellektual va ma’naviy salohiyatga ega bo’lib, dunyo miqyosida o’z tengdoshlariga hech qaysi sohada bo’sh kelmaydigan insonlar bo’lib kamol topishi, baxtli bo’lishi uchun davlatimiz va jamiyatimizning bor kuch va imkoniyatlarini safarbar etamiz”

Sh.M.Mirziyoyev.

Beshta muhim tashabbus – ertamiz egalari istiqboli yo'lida

Keyingi yillarda yurtimiz yoshlarini har tomonlama qo‘llab-quvvatlash, ularning huquq va manfaatlarini himoya qilish borasida muayyan ishlar amalga oshirilmoqda. 2017 yil 30 iyunda tashkil etilgan O‘zbekiston yoshlar ittifoqi yoshlarning talab va istaklarini birlashtirgan holda faoliyat olib boryapti. Bu jarayonda “O‘zbekistonda yoshlarga oid davlat siyosati to‘g‘risida”gi qonun dasturilamal bo‘lmoqda.

Kuni kecha Davlatimiz rahbari boshchiligida o‘tkazilgan videoselektor yig‘ilishida yoshlarimizga bo‘lgan e’tiborni yanada kuchaytirish, ularni madaniyat, san’at, jismoniy tarbiya va sportga keng jalb etish, yoshlarda axborot texnologiyalaridan foydalanish ko‘nikmalarini shakllantirish, yurtimiz yoshlari o‘rtasida kitobxonlikni targ‘ib qilish, xotin-qizlar bandligini oshirish masalalariga urg‘u berildi.

Aytish kerakki, turli ziddiyatlar kuchayib borayotgan bugungi dunyo manzaralarida yoshlarimizning ma’naviy immunitetini kuchaytirish, ularning bo’sh vaqtini mazmunli o‘tkazish har qachongidan ham dolzarbroq ekanini zamonning o‘zi ko‘rsatib turibdi.

Shu bois Prezidentimiz tomonidan ilgari surilgan 5 ta muhim tashabbus muhim ahamiyat kasb etadi.

Ma'lumki, davlatimiz rahbari ijtimoiy, ma'naviy-ma'rifiy sohalardagi ishlarni yangi tizim asosida yo'lga qo'yish bo'yicha 5 ta muhim tashabbusni ilgari surgan edi.

Birinchi tashabbus yoshlarning musiqa, rassomlik, adabiyot, teatr va san'atning boshqa turlariga qiziqishlarini oshirishga, iste'dodini yuzaga chiqarishga xizmat qiladi.

Ikkinchi tashabbus yoshlarni jismoniy chiniqtirish, ularning sport sohasida qobiliyatini namoyon qilishlari uchun zarur sharoitlar yaratishga yo'naltirilgan.

Uchinchi tashabbus aholi va yoshlar o'rtasida kompyuter texnologiyalari va internetdan samarali foydalanishni tashkil etishga qaratilgan.

To'rtinchi tashabbus yoshlar ma'naviyatini yuksaltirish, ular o'rtasida kitobxonlikni keng targ'ib qilish bo'yicha tizimli ishlarni tashkil etishga yo'naltirilgan.

Beshinchi tashabbus xotin-qizlarni ish bilan ta'minlash masalalarini nazarda tutadi.

Prezidentimizning joriy yilda Sirdaryo hamda Namangan viloyatlariga qilgan amaliy tashrifi davomida mazkur hududlardagi tuman va shahar kutubxonalariga bir necha yuz ming nusxada badiiy adabiyotlar yetkazib berildi. "Ma'rifat karvoni" tashkil etildi. Yoshlar uchun 25 ming dona kitob, 80 turdagi sport jihozlari va musiqa asboblari yetkazib berildi.

Mazkur 5 tashabbus keng jamoatchiligimiz tomonidan katta qiziqish bilan kutib olindi. Endilikda ushbu tajribani yurtimizning barcha hududlarida keng joriy qilish masalalari muhokama qilindi.

Madaniyat vazirligi va Xalq ta'limi vazirligiga hokimliklar bilan birgalikda tuman va shaharlarda madaniyat markazlari va umumta'lim maktablarida yoshlarning qiziqishidan kelib chiqib, qo'shimcha 1,5 mingta to'garak tashkil etish vazifasi qo'yildi.

Tashabbuskor iste'dodli yoshlar va mahalliy homiylarni jalb etgan holda, madaniyat markazlarida badiiy-havaskorlik jamoalari, yoshlar teatr-studiyalari va "Yoshlar klublari" tashkil qilish zarurligi ta'kidlandi.

Taniqli san'atkor va iste'dodli ijodkorlarni tumanlardagi madaniy ishlarga ko'makchi sifatida biriktirish yaxshi natija berayotganini inobatga olib, bu tajribani butun mamlakatga yoyish bo'yicha ko'rsatmalar berildi. Unga muvofiq, taniqli artistlar tuman va shaharlarga ijodiy maslahatchi sifatida biriktirilib, o'sha joylarda madaniyat va san'atni rivojlantirishga mas'ul bo'ladi, tuman va shaharlar hokimlari esa ushbu ishlarga moddiy va tashkiliy jihatdan yordam beradi.

Musika va san'at sohasida oliy ma'lumotli kadrlarni ko'paytirish masalasiga ham e'tibor qaratildi.

Oliy va o'rta maxsus ta'lim hamda Xalq ta'limi vazirliklariga muayyan mavzular bo'yicha tarix darslarini muzeylar, tarixiy obidalar, qadamjo va teatrlarda sayyor o'tkazilishini tashkil qilish topshirildi.

Ikkinchi tashabbusga doir masalalar muhokama qilinar ekan, diyorimizda 12 mingdan ziyod sport inshootlari borligi, lekin yoshlarni jismoniy tarbiya va ommaviy sportga qamrab olish darajasi yetarli emasligi qayd etildi. Umumta'lim maktablarining sport anjomlari bilan jihozlanish ko'rsatkichi mamlakat bo'yicha 56 foizni, jumladan, Surxondaryo viloyatida 12 foizni, Xorazmda 14 foizni, Qoraqalpog'istonda 15 foizni tashkil etadi, xolos.

Yig'ilishda yoshlarni jismoniy tarbiya va sportga keng jalb etish borasidagi chora-tadbirlar belgilab berildi.

Tuman va shaharlar hokimlarining yoshlar masalalari bo'yicha o'rinbosarlariga mutaxassislar bilan birgalikda yoshlarning sport turlariga qiziqishi hamda sport inshootlarining jihozlanish darajasini o'rganib, shu asosda takliflar berish, Vazirlar Mahkamasiga ularni amalga oshirish uchun zarur mablag'lar manbasini aniqlash vazifasi yuklatildi.

Olis va chekka qishloqlarda yengil konstruksiyali sendvich panellardan kichik sport zallari va sun'iy qoplamali maydonlar qurish, tashabbuskor tadbirkorlarga sport inshootlari tashkil etish uchun yer ajratish zarurligi ta'kidlandi. Bunday tadbirkorlarga O'zmilliybank tomonidan "Yoshlar – kelajagimiz" dasturi doirasida imtiyozli kreditlar ajratiladi.

Joylardagi sport maktablariga xalqaro musobaqalarda g'olib bo'lgan taniqli sportchilarni rahbar etib tayinlash, shuningdek, sportchilarni oliy o'quv yurtlarining maxsus sirtqi bo'limlarida maqsadli o'qitish yaxshi natija berishi qayd etildi. Bolalar va o'smirlar sport maktablari sonini ko'paytirish yuzasidan topshiriqlar berildi.

Mavzuning dolzarbligi. So'nggi yillarda turli noxizigiy muhitlardagi Boze - Eynshteyn kondensatsiyasining hosil bo'lish shartlari va xususiyatlarini o'rganish muhim ahamiyat kasb etmoqda. Bunga sabab Boze - Eynshteyn kondensatsiyasi kondensirlangan muhitlarning o'ta past temperaturalar sharoitidagi xossalari tadqiq etishga imkon beradi. Shuningdek o'tkazilgan eksperimental va nazariy tadqiqotlar natijalariga ko'ra Boze - Eynshteyn kondensatsiyasi yuqori haroratli o'ta o'tkazuvchanlik mexanizmini tushinishga ham yordam beradi.

Yuqorida keltirilgan dalillar noxizig'iy muhitlardagi Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi xususiyatlarini o'rganish muhim ilmiy va amaliy ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatadi.

Ishning maqsadi. Bitiruv malakaviy ishida Boze - Eynshteyn kondensatsiyasining xossalari ideal gaz yaqinlashuvida hamda uni tashkil qiluvchi zarralar orasidagi o'zaro ta'sirni inobatga olingan holdagi xususiyatlarini tadqiq etish masalasi qo'yilgan.

Bu maqsadga erishish uchun quyidagi masalalar qo'yildi va hal etildi:

1. Boze - Eynshteyn gazining holat tenglamasini keltirib chiqarish.
2. Boze - Eynshteyn gazlarining tashqi statsionar maydon ta'siridagi fazoviy taqsimotini tadqiq etish.
3. Boze - Eynshteyn gazida yuzaga keluvchi kollektiv harakatlarni va elementar uyg'onishlarni o'rganish.

Ishning ilmiy yangiligi:

1. Boze - Eynshteyn ideal gazi zarralarining energiyasi hamda bosimini tavsiflovchi munosabatlar olindi.

2. Boze - Eynshteyn gazi zarralarining og'irlik kuchi va sferik garmonik ossillyator maydonlari ta'siridagi fazoviy taqsimotini tavsiflovchi formulalar keltirib chiqarildi.
3. Boze - Eynshteyn gazida nochizig'iy tovush to'lqinlarining tarqalishi mumkinligi ko'rsatildi.
4. Boze - Eynshteyn kondensatini tavsiflovchi nochizig'iy to'lqin funktsiya, ifodasi keltirib chiqarildi.

Ishnng ilmiy qimmati:

Bitiruv malakaviy ishini ilmiy qimmati shundan iboratki, unda olingan natijalar turli nochizig'iy muhitlardagi Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi xususiyatlarini o'rganish uchun muhim asos bo'lib xizmat qilishi mumkin;

Bitiruv malakaviy ishining mazmuni.

Kirishda Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi, uning maqsadi va vazifalari shuningdek ilmiy ahamiyati qisqa yoritilgan.

Ishning birinchi bobida Boze -Eynshteyn gazining asosiy xususiyatlari tadqiq etilgan.

Ishning ikkinchi bobida Boze - Eynshteyn kondensatida tarqaluvchi to'lqinlarni tavsiflovchi tenglamalar va ularning yechimlari keltirib chiqarilgan.

I-bob. Boze-Eynshteyn gazining asosiy xususiyatlari

Bizga ma'lumki, Boze - Eynshteyn kondensatsiyasi 1924 yilda Boze va Eynshteyn tomonidan nazariy jihatdan bashorat qilingan edi. Uning moxiyati kritik temperaturadan past temperaturalarda bozon gazlarining makroskopik to'planishidan iboratdir. Ammo bu bashorat faqat 70 yildan keyingina amalga oshirildi. 1995 - yilda rubidiy va natriylarning siyraklashtirilgan gazlarida hosil qilindi. So'ngra Boze - Eynshteyn kondensati litiy atomlarida ham ko'zatildi. O'ta past temperaturalar sharoitida sovigan atomlarni nazorat qilish imkoniyati magnit va optik texnikalar kombinatsiyasi asosida amalga oshirish mumkinligi ko'rsatildi. Bu maqsadda yaratilgan eksperimental qurilma uchun 2001 -yil Nobel mukofoti berildi.

1995 yilda ishqoriy elementlar gazlarida o'ta past temperaturalarda Boze-Eynshteyn kondensatlarini hosil qilish va tadqiq etish bo'yicha dastlabki 3 ta ish chop etildi. Diamagnit atomlarning kondensatlari potentsial o'raning shaklini o'zgartirish imkonini beruvchi magnit saqlagichlar vositasida ushlab turildi. Shunday qilib o'ta oquvchan He_2 va eksitonlardan iborat Boze kondensatlar oilasiga kutilmagan fizikaviy xossalarga ega bo'lgan yangi a'zolar qo'shildi. Bu esa o'ta past temperaturalar fizikasi sohasida yangi tadqiqotlar yo'nalishlarining ochilishiga olib keldi.

Ishqoriy atomlarning kondensatlarini hosil qilish fizikaning boshqa soxalarida taklif qilingan yangi g'oyalar va texnologiyalarning qo'llanilishi asosida amalga oshirildi. Shuni ta'kidlash kerakki, kondensatlarni ushlab turish uchun birinchi navbatda magnit saqlagichlar ishlab chiqildi. Aslini olganda bunday saqlagichlar yuqori xaroratli plazmani ushlab turish maqsadida ishlab chiqilgan edi. Keyinroq esa bunday tipdagi magnit saqlagichlarni diamagnit holatdagi neytral atomlarni ushlab turish uchun qo'llash taklif qilindi.

Magnit saqdagichlarni gaz bilan to'ldirish lazer sovutish asosida amalga oshirildi. Dastlab bunday sovutish printsipini eslatamiz. Buning uchun bizning ixtiyorimizda chastotalari atomlarning yutilish chastotalariga qaraganda biroz kichikroq bo'lgan lazerlar bor deb faraz qilamiz. U holda ayonki tinch turgan

atom lazer kvant nurlanishini yuta olmaydi. Ammo lazer nurlanishiga qarama - qarshi yo'nalishda harakatlanuvchi atom Dopler effektiga binoan yorug'lik kvantini yuta oladi. Albatta bunda atom oladigan impuls uning dastlabki yo'nalishiga qarama - qarshi bo'ladi. Natijada ma'lum vaqt o'tgach uyg'ongan atom barcha yo'nalishlarda o'rta hisobda izotrop kvant nurlanishini hosil qiladi. Shunday qilib, atomlarni barcha yo'nalish bo'yicha bir vaqtda nurlantirilsa ularni qadamba - qadam magnit saqlagichlarda tormozlash mumkin.

Demak, lazer sovutish gazlarni juda past temperaturalarda magnit saqlagichga to'ldirish imkonini beradi. Keyingi qadam esa gazning bug'lanma sovushi asosida bo'ladi. Buning uchun potentsial o'raning shakli shunday tanlab olinadiki, yuqori chastotali maydonlar vositasida issiqroq atomlar magnit saqlagichdan chiqarib yuboriladi. Natijada bunday usul yordamida submikrokkelvin temperaturalargacha sovutish imkoni paydo bo'ldi. (Ya'ni absolyut 0 haroratga o'ta yaqin temperaturalarni olish mumkin bo'ladi.) Binobarin ishqoriy metallar gazlarining Boze-Eynshteyn kondensatlari shunday temperaturalarda hosil bo'ladi.

1.1 Boze - Eynshteyn ideal gazining holat tenglamasi

Dastlab siyrak Boze gazining 0 temperaturadagi asosiy holatini ko'rib chiqamiz. Buning uchun Feynman tomonidan taklif qilingan quyidagi sifat tasavvurlariga asoslanamiz.

Gaz katta V xajmga ega bo'lgan idishda joylashgan bo'lsin. U holda bu gazdagi alohida olingan zarrachalarning normallashtirilgan to'lqin funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}}; \quad \int |\psi|^2 dV = 1; \quad |\psi|^2 V = 1; \quad \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

deb faraz qilamiz.

Endi $r = 0$ nuqtada maxkamlangan zarracha joylashgan bo'lsin. U holda ayonki ik- kinchi zarracha ular orasidagi o'zaro ta'sir oqibatida birinchi zarrachaning to'lqin funksiyasini o'zgartiradi. Yuqoridagi fikrni tasdiqlash

uchun kengligi a ga teng bo'lgan cheksiz balandlikdagi sferik potentsial to'siqni qaraymiz.

$$\text{Ya'ni: } U(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Bu yerda a - ikki zarraning bir biriga yaqinlashishi mumkin bo'lgan eng kichik masofani bildiradi. Demak, bu bitta zarrachaning diametriga teng. Zarrachaning holatini tavsiflovchi to'lqin funktsiya $r = a$ nuqtada 0 ga aylanishi lozim. Chunki zarralarning $r < a$ sohada bo'lish ehtimolligi 0 ga teng. Shuningdek $r > a$ sohada esa gaz zarralari o'zaro ta'sirlashmaganligi uchun to'lqin funktsiya erkin zarraning harakatiga mos keluvchi Shryodinger tenglamasini qanoatlantirishi lozim.

$$\Delta \psi = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(\psi) = 0;$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(\psi);$$

$$\psi = \psi(\vec{r})\Phi(t);$$

$$r < a, \quad U = \infty; \quad \psi = 0$$

$$r > a, \quad U = 0; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = 0; \rightarrow \Delta \psi = 0;$$

Demak, bu shartdan foydalanib, to'lqin funktsiya uchun quyidagi ifodani olamiz.

$$\psi(r) = \bar{\psi} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad (1.1.2)$$

$$\text{Bu yerda } \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad r = a; \quad \psi(\vec{r}) = 0; \quad r > a, \quad \psi(\vec{r}) \approx \bar{\psi}.$$

Boshqacha qilib aytganda (1.1.2) - ifodadagi to'lqin funktsiya qo'zg'almas zarrachada sochilgan to'lqin funktsiyani anglatadi.

Shryodinger tenglamasini (1.1.2) – ko'rinishda yozishda biz to'lqin funktsiyani $r = a$ nuqtada 0 ga aylanadi deb hisobladik. Aslini olganda u V hajmni chegaralovchi nuqtalardagina 0 ga teng bo'ladi. Shuning uchun zarrachaning kinetik energiyasini quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi \Delta \psi d\vec{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \int \bar{\psi}^2 \left(\nabla \frac{a}{r} \right)^2 d\vec{r} \\ \langle L \rangle &= \int \psi^* \hat{L} \psi d\vec{r}, \quad d\vec{r} = dx dy dz; \\ \hat{L} &= \frac{\hat{P}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta; & \hat{P} &= -i\hbar \hat{\nabla}; \\ \hat{P}^2 &= -\hbar^2 \hat{\nabla}^2; & \hat{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}; \\ \Delta &= \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};\end{aligned}$$

Bu yerdagi integrallash gaz joylashgan V hajm bo'yicha o'tkaziladi. Bevosita integrallash natijasida zarrachaning kinetik energiyasi uchun quyidagi

ifodani hosil qilamiz. $\varepsilon_0 = \frac{2\pi\hbar^2 a}{mV}$

Bu yerda $\bar{\psi}^2 = \frac{1}{V}$ ekanligi inobatga olingan.

Demak, V hajm makroskopik bo'lsa kinetik energiya qiymati juda ham kichik bo'ladi.

Endi V hajmli idishda juda katta sondagi bir xil zarralar joylashgan deb faraz qilamiz. Agar bu zarralar siyraklashgan gazni hosil qilsa, har bitta zarrachaga mos keluvchi hajm idish hajmiga nisbatan juda ham kichik bo'ladi.

Ya'ni $a^3 \ll \frac{V}{N}$, bu yerda $N \gg 1$. N –zarralar soni.

Bu shart bajarilganda har qanday ikki zarraning bir biriga yaqin masofalardagi to'liq funksiyasini (1.1.2) - ko'rinishida yozish mumkin bo'ladi. Bu erda r zarralar orasidagi masofani bildiradi. Demak, bu holda barcha zarralar juftlarining o'zaro ta'sirini inobatga olsak, bu zarralar sistemasining to'la energiyasini quyidagicha topish mumkin:

$$E = \frac{N(N-1)}{2} \cdot 2\varepsilon_0 \approx N^2 \varepsilon_0 = N^2 \cdot \frac{2\pi\hbar^2 a}{mV} = N \cdot \frac{2\pi\hbar^2 a n}{V}$$

Bu yerda n zarralar konsentratsiyasini bildiradi. (hajm birligidagi zarralar soni).

Bu yerda ε_0 oldidagi had ideal gazdagi o'zaro ta'sirlashuvchi barcha zarralar juftliklar sonini bildiradi.

Demak, bitta zarrachaga mos keluvchi energiya $\varepsilon = \frac{E}{N} = \frac{2\pi\hbar^2 an}{m}$ ifoda bilan aniqlanadi va u tabiiy ravishda kinetik energiyadan V hajmni bitta zarrachaga mos keluvchi hajm $n^{-1} = \frac{V}{N}$ bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Endi bu masalaga boshqacharoq nuqtai nazardan qaraymiz, ya'ni zarralar bir - biriga yaqin joylashganda ularning to'lqin funksiyasi biz yuqorida topgan (1.1.2) - ifodadan unchalik ham farq qilmasligi kerak. Zarralardan birini koordinata boshida mahkamlangan deb qarasak bu ikki zarraning to'lqin funksiyasini tavsiflovchi Shryodinger tenglamasining echimini quyidagi ko'rinishda qidirish mumkin.

$$\psi(r) = \bar{\psi}[1 - \varphi(r)] \quad (1.1.3)$$

Bunda r ikkinchi zarrachaning radius vektori va $\varphi(r)$ topilishi kerak bo'lgan funksiyani bildiradi. Agar holgan barcha zarrachalar idish hajmi bo'yicha bir tekis taqsimlangan bo'lsa, ularning kontsentratsiyasini quyidagicha topishimiz mumkin.

$$n = \frac{N-2}{V} \cong \frac{N}{V}; \quad (N \gg 1).$$

Demak, bu holda N ta zarradan iborat sistemani to'lqin funksiyasini yuqoridagi, ya'ni (1.1.3) - ifodadan to'lqin funksiyasini topish yordamida aniqlash mumkin.

$$\psi_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_N$$

Agar zarralarning har biri boshqalariga bog'liq bo'lmagan holda harakat qilsa natijaviy to'lqin funksiya zarralarning to'lqin funksiyalarning ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Buning uchun xuddi avvalgidek ikkinchi zarrachani ham biror $r = \{x, y, z\}$ nuqtaga mahkamlangan deb faraz qilamiz. U holda bu gazdagi ixtiyoriy zarrachaning ikkinchi zarracha bilan o'zaro ta'siri oqibatida yo'zaga keladigan to'lqin funksiyani xuddi avvalgidek (1.1.2) – ko'rinishda qidirish mumkin. Faqat bunda $\psi \rightarrow \psi(\vec{r}_j)$ Ba $r \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_j|$ almashtirish etarli. Bu erda j yuqoridagi r- radius vektorli nuqtaga mahkamlangan zarrachaning tartib raqami.

$$\psi(r) = \bar{\psi} [1 - \varphi(r_j)] \cdot \left[1 - \frac{a}{|r - r_j|} \right] \quad (1.1.4)$$

Bu yerda $[1 - \varphi(r_j)]$ ko'paytuvchining qiymati $\vec{r}_j$ nuqtada hisoblanadi. (1.1.4) ifodadan ko'rinib turibdiki $\frac{a}{r}$ xuddi ((a zaryadli)) zarraning undan r masofada hosil qilgan elektr potentsialiga o'xshaydi. Demak, idishdagi barcha zarralarning r nuqtaga mahkamlangan zarracha to'lqin funksiyasiga ta'sirini hisoblash uchun barcha zarralarning ulushlarini yig'ib chiqish lozim.

Bu masalani hal qilish uchun (1.1.4) - ifoda bilan aniqlanuvchi to'lqin funksiyani quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$\psi(\vec{r}) = \bar{\psi} \left\{ 1 - \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} - \varphi(\vec{r}_j) + \varphi(\vec{r}_j) \cdot \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right\} = \bar{\psi} \left[1 - \frac{a}{r} - A + \sum_j \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \cdot \varphi(r_j) \right] \quad (1.1.5)$$

Bu yerda A quyidagiga teng

$$A = \sum_j \varphi(|r - r_j|) \quad (1.1.6)$$

Bu yerda ikkinchi had r nuqtaga mahkamlangan zarrachaning koordinata boshida joylashgan zarra bilan o'zaro ta'sirini inobatga oladi. Qolgan hadlar esa $\varphi(r)$ ga proporsional bo'lgan o'zaro ta'sirlar ulushini inobatga oladi.

Agar gaz siyraklashgan zarralar majmuasidan iborat bo'lsa ya'ni $a^3 \ll \frac{V}{N}$ ёки $na^3 \ll 1$ bo'lsa yuqoridagi ifodalardagi yig'indini integral bilan almashtirish mumkin. U holda (1.1.5) - ifodaning chap tomonidagi to'lqin funksiya (1.1.3) -

ifoda bilan aniqlanishini inobatga olib $\varphi(r)$ funksiya uchun quyidagi integral tenglamani hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(\vec{r}) &= 1 - \frac{a}{r} - A + \sum_j \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \cdot \varphi(\vec{r}_j); \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{a}{r} + A - \sum_j \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \cdot \varphi(\vec{r}_j); \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$$\sum_j \rightarrow \int n d\vec{r}; \quad r' = r_j$$

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} - \int \frac{an}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \varphi(r') dr' + A;$$

Endi $\frac{1}{r}$ funksiya quyidagi Laplas tenglamasini qanoatlantirishini inobatga olamiz. $\Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(r)$ Ya'ni u koordinata boshiga mahkamlangan zarraning ulushini inobatga oladi. Chunki $\delta(r)$ Dirak funksiyasi bo'lib u quyidagi shartni qanoatlantiradi.

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = 0 \\ 0, & \vec{r} \neq 0 \end{cases}$$

Agar (1.1.1) ko'rinishdagi sferik potentsialning kengligi nolga intilsa u $\delta(r)$ funksiyaga intiladi.

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho; \quad \text{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi;$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \rightarrow -4\pi\delta(\vec{r}); \quad \rho = \delta(\vec{r})$$

ρ ba $\delta(\vec{r})$ «zaryad» zichligi.

Demak, buni inobatga olib quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$\varphi(r) = \Delta \left[\frac{a}{r} - \int \frac{an}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \varphi(r') dr' + A \right];$$

$$\Delta\left(\frac{a}{r}\right) = a\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi a \delta(\vec{r});$$

$$\Delta \int \frac{an d\vec{r}' \varphi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int an d\vec{r}' \left\{ \varphi(\vec{r}') \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} = -4\pi an \int d\vec{r}' \varphi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi an \varphi(\vec{r})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a); \quad -\infty < a < +\infty$$

$$f(x) = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1; \quad \text{yoki} \quad 4\pi a \delta(\vec{r}) = -\Delta \varphi + \chi_0^2 \varphi$$

$$\int f(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d\vec{r}' = f(\vec{r}).$$

$$\chi_0^2 = 4\pi a n$$

$$\Delta \varphi = -4\pi a \delta(\vec{r}) + 4\pi a n \varphi(\vec{r});$$

Bu tenglamani echimi esa quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} \exp(-\chi_0 r) \quad (1.1.9)$$

Oxirgi ifodadan ko'rinib turibdiki $\varphi(r)$ funksiya zarralar orasidagi masofa oshishi bilan keskin kamayadi. Ya'ni boshqacha qilib aytganda bu funksiya $\chi_0 r \leq 1$ sohadagina muhim rol o'ynaydi.

$$\text{Demak,} \quad r \leq \frac{1}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a n}} = r_0$$

Shunday qilib, $\varphi(r)$ funksiyaning muhim ahamyatga ega bo'ladigan sohasi χ_0 parametr ga teskari proportsionaldir. $\chi_0 r \gg 1; \quad \exp(-\chi_0 r) \rightarrow 0$

Yoki boshqacha qilib aytadigan bo'lsak, zarralar orasidagi masofa r_0 ga nisbatan juda ham katta bo'lsa, bu funksiyaning qiymati eksponentsial qonun bo'yicha keskin kamayadi. Siyraklashgan gazda esa

$$a^2 \chi_0^2 = \frac{4\pi a^3 N}{V} = 4\pi n a^3 \quad \text{va} \quad n a^3 \ll 1 \text{ bo'lganligi uchun haqiqatdan ham bu}$$

kattalik yoki ko'paytma birga nisbatan juda ham kichik bo'ladi. Demak, $r \approx a$ bo'lganda $\varphi(a) \approx 1$ ga teng. (1.1.2) va (1.1.3) ifodalarga ko'ra esa $\varphi(r)$ funksiya $r > a$ bo'lgan sohadagina ma'noga ega.

Biz yuqorida shartli ravishda ayrim zarralarni ma'lum nuqtalarda mahkamlangan deb hisobladik. Ammo bu shartlar faqat va faqat yuqoridagi formulalarni soddalashtirish maqsadida qilingan edi. Aslini olganda ixtiyoriy i va j raqamli zarralar mahkamlanmagan bo'lishsa biz odatdagidek ularning massa markazi bilan bo'lgan koordinata sistemasiga o'tishimiz mumkin.

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

$$m_1(\vec{r} + \vec{r}_2) + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

$$m_1 \vec{r} + m_1 \vec{r}_2 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}; \quad \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2;$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_1 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}; \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r};$$

Bu sistemada esa i va j zarralarga mos keluvchi laplasianlar yig'indisini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin. $\Delta_i + \Delta_j = (\frac{1}{2})\Delta_R + 2\Delta'$ Bunda $\Delta_R = \frac{r_i + r_j}{2}$ ifoda bilan aniqlanuvchi massalar markaziga nisbatan Laplas operatorini bildiradi. Δ' - esa $r_i - r_j$ nisbiy harakatga mos keluvchi Laplas operatoridir.

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x;$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d}{dx_1}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{d}{dy_1} \frac{dy_1}{dy} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d}{dy_1}$$

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{dz_1} \frac{dz_1}{dz} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d}{dz_1}$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} = \frac{d}{dx} = (\frac{m_2}{m_1 + m_2})\Delta'$$

demak qo'zg'almas massalar markazida $\Delta_R \psi = 0$; $\Delta' \psi = 0$ bo'lganligi uchun biz yuqorida topgan barcha formulalar o'z kuchida holadi, faqat ularda $r = |r_i - r_j|$ ya'ni zarralarning nisbiy koordinatasini bildiradi.

Demak, ixtiyoriy zarralar juftining harakatini tavsiflovchi to'lqin funksiyani ularning massalar markazi bilan bog'liq va nisbiy harakati bilan bog'liq to'lqin funksiyalarning ko'paytmasi sifatida topish mumkin bo'ladi. Bu holda (1.1.6) ifoda bilan aniqlanuvchi A doimiyni hisoblash uchun bu erdagi yig'indini hajm bo'yicha integralga almashtirish mumkin.

$$\begin{aligned}
A &= \sum_j \varphi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_j \varphi(r) \rightarrow \int \varphi(r) n dr = a n \int \frac{1}{r} e^{-\chi_0 r} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi a n \int e^{-\chi_0 r} r dr \\
\int e^{-\chi_0 r} r dr &= \left| \begin{array}{l} e^{-\chi_0 r} dr = dV \\ r = U \end{array} \right| \begin{array}{l} V = -\frac{e^{-\chi_0 r}}{\chi_0} \\ dr = dU \end{array} = \\
&= -\frac{r}{\chi_0} \cdot e^{-\chi_0 r} + \frac{1}{\chi_0} \int e^{-\chi_0 r} dr = -\frac{r}{\chi_0} e^{-\chi_0 r} + \frac{1}{\chi_0^2} e^{-\chi_0 r} \\
\int_{\infty}^0 e^{-\chi_0 r} r dr &= \frac{1}{\chi_0^2} \quad A = \frac{4\pi \pi a}{\chi_0^2} = 1 \quad chunki \quad \chi_0^2 = 4\pi \pi a
\end{aligned}$$

Endi ushbu gazdagi ixtiyoriy zarraning holgan $N-1 \cong N$ zarrachalar bilan o'zaro ta'siri oqibatida yo'zaga keluvchi energiyani topamiz.

$$\varepsilon = - \int_a^{R_0} (\psi \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi) 4\pi r^2 dr \quad (1.1.10)$$

Bu yerda $R_0 \gg a$ bo'lib u biz yuqorida ta'kidlagan to'liqin funksiyani normallashtirish shartini qanoatlantirish uchun tanlab olingan.

$$\int |\bar{\Psi}|^2 d\vec{r} = 1 \rightarrow |\bar{\Psi}|^2 \frac{4\pi}{3} R_0^3 = 1$$

Endi $\Psi(r) = \bar{\Psi}[1 - \varphi(r)]$ funksiya $r=a$ da nolga aylanganligi uchun va $\varphi(r)$ funksiya $r \gg a$ sohada keskin kamayganligi uchun $\Psi \Delta \Psi$ hadni quyidagiga almashtirish mumkin. $-\bar{\Psi}^2 (\Delta \varphi)^2$, Endi (1.1.9) ifodadan r bo'yicha hosila olamiz.

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} e^{-\chi_0 r}$$

$$\varphi(r) = -\frac{a}{r^2} e^{-\chi_0 r} - \frac{a}{r} \chi_0 e^{-\chi_0 r}$$

$$\varphi(a) \approx -\frac{1}{a} - \chi_0 = -(\frac{1}{a} + \chi_0) = -(\frac{1 + \chi_0 a}{a}); \quad \chi_0 a \ll 1$$

$$\varphi(a) \approx -\frac{1}{a}; \quad (\nabla \varphi)^2 \approx \frac{1}{a^2}; \quad \chi_0 r = 1; \quad r = a; \quad a = \frac{1}{\chi_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \frac{1}{2} |\bar{\Psi}|^2 \frac{R_0^3}{3} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

Demak, $\varphi(r)$ funksiyaning ifodasini inobatga olib $na^3 \ll 1$ shart bajarilganda energiya uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{2\pi\hbar^2 a}{mV}; \quad \varepsilon = N\varepsilon_0 : \quad \varepsilon = \frac{2\pi\hbar^2 an}{m}; \\ \varepsilon &= \frac{\hbar^2 \chi_0^2}{2m} = \frac{2\pi\hbar^2 an}{m}.\end{aligned}\quad (1.1.11)$$

Demak, ideal gazdagi zarralarning to'la energiyasi quyidagiga teng.

$$E = N\varepsilon = \frac{2\pi\hbar^2 an^2}{m}V \quad (1.1.12)$$

Bu ifodani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin.

$$E = \frac{2\pi\hbar^2 aN^2}{mV} \quad (1.1.13)$$

Endi ixtiyoriy zarrachaning to'lqin funksiyasini topish uchun biz yuqorida keltirgan (1.1.3) ifodada r ni r_j - ga almashtirish lozim ya'ni:

$$\psi(r_j) = \bar{\psi} \left\{ 1 + A - \sum_{j \neq i} \varphi(|r_i - r_j|) \right\} \quad (1.1.14)$$

Bu ifodadagi $\bar{\psi}$ ham r_j ning funksiyasidir. Lekin ideal gazdagi zarralar hajm bo'ylab tekis taqsimlangan bo'lsa, xuddi avvalgidek $\bar{\psi}$ doimiy va quyidagiga teng: $\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} = \text{const}$

Bu yerdagi A doimiy ideal gaz uchun birga teng edi ammo gaz zarralari orasidagi ta'sir inobatga olinsa uni alohida hisoblashga to'g'ri keladi. Ko'rinib turibdiki (1.1.14) ifoda bilan tavsiflanuvchi to'lqin funksiya qolgan barcha zarralarning koordinatalariga ham bog'liqdir. Demak, ushbu sistemaning umumiy to'lqin funksiyasini alohida zarralar to'lqin funksiyalarining ko'paytmasi shaklida yozishimiz mumkin:

$$\text{Ya'ni: } \Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \bar{\Psi}^N \prod_i \left\{ 1 + A - \sum_j \varphi(r_i - r_j) \right\} \quad (1.1.15)$$

Agar i indeks birdan N gacha o'zgaradigan bo'lsa, har bir zarralar jufti orasidagi o'zaro ta'sir ikki marta inobatga olinadi. Shuning uchun siyraklashgan gaz holida yuqoridagi ko'paytmani quyidagicha yozish mumkin.

$$\Psi(r, \dots, r_n) = \bar{\Psi}^N \exp \left\{ \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varphi(|r_i - r_j|) \right\} \quad (1.1.16)$$

Bu yerda eksponenta ichidagi ifodada yuqoridagi yig'indi ikkiga bo'lingan holda yozilgan. Bu ifoda albatta zarralar orasidagi masofa $r = |r_i - r_j| \approx a$ bo'lganda o'rinli emas. Chunki bu holda zarralar orasidagi o'zaro ta'sir kuchli namoyon bo'ladi.

(1.1.16) ifodaning ajoyibligi shundan iboratki, u i va j zarralarning o'rin almashinuviga mutlaqo bog'lik emas. Agar biz qarayotgan zarralar majmui tashqi maydonda joylashgan bo'lsa (1.1.15) ifodadagi har bir ko'paytuvchi faqat va faqat bitta koordinatagagina bog'lik bo'ladi. Agar ideal gazdagi zarralar tekis taqsimlangan bo'lsa, xuddi avvalgidek

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} = \sqrt{\frac{n}{N}} \quad (1.1.17)$$

Ya'ni, ideal gazdagi barcha zarralar uchun bir xil bo'ladi.

Fizikaviy nuqtai nazardan ayonki, biz yuqorida keltirgan va (1.1.16) - ifoda bilan tavsiflanuvchi N ta zarraning umumiy to'lqin funksiyasi bu zarralar sistemasi uchun yozilgan Shryodinger tenglamasining echimidir. Demak, alohida zarralarning to'lqin funksiyalari (1.1.14) - ifodaga ko'ra barcha zarralar uchun bir xil ko'rinishga ega. Shuning uchun aytish mumkinki bu gazdagi zarralarning holatini yagona to'lqin funksiyasi vositasida tavsiflash mumkin.

Endi gazning (1.1.13) - ifoda bilan tavsiflanuvchi to'la energiyasini bilgan holda uning bosimini quyidagi termodinamik munosabatdan foydalanib topish mumkin.

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV} \\ P &= -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV^2} = \frac{E}{V} = \varepsilon n \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Demak Boze - Eynshteyn gazining bosimi uning konsentratsiyasiga va ideal gaz zarralarining energiyasiga to'g'ri proporsional ekan.

Bizga ma'lumki adiabatik jarayon tenglamasi $PV^\gamma = \text{const}$ ko'rinishiga ega. Demak, (1.1.18) ifodaga binoan Boze - Eynshteyn gazini adiabatik ko'rsatgichi $\gamma=2$ bo'lgan gaz sifatida qarash mumkin. Endi bu gazda tarqaluvchi tovush tezligining kvadratini topamiz. Bizga ma'lumki zarralar konsentratsiyasining ko'paytmasiga teng. $\rho = \frac{M}{V} = \frac{mN}{V} = mn$

Demak, buni inobatga olib quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$C_s^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{4\pi\hbar^2 an}{m^2} \quad (1.1.19)$$

Endi ushbu ideal gazdagi zarraning energiyasi (1.1.11) - ifoda bilan aniqlanishini inobatga olib uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkinligini ko'rsatamiz.

$$\varepsilon = \frac{mC_s^2}{2} \quad (1.1.20)$$

Haqiqatdan ham $\varepsilon = \frac{m}{2} \frac{4\pi\hbar^2 an}{m^2} = \frac{2\pi\hbar^2 an}{m}$ C_s -tovush tezligi.

Agar biz qarayotgan gazga o'zgarmas bosimda bitta zarrachani qo'shadigan bo'lsak, u holda gazning energiyasi quyidagi kattalikka ortadi.

$$\varepsilon + \frac{P}{n}$$

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V = \varepsilon + PV_0 = \varepsilon + P \frac{V}{N} = \varepsilon + \frac{P}{n};$$

$$U = N\varepsilon; \frac{U}{N} = \varepsilon; \Delta U = U(N+1) - U(N) = \varepsilon;$$

Demak, boshqacha qilib aytganda bu gazdan bitta zarrachani chiqarish uchun lozim bo'lgan energiya ham yuqoridagi energiya bilan ifodalanadi.

Demak, bu gazning ximiyaviy potentsiali: $\mu = \varepsilon + \frac{P}{n} = 2\varepsilon$

Ta'rifga ko'ra ximiyaviy potentsial ideal gazdagi bitta zarrachani ajratib chiqarish uchun lozim bo'lgan energiyani bildiradi.

$$P = knT$$

$$\mu = \frac{3}{2}kT + \frac{P}{n} = \frac{3}{2}kT + kT = \frac{5}{2}kT$$

Bu ifoda odatdagi ideal gaz uchun

$$E = U + PV; \rightarrow \frac{E}{N} = \varepsilon + \frac{P}{n}$$

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{\partial N \varepsilon}{\partial N} + \frac{P \partial N}{n \partial N} = \varepsilon + \frac{P}{n}$$

1.2 Tashqi maydonlar ta'siridagi Boze - Eynshteyn gazining muvozanat sharti

Endi Boze-Eynshteyn gazi tashqi maydonda joylashgan holdagi ideal gaz zarralarining muvozanat ko'rib chiqamiz. Bizga ma'lumki, gaz muvozanatda bo'lishi uchun uni tashkil qiluvchizarralar yo'zaga keltirgan ichki bosim tashqi kuchlar ta'sirida yo'zaga kelgan bosimga teng bo'lishi lozim.

$$P_u = P_T; \quad P = \frac{F}{S}; \quad \vec{F} = -\nabla \vec{U}$$

$$P_T = \frac{\nabla U}{D}; \quad \frac{\partial U}{S \partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial(\frac{N}{n})} = n \frac{\partial U}{\partial N}$$

$$\nabla P_u = \nabla P_T; \quad \nabla P + n \nabla U = 0; \quad \nabla P S + n \nabla U S = 0; \quad n = \frac{N}{V};$$

$$M \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F}; \quad M = mN; \quad mN \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla U; \quad m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla U}{N}$$

$$M = \rho \cdot V = mnV; \quad mnV \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla U; \quad F = P S; \quad P = \frac{F}{S} = -\nabla U$$

$$\nabla P + n \nabla U = 0$$

$$n = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} (U_0 - U) \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned}\nabla P &= \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \nabla n^2 = \frac{4\pi\hbar^2 a n}{m} \nabla n; \\ \nabla P + n \nabla U &= 0; \quad n \left[\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \nabla n + \nabla U \right] = 0; \\ \nabla \left[\frac{4\pi\hbar^2 a n}{m} + U \right] &= 0;\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{4\pi\hbar^2 a n}{m} + U &= \text{const}; \\ \frac{4\pi\hbar^2 a n}{m} + U &= \frac{4\pi\hbar^2 a n_0}{m} + U_0; \\ n - n_0 &= \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} (U_0 - U)\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

Endi Boze - Eynshteyn gazi og'irlik kuchi maydonida turgan holdagi gaz konsentratsiyasining o'zgarish qonunini topamiz. Bu holda $U = m \cdot g \cdot z$ (bu yerda z -vertikal koordinata) ekanligini inobatga olib zichlikning o'zgarishi uchun quyidagi qonuniyatni hosil qilamiz.

$$z = 0 \quad U_0 = 0 \quad n_0 = n(0)$$

$$\begin{aligned}n - n_0 &= -\frac{m}{4\pi\hbar^2 a} m g z = -\frac{m^2 g}{4\pi\hbar^2 a} z; \\ n &= n_0 - \frac{m^2 g}{4\pi\hbar^2 a} z\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

Bu erdan ko'rinib turibdiki z balandlik ortishi bilan gaz konsentratsiyasi chiziqli qonun bo'yicha kamayadi.

$$n = 0. \quad n_0 = \frac{m^2 g}{4\pi\hbar^2 a} H \quad H = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m^2 g} n_0$$

Demak, bu gazning konsentratsiyasi $H = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m^2 g} n_0$ balandlikda 0 ga aylanadi.

Obrazli, qilib aytadigan bo'lsak Boze gazni idishga «quyish» mumkin. Uning zichligi chuqurlik ortishi bilan chiziqli qonun bo'yicha o'sadi.

Demak, bu holatni suyuqlik va gaz orasidagi moddaning holati deb qarash mumkin.

$$H = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m^2 g} \frac{N}{\frac{SH}{2}} = \frac{8\pi\hbar^2 a N}{m^2 g SH}$$

$$N = \int n dV = \int_0^H n(z) S dz = S \int_0^H n(z) dz = S \frac{n_0 + n(H)}{2} H = \frac{n_0 SH}{2}$$

$$\int_0^H n(z) dz = \int_0^H \left[n_0 - \frac{m^2 g}{4\pi\hbar^2 a} z \right] dz = \int_0^H n_0 \cdot dz - \int_0^H \frac{m^2 \cdot g}{4\pi\hbar^2 a} \cdot z \cdot dz =$$

$$= n_0 \cdot H - \frac{m^2 \cdot g}{8\pi\hbar^2 a} \cdot H^2 = H \cdot \left(n_0 - \frac{m^2 g}{8\pi\hbar^2 a} \cdot H \right) =$$

$$= H \cdot \left(n_0 - \frac{m^2 g}{8\pi\hbar^2 a} \cdot \frac{4\pi\hbar^2 a}{m^2 \cdot g} \cdot n_0 \right) = \frac{n_0 \cdot H}{2};$$

$$N = \frac{n_0 \cdot H \cdot S}{2}; \quad n_0 = \frac{2N}{H \cdot S}; \quad H = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2 \cdot g} \cdot \frac{2N}{H \cdot S};$$

$$H^2 = \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot N}{m^2 \cdot g \cdot S} \quad (*)$$

Endi idishdagi umumiy zarralar soni N va gaz joylashgan idishning asosi S bo'lgan hol uchun zarralarning konsentratsiyasi 0 ga aylanadigan balandlikni topamiz. Buning uchun idishdagi umumiy zarralar soni uning barcha qatlamlardagi zarralar sonining yig'indisiga tengligidan foydalanamiz.

$$\int n \cdot dV = N$$

Endi gaz zarralarining konsentratsiyasi (1.2.4) - qonunga binoan o'zgarishini inobatga olib, quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$H^2 = \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot N}{m^2 \cdot g \cdot S} \quad (1.2.5)$$

Bu erdan ko'rinib turibdiki, idishga «quyilgan» gaz qatlamining balandligi zarralar soni N va idish yo'zasi S ning nisbatidan olingan kvadrat ildizga proporsionaldir.

Endi Boze - Eynshteyn gazining sferik simmetrik ossillyator ko'rinishdagi potentsial ta'sir qilayotgan hol uchun uning konsentratsiyasining o'zgarish qonunini topamiz. Ma'lumki bu potentsialni quyidagicha ifodalash mumkin.

$$U = \frac{\alpha \cdot r^2}{2} \quad (1.2.6)$$

Bu yerda α - «elastiklik koeffitsienti»

Xuddi avvalgidek ideal gaz zarralarining $r=0$ nuqtadagi zichligini n_0 va ularning bu nuqtadagi energiyasini $\varepsilon_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{m}$ bilan belgilab quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} n - n_0 &= \frac{m}{4\pi \hbar^2 a} (U_0 - U); \\ 2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0 &= m \cdot \varepsilon_0; \\ m &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{\varepsilon_0}; \\ r &= 0; \quad U_0 = 0 \\ n &= n_0 - \frac{m \cdot U}{4\pi \hbar^2 a} = n_0 - \frac{U}{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{\varepsilon_0} = \\ &= n_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{U \cdot n_0}{\varepsilon_0} = n_0 \cdot \left[1 - \frac{U}{2 \cdot \varepsilon_0} \right] = n_0 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{4 \cdot \varepsilon_0} \cdot r^2 \right]; \\ n &= n_0 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{4 \cdot \varepsilon_0} \cdot r^2 \right]; \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Demak, bu holda gaz zarralarining konsentratsiyasi r -oshishi bilan kvadratik qonun bo'yicha kamayadi. $n=0$ bo'lishi uchun

$$1 - \frac{\alpha}{4 \cdot \varepsilon_0} \cdot r^2 = 0; \quad r^2 = \frac{4 \cdot \varepsilon_0}{\alpha}; \quad r = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\alpha}}$$

Demak, bu holda gaz konsentratsiyasi 0 ga aylanadigan «sfera radiusi» mavjud bo'lib u quyidagi ifoda bilan aniqlanadi.

$$\begin{aligned} R &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\alpha}}; \quad \int n \cdot dV = N; \quad dV = 4 \cdot \pi \cdot r^2 dr; \\ N &= 4\pi \int_0^R n \cdot r^2 dr = 4\pi \int_0^R n_0 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{4 \cdot \varepsilon_0} \cdot r^2 \right] \cdot r^2 dr = \\ &= 4\pi \cdot n_0 \int_0^R r^2 dr - 4\pi n_0 \int_0^R \frac{\alpha}{4\varepsilon_0} r^4 dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \cdot n_0 \cdot \frac{R^3}{3} - \frac{\pi \cdot n_0 \cdot \alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R^5}{5} = \pi \cdot n_0 \cdot R^3 \cdot \left[\frac{4}{3} - \frac{\alpha \cdot R^2}{5 \cdot \varepsilon_0} \right] = \\
&= \pi \cdot n_0 \cdot R^3 \left[\frac{4}{3} - \frac{\alpha}{5 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{4 \cdot \varepsilon_0}{\alpha} \right] = \pi \cdot n_0 \cdot R^3 \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{5} \right] = \frac{8 \cdot \pi \cdot n_0 \cdot R^3}{15}; \\
N &= \frac{8 \cdot \pi \cdot n_0}{15} \cdot \left[\frac{4 \varepsilon_0}{\alpha} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{8 \cdot \pi \cdot n_0}{15} \cdot \left[\frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{m \cdot \alpha} \right]^{\frac{3}{2}} = \\
&= \frac{8\pi}{15} \cdot (8\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot \hbar^3 \cdot \left(\frac{a}{m \cdot \alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n_0^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{15} \cdot (8\pi)^{\frac{5}{2}} \cdot \hbar^3 \cdot \left[\frac{a}{m \cdot \alpha} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot n_0^{\frac{5}{2}}; \\
N^{\frac{2}{5}} &= \frac{1}{15^{\frac{2}{5}}} \cdot (8\pi)^{\frac{6}{5}} \cdot \left[\frac{a}{m \cdot \alpha} \right]^{\frac{3}{5}} \cdot n_0; \\
n_0 &= \frac{15^{\frac{2}{5}} \cdot N^{\frac{2}{5}}}{8\pi \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot a}{m \cdot \alpha} \right)^{\frac{3}{5}}} = \frac{15^{\frac{2}{5}}}{8\pi} \cdot \left(\frac{m \cdot \alpha}{\hbar^2 \cdot a} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot N^{\frac{2}{5}}; \\
n_0 &= \frac{15^{\frac{2}{5}}}{8\pi} \cdot \left(\frac{m \cdot \alpha}{\hbar^2 \cdot a} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot N^{\frac{2}{5}} \tag{1.2.8}
\end{aligned}$$

Bu erdan ko'rinib turibdiki sfera markazidagi Boze - Eynshteyn gazi zarralarining konsentratsiyasi va gaz zarralari sonining $2/5$ darajasiga proporsional.

Ya'ni: $n_0 \sim N^{\frac{2}{5}}$

Endi sfera radiusini ideal gazdagi zarralar soni orqali ifodasini topamiz. Buning uchun n_0 konsentratsiya uchun topilgan (1.2.8) - ifodadan foydalanamiz.

$$R = \left(\frac{15 \cdot \hbar^2 \cdot a}{m \cdot \alpha} \cdot N \right)^{\frac{1}{5}} \tag{1.2.9}$$

$$R^2 = \frac{4 \cdot \varepsilon_0}{\alpha} = \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{m \cdot \alpha} = \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m \cdot \alpha} \cdot \frac{15^{\frac{2}{5}}}{8\pi} \cdot \left(\frac{m \cdot \alpha}{\hbar^2 \cdot a} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot N^{\frac{2}{5}} =$$

$$= 15^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{\hbar^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}} \cdot \alpha^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot N^{\frac{2}{5}} = 15^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot a}{m \cdot \alpha} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot N^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{15 \cdot \hbar^2 \cdot a}{m \cdot \alpha} \cdot N \right)^{\frac{2}{5}}$$

$$R^2 = \left(\frac{15 \cdot \hbar^2 \cdot a}{m \cdot \alpha} \cdot N \right)^{\frac{2}{5}} \Rightarrow R = \left(\frac{15 \cdot \hbar^2 \cdot a}{m \cdot \alpha} \cdot N \right)^{\frac{1}{5}}$$

Oxirgi ifodadan ko'rinib turibdiki Boze - Eynshteyn gazi joylashgan sfera hajmi gaz zarralar sonining 3/5 darajasiga propotsional bo'lar ekan.

Endi ideal gaz zarralarining tashqi potentsial maydon ta'sir qilgan holdagi energiyasini topamiz. Buning uchun (1.1.17) hamda (1.2.3) ifodalardan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \\ n &= \frac{m}{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a} \cdot (U_0 - U) \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} \cdot (U_0 - U); \quad U_0 = 2 \cdot \varepsilon + U = \mu + U = \text{const} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} (U_0 - U); \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Bu ifodadan kelib chiqadiki har qanday Boze - Eynshteyn gazi uchun quyidagi kattalik o'zgarmasdan qoladi.

$$U_0 = 2 \cdot \varepsilon + U = \mu + U = \text{const}; \tag{1.2.11}$$

Bu erda μ Boze - Eynshteyn gazining ximiyaviy potentsiali

Endi (1.2.1) va (1.2.11) ifodalardan foydalanib quyidagi munosabatni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m \cdot c_s^2}{2}; \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (U_0 - U) \\ \frac{m \cdot c_s^2}{2} &= \frac{1}{2} \cdot (U_0 - U); \rightarrow m \cdot c_s^2 = U_0 - U \\ U_0 &= U + m \cdot c_s^2 = \text{const} \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Demak, Boze - Eynshteyn kondensata joylashgan sfera chegarasida ya'ni $U=U_0$ nuqtada tovush tezligi ortib boradi va uning markazida ya'ni $U=0$ da o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

$$C_s(0) = \sqrt{\frac{U_0}{m}}$$

1.3 Kuchli o'zaro ta'sirlashuvchi zarralardan iborat Boze - Eynshteyn gazining xossalari

Biz yuqorida Boze - Eynshteyn gazining xossalarini ideal gaz yaqinlashuvida karadik. Endigi muhim vazifa yuqorida olingan natijalar gazning zichligi ortganida ya'ni ular orasidagi o'zaro ta'sir kuchliroq namoyon bo'lganda bo'ladigan o'zgarishlarni topishdan iboratdir. Buning uchun biz oldingi bo'limda topgan to'liq funksiyani zarralar orasidagi o'zaro ta'sirni inobatga olganda qanday o'zgarishini topishdan boshlaymiz. Biz oldingi bo'limda ta'kidlagan edikki $\varphi(r_j)$ funksiya zarralar orasidagi masofa tartibida unchalik ham katta miqdorda o'zgarmasligini isbotlagan edik. Shuning uchun ham $\chi \cdot a$ parametrning unchalik ham kichik bo'lmagan qiymatlarida $\varphi(r_j)$ funksiyaning o'zgarishlarini inobatga olishga to'g'ri keladi. Agar $\nabla\varphi(r_j) \neq 0$ bo'lsa to'liq funksiyaning qaralayotgan chegarada nolga teng bo'lish shartidan to'liq funksiyaning aniqlash uchun quyidagi ifodani yozish mumkin.

$$\psi(r) = \bar{\psi} \cdot \left[1 - \frac{b}{r} + \sum_j \frac{a}{|r - r_j|} \cdot \varphi(r_j) + \sum_j \frac{a^2(r - r_j)}{|r - r_j|^3} \cdot \nabla\varphi(r_j) + \right] \quad (1.3.1)$$

Bu yerda b hozircha noma'lum doimiy. Bu ifodani yozishda biz oxirgi had bilan aniqlanuvchi dipol o'zaro ta'sirni ham inobatga oldik. Endi xuddi avvalgidek ushbu ifodadagi yig'indilarni integral bilan almashtirsak $\varphi(r)$ funksiya uchun quyidagi integral tenglamani hosil qilamiz.

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} - \int \frac{a \cdot n}{|r - r'|} \cdot \varphi(r') \cdot dr' - \int \frac{n \cdot a^3 \cdot (r - r')}{|r - r'|^3} \cdot \nabla\varphi(r') \cdot dr' \quad (1.3.2)$$

$$\psi = \overline{\psi} \cdot (1 - \varphi(r))$$

$$\psi(r) = \overline{\psi} \cdot \left[1 - \frac{b}{r} + \sum_j \frac{a}{|r - r_j|} \cdot \varphi(r_j) + \sum_j \frac{a^2(r - r_j)}{|r - r_j|^3} \cdot \nabla \varphi(r_j) \right]$$

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} - \sum_j \frac{a}{|r - r_j|} \cdot \varphi(r_j) - \sum_j \frac{a^2 \cdot (r - r_j)}{|r - r_j|^3} \cdot \nabla \varphi(r_j)$$

$$\nabla \frac{a}{|r - r_j|} = a \cdot \nabla \cdot \frac{1}{R};$$

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \nabla R = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3};$$

$$\nabla R = \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y}{R}; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}; \quad \nabla R = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$[1 - \varphi(r)] \cdot \left[1 - \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right] \rightarrow [1 - \varphi(r) - a \cdot \nabla \varphi] \cdot \left[1 - \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \frac{a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \right]$$

$$1 - \varphi(r) - a \cdot \nabla \varphi - \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \varphi(r) \cdot \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + a^2 \cdot \nabla \varphi \cdot \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} +$$

$$+ \frac{a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} - \varphi(r) \cdot \frac{a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} - a^2 \cdot \nabla \varphi \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

Bu yerda b parametr $\varphi(a)=1$ shartdan topiladi.

Endi bu tenglamaga xuddi avvalgidek Laplas operatori bilan ta'sir qilamiz

va $\Delta \left(\frac{dr}{r^3} \right) = 4 \cdot \pi \cdot (dV) \cdot \delta(r)$ ekanligini inobatga olamiz.

So'ngra $\delta(r - r')$ funksiya bilan integrallashtan so'ng quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$-(1 + \chi_0^2 \cdot a^2) \cdot \Delta \varphi + \chi_0^2 \cdot \varphi = 4 \cdot \pi \cdot b \cdot \delta(r) \quad (1.3.3)$$

Endi bu tenglamani barcha hadlarini $1 + \chi_0^2 \cdot a^2$ ga bo'lib, tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz.

$$-\Delta\varphi + \frac{\chi_0^2}{1 + \chi_0^2 \cdot a^2} \cdot \varphi = \frac{4 \cdot \pi \cdot b}{1 + \chi_0^2 \cdot a^2} \cdot \delta(r) \quad (1.3.4)$$

Endi

$$\chi^2 = \frac{\chi_0^2}{1 + \chi_0^2 \cdot a^2}; \quad \frac{b}{1 + \chi_0^2 \cdot a^2} = B \quad (1.3.5)$$

belgilashlar kiritsak oxirgi tenglama xuddi (1.1.8) tenglama ko'rinishiga keladi.

$$-\Delta\varphi + \chi^2 \cdot \varphi = 4 \cdot \pi \cdot B \cdot \delta(r)$$

Bu tenglamani echimi esa yuqorida ko'rsatilganidek quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\varphi(r) = \frac{B}{r} \exp(\chi \cdot B) \cdot \exp(-\chi \cdot r) = \frac{b}{(1 + \chi_0^2 \cdot a^2) \cdot r} \cdot \exp\left(\frac{\chi \cdot b}{1 + \chi_0^2 \cdot a^2}\right) \cdot \exp(-\chi \cdot r)$$

$$\chi = \frac{\chi_0}{\sqrt{1 + \chi_0^2 \cdot a^2}} \quad \begin{cases} \chi_0 \cdot a \ll 1, & \chi \approx \chi_0 \\ \chi_0 \cdot a \gg 1, & \chi \approx \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \frac{B}{r} \exp[-\chi \cdot (r - B)] \quad (1.3.6)$$

Ko'rinib turibdiki $\chi_0 \cdot a \ll 1$ bo'lsa, bu echim (1.1.9) - ifoda bilan aniqlanuvchi avalgi natijamizga keladi. (1.3.5) - ifoda bilan aniqlanuvchi χ parametr kichik zichliklar xolida zichlikka bog'liq holda chiziqli qonun bo'yicha oshadi. Katta zichliklar holida esa o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

$$\chi^2 = \frac{\chi_0^2}{1 + \chi_0^2 \cdot a^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot a \cdot n}{1 + 4 \cdot \pi \cdot a^3 \cdot n} \quad \begin{cases} n \cdot a^3 \ll 1, & 4 \cdot \pi \cdot a \cdot n \\ n \cdot a^3 \gg 1, & \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

Endi biz yuqorida topgan $\varphi(r)$ funksiyaning ifodasidan foydalanib, Boze - Eynshteyn kondensatidagi bitta zarrachaning energiyasini hisoblash qiyin emas. U quyidagi ifoda bilan aniqlanadi.

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \cdot \chi_0^2}{2 \cdot m} \cdot \left(1 + \frac{a \cdot \chi_0}{2}\right) \quad (1.3.7)$$

$$\varepsilon = \int \psi \frac{P^2}{2 \cdot m} \cdot \psi^* d\vec{r} = -\frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \int \psi \cdot \Delta \psi^* dr$$

$$\psi = \bar{\psi} \cdot [1 - \varphi(r)]; \quad |\psi|^2 = \frac{1}{V}$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \cdot \chi_0^2}{2 \cdot m} \cdot \left[1 + \frac{a}{2} \cdot \frac{\chi_0}{\sqrt{1 + \chi_0^2 \cdot a^2}} \right]$$

$$\chi_0 \cdot a \ll 1; \quad \varepsilon \approx \frac{\hbar^2 \cdot \chi_0^2}{2 \cdot m} \cdot \left(1 + \frac{a \cdot \chi_0}{2} \right) \approx \frac{\hbar^2 \cdot \chi_0^2}{2 \cdot m}$$

$$\chi_0 \cdot a \gg 1; \quad \varepsilon \approx \frac{\hbar^2 \cdot \chi_0^2}{2 \cdot m} \cdot \frac{3}{2}$$

Ko'rinib turibdiki bitta zarrachaga mos keluvchi energiya kichik zichliklar holida xuddi avvalgidek zarralarning konsentratsiyasiga proporsional bo'ladi. Katta zichliklar xolida esa bu energiya siyraklashgan Boze - Eynshteyn gazidagidan 1,5 marta ortik bo'ladi.

Endi biz yuqorida topgan munosabatlardan foydalanib o'ta oquvchan geliyning ayrim xususiyatlarini sifat jixatdan tahlil qilamiz. Bu holda $\chi_0^2 \cdot a^2 = 4 \cdot \pi \cdot a^3 \cdot n \gg 1$ bo'lganligi uchun (1.3.7) - formuladagi qavs ichidagi ifoda bir yarimga teng. Bu ifoda atomlar bir - biriga nisbatan ancha uzoq joylashgan holga mos keluvchi atomlarning kinetik energiyasidir.

Ammo aslini olganda atomlar orasidagi o'zaro ta'sir energiyasini xmda 0 tebranishlar energiyasini xdeobga olish lozim. Bizga ma'lumki O tebranishlar energiyasi atomlarning potentsial energiyasi minimumga erishadigan nukталarga moe keluvchi kinetik energiyaga teng.

$$\chi_0 \cdot a \gg 1, \quad \varepsilon = \frac{3}{4} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot \chi_0^2}{m} = \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot a \cdot n}{4 \cdot m} = \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n}{m}$$

Bu kinetik energiyani shartli ravishda potentsial energiya deb ataymiz. Bu energiyaning qiymati kondensatni tashkil qiluvchi zarralar orasidagi masofaga yoki zarralarning konsentratsiyasiga bog'liq bo'ladi. Bizga ma'lumki har qanday tizim eng minimal potentsial energiyaga ega bo'lgan holatga intiladi. Demak, Boze - Eynshteyn gazi ham bu holatda minimal potentsial energiyaga ega bo'lib uning bu nuqta atrofidagi qiymatini quyidagicha yozish mumkin.

$$U(n) = U(n_0) + \frac{dU}{dn} \cdot (n_0) \cdot (n - n_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2U}{dn^2} \cdot (n_0) \cdot (n - n_0)^2 = -U_{\min} + \frac{b}{2} \cdot (n - n_0)^2$$

$$\frac{dU}{dn} \cdot (n_0) \cdot (n - n_0) \rightarrow 0$$

Bu erda n_0 potensial energiya minimumga ega bo'ladigan holdagi zarralarning konsentratsiyasi.

$$N = n \cdot V = n \cdot V \cdot a^3; \quad n \cdot a^3 = 1$$

Shuning uchun potensial energiyaning bu nuqta atrofidagi yoyilmasida $n - n_0$ ga proporsional had ishtirok etmaydi. Chunki $\frac{dU}{dn}$ ning n_0 nuqtadagi qiymati nolga teng. $n - n_0$ ning kvadratiga proporsional had oldidagi koeffitsient esa musbat ishorali bo'lishi lozim. Chunki potensial energiya minimumga ega bo'lishi uchun $\frac{d^2U}{dn^2}$ hosilaning ishorasi n_0 nuqtada musbat bo'lishi lozim.

Demak, Boze - Eynshteyn kondensatidagi bitta atomga mos keluvchi energiyani biz qarayotgan holda quyidagicha yozish mumkin.

$$\varepsilon = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} - U_{\min} + \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{2 \cdot m \cdot n_0} \cdot (n - n_0)^2 \quad (1.3.8)$$

Biz bu ifodani yozishda energiya ifodasiga kiruvchi barcha hadlarni birinchi had bilan bir xil ko'rinishga va bir xil o'lchov birligiga ega bo'ladigan qilib yozdik.

$$\chi_0 \cdot a \gg 1; \quad \varepsilon = \frac{3}{4} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot \chi_0^2}{m} = \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot a \cdot n}{4 \cdot m} = \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n}{m}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_k + U = \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n}{m} - U_{\min} + \frac{b}{2} \cdot (n - n_0)^2$$

$$b = \frac{\varepsilon_k \cdot B}{n_0}$$

$$\varepsilon = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} - U_{\min} + \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{2 \cdot m \cdot n_0} \cdot (n - n_0)^2 \cdot B$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a}{m \cdot n_0} \cdot (n - n_0) \cdot B + \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a}{m}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$$

$$\frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m \cdot n_0} \cdot (n - n_0) \cdot B + \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} = 0$$

$$\frac{(n - n_0)}{n_0} \cdot B = -1$$

$$\begin{aligned}
n - n_0 &= -\frac{n_0}{B}; & n &= n_0 - \frac{n_0}{B} = n_0 \cdot \left(\frac{B-1}{B} \right) \\
U &= -U_{\min} + \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{2 \cdot m \cdot n_0} \cdot B \cdot \frac{n_0^2}{B^2} = -U_{\min} + \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{2 \cdot m \cdot B} \\
\varepsilon_k &= \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n_0}{m} \cdot \left(\frac{B-1}{B} \right) \\
\varepsilon &= \varepsilon_k + U = \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n_0}{m} \cdot \left(\frac{B-1}{B} \right) - U_{\min} + \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n_0}{2 \cdot m \cdot B} = \\
&= -U_{\min} + \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n_0}{m \cdot B} \cdot \left[(B-1) + \frac{1}{2} \right] = -U_{\min} + \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n_0}{m \cdot B} \cdot \left(\frac{2 \cdot B - 1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Endi (1.3.8) - ifodadan foydalanib, Boze - Eynshteyn kondensatining muvozanat holatdagi konsentratsiyasini topamiz. Buning uchun bu gazga ta'sir qiluvchi ichki va tashqi bosimlar teng bo'lishi kerak yoki boshqacha qilib aytganda $\frac{\partial \varepsilon}{\partial m} = 0$ shart bajarilishi lozim.

$$\begin{aligned}
n - n_0 &= -\frac{n_0}{B} & \text{va} & & U &= -U_{\min} + \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n_0}{2 \cdot m \cdot B} & (1.3.9) \\
\varepsilon &= -U_{\min} + \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n_0}{m \cdot B} \cdot \left(\frac{2 \cdot B - 1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Oxirgi formuladagi birinchi munosabat muvozanat holatdagi konsentratsiyani ikkinchi munosabat esa muvozanat holatiga mos keluvchi bitta atomning energiyasini bildiradi.

$$\begin{aligned}
E &= N \cdot \varepsilon = n \cdot V \cdot \varepsilon = V \cdot n \cdot \left[\frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a \cdot n}{m} - U_{\min} + \frac{3 \cdot \hbar^2 \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot m \cdot n_0} \cdot B \cdot (n - n_0)^2 \right] \\
n &= \frac{N}{V} \\
\frac{\partial E}{\partial V} &= \frac{\partial E}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial V} = -\frac{N}{V^2} \cdot \frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{N}{V^2} \cdot N \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = -\frac{N^2}{V^2} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \\
P &= -\frac{\partial E}{\partial V} = n^2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \\
C_s^2 &= \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left[n^2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right] \\
E &= N \cdot \left[\frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot N}{m \cdot V} - U_{\min} + \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{2 \cdot m \cdot n_0} \cdot B \cdot \left(\frac{N}{V} - n_0 \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial V} &= N \cdot \left\{ -\frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot N}{m \cdot V^2} - \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot B \left(\frac{N}{V} - n_0 \right)}{2 \cdot m \cdot n_0 \cdot V^2} \right\} = \\
&= -\frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot N^2}{m \cdot V^2} \cdot \left[1 + \frac{B}{n_0} \cdot \left(\frac{N}{V} - n_0 \right) \right] \\
P &= -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n^2}{m} \cdot \left[1 + \frac{B}{n_0} \cdot (n - n_0) \right] \\
\frac{\partial P}{\partial n} &= \frac{b \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot \left[1 + \frac{B}{n_0} \cdot (n - n_0) \right] + \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n^2}{m} \cdot \frac{B}{n_0} = \\
&= \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot \left[2 + \frac{2 \cdot B}{n_0} \cdot (n - n_0) + \frac{n \cdot B}{n_0} \right] = \\
&= \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot \left[2 + \frac{B}{n_0} \cdot (2n - 2n_0 + n) \right] = \\
&= \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot \left[2 + \frac{B}{n_0} \cdot (3n - 2n_0) \right] = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot \left[2 + B \cdot \left(\frac{3n}{n_0} - 2 \right) \right] = \\
&= \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot \left[2 + B \cdot \left(3 - \frac{3}{B} - 2 \right) \right] = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot \left[2 + B \cdot \left(1 - \frac{3}{B} \right) \right] = \\
&= \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot (2 + B - 3) = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot (B - 1) \\
\frac{\partial P}{\partial n} &= \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} \cdot (B - 1); \quad C_s^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m^2} \cdot (B - 1)
\end{aligned}$$

Endi Boze - Eynshteyn kondensatidagi barcha zarralarning energiyasi $E = N \cdot \varepsilon$ ekanligidan foydalanib, katta zichlikdagi gazning bosimini topamiz:

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n^2}{m} \cdot \left[1 + \frac{B}{n_0} \cdot (n - n_0) \right]$$

Bu erdan ko'rinib turibdiki katta zichlikdagi gazning bosimi kontsentratsiyaning kvadratiga emas balki kubiga ham bog'liqdir. Ya'ni gazdagi zarralarning o'zaro ta'siri oqibatida xuddi Vander – Val's gazidagidek qo'shimcha bosim yuzaga keladi. Endi bosimning zarralar kontsentratsiyasiga bog'liqligini bilgan holda bu gazda tarqaluvchi tovush tezligini kvadratini topamiz.

$$C_s^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m^2} \cdot (B-1) \quad (1.3.10)$$

Oxirgi ifodada faqat bitta noma'lum doimiy B ishtirok etadi va uning qiymatini eksperimental topilgan tovush tezligi C_s zarralarning kontsentratsiyasi n ni bilgan holda topamiz. Eksperiment natijasiga ko'ra

$$C_s = 2,4 \cdot 10^4 \frac{sm}{s}; \quad n = 2,2 \cdot 10^{22} sm^{-3}; \quad a = 2,7 \cdot 10^{-8} sm;$$

U holda (1.3.10) - formula asosida hisoblashlarga ko'ra $B \approx 5$ ga tengligini topamiz. Endi (1.2.3) - ifodadan foydalanib $n - n_0 = \frac{m}{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a} \cdot (U_0 - U)$

Muvozanat holatdagi potensial energiyani topamiz.

$$n - n_0 = \frac{m}{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a} \cdot (U_0 - U) \quad U = U_0 \quad \text{bo'lsa,} \quad n = n_0$$

$$U_0 - U = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot (n - n_0) = - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{m \cdot B}$$

$$U_{\min} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{2 \cdot m \cdot B}$$

Yuqorida biz keltirgan kontsentratsiya , zarralar orasidagi masofa va B doimiyning qiymatlarini bilgan holda ko'rish mumkinki oxirgi ifodadagi ikkinchi had birinchisining takriban 20% ni tashkil qiladi. Agar potentsial energiyaning muvozanat vaziyatiga mos keluvchi ushbu qiymatini hisoblab chiqadigan bo'lsak, u bir necha kelvin haroratga mos kelishini ko'rish mumkin. Shuni ta'kidlash lozimki siyraklashgan ideal gaz yaqinlashuvida tovush tezligining kvarati uchun topilgan ifoda bo'yicha hisob kitob qilsak, u eksperiment natijalaridan taqriban uch marta kichik ekanligini ko'rish mumkin. Demak, haqiqatdan ham Boze - Eynshteyn kondensatini tashkil qiluvchi zarrachalar orasidagi o'zaro ta'sirni hisobga olmasdan turib, geliy da tarqaluvchi tovush tezligini aniq hisoblab bo'lmas ekan.

I bobning xulosasi.

1. Boze - Eynshteyn kondensatida yuzaga keluvchi kollektiv harakatlar haqida tushunchaga ega bo'ldik.
 2. Tashqi maydonlar ta'siridagi Boze - Eynshteyn gazining muvozanat sharti o'rganildi.
 3. Kuchli o'zaro ta'sirlashuvchi zarralardan iborat Boze -Eynshteyn gazining xossalari o'rganildi.
-

II - bob. Boze - Eynshteyn kondensatida tarqaluvchi to'liqlar

2.1 Boze - Eynshteyn kondensatida yuzaga keluvchi kollektiv harakatlar

Biz yuqorida ta'kidlagan edikki agar Boze - Eynshteyn kondensatidagi zarralar orasidagi o'zaro ta'sir inobatga olinsa, uni tashkil qiluvchi zarralarni yagona to'liq funktsiya vositasida tavsiflash mumkin. Avvalgi natijalarimizga ko'ra uni quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin.

$$\psi = \psi_0 \cdot \Phi = \bar{\psi}^N \exp \left[1 + N - \sum_{i \neq j} \varphi(|r_i - r_j|) \right] \quad (2.1.1)$$

Agar gaz bir jinsli bo'lib, uni tashkil qiluvchi zarralarning tartiblangan ilgarilanma harakati mavjud bo'lsa ψ_0 ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\psi_0 = \bar{\psi}^N = V^{-\frac{N}{2}}$$

Agar gazni $\mathcal{G}$ tezlik bilan harakatga keltirilsa, uni tashkil qiluvchi zarrachalarning har biri qo'shimcha $P = m \cdot \mathcal{G}$ impuls oladi. Demak, boshqacha qilib aytganda har bir zarrachaning to'liq funktsiyasi $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_i)$ ga o'zgaradi. k bu erda quyidagi ifodaga teng bo'ladi. $\vec{k} = \frac{m \cdot \vec{\mathcal{G}}}{\hbar}$ k - to'liq vektori. Demak, ψ_0 funktsiya quyidagiga teng bo'ladi.

$$\psi_0 = V^{-\frac{N}{2}} \exp(i\vec{K} \cdot \vec{R}) \quad (2.1.2)$$

$$\psi_0 = \bar{\psi}^N; \quad \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}}; \quad \bar{\psi} \Rightarrow \bar{\psi} \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_i)$$

$$\psi_0 \Rightarrow V^{-\frac{N}{2}} \exp \{ i \cdot N \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}_i \} = V^{-\frac{N}{2}} \exp \{ i \cdot \vec{K} \cdot \vec{R} \}$$

$$\vec{K} = \frac{M \cdot \vec{\mathcal{G}}}{\hbar}; \quad \vec{R} = \frac{\sum \vec{r}_i}{N}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{R} = \frac{N \cdot m \cdot \vec{\mathcal{G}}}{\hbar} \cdot \frac{\sum \vec{r}_i}{N} = \sum \vec{k} \cdot \vec{r}_i$$

Bu yerda $\vec{K} = \frac{M \cdot \vec{\mathcal{G}}}{\hbar}$; va $\vec{R} = \frac{\sum \vec{r}_i}{N}$ bo'ladi. Demak, $\vec{R}$ gazni tashkil qiluvchi zarralar massa markazining koordinatasi. $\vec{K}$ esa gazning kollektiv harakatiga mos keluvchi to'liq vektori.

Kondensatning to'liq funksiyasini uni tashkil qiluvchi zarrachalarning ixtiyoriy harakati holida quyidagicha tavsiflash mumkin.

$$\begin{aligned}\psi_0 &= V^{\frac{N}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \cdot \sum_i \theta(\vec{r}_i) \right] \\ \psi &= A \cdot \exp(i \cdot \varphi); \quad \varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} \\ \psi &= A \cdot \exp(i \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}); \quad \vec{k} = \frac{\vec{P}}{\hbar} = \frac{m \cdot \vec{g}}{\hbar}\end{aligned}$$

Bu erda θ to'liq funksiya fazasi bo'lib, zarraning tezligi bilan quyidagicha bog'langan.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \vec{k}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega; \quad \vec{k} = \frac{m \cdot \vec{g}}{\hbar}; \\ \varphi &= \frac{1}{\hbar} \cdot (P \cdot r - E \cdot t) = \frac{1}{\hbar} \cdot \theta; \quad \theta = P \cdot r - E \cdot t \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= P = m \cdot \vec{g}_x; \quad g_x = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad g_y = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad g_z = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}; \\ \vec{g} &= g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k} = \frac{1}{m} \cdot \nabla \theta \\ \vec{g} &= \frac{1}{m} \cdot \nabla \theta\end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Biz yuqorida ta'kidlagan edikki, absolyut 0 temperaturada ψ_0 to'liq funksiya uni tashkil qiluvchi zarralar to'liq funksiyalarining ko'paytmasiga teng. Shuning uchun umumiy holda zarralarning to'liq funksiyalarini odatdagidek zarralar koordinatalarining va vaqtning funksiyasi deb qarash mumkin. Agar $\bar{\psi}, \vec{r}$ ga bog'liq bo'lsa, har doimgidek $\int |\bar{\psi}|^2 d\vec{r} = 1$ shart bajarilishi lozim. Buni boshqacha qilib aytganda zarralarning zichligi yoki konsentratsiyasi quyidagicha aniqlanishi lozim.

$$\int n \cdot d\vec{r} = N \rightarrow \int \frac{n}{N} \cdot d\vec{r} = 1 = \int |\bar{\psi}|^2 d\vec{r}; \quad \rightarrow \quad n = N \cdot |\bar{\psi}|^2;$$

Shunday qilib, Boze - Eynshteyn kondensatidagi zarralarning umumiy holdagi harakatini vaqtga bog'liq quyidagi Shryodinger tenglamasi yordamida tavsiflaymiz.

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \cdot \psi \quad (2.1.4)$$

Bu yerda H ideal gazni tashkil qiluvchi zarrachalarning kinetik energiyasining yig'indisiga teng. To'liq funktsiya esa biz oldin ta'kidlaganimizdek zarralar orasidagi masofa eng kichik bo'lganda 0 ga teng bo'lishi lozim. Agar to'liq funktsiya χ^{-1} masofada unchalik ham tez o'zgarmasa Φ funktsiya uchun quyidagi statsionar Shryodinger tenglamasini qarash mumkin.

$$H \cdot \Phi = N \cdot \varepsilon \cdot \Phi; \quad \hat{H} \cdot \Phi = E \cdot \Phi; \quad E = N \cdot \varepsilon$$

Demak, bu holda Boze - Eynshteyn kondensatining holatini tavsiflovchi to'liq funktsiyani aloxida olingan zarralar to'liq funktsiyalarining ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin. Boshqacha kishb aytganda, bu gazda-gi aloxida zarralarning to'liq funktsiyalarini bilgan holda butun sistemaning to'liq funktsiyasini topish mumkin.

Endi Boze - Eynshteyn gazidagi ixtiyoriy aloxida olingan zarrachaning to'liq funktsiyasini topish uchun Shryodinger tenglamasini tuzamiz. Buning uchun ushbu zarraning kinetik energiyasini topish lozim. Biz bu masalani yuqorida hal qilgan edik. Birorta zarraning qolgan barcha zarralar bilan o'zaro ta'sir energiyasi $\mu = 2 \cdot \varepsilon$ ga tengligini ko'rsatgan edik.

Bu yerda ε bitta zarrachaga mos keluvchi kinetik energiyani bildiradi. Ikkinchi qismi esa zarraning kondensatni tashkil qiluvchi boshqa zarralar bilan o'zaro ta'sirini inobatga oladi. Demak, Boze - Eynshteyn gazidagi aloxida olingan zarra uchun Shryodinger tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \Delta \bar{\psi} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot N \cdot |\bar{\psi}|^2 \cdot \bar{\psi} + U \cdot \bar{\psi} \quad (2.1.5)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi birinchi had ega bo'lib, ular zarraning kinetik va potentsial energiyalariga mos keladi.

$$\hat{H} = \hat{T} + U; \quad \hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2 \cdot m}; \quad \hat{P} = -i \cdot \hbar \cdot \nabla; \quad \hat{P}^2 = -\hbar^2 \cdot \nabla^2 = -\hbar^2 \cdot \Delta$$

O'rtadagi had esa Boze - Eynshteyn gazidagi aloxida zarrachaning uni tashkil qiluvchi boshqa zarralar bilan o'zaro ta'sirini inobatga oladi.

$$U_n = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot N |\psi|^2$$

Bu tenglama aslini olganda chiziqli bo'lmagan Shryodinger tenglamasi bo'lib uni Boze - Eynshteyn kondensatsiyasini tavsiflash uchun Gross - Pitaevskiy tomonidan taklif qilingan. Shuning uchun bu tenglamani odatda Gross - Pitaevskiy tenglamasi deb ham yuritiladi. Endi bu tenglamaga kiruvchi $\sqrt{N} \cdot \bar{\psi}$ hadni quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$n = N \cdot |\psi|^2; \quad \sqrt{n} = \sqrt{N} \cdot |\bar{\psi}|$$

$$\sqrt{N} \cdot \bar{\psi} = \sqrt{n} \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} \cdot \theta(\vec{r}, t)\right] \quad (2.1.6)$$

Endi bu ifodani (2.1.5) - ifodaga qo'yamiz. Shundan so'ng uning haqiqiy va mavxum qismlarini ajratamiz.

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \Delta \bar{\psi} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot N \cdot |\bar{\psi}|^2 \cdot \bar{\psi} + U \cdot \bar{\psi}$$

$$\bar{\psi} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right)$$

$$\nabla \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \nabla n + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta \right\} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right)$$

$$\nabla(\nabla \bar{\psi}) = \Delta \bar{\psi}$$

$$\Delta \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left[\left\{ -\frac{1}{4 \cdot n \cdot \sqrt{n}} \cdot (\nabla n)^2 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \Delta n + \frac{\nabla n}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \Delta \theta \right\} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right) + \left\{ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \nabla n + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta \right\} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right)}{\sqrt{N}} \cdot \left[-\frac{1}{4 \cdot n \cdot \sqrt{n}} (\nabla n)^2 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \Delta n + \frac{\nabla n}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \Delta \theta + \right. \\
& \left. + \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \nabla n + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta \right) \right] = \\
& \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right)}{\sqrt{N}} \cdot \left[-\frac{1}{4 \cdot n \cdot \sqrt{n}} (\nabla n)^2 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \Delta n + \frac{\nabla n}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \Delta \theta + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla n \cdot \nabla \theta - \frac{\sqrt{n}}{\hbar^2} \cdot (\nabla \theta)^2 \right] = \\
& = \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right)}{\sqrt{N}} \cdot \left[-\frac{1}{4 \cdot n \cdot \sqrt{n}} \cdot (\nabla n) \cdot + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \Delta n + \frac{\nabla n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \nabla \theta + \frac{i}{\hbar} \cdot \Delta \theta - \frac{\sqrt{n}}{\hbar^2} \cdot (\nabla \theta)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right) \\
i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} &= i \cdot \hbar \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} + \sqrt{n} \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right) = \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \theta\right)}{\sqrt{N}} \cdot \left\{ \frac{i \cdot \hbar}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} - \sqrt{n} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\}
\end{aligned}$$

Endi (2.1.5) - tenglamaning chap va o'ng qismidagi haqiqiy qismlarni tenglashtiramiz.

$$\begin{aligned}
-\sqrt{n} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \left[-\frac{1}{4 \cdot n \cdot \sqrt{n}} \cdot (\nabla n)^2 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \Delta n - \frac{\sqrt{n}}{\hbar^2} \cdot (\nabla \theta)^2 \right] + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot n \cdot \sqrt{n} + U \cdot \sqrt{n} \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \left[-\frac{1}{4 \cdot n^2} \cdot (\nabla n)^2 + \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \Delta n - \frac{1}{\hbar^2} \cdot (\nabla \theta)^2 \right] - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot n - U \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{(\nabla \theta)^2}{2 \cdot m} &= \frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \left[-\frac{1}{4 \cdot n^2} \cdot (\nabla n)^2 + \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \Delta n \right] - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot n - U
\end{aligned}$$

Endi (2.1.5) - tenglamaning mavhum qismlarini tenglashtiramiz.

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{2 \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \left\{ \frac{\nabla n \cdot \nabla \theta}{\hbar \cdot \sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\hbar} \cdot \Delta \theta \right\} \\
\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \left\{ \frac{\nabla n \cdot \nabla \theta}{\hbar \cdot \sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\hbar} \cdot \Delta \theta \right\} \\
\frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \left\{ \frac{\nabla n \cdot \nabla \theta}{\hbar} + \frac{\sqrt{n}}{\hbar} \cdot \Delta \theta \right\} \\
\frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\nabla n \cdot \nabla \theta}{m} - \frac{n}{m} \cdot \Delta \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\nabla n \cdot \nabla \theta}{m} + \frac{n}{m} \cdot \Delta \theta &= 0 \\
\frac{1}{m} \cdot \nabla(n \cdot \nabla \theta) &= \frac{1}{m} [\nabla n \cdot \nabla \theta + n \cdot \Delta \theta] \\
\nabla \theta &= m \cdot \vec{g} \\
\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \cdot \vec{g}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{(\nabla \theta)^2}{2 \cdot m} &= \frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \Delta n - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} - U \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{(\nabla \theta)^2}{2 \cdot m} &= \frac{\hbar^2}{4 \cdot m \cdot n} \cdot \Delta n - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} - U
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Shunday qilib biz zarralarning konsentratsiyasini va to'liqin funksiyaning fazasini aniqlovchi o'zaro bog'langan (2.1.7) va (2.1.8) - tenglamalarni hosil qildik. (2.1.7) - tenglamaning barcha hadlarini gaz zarralarining massasiga ko'paytirsak va gaz zichligi $\rho = m \cdot n$ ekanligini inobatga olsak u odatdagi uzluksizlik tenglamasi ko'rinishini beradi.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{g}) = 0 \text{ Uzluksizlik tenglamasi.}$$

Endi (2.1.8) – tenglamaning ikkala tomoniga ∇ operatori bilan ta'sir qilib quyidagi natijani olamiz.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \nabla \theta + \frac{1}{2 \cdot m} \cdot (\nabla \theta)^2 &= \frac{\partial}{\partial t} (m \cdot \vec{g}) + \frac{1}{2 \cdot m} \nabla (m^2 \cdot \vec{g}^2) = \\
m \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \frac{m}{2} \cdot 2 \cdot \vec{g} \cdot \nabla \vec{g} &= m \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + m \cdot \vec{g} \cdot \nabla \vec{g} \\
\frac{\hbar^2}{4 \cdot m} \cdot \nabla \left(\frac{\Delta \cdot n}{n} \right) - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot \nabla n - \nabla U \\
\Delta n \cdot \nabla \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \nabla (\Delta n) &= -\frac{1}{n^2} \cdot \Delta n \cdot \nabla n + \frac{1}{n} \cdot \nabla^3 n = -\frac{\Delta n \cdot \nabla n}{n^2} + \frac{\nabla^3 n}{n}
\end{aligned}$$

Konsentratsiyaning o'zgarishlari uzluksiz bo'lsa, oxirgi ifodadagi ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalar qatnashgan hadlarni inobatga olmaslik mumkin.

$$m \left[\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{g} \cdot \nabla \vec{g} \right] = -\frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot \nabla n - \nabla U$$

2.2 Boze - Eynshteyn kondensatida tarqaluvchi nochizigiy tovush to'liqlari

Endi (2.1.7) va (2.1.8) tenglamalardan kvazi klassik yaqinlashuvda ideal gazodinamika tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Buning uchun (2.1.8) -

tenglamadagi o'ng tomonidagi birinchi hadni inobatga olmaymiz, chunki u boshqa hadlarga nisbatan judaham kichik. Natijada (2.1.8) - tenglamaning har ikkala tomoniga ∇ operatori bilan ta'sir qilamiz.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \cdot \vec{g}) = 0 \quad (2.2.1)$$

$$m \left[\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + (\vec{g} \cdot \nabla) \vec{g} \right] + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot \nabla n + \nabla U = 0 \quad (2.2.2)$$

Bu yerdan ko'rib turibdiki Boze - Eynshteyn kondensatining muvozanat sharti quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} + U = 2 \cdot \varepsilon + U = \text{const} \quad (2.2.3)$$

$$m \left[\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{g} \cdot \nabla \vec{g} \right] = - \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot \nabla n - \nabla U$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}; \quad d\vec{g} = d\vec{g}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} \cdot dz$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} \cdot dz = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + (\vec{g} \cdot \nabla) \cdot \vec{g}$$

$m \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = 0$ bo'lgandagina zarracha muvozanat vaziyatida bo'ladi.

$$- \nabla \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} + U \right) = 0$$

Demak, bu shart bajarilishi uchun qavs ichidagi ifoda o'zgarmas bo'lishi kerak. $\frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} + U = \text{const}$

$\varepsilon = \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m}$ bo'lganini inobatga olib, oxirgi quyidagi ko'rinishda yozish

mumkin. $\frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n}{m} + U = 2 \cdot \varepsilon + U = \text{const}$

Ko'rinib turibdiki, bus hart biz oldin keltirib chiqargan ideal gazning muvozanat sharti bilan mos tushadi. Demak, bu tenglamalarni taqsimlash shuni ko'rsatadiki, biz ideal gazning muvozanat shartini keltirib chiqarishda (2.1.8) tenglamaning o'ng tomonidagi birinchi hadni, ya'ni "Kvant bosimni" inobatga

olmagan edik. Shuni alohida ta'kidlaymizki biz yuqorida olgan natijalar faqat potensial yoki uyurmasiz oqimlar uchungina o'rinlidir. Chunki $m \cdot \vec{\mathcal{G}} = \nabla \theta$ Huddi avvalgidek (2.2.2)-tenglamani quyidagicha ham talqin qilish mumkin.

$$\begin{aligned} \nabla P + n \cdot \nabla U &= 0; & \frac{\nabla P}{n} + \nabla U &= 0 \\ \frac{\nabla P}{n} &= \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot \nabla n; & \nabla P &= \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} \cdot n \cdot \nabla n; \\ \nabla \left[P - \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n^2}{m} \right] &= 0; & P &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n^2}{m} \end{aligned}$$

Demak, yuqoridagi tenglamani bosimi $P = \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n^2}{m}$ bo'lgan gazrdinamika tenglamalari ko'rinishida yozish mumkin. Shuning uchun bu tenglamalarning echimlari gazodinamik tenglamalarning echimlari kabi bo'ladi. Masalan $U=0$ bo'lsa faqat x va t ga bog'liq bo'lgan echimlarni qidirish mumkin. Jumladan agar gazning zichligi tezlikning funksiyasi deb qaralsa, u holda gaz zarralarining tezliklari va konsentratsiyasini tavsiflovchi tenglamalar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{\partial t} + (\vec{\mathcal{G}} \pm C_s) \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{\partial x} &= 0 \\ \sqrt{n} &= \sqrt{n_0} \pm \mathcal{G} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{16 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$n = n(x, t); \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(x, t); \quad n = n(\mathcal{G})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n \cdot \mathcal{G}) = \frac{\partial n}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} + n \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left\{ \frac{\mathcal{G}^2}{2} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n \right\} = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{n \cdot \mathcal{G}\} = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial \mathcal{G}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}; \quad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial \mathcal{G}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial n}{\partial \mathcal{G}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathcal{G}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + n \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0$$

Gazning dastlabgi zichligi n_0 ga teng bo'lib, gaz zarralari ilgariharakatining tezligi 0 ga teng bo'lsa, yuqoridagi tenglamada konsentratsiya va tezlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n', & \mathcal{G} &= \mathcal{G}' \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial n'}{\partial t}; & n \cdot \mathcal{G} &= (n_0 + n') \cdot \mathcal{G}'; \\ \frac{\partial}{\partial x}(n \cdot \mathcal{G}') &= \frac{\partial}{\partial x}[(n_0 + n') \cdot \mathcal{G}'] = \frac{\partial n'}{\partial x} \cdot \mathcal{G}' + (n_0 + n') \cdot \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} \approx n_0 \cdot \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} \end{aligned}$$

Bu yerda n' va $\mathcal{G}'$ gaz zarralarining konsentratsiyasi va zarralarning tezligini o'zgarishini bildiradi. Agar gaz zarralarining konsentratsiyasi va tezligining o'zgarishi etarlicha kichik bo'lsa ya'ni: $n' \ll n_0$, $\mathcal{G} \rightarrow 0$

Yuqoridagi tenglamalar sistemasini n' va $\mathcal{G}'$ ga nisbatan chiziqlashtirish mumkin.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial n'}{\partial t}; \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n \cdot \mathcal{G}) = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \cdot \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} = 0 \quad (A)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial t} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot \frac{\partial n'}{\partial x} = 0 \quad (B)$$

Shunday qilib, n' va $\mathcal{G}'$ ga nisbatan chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\mathcal{G}' = A \cdot \omega \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)}; \quad n' = B \cdot \omega \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial t} = -i \cdot A \cdot \omega \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} = -i \cdot A \cdot k \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = -i \cdot B \cdot \omega \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

$$\frac{\partial n'}{\partial x} = -i \cdot B \cdot k \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

$$\begin{cases} -i \cdot A \cdot \omega \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot i \cdot k \cdot B \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)} = 0 \\ -i \cdot B \cdot \omega \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)} + n_0 \cdot i \cdot k \cdot A \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B \cdot \omega + n_0 \cdot k \cdot A \\ -A \cdot \omega + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot k \cdot B = 0 \end{cases} \quad C = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot k$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} n_0 \cdot k \cdot A - B \cdot \omega = 0 \\ A \cdot \omega - C \cdot B = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} n_0 \cdot k \cdot \omega \cdot A - B \cdot \omega^2 = 0 \\ n_0 \cdot k \cdot \omega \cdot A - n_0 \cdot k \cdot C \cdot B = 0 \end{cases} \\ &B \cdot \omega^2 - n_0 \cdot k \cdot C \cdot B = 0 \\ &B \cdot (\omega^2 - n_0 \cdot k \cdot C) = 0 \\ &\omega^2 = n_0 \cdot k \cdot C \\ &\omega^2 = n_0 \cdot k \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot k = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{m^2} \cdot k^2 \\ &C_s^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0}{m^2} \\ &\omega^2 = C_s^2 \cdot k^2 \\ &\omega = \pm C_s \cdot k \end{aligned}$$

Demak, chiziqli yaqinlashuvda bu gazda tarqaluvchi tovush to'rlarining doiraviy chastotasi va to'rlar vektori orasidagi munosabat $\omega = \pm C_s \cdot k$ ko'rinishga ega bo'lar ekan. Demak, bu muhitda tarqaluvchi to'rlarning tezligi uning to'rlar uzunligiga bog'liq emas, chunki $\mathcal{G}_\phi = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm C_s$ bu erda $\pm$ ishora odatdagidek x o'rlarining musbat yoki manfiy yo'nalishlarida tarqaluvchi to'rlarni bildiradi. Keyingi yaqinlashuvda gazni tashkil qiluvchi zarralarning tezliklarini $\mathcal{G} = \pm C_s + \mathcal{G}'$ ko'rinishda yozish mumkin.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial t} + (\mathcal{G}' \pm C_s) \cdot \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot [(n_0 + n') \cdot (C_s + \mathcal{G}')] = 0 \\ &\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial n'}{\partial x} (C_s + \mathcal{G}') + (n_0 + n') \cdot \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} \\ &n = n(x, t) = n(x - Vt) \\ &\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, t) = \mathcal{G}(x - Vt) \\ &\xi = x - Vt \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{\partial n}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial n}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -V \cdot \frac{\partial n}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{d}{d\xi}; & \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -V \cdot \frac{d}{d\xi} \end{aligned}$$

Statsionar echim deb shunday echimga aytiladiki bunda echim x va t ning aloxida funksiyalari emas balki x-V't ga bog'lh bo'ladi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n \cdot \mathcal{G}) &= 0; & -V \cdot \frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{d}{d\xi} \cdot (n \cdot \mathcal{G}) &= 0 \\ \frac{d}{d\xi} \cdot \{-V \cdot n + n \cdot \mathcal{G}\} &= 0; & n \cdot (\mathcal{G} - V) &= const \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} &= 0 \\ -V \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} + \frac{d}{d\xi} \cdot \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n + \frac{\mathcal{G}^2}{2} \right) &= 0 \\ -V \cdot \mathcal{G} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n + \frac{\mathcal{G}^2}{2} &= const \\ const = 0 & \quad \text{desak,} \quad \mathcal{G} = V \\ \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n - \frac{\mathcal{G}^2}{2} &= 0 \\ \mathcal{G}^2 &= \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n \\ \mathcal{G}^2 - \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n &= -\frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n_0 \\ \mathcal{G}^2 &= \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n - \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot n_0 \\ \mathcal{G}^2 &= \frac{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m^2} \cdot (n - n_0) \\ (n - n_0) &= \frac{\mathcal{G}^2 \cdot m^2}{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a} \\ \sqrt{n - n_0} &= \pm \mathcal{G} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{8 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + (\mathcal{G} \pm c_s) \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Demak, bu holda konsentratsiya bu gazda tarqaluvchi to'rlinlar tezligining kvadratiga proporsional tarzda ortib borar ekan. Agar gaz

zarralarining ilgarilanma harakat tezligi etarlicha katta bo'lsa, to'liq tezligining tarqalishini tavsiflovchi tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + (\mathcal{G} + C_s) \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = \frac{C_s \cdot \partial^3 \mathcal{G}}{8 \cdot \chi_0^2 \cdot \partial x^3} \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\hbar^2}{4 \cdot m^2} \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{d^2 n}{dx^2}}{n} \right];$$

$$n = n_0 + n';$$

$$n' \ll n_0$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \cdot \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} = 0; \quad n' = A \cdot e^{i(k \cdot x - \omega \cdot t)};$$

$$\mathcal{G}' = B \cdot e^{i(k \cdot x - \omega \cdot t)}; \quad \frac{\partial n'}{\partial t} = -i \cdot \omega \cdot n'$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial x} = i \cdot k \cdot \mathcal{G}'; \quad -i \cdot \omega \cdot n' + n_0 \cdot i \cdot k \cdot \mathcal{G}' = 0$$

$$n' = \frac{n_0 \cdot k}{\omega} \cdot \mathcal{G}'$$

$$-i \cdot \omega + C_s \cdot i \cdot k = \frac{\hbar^2}{4 \cdot m^2} \cdot \frac{k}{\omega} \cdot (i \cdot k)^3$$

$$-\omega + C_s \cdot k = -\frac{\hbar^2}{4 \cdot m^2} \cdot \frac{k^4}{\omega}$$

$$-\omega^2 + C_s \cdot k \cdot \omega = -\frac{\hbar^2 \cdot k^4}{4 \cdot m^2}$$

$$\omega^2 - C_s \cdot k \cdot \omega - \frac{\hbar^2 \cdot k^4}{4 \cdot m^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{C_s \cdot k \pm \sqrt{C_s^2 \cdot k^2 + \frac{\hbar^2 \cdot k^4}{m^2}}}{2} = \frac{C_s \cdot k \pm C_s \cdot k \cdot \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{m^2 \cdot C_s^2}}}{2} \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot \left\{ C_s \cdot k + C_s \cdot k \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{m^2 \cdot C_s^2} + \dots \right] \right\} \approx \frac{1}{2} \cdot \left\{ 2C_s \cdot k + \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot k^3}{m^2 \cdot C_s} \right\} \\ \omega &= C_s \cdot k + \frac{1}{4} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot k^3}{m^2 \cdot C_s} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot k^3}{m^2 \cdot C_s} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot k^3 C_s}{m^2 \cdot C_s^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot k^3 C_s}{m^2} \cdot \frac{m^2}{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a \cdot n_0} = \frac{1}{16} \cdot \frac{k^3 C_s}{\pi \cdot a \cdot n_0};$$

$$\chi_0^2 = \pi \cdot a \cdot n_0$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot k^3}{m^2 \cdot C_s} = \frac{1}{16} \cdot \frac{k^3 C_s}{\pi \cdot a \cdot n_0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k^3 C_s}{\chi_0^2}$$

$$\omega = C_s \cdot k + \frac{1}{4} \cdot \frac{C_s \cdot k^3}{\chi_0^2}$$

Oxirgi munosabatdan ko'rinib turibdiki agar Boze - Eynshteyn gazini tashkil qiluvchi zarralarning «kvant bosimi» ta'siridagi harakatlanishlari ham e'tiborga olinsa bu gazda tarqaluvchi tovush to'lqinlarining tezligi to'lqin soni yoki to'lqin uzunligiga bog'liq bo'ladi.

$$g_d = \frac{d\omega}{dk} = C_s + \frac{3}{4} \cdot \frac{C_s \cdot k^3}{\chi_0^2} = C_s \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{k^3}{\chi_0^2}\right)$$

Ko'rinib turibdiki bu holda gazda tarqaluvchi tovush to'lqinining tarqalish teligi, tovush tezligidan katta bo'lar ekan.

Demak, bunday to'lqinlar dispersiyalanuvchi to'lqinlar bo'ladi. Chunki ularning tarqalish tezligi to'lqin soniga yoki to'lqin uzunligiga bog'liq bo'ladi. Biz keltirib chiqargan (2.2.6) - tenglama muhim fizikaviy ahamiyatga ega bo'lib, u kvadratik nochizig'iylik xususiyatiga ega bo'lgan va zaif dispersiyalanuvchi muhitlardagi to'lqinlarning tarqalishini tavsiflaydi.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = C_s \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial x^3}$$

Bu tenglamadagi nochizig'iylikni va dispersiyani tavsiflovchi hadlarni inobatga olmasak biz odatdagi to'lqin tenglamani hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} + C_s \cdot \frac{d\vartheta}{dx} &= 0 & \vartheta(x,t) &= \vartheta_0 \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega t)} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -i \cdot \omega \cdot \vartheta; & \frac{d\vartheta}{dx} &= i \cdot k \cdot \vartheta; \\ -i \cdot \omega \cdot \vartheta + C_s \cdot i \cdot k \cdot \vartheta &= 0 \\ \omega &= C_s \cdot k; \\ \vartheta_g &= \frac{d\omega}{dk} = C_s \end{aligned}$$

Demak, oxirgi tenglama x o'qining musbat yo'nalishi bo'ylab tarqaluvchi tovush to'lqinlarini tavsiflaydi.

$$\begin{aligned}
\omega &= C_s \cdot k + \frac{1}{4} \cdot \frac{C_s \cdot k^3}{\chi_0^2}; \\
\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i \cdot \omega; & \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow i \cdot k; \\
\omega &\rightarrow i \cdot \frac{\partial}{\partial t}; & k &\rightarrow -i \cdot \frac{\partial}{\partial x}; \\
i \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} &= -i \cdot C_s \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot i \cdot \frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial x^3}; & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + C_s \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial x^3} \\
& & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Bu (2.2.6)-tenglama birinchi bo'lib Korteveg- de Vriz tomonidan suyuqliklarda tarqaluvchi gidrodinamik to'lqinlar uchun keltirib chiqarilgan. Bu tenglama nochizig'iy jarayonlar fizikasidagi eng muhim tenglamalardan bo'lib, uni echishning maxsus usullari ishlab chiqarilgan. Biz quyida uning eng sodda ko'rinishidagi statsionar echimlarini topish bilan cheklanamiz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x, t) &= \mathcal{G}(x - u \cdot t) \\
\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} &= -u \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi}; & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi}; & \xi &= x - u \cdot t
\end{aligned}$$

$\xi = x - u \cdot t$ almashtirish xususiy hosilali differensial tenglamani oddiy deferentsial tenglamaga almashtirish imkonini beradi. Bu erda u muhitda tarqaluvchi statsionar to'lqinlarning tarqalish tezligi. ξ esa u tezlik bilan harakatlanuvchi sanoq sistemasidagi koordinatani anglatadi.

$$\begin{aligned}
u \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} + C_s \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} &= \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{d^3 \mathcal{G}}{d\xi^3}; \\
\frac{d}{d\xi} \cdot \left\{ -u \cdot \mathcal{G} + C_s \cdot \mathcal{G} + \frac{\mathcal{G}^2}{2} - \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}}{d\xi^2} \right\} &= 0
\end{aligned}$$

Oxirgi shart bajarilishi uchun katta qavs ichidagi ifoda ξ ga bog'liq bo'lmagan doimiy bo'lishi lozim ya'ni:

$$-u \cdot \mathcal{G} + C_s \cdot \mathcal{G} + \frac{\mathcal{G}^2}{2} - \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}}{d\xi^2} = const$$

Biz hisoblashlarni soddalashtirish uchun uni 0 ga teng deb qabul qilamiz.

$$-u \cdot \mathcal{G} + C_s \cdot \mathcal{G} + \frac{\mathcal{G}^2}{2} - \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}}{d\xi^2} = 0$$

Ya'ni $\pm\infty$ da to'liqin maydoni va uning hosilalari 0 ga teng deb qabul qilamiz.

$$\frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{d^2 g}{d\xi^2} = g \cdot (C_s - u) + \frac{g^2}{2}$$

Oxirgi tenglamada tovush tezligi bilan statsionar to'liqin tezligini ayirmasini V deb belgilasak uni quyidagicha yozish mumkin bo'ladi.

$$\frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{d^2 g}{d\xi^2} = g \cdot V + \frac{g^2}{2}$$

Endi oxirgi tenglamaning ikkala tomonini $\frac{dg}{d\xi}$ ga ko'paytirsak, quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$\frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{dg}{d\xi} \cdot \frac{d^2 g}{d\xi^2} = g \cdot V \cdot \frac{dg}{d\xi} + \frac{g^2}{2} \cdot \frac{dg}{d\xi}$$

$$\frac{dg}{d\xi} \cdot \frac{d^2 g}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dg}{d\xi} \right)^2 \right]$$

$$g \cdot \frac{dg}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \cdot \left(\frac{g^2}{2} \right)$$

$$g^2 \cdot \frac{dg}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot g^3 \right)$$

$$\frac{d}{d\xi} \cdot \left\{ \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dg}{d\xi} \right)^2 - \frac{V \cdot g^2}{2} - \frac{1}{6} \cdot g^3 \right\} = 0$$

Yuqoridagi mulohazalarimizga binoan katta qavs ichidagi ifoda 0 ga teng bo'ladi.

$$\begin{aligned}
& \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 - \frac{V \cdot \vartheta^2}{2} - \frac{1}{6} \cdot \vartheta^3 = 0 \\
& \frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 = \frac{V \cdot \vartheta^2}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta^3 = \vartheta^2 \cdot \left(\frac{V}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta \right) \\
& \sqrt{\frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2}} \cdot \frac{d\vartheta}{d\xi} = \pm \vartheta \cdot \sqrt{\frac{V}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta} \\
& \sqrt{\frac{C_s}{8 \cdot \chi_0^2}} \cdot \frac{d\vartheta}{\vartheta \cdot \sqrt{\frac{V}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta}} = d\xi \\
& \frac{d\vartheta}{\vartheta \cdot \sqrt{\frac{V}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta}} = \sqrt{\frac{8 \cdot \chi_0^2}{C_s}} \cdot d\xi
\end{aligned}$$

Tenglamani har ikkala tomonini integrallaymiz.

$$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta \cdot \sqrt{\frac{V}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta}} = \sqrt{\frac{8 \cdot \chi_0^2}{C_s}} \cdot \int d\xi$$

Hosil bo'lgan integral tenglamamizni har ikkala tomonini alohida-alohida hisoblab, so'ngra tenglashtiramiz. Buning uchun biz quyidagi ishlarni amalga oshiramiz.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}} &= \left| \begin{array}{l} a+bx=t^2 \\ dx = \frac{1}{b} \cdot 2t \cdot dt \\ x = \frac{1}{b} \cdot (t^2 - a) \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{b} \cdot 2t \cdot dt}{\frac{1}{b} \cdot (t^2 - a) \cdot t} = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 - a} = \\
&= \left| \begin{array}{l} \frac{A}{t+\sqrt{a}} + \frac{B}{t-\sqrt{a}} = \frac{A \cdot t - A \cdot \sqrt{a} + B \cdot t + B \cdot \sqrt{a}}{t^2 - a} \\ \begin{cases} t \cdot (A+B) = 0 \\ \sqrt{a} \cdot (B-A) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} A+B=0 \\ B-A=\frac{1}{\sqrt{a}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot B = \frac{1}{\sqrt{a}}; \\ B = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}}; \\ A = -\frac{2}{2 \cdot \sqrt{a}} \end{array} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int \left[\frac{1}{t-\sqrt{a}} - \frac{1}{t+\sqrt{a}} \right] \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left[\int \frac{dt}{t-\sqrt{a}} - \int \frac{dt}{t+\sqrt{a}} \right] = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}} \right|
\end{aligned}$$

$$2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 - a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{t - \sqrt{a}}{t + \sqrt{a}} \right|$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}} \right|$$

$$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta \cdot \sqrt{\frac{u}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{2}}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{u}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta} - \sqrt{\frac{u}{2}}}{\sqrt{\frac{u}{2} + \frac{1}{6} \cdot \vartheta} + \sqrt{\frac{u}{2}}} \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}} \right| = k$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}} \right| = k\sqrt{a} + \text{const}$$

$$\frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}} = e^{k\sqrt{a}} + \text{const}$$

$$k = 0 \quad da \quad x = x_0$$

$$\frac{\sqrt{a + bx_0} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx_0} + \sqrt{a}} - 1 = \text{const}$$

$$const = -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx_0} + \sqrt{a}} = -B$$

$$B = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx_0} + \sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} = e^{k\sqrt{a}} - B$$

$$\sqrt{a+bx} - \sqrt{a} = (\sqrt{a+bx} + \sqrt{a})(e^{k\sqrt{a}} - B)$$

$$\sqrt{a+bx} \cdot (1+B-e^{k\sqrt{a}}) = \sqrt{a}(1-B+e^{k\sqrt{a}})$$

$$\sqrt{a+bx} = \sqrt{a} \cdot \frac{(1-B+e^{k\sqrt{a}})}{(1+B-e^{k\sqrt{a}})}$$

$$a+bx = a \cdot \frac{(1-B+e^{k\sqrt{a}})^2}{(1+B-e^{k\sqrt{a}})^2}$$

$$x = \frac{a}{b} \left(\frac{(1-B+e^{k\sqrt{a}})^2}{(1+B-e^{k\sqrt{a}})^2} - 1 \right) \quad \left| B - e^{k\sqrt{a}} = e^{\varphi} \right|$$

$$x = \frac{a}{b} \left(\frac{(1-e^{\varphi})^2}{(1+e^{\varphi})^2} - 1 \right) = \frac{-4a}{b} \left(\frac{e^{\varphi}}{(1+e^{\varphi})^2} \right)$$

$$x = \frac{-4a}{b} \left(\frac{e^{\frac{\varphi}{2}}}{1+e^{\varphi}} \right)^2 = \frac{-4a}{b} \left(\frac{1}{e^{\frac{-\varphi}{2}} + e^{\frac{\varphi}{2}}} \right)^2$$

$$x = \frac{-a}{b} \cdot \frac{1}{ch^2(\frac{\varphi}{2})}$$

$$\text{Bizning holimizda } a = \frac{u}{2}; \quad b = \frac{1}{6}; \quad k = \sqrt{\frac{C_s}{16\chi_0^2}}; \quad x = g; \quad k = \sqrt{\frac{8\chi_0^2}{C_s}}\xi;$$

Shunday qilib, (2.2.6) - tenglamaning echimini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$g = -\frac{3u}{ch^2(\frac{\varphi}{2})}$$

Oxirgi formuladan ko'rinishidagi Boze - Eynshteyn gazida tarqaluvchi nochizigiy to'liqlar statsionar echimga ega bo'lib, bu echimni odatda soliton echimi deyiladi. Bunday deyilishiga sabab shundan iboratki solitonlar zarra tabiat to'liqlar bo'lib, uning tarqalish mobaynida o'z tezligi va shaklini o'zgartirmaydi. Ko'rinishidagi bunday to'liqlarning amplitudasi tarqaluvchi

to'qlinlarning tezligiga proporsionaldir. Ikkinchi tomondan esa bunday to'qlinlarning kengligi d bu to'qlin amplitudasi bilan quyidagicha bog'langandir.

$$d^2U = \frac{C_s}{8\chi_0^2} = const$$

Demak, bu to'qlin kengligining kvadrata bilan amplitudasining ko'paytmasi o'zgarmas miqdordir. Boshqacha qilib aytganda to'qlinning tarqalish tezligi yoki amplitudasi kancha katta bo'lsa uning kengligi shuncha kichik bo'ladi. Xuddi shu jihati bilan u chiziqli to'qlinlardan keskin farq qiladi. Chunki chiziqli to'qlinlarning kengligi yoki to'qlin uzunligi uning amplitudasiga bog'liq emas.

Shuni ta'kidlaymizki biz olgan echimning yana bir muhim xususiyati shundan iboratki uning amplitudasi qancha katta bo'lsa tarqalish tezligi ham shuncha katta bo'ladi. Oldingi natijalarimiga ko'ra gazdagi zichlikning o'zgarishi tezlikka proporsional bo'lganligi uchun ushbu gazdagi zichlikning o'zgarishi manfiy bo'ladi. $n < n_0$ ko'rinib turibdiki agar to'qlinlarning tarqalish tezligi tovush tezligidan kichik bo'lsa, ya'ni $u = C_s - v > 0$; $v < C_s$ musbat bo'lsa, tovush to'qlinlari tarqalayotgan sohadagi gaz zarralarining konsentratsiyasi kamayadi. Agar aksincha to'qlinning tarqalish tezligi tovush tezligidan katta bo'lsa, ya'ni $u < 0$ bo'lsa to'qlinlar tarqaladigan sohada gaz konsentratsiyasi uning atrofidagi nuqtalarga nisbatan kattaroq bo'ladi. Yuqoridagi xulosalardan ko'rinib turibdiki Boze - Eynshteyn gazida tarqaluvchi tovush to'qlinlari bir qutbli bo'ladi, ya'ni o'z ishorasini saqlaydi.

$$g = -\frac{3u}{ch^2(\frac{\varphi}{2})}$$

2.3 Boze - Eynshteyn kondensatini tavsiflovchi nochizig'iy to'qlin funksiya

Biz oldingi bo'limlarda Boze - Eynshteyn gazida tarqaluvchi tovush to'qlinlari uchun doiraviy chastota va to'qlin soni orasidagi quyidagi muhim munosabatlarni keltirib chiqargan edik.

$$\omega^2 = k^2 C_s^2 + \frac{\hbar^2 \cdot k^4}{4m^2} = \hbar^2 \cdot k^2 \left(x_0^2 + \frac{k^2}{u} \right) m^{-2}$$

Endi De - Broyl munosabatlarga ko'ra $\varepsilon = \hbar \cdot \omega$, $p = \hbar \cdot k$ ekanligini inobatga olsak bu to'lqinga mos keluvchi kvazi zarraning energiyasi va impulsi orasidagi quyidagi bog'lanishni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\hbar k}{m} \sqrt{\chi_0^2 + \frac{k^2}{4}} = \frac{\hbar^2}{2P^2 m} \sqrt{4P^2 \chi_0^2 + \hbar^2} \\ \hbar^2 \omega^2 &= C_s k^2 \hbar^2 + \frac{\hbar^4 k^4}{4m^2} \\ \varepsilon &= C_s^2 P^2 + \frac{P^2}{4m^2} \\ \varepsilon &= P \sqrt{C_s^2 + \frac{P^2}{4m^2}}\end{aligned}$$

Oxirgi munosabatning taxlili shuni ko'rsatadiki kvazi zarraning kichik impulslari qiymatlari bu zarraning energiyasi uning impulsiga proporsional bo'ladi

$$\frac{P^2}{4m^2} \ll C_s^2 \quad \text{yoki} \quad \frac{P^2}{4m^2 C_s^2} \ll 1 \quad \text{bo'lsa} \quad \varepsilon \approx PC_s$$

Agar kvazi zarraning impulsi etarlicha katta bo'lsa, ya'ni teskari tengsizlik bajarilsa zarraning energiyasi uning impulsini kvadratiga proporsional bo'ladi.

$$\frac{P^2}{4m^2} \gg C_s^2 \quad \text{yoki} \quad \frac{P^2}{4m^2 C_s^2} \gg 1 \quad \text{bo'lsa} \quad \varepsilon \approx P \frac{P}{2m} = \frac{P^2}{2m}; \quad \varepsilon \sim P^2$$

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{E_0^2 + P^2 C^2} \\ P^2 C^2 &\gg E_0^2 \quad \quad \quad E \sim PC\end{aligned}$$

Endi (2.1.5) chiziqli bo'lmagan Shryodinger tenglamasi yoki Gross - Pitaevskiy tenglamasining echimini topishga harakat qilamiz. Buning uchun biz xuddi avvalgidek ushbu tenglamaning eng sodda ammo fizikaviy jihatdan muhim ahamiyatga ega bo'lgan statsionar ya'ni vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydigan echimlarini qidiramiz. Chunki bu tenglamaning har qanday echimi oxir oqibat biz quyida topadigan statsionar echim ko'rinishiga keladi.

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \bar{\psi} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} N |\bar{\psi}|^2 + U \bar{\psi}$$

$$U = 0$$

$$\bar{\psi}(x, t) = A(x, t) \exp \{i\varphi(x, t)\}$$

$$A(x, t) = A(x - vt);$$

$$\varphi = \varphi(x - ut)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial t} e^{i\varphi} + i \frac{\partial \varphi}{\partial t} A e^{i\varphi} = -v \frac{dA}{dx} e^{i\varphi} + i(-u) \frac{d\varphi}{dx} A e^{i\varphi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} e^{i\varphi} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} A e^{i\varphi} = \frac{dA}{dx} e^{i\varphi} + i \frac{d\varphi}{dx} A e^{i\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} e^{i\varphi} + \frac{dA}{dx} i \frac{\partial \varphi}{\partial x} e^{i\varphi} + i \frac{d^2 \varphi}{dx^2} A e^{i\varphi} + i \frac{d\varphi}{dx} \left\{ \frac{dA}{dx} e^{i\varphi} + i A \frac{d\varphi}{dx} e^{i\varphi} \right\} =$$

$$= \frac{d^2 A}{dx^2} e^{i\varphi} + \frac{dA}{dx} i \frac{\partial \varphi}{\partial x} e^{i\varphi} + i \frac{d^2 \varphi}{dx^2} A e^{i\varphi} + i \frac{d\varphi}{dx} \frac{dA}{dx} e^{i\varphi} - A \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 e^{i\varphi} =$$

$$= i\hbar \left\{ v \frac{dA}{dx} - iA \frac{d\varphi}{dx} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2 A}{dx^2} + 2i \frac{dA}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + iA \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - A \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} N |A|^2 A$$

$$-i\hbar v \frac{dA}{dx} + \hbar A v \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 A}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{m} i \frac{dA}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\hbar^2}{2m} iA \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m} A \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} N |A|^2 A$$

$$-i\hbar v \frac{dA}{dx} = -i \frac{\hbar^2}{m} \frac{dA}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\hbar^2}{2m} iA \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

$$2mv \frac{dA}{dx} = 2\hbar \frac{dA}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + \hbar A \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

$$-2mv \frac{dA}{dx} + 2\hbar \frac{dA}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + \hbar A \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$$

$$\hbar v \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\hbar^2}{2m} iA \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + A \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} N |A|^2 A$$

$$\hbar A \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 2 \frac{dA}{dx} \left\{ \hbar \frac{d\varphi}{dx} - mv \right\} = 0$$

$\hbar \frac{d\varphi}{dx} = mv$ bo'lsa biz A ga nisbatan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$Aumv = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{A}{2m} m^2 v^2 + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} N |A|^2 A$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 A}{dx^2} = amv \left(\frac{v}{2} - u \right) + \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} N A^3$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} amv \left(\frac{v}{2} - u \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{4 \cdot \pi \cdot \hbar^2 \cdot a}{m} N A^3$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{2m^2 A v}{\hbar^2} \left(\frac{v}{2} - u \right) + 8 \cdot \pi \cdot a \cdot N \cdot A^3$$

$$\alpha = \frac{2m^2 v}{\hbar^2} \left(\frac{v}{2} - u \right); \quad \beta = 8 \cdot \pi \cdot a \cdot N$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \alpha A + \beta A^3$$

$$\frac{dA}{dx} \frac{d^2 A}{dx^2} = \alpha A \frac{dA}{dx} + \beta A^3 \frac{dA}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dx} \right)^2 \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\alpha}{2} A^2 + \frac{\beta}{4} A^4 \right\}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dx} \right)^2 - \frac{\alpha}{2} A^2 - \frac{\beta}{4} A^4 \right\} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dx} \right)^2 - \frac{\alpha}{2} A^2 - \frac{\beta}{4} A^4 = \text{const}$$

Biz hisoblashni osonlashtirish maqsadida o'zgarmasni 0 ga teng deb qaraymiz.

Natijada:

$$\left(\frac{dA}{dx} \right)^2 = \alpha A^2 + \frac{\beta}{2} A^4$$

$$\frac{dA}{dx} = A \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2} A^2}$$

$$\frac{dA}{A \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2} A^2}} = dx$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{dA}{A \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2} A^2}} = \int dx$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a + bx^2}} = \left| \begin{array}{l} a + bx^2 = t^2 \\ x^2 = \frac{1}{b}(t^2 - a) \\ bxdx = tdt \\ xdx = \frac{1}{b}tdt \end{array} \right| = \int \frac{xdx}{x^2 \sqrt{a + bx^2}} = \int \frac{\frac{1}{b}tdt}{\frac{1}{b}(t^2 - a)t} = \int \frac{dt}{t^2 - a} = \left| \left(\frac{A}{t - \sqrt{a}} + \frac{B}{t + \sqrt{a}} \right) dt \right| =$$

$\frac{At + \sqrt{a}A + \beta t - \sqrt{a}\beta}{t^2 - a}$ $A + b = 0$ $A - B = \frac{1}{\sqrt{a}}$ $A = \frac{1}{\sqrt{a}}$ $B = \frac{1}{\sqrt{a}}$	$= \int \frac{dt}{t^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\int \frac{dt}{t - \sqrt{a}} - \int \frac{dt}{t + \sqrt{a}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{t - \sqrt{a}}{t + \sqrt{a}}$
---	--

$$\int \frac{dt}{t^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\int \frac{dt}{t - \sqrt{a}} - \int \frac{dt}{t + \sqrt{a}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{t - \sqrt{a}}{t + \sqrt{a}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a + bx^2} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx^2} + \sqrt{a}};$$

$$\int \frac{dA}{A\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \ln \frac{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2} + \sqrt{\alpha}};$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \ln \frac{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2} + \sqrt{\alpha}} = x$$

$$\ln \frac{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2} + \sqrt{\alpha}} = 2\sqrt{\alpha}x$$

$$\alpha + \frac{\beta}{2}A^2 = z; \quad \ln \frac{\sqrt{z} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{z} + \sqrt{\alpha}} = 2\sqrt{\alpha}x$$

$$\frac{\sqrt{z} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{z} + \sqrt{\alpha}} = \exp(2\sqrt{\alpha}x) + \text{const}; \quad x = 0 \quad \text{da} \quad A = A_0 \quad \text{desak}$$

$$\text{const} = \frac{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A_0^2} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A_0^2} + \sqrt{\alpha}} - 1 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A_0^2} + \sqrt{\alpha}}$$

$$B = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A_0^2} + \sqrt{\alpha}} \quad \text{desak} \quad \text{const} = -B$$

$$\sqrt{z} - \sqrt{\alpha} = (\sqrt{z} + \sqrt{\alpha})(\exp(2\sqrt{\alpha}x) - B)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\alpha} \frac{1 - B + \exp(2\sqrt{\alpha}x)}{1 + B - \exp(2\sqrt{\alpha}x)} \quad 2\sqrt{\alpha}x = k \quad \text{deb belg ilasak}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\alpha} \frac{1-B+e^k}{1+B-e^k}$$

$$z = \alpha \left(\frac{1-B+e^k}{1+B-e^k} \right)^2$$

$$\alpha + \frac{\beta}{2} A^2 = \alpha \left(\frac{1-B+e^k}{1+B-e^k} \right)^2$$

$$\frac{\beta}{2} A^2 = \alpha \left[\frac{1-2(B-e^k)+(B-e^k)^2-1-2(B-e^k)-(B-e^k)^2}{(1+B-e^k)^2} \right]$$

$$\frac{\beta}{2} A^2 = \alpha \left[\frac{-4(B - e^k)}{(1 + B - e^k)^2} \right]$$

$$A^2 = \frac{8\alpha}{\beta} \frac{B - e^k}{(1 + B - e^k)^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{8\alpha}{\beta}} \frac{\sqrt{B - e^k}}{1 + B - e^k} \quad |e^\varphi = B - e^k|$$

$$A = \sqrt{\frac{8\alpha}{\beta}} \frac{e^{\frac{\varphi}{2}}}{1 + e^\varphi} = \sqrt{\frac{8\alpha}{\beta}} \frac{1}{e^{-\frac{\varphi}{2}} + e^{\frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{8\alpha}{\beta}} \frac{2}{ch(\frac{\varphi}{2})}$$

$$A = 4 \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \frac{1}{ch(\frac{\varphi}{2})}$$

Boze-Eynshteyn kondensasiyasi astrofizik hodisalarni Yerda o'rganilishi uchun mini laboratoriyadir.

Boze-Eynshteyn kondensasiyasiga bag'ishlangan eksperimental va nazariy ishlar ichidan shunday ishlarni ham ko'rsatish mumkinki, bu ishlarda Boze-Eynshteyn kondensasiyasidan haligacha oxirigacha o'rganilmagan koinotda o'tuvchi xodisalarni tekshirishda laborator model sifatida foydalanish mumkinligi kayd etilgan. Masalan o'ta yangi yulduzlarni chaqnash jarayonini yoki qora tuynuklarni bug'lanishi. Albatta bunday laboratoriyada Boze-Eynshteyn kondensasiyasi yordamida aniq; qora tuynuklarni yoki o'ta yangi yulduzlarni hosil qilish tug'risida so'z bormay, balki unga paralel bo'lgan hodisa xususiyatlarini o'rganish qayd etiladi. Muxumki, qayd etilgan hodisalarni ifodalashni matematik podxodlari o'xshashdir. Nazariya bir xil bo'lsa, eksperimental natijalar ham yaqin bo'lishi kerak. Astronomlar koinot qa'rida, qora tuynuklarni nurlanishini, o'ta yangi yulduzlarni chaqnashini kuzatishga xarakat etsa, Yerda ularni Boze-Eynshteyn kondensasiyasi yordamida kuzatish mumkin. 2001 yili Nature jurnalida AQSHlik fiziklarni rubidiy 85 Rb Boze-Eynshteyn kondensasiyasi atomlarini siqilishi va keyingi portlashi tug'risida maqola e'lon qilindi. Bunday hodisaga o'ta yangi yulduzga o'xshatib, Boze - yangi deb nom berildi. Bundan haqiqatan ham kosmik jarayonlarni o'rganishda

Boze-Eynshteyn kondensasiyasi dan Yerdagi mini laboratoriya sifatida foydalanish mumkin degan xulosa kelib chiqadi.

Koinotdagi qora tuynuklar va Yerdagi Boze-Eynshteyn kondensasiyasidagi qora tuynuklar analogiyasdan qanday foydalanish mumkin. Ma'lumki, qora tuynuk fazoning shunday oblastiki, unda gravitasiya shunday katta bo'ladiki, hatto undan yorug'lik ham chiqib keta olmaydi. Qora tuynuk koinotni boshqa qismlardan hodisalar gorizonti deb ataluvchi chegara bilan ajratilgan buladi. Xodisalar gorizonti ichida joylashgan narsa uni tashlab chiqib ketolmaydi. 70 yillarda Xokings ko'rsatadiki, qora tuynuklar muxutni faqatgina yutuvchi obyekt bo'lmasdan, balki nurlanuvchi obyekt ham. Bunday nurlanishga Xokings nurlanishi deyilib, natijada qora tuynuk massasi kamayadi. Nurlanish mexanizmi quyidagichadir: qora tuynuk hodisalar gorizonti yaqinida vakuumning fluktuasiyasi natijasida ikkita zarra tug'iladi. Birinchisi manfiy energiya bilan, ikinchisi musbat energiya bilan (masalan ikkita foton), ular kuchli gravitasiya tufayli gorizonti ostida bo'lganligi sababli u yutiladi, musbat energiyaga ega bulgan zarra gorizont ustida bulganligi sababli, qora tuynukdan uzoklashib qayd etiladi. Antizarrani qora tuynuk yutib, erengiyasini shuning uchun massasini ham kamaytiradi. Bundan kelib chiqadiki, qora tuynuk nurlanadi ham, shuning uchun xam massasi kamayadi. Bunday nurlanishga Xokings nurlanishi deyiladi. Nazariyaga ko'ra bunday nurlanishga temperaturani solishtirish mumkin, ya'ni uni qayd qilish mumkin. Keyingi xisob-kitoblarning kursatishicha, Xokings nurlanishi temperaturasi juda past, koinotni relikt nurlanishi temperaturasi 2,7 k dan xam past. shuning uchun Xokings nurlanishini (agar u mavjud bo'lsa) qayd qilish nihoyatda qiyindir.

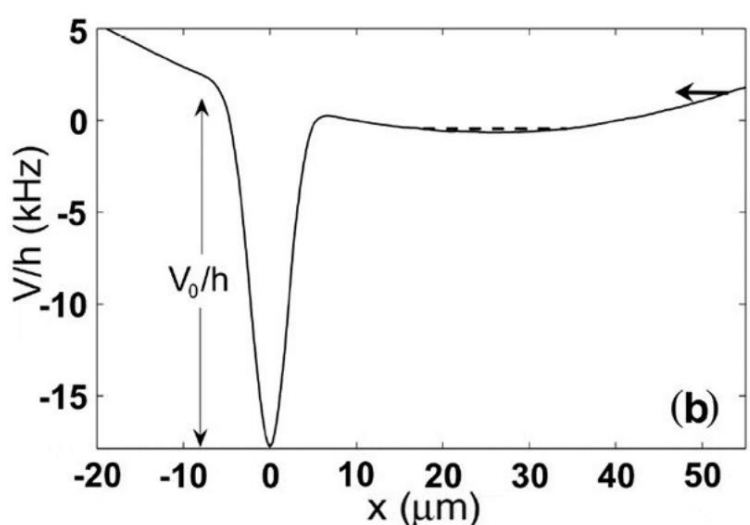
Yer sharoitida kolosak katta gravitasiyaga ega bo'lgan gravitasion kora tuynukni xosil qilish mumkin emas. Lekin Boze-Eynshteyn kondensasiyasida akustik nurlanishlarni xosil kilib tekshirish mumkin. Asosiy g'oya shundan iboratki, kondensat muxit bo'lib, har kanday materialdagi kabi unda tovush ma'lum tezlik bilan tarqaladi. Faraz qilamizki, Boze-Eynshteyn kondensasiyasi ning biror oblasti tezlashtiriladi va tovushning kondensatdagi tezligidan kata

tezlik bilan xarakat qiladi, bunda kondensatni qolgan kismi tovush tezligidan kichik tezlik bilan davom beradi. Tovush tezligidan katta tezlik bilan oqayotgan oblastni biz shartli ravishda qora tuynuk deb olamiz. Tovush tezligigacha va tovush tezligidan katta oblastlarni ajratuvchi chegarani esa shartli ravishda xodisalar gorizonti deb olamiz. Bunday gorizontda tovushni kvantlar jufti ikkita fonon xosil qilinadi, tabiiyki ular Boze-Eynshteyn kondensasiyasidagi tovush tezligida tarqaladi. Fononlardan birining impulsini yo'nalishi kondensat holati yo'nalishga qarama-qarshi bo'lib, shuning uchun kondensat tomonidan ushlanadi, chunki uning tezligi kondensat tezligidan kichik. Ikkinchi fonon esa impulsning saqlanish qonuniga ko'ra qarama-qarshi tomonga xarakat qilib, kondensatdan uchib chiqadi. Bu uchib chiqdan fonon natijada fononli yoki akustik nurlanishni hosil qilib, muayyan issiklik spektriga yoki temperaturaga akustik bo'ladi. Haqiqiy qora tuynuk bilan analogiya ochevidnadir. Tovush tezligidan katta tezlik bilan harakat qilayotgan Boze-Eynshteyn kondensasiyasi oblasti fononlarni chiqarmaydi, bu gravitasion qora tuynukni fotonlarni yutishiga mos keladi. Boze-Eynshteyn kondensasiyasining tovush tezligiga teng tezlik bilan oqayotgan qismida hosil qilingan fononning urib chiqishi haqiqiy qora tuynukdan chiqayotgan fotonlarni bildiradi. shunday qilib kondensatda, haqiqiy qora tuynuk emas balki, uning analogi akustik qora tuynuk xosil qilinib, unda Xokings nurlanishi tekshiriladi.

Yuqorida qayd etganimizdek Izraillik fiziklar bunday tajribani Boze-Eynshteyn kondensasiyasida hosil qilib musbat natijaga erishdilar. Tajribani amalga oshirishda o'tgan qiyinchiliklar quyidagilardir. Rubidiy atomlaridan tashkil topilgan kondensat nafaqat undagi tovush tezligidan katta bo'lgan tezlikkacha tezlashtirildi, yana uni dissipativliksizligigacha (ishqalanishsizligigacha) erishildi. Buning barchasi yuqorida qayd etilgan zichlik inversiya mexanizmi orqali amalga oshiriladi. Vaqt kuchsiz o'zgaruvchan magnit maydonida (magnit ushlovchi) 100 ming rubidiy 87 dan tashkil topgan. kondensat oqimi generasiyalanadi. Boshlang'ich paytda tovush tezligigacha tezlik bilan oqayotgan kondensat, chuqurlikga tushib o'ta tovush

tezligigacha tezlashadi. Kondensatdagi oqim tezligi undagi tovush tezligiga teng bo'lgan qismi akustik qora tuynuk gorizontini tashkil etadi. Kondensat eng pastki holatda (energetik chuqurlik pastidagi holatda bo'lmaganligi) bo'lmaganligi sababli, kvantomexanik qonunlarga ko'ra, u chuqurlik pastida yashash uchun qolmaydi. Boze-Eynshteyn kondensasiyasi undan itarishib chiqariladi va chuqurlikga tushgunichat bo'lgan tezligida oqishni davom beradi.

Izraillik fiziklar xam qopa tuynuk gorizontida fononlarni uyg'otishga kirishganlaricha yo'q shuning uchun Boze-Eynshteyn kondensasiyasidan xech qanday akustik nurlanishni kuzatganlari yo'q. Ular fakatgina BEk xarakatining turli vaqt momentlari uchun fononlar nurlanishlar temperaturasi xisoblanadilar. Nurlanish temperaturasi 0,2 - 0,3 nanokelvin orasida bo'lib chiqdi. Olimlarning fikricha, Boze-Eynshteyn kondensasiyasidagi tovush to'liqlarini tezligini bitta tartibda oshirib, Xokking fononli nurlanishini temperaturasi 2-7 nanokelvingacha oshirish mumkin, natijada bunday hodisani eksperimentatorlar tomonidan kuzatish ancha osonlashadi.



Kondensat zichligining inversiyasi.

II- bobning xulosasi.

1. Boze - Eynshteyn kondensatida yuzaga keluvchi kollektiv harakatlar o'rganildi.
2. Boze - Eynshteyn kondensatida tarqaluvchi nochizig'iy tovush to'liqlari o'rganildi.

3. Boze - Eynshteyn kondensatini tavsiflovchi nochizig'iy to'lqin funksiya keltirib chiqarildi.

Xotima

1. Boze - Eynshteyn gazining holat tenglamasi keltirib chiqarildi va bunday gaz bosimi gaz zarralari konsentratsiyasining kvadratiga proportsional ekanligi ko'rsatildi.

2. Boze - Eynshteyn gazining tashqi maydon ta'siridagi muvozanat sharti keltirib chiqarildi va gaz zarralari konsentratsiyasining og'irlik kuchi maydonidagi hamda sferik simmetrik potensial ta'siridagi taqsimoti topildi.

3. Boze - Eynshteyn gazida yuzaga keluvchi kollektiv harakatlarni tavsiflovchi tenglamalar keltirib chiqarildi va ularda solitonsimon to'lqinlar tarqalishi isbotlab ko'rsatildi.

4. Boze - Eynshteyn kondensatini tavsiflovchi nochizig'iy to'lqin funksiya ifodasi keltirib chiqarildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. F.Kh.Abdullaev, J.C.Bronski, R.M.Galimzyanov. Dynamics of a trapped 2D Bose-Einstein condensate with periodically and randomly varying atomic scattering length. *Physica D* 184(2003)319-332.
2. F.Kh.Abdullaev, B.B.Baizakov, V.V.Konotop, in: F.Kh.Abdullaev, O.Bang, M.P.Soerensen (Eds.), *Nonlinearity and Disorder*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
3. B.B.Baizakov, V.V.Konotop and M. Salerno. Regular spatial structures in arrays of Bose-Einstein condensates induced by modulational instability. 2002 IOP Publishing Ltd Printed in the UK.
4. A.M.Kamchatnov, A.Gammal, F.Kh.Abdullaev, R.A.Kraenkel. Formation of soliton trains in Bose-Einstein condensates as a nonlinear Fresnel diffraction of matter waves. *Physics Letters A* 319(2003)406-412.
5. F.Kh.Abdullaev and Mario Salerno. Adiabatic compression of soliton matter waves. *J.Phys.B:At.Mol.Opt.Phys.*36(2003)1-9
6. Victor.M.Perez-Garcia. Dynamics of quasicollapse in nonlinear Schrodinger systems with nonlocal interactions. *Physical review e* volume 62, number 3 September 200.
7. Hirofumi Morise, Takeya Tsurumi and Miki Wadati. Stability of a Two-Component Bose-Einstein Condensate. *Journal of the Physical Society of Japan*. Received February15, 1999.
8. Takeya Tsurumi and Miki Wadati. Collapses of Wavefunctions in Multi-Dimensional Coupled Nonlinear Schrodinger Equations under Harmonic Potentials. *Journal of the Physical Society of Japan* Vol. 67, No.1, January, 1998, pp. 93-95.
9. Смирнов Лев Александрович. Возбуждение и динамика нелинейных волновых структур в Бозе-Эйнштейновском конденсате. Автореферат. Дисс. Нижний Новгород-2013.

10. В.Б.Тимофеев. Бозе-Конденсация экситонных поляритонов в микрорезонаторах Обзор.Физика и техника полупроводников, 2012, том 46, вып. 7.
11. Г.Ю.Геннадьевич. Теория волн, генерируемых при обтекании препятствий Бозе-Эйнштейновским конденсатом, и их оптические аналоги. Диссертация. Троицк-2009.
12. К.С.Вячеславович. Нелинейная динамика атомных и поляритонных Бозе-конденсатов. Автореферат. Троицк-2001.
13. Н.Н.Розанов. НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА. Санкт-Петербург.
14. В.А.Кашурников. Сверхтекучесть и Бозе-конденсация. Москва 2008.
15. А.В.Горбунов. Линейная поляризация люминесценции в условиях бозе-конденсации диполярных экситонов и спонтанное нарушение симметрии. Поступила в редакцию 22 мая 2008 г.
16. С.Л.Александрович. Возбуждение и динамика нелинейных волновых структур в Бозе-Эйнштейновском конденсате. Автореферат.Нижний Новгород-2013.
17. В.Кеттерле. Когда атомы ведут себя как волны. Бозе-Эйнштейновская конденсация и атомный лазер. Нобелевская лекция. Стокгольм, 8 декабря 2001г.
18. Ю.М.Буньков. Спиновая сверхтекучесть и бозе-эйнштейновская конденсация магнонов. 2010г
19. Р.Айзеншиц. Статистическая теория необратимых процессов. М: Изд. Иностр.лит.1963,127стр.
20. А.М.Василиев. ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ. Москва «высшая школа»1980.
21. Р.О.Зайцев. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. МФТИ 2004.
22. В.Ш.Файзиев. Бозе - Эйнштейн идеал газининг ҳолат тенгламаси. «Тафаккур ва талкин»Бухоро-2013.195-201 бет .

23. Ш.Ш.Файзиев, В.Ш.Файзиев, Г.В.Зинатулина. Ташқи майдонлар таъсиридаги бозе - эйнштейн газининг мувозанат шарти. Тошкент 14.11.14
24. М.Р. Жумаев, Ш.Ш. Файзиев. «Вихри в Бозе – Эйнштейновской конденсации» » Физика тараққиётида нисбийлик назарияси, Минтақавий илмий-амалий конференцияси тезислар тўплами, Бухоро, 2005. Б. 4.