



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
FARG'ONA POLITEKNIKA INSTITUTI

“Tadbiqiy mexanika” kafedrası

MA'RUZALAR MATNI

MEXANIKA-1

5311000 – «Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish», 5310200 – «Elektr energetikasi», 5111044 – «Kasbiy ta'lim (elektr energetikasi)», 5310700 – «Elektr texnikasi, elektr mexanikasi, elektr texnologiyasi», 5321300-«Neft van eft-gazni qayta ishlash texnologiyasi» yo'nalishi bo'yicha bakalavriat talabalari uchun



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

FARG'ONA POLITEKNIKA INSTITUTI
MEXANIKA MASHINASOZLIK FAKULTETI
"TADBIQIY MEXANIKA" KAFEDRASI

"MEXANIKA-1"

FANIDAN

5311000 -Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish, 5310200 – Elektr energetikasi, 5111044 – Kasb ta'limi (elektr energetikasi), 5310700 – Elektr texnikasi, elektr mexanikasi, elektr texnologiyasi ,5321300 – Neft va neft-gazni qayta ishlash texnologiyasi yo'nalishi bakalavr talabalari uchun

**MA'RUZALAR
MATNI**

Institut uslubiy kengashi

Tasdiqlagan "24.08" 2018 yil

Bayon № 31

ЎҚУВ - УЎЎЎЎЎЎЎЎЎЎЎЎ

FARG'ONA-2018

“Mexanika-1” fani asosini “Nazariy mexanika” fani tashkil etadi. Mazkur ma’ruza matni eng so’nggi yillarda chop etilgan xorijiy adabiyotlardan foydalangan holda, namunaviy ishchi dasturga mos holda tayyorlandi. 5311000- Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish, 5310200–Elektr energetikasi, 5111044–Kasb ta’limi (elektr energetikasi), 5310700–Elektr texnikasi, elektr mexanikasi, elektr texnologiyasi, 5321300–Neft va neft-gazni qayta ishlash texnologiyasi” yo’nalishi bakalavr talabalari uchun mo’ljallangan.

Ushbu uslubiy ko’rsatmalar «Tadbiqiy mexanika» kafedrasining 2018 yilgi majlisida (majlis bayoni № 3) ko’rib chiqilgan va chop etishga tavsiya etilgan. Mexanika mashinasozlik fakulteti uslubiy kengashi yig’ilishida ko’rib chiqilgan va ma’qullangan. *N=3, 15.02.2018*

Tuzuvchilar:



t.f.n., dotsent Sobirjonov T.M
assistent Xaydarova O.M

Taqrizchi:



"TM" - kafedrasi dotsenti,
Xalilov Sh.Z

1-MA'RUZA

Mavzu: Qattiq jism statikasi.

Reja:

1. Nazariy mexanika fani, maqsadi va vazifalari.
2. Statikaning asosiy masalalari.
3. Bog'lanish, ularning turlari va bog'lanish reaksiyalari.

Tayanch so'z va iboralar:



Nazariy mexanika, statika, mexanik harakat, jismlarning muvozanati, absolyut qattiq jism, kuch, kuchlar sistemasi, ekvivalent kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi kuch, muvozanatlashgan kuchlar sistemasi, sanoq sistemasi, erkin jism, statikaning aksiomalari, nollik sistema, bog'lanish reaksiyalari.

1.1. Nazariy mexanika fani, maqsadi va vazifalari.

Hozirgi zamon texnikasi, injenerlarning oldiga echilishi muhim bo'lgan qator masalalarni qo'ymoqda, ular asosan mexanik harakatlar va moddiy jismlarning o'zaro ta'sirlariga bog'liq bo'lib, nazariy mexanika faniga taalluqli

hisoblanadi.

Fazodagi moddiy jismlarning bir-birlariga nisbatan holatlarini vaqt mobaynidagi o'zgarishlari mexanik harakat deb ataladi. Jismlarning bir-birlariga nisbatan ko'rsatgan ta'sirlari natijasida, ularning harakatlari yoki ularning geometrik shakllari (deformatsiyalanishi)ning o'zgarishi o'zaro mexanik ta'sir deb tushuniladi. Jismlarning o'zaro ta'sirlarini o'lchaydigan kattalikni, *kuch* deb ataladi. Tabiatdagi mexanik harakatlarga, osmon jismlarining harakatlari, er sirtining tebranishi, havo va dengiz oqimlari, molekulalarning issiqlik ta'siridagi harakatlari va h.k., misol bo'ladi.

Texnikadagi mexanik harakatlarga esa, yer ustidagi, suvdagi va havodagi trans'ort vositalarining harakatlari, turli xil mashina va mexanizmlar qismlarining harakatlari, suyuqlik va gazlarning harakatlari va h.k. lar misol bo'ladi. o'zaro mexanik ta'sirga esa, butun dunyo tortilish qonuniga asosan moddiy jismlarning o'zaro tortilishlari, yo'ishib (yoki to'qnashib) turgan jismlarning o'zaro bosimlari, suyuqlik va gazlarning zarrachalarini o'zaro ta'sirlari va h.k. misol bo'lishi mumkin.

Nazariy mexanika fanining injenerlar tayyorlashdagi o'rni va ahamiyati shundan iboratki, u hozirgi zamon texnikasining juda ko'p sohalarining ilmiy asoslarini tashkil etadi. Hamda, tabiiy, ya'ni tabiat haqidagi fan hisoblangan mexanikaning qonunlari va usullari, atrofimizda sodir bo'layotgan qator muhim hodisalarning qonuniyatlarini mukammal o'rganishda va umuman tabiatni o'rganishda katta ahamiyat kasb etadi.

Yechilishi ko‘rilayotgan masalalarga asoslangan holda mexanika fani, statika, kinematika va dinamika qismlarga ajraladi. Statika qismida, kuchlar haqidagi bilimlar va kuchlar ta’siridagi jismlarning muvozanatlik shartlari o‘rganiladi. Kinematika qismida, jismlarning harakatlarini umumiy geometrik xususiyatlari o‘rganiladi. Dinamika qismida esa, moddiy jismlarning kuch ta’siridagi harakatlari o‘rganiladi.

Dinamika qismining rivojlanishi esa, ancha keyin boshlandi. XV-XVI asrlarda G‘arbiy va Markaziy Evro‘a mamlakatlarida bozor munosabatlari rivojlana borgan sari, hunarmandchilik (manufaktura), savdo, dengiz kemalari qurilishi, harbiy (‘oroxning yonishi natijasida otiladigan) qurollarning va astronomik qonunlarning ochilishiga katta turtki berdi. Bularning hammasi, katta hajmda olib borilgan kuzatish ishlarining natijalarini umumlashtirilishi va sistemalashtirilishi asosida XVII asrga kelib dinamika qonunlarini ochilishiga imkon yaratdi.

Kinematika qismi, mashinashunoslikning tezkor rivojlanishi natijasida va uning ehtiyojlariga bo‘ysundirilgan holda XIX asrdagina mustaqil qism sifatida ‘aydo bo‘ldi. Kinematika qismi hozirgi kunda, mashina va mexanizmlarning harakatlarini o‘rganishda, asosiy ilmiy-nazariy asos bo‘lib xizmat qilmoqda.

1.2 Statika asosiy masalalari

Mexanika fanining kuch haqidagi umumiy tushunchalarini va kuchlar ta’siridagi moddiy jismlarning muvozanat shartlarini o‘rganuvchi qismi, *statika* deb ataladi.

Muvozanat holat deb, biror jismning boshqa jismlarga nisbatan tinch holatiga, masalan, Erga nisbatan harakatsiz holatiga aytiladi. Jismning muvozanat holati uning qattiq jism, suyuqlik va gazsimon holatda bo‘lishligiga ham bog‘liq bo‘ladi. Suyuq va gazsimon jismlarning muvozanatlik shartlari gidrostatika va aerostatikaga oid fanlarida o‘rganiladi. Umumiy mexanika kursidagi statika qismida, asosan, faqat qattiq jismlarning muvozanat shartlari o‘rganiladi.

Qattiq jismning harakati yoki muvozanat holati, shu jism bilan boshqa jismlarning o‘zaro ta’sirlarining xarakteriga bog‘liq holda bo‘ladi, ya’ni boshqa jismlar bilan bo‘lgan o‘zaro ta’sir natijalarida siqayotganligi, tortilayotganligi, surilayotganligiga bog‘liq holda bo‘ladi. Jismlarni bir-birlariga nisbatan ko‘rsatgan o‘zaro mexanik ta’sirlarining miqdorlari **kuch** deb ataladi.

1) Qattiq jismga ta’sir qilayotgan kuchlar sistemasini unga ekvivalent bo‘lgan boshqa kuchlar sistemasi bilan almashtirish; ba’zi hollarda ularni sodda holdagi kuchlar sistemasiga keltirishlik;

2) Qattiq jismga ta’sir etayotgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini aniqlashdan iborat bo‘ladi.

Statika kursini bayon qilishda ikki yo‘lni tutish mumkin:

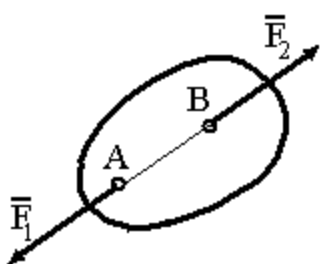
1) dinamika qismidagi asosiy qonunlardan kelib chiqadigan tenglamalar orqali;

2) dinamikaga tayanmagan holda, mexanikaning statika aksiomalari yoki ‘rintsi’lari deb ataluvchi, ya’ni umumiy qonunlariga tayangan holda o‘rganish.

1. Agar absolyut qattiq jismga bir vaqtning o‘zida ikkita kuch ta’sir etsayu, lekin u muvozanat holatda bo‘lsa, bu kuchlar bir to‘g‘ri chiziqda yotishib,

yo'nalishlari o'zaro qarama-qarshi bo'ladi va ularning son qiymatlari o'zaro teng ($F_1 = F_2$) bo'lishi shart (1- shakl).

2. Biror jismga qo'yilgan kuchlar sistemasiga qo'shimcha ravishda o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini qo'shsak yoki ularni sistemadan olib tashlasak, bu kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

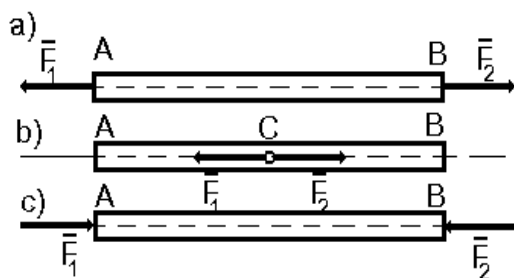


1- shakl

Boshqacha qilib aytganimizda, ikkita o'zaro ekvivalent kuchlar sistemasiga ekvivalent kuchlar sistemi bir-birlaridan faqat o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasining ortiqligi yoki kamligi bilan farqlanishlari mumkin ekan.

N a t i j a: Agar kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ixtiyoriy ikkinchi nuqtaga ko'chirsak, jismning mexanik holati o'zgarmaydi.

Ushbu qoida faqat absolyut qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasigagina taalluqli xolos. Injenerlik hisoblashlarda bu qoida orqali faqat konstruksiyalarning muvozanat shartlarini aniqlashdagina foydalanish mumkin



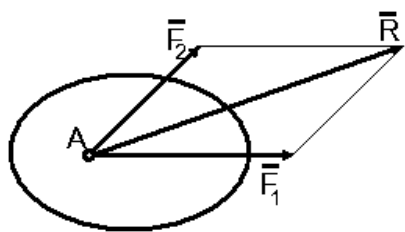
2- shakl.

xolos. Lekin konstruksiyalarni tashkil etuvchi qismlarining ichki zo'riqishlarini aniqlashda bu qoidadan foydalanish mutlaqo mumkin emas, chunki u katta xatoliklarga olib keladi.

Masalan, 2-shaklda tasvirlangan AB sterjen faqat $F_1 = F_2$ bo'lgan holatdagina muvozanatda bo'ladi. Agar kuchlar qo'yilgan nuqtalarni sterjenning boshqa ixtiyoriy C nuqtasiga ko'chirsak, yoki F_1

kuchini B nuqtaga, F_2 kuchini A nuqtaga ko'chirsak, sterjenning muvozanat holati o'zgarmaydi.

Demak, ichki kuchlarni aniqlashda, har qanday kuchlarni bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish mumkin emas ekanligi tasdiqlandi.



3- shakl

Parallelogrammi qonuni: jismning bir nuqtasiga qo'yilgan ikkita kuch, shu nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchi kuchga ega bo'lib, uning ko'rinishi berilgan kuch vektorlariga qurilgan Parallelogrammning diagonalidan iborat bo'ladi.

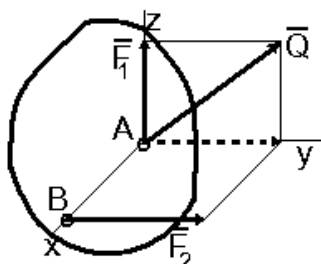
F_1 va F_2 kuch vektorlariga qurilgan

Parallelogrammning diagonalini bo'lgan $\bar{R}$ vektor (3-

shakl), F_1 va F_2 kuchlarning geometrik yig'indisidan iborat vektor deb ataladi, ya'ni

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

Shunga asosan, kuch 'arallelogrammi haqidagi qonunni quyidagicha ta'riflasak bo'ladi: *jismning bir nuqtasiga qo'yilgan ikkita kuch, shu nuqtaga qo'yilgan bitta teng ta'sir etuvchiga ekvivalent bo'lib, u kuch berilgan kuchlarning geometrik yig'indisidan iborat bo'lib, shu kuchlar kesishgan nuqtaga qo'yilgan bo'lar ekan.*



4 -shakl

Lekin teng ta'sir etuvchi kuch bilan kuchlarning yig'indisini bir-birlaridan farqlash lozim. Buni quyidagi misolda ko'rsataylik (4- shakl). A va B nuqtalarga $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin. 4-shaklda ko'rsatilgan $\vec{Q}$ kuchi $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning geometrik ($\vec{Q} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$) yig'indisiga teng, ammo u teng ta'sir etuvchi kuch bo'la olmaydi.

Chunki $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar bir nuqtada yotgan emas, bu haqda keyinchalik kengroq holda tushuntiriladi. Bunday 6 shaklda ko'rsatilgan holatda joylashgan $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar sistemasi hech qachon teng ta'sir etuvchiga ega bo'la olmaydilar.

Ta'sir va aks ta'sirning o'zaro tengligi haqidagi qonun: *ikkita jismning bir-birlariga ta'sir(kuch)lari bir to'g'ri chiziqda joylashib, son qiymatlari o'zaro teng, lekin yo'nalishlari qarama-qarshi bo'ladi.*

Bu qonun mexanikaning asosiy qonunlaridan biri hisoblanadi. Buni quyidagicha tushunish lozim. Agar ixtiyoriy A jism boshqa B jismga $\vec{F}$ kuchi bilan ta'sir ko'rsatsa, xuddi shu onda B jism ham A jismga shu ta'sir chiziqda yotuvchi va son qiymati $\vec{F}$ kuchiga teng, lekin yo'nalishi qarama-qarshi bo'lgan $\vec{F}'$ kuchi bilan aks ta'sir ko'rsatadi, ya'ni $\vec{F}' = -\vec{F}$. Lekin bu ikki $\vec{F}$ va $\vec{F}'$ kuchlari o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasidan iborat bo'lmaydi, chunki ular turli jismlarga qo'yilgan.

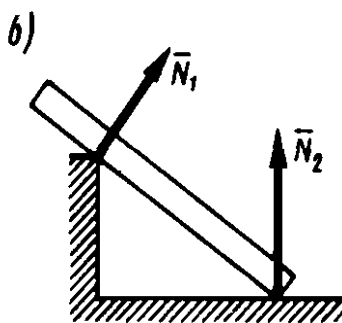
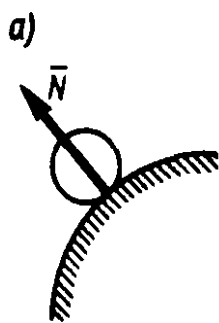
1.3. Bog'lanish, ularning turlari va bog'lanish reaksiyalari.

Erkin bo'lmagan jismlarning fazodagi harakat erkinligini chegaralanishiga sababchi bo'lgan boshqa jismlar bog'lanishlar deb ataladi. Ko'ch hollarda erkin bo'lmagan jismlarning o'zlari ham boshqa jismlarning harakatlarini qisman cheklab qo'yishlari mumkin, shu sababli ana shunday jismlar keyinchalik bog'lanish sifatida ishtirok etishlari mumkin.

Bog'lanishlarning reaksiyasi har doim jismning harakat yo'nalishi cheklangan tomonga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Agarda bog'lanish jismni bir necha yo'nalishdagi harakatini cheklayotgan bo'lsa, bunday bog'lanishning reaksiyasini yo'nalishi ham oldindan ma'lum bo'lmaydi va tegishli masalalarni echish orqali aniqlanadi.

Bog'lanish reaksiyalarining yo'nalishlarini to'g'ri aniqlanishi mexanika masalalarini echishda muhim ahamiyatga ega. Shu sababli ko'ch uchraydigan ba'zi bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'nalishlari mumkinligini o'rganib chiqamiz.

1. Silliq tekislik (yuza, sirt) yoki tayanchga. Silliq yuzali bog'lanish deb, ishqalanishga ega bo'lmagan yoki ishqalanish kuchi e'tiborga olinmagan yuzaga aytiladi. Bunday yuzalardan iborat bog'lanishlar faqat shu



yuzalarga tik bo'lgan (normal) yo'nalishdagi harakatgagina qarshilik ko'rsatishlari mumkin (6-a shakl) Shu sababli silliq yuzadan yoki silliq tayanchdan iborat bo'lgan

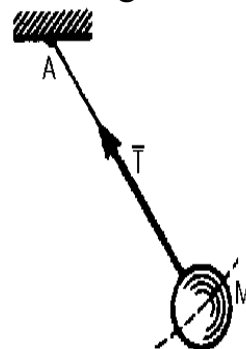
bog'lanishlarning reaksiyalari - $\bar{N}$, ularning tutashgan joylariga qo'yilgan bo'lib, tutashuvchi jismlarning umumiy normalini bo'yicha yo'naladi. Agarda

6 -shakl

tutashuvchi jismlardan biri nuqtadan iborat bo'lsa, (6- b shakl) reaksiya kuchi ikkinchi yuzaning normalini bo'ylab yo'naladi.

2. I'. Cho'zilmaydigan egiluvchan i'dan iborat bo'lgan bog'lanishlar (7 -shakl) M jismini A nuqtadan MA masofadan uzoqda bo'lgan masofaga borishiga qarshilik ko'rsatadi xolos. Shu sababli tarang i'dan iborat

bog'lanishning reaksiyasi - $\bar{T}$, shu i'ning tarangligi bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.



3. Tsilindrsimon sharnir ('odshi'nik).

Tsilindrik sharnir (yoki sharnir) ikki jismini bir-biriga shunday bog'laydiki, natijada bir jism ikkinchi jismga nisbatan umumiy o'q, ya'ni sharnir o'qi atrofida faqat aylanma harakat qila oladilar xolos.

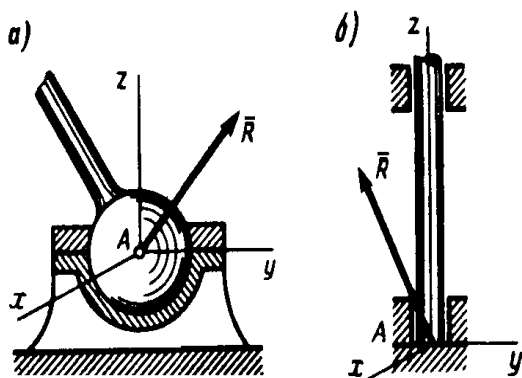
Agar AB jism qo'zg'almas D tayanchga sharnir orqali biriktirilgan bo'lsa, jismning A nuqtasi sharnir o'qiga

'er'endikulyar bo'lgan hech qaysi bir tomonga harakat qila olmaydi. Shu sababli tsilindrik sharnirdan iborat bo'lgan bog'lanishning reaksiyasi - $\bar{R}$, sharnir o'qiga 'er'endikulyar bo'lgan tekislikda joylashgan bo'lib, ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin, ya'ni Axy tekisligida ixtiyoriy ravishda joylashgan bo'ladi. Bu holda $\bar{R}$ - reaksiya kuchining na moduli R - ni, na yo'nalishini oldindan aniqlab bo'lmaydi.

7 -shakl

4. Sferasimon sharnir, tovon. Sferasimon sharnir bilan biriktirilgan jismlar A nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy o'q atrofida xohlagan tomonga aylanishi mumkin. U holda jismning A nuqtasi (9-shakl) qo'zg'almas bo'ladi. Shu sababli,

sferasimon sharnirdan iborat bog'lanishning reaksiya kuchi - $\bar{R}$, A nuqtaga qo'yilgan bo'lib, u fazoning ixtiyoriy tomoniga yo'nalgan bo'lishi mumkin. Bu holda ham yuqoridagi kabi $\bar{R}$ - reaksiya kuchining na modulini va Axyz o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarni oldindan aniqlab bo'lmaydi.



9- shakl

9, b shaklda tasvirlangan t o v o n (tayanch 'odshi'nik) dan iborat bog'lanishning reaksiyasi $\bar{R}$ -ning fazodagi yo'nalishini ham oldindan aniqlab bo'lmaydi.

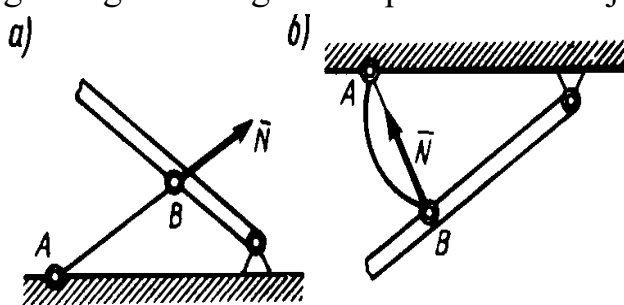
5. Baznsiz sterjen. Agar sterjenning sof og'irligi, u ko'tarib turgan yukning og'irligidan bir necha marta kichkina bo'lsa, bunday sterjen vaznsiz deb ataladi. Faraz qilaylik muvozanatda bo'lgan jismga vaznsiz sterjenlar A va B nuqtalaridagi sharnirlar

orqali (10- a shakl) mahkamlangan bo'lsin.

U holda sterjenga faqat A va B nuqtalarga qo'yilgan ikkita kuch ta'sir etishi mumkin, agar jism muvozanatda bo'lsa bu kuchlar o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etib, AB to'g'ri chiziq bo'ylab (2-a, b shakllar) yo'naladilar. U holda ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan sterjen jismga ham shu AB chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlar bilan ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli vaznsiz

sterjendan iborat bog'lanishlarning reaksiya kuchlari - $\bar{N}$, sterjenning o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi

Agar bog'lanish egri chizikli vaznsiz sterjendan iborat bo'lsa (9 -b shakl), u



10 -shakl.

holda ham bunday sterjenning reaksiyasi A va B nuqtalardan o'tuvchi o'q bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. (10-a shakldagi reaksiya vaznsiz sterjenning siqilayotganligini belgilaydi, 10-b shakldagi reaksiya vaznsiz sterjenning cho'zilayotganligini belgilaydi).

Statika masalalarini echishda, reaksiya kuchlari aniqlanishlari zarur bo'lgan noma'lum kattaliklar hisoblanadilar. Ularni aniqlash orqali, ta'sir va aks ta'sir qonuniga, asosan bog'lanishga ta'sir etayotgan kuchning miqdori aniqlanadi

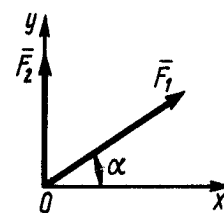
Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1. O'zaro $\alpha=45^\circ$ burchak hosil qiluvchi ikki $F_1=F_2=5N$ kuchlarning teng tahsir etuvchisining qiymatini to'ing.

A) 10,57 B) 6,98 C) 7,89 D) 9,24

2. Agar $F_1=10N$ kuch Ox o'qidan $\alpha=30^\circ$ burchak ostida $F_2=8N$ ikkinchi kuch OY o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lsa, ularning teng tahsir etuvchisi OX o'qi bilan qanday burchak tashkil etadi?

A) 40,8 B) 56,3 C) 48,4 D) 52,5

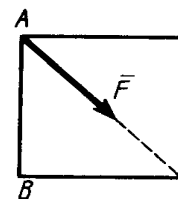


3. Tashkil etuvchilari $F_x=F_y=210\text{N}$ dan iborat bo'lgan kuch koordinatalari $x=y=0,1\text{m}$ nuqtaga qo'yilgan. Kuchning koordinata boshiga nisbatan momentini to'ing.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

4. Kvadrat plastinaning A nuqtasiga $F=150\text{N}$ kuch tahsir etadi. Agar kvadratning tomonlari $0,2\text{m}$ bo'lsa, kuchning B nuqtaga nisbatan momentini to'ing.

A) -54,5 B) -43,4 C) -32,2 D) -21,2



Nazorat uchun savollar

1. Kuch deb nimaga aytiladi?
2. Kuchlar sistemasi, ekvivalent kuchlar sistemasi nima?
3. Teng tahsir etuvchi kuch, muvozanatlashgan kuchlar sistemasi nima?
4. Statikaning ikkita asosiy masalasi nimadan iborat?
5. Silliq gorizontaal tekislikdan iborat bog'lanishning reaksiyasi qanday yo'naladi?
6. Egiluvchan bog'lanishlarning (arqon, tros, ip kabilar) reaksiyalari qanday yo'naladi?

2-MA'RUZA

Mavzu: Kesishuvchi kuchlar sistemasi.

Reja:

1. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini geometrik va analitik qo'shish.
2. Kuchning o'qqa va tekislikka 'roeksiyasi.
3. Uch kuch muvozanati haqidagi teorema.
4. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.

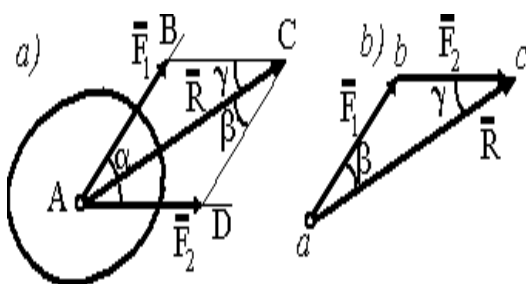
Tayanch so'z va iboralar:

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar, kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanati tenglamalari. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proeksiyalari.

2.1 Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini geometrik va analitik qo'shish

Ko'p hollarda kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi umuman bo'lmasligi ham mumkin, lekin bosh vektorni har doim hisoblab chiqarishimiz mumkin.

1. Ikkita kuchni qo'shish. Bir nuqtaga qo'yilgan va ixtiyoriy ravishda

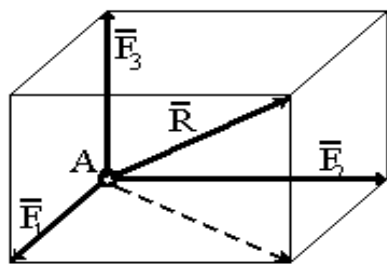


11 -shakl.

yo'nalgan $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchi vektorga $\vec{R}$ -ni shu kuchlarga qurilgan parallelogram usuli bilan aniqlanadi (11-a shakl) yoki shu 'arallelogramning birorta yarmidan iborat bo'lgan kuch uchburchagi orqali aniqlanadi (11- b shakl).

Agar berilgan kuchlar orasidagi

burchak α - ga teng bo'lsa, u holda teng ta'sir etuvchining moduli R va uni kuchlar bilan tashkil qilgan burchaklari, ya'ni β va γ -larni quyidagi formulalar orqali aniqlanadi,



12- shakl

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2.1)$$

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha} \quad (2.2)$$

2. Bir tekislikda joylashmagan uchta kuchlarni qo'shish.

Bir nuqtaga qo'yilgan lekin bir tekislikda joylashmagan ixtiyoriy $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ va $\vec{F}_3$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\vec{R}$, shu kuchlarga qurilgan 'arallele'i'edning diagonaliga teng bo'lib, ('arallele'i'ed usuli bilan) ularni ketma ket qo'shish orqali yoki kuchlar ko'churilgan usuli bilan aniqlanadi (12- shakl).

3. Kesishuvchi kuchlar sistemasini qo'shish. Ixtiyoriy kuchlar sistemasining geometrik yig'indisi (bosh vektori)ni, shu sistemaga ketma - ket 'arallelogramm usulini qo'llash orqali, yoki kuch ko'churilgan usuli bilan $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ (13,a shakl) kuchlarni qo'shishda ixtiyoriy O nuqta tanlab olamiz (13,b shakl), so'ngra shu O nuqtaga tanlab olingan masshtabga binoan $\vec{F}_1$ vektorni ifodalovchi $\vec{Oa}$ - vektorni, so'ngra a nuqtadan $\vec{F}_2$ vektorni ifodalovchi $\vec{ab}$ - vektorni va b - nuqtadan $\vec{F}_3$ -vektorni ifodalovchi $\vec{bc}$ -vektorni qo'yamiz.

Shunday tarzda birin-ketin har bir kuchni ifodalovchi vektorlarni qo'yaveramiz va oxirgi n - chi vektorni, ya'ni $\vec{F}_n$ - ni ifodalovchi $\vec{mn}$ -vektorini ham qo'yamiz. Endi birinchi vektorning boshi hisoblangan O nuqtani, n - chi vektorning uchi bilan birlashtiruvchi $\vec{On}$ -vektori, berilgan vektorlarning geometrik yig'indisi $\vec{R}$ -ni belgilaydi, ya'ni $\vec{On} = \vec{R}$ ga teng bo'ladi, yoki

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad \text{yoki} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k \quad (2.3)$$

4. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlash.

Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini yoki boshqacha qilib aytganda, Kesishuvchi kuchlar sistemasini ko'rib chiqamiz (14- a shakl). Absolyut qattiq jismlarga qo'yilgan kuchlar sir'anuvchi kuchlar bo'lganligi uchun, bir nuqtada Kesishuvchi kuchlar sistemasini, har doim bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasiga keltirishimiz mumkin (14- a shaklda, bu A nuqta).

Kuchlarni 'arallelogramm usulida birin ketin qo'sha borib shuni aniqlaymizki, *har qanday Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchi yagona vektorga ega bo'lib, u berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga (bosh vektorga)*



teng bo'lib, uning ta'sir chizig'i kuchlarning kesishgan (uchrashgan) nuqtasidan o'tar ekan.

5. Kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratish.

Kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratish deb, shunday bir necha vektorlardan iborat kuchlar sistemasini tuzish mumkinki, berilgan kuch vektori ushbu kuchlarning teng ta'sir etuvchisidan iborat bo'lishi shart ekan. Bunday masala bir necha echimga ega bo'lishi mumkin, lekin bir echimga ega bo'lishligi uchun qo'shimcha shartlar berilgan bo'lishi zarur ekan. Quyida

shunday shartlardan ikkitasini ko'rib chiqamiz:

a) Kuchni berilgan ikkita yo'nalish bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratish. Bu holda shunday 'arallelogramm qurish lozimki, uning diagonalini berilgan kuch vektoridan iborat bo'lib, uning tomonlari (tashkil etuvchilari) berilgan yo'nalishlarga 'arallel bo'ladi. Masalan, 13 -a shaklda berilgan

$\vec{R}$ - kuch vektori AB va AD yo'nalishlar bo'yicha $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlardan iborat ikkita tashkil etuvchilarga ajratildi. (bu holda $\vec{R}$ - kuch vektori, AB va AD chiziqlar bilan bir tekislikda joylashgan bo'ladi).

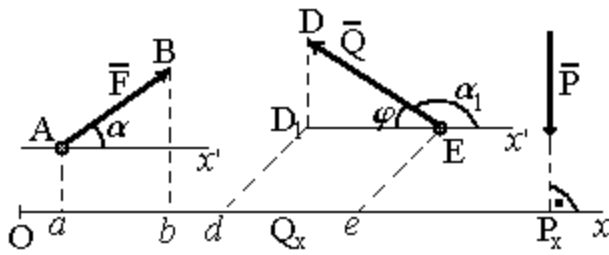
b) Kuchni berilgan uchta yo'nalishdagi tashkil etuvchilarga ajratish. Agar berilgan uchta yo'nalishlar bir tekislikda yotmasalar, u holda bunday masala yagona bir echimga ega bo'lib, uning uchun shunday 'arallele'i'ed qurish mumkinki uning diagonalini berilgan $\vec{R}$ -kuchdan iborat bo'lib, qirralari esa berilgan yo'nalishlarga 'arallel bo'ladi (14 shakl).

Kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratish usulidan bog'lanishlarga ta'sir etayotgan bosimlarini aniqlashda foydalaniladi. Buning uchun jismga (konstruktsiyaga) qo'yilgan kuchni bog'lanishlarning reaksiyalariga 'arallel bo'lgan yo'nalishlardagi tashkil etuvchilarga ajratish lozim bo'ladi. Chunki ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan, jismning bog'lanishga ta'sir kuchi va bog'lanish reaksiyasi bir to'g'ri chiziqli yotadi.

2.2 Kuchning o'qqa va tekislikka proektsiyasi.

Statika masalalarini analitik usulda qo'shish kuchni o'qqa 'roektsiyalash tushunchasiga asoslangan. *Kuchning (yoki har qanday vektorning) biror o'qqa 'roektsiyasi, shu kuchning modulini o'qning musbat yo'nalishi bilan kuch vektori orasidagi burchakning kosinusiga ko'aytmasiga teng bo'lgan algebraik qiymatga aytiladi.* Agar shu burchak o'tkir bo'lsa, - 'roektsiya musbat ishorali bo'ladi, o'tmas bo'lsa - 'roektsiya manfiy ishorali bo'ladi. Agar shu kuch o'qqa 'er'endikulyar holda yo'nalgan bo'lsa, uning 'roektsiyasi nolga teng bo'ladi.

$$F_x = F \cos \alpha = ab; Q_x = Q \cdot \cos \alpha = -Q \cos \varphi = -de, P_x = 0. \quad (2.4)$$

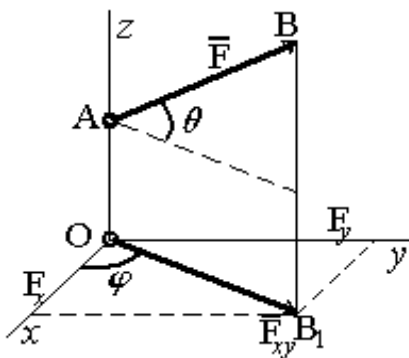


15- shakl

‘roektsiyasi vektor qiymat ekan, chunki uning son qiymatidan tashqari, shu Oxy tekislikda ma’lum yo‘nalishga ega bo‘ladi (kuchning o‘qdagi ‘roektsiyasi skalyar qiymatdan iborat -tarj).

Kuchning tekislikdagi ‘roektsiyasining moduli $F_{xy}=F \times \cos q$, bu erda q - berilgan kuch vektori $\vec{F}$ - bilan, uning Oxy tekislikdagi $\vec{F}_{xy}$ ‘roektsiyasi orasidagi burchak (19 shakl).

Ayrim hollarda kuchni to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘qqa ‘roektsiyalash mumkin bo‘lmaydi, shu sababli uni, avvalo, shu o‘q yotgan tekislikka ‘roektsiyalanadi, undan so‘ng shu ‘roektsiya vektorni o‘qqa ‘roektsiyalanadi. Masalan, 16- shaklda



16- shakl

ko‘rsatilgan $\vec{F}$ -kuchini to‘g‘ridan to‘g‘ri koordinata o‘qlariga ‘roektsiyalab bo‘lmaydi, shuning uchun ularni o‘qlardagi ‘roektsiyalari quyidagicha aniqlanadi,

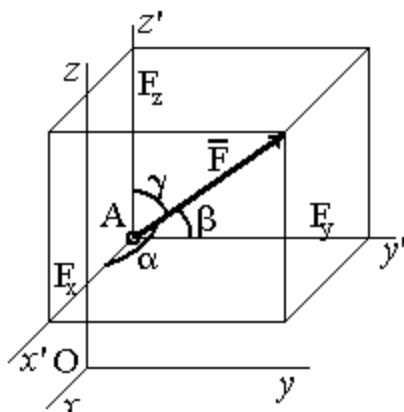
$$F_x = F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi;$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi; \quad (2.5)$$

Kuchni analitik usulda berilishi.

Bu sistemaning xususiyati shuki, Oz o‘qining musbat uchidan qaraganda Ox o‘qini soat strelkasiga teskari yo‘nalishda 90° ga burganimizda, bu o‘q Oy o‘qi bilan ustma-ust tushadi (17-shakl).

Agarda berilgan F kuchning moduli va uning koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan a , b , g - burchaklari ma’lum bo‘lsa, shu holdagina $\vec{F}$ -kuch vektorini tasvirlash mumkin. Shunday qilib, F va a , b , g -lar $\vec{F}$ - kuch vektorining tashkil etuvchilari hisoblanadi. Undan tashqari bu $\vec{F}$ -kuchning qo‘yilgan nuqtasining koordinatalari, ya’ni x , y , z -lar



17- shakl

ham berilgan bo‘lishlari shart.

Mexanika masalalarini echishda kuchlarni ularning ‘roektsiyalari F_x , F_y , F_z - orqali berilishi qulay hisoblanadi. Ushbu ‘roektsiyalarni bilgan holda, kuchning moduli va koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan burchak kosinuslarini quyidagi formulalar orqali aniqlanadi,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}, \quad (2.6)$$

Agar berilgan kuchlarning hammasi bir tekislikda joylashgan bo'lsa, har bir kuchni ularning Ox va Oy o'qlardagi 'roektsiyalari orqali berilishi mumkin bo'ladi. U holda yuqoridagi formulalar soddaroq ko'rinishga keladilar,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad (2.7)$$

Kuchlarni analitik usulda qo'shish. Kuchlarning vektor bog'lanishi bilan ularning 'roektsiyalarini bog'lanishi geometriya fanidagi quyidagi teorema orqali ifodalanadi: *yig'indi vektorning biror o'qqa 'roektsiyasi, yig'indi vektorni tashkil etuvchi vektorlarning shu o'qqa 'roektsiyalarining yig'indisiga teng.* Ushbu teoreмага asosan, agar $\vec{R}$ - vektori $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ vektorlarning yig'indisidan iborat bo'lsa, ya'ni $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ bo'lsa, u holda:

$$R_x = \sum F_{kx}; R_y = \sum F_{ky}; R_z = \sum F_{kz}; \quad (2.8)$$

shu sababli, R_x, R_y va R_z - larni bilgan holda (10.6) formula orqali, yig'indi vektorning moduli va burchak kosinuslarini aniqlaymiz, ya'ni:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (2.9)$$

Yuqoridagi (2.8) va (2.9) formulalar kuchlarni analitik qo'shish uchun zarur bo'lgan formulalarni tashkil etadi.

Berilgan kuchlar bitta tekislikda joylashgan kuchlardan iborat bo'lsa (2.9) formulalar ancha soddalashadi,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \quad (2.10)$$

Agar kuchlar, o'zlarining modullari va burchak kosinuslari bilan berilgan bo'lsalar, ularni analitik usulda qo'shish uchun avvalo ularning 'roektsiyalarining yig'indilarini aniqlash lozim bo'ladi.

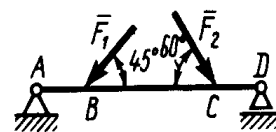
Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1. Balkaga tahsir qiluvchi tekislikda joylashgan 'arallel kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari nechta?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

2. A sharnir yordamida mahkamlangan BC brusga $F_1=4\text{kN}$ va F_2 kuchlar ta'sir etib, u muvozanatda bo'lsa, masofalarni $AC=2\text{m}$, $AB=6\text{m}$ hisoblab, $\bar{F}_2$ kuchning miqdorini aniqlang.
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12



3. O'lchamlari $AB=1\text{m}$, $BC=2\text{m}$, $CD=2\text{m}$ bo'lgan balkaga $F_1=84,6\text{N}$ va $F_2=208\text{N}$ kuchlar ta'sir etsa, D tayanch reaksiya kuchini hisoblang.
A) 100 B) 120 C) 140 D) 130



Nazorat uchun savollar

- 1) Kesishuvchi kuchlar sistemasi deb, qanday kuchlarga aytiladi?
- 2) Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining yo'nalishi qanday aniqlanadi?
- 3) Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining moduli qanday aniqlanadi?
- 4) Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi qaysi nuqtaga qo'yiladi?
- 5) Oxirgi kuchdan boshlab kuch ko'pburchagini qurish mumkinmi?
- 6) Kuchning o'qqa proyeksiyasini aniqlashni tushuntirib bering?

3-MA'RUZA

Mavzu: Tekislikdagi kuchlar sistemasi.

Reja:

1. Kuchning nuqtaga va o'qqa nisbatan momenti
2. Juft kuchlar. Juft kuchlarning momenti
3. Bosh vektor va bosh momentini aniqlash.
4. Ixtiyoriy kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.

Tayanch so'z va iboralar:

Kuch momenti, juft kuch, bosh vektor, bosh moment, kuch yelkasi, juft yelkasi

3.1. Kuchning nuqtaga va o'qqa nisbatan momenti

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti haqidagi muhim tushunchani kiritamiz. Agar jism qo'yilgan kuchlar ta'sirida, biror nuqta atrofida aylanma harakat qila olsa, kuchning shu nuqtaga nisbatan momenti jismning aylanma harakatini samaradorligini belgilaydi.

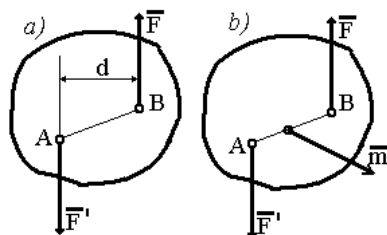
Birorta O markazdan shu $\bar{F}$ kuchning ta'sir chizig'iga 'er'endikulyar chiziq o'tkazaylik shu perpendikulyar chiziqning uzunligi h -ni O markazga nisbatan $\bar{F}$ - kuchning *elkasi* deb ataladi. Kuchning O markazga nisbatan momenti:

- 1) $F \times h$ ko'paytmadan iborat bo'lgan momentning modulidan;
- 2) O markaz va $\bar{F}$ kuch vektoridan o'tuvchi OAB tekisligining joylashishidan;
- 3) jismning shu tekislik bo'yicha aylanishining yo'nalishiga bog'liq ravishda aniqlanadi.

3.2. Juft kuchlar. Juft kuchlarning momenti

Modullari o'zaro teng, yo'nalishlari qarama-qarshi va 'arallel bo'lgan vektorlardan tashkil to'gan ikkita kuchlardan iborat sistemaga - juft kuch-deb, ataladi (18- a shakl).

Juft kuchlarni tashkil etuvchi $\vec{F}$ va $\vec{F}'$ vektorlardan iborat kuchlar sistemasi hech qachon muvozanat holatda bo'lmaydi (chunki bu kuchlar bir to'g'ri chiziqli yotmaydilar). o'z navbatida bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi ham bo'lmaydi, chunki ixtiyoriy kuchlar sistemasining



18- shakl

bosh vektori, ya'ni vektor yig'indisi $\vec{R}$ bo'ladi, juft kuchlar uchun u $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$ ga teng bo'ladi. Shu sababli juft kuchlar, jismlarning o'zaro maxsus ta'sirlariga oid bo'lganligi uchun, alohida o'rganiladi.

Juft kuchlarning ta'sir chiziqlari joylashgan tekislik, juft kuchlarning tekisligi deb ataladi. Juft kuchlarning ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa, *juftning elkasi* deb ataladi. Juft kuchlarning jismga ta'siri, uning aylanma harakatini belgilaydi va uni belgilovchi qiymat *juftning momenti* deb ataladi.

Juftning momenti:

- 1) $F \times d$ -ko'paytmadan iborat bo'lgan juftning moduli;
- 2) juftning ta'sir kuchi joylashgan tekislik;
- 3) juftning shu tekislik bo'yicha aylanishining yo'nalishi bilan belgilanadi.

Ta'rif: *Juft kuchning momenti deb, moduli juftni tashkil qiluvchi kuchlarning birini modulini juftning elkasiga ko'aytmasiga teng bo'lgan, yo'nalishi esa juft kuchlar yotgan tekislikka 'er'endikulyar bo'lib, jismni soat strelkasi yo'nalishiga teskari bo'lgan yo'nalishda aylantirishga harakat qiluvchi $\vec{m}$ yoki $\vec{M}$ - harfi bilan belgilanadigan vektorga aytiladi (18- b shakl).*

Juft kuchning momentiga boshqacha ham ta'rif berish mumkin. Juftning momenti juftni tashkil etuvchi kuchlarning ixtiyoriy O markazga nisbatan olingan momentlarning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}'), \quad (3.1)$$

Ushbu ta'rifni isbotlash uchun, ixtiyoriy O markaz tanlab olamiz (19- shakl), va bu nuqtadan kuchlar qo'yilgan nuqtalarga $\vec{r}_A = \vec{OA}$ va $\vec{r}_B = \vec{OB}$ bo'lgan radius vektorlar o'tkazamiz. U holda $\vec{F}' = -\vec{F}$ ekanligini e'tiborga olib,

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}_B \times \vec{F}, \quad \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r}_A \times \vec{F} = -\vec{r}_A \times \vec{F}',$$

hosil qilamiz, ularning geometrik yig'indisi,

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F},$$

hosil qilamiz. $\vec{AB} \times \vec{F} = \vec{m}$, ekanligini hisobga olsak (3.1) formula isbotlanganligini ko'ramiz. Bundan yuqorida ko'rsatilgan natija kelib chiqadi, ya'ni

$$\vec{m} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{m}_A(\vec{F}) \quad \text{yoki} \quad \vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}') \quad (3.2)$$

demak, juftning momenti birorta kuchning ikkinchi kuch qo'yilgan markazga nisbatan momentiga teng ekan. Juft kuchlar momentining moduli,

$$m = F \times h \quad (3.3)$$

3.3 Bosh vektor va bosh momentini aniqlash.

Jismga $\vec{F}$ va $\vec{F}'$ kuchlardan tashkil etgan juft ta'sir etayotgan bo'lsin. Shu juft kuchlar joylashgan tekislikda yotuvchi ixtiyoriy olingan D va E nuqtalardan shu tekislikda o'zaro 'arallel bo'lgan ikkita chiziq o'tkazaylik. Bu chiziqlar $\vec{F}$ va $\vec{F}'$ kuchlarning ta'sir chiziqlarini A va B nuqtalarda kesib o'tishsin. So'ngra shu $\vec{F}$ va $\vec{F}'$ kuchlarni (ular ilgari boshqa nuqtalarga joylashgan bo'lsalar) ana shu A va B nuqtalarga ko'chirib qo'yaylik. Endi $\vec{F}$ -kuchni AB va EB yo'nalishdagi ikkita $\vec{Q}$ va $\vec{P}$ tashkil etuvchi vektorlarga ajrataylik, o'z navbatida $\vec{F}'$ - kuchni ham BA va AD yo'nalishda bo'lgan ikkita $\vec{Q}'$ va $\vec{P}'$ vektorlarga ajrataylik.

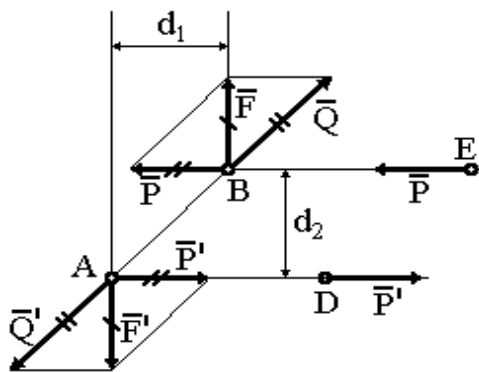
Shaklda tasvirlangandek $\vec{Q}' = -\vec{Q}$ va $\vec{P}' = -\vec{P}$ tenglamalar o'rinli bo'ladi. Shu sababli $\vec{Q}'$ va $\vec{Q}$ vektorlarni o'zaro muvozanatlovchi sistemani tashkil qilganligi sababli jismdan olib tashlaymiz. Natijada berilgan $\vec{F}$ va $\vec{F}'$ juft kuchlar o'rnida $\vec{P}$ va $\vec{P}'$ kuchlardan tashkil to'gan, kuchlarning modullari ham, ularning elkalari ham boshqa bo'lgan yangi juft kuchlar 'aydo bo'ldi. Yangi hosil bo'lgan juftni tashkil etuvchi $\vec{P}$ va $\vec{P}'$ kuchlarni D va E nuqtalarga qo'ysak, ularning ta'sir chiziqlari ham boshqacha ekanligini ko'rishimiz mumkin. D va E nuqtalarni ixtiyoriy ravishda tanlab olganligimiz va ularni kesib o'tuvchi AD va BE chiziqlarni ham ixtiyoriy ravishda yo'naltirganligimizni e'tiborga olsak $\vec{P}$ va $\vec{P}'$ kuchlardan tashkil to'gan juftni, tekislikning xohlagan joyida hosil qilishimiz mumkinligining guvohi bo'ldik.

Endi $\vec{F}$, $\vec{F}'$ va $\vec{P}$, $\vec{P}'$ kuchlardan tashkil to'gan juftlarning momentlari o'zaro teng ekanligini ko'rsatib o'taylik. Ularning momentlarini tegishlicha $\vec{m}_1$ va $\vec{m}_2$ -lar bilan belgilaylik. (3.4) formulaga asosan $\vec{m}_1 = \vec{AB} \times \vec{F}$ va $\vec{m}_2 = \vec{AB} \times \vec{P}$ bo'ladi. Ammo $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$ bo'lganligi sababli $\vec{AB} \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{P} + \vec{AB} \times \vec{Q}$, lekin $\vec{AB} \times \vec{Q} = 0$ ekanligi sababli

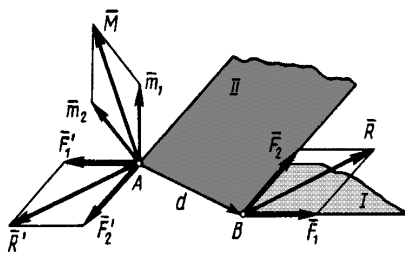
$\vec{m}_1 = \vec{m}_2$ ekanligi isbotlandi.

Ushbu isbot qilingan natijaga asosan quyidagi xulosaga kelamiz:

1) juft kuchlarni ular joylashgan tekislikning bir joyidan ixtiyoriy boshqa joyga ko'chirsak, jismning holati o'zgarmaydi.



19- shakl.



20- shakl.

2) juft kuchlar momentining modulini o'zgartirmagan holda, juftni tashkil etuvchi kuchlarining modullarini va juftning elkasini tegishli ravishda o'zgartirsak jismning holati o'zgarmaydi.

Bulardan tashqari, juft kuchlarning yana bir muhim xossasini ko'rsatib o'tamiz (isbotini keltirmaymiz).

3) juft kuchni bir tekislikdan o'ziga parallel bo'lgan va shu jismga tegishli bo'lgan har qanday boshqa tekislikka ko'chirsak, jismning holati o'zgarmaydi.

Demak, *moment vektorlari o'zaro teng va bir xil yo'nalgan ikkita juft ekvivalent juftlarga ega. (ekvivalent juftlar haqidagi teorema)*. Bunga asosan, har qanday juftni vektor momentini saqlagan holda, uning tashkil etuvchi kuchlar modullari va elkalarini o'zgartirish yoki bir tekislikdan o'ziga parallel bo'lgan boshqa tekislikka ko'chirish yoki bir tekislikning bir

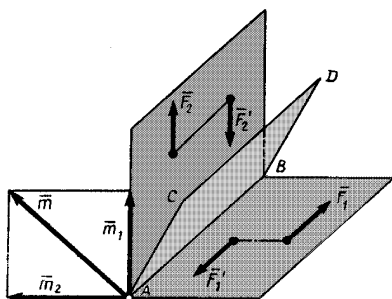
joyidan boshqa istalgan joyga ko'chirish kabi amallarni bajarish mumkin ekanligi isbotlandi.

Endi juftlarni qo'shish haqidagi teoremani isbot qilaylik.

Teorema: qattiq jismga ta'sir etuvchi bir necha juftlar, shunday bitta juftga ekvivalentki, bu ekvivalent juft momentining vektori berilgan juftlar momentlari vektorlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Buni isbotlash uchun I va II tekisliklarda joylashgan va momentlari

$\bar{m}_1$ va $\bar{m}_2$ dan iborat ikkita juftni olaylik (20- shakl). Tekisliklarning kesishgan chizig'ida yotuvchi $AB=d$ kesmani olaylik va shu kesmada $\bar{F}_1, \bar{F}_1'$ kuchlardan



29- shakl.

tashkil to'gan $\bar{m}_1$ -juftni, hamda $\bar{F}_2, \bar{F}_2'$ kuchlardan tashkil to'gan $\bar{m}_2$ -juftni tasvirga tushiraylik (lekin, albatta, $F_1 \times d = m_1$ va $F_2 \times d = m_2$).

A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni geometrik ravishda qo'shib, shuni aniqlaymizki, $\bar{F}_1, \bar{F}_1'$ va $\bar{F}_2, \bar{F}_2'$ lardan iborat bo'lgan ikkita juft $\bar{R}, \bar{R}'$ -kuchlardan tashkil to'gan bitta juftga ekvivalent ekan. Endi shu ekvivalent juftning moment

vektorini aniqlaylik. $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ bo'lgani sababli

$\overline{AB} \times \bar{R} = \overline{AB} \times \bar{F}_1 + \overline{AB} \times \bar{F}_2$ yoki (3.3) formulaga asosan $\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$ ekanligi isbotlandi.

Ushbu teorema ikkita juft uchun isbot qilindi, lekin shuni ta'kidlash lozimki, agar tekisliklar ustma-ust bo'lsalar (ya'ni I va II tekisliklar bitta tekislikdan iborat bo'lsa) ham ushbu teorema o'z kuchini saqlab qoladi.

Agar jismga bir vaqtning o'zida moment vektorlari $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$ dan iborat bo'lgan n -ta juftlar ta'sir etsa, juftlarni yuqorida isbot qilingan teoreмага asosan, birin ketin-qo'shish orqali ularni yagona ekvivalent juft bilan almashtirish mumkin bo'lib, hosil bo'lgan ekvivalent juftning moment vektori

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum \bar{m}_k \quad (3.4)$$

formula orqali aniqlanadi.

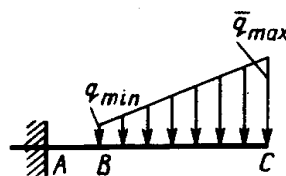
Yuqoridagilarga asosan, bir nechta juft kuchlar ta'siridagi qattiq jismning muvozanat shartini aniqlash oson, ya'ni

$$\bar{M} = 0 \text{ yoki } \sum \bar{m}_k = 0 \quad (3.5)$$

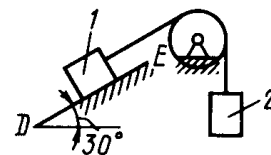
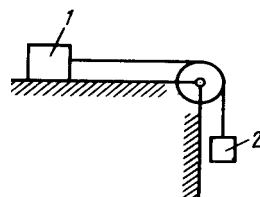
dan iborat bo'lar ekan.

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1. O'lchamlari $AB=2\text{m}$, $BC=6\text{m}$ bo'lgan balka devorga qistirib mahkamlangan bo'lib, unga intensivliklari $q_{\max}=30\text{N/m}$ va $q_{\min}=10\text{N/m}$ li yoyilgan kuchlar tahsir etsa, A tayanchda hosil bo'ladigan reaktiv momentning miqdorini aniqlang.



- A) 620 B) 610 C) 640 D) 660
2. Og'irligi 200 N bo'lgan 1-yuk blok orqali i' yordamida 2-yukga bog'langan. Agar 1-yuk va tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti $f=0,2$ bo'lsa, 1-yuk o'rniga qo'zg'alishi uchun 2-yukning eng kam miqdorini to'ing.
 3. Qiya tekislikda 1-yuk blok orqali va vositasida og'irligi 3200 N li 2-yukga bog'langan. Agar 1-yuk va qiya tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti 0,2 bo'lsa, 1-yuk 'astga tushishi uchun uning eng kam og'irligi qancha bo'ladi?



Nazorat uchun savollar

1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Moment markazi va kuch yelkasi nima?
3. Kuchning nuqtaga nisbatan momentini vektorligi nima?
4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Qaysi hollarda kuchning nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo'ladi?
6. Qaysi hollarda kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi?

4-MA'RUZA

Mavzu: Tekislikdagi kuchlar sistemasi.

Reja:

1. Bir necha jismdan iborat sistemaning muvozanati.
2. Statik aniq va statik noaniq masalalar
3. Qo'shma konstruksiyalarning muvozanatini tekshirish

Tayanch so'z va iboralar:

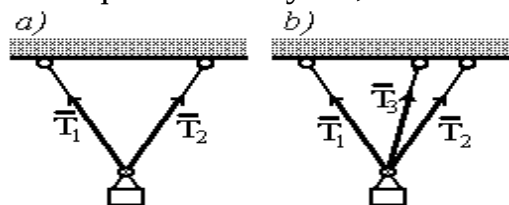
Kuchlar sistemasi, statik aniq masalalar, statik noaniq masalalar, muvozanat sharti, qo'shma konstruksiya.

4.1 Bir necha jismdan iborat sistemaning muvozanati.

Biror tekislikda joylashib, ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasi tekislikdagi kuchlar sistemasi deb ataladi. Bunday kuchlar sistemasini o'rganishdan oldin quyidagi asosiy tushunchalar bilan tanishib olishlik zarur bo'ladi.

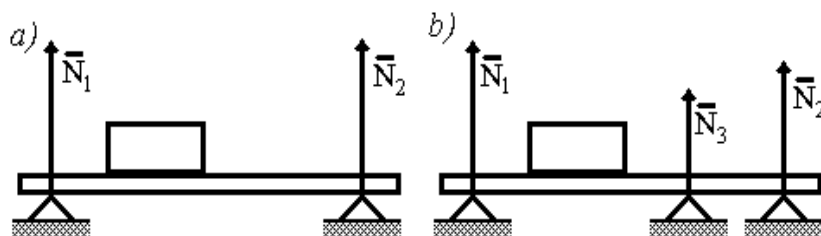
Statika masalalarini echishda bog'lanishlar reaksiyalari oldindan noma'lum deb hisoblanadi; ularning soni bog'lanishlarning soni va ularning turlariga bog'liq bo'ladi. Shu bog'lanishlar reaksiyalari qatnashgan va ularni aniqlash uchun tuzilgan tenglamalar sistemasi, amalda muvozanatlik sharti tenglamalari deb ataladilar. Lekin statikaning bunday masalalari echimga ega bo'lishlari uchun, tuzilgan tenglamalarning soni, shu tenglamalarda ishtirok etgan noma'lumlarning soniga teng bo'lishi shart.

Muvozanat sharti asosida tuzilgan tenglamalar soni bog'lanishlarning noma'lum reaksiyalari soniga to'g'ri kelsa, bunday masalalar *statik aniq* masalalar deb ataladi, shu shartlarni qanoatlantiradigan konstruksiyalar, qurilmalar sistemasi statik aniq konstruksiyalar, inshootlar va qurilmalar deb ataladi.



30- shakl.

Muvozanat shartlari asosida tuzilgan tenglamalar soni bog'lanishlarning noma'lum reaksiyalari sonidan kam bo'lsa, bunday masalalar *statik noaniq* masalalar deb ataladi, shu shartlarni qanoatlantirmaydigan konstruksiyalar, qurilmalar sistemasi statik noaniq konstruksiyalar, inshootlar va qurilmalar deb ataladi.



31- shakl.

nomalum T_1 , T_2 - reaksiyalari, Kesishuvchi kuchlarning muvozanatlik sharti uchun tuzilgan ikkita tenglamaga to'g'ri keladi. Bir tekislikda joylashgan uchta trosning bir nuqtada tutashgan nuqtasiga osib qo'yilgan yukdan iborat konstruksiya (30-b shakl) statik noaniq deb ataladi, chunki tekislikda Kesishuvchi kuchlarning

Masalan, ikkita trosga osib qo'yilgan yukdan iborat konstruksiya statik aniq hisoblanadi (30-a shakl), chunki ikkita bog'lanishlarning

muvozanatlik shartining tenglamalar soni ikkita, bog'lanishlar reaksiyalari soni esa uchta

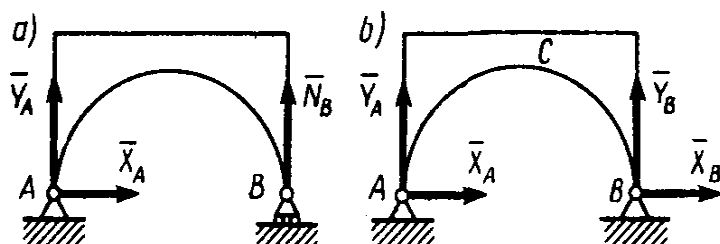
T_1, T_2, T_3 . Demak, noma'lumlarni aniqlab bo'lmaydi.

4.2. Statik aniq va statik noaniq masalalar.

Xuddi shunga o'xshash masalani ikkita tayanchga o'rnatilgan gorizontal balka misolida ham uchratish mumkin (31-a shakl). Agar tayanchlar soni ikkita bo'lsa, reaksiya kuchlari ham ikkita bo'ladi, natijada masala statik aniq hisoblanadi. Agar tayanchlar soni uchta bo'lsa (31- b shakl) unday masala statik noaniq deb ataladi, chunki bunday masalani statika qismida echib bo'lmaydi.

32- a shaklda tasvirlangan arkani olib ko'raylik. Bu konstruktsiya bitta qo'zg'almas A va qo'zg'aluvchan (katok-g'ildirak) B tayanchlardan iborat bog'lanishlarga mahkamlangan. Bunday ark statik aniq hisoblanadi. Chunki bu konstruktsiyada jami bo'lib uchta noma'lum X_A, Y_A, N_B reaksiya kuchlari mavjud bo'lib, ular tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun tuzilgan uchta muvozanat tenglamalari soniga to'g'ri keladi. Agarda B nuqtada ham qo'zg'almas tayanch bo'lsa (32- b shakl), u holda noma'lum reaksiyalar soni to'rtta bo'ladi (X_A, Y_A, X_B, Y_B). Natijada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ortib ketadi va ark statik noaniq bo'lib qoladi.

Lekin 32 shakldagi uch sharnirli ark statik aniq bo'ladi, chunki uni C nuqtada ikki qismga ajratib, jami oltita tenglamalar olishimiz mumkin, ajratilganda yana



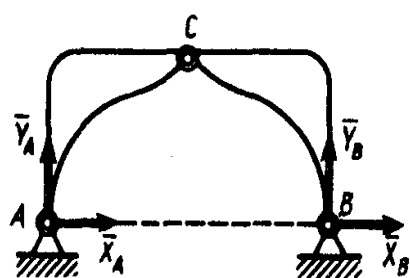
32- shakl

ikkita noma'lumlar (X_C va Y_C) qo'shib, noma'lumlar soni tenglamalar soniga to'g'ri keladi (har bir qismi uchun uchta tenglama tuzish mumkin). 32-b shakldagi ark uchun bu amallarni bajarib bo'lmaydi. Chunki bu arkani C nuqtadan ikkiga

ajratsak, bu nuqtada ikkita reaksiya $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ kuchlari mavjud bo'lib, yana m_C - momentli juft kuch 'aydo bo'ladi. Natijada noma'lum reaksiyalar soni ettita bo'ladi ($X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, m_C$), tenglamalar soni esa oltita bo'lib, bitta noma'lum ortiq holda bo'ladi, ya'ni statik noaniq konstruktsiya hisoblanadi.

Statik noaniqlik, ortiqcha bog'lanishlar qo'yilishi orqali sodir bo'ladi. Masalan, 66 shakldagi balkaning muvozanatini saqlash uchun ikkita tayanch etarli bo'lib, uchinchi tayanchni keragi yo'q (chunki balkani ilgari kelishib olganimizday, absolyut qattiq, egilmaydi, deformatsiyalanmaydi deb qabul qilganmiz). Albatta, statik noaniq masalalarning ham yechimi bor, lekin bunday masalalar «Materiallar qarshiligi» fanida ko'rib o'tiladi.

Injenerlik inshootlarni statik hisoblash ishlari ko' hollarda turli xil bog'lanishlar orqali bir-birlari bilan birlashtirilgan jismlar sistemasining qo'shma konstruktsiyalar muvozanatini tekshirishga keltiriladi. Bunday konstruktsiyaning bir qismini ikkinchi qismi bilan bog'lovchi jismlarni *ichki bog'lanishlar* deb ataladi. Konstruktsiyani shu konstruktsiya tarkibiga kirmagan boshqa jismlar bilan bog'lagan jismlarni (masalan, tayanchlar bilan) *tashqi bog'lanishlar* deb ataladi.



33 shakl.

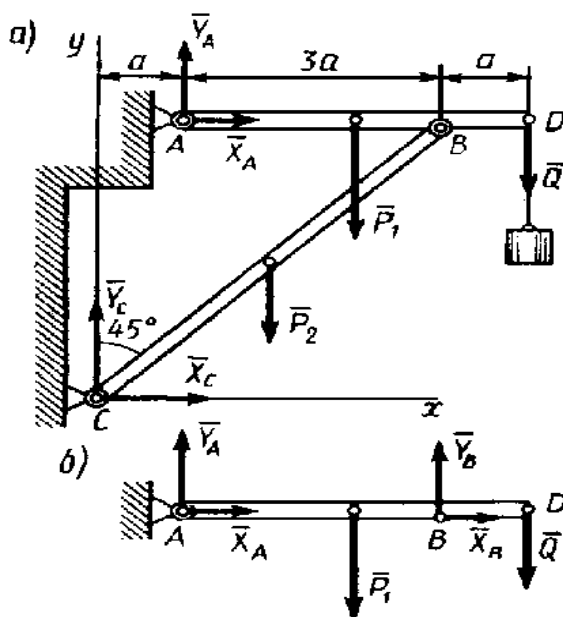
Ammo amalda shunday injenerlik konstruksiyalari ham uchraydiki, ulardagi tashqi bog‘lanishlarni (tayanchlarni) olib tashlansa ular qattiq (yaxlitlik) holatini yo‘qotib, shakli o‘zgaruvchan (bo‘laklarga ajraluvchan) bo‘lgan konstruksiyaga aylanib qoladilar. Bunday konstruksiyalarga uch sharnirli arka (61 shakl) misol bo‘la oladi. Agar A va B tayanchlar olib tashlansa, ark o‘z qattiqligini yo‘qotadi, ya’ni uning

qismlari S sharnir atrofida aylanma harakat qilishlari mumkin.

Statikaning qotishlik ‘rintsi’iga asosan, shu sistemaga qo‘yilgan kuchlar sistemasi, qattiq jismning muvozanat shartlarini qanoatlantirishi lozim. Lekin bu shartlar faqat zaruriy bo‘ladi xolos va ko‘‘ hollarda yetarli bo‘lmaydi, shu sababli ular orqali barcha noma’lumlarni aniqlashni iloji bo‘lmaydi. Bunday masalalarni yechganimizda qo‘shimcha ravishda shu konstruksiyaning birorta yoki bir nechta qismlarining alohida holatdagi muvozanatlik shartidan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasi tuzish lozim bo‘ladi.

4.3. Qo‘shma konstruksiyalarning muvozanatini tekshirish

Masala. Gorizontaal joylashgan AD va qiya BC bruslardan tashkil to‘gan kronshteynning D uchiga og‘irligi $Q=300$ N yuk osib qo‘yilgan. AD brusning og‘irligi $R_1=150$ N bo‘lib, A uchi bilan sharnir orqali devorga biriktirilgan, og‘irligi $R_2=120$ N bo‘lgan CB tirgak C nuqtada devorga sharnir orqali mahkamlangan, bir-birlari bilan B nuqtada sharnir orqali biriktirilganlar (barcha o‘lchamlar shaklda ko‘rsatilgan). AD brus va CB tirgakni bir jinsli deb hisoblab, A va C nuqtalardagi bog‘lanishlarning reaksiyalari aniqlansin.



34 shakl.

Yechish. Avvalo kronshteynning yaxlit holatining muvozanatini olib ko‘raylik. Unga quyidagi tashqi kuchlar ta’sir etmoqda: berilgan kuchlar $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{Q}$ va bog‘lanishlarning reaksiyalaridan iborat bo‘lgan $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ kuchlar.

Yechish. Avvalo kronshteynning yaxlit holatining muvozanatini olib ko‘raylik. Unga quyidagi tashqi kuchlar ta’sir etmoqda: berilgan kuchlar $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{Q}$ va bog‘lanishlarning reaksiyalaridan iborat bo‘lgan $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ kuchlar.

Agar konstruksiyani A va C bog‘lanishlardan ozod qilsak, u qattiqligini yo‘qotadi, (ya’ni uning qismlari B nuqtadagi sharnir atrofida aylanma harakat qilishlari mumkin). Lekin statikaning qotishlik ‘rintsi’iga asosan, ular o‘zining muvozanatini saqlaydilar. Shu shartlar asosida quyidagi tenglamalarni tuzamiz,

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + X_C = 0$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) \equiv X_C \cdot 4a - Y_C a - P_1 \cdot 2a - P_2 a - Q \cdot 4a = 0$$

Tuzilgan yuqoridagi uchta tenglamalar sistemasida to'rtta $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ noma'lumlar ishtirok etmoqda.

Bu masalani yechish uchun qo'shimcha ravishda AD brusning muvozanatlik shartini ko'rib chiqamiz (31, b shakl). Unga: $\bar{P}_1, \bar{Q}$ tashqi kuchlar, $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ reaksiya kuchlari va AD brus uchun tashqi bo'lgan $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ reaksiya kuchlaridan iborat kuchlar sistemasi ta'sir etmoqda. Etishmagan to'rtinchi tenglamaning o'rniga AD brusga qo'yilgan kuchlarning B markazga nisbatan olingan momentlarini yig'indisini nolga tenglab, qo'shimcha tenglama tuzamiz (chunki, bunday tenglamada $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ - dan iborat bo'lgan yangi noma'lumlar qatnashmaydi):

$$\sum m_B(\bar{F}_k) \equiv -Y_A \cdot 3a + P_1 a - Qa = 0$$

Hosil bo'lgan to'rtta tenglamalar sistemasini noma'lum qiymatlarga (oxirgi tenglamadan boshlash kerak) nisbatan yechib, ularni aniqlaymiz,

$$Y_A = (P_1 - Q) / 3 = -50 \text{ H}, \quad Y_C = 2P_1 / 3 + P_2 + 4Q / 3 = 620 \text{ H},$$

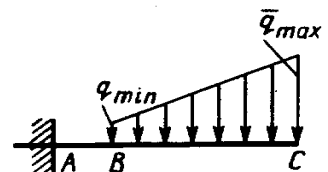
$$X_C = 2P_1 / 3 + P_2 / 2 + 4Q / 3 = 560 \text{ H}, \quad X_A = -X_C = -560 \text{ H}.$$

Olingan natijalardan ko'rinib turibdiki, $\bar{X}_A$ va $\bar{Y}_A$ -larning yo'nalishlari chizmada ko'rsatilganga teskari yo'nalishda bo'lar ekan. Agar B nuqtaning reaksiya kuchini aniqlash zarur bo'lsa, AD brusga ta'sir etuvchi kuchlarni x va u o'qlardagi 'royektsiyalardan iborat bo'lgan tenglamalar yordamida aniqlaymiz va ular $X_B = -X_A, Y_B = R_1 + Q - Y_A = 500 \text{ N}$. qiymatlarga teng bo'lar ekan.

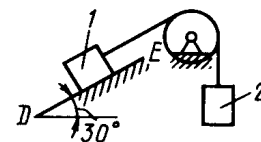
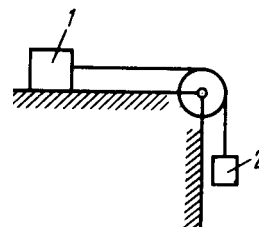
Statika masalalarini yechishda muvozanat holati ko'rilayotgan jism uchun barcha tenglamalar sistemasini tuzishning hojati yo'q. Masalan, ayrim reaksiya kuchlarini aniqlash zarur bo'lgan hollarda, tenglamani shunday tuzish lozimki, iloji bo'lsa o'sha tenglamada faqat bitta izlanayotgan noma'lum bo'lishligiga intilish kerak. Masalan, ushbu masalada ham AD brusning muvozanat tenglamasini tuzishda B markazga nisbatan momentlar tenglamasini tanlaganligimiz natijasida faqat bitta noma'lum, ya'ni $\bar{Y}_A$ -ishtirok etganligi misol bo'la oladi.

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1. O'lchamlari $AB=2\text{m}, BC=6\text{m}$ bo'lgan balka devorga qistirib mahkamlangan bo'lib, unga intensivliklari $q_{\max}=30\text{N/m}$ va $q_{\min}=10\text{N/m}$ li yoyilgan kuchlar ta'sir etsa, A tayanchda hosil bo'ladigan reaktiv momentning miqdorini aniqlang.



- A) 620 B) 610 C) 640 D) 660
2. Og'irligi 200 N bo'lgan 1-yuk blok orqali i' yordamida 2-yukga bog'langan. Agar 1-yuk va tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti $f=0,2$ bo'lsa, 1-yuk o'rniga qo'zg'alishi uchun 2-yukning eng kam miqdorini to'ing.
- A) 10 B) 20 C) 30 D) 40
3. Qiya tekislikda 1-yuk blok orqali va vositasida og'irligi 3200 N li 2-yukga bog'langan. Agar 1-yuk va qiya tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti 0,2 bo'lsa, 1-yuk 'astga tushishi uchun uning eng kam og'irligi qancha bo'ladi?
- A) 931 B) 979 C) 843 D) 768



Nazorat uchun savollar

- 1) Juft kuch deb qanday kuchlar sistemasiga aytiladi?
- 2) Juftning momenti nimaga teng?
- 3) Juftning yelkasi qanday aniqlanadi?
- 4) Juftning momentining vektorini ko'rsating
- 5) Juft kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nimaga teng?
- 6) Ekvivalent juftlar deb qanday juftlarga aytiladi?

5-MA'RUZA

Mavzu: Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini.

Reja:

1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini qo'shish.
2. Fazoviy kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentini aniqlash.
3. Fazoviy kuchlar sistemasini tasirida qattiq jismlarning muvozanatlik shartlari.

Tayanch so'z va iboralar:

Ixtiyoriy kuch, bosh vector, bosh moment, fazoviy kuchlar, kuchning o'qdagiproektsiyasi, kuchning tekislikdagi proektsiyasi.

5.1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini qo'shish.

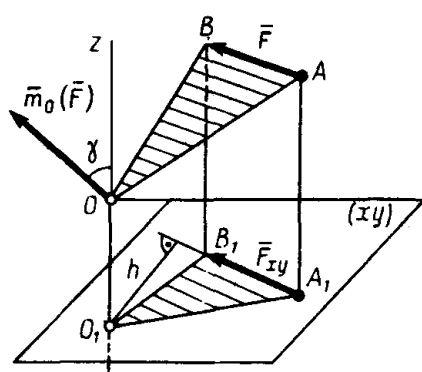
Yuqoridagi $\vec{F}$ kuchning O markazga nisbatan momenti haqida tushuncha berilgan edi. U $\vec{m}_O(\vec{F})$ -dan iborat vektor bo'lib (35- shakl), OAB tekislikka perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi va uning moduli aniqlanadi,

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = 2 \cdot \Delta S_{OAB}$$

bu yerdagi ΔS_{OAB} - OAB uchburchkning yuzasi. Biz yuqorida kuchni o'qlarga

qanday proektsiyalagan bo'lsak, $\vec{m}_O(\vec{F})$ -vektor ham kordinata o'qlariga shu kabi proektsiyalanadi.

$\vec{F}$ kuchning O markazga nisbatan momentining, ya'ni $\vec{m}_O(\vec{F})$ -vektorning O markazdan o'tuvchi ixtiyoriy Oz o'qqa proektsiyasi yoki $\vec{F}$ kuchning Oz -o'qqa nisbatan momenti quyidagicha yoziladi,



35- shakl.

bu erda $m_z(\bar{F})$ - $\bar{F}$ kuchning z - o'qiga nisbatan momenti; γ - Oz o'q bilan $\bar{m}_0(\bar{F})$ -vektor orasidagi burchak. Yuqoridagi ta'rifdan kelib chiqadiki, $m_z(\bar{F})$ - *algebraik kattalik* bo'lib, ixtiyoriy vektorning proektsiyasi qanday aniqlansa, uning ishorasi ham shunday aniqlanadi; masalan, 35- shaklda $m_z(\bar{F}) > 0$;

$\bar{F}$ kuchning O markazga nisbatan

algebra $m_z(\bar{F})$ -ning boshqacha ifodasi

ham bo'lib, u quyidagicha aniqlanadi. Buning uchun z - o'qning ixtiyoriy O nuqtasidan unga 'er'endikulyar bo'lgan xy tekislik o'tkazamiz (35- shakl) va

OAB uchburchakni shu tekislikka 'roektsiyalaymiz. Lekin $\bar{m}_0(\bar{F})$ -vektor OAB tekislikka 'er'endikulyar ravishda yo'nalganligi uchun, z - o'qi $O_1A_1B_1$ tekisligiga 'er'endikulyar yo'nalgan bo'ladi. U holda γ - burchagi ikkala tekisliklarning normallari orasidagi burchak bo'lganligi sababli, shu tekisliklar orasidagi burchakdan iborat ekanligi isbotlandi. Demak,

$$\bar{F} \cdot 2 \times DS_{O_1A_1B_1} = 2 \times DS_{OAB} \times \cos \gamma = |\bar{m}_0(\bar{F})| \cos \gamma = m_z(\bar{F})$$

Lekin 35-shakldan ko'rinib turibdiki, $DO_1A_1B_1$ ning A_1B_1 tomoni $\bar{F}$ -vektorning xy o'qidagi 'roektsiyasidan iborat ekan, ya'ni $\bar{F}_{xy}$, . U holda,

$$2 \times DS_{O_1A_1B_1} = F_{xy} h = |m_{01}(\bar{F}_{xy})|,$$

bu erda - $m_{01}(\bar{F}_{xy})$, $\bar{F}_{xy}$ -vektorning O_1 markazga nisbatan momentining *algebraic* ifodasi. Yuqoridagilarga asosan (ishoralarni e'tiborga olgan holda), quyidagilarni yozamiz

$$m_z(\bar{F}) = m_{01}(\bar{F}_{xy}), \text{ yoki } m_z(\bar{F}) = \pm F_{xy} h \quad (5.1)$$

shunday qilib, $\bar{F}$ -kuchining z - o'qiga nisbatan momenti, kuchning z - o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi proektsiyasini, shu tekislikni kesib o'tgan z - o'qining O_1 nuqtasiga nisbatan olingan momentning algebraik qiymatiga teng ekan. Bu ifoda, kuchning o'qqa nisbatan momentining ikkinchi ko'rinishi hisoblanadi.

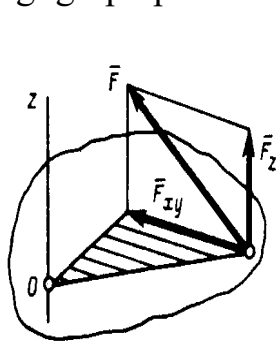
Agar kuchning tekislikdagi 'roektsiyasi musbat bo'lsa $m_z(\bar{F}) > 0$ bo'ladi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar o'qning musbat uchidan qaraganimizda kuch shu o'q atrofida soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti musbat bo'ladi, aks holda manfiy bo'ladi.

35-shakldan ko'rinib turibdiki agar O nuqtaning z - o'qidagi o'rnini o'zgartirsak, $\bar{F}$ -kuchning O nuqtaga nisbatan momentining vektori $\bar{m}_0(\bar{F})$ - o'z

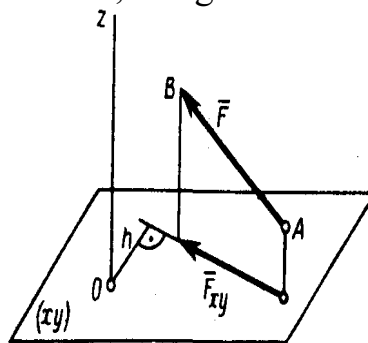
yo‘nalishini ham, uning son qiymati ham o‘zgarib ketadi, lekin $DO_1A_1B_1$ -ning yuzasi va $m_z(\bar{F})$ o‘zgarmay qolaveradi.

Buning sababi shuki $m_z(\bar{F})$ -qiymat $\bar{F}$ -kuchning z - o‘qi atrofidagi aylanishidagi samarani belgilaydi. Haqiqatdan ham agar $\bar{F}$ -kuchni ikkita tashkil etuvchilarga ajratsak, ya’ni $\bar{F}_{xy}$ va $\bar{F}_z$ - ga ajratsak (36-shakl), u holda faqat $\bar{F}_{xy}$ - tashkil etuvchisigina jismni z - o‘qi atrofida aylatirishda ishtirok etadi xolos. samarasi $m_z(\bar{F})$ -qiymat orqali aniqlanadi. $\bar{F}_z$ - dan iborat ikkinchi tashkil etuvchisi, o‘q atrofida burashda ishtirok etmaydi (u faqat z -o‘qi bo‘ylab jismni surishi mumkin xolos).

1. z - o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan xy tekislik o‘tkazamiz (ixtiyoriy joyda);
2. $\bar{F}$ -kuchni shu tekislikka proektsiyalab, $\bar{F}_{xy}$ - qiymatni aniqlaymiz;
3. o‘q bilan tekislikning kesishgan nuqtasidan (36-shaklda O nuqtadan) $\bar{F}_{xy}$ - vektorning ta’sir chizig‘iga perpendikulyar o‘tkazib, uning elkasi h -ni aniqlaymiz:



36-shakl



37-shakl

4. $\bar{F}_{xy}$ - ning modulini elkaga ko‘‘aytmasini, ya’ni $F_{xy} \times h$ -ni hisoblaymiz;
5. Hisoblangan momentning ishorasini aniqlaymiz;

O‘qqa nisbatan momentlarni hisoblashda, quyidagi xususiy hollarni ko‘rib o‘tish lozim bo‘ladi:

- 1) agar kuch o‘qqa ‘arallel yo‘nalgan bo‘lsa, uning shu o‘qqa nisbatan oment nolga teng bo‘ladi (chunki $\bar{F}_{xy} = 0$);
- 2) agar kuchning ta’sir chizig‘iga kuch ta’sir chizig‘i o‘qni kesib o‘tsa, uning shu o‘qqa nisbatan oment nolga teng bo‘ladi (chunki $h=0$);

Yuqoridagi 1) va 2) qoidalardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: *agar kuch va o‘q bir tekislikda joylashgan bo‘lsa, kuchning shu o‘qqa nisbatan oment nolga teng bo‘ladi;*

Agar kuch o‘qqa ‘er‘endikulyar bo‘lgan tekislikda joylashgan bo‘lsa, uni shu o‘qqa nisbatan oment kuchning modulini o‘q bilan kuchning ta’sir chizig‘iga

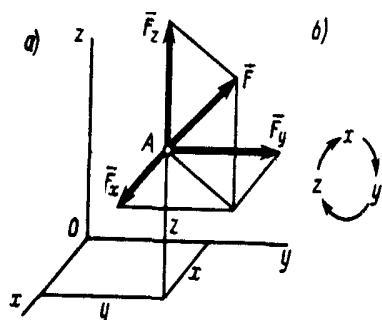
O‘qqa nisbatan kuch oment uchun Varin‘on teoremasi. Agarda oment tenglikning ikkala qismini O nuqtadan o‘tuvchi birorta z o‘qiga proektsiyalasak, (7.1) formulaga asosan,

$$m_z(\bar{R}) = \sum m_z(\bar{F}_k) \quad (5.2)$$

ekanligini isbot qilamiz. Ushbu teorema koordinata o'qlariga nisbatan momentlar olishda yaxshi qulayliklar beradi, bu holda kuchlarni o'qlarga 'roektsiyalarini aniqlab so'ngra ularni o'qlarga nisbatan momentlarining yig'indilari olinadi.

Kuchni koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari. A nuqtaga qo'yilgan $\bar{F}$ - kuchni koordinata o'qlariga 'arallel bo'lgan $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$, $\bar{F}_z$ tashkil etuvchilarga ajratib yuboraylik. U holda Varin'on teoremasiga asosan,

$$m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}_x) + m_x(\bar{F}_y) + m_x(\bar{F}_z)$$



38- shakl.

Lekin $\bar{F}_x$ -kuchi x o'qiga 'arallel bo'lganligi va $\bar{F}_y$, $\bar{F}_z$ lar unga 'er'endikulyar bo'lganligi uchun, ishoralarni e'tiborga olib, yozamiz:

$$m_x(\bar{F}_x) = 0, \quad m_x(\bar{F}_z) = y \times F_z \text{ va natijada}$$

$$m_x(\bar{F}) = y \times F_z - z \times F_y \text{ ekanligini aniqlaymiz. Bunday}$$

hisoblashlarni boshqa y va z o'qlarga ham qo'llab, oxirgi natijalarni olamiz:

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y,$$

$$m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z,$$

$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x,$$

(5.3)

(5.3) formula orqali *kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasi hisoblanadi*. Ushbu formulalar orqali kuchning 'roektsiyalari va ularni qo'yilgan nuqtalarining koordinatalariga bog'liq ravishda ularning momentlarini aniqlashimiz mumkin. Shuni alohida ta'kidlash lozimki, (5.3) formulaning keyingi har bir formulasi, oldingisidan harf va indekslarning aylanib kelishligidan ham aniqlash mumkin, ya'ni x-ni u -ga, u-ni z-ga va z-ni x-ga va h.k. (38-b shakl).

(5.3) formulaning o'ng tomonlari $\bar{m}_0(\bar{F})$ - vektorning koordinata o'qlaridagi 'roektsiyalaridan iborat ekanligini hisobga olsak (O nuqta koordinata boshi), u holda shu formulalar yordamida $\bar{m}_0(\bar{F})$ -vektorning modulini aniqlash mumkin,

$$|\bar{m}_0(\bar{F})| = \sqrt{[m_x(\bar{F})]^2 + [m_y(\bar{F})]^2 + [m_z(\bar{F})]^2} \quad (5.5)$$

Kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentini hisoblash. Ixtiyoriy kuchlar sistemasining bosh vektori $\vec{R}$ va bosh momenti $\vec{M}_O$ larni, ya'ni $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ va $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$ -lar formulalar orqali aniqlanadi.

Quyida bu qiymatlarning, ya'ni bosh vektor $\vec{R}$ va bosh moment $\vec{M}_O$ larni hisoblashning analitik usulini ko'rib chiqamiz.

R_x, R_y, R_z larning qiymatlarini aniqlaylik. $\vec{M}_O$ -vektorning koordinata o'qlaridagi 'roektsiyalarini M_x, M_y, M_z lar orqali belgilaymiz. Vektorlarning yig'indilarini 'roektsiyalari haqidagi teoremaga asosan,

$$M_x = \sum [\vec{m}_O(\vec{F}_k)]_x \text{ va (5.1) tenglikka asosan } M_x = \sum m_x(\vec{F}_k).$$

M_y va M_z -lar ham shu singari aniqlanadi.

Bosh vektor $\vec{R}$ - ning va bosh moment $\vec{M}_O$ -ning koordinata o'qladagi proektsiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$R_x = \sum F_{kx}; R_y = \sum F_{ky}; R_z = \sum F_{kz}; \quad (5.6)$$

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_k); M_y = \sum m_y(\vec{F}_k); M_z = \sum m_z(\vec{F}_k) \quad (5.7)$$

Agar ikkita kuchlar sistemasining bosh vektori $\vec{R}$ va bosh momenti $\vec{M}_O$ lari o'zaro teng bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi *ekvivalent* deb ataladi. Demak, qattiq jismga ta'sir etayotgan ixtiyoriy kuchlar sistemasini berilishi (yoki ularni aniqlash) uchun, ularning bosh vektori va biror nuqtaga nisbatan olingan bosh momentini berish kifoya ekan. Ya'ni (5.6) va (5.7) tenglamalarning o'ng taraflarini berish kifoya ekan.

Bilimingizni sinab ko'ring!

1. Qaysi tenglamalar Ox o'qiga parallel kuchlar sistemasining muvozanatini aniqlaydi?

$$1) \begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \end{cases} \quad 2) \vec{R} = 0 \quad 3) \begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum M_O(F_k) = 0 \end{cases} \quad 4) \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

A) 1,2 V) 3,4 S) 1 D) 3

2. Fazoviy kuchning koordinata o'qlaridagi 'roektsiyasi?

$$A) \begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \sin \alpha \end{cases} \quad V) \begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \cos \beta \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases} \quad S) M_O = \pm F \cdot h \quad D) R_x = 0$$

3. Tekislikda joylashgan kuchning koordinata o'qlariga 'roektsiyasi.

$$A) \begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \sin \alpha \end{cases} \quad V) \begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \cos \beta \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases} \quad S) M_O = \pm F \cdot h \quad D) R_x = 0$$

4. 'arallel kuchlarni qo'shish formulasi.

$$\begin{array}{llll} \text{A)} \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 & \text{V)} \quad \frac{Q}{BC} = \frac{P}{AC} = \frac{Q}{AB} & \text{S)} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k & \text{D)} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k \\ R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} & & R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} & \end{array}$$

5. Qaysi tenglamalar kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatini aniqlaydi?

$$\begin{array}{llll} 1) \quad \begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum M_0(F_k) = 0 \end{cases} & 2) \quad \vec{R} = 0 & 3) \quad \begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \end{cases} & 4) \quad \sum M_0(F) = 0 \end{array}$$

A) 1,2 V) 2,3 S) 3,4 D) 1,3

6. Qaysi formulalar bir jinsli jismning og'irlik markazini aniqlaydi?

$$\begin{array}{llll} 1) \quad \begin{cases} x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P} \\ y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P} \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} x_c = \int x dv / v \\ y_c = \int y dv / v \end{cases} & 3) \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \end{cases} \end{array}$$

A) 1,2 V) 2,3 S) 3,4 D) 1,4

6-MA'RUZA

Mavzu: Kinematika. Moddiy nuqta kinematikasi.

Reja:

1. Kinematika predmeti, masalalari va harakatning nisbiyligi.
2. Nuqta harakatining berilish usullari: vektor, koordinatalar va tabiiy usullari
3. Nuqtaning tezlik va tezlanish vektori. Nuqtaning tekis o'zgaruvchan harakatining tenglamasi.

Tayanch so'z va iboralar:

Kinematika, tabiiy usul, radius vektor usuli, koordinatalar usuli, tezlik, tezlanish, tekis o'zgaruvchan harakat.

6.1 Kinematika predmeti, masalalari va harakatning nisbiyligi.

Jismlarning inertligini (massasini) va ularni harakatga keltiruvchi kuchlarni e'tiborga olmagan holda, ularning harakatlarini geometrik xususiyatlarini o'rganadigan mexanikaning qismiga, *kinematika* deb ataladi.

Kinematika qismida hisob sistemasidagi o'qlar ixtiyoriy ravishda tanlab olinadi (ularni tanlash faqat masalaning maqsadiga bog'liq bo'ladi xolos). Kinematika qismida biror hisob sistemi orqali aniqlangan qiymatlar boshqa ixtiyoriy hisob sistemasida ham o'z qiymatini saqlab qoladi. Dinamika qismida bunday qoidalar o'rinsiz bo'ladi, shu sababli ular alohida ko'rib chiqiladi, ya'ni dinamikaning qonunlari turli hisob sistemalarida turlicha bo'ladi.

Jismning (yoki nuqtaning) harakat qonunini berilishi yoki harakatni berilishi - bu jismning (nuqtaning) ixtiyoriy vaqt uchun tanlangan hisob sistemasiga nisbatan holatini (o'rnini, koordinatasini) aniqlash demakdir. Jismning yoki nuqtaning harakatini matematik tenglama sifatida ifodalanishi, kinematikaning eng asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Shu sababli har qanday ob'ektning (jismning, nuqtaning) harakatini o'rganish, shu harakatni berilish usullaridan boshlanadi.

Nuqta (jism)ning harakat qonuni berilgan bo'lsa, unga asosan shu harakatlarni belgilovchi kinematik kattaliklarni aniqlash usullarini o'rganish - nuqta va qattiq jism kinematikasining asosiy masalasi hisoblanadi.

Harakatlanayotgan nuqtaning tanlangan hisob sistemasiga nisbatan qilgan harakatidagi qoldirgan uzluksiz izi nuqtaning *traektoriyasi* deb ataladi. Agar traektoriya to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, nuqtaning harakati *to'g'ri chiziqli*, egri chiziqdan iborat bo'lsa - *egri chiziqli* harakat deb ataladi.

6.2 Nuqta harakatining berilish usullari:vektor,koordinatalar va tabiiy usullari

Nuqta harakatining berilishida, asosan, uchta usuldan foydalaniladi:

- 1)vektor,
- 2) koordinata,
- 3) tabiiy usullar.

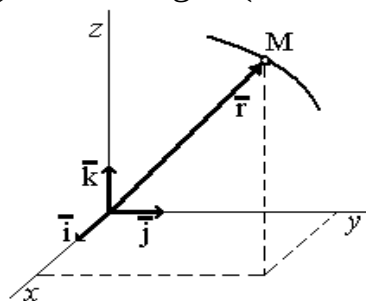
1. Nuqta harakatini vektor usulida berilishi.

Faraz qilaylik, ixtiyoriy M nuqta birorta Oxyz hisob sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo'lsin. Agar koordinata boshi O nuqtadan harakatlanayotgan M nuqtachacha radius - vektor $\vec{r}$ - o'tkazilsa, u orqali shu harakatlanayotgan nuqtaning ixtiyoriy vaqt momenti uchun holatini (o'rni) aniqlash mumkin bo'ladi (39-shakl).

M nuqtaning harakatida vektor $\vec{r}$ - vaqtga bog'liq ravishda ham yo'nalishi bo'yicha, ham moduli bo'yicha o'zgarib boradi. Demak, $\vec{r}$ - o'zgaruvchan vektor (vektor - funktsiya) bo'lib, u t -vaqtga (t -argumentga) bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (6.1)$$

(6.1) vektor tenglik (formula) nuqtaning harakat qonunini vektor shaklda belgilaydi.



39- shakl.

Ushbu tenglama orqali nuqtaning ixtiyoriy vaqt uchun $\vec{r}$ - vektorni shaklda tasvirlab beradi va koordinata o'qlaridagi o'rni aniqlab beradi.

Radius vektor $\vec{r}$ -ning oxirini birlashtiruvchi egri chiziq *godograf* deb ataladi va harakatlanayotgan nuqtaning traektoriyasini belgilaydi.

Harakat analitik usulda berilgandagina Nuqta harakati analitik usul uning qonuniyati radius vektorning koordinata o'qlaridagi 'roektsiyalari orqali ifodalanadi. To'g'ri burchakli dekart koordinatalarida radius ector $\vec{r}$, o'zining shu o'qlardagi $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ 'roektsiyalari orqali beriladi, bu erda x,y,z – lar nuqtaning dekart o'qlaridagi koordinatalari. Agar o'qlar bo'ylab yo'nalgan birlik ector (ort) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - lar o'tkazsak, radius ector $\vec{r}$, quyidagicha ifodalanadi,

$$\vec{r} = x \times \vec{i} + y \times \vec{j} + z \times \vec{k} \quad (6.2)$$

Demak, agar nuqtaning x,y,z koordinatalari t -vaqtning funktsiyasi sifatida berilsa, radius vektor - $\vec{r}$ ning holati ma'lum bo'lar ekan. Harakat qonunini bunday (ya'ni koordinata) usulda berilishini keyinroq ko'rib o'tamiz. Radius vektor $\vec{r}$, boshqacha ko'rinishda ham berilishi mumkin, masalan, moduli va koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari orqali berilishi mumkin. Vektorni qanday ko'rinishda

berilishidan qat'iy nazar, (6.1) formula orqali berilgandagi ko'rinishdan kelib chiqadigan formulalarni keltirib chiqaramiz.

2. Harakatni koordinatalar usulida berilishi. Agar nuqtaning harakatini uning x, y, z koordinatalari vaqtning funktsiyasi sifatida berilgan bo'lsa, uning holatini ular yordamida bevosita aniqlash mumkin. Nuqtaning harakat qonunini, ya'ni ixtiyoriy olingan vaqt uchun uning fazodagi holatini aniqlash uchun, quyidagi tenglamalar berilishi shart,

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (6.3)$$

(6.3) tenglamalar sistemasi *nuqta harakatining to'g'ri burchakli dekart koordinata o'qlaridagi tenglamalari* deb ataladi. Ular harakatni koordinata usulda berilgandagi harakat qonunlari hisoblanadi^[7].

Agar nuqtaning harakati har doim birorta tekislik ustida sodir bo'lsa, bu tekislikni Oxy deb hisoblasak, u holda nuqtaning harakat qonuni ikkita tenglamadan iborat bo'ladi,

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \quad (6.4)$$

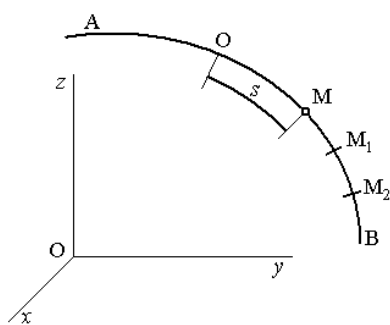
Agar nuqta faqat to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsa, bu chiziqni Ox koordinata o'qi deb hisoblasak, nuqtaning harakat qonuni bitta tenglamadan iborat bo'ladi,

$$x = f_1(t), \quad (6.5)$$

(6.3) va (6.4) tenglamalar sistemasi, bir vaqtni o'zida nuqta harakati traektoriyasining 'arametrik ko'rinishdagi tenglamalari hisoblanadi va 'arametr sifatida t -vaqt ishlatilmoqda. Ushbu tenglamalar sistemasidan t -vaqtni yo'qotib, traektoriyaning tenglamasini olish mumkin, ya'ni traektoriya koordinatalarning o'zaro funktsiyasi sifatida ifodalanadi.

3. Nuqta harakatini tabiiy usulda berilishiga.

Nuqta harakatining tabiiy (yoki traektoriya orqali) usulda berilishi, asosan, uning traektoriyasi oldindan ma'lum bo'lgan hollardagina ulardan foydalaniladi. Faraz qilaylik, M nuqta AB traektoriya bo'ylab, $Oxyz$ hisob sistemasiga nisbatan harakatda bo'lsin (91-shakl). Ushbu traektoriyada qo'zg'almas bo'lgan ixtiyoriy O' nuqtani tanlab olamiz va uni tabiiy o'qlarning koordinata boshi qilib belgilaymiz va o'qning musbat yoki manfiy tomonlarini (oddiy koordinata o'qlaridagi kabi) belgilab olamiz.



40- shakl.

U holda M nuqtaning shu traektoriyadagi o'rnini, ya'ni O' nuqtadan M nuqtagacha bo'lgan masofani, shu egri chizikli traektoriyadagi s - koordinata orqali uning tegishli ishorasiga bog'liq ravishda aniqlashimiz mumkin. M nuqta shu traektoriya bo'ylab harakatlenganda $M_1, M_2, \dots, M_n$ va hokazo holatlarda bo'ladi, demak s - koordinata ham vaqt davomida o'zgarib boradi. M nuqtaning ixtiyoriy vaqt uchun shu traektoriyadagi o'rnini aniqlash

uchun,

$$s=f(t) \quad (6.6)$$

qonuniyat berilishi kerak bo'ladi.

(6.6) tenglama M nuqtaning traektoriya bo‘ylab harakat qonuni deb ataladi.

Demak, nuqta harakatini tabiiy o‘qlarda berilishi uchun:

- 1) nuqtaning traektoriyasi;
- 2) shu traektoriyadagi hisob boshining O’ nuqtasi va tabiiy o‘qning musbat va manfiy yo‘nalishini belgilanishi;
- 3) nuqtaning shu traektoriya bo‘ylab $s=f(t)$ ko‘rinishdagi harakat qonuni berilishi shart.

6.3. Nuqtaning tezlik va tezlanish vektori. Nuqtaning tekis o‘zgaruvchan harakatining tenglamasi.

Nuqta harakatining kinematik asosiy vektor qiymatlaridan biri, nuqtaning tezligi hisoblanadi. Avvalo nuqtaning ma’lum vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligi tushunchasini ko‘rib chiqaylik. Harakatlanayotgan nuqta t - vaqtda $\vec{r}$ - radius vektor orqali belgilangan M holatda bo‘lsin. So‘ngra u harakat qilib t_1 - vaqt davomida $\vec{r}_1$ - radius vektor orqali belgilangan M_1 holatga o‘tgan bo‘lsin (41-shakl). U holda nuqta $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig‘idagi harakati, *nuqtaning ko‘chishdagi vektori* deb ataladigan $\overline{MM_1}$ vektordan iborat bo‘lsin. Agar nuqta egri chiziq bo‘ylab harakatlansa, u traektoriya vatardan iborat bo‘ladi (41a-shakl). Agar nuqta to‘g‘ri chiziqli traektoriya bo‘ylab harakatlansa, u traektoriya bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi (41b-shakl).

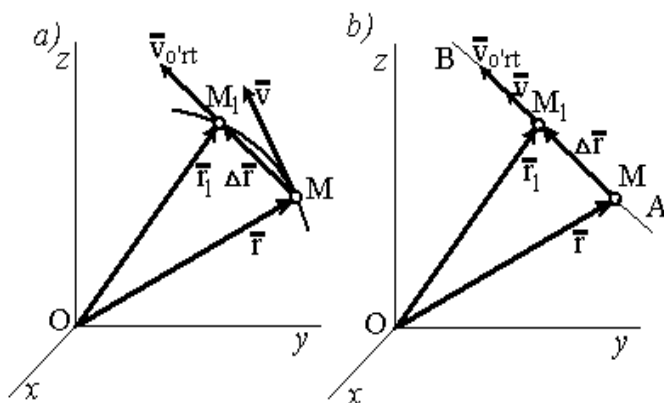
OMM₁ uchburchakdan ko‘rinib turibdiki, $\vec{r} + \overline{MM_1} = \vec{r}_1$, bundan

$$\overline{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}$$

bo‘ladi. Ko‘chish vektorining shu ko‘chishga sarflangan vaqtga nisbati, Δt vaqt oralig‘idagi o‘rtacha (son qiymati va yo‘nalishi bo‘yicha) tezlik deb ataladi

$$\vec{v}_{o'rt} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (6.7)$$

$\vec{v}_{o'rt}$ -vektorning yo‘nalishi $\overline{MM_1}$ vektorning yo‘nalishi bilan bir xil bo‘ladi, ya’ni egri chiziqli traektoriyada harakat tomonga yo‘nalgan tegishli vatardan iborat bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqli harakatda- traektoriyaning o‘zida yotadi (vektorni Δt - skalyar qiymat bo‘lgan vaqtga bo‘linganda vektorning yo‘nalishi o‘zgarmaydi).



41- shakl

Yuqoridagi (41a-shakldan) ko‘rinib turibdiki, qanchalik Δt - vaqt oralig‘ini kichikroq olinsa, $\vec{v}_{o'rt}$ -vektorning qiymati va yo‘nalishi haqiqiy harakatning moduli va yo‘nalishiga yaqinlashib boraveradi. Harakatning aniq xarakteristikasini o‘rganish uchun, olingan vaqt uchun nuqtaning tezligi degan tushuncha kiritamiz. Nuqtaning olingan t - vaqtdagi

tezligi - $\bar{v}$ deb vaqt oraligi Δt - cheksiz ravishda kichraytirib, nolga yaqinlashtirib borganimiz sari $\bar{v}_{o'rt}$ -vektor intilib boradigan kattalikka aytiladi, ya'ni

$$\bar{v} = \lim(\bar{v}_{o'rt}) = \lim \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

Agar Δt intilsa $\Delta \bar{r} / \Delta t$ nisbat radius vektor $\bar{r}$ -dan vaqt t (argument) bo'yicha olingan birinchi hosilani belgilaydi va quyidagicha yoziladi

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (6.8)$$

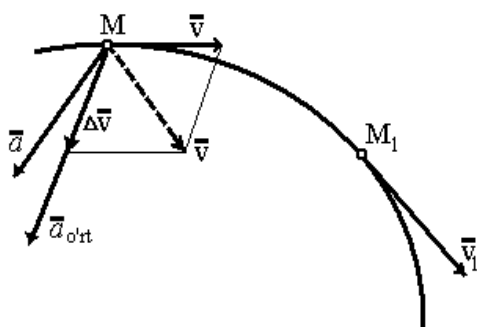
Demak, radius vektordan vaqt buyicha olingan birinchi hosila, nuqta harakatining shu ondagi tezligi deb ataladi.

MM_1 vatarni cheksiz kichraytirib borsak u oxiri shu nuqtaning urinmasi bilan ustma-ust tushishligini e'tiborga olsak, u holda nuqta harakatining shu ondagi tezlik vektorining yo'nalishi traektoriyaga urinma bo'lib, harakat tomonga yo'nalgan bo'lar ekan.

(6.8) formuladan ko'rinib turibdiki, nuqta harakatining tezlik vektori - $\bar{v}$, nuqtaning traektoriyaga urinma bo'ylab elementar ko'chish vektori $d\bar{r}$ -ning elementar o'tgan vaqtga nisbatiga aytilar ekan.

Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, tezlik vektori - $\bar{v}$, har doim shu to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan bo'lib, faqat moduli (son qiymati) bo'yichagina o'zgarishi mumkin. Agar nuqta egri chiziqli harakatda bo'lsa, modulidan tashqari yo'nalishi bo'yicha ham o'zgarishi mumkin bo'ladi. Tezlikning o'lchov birligi L/T uzunlik/vaqt; amalda m/s yoki km/soat o'lchov birliklaridan foydalaniladi.

Nuqtaning tezlanishi deb vaqt mobaynidagi tezlikning moduli va yo'nalishini belgilovchi vektor qiymatga aytiladi.



42-shakl.

Faraz qilaylik ixtiyoriy olingan t - vaqtda harakatlanayotgan M nuqta $\bar{v}$ - tezlikka ega bo'lsin, oradan ma'lum Δt - vaqt o'tgach, u M_1 holatga ko'chib o'tgan bo'lsin (93- shakl). U holda $\Delta t = t_1 - t$ vaqt davomida tezlik vektori ham tegishlicha $\Delta \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$ orttirma oladi. $\Delta \bar{v}$ -vektorni shaklda ifodalash uchun, M nuqtaga $\bar{v}$ va $\bar{v}_1$ tezlik vektorlarini qo'yamiz, u holda

$\bar{v}_1$ -vektori $\Delta \bar{v} + \bar{v}$ vektorlarning yig'indisidan iborat ekanligini ko'ramiz, ya'ni $\bar{v}_1 = \Delta \bar{v} + \bar{v}$ ekan. Shakldan ko'rinib turibdiki, $\Delta \bar{v}$ -vektori har doim egri chiziqli traektoriyaning botiq tomoniga yo'nalgan bo'lar ekan, agar traektoriya to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, u shu to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalar ekan.

Tezlikning $\Delta \bar{v}$ -orttirmasining shu o'tgan Δt vaqtga nisbati, nuqtaning o'rtacha tezlanish vektori deb ataladi va quyidagicha yoziladi,

$$\bar{a}_{o'rt} = \Delta \bar{v} / \Delta t \quad (6.9)$$

o'rtacha tezlanish vektorining yo'nalishi $\Delta \bar{v}$ -vektorining yo'nalishi bilan bir-xil bo'lar ekan, ya'ni har doim traektoriyaning botiq tomoniga yo'nalar ekan.

Nuqtaning olingan t - vaqtdagi tezlanishi - $\bar{a}$ deb, vaqt oralig'i Δt -ni cheksiz ravishda kichraytirib nolga yaqinlashtirib borganimiz sari $\bar{a}_{o'rt}$ - vektor intilib boradigan kattalikka aytiladi, ya'ni

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

va (6.8) formulaga asosan,

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \quad (6.10)$$

Demak, nuqtaning shu ondagi tezlanish vektori, tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga yoki radius vektor $\bar{r}$ -dan vaqt t (argument) bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng ekan.

Tezlanishning o'lchov birligi L/T^2 , ya'ni uzunlik/vaqt²; amalda m/s^2 shaklida ifodalanadi.

(6.10) formuladan ko'rinib turibdiki, tezlanish vektori tezlik vektorining elementar orttirmasi $d\bar{v}$ -ni, shu orttirmaga sarflangan elementar vaqt dt -ga nisbatiga teng ekan.

Endi tezlanish vektori - $\bar{a}$ ning traektoriyadagi yo'nalishini aniqlaymiz. Nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida, uning yo'nalishi shu to'g'ri chiziqli yotadi. Agar nuqtaning traektoriyasi tekislikda joylashgan egri chiziqdan iborat bo'lsa, u holda tezlanish vektori - $\bar{a}$, o'rtacha tezlanish vektori $\bar{a}_{o'rt}$ -kabi shu tekislikda joylashgan bo'lib, traektoriyaning botiq tomoniga yo'nalgan bo'ladi.

Agar traektoriya fazoda joylashgan egri chiziqdan iborat bo'lsa, $\bar{a}_{o'rt}$ -vektorning yo'nalishi traektoriyaning M nuqtasiga o'tkazilgan urinma va M_1 nuqtasiga o'tkazilgan urinmaga 'arallel bo'lgan chiziqdan o'tgan tekislikda joylashadi. Agar elementar vaqt oralig'ini nolga intiltirib borsak, M nuqta bilan M_1 nuqta orasidagi

masofa nolga yaqinlashib boradi, u holda yuqorida aytilgan $\bar{a}_{o'rt}$ -vektor yotuvchi tekislik *urinma tekislik*^[8] deb ataladigan o'rinni oladi. Ya'ni nuqtaning elementar ko'chishida traektoriyaning urinmasi atrofidagi cheksiz kichkina aylanishdan iborat bo'ladigan tekislikdan o'rin oladi.

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1. Nuqtaning harakati $\bar{r} = t^2 \bar{i} + 2t \bar{j} + 3\bar{k}$ radius-vektor orqali berilgan bo'lsa, $t=2s$ 'aytida nuqtaning tezligini to'ing.
A) 1,71 B) 2,69 C) 3,58 D) 4,47

2. Nuqtaning tezlik grafigi $v=f(t)$ berilgan bo'lsa, $t=5c$ dagi bosib o'tgan yo'lini hisoblang.

A) 8,4 B) 7,5 C) 6,6 D) 5,7

3. $s=15+4\sin t$ traektoriya bo'ylab harakat qilayotgan nuqta qancha eng yaqin vaqtda $s_1=17m$ yo'lini bosib o'tadi?

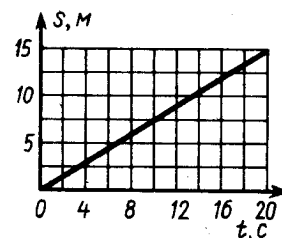
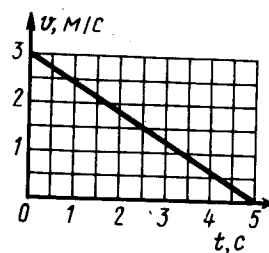
A) 0,434 B) 0,345 C) 0,256 D) 0,167

4. Nuqtani harakat grafigi $s=f(t)$ bo'yicha uning tezligini aniqlang.

A) 0,55 B) 0,65 C) 0,75 D) 0,85

5. Nuqtaning radial tezligi $V_r=2m/s$ va tezlik vektori qutb radiusi bilan 45° burchak tashkil etsa, uning tezligining miqdorini hisoblang.

A) 2,83 B) 3,74 C) 4,65 D) 5,56



Nazorat uchun savollar

1. Kinematika deb nimaga aytiladi?
2. Kinematikaning asosiy masalasi nima?
3. Xarakat vektor usulda qanday ifodalanadi?
4. Xarakat koordinatalari usulda qanday ifodalanadi?
5. Xarakat tabiiy usulda qanday ifodalanadi?
6. Xarakat vektor usulda berilganda Nuqtaning tezligi formulasi?

7-MA'RUZA

MAVZU: Qattiq jismning eng sodda harakatlari

Reja:

1. Qattiq jismning ilgarilama harakati.
2. Qattiq jismning ilgarilama xarakatida uning ixtiyoriy nuqtasining tezlik va tezlanishlarini aniqlash.
3. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatida uning ixtiyoriy nuqtasining tezligi va tezlanishi.

Tayanch so'z va iboralar:

Ilgailama harakat, qo'zg'almas o'q, burchak tezlik, burchak tezlanish, urinma tezlanish, markazga intilma tezlanish.

7.1. Qattiq jismning ilgarilama harakati.

Kinematika qismida ham, statika qismidagi kabi hamma qattiq jismlarni absolyut qattiq jism deb qabul qilinadi. Qattiq jism kinematikasi ikki qismga bo'linadi:

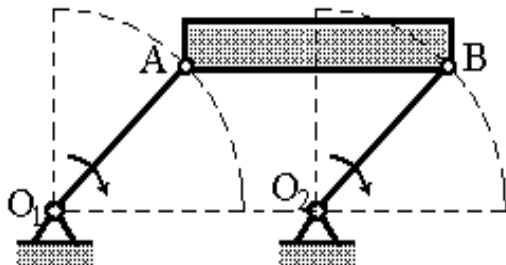
1) harakatning berilishi va ular orqali qattiq jismning barcha kinematik xarakteristikalarini aniqlash;

2) qattiq jismning ayrim nuqtalarining kinematik xarakteristikalarini aniqlash. Qattiq jismning ilgarilama harakatini o'rganishdan boshlaymiz.

Qattiq jismning ilgarilama harakati deb shunday harakatga aytiladikiga shu qattiq jismda olingan ixtiyoriy to'g'ri chiziq, harakat davomida har doim o'zining boshlang'ich holatiga 'aralleliligini saqlab qoladi.

Ilgarilanma harakatni to'g'ri chiziqli harakat bilan almashtirib yubormaslik lozim. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning nuqtalarining traektoriyalari turli xil egri chiziqlardan iborat bo'lishlari mumkin. Misollar keltiraylik:

1. Avtomobilning kuzovi, yo'lining gorizontal to'g'ri qismida ilgarilanma harakat qiladi. Kuzovning hamma nuqtalarining traektoriyalari to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi.



43-shakl

2. O_1A va O_2B krivoshi'lar aylanma harakat qilganda AB juftlovchi (106- shakl) ilgarilanma harakat qiladi (shu juftlovchida ixtiyoriy olingan to'g'ri chiziqlar, harakat davomida har doim o'zining boshlang'ich holatiga 'arallel holda qoladi).

Vaholanki, juftlikning barcha

nuqtalari aylana bo'ylab harakat qiladilar.

Ilgarilanma harakatning xossasi quyidagi teorema orqali aniqlanadi: Qattiq jismning ilgarilanma harakatida, uning barcha nuqtalari bir xil traektoriyalar (ularni siljitilsa ustma-ust tushadi) bo'yicha harakatlanadilar va har bir ixtiyoriy olingan vaqtda ularning barcha nuqtalarining tezlik va tezlanish vektorlarining moduli va yo'nalishlari bir xil bo'ladi.

Bu teoremani isbot qilish uchun, $Oxyz$ hisob sistemasida ilgarilanma harakat qilayotgan qattiq jismni olib ko'raylik. Ushbu jismda ixtiyoriy A va B nuqtalarni tanlab olaylik. Koordinata boshidan bu nuqtalarga tegishli $\vec{r}_A$ va $\vec{r}_B$ radius vektorlar va shu nuqtalarni birlashtiruvchi $\overline{AB}$ vektor o'tkazaylik (43-shakl). U holda

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (7.1)$$

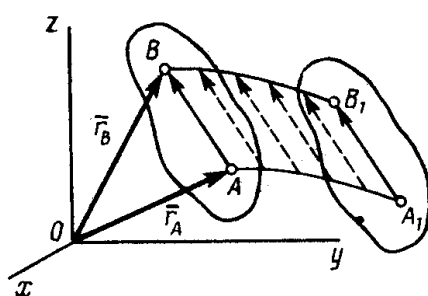
A va B nuqtalar orasidagi masofa o'zgarmas, undan tashqari $\overline{AB}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari ham o'zgarmaydi, chunki qattiq jism ilgarilanma harakat qilmoqda. Shunga asosan, aytish mumkinki $\overline{AB}$ vektor qattiq jismning har qanday ilgarilanma harakatida o'z yo'nalishi va qiymatini o'zgartirmas ekan (ya'ni $\overline{AB} = const$). Demak (7.1) tenglikka asosan (va bevosita 44-shakldan ko'rinib turganidek) B nuqtaning traektoriyasi A nuqtaning traektoriyasi bilan bir-xil bo'lib, faqat undan o'zgarmas $\overline{AB} = const$ vektorga siljigan ekan xolos. Shu sababli A va B nuqtalarning traektoriyalari (agar ustma-ust qo'yilsa, bir-birini yo'adi) mutloq bir xil egri chiziqlardan iborat ekan.

7.2. Qattiq jismning ilgarilama xarakatida uning ixtiyoriy nuqtasining tezlik va tezlanishlarini aniqlash.

A va B nuqtalarning tezliklarini aniqlash uchun (7.1) tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

Lekin $\overline{AB} = \text{const}$ o'zgarmas vektordan vaqt bo'yicha olingan hosila nolga teng.



44- shakl

$\vec{r}_B$ va $\vec{r}_A$ -radius vektorlardan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila, B va A nuqtalarning tezlik vektorlaridan iborat bo'ladi. Natijada,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

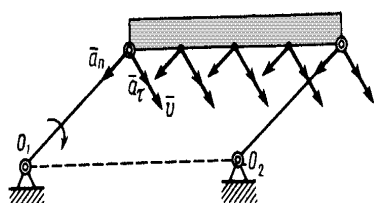
ekanligini aniqlaymiz, ya'ni qattiq jismning ilgarilanma harakatida uning ixtiyoriy olingan ikkita nuqtasining tezliklari, ham son qiymatlari, ham yo'nalishlari bo'yicha bir xil ekan. Oxirgi tenglikdan vaqt bo'yicha yana bir marta hosila

olsak shu nuqtalarning tezlanishlarini aniqlaymiz, ya'ni

$$d\vec{v}_B / dt = d\vec{v}_A / dt \text{ yoki } \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Demak, qattiq jismning ilgarilanma harakatida, uning ixtiyoriy A va B nuqtalarining tezlanishlari ham son qiymatlari jihatidan, ham yo'nalishlari bo'yicha bir xil ekan.

A va B nuqtalarni ixtiyoriy ravishda tanlab olganligimiz sababli, qattiq jismning



45- shakl.

ilgarilanma harakatida uning barcha nuqtalarining istalgan vaqtdagi tezlik va tezlanish vektorlari bir-birlariga teng ekan. Shunday qilib yuqoridagi teorema isbot qilindi.

Yuqorida isbot qilingan teoremaga asosan, ilgarilanma harakat qilayotgan qattiq jismning tezlik va tezlanish vektorlarining maydonlari bir

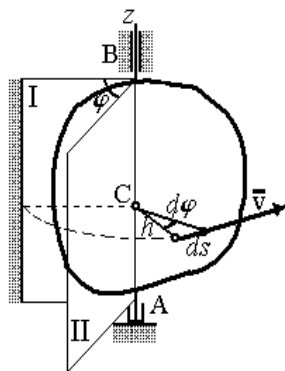
jinsli bo'lar ekan (45-shakl), lekin nostatsionar, ya'ni vaqt oralig'ida o'zgaruvchan bo'lar ekan

7.3. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatida uning ixtiyoriy nuqtasining tezligi va tezlanishi.

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati deb, shunday harakatga aytiladiki, jismning kamida ikkita nuqtasining tezligi har doim nolga teng bo'lishi shart Shu qo'zg'almas nuqtalarni A va B harflari bilan belgilasak, shu nuqtalardan o'tgan o'q jismning *aylanish o'qi* deb ataladi.

Qattiq jismning nuqtalari orasidagi masofalar harakat davomida o'zgarmay qolishligi sababli, aylanish o'qida yotuvchi barcha nuqtalar qo'zg'almas bo'lادilar. Aylanish o'qida yotmagan barcha nuqtalarning traektoriyalari aylanish o'qiga 'er'endikulyar tekisliklarda joylashadi va markazlari aylanish o'qida joylashgan tegishli radiusli yoylardan iborat bo'ladi.

Aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning holatini aniqlash uchun, aylanish o'qidan o'tuvchi ikkita tekislik tanlab olamiz: ulardan biri qo'zg'almas I-yarim tekislik, ikkinchisi jismning aylanish o'qini kesib o'tuvchi va jism bilan birgalikda aylanma harakat qiluvchi II-yarim tekislikdan iborat bo'lsin (46- shakl).



46-shakl.

U holda jismning ixtiyoriy holati, uning aylanma harakatida II-yarim tekislikning Az - o'q atrofida burilishi natijasida qo'zg'almas I-yarim tekislik bilan hosil qiladigan φ -burchak orqali aniqlanishi mumkin. Ushbu φ - burchakni *jismning burilish burchagi* deb ataladi. Agar aylanish o'qining musbat tomonidan qaraganimizda, II-yarim tekislik Az - o'q atrofida soat strelkasiga teskari tomonga aylansa, bunday harakat musbat aylanish burchagi deb ataladi, agar soat strelkasiga teskari tomonga

burilsa manfiy burilish deb hisoblanish qabul qilingan.

Agar oldindan ta'kidlanmagan hollardan tashqari, har doim burilish burchagini faqat radianlarda o'lchash qabul qilingan. Aylanma harakatdagi jismning istalgan vaqtdagi holatini aniqlash uchun, burilish burchagi ω -ning vaqt t-ga bog'liq bo'lgan tenglamasi berilgan bo'lishi lozim, ya'ni

$$\varphi = \varphi(t) \quad (7.2)$$

(7.2) tenglama, *qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining qonuni* deb ataladi.

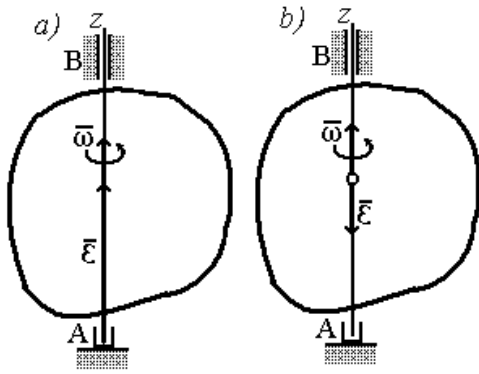
Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining asosiy kinematik xarakteristikalar burchakli tezlik w va burchakli tezlanish ε lardan iborat bo'ladi.

Agar qattiq jism $dt = t_1 - t$ vaqt oralig'ida $d\varphi = \varphi_1 - \varphi$ burchakka burilsa, o'rtacha burchakli tezlik deb, $\omega_{o'rt} = \Delta\varphi / \Delta t$ va $\Delta t \rightarrow 0$ intilganda, o'rtacha burchakli tezlik haqiqiy burchakli tezlikka aylanadi, ya'ni

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{yoki} \quad \omega = \varphi' \quad (7.3)$$

Shunday qilib, *qattiq jism qo'zg'almas o'q atrofida burilish burchagidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila jismning istalgan vaqtdagi burchakli tezligining son qiymatini aniqlab berar ekan.* (7.3) tenglikdan ko'rinib turibdiki, jismning burchakli tezligi ω , elementar burilish burchagi φ -ni, shu elementar burilishga sarflangan vaqt dt - ga nisbatiga teng ekan. Burchakli tezlik w -ning ishorasi aylanishning yo'nalishini aniqlab beradi. Masalan, agar jism soat strelkasining yo'nalishiga teskari bo'lsa $\omega > 0$ bo'ladi, aks holda $\omega < 0$ bo'ladi.

Burchakli tezlikning o'lchov birligi $1/T$ (ya'ni $1/\text{vaqt}$), amalda ko'roq rad/s yoki $1/s$ (s^{-1}) shaklda ifodalanadi, radian-o'lchovsiz qiymatdan iborat.



47- shakl.

Burchakli tezlikni vektor $\vec{\omega}$ - shaklida ham ifodalash mumkin, u aylanish o'qi bo'ylab yo'naladi, uning moduli esa $|\omega|$ -belgi orqali ifodalanadi. Agar burchakli tezlik musbat ishorali bo'lsa uning yo'nalishi aylanish o'qi bilan bir tomonga yo'nalgan bo'ladi, agar manfiy ishorali bo'lsa o'qqa teskari yo'nalishda bo'ladi.

Bunday vektor bir vaqtning o'zida qattiq jismning aylanma harakatining ham yo'nalishi, ham modulini aniqlab beradi.

Qattiq jismning burchakli tezlanishi burchakli tezlikning vaqt birligi ichidagi o'zgarishini ifodalab beradi. Agar vaqt $dt = t_1 - t$ oralig'ida burchakli $d\varphi = \varphi_1 - \varphi$

tezlik qiymatga o'zgarsa, burchakli tezlanishning o'rtacha qiymati $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \varepsilon(t)$ -ga

teng bo'ladi. Agar dt intilganda o'rtacha burchakli tezlanish haqiqiy burchakli tezlanishga aylanadi va (7.3) tenglikni e'tiborga olgan holda,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ yoki } \varepsilon = \omega' = \varphi'' \quad (7.4)$$

aniqlanadi. Shunday qilib, *burchakli tezlanishning son qiymati burchakli tezlikdan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga teng yoki burilish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng ekan.*

Agar burchakli tezlikning moduli ortib borsa, aylanma harakat *tezlanuvchan* deb ataladi, agar kamayib borsa aylanma harakat *sekinlanuvchan* deb ataladi. Burchakli tezlik ω va burchakli tezlanish ε -ning ishoralari bir xil bo'lsa tezlanuvchan, turli xil bo'lsa sekinlanuvchan aylanma harakat deb ataladi.

Jismning burchakli tezlanish vektori (burchakli tezlik vektori kabi) ham $\vec{\varepsilon}$ -vektor sifatida aylanish o'qi bo'ylab tasvirlanadi. Hamda,

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt \quad (7.5)$$

Agar $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ -lar bir tomonga yo'nalgan bo'lsalar (47-a shakl), aylanma harakat tezlanuvchan, agar qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lsalar (47- b shakl) sekinlanuvchan bo'lar ekan.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (7.6)$$

Agar burchakli tezlanish vaqt davomida o'zgarmasa ($\varepsilon = \text{const}$), bunday harakat *tekis o'zgaruvchan* aylanma harakat deb ataladi. Harakatni kuzatish boshlanganda, ya'ni $t=0s$ da burchakli tezlik ω_0 (ω_0 -harakatni kuzatish boshlangandagi burchakli tezlik) bo'lgandagi jismning aylanma harakat qonunini keltirib chiqaramiz.

(7.4) formuladan $d\omega = \varepsilon dt$ ekanligini aniqlaymiz. Bu tenglamaning o'ng tarafini 0 dan t -gacha, cha' tomonini ω_0 dan ω -gacha chegarada integrallab, quyidagi natijani olamiz,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (7.9)$$

bu tenglikni (7.3) formula yordamida quyidagicha ifodalaymiz,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t \text{ yoki } d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$$

oxirgi tenglikni yana bir marta integrallab,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} \quad (7.10)$$

tekis o'zgaruvchan aylanma harakatning qonunini aniqladik.

Bunday harakatdagi burchakli tezlik ω -ni (7.9) formula orqali aniqlanadi. Agar ω va ε -lar bir xil ishorali bo'lsalar, harakat tekis tezlanuvchan, aks holda tekis sekinlanuvchan bo'ladi.

1. Qattiq jism nuqtalarining tezligi.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattiq jismning aylanish o'qidan h - masofada joylashgan ixtiyoriy M nuqtasining harakatini olib ko'raylik. Qattiq jismning aylanma harakatida shu M nuqta markazi aylanish o'qida yotuvchi S nuqta atrofida radiusi h -ga teng bo'lgan aylana chizadi. Bu aylana aylanish o'qiga 'er'endikulyar bo'lgan tekislikda yotadi.

Agar jism dt -vaqt oralig'ida $d\varphi$ burchakka burilsa, u holda M nuqta o'zining traektoriyasi bo'ylab qilgan harakatida elementar $ds = h d\varphi$ masofani bosib o'tadi. Shunga ko'ra, M nuqtaning chiziqli tezligi ds -ni dt -ga nisbatiga teng bo'ladi, ya'ni

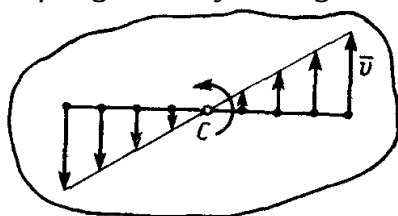
$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$$

yoki

$$v = h\omega \quad (7.11)$$

M nuqtaning tezligini jismning burchakli tezligidan farqlab, *chiziqli tezlik* yoki *aylanma tezlik* deb ataladi.

Shunday qilib, *aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasi tezligining son qiymati, shu jismning burchakli tezligini uning aylanish o'qigacha bo'lgan masofasiga ko'aytmasiga teng ekan.*



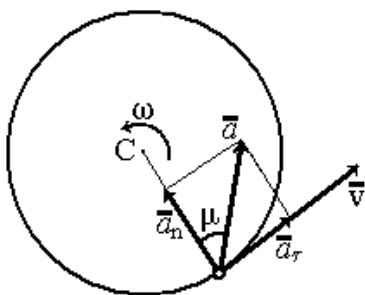
48- shakl

M nuqtaning tezligi shu nuqtaning traektoriyasiga urinma holda yo'nalib, M nuqta va aylanish o'qidan o'tuvchi tekislikka 'er'endikulyar bo'ladi (boshqacha qilib aytganda, shu nuqtaning traektoriyasi joylashgan tekislikda yotadi -tarj).

2. Qattiq jism nuqtalarining tezlanishi. M nuqtaning tezlanishini aniqlash

uchun $a_\tau = dv/dt$ va $a_n = v^2 / \rho$ formulalardan foydalanamiz.

Hozirgi masalada $r=h$. Tezlik v -ning qiymatini (7.11) tenglikdan olib kelib $\bar{a}_\tau$ va $\bar{a}_n$ -larni aniqlash formulalariga qo'ysak,



49-shakl

$$a_{\tau} = h \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h}$$

va nihoyat,

$$a_{\tau} = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2 \quad (7.12)$$

bo'lar ekan.

Urinma tezlanish - a_{τ} nuqtaning traektoriyasiga urinma holda (agar harakat tezlanuvchan bo'lsa harakat tomonga, sekinlanuvchan bo'lsa teskari tomonga)

yo'nalgan bo'ladi; normal tezlanish - a_n esa har doim MC radius bo'ylab aylanish o'qi tomonga qarab yo'nalgan bo'ladi (49- shakl).

M nuqtaning to'liq tezlanishining moduli (son qiymati), (7.14) formulaning birinchi tenglamasi $a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$ yoki

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (7.13)$$

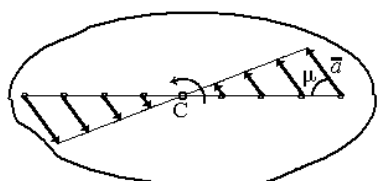
formula orqali aniqlanadi.

To'liq tezlanish vektorining MC radius bilan hosil qilgan m -burchagi (7.14)

formulaning ikkinchi tenglamasi $\text{tg}\mu = a_{\tau} / a_n$ orqali aniqlanadi; a_{τ} va a_n -larning qiymatlarini keltirib qo'ysak,

$$\text{tg}\mu = \varepsilon / \omega^2 \quad (7.14)$$

Burchakli tezlik-w va burchakli tezlanish - e jismning barcha nuqtalari uchun bir xil bo'lganligi sababli (7.13) va (7.14) formulalardan ko'rinib turibdiki barcha

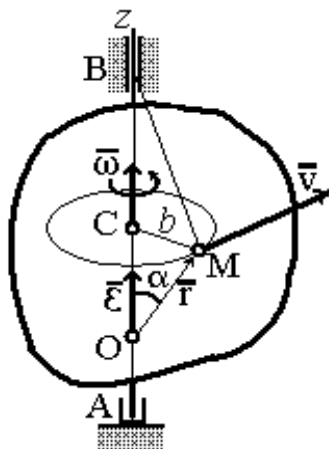


50-shakl

nuqtalarning to'liq tezlanish vektorlari aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga 'ro'rtsional ravishda bo'lib, ularning yo'nalishlari aylanish radiuslari bilan bir xil m - burchak tashkil etar ekan. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatida uning nuqtalarining tezlanish maydoni kabi tasvirlanar ekan.

Agar qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining qonuni va nuqtaning aylanish o'qigacha bo'lgan masofasi - h berilgan bo'lsa, uning ixtiyoriy nuqtasining tezlik va tezlanishlarini (7.11)-(7.14) formulalar orqali aniqlash mumkin ekan. Agar jismning biror nuqtasining harakati ma'lum bo'lsa, ushbu formulalar orqali qolgan barcha nuqtalarining harakatlarini yoki qattiq jismning harakatini to'laligicha aniqlash mumkin ekan.

3. Qattiq jism nuqtalarining tezlik va tezlanish vektorlari. Ixtiyoriy M nuqtaning tezlik - $\vec{v}$ va tezlanish - $\vec{a}$ vektorlari ifodalarini aniqlash uchun, AB aylanish o'qining ixtiyoriy O nuqtasidan $\vec{r}$ -radius vektor o'tkazamiz (50- shakl). U holda $h=r \sin \alpha$ va (7.11) formulaga asosan,



$$|\vec{v}| = |\omega| h = |\omega| r \sin \alpha \quad \text{yoki} \quad |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$$

Shunday qilib, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ -vektor ko'aytmaning moduli, M nuqtaning tezligini moduliga teng ekanligi isbotlandi. $\vec{\omega} \times \vec{r}$ va $\vec{v}$ vektorlarning nafaqat moduli, ularning yo'nalishlari ham bir xil ekan (ikkala vektorlar ham OMB tekisligiga 'er'endikulyar yo'nalgan) va o'lchov birliklari ham bir xil ekan.

Demak

51- shakl

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.15)$$

ya'ni, aylanayotgan jismning ixtiyoriy nuqtasining tezlik vektori, jismning burchakli tezlik vektorini shu nuqtaning radius vektoriga bo'lgan vektor ko'aytmasiga teng ekan. (7.15) formulani ko'inchta Eyler formulasi deb ataydilar.

(7.15) formulaning ikkala tomonidan vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

yoki

$$\vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (7.16)$$

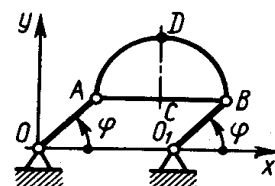
Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatidagi ixtiyoriy nuqtaning tezlanishi (12.16) formula orqali hisoblanadi.

Vektor - $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ vektor - $\vec{\omega} \times \vec{r}$ kabi M nuqtaning traektoriyasiga urinma bo'ylab yo'naladi va $|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon h$ bo'ladi. Vektor - $\vec{\omega} \times \vec{v}$ har doim MC radius bo'ylab M nuqtadan normal o'q bo'yicha yo'naladi va $|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 h$, chunki $v = \omega h$. Ushbu natijalarni va (12.12) formulani e'tiborga olib, $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\tau$ va $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n$ ekanligini aniqlaymiz.

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring !

1. Uzunliklari $OA = O_1B = 0,16\text{m}$ bo'lgan ikki krivoshi'larning harakat qonuni $\varphi = \pi t$ bo'lib, yarim aylana shaklidagi jismni ilgarilanma harakatga keltiradi. Agar $AB = 0,25\text{m}$ bo'lsa, $t = 2\text{s}$ da jismning D nuqtasi traektoriyasining egrilik radiusini to'ing.

A) 0,52 B) 0,43 C) 0,34 D) 0,16



2. Ox o'qi bo'ylab harakat qilayotgan 1 va 2 'olzunlarga yoy shaklidagi jism-3 mahkamlangan. Agar A nuqtaning harakat qonuni $x_A = 0,1t^2$ bo'lsa, $t = 10c$ da S nuqtaning tezligini hisoblang. Bunda masofalar $AB = BC = 0,3m$ va burchak $\alpha = 75^\circ$ deb olinsin.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

3. 1-g'ildirak $\varphi_1 = 20t$ qonun bo'yicha aylanib, 2-g'ildirakni harakatga keltiradi. Agar ularning radiuslari $R_1 = 0,8m$ va $R_2 = 0,5m$ bo'lib, 2-g'ildirak $t = 3,14c$ vaqt ichida necha marta aylanishga ulguradi?

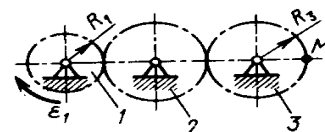
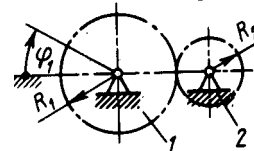
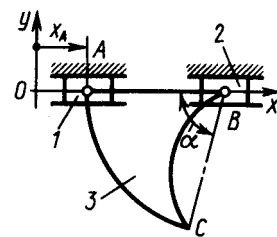
A) 10 B) 18 C) 12 D) 16

4. Radiuslari $R_1 = 0,4m$, $R_3 = 0,5m$ bo'lgan tishli g'ildiraklar tinch holatdan tashqi kuchlar ta'sirida harakatga keladi. Agar $t = 2s$ da 1-g'ildirak tekis tezlanuvchan $\varepsilon_1 = 4 \text{ rad/s}^2$ burchakli tezlanish bilan aylansa, M nuqtaning tezligini aniqlang.

A) 6,6 B) 2,5 C) 5,4 D) 3,2

5. Massasi $M = 50kg$ bo'lgan mexanik sistemaning massalar markazi $\vec{r}_C = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ radius-vektor orqali aniqlanadi. OXY tekisligiga nisbatan sistemaning statik momentini aniqlang.

A) 300 V) 200 S) 350 D) 250



8-MA'RUZA

Mavzu: Qattiq jismning tekislikka parallel harakati.

Reja:

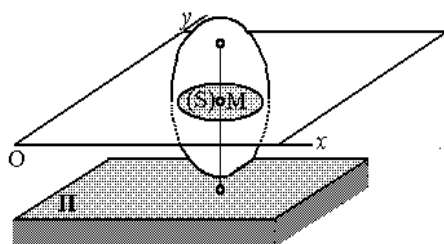
1. Tekislikka parallel harakatdagi qattiq jismning tenglamasi
2. Tekislikka parallel harakatdagi qattiq jism nuqtalarining traektoriyasi
3. Tekislikka parallel harakatdagi jism nuqtalarning chiziqli tezliklarini va tezlanishlarini aniqlash

Tayanch so'z va iboralar:

Tekis parallel harakat, nuqta traektoriyalari, chiziqli tezlik, chiziqli tezlanish.

8.1 Tekislikka 'arallel harakatdagi qattiq jismning tenglamasi

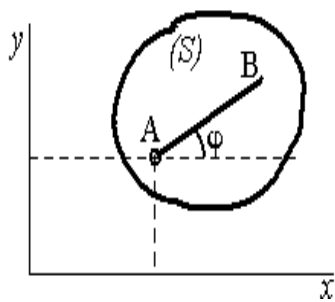
Tekislikka 'arallel (yoki tekislikdagi) harakat deb, qattiq jismning shunday harakatiga aytiladiki, shu jismda olingan barcha nuqtalar harakat davomida birorta qo'zg'almas ' -tekislikka 'arallel holda ko'chadilar (52-shakl).



52-shakl

Qattiq jismda qo'zg'almas ' -tekislikka 'arallel bo'lgan birorta S - yuzadan iborat kesma olaylik (52-shakl). Shu jismning tekislikka 'arallel harakatida jismning shu S-yuzaga 'er'endikulyar bo'lgan MM' to'g'ri chiziqdagi barcha nuqtalari aynan bir xil harakat qiladilar.

Demak, qattiq jismning qo'zg'almas Oxy o'qlariga nisbatan harakatini o'rganish uchun, shu S-yuzali kesimning harakatini o'rganish kifoya qilar ekan.



53-shakl

Shu sababli, quyida qattiq jismning harakatini o'rganish o'rniga, shu S-yuzadan iborat shaklning Oxy o'qlaridagi harakatini o'rganish bilan kifoyalanamiz..

S-yuzali shaklning Oxy - o'qlardagi holati, shu yuzada ixtiyoriy olingan AB -kesmaning holati orqali batafsil aniqlanishi mumkin (53-shakl). O'z navbatida AB

kesmaning holatini aniqlash uchun, A nuqtaning x_A ,

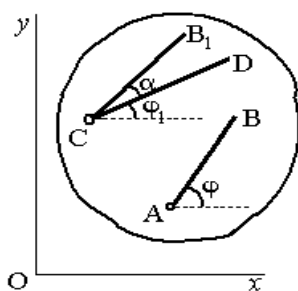
y_A koordinatalari va AB kesmaning x o'qi bilan hosil qilgan j-burchakning qiymatlari aniq bo'lishi shart. S-shaklning holatini aniqlash uchun tanlab olingan A nuqtani, kinematikada *qutb* ('*olyus*') deb ataladi va bundan keyingi satrlarda faqat shunday deb nomlaymiz.

S-shakl harakat qilganda x_A , y_A koordinatalar va j burchagining qiymatlari o'zgarib turadi. Qattiq jismning harakat qonunini aniqlash yoki S-shaklning Oxy - o'qlardagi holatini istalgan vaqtda aniqlash uchun, quyidagi ifodalar aniq bo'lishi shart,

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t) \quad (8.1)$$

Jismning harakatini belgilovchi (50) formulalar, *tekislikdagi shaklning harakat tenglamalari* deb ataladi. Hamda ular, *qattiq jismning tekislikka parallel harakatining tenglamalari* deb ataladi.

Bulardan quyidagi xulosani chiqaramiz: *tekislikdagi shaklning o'z tekisligidagi harakati, ikkita harakatlarning yig'indisidan iborat bo'lib, ulardan biri barcha nuqtalarning qutb bilan birgalikdagi ilgarilanma harakati, ikkinchisi esa barcha nuqtalarning A-qutb atrofidagi aylanma harakatidan iborat bo'lar ekan*^[3].



54- shakl.

Harakatni o'rganish mobaynida, ixtiyoriy nuqtani qutb deb tanlab olish mumkin. Masalan, biz shu jismdagi Ox o'qi bilan j_1 burchak tashkil qiluvchi CD kesmani olib, uning C nuqtasini qutb deb tanlab olib, shu jismning harakati qanday bo'lishligini ko'rib chiqaylik (54-shakl). U holda ilgarilanma harakatdagi

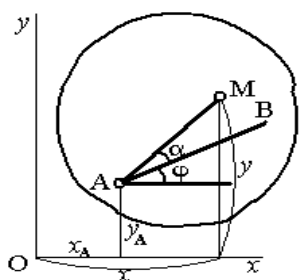
xarakteristikalar boshqacha bo'ladi, ya'ni $\bar{V}_C \neq \bar{V}_A$ va $\bar{a}_C \neq \bar{a}_A$ bo'ladi (aks holda jism ilgarilanma harakat

qilayotgan bo'lar edi).

8.2. Tekislikka 'arallel harakatdagi qattiq jism nuqtalarining traektoriyasi

Endi tekislikka 'arallel harakat qilayotgan qattiq jism nuqtalarining harakatini o'rganamiz, ya'ni jismning har bir nuqtasini traektoriyasi, tezlik va tezlanishini aniqlaymiz. Hozir traektoriyani aniqlashni ko'rib chiqamiz.

Tekislikdagi shaklning M nuqtasini olib ko'raylik. Uning holati qutbdan shu M nuqtagacha bo'lgan $b=AM$ masofa va $BAM=a$ burchak orqali aniqlanadi (55-shakl).



55-shakl

Agar harakat berilgan bo'lsa, u holda M nuqtaning Oxy o'qlardagi x va y koordinatalari:

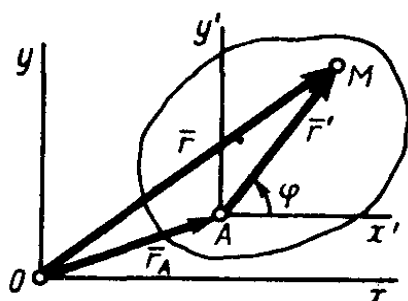
$$\begin{aligned} x &= x_A + b \cos(\varphi + \alpha) \\ y &= y_A + b \sin(\varphi + \alpha) \end{aligned} \quad (8.2)$$

bu erda, x_A , y_A , φ -lar (8.2) tenglamalar orqali aniqlanadigan va vaqt t-ga bog'liq holda o'zgaruvchan qiymatlar.

M nuqtaning Oxy tekisligidagi harakat qonuni (8.2) formula orqali ifodalanadi, hamda M nuqtaning traektoriyasining 'arametrik tenglamalari deb ataladi. Traektoriyaning oddiy tenglamasini aniqlash uchun, bu (8.2) tenglamalardan t-vaqtni yo'qotib yuborish lozim bo'ladi.

8.3. Tekislikka parallel harakatdagi jism nuqtalarning chiziqli tezliklarini va tezlanishlarini aniqlash

Ko'rsatib o'tilganidek, tekislikka 'arallel harakatdagi jismning barcha nuqtalarini A-qutb bilan birgalikdagi $\bar{v}_A$ -tezlik bilan ilgarilanma harakati va qutb atrofidagi aylanma harakatlarning yig'indisidan iborat deb hisoblash mumkin ekan. Shaklning ixtiyoriy M nuqtasining tezligi, yuqorida aytilgan ikkita harakatlardan olinadigan tezliklarning vektor ic yig'indisidan iborat bo'lishligini ko'rsatib o'tamiz. Haqiqatdan ham, shaklning ixtiyoriy M nuqtasining qo'zg'almas Oxy o'qlardagi holati,



56-shakl

$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'$ -ko'rinishdagi radius vektor

bilan aniqlanadi (56-shakl). Bu erda $\bar{r}_A$ - qutbning radius vektori, $\bar{r}' = \overline{AM}$ -M nuqtaning qutb bilan birgalikda harakatlanuvchi Ax'y' - o'qlarga nisbatan olingan radius vektori. U holda,

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt}$$

Bu tenglikdagi $d\bar{r}_A/dt = \bar{v}_A$ - qutb A-ning tezligi; $d\bar{r}'/dt = \bar{v}_{MA}$ - M nuqtaning A qutb atrofidagi aylanishidan oladigan aylanma tezlik, yoki $\bar{r}_A = \text{const}$ bo'lgandagi aylanma tezlik. Shunday qilib yuqoridagi tenglikdan,

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} \quad (8.3)$$

$\bar{v}_M$ M nuqtaning A-qutb atrofidagi aylanma harakatidan oladigan $\bar{v}_{MA}$ -tezlik vektori

$$\bar{v}_{MA} = \omega \times \overline{MA} \quad (\overline{AM} \wedge \bar{v}_{MA}) \quad (8.4)$$

bu erda ω - shaklning burchakli tezligi.

Shunday qilib, tekislikdagi shaklning ixtiyoriy M nuqtasining tezligi qutb deb qabul qilingan birorta A nuqtaning tezligi va shu M nuqtaning qutb atrofidagi

aylanishidan oladigan tezliklarning geometrik yig'indisiga teng ekan. M nuqtaning tezlik vektori $\vec{V}_M$ -ning moduli va yo'nalishi tegishli 'arallelogrammning diagonalini orqali aniqlanadi

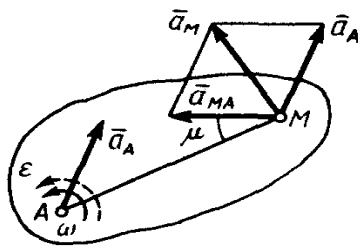
$$v_A \times \cos \varphi = v_B \times \cos(90^\circ - \varphi)$$

bo'ladi, bundan $v_A = v_B \times \tan \varphi$.

Tekislikka 'arallel harakatdagi qattiq jismning ixtiyoriy nuqtalarining tezlanishlari (tezliklari kabi), jismning qutb bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatdagi va qutb atrofida aylanma harakatida oladigan tezlanishlarning vektor yig'indilaridan iborat bo'lishligini ko'rib o'tamiz.

Tekislikdagi harakatdagi jismning M nuqtasini Oxy o'qlardagi holati $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$ radius vektor orqali ifodalanadi. Bu erda $\vec{r}' = \overline{AM}$, u holda M nuqtaning tezlanishi,

$$\vec{a}_M = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}$$



57- shakl

Ushbu tenglamaning o'ng tarafidagi birinchi yig'indi A nuqta (qutb)ning tezlanishi, ikkinchi yig'indi esa M nuqtaning A qutb atrofida aylanishidan oladigan $\vec{a}_{MA}$ tezlanishdan iborat. Demak,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} \quad (8.4)$$

$\vec{a}_{MA}$ -tezlanishning son qiymati, qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatida oladigan tezlanishidan iborat

$$a_{MA} = MA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \tan \mu = \varepsilon / \omega^2 \quad (8.5)$$

bu erda ω va ε - jismning burchakli tezligi va burchakli tezlanishi[5], m-esa

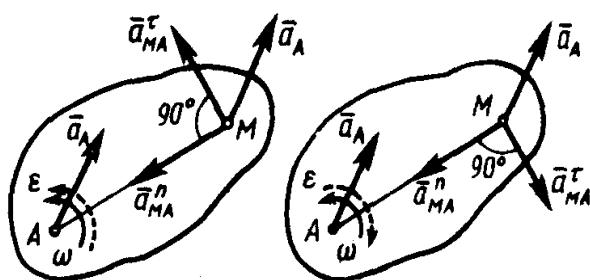
Shunday qilib, *tekislikdagi harakatdagi jismning ixtiyoriy M nuqtasining tezlanishi, qutb deb tanlab olingan birorta A nuqtaning tezlanishi va jismning shu A - qutb atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan tezlanishlarning geometrik yig'indisidan*

iborat bo'lar ekan. $\vec{a}_M$ - vektorning moduli va yo'nalishini tegishli 'arallelogramm qurish orqali aniqlaniladi (57-shakl).

Ammo a_M -tezlanishni parallelogramm qurish orqali 57-shakldagi kabi aniqlashda, ancha murakkab amallarni bajarishga olibkeladi, masalan, m –burchakni oldindan hisoblash, so'ngra $\vec{a}_A$ va $\vec{a}_{MA}$ -vektorlar orasidagi burchakni aniqlash kerak bo'ladi. Shu sababli $\vec{a}_{MA}$ -vektorni ikkita tashkil etuvchilarga ajratib yuboriladi, ya'ni $\vec{a}_{MA}^\tau$ -urinma va $\vec{a}_{MA}^n$ -normal tezlanishlari, ya'ni (8.5) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n \quad (8.6)$$

Vektor $\vec{a}_{MA}^{\tau}$ - AM kesmaga perpendikulyar bo'lib, tezlanuvchan harakatda aylanish tomoniga, sekinlanuvchan harakatda esa, aylanishga teskari tomonga yo'naladi, $\vec{a}_{MA}^n$ - vektori har doim M nuqtadan A nuqtaga qarab yo'nalgan bo'ladi (58- shakl).



58- shakl

Ushbu tezlanishlarning modullari esa,

$$\vec{a}_{MA}^{\tau} = AM \times \epsilon, \quad \vec{a}_{MA}^n = AM \times \omega^2 \quad (8.7)$$

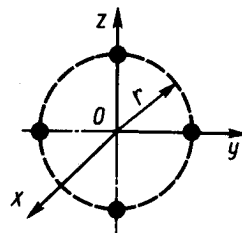
Agar qutb A egri chiziqli harakatda bo'lib, uning traektoriyasi ma'lum bo'lsa, u nuqtaning tezlanishini urinma - $\vec{a}_A^{\tau}$ va normal - $\vec{a}_A^n$ tashkil etuvchilarga ajratib yuborgan mahqul bo'ladi, u holda

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n \quad (8.8)$$

Va nihoyat, agar M nuqta egri chiziq bo'ylab harakatlanib, uning traektoriyasi ma'lum bo'lsa, u holda (8.6) -(8.8) tenglamalarning chap tarafdagi $\vec{a}_M$ -vektorni ham ikkita tashkil etuvchi vektorlarning yig'indisi $\vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$ -dan iborat deb hisoblash mumkin bo'ladi.

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

- Krivoship-polzunli mexanizm krivoshi'ining massasi $m_1=4\text{kg}$, shatuni esa $m_2=8\text{kg}$. 'olzunning massasini hisobga olmay, $\varphi=90^\circ$ va $\alpha=30^\circ$ deb, sistema massalar markazining x_S -abstsissasini aniqlang.
A) 0,231 B) 0,132 C) 0,321 D) 0,213
- Massasi 2kg bo'lgan moddiy nuqtaning koordinatalari $x=0,8\text{m}$, $y=0,6\text{m}$ $z=0,4\text{m}$ bo'lsa, Oxy tekislikka nisbatan uning inertsiya momenti qancha bo'ladi?
A) 0,76 B) 0,5 C) 0,21 D) 0,32
- Massalari $m=1,5\text{kg}$ dan bo'lgan to'rtta moddiy nuqtalar radiusi $r=0,4\text{ m}$ li aylanada joylashgan va mexanik sistema tashkil qilsa, sistemaning Oxu tekislikka nisbatan inertsiya momentini hisoblang.
A) 0,78 B) 0,34 C) 0,48 D) 0,59
- Massasi $m=0,5\text{kg}$ bo'lgan moddiy nuqta $\vec{r}=2\vec{i}+(4t+5)\vec{j}$ qonun bo'yicha harakatlansa, unga ta'sir qiluvchi barcha kuchlarning teng ta'sir etuvchisining koordinata boshiga nisbatan momentini to'ing.
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9



Nazorat uchun savollar

- Qattiq jismning tekis parallel xarakati deb qanday xarakatga aytiladi?
- Tekis parallel xarakat tenglamalari qanday kurinishda buladi?
- Tekis shaklning qanday Nuqtasiga tezliklar oniy markazi deyiladi?
- Tezliklar oniy markazini aniklashning qanday usullari mavjud?
- Kuzgaluvchan tsentroida deb nimaga aytiladi?
- Kutb yordamida tekis shakl ixtiyoriy Nuqtasining tezlanishi aniklash formulasini keltirib chikaring?

9-MA'RUZA

Mavzu: Nuqtaning va qattiq jismning murakkab harakati.

Reja

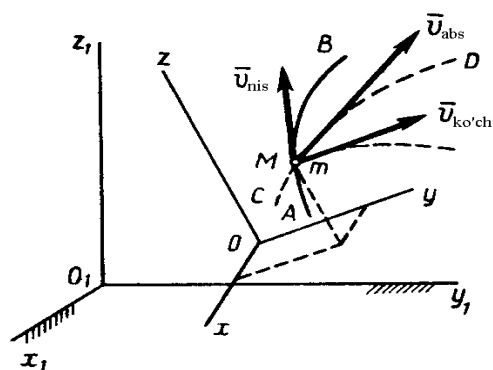
1. Nisbiy, ko'chirma va absolyut harakatlar. Tezliklarni qo'shish.
2. Nuqtaning murakkab harakatida tezlanishlarini qo'shish teoremasi.
3. Ilgarilama harakatlarni qo'shish. Ikkita 'arallel o'qlar atrofidagi harakatlarni qo'shish. Keshishuvchi o'qlar atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish. Vintsimon harakat.

Tayanch so'z va iboralar:

Nisbiy harakat, ko'chirma harakat, murakkab harakat, vintsimon harakat, nisbiy tezlik, aylanish jufti

9.1. Nisbiy, ko'chirma va absolyut harakatlar. Tezliklarni qo'shish

Biz hozirgacha moddiy nuqtaning yoki jismning bitta qo'zg'almas hisob sistemasiga nisbatan qilayotgan harakatini o'rgangan edik. Lekin ko'' hollarda, nuqtaning (yoki jismning) mexanik harakatini bir vaqtning o'zida ikkita hisob sistemasiga nisbatan o'rganish maqsadga muvofiq bo'lib, ulardan biri asosiy yoki shartli qo'zg'almas o'qlar, ikkinchisi esa birinchisiga nisbatan qo'zg'aluvchan o'qlardan iborat bo'ladi.



Nuqtaning (yoki jismning) bunday harakati *qo'shma* yoki *murakkab* harakati deb ataladi. Masalan, harakatdagi 'aroxod (suv kemasi)ning 'alubasi ustida dumalayotgan sharning harakatini olaylik. Sharning daryo qirg'og'iga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat bo'lib, sharning 'aluba (kemaning maydonchasi, qo'zg'aluvchan hisob sistemasidagi dumalashi va uning 'aluba bilan birgalikda qirg'oqqa (qo'zg'almas hisob sistemasiga) nisbatan harakatidan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, sharning bunday murakkab harakati ikkita oddiy harakatlardan iborat bo'lib, ularning har birini o'rganish ancha soddalashadi. Har qanday murakkab harakatni o'rganishda, qo'zg'aluvchan hisob sistemasini kinematikaga qo'shimcha ravishda kiritilishi amaliy mexanikadagi masalalarni echishda juda katta qulayliklar keltiradi, ular haqida shu va bundan keyingi boblarda batafsil ko'rib o'tiladi. Bundan tashqari olinadigan natijalar, dnamika qismida nuqtaning yoki jismning kuchlar ta'siridagi nisbiy muvozanatlik va nisbiy harakatlarini o'rganishda keng qo'llaniladi.

1. M nuqtaning qo'zg'aluvchan hisob sistemasini (Oxyz -o'qlar)ga nisbatan harakatini *nisbiy harakat* deb ataymiz (bunday harakatni faqat qo'zg'aluvchi o'qlar bilan birgalikda harakatlanayotgan odam kuzatishi mumkin). Nuqtaning nisbiy harakatdagi traektoriyasi AB-ni *nisbiy traektoriya* deb ataladi. Nuqtaning qo'zg'aluvchan Oxyz-o'qlarga nisbatan harakatidagi tezligi *nisbiy tezlik* deb ataladi ($\vec{v}_{nis}$ - deb belgilanadi), tezlanishi esa nisbiy tezlanish deb ataladi ($\vec{a}_{nis}$ - deb

belgilanadi). Yuqoridagi ifodaga asosan $\bar{V}_{\text{nis}}$ va $\bar{a}_{\text{nis}}$ -larni hisoblashda, Oxyz - o'qlarning harakati hisobga olinmaydi (ya'ni ularni qo'zg'almas deb faraz qilinadi).

2. Qo'zg'aluvchan Oxyz-o'qlar sistemasini (unga bog'liq bo'lgan hamma nuqtalar bilan birgalikda) qo'zg'almas yoki asosiy $Ox_1y_1z_1$ -o'qlarga nisbatan harakati M nuqta uchun *ko'chirma harakat* hisoblanadi.

Qo'zg'aluvchan Oxyz-o'qlar sistemasining qo'zg'almas o'qlarga nisbatan qilgan harakatida M nuqta egallab turgan m -nuqtasining shu ondagi tezligi, M nuqta uchun *ko'chirma tezlik* deb ataladi (va $\bar{V}_{\text{ko'ch}}$ -deb belgilanadi), shu m - nuqtaning tezlanishi esa *ko'chirma tezlanish* deb ataladi (va $\bar{a}_{\text{ko'ch}}$ -deb belgilanadi). Shunday qilib,

$$\bar{V}_{\text{ko'ch}} = \bar{V}_m; \quad \bar{a}_{\text{ko'ch}} = \bar{a}_m;$$

Agarda nuqtaning nisbiy harakati qo'zg'aluvchan Oxyz-o'qlar bilan bog'langan jismning sirtida (yoki uning ichida) harakatlanayotgan bo'lsa, ko'chirma harakati esa jismning shu M nuqta egallagan joyining tezligi yoki tezlanishidan tarkib to'adi.

3. Nuqtaning qo'zg'almas $Ox_1y_1z_1$ -o'qlarga nisbatan harakati *absolyut* yoki *murakkab harakat* deb ataladi. Nuqtaning bunday harakatdagi traektoriyasi - CD, *absolyut traektoriyasi*, tezligi - *absolyut tezlik* (va $\bar{V}_{\text{abs}}$ -deb belgilanadi), tezlanishi esa - *absolyut tezlanish* (va $\bar{a}_{\text{abs}}$ -deb belgilanadi) deb ataladi.

Kinematikaning murakkab harakatga oid masalalarini echishda nisbiy, ko'chirma va absolyut harakatlarning oralaridagi bog'lanishlarni aniq bilib olish katta ahamiyatga ega bo'ladi, shu sababli ularni aniqlashga o'tamiz.

9.2.Nuqtaning murakkab harakatida tezlanishlarini qo'shish teoremasi.

M nuqtaning murakkab harakatini ko'rib o'tamiz. Ushbu nuqta $Dt=t_1-t$ vaqt oralig'ida AB traektoriya bo'ylab, $\overline{MM'}$ -vektor bilan ifodalanuvchi nisbiy ko'chish qilsin (60-a shakl). Ana shu AB egri chiziq qo'zg'aluvchan Oxyz -o'qlar bilan birgalikda shu elementar vaqt ichida qandaydir yangi A_1B_1 -holatga o'tadi. Xuddi shu vaqt oralig'ida AB traektoriyaning M nuqta joylashgan nuqtasining m-o'rni ham, $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$ -dan iborat bo'lgan ma'lum ko'chirma siljish oladi, Natijada M nuqta M_1 holatga o'tadi va shu Dt-vaqt oralig'ida $\overline{Mm_1}$ -dan iborat bo'lgan absolyut ko'chish oladi.

Shakldagi (60-a shakl) $\overline{Mm_1M_1}$ -vektor uchburchakdan, $\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}$ ni aniqlaymiz. Ushbu vektor tenglamaning ikkala tomonini Dt-ga bo'lib limitga o'tsak,

$$\lim(\overline{MM_1}/Dt) = \lim(\overline{Mm_1}/Dt) + \lim(\overline{m_1M_1}/Dt)$$

va qoidaga muvofiq,

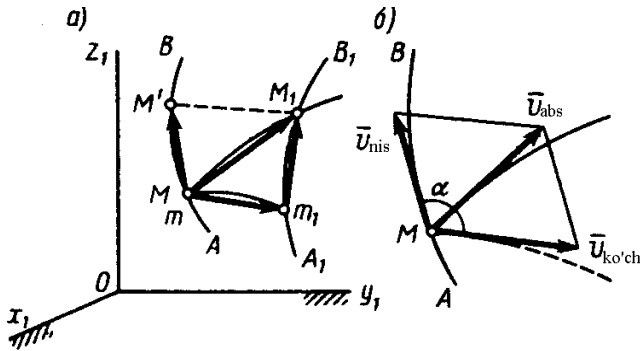
$$\lim(\overline{MM_1}/Dt) = \bar{V}_{\text{abs}}; \quad \lim(\overline{Mm_1}/Dt) = \bar{V}_{\text{ko'ch}};$$

$$\lim(\overline{m_1 M_1} / Dt) = \lim(\overline{MM_1} / Dt) = \bar{V}_{\text{nis}}.$$

Natijada

$$\bar{V}_{\text{abs}} = \bar{V}_{\text{ko'ch}} + \bar{V}_{\text{nis}} \quad (9.1)$$

$\bar{V}_{\text{abs}}$, $\bar{V}_{\text{ko'ch}}$, $\bar{V}_{\text{nis}}$ -vektorlar tegishli traektoriyalarga urinma ravishda yo'nalgan bo'ladilar (60-b shakl).



60- shakl

Shunday qilib, murakab harakatdagi tezliklarni qo'shish teoremasi isbot qilindi: *murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezligi, nisbiy va ko'chirma tezliklarning geometrik yig'indisidan iborat bo'lar ekan.*

60-b shaklda qurilgan chizma, tezliklar 'arallelogrammi deb ataladi.

Agarda $\bar{V}_{\text{ko'ch}}$ va $\bar{V}_{\text{nis}}$ vektorlar orasidagi burchak α bo'lsa, absolyut tezlikning moduli,

$$v_{\text{abs}} = \sqrt{v_{\text{ko'ch}}^2 + v_{\text{nis}}^2 + 2v_{\text{ko'ch}}v_{\text{nis}}\cos\alpha} \quad (9.2)$$

9.3. Ilgarilama harakatlarni qo'shish. Ikkita 'arallel o'qlar atrofidagi harakatlarni qo'shish. Keshishuvchi o'qlar atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish. Vintsimon harakat.

Jismning nisbiy harakati ba krivoshi'ga mahkamlangan aa' -o'q atrofidagi burchakli tezligi - $\bar{\omega}_1$ bo'lgan aylanma harakatdan iborat bo'lsin (60a-shakl).

Ko'chirma harakat esa aa' o'qqa 'arallel bo'lgan bb' -o'q atrofidagi $\bar{\omega}_2$ -burchakli tezlik bilan aylanayotgan ba krivoshi'ning harakatidan iborat bo'lsin.

U holda bu jismning harakati berilgan o'qlarga 'arallel bo'lgan tekislikdagi tekislikdagi harakatdan iborat bo'lar ekan. Bu erda quyidagi uchta xususiy hol bo'lishi mumkin.

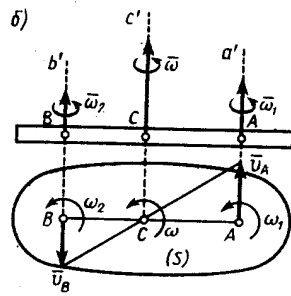
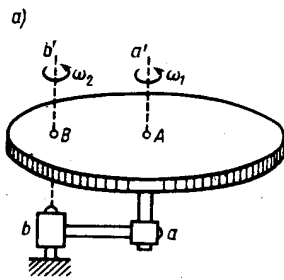
1. Ikkala o'q atrofidagi aylanishlar bir tomonga yo'nalgan bo'lsin. O'qlarga 'er'endikulyar bo'lgan C kesma tekislik olamiz (60-b shakl). O'qlarning kesim yuzasidagi izlarini A va B harflari bilan belgilaymiz. Shakldan ko'rinib turibdiki Aa' -o'qdagi A nuqta faqat Bb' -o'q atrofidagi aylanishi orqali tezlik oladi, shu sababli $v_A = \omega_2 \times AB$. Xuddi shu kabi $v_B = \omega_1 \times AB$. Hamda $\bar{V}_A$ va $\bar{V}_B$ tezlik vektorlari o'zaro 'arallel.

Ushbu tengliklarga $v_A = \omega_1 \times AB$ va $v_B = \omega_1 \times AB$ larning qiymatlarini keltirib qo'ysak,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (9.3)$$

$$\omega_1/BC = \omega_2/AC = \omega/AB \quad (9.4)$$

Shunday qilib, agar jism bir vaqtning o'zida ikkita 'arallel o'qlar atrofida bir tomonga aylanayotgan harakatda ishtirok etsa, natijaviy harakat ham oniy aylanish



61-shakl

2. Aylanishlar qarama-qarshi tomonga bo'lganda. Bu holda ham jismda o'qlarga 'er'endikulyar bo'lgan C kesim yuza olamiz (61-shakl). Aniqroq bo'lishi uchun $\omega_1 > \omega_2$ deb qabul qilamiz. U holda yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib, A va B nuqtalarning tezliklari $v_A = \omega_1 \times AB$

va $v_B = \omega_2 \times AB$ -ni aniqlaymiz; bu holda $\vec{v}_A$ va $\vec{v}_B$ vektorlari o'zaro 'arallel bo'lib, bir tomonga yo'naladilar va oniy aylanish o'qi C nuqtadan o'tadi (61-shakl), hamda $\omega = v_B/BC = v_A/AC$ va $\omega = \omega = (v_B - v_A)/AB$,

Oxirgi natija ham 'ro'rtsiyaning xususiyatlaridan kelib chiqadi.

Oxirgi tengliklarga $v_A = \omega_2 \times AB$ va $v_B = \omega_1 \times AB$ -ni keltirib qo'ysak, natijada

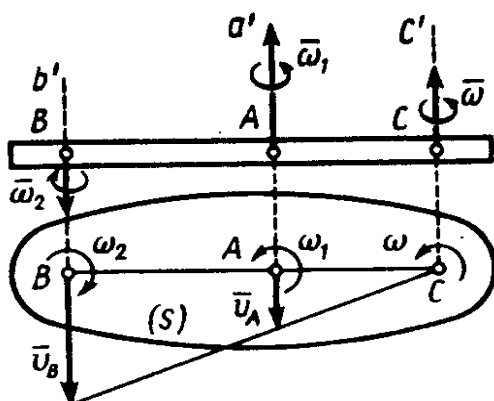
$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (9.5)$$

$$\omega_1 BC = \omega_2 AC = \omega AB \quad (9.6)$$

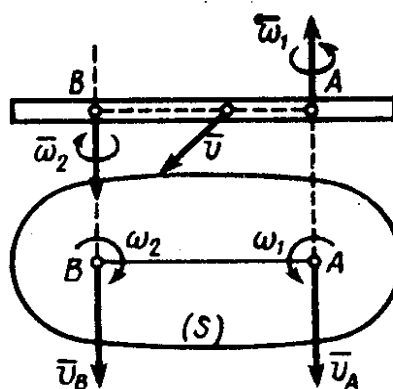
Shunday qilib, bunday harakatda ham natijaviy harakat burchakli tezligi $\omega = \omega_1 - \omega_2$ ga teng bo'lgan va oniy aylanishlar o'qi CC' atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo'lar ekan; oniy aylanishlar o'qining o'rni (9.5) formuladan aniqlanadi.

3. Aylanishlar jufti. Endi aylanishlar 'arallel o'qlar atrofida qarama-qarshi tomonga bo'lib (62-shakl), burchakli tezliklarning modullari o'zaro teng bo'lsin. Bunday aylanishlarning yig'indisini *aylanish jufti* deb ataladi va $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ vektorlarni *burchakli tezliklar jufti* deb ataladi. Bunday harakatda $v_A = \omega_2 \times AB$ va $v_B = \omega_1 \times AB$ bo'ladi va $\omega_1 = \omega_2$ bo'lgani uchun $v_A = v_B$ bo'ladi. U holda oniy aylanishlar markazi cheksizlikda joylashadi, natijada jismning barcha nuqtalarining tezliklari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni $v = \omega_1 \times AB$ bo'ladi.

Demak, natijaviy harakat moduli $\omega_1 \times AB$ -ga teng bo'lgan ilgari lanma (yoki oniy ilgari lanma) harakatdan iborat bo'lib, tezlik vektorlarining yo'nalishlari $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ vektorlar joylashgan tekislikka 'er'endikulyar yo'nalgan bo'ladi; $\vec{v}$ -vektorning yo'nalishini, statika qismidagi juft kuchlarning vektor momentlari $\vec{m}$ -ni aniqlash qoidasiga binoan aniqlanadi. Demak, *aylanish jufti burchakli tezliklar juftining momenti $\vec{v}$ -ga teng bo'lgan tezlik bilan harakatlanuvchi ilgari lanma (yoki oniy ilgari lanma) harakatga ekvivalent ekan.*

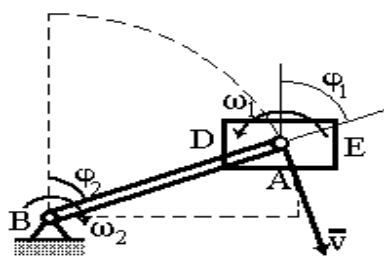


62-shakl.



63-shakl.

Bunday harakatga, velosi'edning DE 'edali (te'kisi)ni velosi'edning ramasi ga nisbatan harakati misol bo'la olad. Bu erda BA krivoshi'ga o'rnatilgan A o'q atrofida nisbiy aylanish va BA krivoshi'ning B o'qi atrofida ko'chirma aylanishdan iborat ekan. Bu harakatdagi burchakli ω_1 va ω_2 tezliklar son qiymati bo'yicha o'zaro teng bo'lib, yo'nalishlari esa qarama-qarshi. Ya'ni ixtiyoriy vaqt uchun 'edalning BA krivoshi'ga nisbatan j_1 burilishiga mos ravishda krivoshi' ham teskari tomonga j_2 burchakka buriladi va $j_1 = j_2$ bo'ladi. 'edalning ilgarilama harakatining tezligi $v = \omega_2 \times BA$ bo'ladi.



64-shakl.

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1. Nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati qanday harakat deyiladi?

- A. Nisbiy harakat
- B. Ilgarilama harakat
- C. Aylanma harakat

2. Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanishi qanday aniqlanadi?

A. nisbiy, ko'chirma va Kariolis tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

B. ilgarilama, aylanma va murakkab harakatdagi nuqtalar tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

C. to'g'ri javob keltirilmagan.

3. Kariolis tezlanishini ifodalovchi formulani ko'rsating.

- A. $\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_e + \vec{v}_r)$
- B. $\vec{a}_K = (\vec{\omega}_e + \vec{v}_r)$
- C. $\vec{a}_a = (\vec{\omega} + \vec{v}_r)$

4. Nuqtaning absolyut tezlanishi qanday aniqlanadi?

- A. $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$
- B. $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_k$

Nazorat uchun savollar.

1. Nuqta va qattiq jismning qanday xarakatga nisbiy xarakat deyiladi?
2. Nuqta va qattiq jismning qanday xarakatiga kuchirma xarakat deyiladi.
3. Nuqta va qattiq jismning qanday xarakatiga absolyut xarakat deyiladi.
4. Nuqta va qattiq jismning nisbiy tezligi qanday topiladi.
5. Nuqta va qattiq jismning kuchirma tezligi qanday topiladi.
6. Nuqta va qattiq jismning absolyut tezligi qanday topiladi.

10-MA'RUZA

Mavzu: Dinamika. Moddiy nuqta dinamikasi.

Reja:

1. Dinamikaning asosiy tushunchalari, qonunlari va masalalari.
2. Moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari.
3. Dinamikaning birinchi asosiy masalasini yechish.
4. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli va egri chiziqli harakatlari.

Tayanch so'z va iboralar:

Dinamika, dinamikaning asosiy masalalari, inertlik, ta'sir va aks ta'sir, harakat differensial tenglamasi.

10.1. Dinamikaning asosiy tushunchalari, qonunlari va masalalari.

Kuchlar ta'sirida bo'lgan jismlarning harakatini o'rganuvchi qism **dinamika** deb ataladi.

Kinematika qismida jismlarning harakatlariga faqat geometrik nuqtai nazardangina qaralgan edi. **Dinamika** qismining kinematikadan farqi shundaki, jismlarning harakatlarini o'rganishda, ularga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasidan tashqari jismlarning **inertligi**, ya'ni ularning massalari va shu massalarning joylashish tartiblari (*geometrik shakli*) ham e'tiborga olinadi.

Kinematika qismida ko'rib o'tganimizdek, har qanday harakat asosan ilgarilanma va aylanma harakatlarning yig'indisidan iborat bo'ladi. Agar masalalarning shartlariga ko'ra aylanma harakatlarni e'tiborga olinmasa bunday jismlarning harakatini o'rganishda ularni moddiy nuqta deb qabul qilinadi, chunki natijaviy echimda hech qanday xatolik bo'lmaydi. Masalan, 'lanetalarning Quyosh atrofdagi harakatlarini, artileriya snaryadining qanday masofaga borib tushishini aniqlashda va shunga o'xshash qator masalalarni echishda, ularni moddiy nuqta deb qaraladi.

Ushbu qonunlarni quyidagicha ifodalash mumkin:

Birinchi qonun (inertsiya qonuni): *tashqi muhit ta'siridan ihtotalangan moddiy nuqtaga qo'yilgan kuchlar uning holatini o'zgartirmaguncha, u o'zining tinch holatini yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatini davom etdiradi*. Kuchlar ta'sir qilmayotgan (*aniqrog'i-kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lgan*) jismning harakatini, *inertsiya* bo'yicha harakat deb ataladi.

Eng muhim narsalardan biri, ushbu inertsiya qonuni qaysi hisob sistemasida o'rinli ekanligini aniqlashdan iboratdir. Nyutonning fikricha ushbu qonun qandaydir qo'zg'almas (absolyut) fazoda joylashgan hisob sistemasidagina o'rinli hisoblangan. Lekin hozirgi zamondagi tushunchalar bo'yicha, fazo - bu materiya

(borliq)ning yashash formasi bo'lib, undagi materiyalarning harakatiga bog'liq bo'lmagan qandaydir absolyut fazo bo'lishi mumkin emas ekan.

Ushbu qonunning vektor ko'rinishdagi matematik ifodasi, quyidagicha yoziladi

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad (10.1)$$

Kuch bilan tezlanishning modullari orasidagi bog'lanish, quyidagicha bo'ladi

Dinamikaning ikkinchi qonuni ham, birinchi qonun kabi faqat inertsial hisob sistemalaridagina o'rinli bo'ladi. Ushbu qonundan ko'rinib turibdiki, jismning massasi uning **inertlik** o'lchovi bo'lib hisoblanar ekan. Chunki biror kuchni moddiy nuqtaga ta'siridan oladigan tezlanish nuqtaning massasiga bog'liq bo'lib, qanchalik uning massasi oz bo'lsa, oladigan tezlanishi katta bo'ladi yoki aksincha.

Agar moddiy nuqtaga bir vaqtning o'zida bir nechta kuchlar ta'sir etsa, kuchlarning 'arallelogrammi haqidagi qoidaga asosan, ular shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan bitta teng ta'sir etuvchi $\bar{R}$ -kuchga ekvivalent bo'ladi,

U holda **dinamikaning** asosiy qonuni, quyidagi ko'rinishga keladi,

$$m\bar{a} = \bar{R} \quad \text{yoki} \quad m\bar{a} = \sum \bar{F}_k \quad (10.2)$$

Uchinchi qonun (ta'sir va aks ta'sir qonuni): moddiy jismlarning o'zaro mexanik ta'sirlarini xarakterlab beradi. Ikkita moddiy nuqta uchun quyidagicha ifodalanadi: *ikkita moddiy nuqtaning bir-birlariga ta'sir kuchlari, shu nuqtalarni birlashtiruvchi chiziqda joylashib, modullari teng lekin yo'nalishlari qarama qarshi bo'lar ekan.*

Bu qonundan statika kursida foydalangan edik. Bu qonun moddiy nuqtalar sistemasining **dinamika**sida alohida ahamiyatga ega bo'lib, shu nuqtalarga ta'sir etadigan ichki kuchlarning o'zaro bog'likligini aniqlab beradi.

Agar moddiy nuqta erkin bo'lmasa, ya'ni unga bog'lanishlar ta'sir etib u ma'lum tekislik ustida yoki egri chiziqli bo'ylab harakatlansa, **dinamikaning** birinchi masalasida nuqtaning harakat qonuni va unga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar berilgan bo'lsa, bog'lanishlarning reaksiyalari aniqlanadi. Erkin bo'lmagan jismlar uchun **dinamikaning** ikkinchi qonuni yana ikkiga ajraladi, ya'ni nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar ma'lum bo'lsa a) nuqtaning harakat qonuni, b) unga qo'yilgan bog'lanishlarning reaksiyalari aniqlanadi.

Barcha mexanik qiymatlarni o'lchash uchun bir birlariga bog'liq bo'lmagan uchta o'lchov birliklari etarli ekan. Ulardan ikkitasi uzunlik va vaqt o'lchovlari. Uchinchisi o'lchov birligi sifatida yoki massani yoki kuchni tanlab olish mumkin. Ular (10.1) formula orqali bir-birlariga bog'liq bo'lganligi uchun, ularni ixtiyoriy ikkita o'lchov birligi sifatida qabul qilib bo'lmaydi. Shu sababli mexanikada bir-biridan mutloq farq qiluvchi o'lchov sistemasi bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi.

10.2. Moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari

Dekart koordinatalaridagi tenglamalar. Kinematika qismidan ma'lumki nuqtaning to'g'ri burchakli dekart koordinatalaridagi harakati quyidagi tenglamalar orqali beriladi:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t) \quad (10.2)$$

Dinamikaning asosiy masalalari shundan iboratki, nuqtaning harakatini bilgan holda, ya'ni (10.2) formula aniq bo'lsa, shu nuqtaga ta'sir etuvchi kuch aniqlanadi. Yo'ki teskarisi, ya'ni nuqtaga ta'sir etayotgan kuchlar ma'lum bo'lsa uning harakat qonuni, aniqrog'i (10.2) tenglamalar aniqlanadi. Shu sababli, nuqta dinamikasi masalalarini echish uchun shu nuqtaning x, y, z -koordinatalari bilan unga ta'sir etuvchi kuch (kuchlar)ni bog'lovchi tenglamalar kerak bo'ladi. Bunday tenglamalarni dinamikaning ikkinchi (asosiy) qonuni orqali olinadi.

Oxyz inertsial hisob sistemasida joylashgan moddiy nuqtaning $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ kuchlar ta'siridagi harakatini ko'rib o'taylik. (19.2) tenglamaning, ya'ni $m \bar{a} = \sum \bar{F}_k$ - ning ikkala tomonini x, y, z -koordinata o'qlariga 'roektsiyalaymiz va $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$, $a_z = d^2z/dt^2$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz} \quad (10.3)$$

yoki vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilalarni ikkita nuqta orqali belgilasak,

$$mx'' = \sum F_{kx}, \quad my'' = \sum F_{ky}, \quad mz'' = \sum F_{kz} \quad (10.4)$$

Mana shular bizga kerak bo'lgan tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, ularni *nuqtaning to'g'ri burchakli dekart koordinatalaridagi harakatining differentsial tenglamalari* deb ataladi. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar vaqt t -ga, nuqtaning o'rni, ya'ni uning x, y, z koordinatalariga va tezligiga, ya'ni $v_x = x'$, $v_y = y'$, $v_z = z'$ -larga bog'liq holda o'zgarishi mumkin ekanligi sababli, (10.4) tenglamalar sistemasidagi har bir tenglamaning o'ng tomonlari shunday o'zgaruvchilarning funktsiyalaridan iborat bo'lishi mumkin, ya'ni t, x, y, z, x', y', z' -lar birgalikda ishtirok etishlari mumkin.

Uch yoqli tabiiy o'qlarga 'roektsiyalardan iborat tenglamalar. Bunday tenglamalarni hosil qilish uchun $m \bar{a} = \sum \bar{F}_k$ -tenglikni ikkala tomonini $M\pi b$ - o'qlarga 'roektsiyalaymiz, ya'ni nuqtaning traektoriyasiga urinma - $M\tau$ o'qqa, bosh normal - Mn o'qqa va binormal - Mb o'qqa (Oxyz-o'qlar, traektoriyalarga nisbatan harakat qilmoqda) 'roektsiyalaymiz. U holda $a_\tau = dv/dt$, $a_n = v^2/\rho$, $a_b = 0$ ekanligiga asoslanib, quyidagilarni yozamiz,

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb} \quad (10.5)$$

bu erdagi $v = ds/dt$, (10.5) tenglamalar sistemasi *moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamasining uch yoqli tabiiy o'qlardagi 'roektsiyalari* hisoblanadi.

10.3. Dinamikaning birinchi asosiy masalasini yechish

Agar moddiy nuqtaning tezlanishi berilgan bo'lsa, unga ta'sir qilayotgan kuch yoki bog'lanish reaksiyasi (10.1) va (10.2) formulalar orqali aniqlanadi. Lekin bog'lanishlar reaksiyalarini aniqlash uchun qo'shimcha ravishda aktiv kuchlar ma'lum bo'lishi kerak. Agarda tezlanish bevosita berilmagan, lekin nuqtaning

harakat qonuni ma'lum bo'lsa, u holda kuchni aniqlash uchun (10.3) va (10.4) formulalardan foydalanish mumkin.

1 masala. Og'irligi R bo'lgan havo shari a tezlanish bilan 'astga tushmoqda. Havo sharini xuddi shunday tezlanish bilan yuqoriga ko'tarilishi uchun qanday miqdordagi Q yuk (ballast)ni tashlab yuborish kerakligi aniqlansin.

Echish. 'astga tushayotgan havo shariga og'irlik kuchi $\bar{F}$ va ko'tarish kuchi $\bar{F}$ ta'sir etadi (64, a shakl). (10.2) tenglamani vertikal o'qqa 'roektsiyalab, quyidagini yozamiz,

$$(R/g)a = R - F$$

Ballast tashlab yuborilgandan keyin (64, b shakl) sharining og'irligi $R - Q$ ga teng bo'ladi, lekin ko'tarish kuchi avvalligicha saqlanib qoladi. U holda shar yuqoriga qarab harakatlanmoqda deb hisoblab, quyidagi tenglamani yozamiz,

$$(R - Q) \cdot a/g = F - (R - Q)$$

Ushbu tenglamalardan noma'lum ko'taruvchi kuch F -ni yo'qotib yuborsak, Q kuchining qiymatini aniqlaymiz, ya'ni

$$Q = 2R/(1 + g/a).$$

2 masala. Og'irligi R bo'lgan lift (65 shakl) a tezlanish bilan yuqoriga

ko'tarilmoqda. Trosning tortilish kuchi aniqlansin.

Echish. Liftga og'irlik kuchi $\bar{F}$ va trosning reaksiya kuchi $\bar{T}$ ta'sir etmoqda. (10.2) tenglamaning vertikal o'qqa 'roektsiyasidan iborat tenglama tuzamiz, $(R/g)a = T - R$, bundan

$$T = R(1 + a/g)$$

Agar lift shunday tezlanish bilan 'astga tushib kelayotgan bo'lsa, u holda trosning tortilish kuchi $T_1 = R(1 - a/g)$ ga teng bo'ladi.

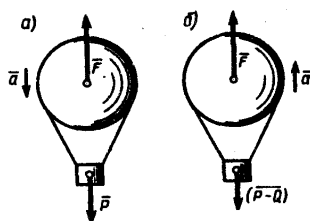
10.4. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli va egri chiziqli harakatlari.

Agarda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning (yoki unga ta'sir kuchlarning teng ta'sir etuvchisini) yo'nalishi o'zgarmas bo'lsa va boshlang'ich tezlik nol bo'lsa yoki uning yo'nalishi kuchga 'arallel bo'lsa, uning harakati to'g'ri chiziqli bo'ladi.

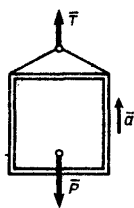
Agarda to'g'ri chiziqli harakatdagi nuqtaning yo'nalishi bo'yicha Ox koordinata o'qini yo'naltirsak, u holda moddiy nuqtaning harakati ya'ni

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx} \quad \text{yoki} \quad mx'' = \sum F_{kx} \quad (10.6)$$

(10.6) tenglama, to'g'ri chiziqli harakatning differentsial tenglamasi deb ataladi. Ba'zi hollarda buni birinchi tartibli hosilalardan iborat bo'lgan ikkita tenglamalar sistemasi bilan almashtirish mumkin bo'ladi,



64 shakl



65 shakl

$$m \frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx} \quad \text{va} \quad \frac{dx}{dt} = v_x \quad (10.7)$$

Agarda masalaning shartiga ko'ra, tezlik vaqtga bog'liq emas, balki uning x koordinatasiga (yoki kuchning o'zi x -ga) bog'liq holda aniqlash zarur bo'lsa, u holda (10.7) tenglamaning argumenti x -ga bog'liq bo'ladi,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot v_x$$

u holda (10.7) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$mv_x \cdot \frac{dv_x}{dx} = \sum F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x \quad (10.8)$$

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish shundan iborat bo'ladiki, moddiy nuqtaga qo'yilgan kuchlar ma'lum bo'lsa, uning harakat qonunini, ya'ni $x=f(t)$ ni aniqlanadi. Buning uchun tegishli differentsial tenglamani integrallash lozim bo'ladi. (10.6) tenglamaning o'ng tarafidagi kuchlar vaqt, t -ga, nuqtaning holatiga yoki uning tezligiga, ya'ni x -ga va $v_x=x'$ -ga bog'liq holda o'zgarishi mumkin. Shu sababli umumiy holda (10.6) tenglama matematik nuqtai nazardan qaralganda $m X'' = F(t, x, x')$ ko'rinishdagi 2 tartibli differentsial tenglamadan iborat bo'ladi.

Agar muqim (konkret) masala uchun tuzilgan (10.6) differentsial tenglamani integrallash mumkin bo'lsa, u holda echimda ikkita (o'zgarimas qiymatlar) S_1 va S_2 lardan iborat integral doimiylari 'aydo bo'ladi va (10.6) tenglamaning *umumiy yechimi* quyidagi ko'rinishda bo'ladi,

$$x=f(t, C_1, C_2) \quad (10.9)$$

Har-bir muqim masalaning yechimini oxiriga etkazish uchun, S_1 va S_2 integral doimiylarini aniqlash lozim bo'ladi. Buning uchun *boshlang'ich shartlardan* foydalaniladi.

Har qanday harakatni o'rganishni *boshlang'ich moment* deb ataladigan qandaydir ma'lum vaqtdan boshlanadi. Harakat davomidagi o'tgan vaqtni shu $t=0$ s momentdan boshlab o'lchanadi. Amalda berilgan kuchlar ta'sirida boshlangan vaqtni, boshlang'ich daqiqa, deb qabul qilinadi. Boshlang'ich daqiqadagi nuqtaning dekart (yoki tabiiy) koordinatalaridagi o'rnini *boshlang'ich holat* deb ataladi, nuqtaning shu daqiqadagi tezligini, *boshlang'ich tezlik* deb ataladi. ($t=0$ s vaqtda boshlang'ich tezlik nolga teng bo'lmazligi mumkin, chunki nuqta inertsii bilan harakatlanayotgan bo'lishi yoki boshqa kuchlar ta'sirida olgan tezligi bilan harakatlanayotgan bo'lishi mumkin). Demak, dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish uchun, berilgan kuchlardan tashqari, nuqtaning $t=0$ s vaqtdagi boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligi¹ aniq bo'lishi shart ekan.

To'g'ri chiziqli harakatdagi boshlang'ich shartlar quyidagi ko'rinishda beriladi

$$t=0 \text{ vaqtda } x=x_0, \quad v_x=v_0. \quad \text{bo'ladi} \quad (10.10)$$

Boshlang'ich shartlarga asoslanib, S_1 va S_2 integral doimiylarning muqim qiymatlari aniqlanadi va ular yordamida nuqtaning harakat qonuni hisoblangan (10.6) tenglamaning quyidagi ko'rinishdagi xususiy yechimi aniqlanadi,

$$x=f(t, x_0, v_0) \quad (10.11)$$

Yuqorida aytilgan barcha fikrlarni quyidagi sodda bir masalada ko'rib chiqamiz:

3 masala. Massasi m -ga teng bo'lgan moddiy nuqta, moduli va yo'nalishi o'zgarmas bo'lgan $\bar{Q}$ - kuch ta'sirida harakat qilmoqda (10.6 shakl). (10.7) boshlang'ich shartlarga asosan, nuqtaning harakat qonuni aniqlansin.

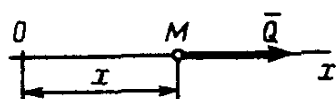
Echish. (10.7) ko'rinishdagi differentsial tenglama tuzamiz va $Q_x=Q$ ekanligi uchun

$$m \frac{dv_x}{dt} = Q$$

bo'ladi. Lekin $Q=\text{const}$ bo'lgani uchun tenglamaning ikkala tarafini dt - ga ko'aytiramiz va uni integrallab

$$v_x=(Q/m)t+C_1 \text{ ni olamiz.} \quad (a)$$

$v_x=dx/dt$ bo'lgani uchun, (a) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi



67 shakl.

$$\frac{dx}{dt} = (Q/m)t + C_1$$

ushbu tenglamaning ikkala tarafini dt - ga ko'aytiramiz va uni yana bir marta integrallaymiz, natijada

$$x=(Q/2m)t^2+C_1t+C_2 \quad (b)$$

ni hosil qilamiz. Ushbu natija bu masalaning (10.6) tenglamasining (10.9) ko'rinishdagi umumiy yechimi hisoblanadi.

Endi berilgan boshlang'ich (10.7) shartlarga ko'ra S_1 va S_2 integral doimiylarining muqim qiymatlarini aniqlaymiz. (a) va (b) echimlar ixtiyoriy vaqt uchun o'rinli bo'lishi kerak, shu jumladan $t=0s$ bo'lganda ham. Shuning uchun (a) va (b) lardagi t -ni o'rniga nol, v_x va x ni o'rniga v_0 va x_0 -larni qo'yamiz, u holda

$$v_0=S_1 \text{ va } x_0=S_2$$

Shu tengliklar orqali boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi S_1 va S_2 larning qiymatlari aniqlandi. S_1 va S_2 larning ushbu qiymatlarini (b) tenglamaga qo'ysak nuqtaning (20.6) ko'rinishdagi harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x=(Q/2m)t^2+ v_0t+ x_0 \quad (v)$$

Oldindan ham aniqlash mumkin bo'lganday, agar $Q=\text{const}$ bo'lsa $a=Q/m=\text{const}$ bo'ladi va (v) tenglamadan ko'rinib turibdiki, nuqta o'zgarmas kuch ta'sirida tekis o'zgaruvchan harakat qilar ekan. Xususiy holda og'irlik kuchi ta'sirida nuqta xuddi shunday qonun bo'yicha harakat qiladi. U holda (v) tenglikdagi $Q/m=g$ bo'ladi va Ox o'qi vertikal 'astga yo'nalgan bo'ladi.

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1.Nazariy mexanikaning dinamika qismi nimani o'rganadi?

A.Jismlarning mexanik harakatini ularning massasiga va harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarga bog'lab o'rganadi.

- B. Jismlarning mexanik ha-rakatini tashqi tomondan o'rganadi.
 C. Jismlarning mexanik ha-rakatini ichki tomondan o'rganadi.
 D. Jismlarning mexanik ha-rakatini boshqa jismlarning mexanik harakatiga bog'lab o'rganadi.

2. Dinamikaning asosiy tenglamasini toping?

A. $\bar{F} = m\bar{a}$

B. $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$

C. $\bar{P} = m\bar{g}$

D. $\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v})$

3. Moddiy nuqtaning tabiiy koordinata o'qlaridagi harakati differentsial tenglamalarini toping:

A.
$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_\tau \\ m \frac{v^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

C. $m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}$

D.
$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

NAZORAT UCHUN SAVOLLAR

1. Dinamika qismi nimani o'rganadi?
2. Dinamikaning birinchi qonuni nimadan iborat?
3. Dinamikaning asosiy qonunini tahriflab bering?
4. Dinamikaning uchinchi qonunini tahriflab bering?
5. Xarakatning differentsal tenglamasini Dekart o'qlardagi ko'rinishini yozib bering?
6. Xarakatning differentsal tenglamasini tabiiy uch yoqli o'qlardagi ko'rinishini yozib bering?
7. Dinamikaning birinchi asosiy masalasini nimadan iborat.

11-MA'RUZA

Mavzu: Moddiy nuqtaning erkin bo'lmagan va nisbiy harakatlari.

Reja:

1. Nuqtaning erkin bo'lmagan va nisbiy harakati differentsial tenglamalari.
2. Koriolis inertsia kuchlari va uning Yer usnidagi binolarga ta'siri.
3. Klassik mexanikaning nisbiylik prinsipi.

Tayanch so'z va iboralar:

Erkin bo'lmagan harakat, nisbiy harakat, Koriolis inertsia kuchi, nisbiylik prinsipi, korliolis inertsia tezlanish.

11.1. Nuqtaning erkin bo'lmagan va nisbiy harakati differentsial tenglamalari.

Agar moddiy nuqta, unga qo'yilgan bog'lanishlar ta'sirida berilgan yuzalar yoki egri chiziqlar bo'yicha harakatlanishga majbur bo'lsa, bunday nuqta erkinmas nuqta deb ataladi. Biz faqat ikkinchi holatnigina ko'rib chiqamiz.

Nuqtaning berilgan qo'zg'almas egri chiziq bo'ylab harakati.

Moddiy nuqta unga qo'yilgan $\vec{F}_1^a, \vec{F}_2^a, \dots, \vec{F}_n^a$ aktiv kuchlar va bog'lanish reaksiya kuchi $\vec{N}$ ta'sirida silliq egri chiziq bo'ylab harakatlanmoqda. Ushbu egri chiziqda O' nuqtani hisob sistemasining boshi qilib tanlab olamiz va M nuqtaning holati $s = O'M$ -ni shu nuqtadan boshlab aniqlaymiz. M nuqtadan $M\tau_{nb}$ - o'qlarini o'tkazamiz, ya'ni urinma $M\tau$ - (o'qni harakatning musbat s-tomoniga), bosh normal Mn (o'qni traektoriyaning botiq tomoniga)

Egri chiziq silliq bo'lganligi sababli, reaksiya kuchi $\vec{N}$ -egri chiziqqa 'er'endikulyar, ya'ni Mn -tekisligida yotadi, shu sababli $N_\tau = 0$ bo'ladi. Natijada, berilgan egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning differentsial tenglamasi quyidagicha bo'ladi,

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}^a \quad \text{yoki} \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = \sum F_{k\tau}^a \quad (11.1)$$

$$mv^2/\rho = \sum F_{kn}^a + N_n, \quad 0 = \sum F_{kb}^a + N_b \quad (11.2)$$

(11.1) tenglamada noma'lum reaksiya kuchi N qatnashmaydi va shu sababli nuqtaning egri chiziq bo'ylab harakat qonunini bevosita, ya'ni $s=f(t)$ -ni aniqlash mumkin. Agar egri chiziq g'adir-budir bo'lsa ham ushbu tenglikdan foydalanish mumkin, buning uchun aktiv kuchlar qatoriga ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ishq}$ -ni ham qo'shish lozim bo'ladi. Lekin $F_{ishq}=fN$ ekanligi sababli, (11.1) tenglamaga ishqalanish kuchi orqali noma'lum reaksiya kuchi N -ishtirok eta boshlaydi.

Dinamikaning ikkinchi qonuni asosida yuqorida keltirib chiqarilgan tenglamalar va teoremlar nuqtaning faqat absolyut harakati uchungina, ya'ni inertsial («qo'zg'almas») o'qlarga nisbatangina o'rinlidir,

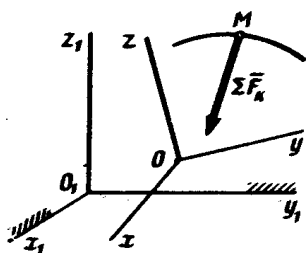
Endi nuqtaning nisbiy harakatini o'rganamiz, ya'ni uning inertsial sistemalarga nisbatan ixtiyoriy holda harakatlanuvchi noinertsial hisob sistemalarga nisbatan o'rganamiz.

Moddiy M nuqta unga boshqa moddiy jismlarning ta'sirlaridan iborat bo'lgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sirida harakat qilayotgan bo'lsin. Nuqtaning bunday

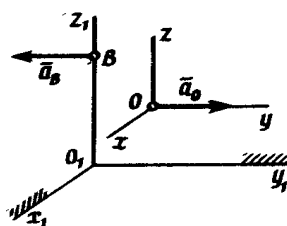
harakatini $Ox_1y_1z_1$ inertsial o'qlar («qo'zg'almas o'qlar»)ga nisbatan ixtiyoriy harakatda bo'lgan

(68 shakl) $Oxyz$ qo'zg'aluvchi o'qlarga nisbatan o'rganib chiqamiz.

Nuqtaga ta'sir etayotgan kuchlar bilan nuqtaning nisbiy tezlanishi- $\bar{a}_{\text{нис}}$



68-shakl



69-shakl

orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz.

Absolyut harakatdagi nuqta uchun dinamikaning asosiy qonuni,

$$m \bar{a}_{a6c} = \sum \bar{F}_k \quad (11.3)$$

11.2. Koriolis inertsia kuchlari va uning Yer usnidagi binolarga ta'siri.

Kinematikadan ma'lumki

$\bar{a}_{a6c} = \bar{a}_{\text{нис}} + \bar{a}_{\text{кшч}} + \bar{a}_{\text{кор}}$ bo'ladi, bu erdagi $\bar{a}_{\text{нис}}$, $\bar{a}_{\text{кшч}}$ va $\bar{a}_{\text{кор}}$ - nuqtaning nisbiy, ko'chirma va koriolis tezlanishlari. Absolyut tezlanishning ushbu qiymatini (11.3) tenglamaga qo'yamiz va keyinchalik foydalanish uchun $\bar{a}_{\text{нис}} = \bar{a}$ deb belgilaymiz, chunki ushbu qiymat, biz o'rganayotgan nisbiy harakatning tezlanishidan iborat, natijada

$$m \bar{a} = \sum \bar{F}_k + (-m \bar{a}_{\text{кшч}}) + (-m \bar{a}_{\text{кор}}).$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\bar{F}_{\text{кшч}}^{\text{и}} = -m \bar{a}_{\text{кшч}} \quad \bar{F}_{\text{кор}}^{\text{и}} = -m \bar{a}_{\text{кор}}$$

$\bar{F}_{\text{кшч}}^{\text{и}}$ va $\bar{F}_{\text{кор}}^{\text{и}}$ qiymatlar kuchning o'lchov birligi bilan o'lchanadi. Ularni tegishlicha ko'chirma va koriolis inertsia kuchlari deb ataymiz. U holda yuqoridagi tenglama quyidagi ko'rinishga keladi

$$m \bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_{\text{кшч}}^{\text{и}} + \bar{F}_{\text{кор}}^{\text{и}} \quad (11.4)$$

(11.4) tenglama nuqtaning nisbiy harakati uchun dinamikaning asosiy qonuni hisoblanadi. (11.3) va (11.4) tenglamalarni solishtirib quyidagi xulosaga kelamiz: nuqtaning nisbiy harakatida mexanikaning barcha tenglamalari va teoremlari, xuddi nuqtaning absolyut harakatidagi kabi tuziladi, lekin nuqtaga boshqa jismlarning ta'sirlaridan iborat bo'lgan kuchlar qatoriga ko'chirma va koriolis inertsia kuchlarini ham qo'shish lozim. $\bar{F}_{\text{кшч}}^{\text{и}}$ va $\bar{F}_{\text{кор}}^{\text{и}}$ - kuchlarning qo'shilishi qo'zg'aluvchi o'qlarning harakatini nuqtaning nisbiy harakatiga bo'lgan ta'sirini belgilaydi.

Shunday qilib, (11.3) formuladan ko'rinib turganidek, *noinertsial hisob sistemasidagi moddiy nuqta, nafaqat unga ta'sir etuvchi $\bar{F}_k$ -kuchlar ta'siridagina tezlanish olib qolmasdan, balki tezlanishga ega bo'lgan qo'zg'aluvchi hisob sistemasining harakati oqibatida ham tezlanish olar ekan.*

Umumiy holda, agar (11.3) tenglik orqali $\bar{a}_{a6c} = \sum \bar{F}_k / m$ aniqlab va $\bar{a}_{a6c} = \bar{a}_{\text{нис}} + \bar{a}_{\text{кшч}} + \bar{a}_{\text{кор}}$ ekanligini e'tiborga olib, hamda $\bar{a}_{\text{нис}} = \bar{a}$ belgilashdan

foydalansak, nisbiy harakatning tezlanishi uchun quyidagi formulani keltirib chiqaramiz,

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \sum \bar{F}_k + (-\bar{a}_{\text{кшч}}) + (-\bar{a}_{\text{коп}}). \quad (11.5)$$

(11.5) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, nuqtaga ta’sir etuvchi $\bar{F}_k$ -kuchlar sistemasi ta’sirida oladigan tezlanish $\sum \bar{F}_k / m$ -dan iborat bo‘lib, u *ixtiyoriy hisob sistemasida* ham bir xil bo‘ladi, lekin *inertsial hisob sistemasida* bu tezlanish nuqtaning to‘liq tezlanishidan iborat bo‘lsa, *noinertsial hisob sistemasida* esa bu nuqta tezlanishining bir qismini tashkil etadi xolos.

Ba’zi bir xususiy hollarni ko‘rib o‘tamiz.

1) Agar qo‘zg‘aluvchi o‘qlar ilgariylanma harakatda bo‘lsa, u holda $\bar{F}_{\text{коп}}^n = 0$ bo‘ladi, chunki ilgariylanma harakatda $\bar{\omega} = 0$ ($\bar{\omega}$ -qo‘zg‘aluvchan hisob sistemasining burchakli tezligi) va nisbiy harakat qonuni, quyidagicha bo‘ladi

$$m \bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_{\text{кшч}}^n$$

2) Agar qo‘zg‘aluvchi o‘qlarning harakati ilgariylanma bo‘lib, to‘g‘ri chiziqli tekis harakatdan iborat bo‘lsa, u holda $\bar{F}_{\text{кшч}}^n = \bar{F}_{\text{коп}}^n = 0$ bo‘ladi va nisbiy harakatning qonuni, xuddi qo‘zg‘almas o‘qlarga nisbatan harakat qonuniga o‘xshash bo‘lar ekan. Shu sababli, bunday hisob sistemasi ham *inertsial hisob sistemasi* deb ataladi.

Yuqoridagi natijalarga asoslanib, shuni ta’kidlash mumkinki *inertsial hisob sistemasini* qo‘zg‘almas ekanligini yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakat qilayotgan ekanligini hech qanday mexanik tajribalar orqali aniqlab bo‘lmaydi. G. Galiley tomonidan ochilgan *klassik mexanikaning nisbiylik ‘rintsi’i* mana shunga asoslanadi.

3) Agar nuqta qo‘zg‘aluvchi o‘qlarga nisbatan muvozanatda bo‘lsa (*nisbiy harakatda bo‘lmasa*), u holda nuqtaning $\bar{a} = 0$ va $\bar{v}_{\text{ншс}} = \bar{v} = 0$ bo‘ladi, demak $\bar{F}_{\text{коп}}^n = 0$, chunki koriolis tezlanishi $\bar{a}_{\text{коп}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{ншс}}) = 0$ bo‘ladi. U holda (23.4) tenglik, quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum \bar{F}_k + \bar{F}_{\text{кшч}}^n = 0 \quad (11.6)$$

(11.6) tenglama *nuqtaning nisbiy muvozanat* tenglamasidan iborat. Bundan, *nisbiy muvozanatlik tenglamasi ham, xuddi qo‘zg‘almas o‘qlardagi muvozanat tenglamalari kabi tuzilar ekan, lekin boshqa jismlarning ta’sir kuchlari qatoriga ko‘chirma inertsia kuchlarini ham qo‘shish lozim ekanligi* kelib chiqadi.

Agar $\bar{F}_{\text{кор}}^i \neq 0$ bo‘lsa, nuqtaning nisbiy harakatining tenglamasi tuzilganda, $\bar{F}_{\text{кор}}^i = -m\bar{a}_{\text{кор}} = -2m(\bar{\omega} \cdot \bar{v}_{\text{ншс}})$ ekanligini hisobga olish kerak. Shu sababli, $\bar{F}_{\text{кор}}^i$ kuchi $\bar{v}_{\text{ншс}} = \bar{v}$ -nisbiy tezlik vektoriga ‘er’endikulyar bo‘ladi, demak u nisbiy harakatning traektoriyasiga ham urinma bo‘lar ekan. Shuning uchun:

a) koriolis inertsia kuchining nisbiy harakat traektoriyasining urinmasi M_τ -ga bo‘lgan ‘roektsiyasi nolga teng bo‘lar ekan $[(\bar{F}_{\text{коп}}^n)_\tau = 0]$ va (11.6) tenglamalar sistemasining nisbiy harakatdagi birinchi tenglamasi quyidagicha bo‘ladi,

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau} + \bar{F}_{ko'ch\tau}^i \quad (11.7)$$

b) nuqtaning ixtiyoriy nisbiy harakatida koriolis inertsia kuchining bajargan ishi nolga teng bo'ladi va *nisbiy harakatdagi kinetik energiyaning o'zgarish teoremasi* quyidagi ko'rinishda bo'ladi (v_1 va v_0 -lar nisbiy tezliklar, A-nisbiy ko'chishdagi bajarilgan ish):

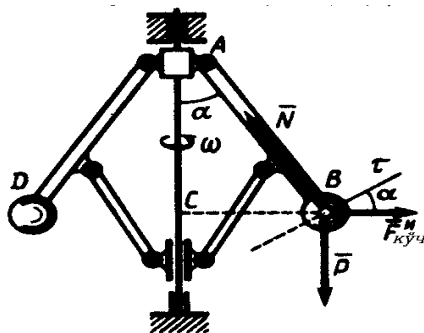
$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k + A(\bar{F}_{ko'ch}^i) \quad (11.8)$$

(11.7) va (11.8) dagi oxirgi yig'indilar, qo'zg'aluvchi o'qlarning nisbiy tezlik v -ga bo'lgan ta'sirini belgilaydi.

Umuman olganda nisbiy harakatning qolgan barcha tenglamalarida ko'chirma va koriolis inertsia kuchlari ishtirok etadi.

11.1 masala. V va D sharlarning massasiga nisbatan markazdan qochma regulyatorning barcha massalarini hisobga olmagan holda (70-shakl), AV sterjenning nisbiy muvozanat holatini belgilovchi α -burchakning qiymati aniqlansin. Regulyator o'zgarimas ω -burchak tezligi bilan aylanma harakat qilmoqda, $AV=l$ ga teng.

Echish. Nisbiy (regulyator bilan birgalikda aylanayotgan o'qlarga nisbatan) muvozanat holatni aniqlash uchun (11.6) tenglikka asosan, V sharga ta'sir etayotgan og'irlik kuchi $\bar{P}$ va reaksiya kuchi $\bar{N}$ -larga qo'shimcha ravishda



70 shakl.

ko'chirma inertsia kuchi $\bar{F}_{kuch}^n$ -ni ham qo'yish lozim. $\omega = \text{const}$ bo'lgani sababli $a_{ko'ch}^n = a_{kuch}^n = VS \cdot \omega^2 = l\omega^2 \sin \alpha$ bo'ladi.

U holda $\bar{F}_{kuch}^n = m\omega^2 \sin \alpha$ ga teng bo'ladi. Ko'chirma inertsia kuchining yo'nalishi, $\bar{a}_{kuch}^n$ - ning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi, ya'ni aylanish o'qidan teskariga (SV chiziq bo'ylab) yo'naladi; bu kuchni *markazdan qochma inertsia kuchi*

deb ham ataladi.

Kuchlarning AB - ga 'er'endikulyar bo'lgan V_τ - o'q bo'yicha muvozanat tenglamasini yozamiz :

$$-R \sin \alpha + F_{kuch}^n \cos \alpha = 0$$

F_{kuch}^n -kuchning o'rniga uning son qiymatini qo'yamiz, $\sin \alpha$ -ga qisqartiramiz ($\alpha \neq 0$ bo'lgan echimni ko'rib o'tmaymiz), natijada $-g + l\omega^2 \cos \alpha = 0$. Bundan,

$$\cos \alpha = g/l\omega^2 \text{ bo'ladi.}$$

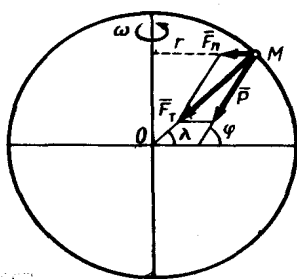
$\cos \alpha \leq 1$ bo'lganligi sababli, $\alpha \neq 0$ bo'lgan holda muvozanat bo'lishligi uchun $\omega^2 > g/l$ bo'lishi shart.

11.3. Klassik mexanikaning nisbiylik prinsipi.

Texnikaga oid aksariyat masalalarni yechishda Yerga mahkamlangan hisob sistemasini inertsial (qo'zg'almas) deb hisoblanadi. Bu bilan Yerning yulduzlarga nisbatan (Yerni o'z orbitasi bo'ylab Quyosh atrofidagi harakati keyingi mavzularda ko'rib o'tiladi) sutka ichidagi aylanishini hisobga olinmaydi. Bu aylanish (sutkada bir marta aylanishi) quyidagi burchakli tezlik bilan bo'ladi,

$$\omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) \approx 0,000073 \text{ c}^{-1}$$

Yerning ushbu sekin aylanishi, Yer atrofidagi jismlarning harakati va muvozanatiga qanday ta'sir ko'rsatishini ko'rib o'tamiz.



71 shakl.

1. Og'irlik kuchi. Tortilish kuchi (Yerning tortishi)ning bir qismi hisoblangan og'irlik kuchi Yerning sutka ichidagi aylanishiga bog'liq bo'ladi. Yerning sirtiga yaqin joylashgan moddiy nuqtaga, tortilish kuchi $\bar{F}_\tau$ ta'sir etib, u ikkita $\bar{F}_n$ va $\bar{P}$ -tashkil etuvchilarga ajraladi (23.8 shakl).

$\bar{F}_n$ - kuch Erning aylanish o'qi tomon yo'nalgan bo'lib, moddiy nuqtaga $\bar{a}_n$ - normal tezlanish beradi va bu tezlanish moddiy nuqtani Er bilan birga aylanishidan hosil bo'ladi; agar nuqtaning massasi m , Er o'qigacha bo'lgan masofasi r - bo'lsa, u holda $\bar{F}_n = m \bar{a}_n$ dan iborat bo'lib, uning son qiymati $F_n = m\omega^2 r$ - ga teng bo'ladi.

Tortilish kuchining ikkinchi tashkil etuvchisi - $\bar{P}$ bo'lib, u *og'irlik kuchi* deb ataladi. Shunday qilib,

$$\bar{P} = \bar{F}_\tau - \bar{F}_n$$

ya'ni, *og'irlik kuchi, to'liq tortilish kuchi bilan nuqtaning Er bilan birga sutka ichidagi aylanishidan hosil bo'ladigan kuchning vektor ayirmasiga teng ekan.*

$\bar{P}$ -kuchining yo'nalishi har bir hudud (unkt)ning vertikalini aniqlab beradi (i'ga osilgan yukning yo'nalishi; i'ning tortilish kuch R -ga teng bo'ladi) va $\bar{P}$ -kuchining yo'nalishiga 'er'endikulyar bo'lgan tekislik, shu hududning gorizontal tekisligi deb ataladi. $F_n = m\omega^2 r$ (ω^2 -juda kichik qiymat) kichkina qiymat bo'lgani uchun, og'irlik kuchi- $\bar{P}$, tortilish kuchi $\bar{F}_\tau$ -dan juda oz miqdorda farq qiladi. $\bar{P}$ -kuchning modulini *jismning og'irligi* deb ataladi.

2. Yerning sirtiga yaqin joylardagi nisbiy muvozanat va nisbiy harakat. Agar, nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchlardan $\bar{F}_\tau$ tortilish kuchini ajratib qo'ysak, (23.5) formulaga asosan nuqtaning aylanayotgan Er ustidagi nisbiy muvozanati (tinch holati) quyidagicha bo'ladi,

$$\sum \bar{F}_k + \bar{F}_\tau + \bar{F}_{\text{куш}}^n = 0.$$

Lekin $\bar{a}_{\text{ko'ch}} = \bar{a}_n$ va $\bar{F}_{\text{куш}}^n = -m \bar{a}_{\text{ko'ch}} = -m \bar{a}_n = -\bar{F}_n$. U holda, $\bar{F}_\tau + \bar{F}_{\text{куш}}^n = \bar{F}_\tau - \bar{F}_n = \bar{P}$ bo'ladi va yuqoridagi tenglama $\sum \bar{F}_k + \bar{P} = 0$ ko'rinishga keladi, ya'ni Yer bilan bog'langan hisob sistemasida qo'zg'almas bo'lgandagi kabi bo'lar ekan.

Demak, jismlarning *Erga nisbatan muvozanat tenglamalarini tuzganda Erning aylanishi hisobiga hech qanday qo'shimcha tuzatmaning keragi yo'q ekan* (bu aylanishdagi tuzatma tenglamada $\bar{P}$ orqali ishtirok etar ekan).

Endi nisbiy harakat tenglamalari (11.4)ni olib ko'ramiz, bu erda ham tortilish kuchini ajratib olamiz. U holda

$$m \bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_\tau + \bar{F}_{\kappa\mu}^n + \bar{F}_{\kappa op}^n.$$

Lekin yuqoridagi kabi $\bar{F}_\tau + \bar{F}_{\kappa\mu}^n = \bar{F}_\tau - \bar{F}_n = \bar{P}$ bo'ladi va ushbu tenglama quyidagi ko'rinishga keladi,

$$m \bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{P} + \bar{F}_{\kappa op}^n.$$

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi, *agar nuqtaning (jismning) harakat tenglamalarini tuzganda Er bilan bog'langan o'qlarni qo'zg'almas deb hisoblansa, u holda faqat koriolis inertsiya kuchini etiborga olinmas ekan xolos, uning son qiymati*

$$F_{\kappa op}^n = 2m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin \alpha$$

bu erdagi α -nuqtaning nisbiy tezlik vektori $\bar{v}$ bilan Erning o'qi orasidagi burchak.

Hozircha faqat tashqi kuchlar ta'siridagi kuchlanishlarni ko'rib chiqamiz. Bu erda massa (yoki hajmiy) va sirt kuchlarini bir birlaridan farqlab olish lozim. *Massaga bog'liq kuchlar deb, jismning har bir zarrachasiga ta'sir etuvchi va son qiymati bo'yicha shu jismning massasiga 'ro'rtsional bo'lgan kuchlarga aytiladi, massaga bog'liq kuchlarga Erning tortilish kuchi misol bo'ladi; Sirt kuchlariga esa, jismning sirtidagi nuqtalarga ta'sir etuvchi kuchlar kiradi; masalan, turli xil tayanchlarning reaksiya kuchlari, tortilish kuchi, muhitning qarshilik kuchi va h.k.*

Mavzu bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring!

1. Erkin bo'lmagan (bog'lanishdagi) moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalarining vektorli ifodasini ko'rsating:

A. $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}$

B. $m\bar{a} = \bar{F}$

C. $\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned} \right\}$

D. $\bar{P} = m\bar{g}$

2. Erkin bo'lmagan (bog'lanishdagi) moddiy nuqta harakat differentsial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini ko'rsating:

A. $\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z \end{aligned} \right\}$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = F_\tau \\ m \frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \\ 0 = F_b + N_b \end{array} \right\}
 \end{array}$$

3. Moddiy nuqta nisbiy muvozanat tenglamasining vektorli ifodasini ko'rsating.

A. $\bar{F} + \bar{N} + \bar{F}^{\text{IH}} = 0$

B. $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}$

C. $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}^{\text{IH}}$

D. $m\bar{a} = \bar{F}$

4. Moddiy nuqta erkin tebranma harakat dif-ferentsial tenglamasini ko'rsating:

1) $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$

2) $\ddot{x} + k^2x = 0$

3) $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt$

4) $\ddot{x} + k^2x = h \sin pt$

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

12-MA'RUZA

Mavzu: Moddiy nuqtaning tebranma harakati.

Reja:

1. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tebranma harakati.

2. Muhit qarshiligsiz erkin tebranma harakat.

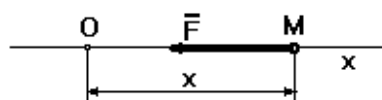
3. Yopishqoq muhit qarshiligidagi erkin tebranma harakat (so'nuvchi tebranishlar).

Tayanch so'z va iboralar:

Tebranma harakat, erkin tebranma harakat, so'nuvchi tebranishlar, tebranishlar amplitudasi, tebranish fazasi, garmonik tebranma harakat.

12.1. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tebranma harakati.

Tebranish nazariyasi fizika va texnikaning qator ilmiy asoslarini tashkil etadi. Fan va texnikaning turli bo'limlariga tegishli bo'lgan tebranishlar bir-birlaridan,



72-shakl

masalan, mexanikadagi, radiotexnikadagi, akustikadagi va b., o'zlarining fizik mohiyati bilan tubdan farq qilsalar ham, lekin tebranma harakatning asosiy qonuniyatlari hamma vaqt bir xilligicha qolar ekan.

Shu sababli, mexanik tebranishlarning qonuniyatlarini o'rganish o'ta muhim bo'lib, uning natijalari nafaqat texnikada, undan tashqari tebranishga bog'liq bo'lgan juda ko'p boshqa sohalarda ham dolzarb (aktual) hisoblanadi. Avvaliga muhit qarshiligini hisobga olmagan holdagi erkin tebranishlarni ko'rib o'tamiz. To'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi M nuqtaga, faqat bitta *-muvozanatlovchi* $\vec{F}$ kuch qo'yilgan bo'lib, yo'nalishi har doim O markazga qaraydi, moduli esa shu markazgacha bo'lgan masofaga to'g'ri 'ro'rtsional bo'lsin (72-shakl). Shu to'g'ri chiziqli traektoriya bo'ylab o'tkazilgan koordinata o'qiga $\vec{F}$ -kuchning 'roektsiyasi quyidagicha bo'ladi,

$$F_x = -cx \quad (12.1)$$

Shakldan ko'rinib turganidek $\vec{F}$ -kuchi nuqtani O markazdagi muvozanat holatga keltirishga harakat qiladi, chunki shu O nuqtada $F=0$ ga teng bo'ladi; M nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz. Harakatning differentsial tenglamasini Ox o'qidagi 'roektsiyasi

$$mX'' = F_x \text{ yoki } mX'' = -cx. \quad (12.2)$$

Tenglikning ikkala tomonini m-ga bo'lib yuborib va $c/m=k^2$ belgilash kiritib, yuqoridagi tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$X'' + k^2X = 0 \quad (12.3)$$

(12.3) tenglama, *muhit qarshilgisiz erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Ushbu chiziqli, ikkinchi darajali bir jinsli differentsial tenglamaning yechimini $x=e^{nt}$ ko'rinishda izlanadi. (12.3) tenglamadagi x-ni $x=e^{nt}$ orqali ifodalab, noma'lum n- ni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglamadan iborat bo'lgan xarakteristik tenglamani hosil qilamiz $n^2+k^2=0$. Ushbu tenglamaning ildizlari faqat mavhum ($n_{1,2}=\pm ik$) qiymatlar bo'lgani sababli, differentsial tenglamalarning nazariyasiga asosan, (12.3) tenglamaning umumiy yechimi, quyidagicha bo'ladi

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \quad (12.4)$$

bu erdagi C_1 va C_2 -lar integral doimiylari. Agar, C_1 va C_2 - o'zgarmas qiymatlarning o'rniga A va α -dan tashkil to'gan boshqacha, ya'ni $C_1 = A \cos \alpha$, $C_2 = A \sin \alpha$ larni kiritsak, u holda (24.4) tenglamaning ko'rinishi $x = A(\sin kt \cdot \cos \alpha + \cos kt \cdot \sin \alpha)$ yoki

$$x = A \sin(kt + \alpha), \quad (12.5)$$

bo'ladi. Bu (12.3) tenglamaning boshqacha yyechimi bo'lib, integral doimiylari sifatida A va α -lar ishtirok etmoqda. Ular orqali harakatni tadqiq qilish ancha qulay hisoblanadi.

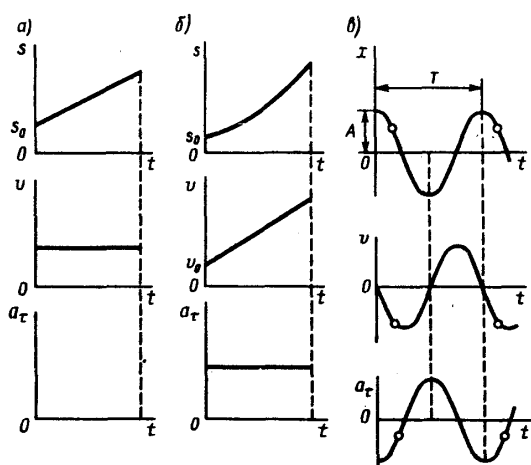
Tebranma harakatdagi nuqtaning tezligi

$$v_x = x' = Ak \cos(kt + \alpha), \quad (12.6)$$

(12.5) qonuniyat bilan tebranuvchi nuqtaning harakati *garmonik tebranma harakat* deb ataladi. Bunday harakatning $\alpha=90^\circ$ dagi grafigi 12.2, v shaklda tasvirlangan.

Bunday harakatning barcha xarakteristikalariga tasviriy kinematik tafsilotlar berish mumkin. Radiusi A ga teng bo'lgan aylana bo'ylab tekis harakatlanayotgan V nuqtaning harakatini ko'rib chiqaylik. Nuqtaning harakati V_0 -holatdan boshlanib, $\angle DOB_0=\alpha$ burchak orqali aniqlanadi. OV radiusning burchakli tezligi- k o'zgarmas qiymat bo'lsin. U holda, ixtiyoriy t vaqtda burchak $\varphi=\angle DOB=\alpha+kt$ bo'lsin, V nuqtaning (Ox o'qiga) DE -ga 'er'endikulyar bo'lgan diametriga 'roektsiyasi M , $x=Asin(kt+\alpha)$, qonuniyat bilan harakat qiladi, bu erda $x=OM$, ya'ni garmonik tebranma harakat qilmoqda.

M nuqtaning tebranish markazi O nuqtadan eng katta uzoqlashgan qiymati A , *tebranish amplitudasi* deb ataladi. $\varphi=kt+\alpha$ *tebranish fazasi* deb ataladi. Tebranish



73-a,b,v shakl.

fazasi- φ , nuqtaning koordinatasi x -dan farqli ravishda, berilgan vaqtdagi nuqtaning holatini aniqlabgina qolmasdan, keyingi harakatning yo'nalishini ham belgilab beradi; masalan, fazasi φ bo'lgan M holatdan, nuqta o'ng tomonga qarab harakatlanadi, fazasi $(\pi-\varphi)$ bo'lganda esa cha' tomonga qarab harakatlanadi. Bir-biridan 2π fazaga farqlanuvchi tebranma harakatlar bir xil hisoblanadilar (73, v shaklda o'rtasi oq nuqtalar bilan bir xil fazalar belgilab

qo'yilgan).

Tebranishning boshlang'ich fazasini α -qiymat orqali aniqlanadi. Masalan, $\alpha=0$ bo'lganda tebranma harakat sinusoida bo'yicha sodir bo'ladi (harakat O nuqtadan boshlanib, tezlik o'ng tomonga yo'naladi). $\varphi=\pi/2$ -bo'lganda kosinusoida (harakat $x=A$ holatdan va v_0 -tezlik bilan boshlanadi), OV radiusning burchakli tezligi bilan bir xil bo'lgan k - qiymat *tebranishning davriy chastotasi* deb ataladi (73 shakl).

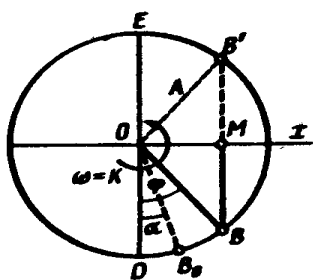
Nuqtaning to'la bir marta tebranishi uchun sarflangan vaqt oralig'i T (yoki τ), *tebranish davri* deb ataladi. Davr o'tishi bilan faza 2π -ga o'zgaradi. Shu sababli $kT=2\pi$ bo'lishi shart, bundan tebranish davri aniqlanadi

$$T=2\pi/k \quad (12.7)$$

Tebranish davriga teskari nisbatda bo'lgan

$$\nu=1/T=k/2\pi \quad (12.8)$$

qiymat, tebranish chastotasi deb ataladi va u 1 s vaqt ichidagi tebranishlar sonini ifodalaydi.



Bundan ko‘rinib turibdiki, k - qiymat v -dan faqat 2π ko‘‘aytmasi bilan farqlanar ekan. Keyinchalik, qisqaroq ga‘irish uchun k -ni ham chastota degan so‘z bilan atayveramiz.

Endi A va α integral doimiylarining son qiymatlarini aniqlaymiz.

74 shakl A va α - ni boshlang'ich shartlarga asosan aniqlash. Odatdagidek, $t=0$ da $x=x_0$, $v_x=v_0$ ekanligidan foydalanib, (24.5) va (24.6) formulalar orqali $x_0=A\sin\alpha$, $v_0/k=A\cos\alpha$ -ni aniqlaymiz. Bu tengliklarni kvadratga ko'tarib, ularni hadma-had qo'shsak, so'ngra ularning birini ikinchisiga nisbatini olsak, A va α larning qiymatlarini aniqlaymiz

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / k^2}, \quad \text{tg} \alpha = kx_0 / v_0 \quad (12.9)$$

A va α -larni nuqtaning chegaraviy shartlari orqali aniqlash Boshlang'ich shartlarning o'rniga quyidagi chegaraviy shartlar berilgan bo'lsin: $t=0$ da $x=x_0$, $t=t_1$ da $x=l$ bo'lsin. U holda, (12.5) formula orqali $0=\sin\alpha$, $l=A\cdot\sin(kt+\alpha)$ -ni yozamiz, bundan $\alpha=0$, $A=l/\sin kt$ bo'ladi va (12.3) tenglamaning yechimi (agar faqat $t_1\neq\pi/2=T/2$ bo'lsa) $x=(l/\sin kt_1)\sin kt$ bo'ladi, agar $t_1=\pi/2$ (yoki $2\pi/k$ va h.) bo'lsa, u holda A -ni aniqlash uchun $l=Asin\pi$ tenglama tuzamiz, lekin $l\neq 0$ bo'lganda u tenglamani qoniqtirmaydi, natijada masala echimga ega bo'lmaydi. Agar $l=0$ va $t_1=\pi/2$ bo'lsa, A -ni aniqlash uchun $0=Asin\pi$ tenglama hosil qilamiz, ya'ni A -ning ixtiyoriy qiymatlarida ham tenglamani qoniqtiradi. Demak (12.3) tenglamaning yechimi $x=Asin kt$ ko'rsatki bo'lishi mumkin, A -ixtiyoriy son.

$$T = 2\pi \sqrt{m\lambda_{ct} / P} \quad (12.11)$$

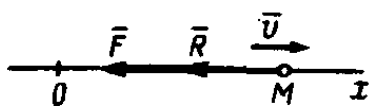
Shunday qilib, tebranish davri statik og‘ish λ_{st} -ning kvadrat ildiziga to‘g‘ri ‘ro‘rtsional ekan.

Xususiyl holda, agar $\bar{P}$ kuchning o'rnida og'irlik kuchi qatnashsa, u holda $R=mg$ bo'ladi va (12.11) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{\text{CT}}/g} \quad (12.12)$$

12.3.Yopishqoq muhit qarshiligidagi erkin tebranma harakat (soʻnuvchi tebranishlar).

Yo'ishqoq muhitlar (turli yog'lar, suv va boshqa suyuqliklar) ning qarshiliklari nuqtaning tezligiga to'g'ri 'ro'rtsional ravishda o'zgaruvchan funktsiyadan iborat bo'ladi, masalan $\bar{R} = -\mu \bar{V}$ (manfiy ishora, kuchni tezlikka teskari yo'nalishda ekanligini ko'rsatib turibdi). Nuqtaning harakatida muvozanatlovchi $\bar{F}$ kuch va muhit qarshiligi kuchi $\bar{R}$, ta'sir etsin (75 shakl). U



holda $F_x = -cx$, $R_x = -\mu v_x = -\mu X'$ bo'lganligi uchun, shu nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagicha yoziladi

$$m X'' = -cX - \mu X'$$

Tenglamaning ikkala tomonini m -ga bo'lib yuborib, tegishli belgilashlar kiritib,

$$x'' + 2b x' + k^2 x = 0 \quad (12.12)$$

bu yerdagi

$$k^2 = c/m; \quad 2b = \mu/m \quad (12.13)$$

k va b -qiymatlarning o'lchov birliklari bir xil ($1/\text{vaqt}$); shu sababli ularni o'zaro solishtirish mumkin.

(12.12) tenglama *tezlikka proporsional bo'lgan qarshilik ta'siridagi erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning yechimini (12.3) tenglamadagi kabi $x = e^{nt}$ ko'rinishda axtariladi. Ushbu x -ning qiymatini (12.12) ga qo'ysak, xarakteristik tenglama kelib chiqadi, uning ildizlari

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2} \quad (12.14)$$

1. Agar, $k > b$ bo'lsa, ya'ni muvozanatlovchi kuchga nisbatan qarshilik kuchi kichkina bo'lsa, quyidagi belgilash kiritilgandan so'ng

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} \quad (12.15)$$

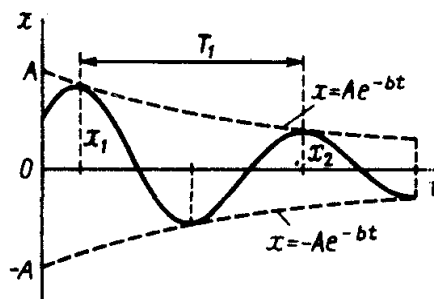
(12.14) ifoda $n_{1,2} = -b \pm ik_1$ ko'rinishga keladi, ya'ni **xarakteristik tenglamaning** ildizlari kom'leks sonlardan iborat bo'lar ekan. U holda (12.12) tenglamaning umumiy yechimi, (12.3) tenglamaning yechimidan faqat e^{-bt} -ko'aytmaga farq qilar ekan xolos, ya'ni

$$x = e^{-bt} (C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \quad (12.16)$$

yoki (12.5) formula kabi o'zgartirilsa,

$$x = A e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) \quad \text{bo'ladi,} \quad (12.17)$$

(12.17) formuladagi A va α -lar integral doimiylari hisoblanadi va ularning son qiymatlari boshlang'ich shartlar yordamida aniqlanadi.



76-shakl.

(12.17) tenglama bo'yicha sodir bo'ladigan harakat, so'nuvchi harakat bo'ladi, chunki tenglamada e^{-bt} dan iborat ko'aytma bo'lganligi sababli, $x = OM$ (76-shakl) qiymat vaqt o'tishi bilan kamayib borib nolga intiladi.

Ushbu tebranma harakatning grafigi 76-shaklda tasvirlangan (grafik ikki tarafdin $x = A e^{-bt}$ va $x = -A e^{-bt}$ 'unktir egri chiziqlar ichiga olingan, chunki $\sin(kt + \alpha)$ ning son qiymati 1-dan

oshmaydi).

T_1 vaqt oralig'ini so'nuvchi tebranishlar davri deb ataladi va u $\sin(kt + \alpha)$ ning davriga teng bo'lib, uning qiymati

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \quad (12.18)$$

Bir davr ichida, nuqta to'la bir marta tebranadi, ya'ni $x=0$ holatdan (76-shakl) o'ng tomonga qarab harakat boshlasa, bir davr o'tgandan so'ng yana shu nuqtadan yana o'ng tomonga harakat boshlaydi. Agar (12.7) tenglikni e'tiborga olsak (12.18) formula quyidagi ko'rinishga keladi,

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-b^2/k^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-b^2/k^2}} \approx T(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{k^2}) \quad (12.19)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, $T_1 > T$, ya’ni muhit qarshiligi ta’sirida tebranish davri ortar ekan, lekin qarshilik kuchi juda oz miqdorda bo‘lsa (ya’ni $b \ll k$), u holda b^2/k^2 nolga yaqin son bo‘lib, natijada $T_1 \approx T$ bo‘ladi. Demak, kichkina qarshilik kuchi tebranish davriga ta’sir etmas ekan.

Mavzu bo‘yicha bilimingizni sinab ko‘ring!

1. Rezonans – bu
 - A. Ta’sir kuchi o‘zgarmay turib, tebranish amplitudasining juda ortib ketishi
 - B. tebranishning katta amplitudasi
 - C. konstruksiyaning buzilishi
 - D. tebranishning eng katta qiymati
2. erkin (garmonik) tebranma harakat deb,...
 - A. harakat qonuni sinusoida bo‘yicha o‘zgarib, argumenti vaqtga proportsional
 - B. harakat qonuni o‘zgarmas bo‘lsa
 - C. tebranish davri o‘zgaruvchan
 - D. tebranish fazasi o‘zgaruvchan
3. Tebranish amplitudasi –
 - A. tebranma harakatning eng katta og‘ishi
 - B. tebranishning yarim og‘ishi
 - C. bir marta to‘la tebranishga ketgan vaqt
 - D. bir marta yarim tebranishga ketgan vaqt
4. So‘nuvchi tebranma harakatda ...
 - A. tebranish amplitudasi kamayib boradi
 - B. tebranish davri ortib boradi
 - C. tebranish fazasi kamayib boradi
 - D. tebranish davri kamayib boradi

13-MA’RUZA

Mavzu: Moddiy nuqtaning tebranma harakati.

Reja:

1. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli majburiy tebranma harakati.
2. Rezonans. Vibratsiya.
3. Elektrodinamik analog.

Tayanch so‘z va iboralar:

Majburiy tebranma harakat, rezonans, qo‘zg‘atuvchi kuch, vibratsiya, xususiy tebranishlar, majburiy tebranishlar, elektrodinamika.

13.1. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli majburiy tebranma harakati

Ushbu mavzuda, nuqtaga muvozanatlovchi $\vec{F}$ -kuchdan tashqari vaqt mobaynida davriy ravishda o‘zgarib turuvchi $\vec{Q}$ -kuchi ham ta’sir etgan, ya’ni tebranma harakatning juda bir muhim masalasini ko‘rib o‘tamiz. $\vec{Q}$ -kuchining Ox o‘qidagi proektsiyasi,

$$Q_x = Q_0 \sin \omega t \quad (13.1)$$

ga teng bo'lsin. Bunday kuchni *qo'zg'atuvchi kuch* deb ataladi va shu kuch ta'siridagi tebranma harakatni *majburiy tebranishlar* deb ataladi. (13.1) formuladagi r -qiymatni *qo'zg'atuvchi kuchning chastotasi* deb ataladi.

1. Muhit qarshiligi bo'lmagan holdagi majburiy tebranishlar. Harakatlanuvchi nuqtaga muvozanatlovchi $\bar{F}$ kuchdan tashqari faqat *qo'zg'atuvchi kuch* $-\bar{Q}$ ta'sir etsin. U holda nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi

$$m x'' = -cx + Q_0 \sin rt$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini m -ga bo'lamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$c/m = k^2, \quad Q_0/m = R_0 \quad (13.2)$$

R_0 -ning o'lchov birligi tezlanish kabi bo'ladi. U holda yuqoridagi differentsial tenglama quyidagi ko'rinishga keladi

$$x'' + k^2 x = R_0 \sin rt \quad (13.3)$$

(13.3) tenglama *muhit qarshiligi bo'lmagan holdagi nuqtaning majburiy tebranma harakatining differentsial tenglamasi* deb ataladi. Differentsial tenglamalar nazariyasiga asosan, bunday tenglamaning yechimi $x = x_1 + x_2$ ko'rinishda bo'ladi. Bu erdagi x_1 - tenglamaning o'ng tomonisiz, ya'ni (13.3) ko'rinishdagi umumiy yechimi bo'lib (13.3) formulada berilgan, x_2 -esa to'liq tenglamaning birorta xususiy yechimidan iborat bo'ladi.

Tenglamaning x_2 - yechimini $r \neq k$ deb hisoblab, quyidagi ko'rinishda axtaramiz

$$\begin{aligned} x_2 &= V \sin rt \\ -r^2 B \sin rt + k^2 B \sin rt &= R_0 \sin rt \end{aligned}$$

Ushbu tenglik vaqt t -ning ixtiyoriy qiymatlarida ham qanoatlanishi uchun $B(k^2 - r^2) = R_0$ bo'lishi kerak, yoki

$$V = R_0 / (k^2 - r^2)$$

Shunday qilib, izlanayotgan xususiy echim aniqlandi, ya'ni

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin rt \quad (13.4)$$

To'liq echim $x = x_1 + x_2$ ko'rinishda bo'lganligi sababli, hamda x_1 -ning yechimi (13.4) formuladan ma'lum bo'lganligi uchun, (13.3) tenglamaning umumiy yechimi

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin rt \quad (13.5)$$

bu erdagi A va α - integral doimiylari bo'lib, ular boshlang'ich shartlar orqali aniqlanadi. (13.5) yechimdan ko'rinishidiki, tebranma harakat ikkita, ya'ni: 1) chastotasi $-k$ va amplitudasi A -(amplituda boshlang'ich shartlarga bog'liq holda bo'ladi) bo'lgan *xususiy tebranishlar*; 2) chastotasi $-r$ va amplitudasi V -(bu amplituda boshlang'ich shartlarga bog'liq holda bo'lmaydi) bo'lgan *majburiy tebranishlarning* yig'indisidan iborat bo'lar ekan.

Lekin amalda, u yoki bu qarshiliklar evaziga, xususiy tebranishlar tez orada so'nadi. Shu sababli, nuqtaning asosiy tebranma harakati, (13.4) tenglama orqali bo'ladigan majburiy tebranishlardan iborat bo'ladi.

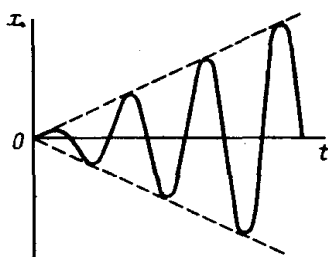
Majburiy tebranishlarning chastotasi r , qo'zg'atuvchi kuchning chastotasiga teng bo'ladi. Agar shu majburiy tebranishlar amplitudasining qiymatini surat va mahrajini k^2 -ga bo'lib yuborsak,

$$v = \frac{P_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{\lambda_0}{|1 - p^2/k^2|} \quad (13.6)$$

bu erdagi $\lambda_0 = R_0/k^2 = Q_0/c$, ya'ni λ_0 -nuqtaning Q -kuch ta'siridagi statik og'ishi. Ko'rinib turgandek, V -ning qiymati qo'zg'atuvchi kuchning chastotasi r -ni, xususiylas chastota k -ga nisbatiga bog'liq ekan. Quyidagicha

$$z = r/k, \quad \eta = B/\lambda_0 \quad (13.6')$$

belgilashlar r va k -qiymatlarning turli nisbatlarda olish hisobiga turlicha



76-shakl

amplitudalarga ega bo'lgan majburiy tebranishlar hosil qilish mumkin ekan. Agar $r=0$ (yoki $r \ll k$) bo'lsa, amplituda λ_0 -ga teng (yoki shu qiymatga yaqin) bo'ladi, Agar r -ning qiymati k -ga yaqin bo'lsa, amplituda V juda katta bo'ladi. Va nihoyat $r \gg k$ bo'lsa amplituda V -ning qiymati juda kichik (yoki nolga yaqin) bo'ladi. Yana shuni ta'kidlash lozimki, agar $r < k$ bo'lsa, (25.1) va (25.4) tenglamalarni solishtirish orqali majburiy tebranishlar fazasi bilan qo'zg'atuvchi kuchning fazasi ustma-ust (ikkalasi ham rt -ga teng) tushar ekan. Agar $r > k$ bo'lsa, u

holda sinusning ostiga manfiy ishorani kiritib, (25.4) formulani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(rt - \pi)$$

Demak, $r > k$ bo'lganda majburiy tebranishlar fazasi bilan, qo'zg'atuvchi kuchning fazasi, bir-biriga nisbatan π burchakka yo qiymati katta miqdorda (katta quloch bilan tebrana boshlaydi) ortib ketadi. Bu haqdagi batafsil ma'lumotlar shu paragrafning oxirgi 3'. - da bayon etilgan.

Agar $r=k$ bo'lsa (76-shakl) tenglamaning $x_2 = V \sin rt$ dan iborat xususiy yechimi bo'lmaydi, uning yechimini

$$x_2 = S \cdot t \cdot \sin rt$$

ko'rinishda axtariladi. U holda, $x''_2 = -2S r \sin rt - r^2 S t \sin rt$, bularni (13.3) tenglamaga qo'ysak va $r=k$ ekanligini e'tiborga olib, $-2S r \sin rt = R_0 \sin rt$, bundan $S = -R_0/2r$ bo'ladi. Natijada, muhit qarshiligi bo'lmagan majburiy tebranma harakatdagi rezonans holatning tenglamasini yozamiz:

$$x_2 = -(R_0/2r)t \cdot \sin rt \quad \text{yoki} \quad x_2 = (R_0/2r)t \cdot \sin(rt - \pi/2) \quad (13.7)$$

2*. Muhit qarshiligi ta'siridagi majburiy tebranishlar. Harakatdagi nuqtaga, muvozanatlovchi kuch $\bar{F}$, tezlikka 'ro'rtsional ravishda o'zgaruvchi (24.2§) qarshilik kuchi $\bar{R}$ va (13.1) formula orqali ifodalanadigan qo'zg'atuvchi kuch Q ta'sir etsin. Bunday kuchlar ta'siridagi nuqtaning harakat differentsial tenglamasi, quyidagicha bo'ladi

$$m X'' = -cX - \mu X' + Q_0 \sin rt \quad (13.8)$$

Tenglamaning ikkala tarafini m -ga bo'lib, hamda (24.13) va (25.2) dagi belgilashlarni e'tiborga olsak, yuqoridagi tenglama

$$x'' + 2b x' + k^2 x = R_0 \sin \tau t \quad (13.9)$$

(13.9) tenglama, *yo'ishqoq muhit qarshiligi ta'siridagi majburiy tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning umumiy yechimi $x = x_1 + x_2$ ko'rinishda bo'ladi. Bu erdagi x_1 - tenglamaning o'ng tomonisiz, tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi, x_2 -esa (13.9) to'liq tenglamaning birorta xususiy yechimidan iborat bo'ladi. Tenglamaning x_2 -yechimini, quyidagi ko'rinishda axtaramiz

$$x_2 = B \sin(\tau t - \beta)$$

bu erdagi V va β -o'zgarmas qiymatlar bo'lib, ularning qiymatlari shunday bo'lishi lozimki, ularning aniqlangan qiymatlarini (25.3)-ga qo'yilganda, u tenglama ayniyatga aylanib qoladi. Shunga asosan, x_2 -ning hosilalarini hisoblaymiz

$$x'_2 = B r \cos(\tau t - \beta), \quad x''_2 = -B r^2 \sin(\tau t - \beta)$$

Bu hosilalarni va x_2 -ning qiymatlarini (13.9) ning cha' tomoniga keltirib qo'ysak, hamda qisqaroq yozish maqsadida $\tau t - \beta = \psi$ (yoki $\tau t = \psi + \beta$) belgilash kiritsak

$$B(-r^2 + k^2) \sin \psi + 2br B \cos \psi = R_0 (\cos \beta \sin \psi + \sin \beta \cos \psi)$$

Har qanday ψ -qiymatlarda ham, ya'ni ixtiyoriy vaqt uchun ushbu tenglama qanoatlanishi uchun, uning cha' va o'ng tomonlaridagi $\sin \psi$ va $\cos \psi$ larni oldilaridagi o'zgarmas koeffitsientlar o'zaro teng bo'lishlari shart; Demak

$$B(r^2 - k^2) = R_0 \cos \beta, \quad 2brB = R_0 \sin \beta$$

Yuqoridagi ikkala tenglamani (bularndan β -ning qiymatini aniqlashda ham foydalaniladi) kvadratlarining yig'indilari va ularni bir-birlariga nisbatlari orqali V va β larning qiymatlarini aniqlaymiz

$$V = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2} \quad (13.10)$$

(13.9) tenglamaning x_1 - ($k > b$ bo'lgandagi) yechimi (24.17) da aniqlangan, shunga ko'ra, (13.9) tenglamaning to'liq yechimi, quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) + B \sin(\tau t - \beta) \quad (13.11)$$

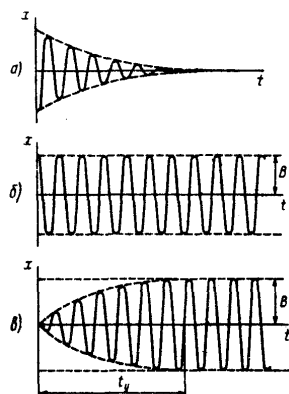
bu erdagi A va α -lar integral doimiylari bo'lib, boshlang'ich shartlar orqali aniqlanadi. V va β lar esa (13.10) formulada aniqlangan.

Masalan, xususiy tebranishlarning qulochi $0,01V$ bo'lgan holdagi o'rnashish vaqti t_u ni $Ae^{-bt} = 0,01V$ tenglikdan aniqlanadi va

$$t_u = \frac{1}{b} \ln \frac{100A}{B} \quad (13.12)$$

Ko'rinib turganidek, qanchalik qarshilik kuchi (ya'ni, qanchalik b) kichkina bo'lsa, o'rnashish davri shunchalik uzoq kechadi.

(13.11) qonuniyat bo'yicha sodir bo'lishi mumkin bo'lgan majburiy tebranma harakatning bir ko'rinishi 25.2, v shaklda tasvirlangan, bu



77- shakl

erda nuqtaning boshlang'ich tezligi nolga teng. Boshlang'ich shartlari hamda r va k_1 chastotalarning turli xil nisbatlari boshqacha bo'lgan tebranishlarning $0 < t < t_u$ vaqt oralig'idagi, tebranish xarakterlari mutloq boshqacha bo'lishi mumkin. Lekin, o'rinish vaqti o'tib ketgandan keyin xususiy tebranishlar batamom tugaydi va nuqta faqat

$$x = B \sin(rt - \beta) \quad (13.13)$$

qonuniyat bilan harakatlanadi. Bunday qonuniyat bo'yicha tebranishlar, *majburiy tebranishlar* deb ataladi. Ular, am'litudasi (13.10) formula orqali aniqlanadigan V -ga teng bo'lgan va so'nmaydigan garmonik tebranishlar bo'lib,

ularning chastotasi qo'zg'atuvchi kuchning chastotasi r -ga teng bo'ladi. Majburiy tebranishlarning fazasini qo'zg'atuvchi kuchning fazasiga nisbatan surilishi β -ga teng bo'ladi.

Olingan natijalarni tadqiq qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz,

$$z = r/k, \quad h = b/k, \quad \lambda_0 = R_0/k^2 = Q_0/c \quad (13.14)$$

bu erdagi z - chastotalarning nisbati; h - qarshilik kuchini belgilovchi qiymat; λ_0 - Q kuchi ta'siridagi statik uzayish (masalan, 'rujinaga osilgan yukka qo'shimcha ravishda qo'yilgan Q kuch ta'sirida 'rujinaning qo'shimcha uzayishi- λ_0).

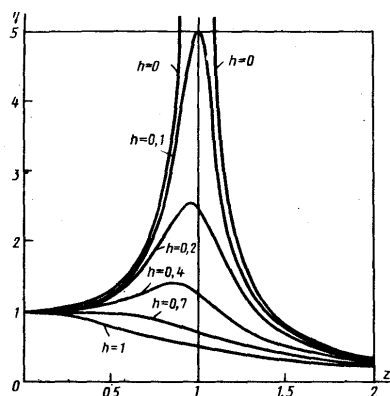
U holda, (13.10) tenglamaning surat va mahrajini k^2 -ga bo'lib yuborsak:

$$v = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4h^2 z^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2hz}{1 - z^2} \quad (13.15)$$

(13.15) formuladan ko'rinib turibdiki, V va β lar ikkita z va h o'lchovsiz qiymatlarga bog'liq ekan. Yanada yaxshiroq tushuntirish maqsadida, h -ning ba'zi bir qiymatlari uchun, ushbu bog'lanishlarning grafigi tasvirlangan. Birinchi grafikda (13.3 shakl) *dinamiklik koeffitsientining* $\eta = V/\lambda_0$ (am'lituda V -ning qiymati, λ_0 -ning qiymatidan katta ekanligi) chastotalar nisbatiga qanday bog'liq ekanligi tasvirlangan.

Ikkinchi (13.4 shakl) grafikda tebranish fazasining surilishi, ya'ni β -ning z -ga bog'liq holdagi grafigi tasvirlangan. Har bir muqim masalada, berilgan shartlarga binoan λ_0 , z , h larni aniqlab, ular yordamida V va β lar (13.15) formula orqali hisoblanadi yoki grafik orqali aniqlanadi. Bu grafiklar (yoki formulalar)dan ko'rinib turibdiki, r va k -larning qiymatlarini turlicha tanlash evaziga turlicha am'litudaga ega bo'lgan majburiy tebranishlar olish mumkin ekan.

Qarshilik kuchi juda oz va z -ning qiymati 1-ga yaqin bo'lmagan son bo'lsa, (13.15) formulada taqriban $h \approx 0$ deb hisoblash mumkin bo'ladi. U holda, yuqoridagi 1' dagi natijalarni olishimiz mumkin, aniqrog'i:

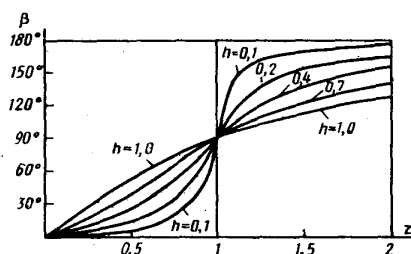


78- shakl.

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\lambda_0}{|1 - z^2|} \\ \beta &\approx 0 \quad (z < 1 \text{ da}) \\ \beta &\approx 180^\circ \quad (z > 1 \text{ da}) \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

Quyidagi xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

1. Agar chastotalar nisbati z - juda kichkina ($r \ll k$) bo'lsa, u hoda $z \approx 0$ deb hisoblab (13.15) formuladan $V \approx \lambda_0$ ekanligini aniqlaymiz. Bu holdagi tebranma harakatning amplitudasi statik uzayish λ_0 -ga teng bo'lib, faza bo'yicha surilish $\beta \approx 0$ bo'ladi.



79-shakl.

2. Agar chastotalar nisbati juda katta ($r \gg k$) bo'lsa, amplituda V kichkina bo'ladi. Bu holat inshootlarni Vibratsiya (titrash) ratsiyadan himoya qilishda, 'riborsozlikda va shunga o'xshash texnikaning turli sohalari uchun katta ahamiyatga ega bo'ladi. Qarshilik kuchi oz bo'lsa, (13.15) formuladagi $2hz$ -ni e'tiborga olmasdan va $(1 - z^2) \approx z^2$ deb hisoblasak, V -ning qiymatini aniqlash uchun taqribiy formula yozamiz,

$$V = \lambda_0 / z^2 = R_0 / r^2 \quad (13.17)$$

3. Barcha amaliy ishlarda h -ning qiymati 1 -dan ancha kichkina bo'lgan holat, ayniqsa, katta qiziqish uyg'otadi. U holda, agar z - ning qiymati 1-ga yaqin son bo'lsa (13.15) formuladan ko'rinib turganidek, majburiy tebranishlarning amplitudasi o'zining maksimal qiymatiga chiqadi. Bunday bo'lgan holatni *rezonans* deb ataladi.

(13.15) formuladan ko'rinib turibdiki, agar maxrajdagi $f(\xi) = (1 - \xi)^2 + 4h^2\xi$ (bu erda $\xi = z^2$) qiymat minimum bo'lsa, $V = V_r = V_{\max}$ bo'lar ekan. Bu tenglamadan bir marta hosila olib, uni nolga tenglasak, ya'ni $f'(\xi) = -2(1 - \xi - 2h^2) = 0$ bo'ladi, bundan $\xi = 1 - 2h^2$ bo'ladi va shu qiymatda, ya'ni $z_r = \sqrt{1 - 2h^2}$ bo'lganda V maksimum bo'lar ekan. Demak, z -ning 1-dan ozgina kichik qiymatlarida rezonans hodisasi ro'y berar ekan. Lekin amalda 1-ga nisbatan h^2 ancha kichkina bo'lganligi sababli $z_r = 1$ deb hisoblanadi. Agar h -ning qiymatlari o'rtacha bo'lganda, rezonans hodisasi uncha sezilmaydi.

Majburiy tebranishlarning rezonans holatidagi amplituda va fazaning surilishini amaliyotda $z = 1$ deb qabul qilib, (13.15) formuladan kelib chiqadigan taqribiy hisoblashlar orqali aniqlanadi, ya'ni

$$V_r = \lambda_0 / 2h, \quad \beta_r = \pi / 2 \quad (13.18)$$

Bundan ko'rinib turibdiki, h -ning kichkina qiymatlarida V_r -juda katta qiymatlarga ega bo'lishi mumkin ekan.

3. Majburiy tebranishlarning umumiy xossalari.

Yuqorida olingan natijalarga asosan majburiy tebranishlar erkin tebranishlarga nisbatan quyidagi alohida muhim xususiyatlarga ega ekanligi aniqlandi:

- 1) majburiy tebranishlarning amplitudasi boshlang'ich shartlarga bog'liq emas ekan;
- 2) majburiy tebranishlar muhit qarshiligi ta'sirida so'nmaydi;
- 3) majburiy tebranishlarning chastotasi, qo'zg'atuvchi kuchning chastotasiga teng bo'lib, tebranayotgan sistemaniing xarakteristikasiga bog'liq emas ekan (qo'zg'atuvchi kuch tebranuvchi sistemaga o'zining chastotasini «o'tkazar» ekan);
- 4) Agar, qarshilik kuchi kichkina bo'lsa va chastota $-r$ ning son qiymati, chastota $-k$ ning son qiymatiga yaqin bo'lsa, juda kichkina qo'zg'atuvchi (kichkina Q_0) kuch ham intensiv ravishda majburiy tebratadi;
- 5) Agar, qo'zg'atuvchi kuchning chastotasi $-r$ ning son qiymati, xususiy chastota $-k$ ning son qiymatidan katta farq qilsa, juda katta qo'zg'atuvchi (katta Q_0) kuch ta'sirida ham majburiy tebranishlarning amplitudasini hohlagan miqdorda kichkina qilish mumkin ekan.

14-MA'RUZA

Mavzu: Mexanik sistema dinamikasi.

Reja:

1. Ichki va tashqi kuchlar sistemasi. Sistemaning massasi, massalar markazi.
2. Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasi. Massa markazi harakatining o'zgarishi haqidagi teorema.
3. Inertsia momenti. O'qqa nisbatan inertsia momenti. Inertsia radiusi. 'arallel o'qlarga nisbatan inertsia momenti.

Tayanch so'z va iboralar:

Ichki kuchlar, tashqi kuchlar, massalar markazi, inertsia moment, inertsia radiusi.

14.1. Ichki va tashqi kuchlar sistemasi. Sistemaning massasi, massalar markazi.

Harakati (yoki muvozanat holati) tekshirilayotgan moddiy nuqtalar yoki jismlar sistemasini, **mexanik sistema** deb ataladi. Agar mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqta (jism)larning o'zaro ta'sirlari mavjud bo'lsa, u holda har bir nuqta (jism)ning holati, qolgan barcha nuqta (jism)larning holatiga uzviy bog'liq bo'ladi. Bunga klassik misol tarzida quyosh sistemasini olishimiz mumkin bo'lib, undagi barcha jismlar (Quyosh, 'lanetalar va kometalar) o'zaro tortilish kuchlari orqali bog'langanlar.

Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi $\vec{F}_k^a$ -aktiv kuchlar va $\vec{N}_k$ -reaktsiya kuchlarini, $\vec{F}_k^e$ -tashqi va $\vec{F}_k^i$ -ichki kuchlarga ajratib yuboramiz (bu erdagi e - exterior, ya'ni tashqi va i - interior, ya'ni ichki so'zlarning birinchi harflaridan iborat). Berilgan mexanik sistemaga kirmagan jismlarning sistema nuqtalariga bo'lgan ta'sir kuchlari, *tashqi* kuchlar deb ataladi. Sistemani tashkil etuvchi nuqta yoki jismlarning o'zaro ta'sir kuchlari *ichki* kuchlar deb ataladi. Bunday ajratishlik shartli bo'lib, mexanik sistemani tanlab olishimizga bog'liq bo'ladi. Masalan, agar Quyosh sistemasini tanlab olsak, u holda Er bilan Quyoshning o'zaro tortilish

kuchlari ichki kuchlar hisoblanadi; agar Er bilan Oyni bitta sistema deb qabul qilsak, Quyoshning tortilish kuchi endi tashqi kuch hisoblanadi.

Ichki kuchlar quyidagi xossalarga ega bo‘ladilar:

1. *Mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining geometrik yig‘indisi (bosh vektori) nolga teng bo‘ladi.* Dinamikaning uchinchi qonuniga asosan, ixtiyoriy olingan ikkita nuqtaning (26.1 shakl) o‘zaro ta’sir va aks ta’sir kuchlari, bir to‘g‘ri chiziqda yotib, son qiymatlari teng, yo‘nalishlari esa qarama-qarshi bo‘ladi, shu sababli $\vec{F}_{12}^i, \vec{F}_{21}^i$ -larning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘ladi. Xuddi shunday natijani ixtiyoriy olingan har bir ikkita nuqta uchun yozishimiz mumkin, demak

$$\sum \vec{F}_k^i = 0$$

2. *Mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining ixtiyoriy markazga yoki o‘qqa nisbatan olingan momentlarining yig‘indisi (bosh momenti) nolga teng bo‘ladi.* Haqiqatdan ham, 26.1 shakldan ko‘rinib turibdiki, agar ixtiyoriy olingan O nuqtaga nisbatan momentlarning yig‘indisi $m_O(\vec{F}_{12}^i) + m_O(\vec{F}_{21}^i) = 0$ bo‘ladi. Xuddi shunday natijani ixtiyoriy o‘qqa nisbatan olingan momentlar uchun ham isbot qilish mumkin, shu sababli mexanik sistema uchun,

$$\sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = 0 \quad \text{yoki} \quad \sum \vec{m}_X(\vec{F}_k^i) = 0$$

Mexanik sistemaning harakati, unga ta’sir etuvchi kuchlardan tashqari, sistemaning umumiy massasi va massalarning qanday tarqalganligiga ham bog‘liq bo‘ladi. *Sistemaning massasi* (M yoki m -harflari orqali ifodalanadi), *sistemani tashkil etuvchi nuqtalar yoki jismlarning massalarini arifmetik yig‘indisiga teng bo‘ladi:*

$$M = \sum m_k$$

Massalarning tarqalganligi, sistemaning har bir nuqtasining massasi m_k va shu massalarning o‘zaro qanday joylashgan ekanligiga, ya’ni ularning x_k, y_k, z_k koordinatalariga bog‘liq holda aniqlanadi. Lekin biz quyida ko‘rib o‘tadigan dinamikaga oid, aniqrog‘i qattiq jism dinamikasiga oid masalalarni echishda, har bir nuqtaning massasi m_k va ularning koordinatalari x_k, y_k, z_k orqali emas, balki ularni xarakterlovchi umumiy ifodalar orqali amalga oshiriladi.

M a s s a l a r m a r k a z i. Bir jinsli og‘irlik kuchi maydonida, ya’ni $g = \text{const}$ bo‘lganda, har bir zarrachaning og‘irligi uning massasiga ‘ro‘rtsional bo‘ladi. Shu sababli, sistema massalarining qanday tarqalganligini uning massa markazi orqali aniqlanadi. Statika qismidagi og‘irlik markazini aniqlashga oid bo‘lgan formulani, ularning massalari orqali ifodalanadigan ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun, o‘sha formuladagi $r_k = m_k g$ va $R = Mg$ lar orqali ifodalaymiz va tenglikni g -ga qisqartirib yuborsak,

$$x_C = \frac{1}{M} \sum m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum m_k z_k, \quad (14.1)$$

Koordinatasi (26.1) formula orqali aniqlanadigan S nuqtaning geometrik o‘rni, massalar markazi yoki mexanik sistemaning inertsia markazi deb ataladi.

Agar, massa markazini uning radius - vektori $\vec{r}_C$ orqali ifodalansa, u holda (26.1) formuladan $\vec{r}_C$ -ni aniqlash formulasini yozamiz

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \sum m_k \bar{r}_k \quad (14.1')$$

bu erdagi $\bar{r}_k$ - sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning radius-vektorlari.

14.2. Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasi. Massa markazi harakatining o'zgarishi haqidagi teorema.

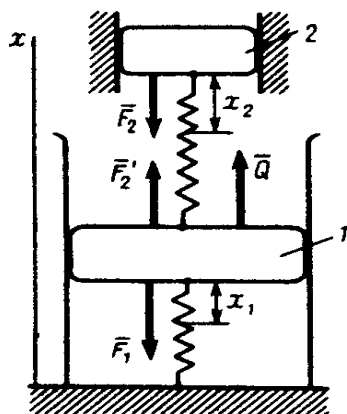
N-ta moddiy nuqtalardan tashkil to'gan, mexanik sistemani olib ko'ramiz va unda ixtiyoriy m_k -massali nuqtani ajratib olamiz. Shu moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi barcha tashqi (aktiv va reaksiya) kuchlarning teng ta'sir etuvchisini $\bar{F}_k^e$ - bilan, ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchisini esa $\bar{F}_k^i$ -bilan belgilaymiz. Agar moddiy nuqtaning shu kuchlar ta'siridagi tezlanishi $\bar{a}_k$ -bo'lsa, dinamikaning asosiy qonuniga ko'ra $m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$ bo'ladi. Xuddi shunday natijalarni har bir nuqta uchun yozishimiz mumkin. Demak, butun mexanik sistema uchun, shunday tenglamalarni yozib chiqsak,

$$\left. \begin{aligned} m_1 \bar{a}_1 &= \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i \\ m_2 \bar{a}_2 &= \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \bar{a}_n &= \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

(14.2) tenglamalar, *mexanik sistema harakatining vektor formadagi differentsial tenglamalari deb ataladi* (bu erdagi $\bar{a}_k = \bar{V}'_k = \bar{r}''_k$). Ushbu tenglamalarning o'ng tomonidagi kuchlar, umumiy holda vaqtga, sistema nuqtalarining koordinatalariga va ularning tezliklariga bog'liq ravishda o'zgaruvchi qiymatlar bo'lishlari mumkin.

Lekin, biz hozir sistemaning differentsial tenglamalari orqali, izlanayotgan natijaning bevosita effektiv echimini aniqlashga oid masalani ko'rib chiqamiz.

14.1-masala. Tebranishlarni dinamik so'ndirgichi. 'rujinaga mahkamlangan 1-yuk, x -o'qidagi 'roektsiyasi $Q_x = Q_0 \sin \tau$ bo'lgan qo'zg'atuvchi $\bar{Q}$ -kuch ta'sirida majburiy tebranma harakat qilmoqda.



80 -shakl

Ushbu tebranishlarni so'ndirish uchun 1 - yukka qattiqligi s_2 -bo'lgan 'rujina orqali massasi m_2 -bo'lgan yuk ulangan bo'lsa, shu 2-yukning va 2-'rujinaning xarakteristikalarini aniqlansin (80-shakl).

Yechish. Vertikal bo'yicha yuqoriga qaratib x - o'qini o'tkazamiz va yuklarning statik muvozanat holatidan boshlab, ularning x_1 va x_2 -koordinatalarini aniqlaymiz. U holda og'irlik kuchi, elastiklik kuchlari $F_{1st} = s_1 \lambda_{1st}$ va $F_{2st} = s_2 \lambda_{2st}$ - bilan muvozanatlashadi va ular harakat tenglamasi. Elastiklik kuchlarining hisobga olinadigan qismlari esa, 'rujinalarining statik muvozanat holatiga nisbatan uzayishlariga 'ro'rtsional bo'ladi. Uzayishlar tegishli ravishda

$\lambda_1=x_1$ va $\lambda_2=x_2$ bo‘ladi va 2-yukka $\bar{F}_2(F_{2x}=-c_2\lambda_2)$ -elastiklik kuchi, 1 -yukka esa $\bar{F}_1=\bar{F}_2$ elastiklik kuchi $\bar{F}_1(F_{1x}=-c_1\lambda_1)$ va qo‘zg‘atuvchi $\bar{Q}$ kuchlari ta’sir etmoqda. Natijada, yukning harakatini quyidagi differentsial tenglamasini tuzamiz,

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) + Q_0 \sin \tau t, \quad m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1).$$

1-yuk tebranishining so‘nishi uchun, $x_1=0$ bo‘lishi shart. U holda

$$s_2 x_2 + Q_0 \sin \tau t = 0 \quad \text{va} \quad m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 x_2.$$

Birinchi tenglamadan, $x_2 = -(Q_0/c_2) \sin \tau t$ va $\ddot{x}_2 = -r^2 (Q_0/c_2) \sin \tau t$ bo‘ladi. Bularni ikkinchi tenglamaga qo‘ysak, natijada

$$m_2 r^2 = s_2$$

ekanligini aniqlaymiz. Ushbu tenglik, majburiy tebranishlar ta’siridagi 1-yukning tebranishlarini so‘ndiruvchi shartdan iborat bo‘lib, m_2 yoki c_2 -qiymatlardan birini tanlab olinadi, ikkinchisi esa shu tenglama orqali aniqlanadi. Albatta, 2-yukning massasi m_2 -ni kichikroq olish ma’qulroq hisoblanadi, lekin berilgan r -ga bog‘liq holda s_2 -ning qiymati ham kichkina bo‘lib qoladi, bu esa o‘z o‘rnida 2-yukning amplitudasi Q_0/c_2 -ning kattalashib ketishiga, ya’ni salbiy (yomon) oqibatlarga olib kelishi mumkin.

14.3. Inertsia momenti. O‘qqa nisbatan inertsia momenti. Inertsia radiusi. ‘arallel o‘qlarga nisbatan inertsia momenti.

Ayrim hollarda, mexanik sistema (ayniqsa, qattiq jism) harakatining xarakterini aniqlash uchun, uning massalar markazining harakatini aniqlash lozim bo‘ladi. Ushbu qonuniyatni aniqlash uchun, (14.2) differentsial tenglamalar sistemasini o‘ng va cha’ tomonlarini hadma-had qo‘shamiz. Natijada

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i \quad (14.3)$$

Tenglamaning cha’ tarafiga o‘zgartirishlar kiritamiz. Radius-vektor uchun (14.1’) formuladan massa markazini aniqlaymiz

$$\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C$$

Tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo‘yicha ikki marta hosila olsak va yig‘indining hosilasi hosilalarning yig‘indisiga teng ekanligi sababli

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}$$

$$\text{yoki} \quad \sum m_k \bar{a}_k = M \bar{a}_s \quad (14.4)$$

bu erdagi $\bar{a}_s$ -massalar markazining tezlanishi. Ichki kuchlarning xossasiga asosan $\sum \bar{F}_k^i = 0$ bo‘ladi, natijada (14.4) e’tiborga olsak (14.3) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$M \bar{a}_s = \sum \bar{F}_k^e \quad (14.5)$$

(14.5) tenglama sistema massalarining markazini harakati haqidagi teoremani ifodalaydi: *sistemaning massasini uning massa markazini tezlanishiga ko‘aytmasi, sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng ekan.* (14.5) tenglamani moddiy nuqtaning harakatini differentsial tenglamasi

sistemaning massalari markazi, massasi sistemaning massasiga teng bo'lgan va sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlar ta'siridagi moddiy nuqta kabi harakatda bo'lar ekan.

(14.5) tenglikning ikkala tomonini koordinata o'qlariga 'roektsiyalasak

$$Mx''_s = \sum F_{kx}^e, \quad My''_s = \sum F_{ky}^e, \quad Mz''_s = \sum F_{kz}^e \quad (14.5')$$

Ushbu tenglamalar, *massa markazi harakatining differentsial tenglamasini* dekart koordinata o'qlaridagi 'roektsiyalaridan iborat.

1. Sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsin

$$\sum \bar{F}_k^e = 0$$

U holda (14.5) tenglamaga asosan $\bar{a}_s = 0$ yoki $\bar{v}_s = \text{const}$ bo'ladi.

Demak, *agar sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, sistema massa markazining tezligini son qiymati va yo'nalishi o'zgarmas bo'lar ekan, ya'ni tekis va to'g'ri chiziqli harakatda bo'lar ekan.* Xususiyl holda, agar jismning massalar markazi qo'zg'almas bo'lsa, qo'zg'almasligicha qolar ekan. Ko'rinib turgandek, ichki kuchlarning jismga ta'siri uning massalar markazini harakatini o'zgartira olmas ekan.

2. Jismga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning yig'indisi nolga teng bo'lmasdan ularning birorta koordinata o'qdagi (masalan, x o'qdagi) 'roektsiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lsin, ya'ni

$$\sum F_{kx}^e = 0 \text{ bo'lsin.}$$

U holda, (14.5') tenglamaning birinchisidan,

$$x''_s = 0 \text{ yoki } x'_s = v_{cx} = \text{const bo'ladi.}$$

Demak, *agar sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o'qdagi proektsiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, massalar markazining tezligini shu o'qdagi proektsiyasi o'zgarmas bo'lar ekan.* Xususiyl holda, masalan, boshlang'ich tezlikning x o'qdagi 'roektsiyasi $v_{cx0} = 0$ bo'lsa, keyingi hamma vaqtlarda ham u nolga teng bo'ladi, ya'ni massalar markazi x o'qi bo'ylab harakat qilmas ekan (ya'ni $x_s = \text{const}$).

Yuqorida olingan barcha natijalar, *massalar markazining harakatini saqlanish qonunini* ifodalaydi. Quyida shu qonunni amaldagi ko'rinishlarini ko'rsatuvchi ba'zi misollarni ko'rib o'tamiz.

Quyosh sistemasi massalari markazining harakati. Quyoshdan uzoqda joylashgan yulduzlarning tortilish kuchlarini e'tiborga olmasak, u holda Quyosh sistemasiga hech qanday tashqi kuchlar ta'sir etmaydi. Demak, quyosh sistemasining massalar markazi yulduzlarga nisbatan to'g'ri chiziqli, o'zgarmas tezlik bilan harakat qilar ekan.

15-MA'RUZA

Mavzu: Dinamikaning umumiy teoremlari.

Reja:

1. Moddiy va mexanik sistema uchun harakat miqdori, harakat miqdori momenti va kinetik energiyning o'zgarishi haqidagi teoremlar.
2. Harakat miqdori, harakat miqdori momenti va energiyning saqlanish qonunlari.

Tayanch so'z va iboralar:

Harakat miqdori, kuch impuls, harakat miqdori moment, kinetic energiya, energiyani saqlanishi.

15.1. Moddiy va mexanik sistema uchun harakat miqdori, harakat miqdori momenti va kinetik energiyning o'zgarishi haqidagi teoremlar.

Dinamikaning umumiy teoremlarining ahamiyati shundaki, ular orqali moddiy jismlarning harakatidagi tegishli dinamik xarakteristikalar orasidagi o'zaro bog'lanishlarni yaqqol ko'rsatib beradi, natijada amaliy injenerlik hisoblash ishlarida mexanik sistema harakatiga oid masalalarni echishda yangi imkoniyatlar yaratib beradi. Undan tashqari, har bir masalani echishda olib boriladigan ko' matematik amallarni takroriy ravishda qaytarilmasligini oldini oladi, chunki ushbu teoremlarni isbot qilinishida ular bir marta va batamom bajarilib qo'yiladi; shu sababli ko' masalalarni echish soddalashadi.

Quyida moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremlarini birma-bir ko'rib o'tamiz.

Eng asosiy dinamik xarakteristikalaridan biri, moddiy nuqtaning **harakat miqdori** hisoblanadi.

Moddiy nuqtaning harakat miqdori deb, nuqtaning massasini uning tezlik vektoriga ko' aytmasiga teng bo'lgan $m\vec{v}$ -vektor qiymatga aytiladi. Ushbu $m\vec{v}$ -vektorning yo'nalishi, nuqtaning tezlik vektori bilan ustma-ust yotadi, ya'ni traektoriyaga urinma holda harakat tomonga yo'naladi.

Kuch im'ulsi. Ma'lum vaqt ichida kuchning nuqtaga bo'lgan ta'sirini xarakterlash uchun ***kuch im'ulsi*** degan tushuncha kiritiladi. Avvaliga elementar im'uls degan tushuncha kiritamiz, ya'ni kuchning elementar dt -vaqt ichidagi im'ulsi. *Kuchning elementar im'ulsi deb, $\vec{F}$ -kuchni elementar dt - vaqtga ko' aytmasidan iborat bo'lgan $\vec{S}$ -vektor qiymatga aytiladi:*

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt \quad (15.1)$$

Elementar im'uls kuchning yo'nalishi bo'yicha yo'naladi. Ixtiyoriy $\vec{F}$ - kuchning tugal t_1 -vaqt ichidagi ta'sirining im'ulsi $\vec{S}$ -shu kuchning elementar vaqt oraliqlaridagi im'ulslarining integral yig'indisiga aytiladi, ya'ni

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt \quad (15.2)$$

Demak, ma'lum t_1 - vaqt oralig'ida kuchning im'ulsi, elementar im'ulslarning 0 - dan t_1 - vaqt oralig'idagi chegarada olingan aniq integralidan iborat qiymat ekan.

Xususiyl holda, agar $\vec{F}$ -kuchning moduli va yo'nalishi o'zgarmas ($\vec{F} = \text{const}$) bo'lsa, u holda $\vec{S} = \vec{F} \cdot t_1$ bo'ladi. Tegishlixa uning moduli $S = F \cdot t_1$ bo'ladi. Umumiy holda, kuch impulsining moduli uning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari orqali aniqlanadi:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt \quad (15.3)$$

Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarish teoremasi

Nuqtaning massasi o'zgarmas qiymat ekanligi va uning tezlanishi $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ bo'lganligi uchun, dinamikaning asosiy qonunini ifodalovchi tenglamani quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k \quad (15.4)$$

(15.4) tenglama bir vaqtning o'zida nuqta harakat miqdorining o'zgarishi teoremasini differentsial formasining ifodasidan iborat bo'ladi: *nuqtaning harakat miqdoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila, shu nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning vektor yig'indisiga teng³ bo'ladi.*

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \int_0^{t_1} \vec{F}_k dt$$

ekanligini aniqlaymiz.

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k \quad (15.5)$$

(15.5) tenglama nuqta harakat miqdorining o'zgarish teoremasini tugal formasi deb ataladi: *nuqtaning ma'lum vaqt oralig'i ichidagi harakat miqdorining o'zgarishi shu vaqt oralig'ida nuqtaga ta'sir etayotgan kuchlar im'ulslarining yig'indisiga teng ekan.*

$$\begin{aligned} m v_{1x} - m v_{0x} &= \sum S_{kx} \\ m v_{1y} - m v_{0y} &= \sum S_{ky} \\ m v_{1z} - m v_{0z} &= \sum S_{kz}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teorema (Momentlar teoremasi)

Shunday qilib, moddiy nuqta harakat miqdorining biror O markazga nisbatan momenti deb, $\vec{M}_O(m\vec{v})$ – dan iborat bo'lgan

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (15.7)$$

vektor qiymatga aytiladi. Bu erda $\vec{r}$ -O markazdan harakatlanayotgan nuqtaga o'tkazilgan radius-vektor.

$\vec{M}_O(m\vec{v})$ - vektor, $m\vec{v}$ va O markazdan o'tgan tekislikka 'er'endikulyar ravishda yo'naladi va $|\vec{M}_O(m\vec{v})| = mv \cdot h$ solishtirish maqsadida shaklda $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{Q}$ vektor ham tasvirlangan.

Nuqtaning harakat miqdori momentining O markazdan o'tuvchi birorta Oz-o'qqa nisbatan momenti, $\bar{m}_O(m\bar{v})$ - vektorning shu o'qqa bo'lgan 'roektsiyasidan iborat bo'ladi:

$$m_z(m\bar{v}) = |\bar{m}_O(m\bar{v})|_z = |\bar{m}_O(m\bar{v})| \cdot \cos\gamma \quad (15.8)$$

bu erda γ - Oz o'qi bilan $\bar{m}_O(m\bar{v})$ - vektor orasidagi burchak.

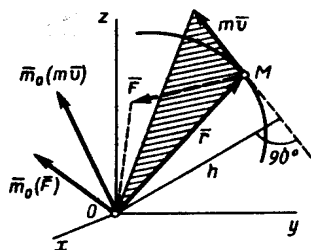
Momentlar teoremasi yordamida $\bar{m}_O(m\bar{v})$ -vektorning vaqtga bog'liq ravishda qanday o'zgarishini aniqlash mumkin bo'ladi. Buni isbot qilish uchun (15.7) tenglamadan vaqt bo'yicha bir marta hosila olamiz,

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}\right) + (\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a}).$$

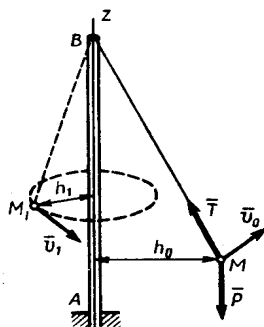
Lekin, $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$ bo'ladi, chunki bu ko'aytma bir to'g'ri chiziqda yotgan ikkita vektorning vektor ko'aytmasidan iborat. Hamda $m\bar{a} = \bar{F}$ ekanligini e'tiborga olgan holda, bir vaqtni o'zida bir nechta kuchlar ta'sir etsa $\bar{F} = \sum \bar{F}_k$ bo'ladi. Shu sababli

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt}[\bar{m}_O(m\bar{v})] = \bar{m}_O(\bar{F}) \quad (15.9)$$

Natijada biz ixtiyoriy markazga nisbatan momentlar teoremasini isbot qildik: *nuqtaning birorta qo'zg'almas markazga nisbatan harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila, shu moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning ushbu markazga nisbatan olingan momentiga teng ekan.*



81- shakl



82- shakl

(15.9) tenglikning ikkala tomonini qo'zg'almas O markazdan o'tuvchi birorta Oz-o'qqa 'roektsiyalasak va (15.8) tenglikni e'tiborga olsak,

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\bar{v})] = m_z(\bar{F}) \quad \text{bo'ladi.} \quad (15.10)$$

Ushbu tenglama o'qqa nisbatan momentlar

teoremasining differentsial formasini ifodalaydi.

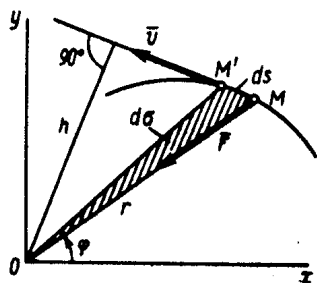
(15.9) tenglamadan aniqlandiki, agar $\bar{m}_O(\bar{F}) = 0$ bo'lsa, u holda $\bar{m}_O(m\bar{v}) = \text{const}$ bo'lar ekan, ya'ni: *agar nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning birorta markazga nisbatan momenti nolga teng bo'lsa, harakat miqdorining shu markazga nisbatan olingan momenti o'zgarmas bo'lar ekan.* Bunday natija nuqtaning markaziy kuch ta'siridagi harakatidan iborat amaliy muhim bo'lgan hollar uchun o'rinnidir.

Markaziy kuch ta'siridagi harakat. Yuzalar qonuni

Agar kuchning ta'sir chizig'i har doim O markazni kesib o'tsa, bunday kuch *markaziy* deb ataladi. Bunday kuchlarga 'lanetalarning Quyoshga tortilish kuchlari yoki Er yo'ldoshlarining Erga tortilish kuchi misol bo'ladi.

(15.9) tenglamadan foydalanib markaziy $\bar{F}$ kuch ta'siridagi M nuqtaning harakatini o'rganib chiqamiz (21.5 a shakl). Bunday kuchlarning O markazga nisbatan momenti nolga teng bo'lgani uchun, ya'ni $\bar{m}_O(\bar{F}) = 0$ bo'lgani uchun,

$\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const}$ bo'ladi. Hamda massa m -o'zgarmas bo'lgani uchun, $\vec{m}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} = \text{const}$ bo'ladi, ya'ni $\vec{m}_O(\vec{v})$ -vektor ham moduli, ham yo'nalishi bo'yicha o'zgarmas bo'lar ekan. Shuni eslatib o'tish lozimki $\vec{m}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}$ vektori, har doim $\vec{r}$ va $\vec{v}$ vektorlar joylashgan tekislikka 'er'endikulyar ravishda yo'nalgan bo'ladi.



82-shakl

Shu sababli, agar $\vec{r} \times \vec{v}$ vektorining yo'nalishi har doim o'zgarmas bo'lsa, M nuqtaning radius vektori $\vec{r} = \vec{OM}$ va uning tezligi $\vec{v}$ har doim faqat bir tekislikda yotishlari shart. Bundan xulosa qilib shuni aniqlaymizki, M nuqtaning traektoriyasi bir tekislikda joylashar ekan, ya'ni: *yassi egri chiziqdan iborat ekan*. Undan tashqari, o'z navbatida $|\vec{m}_O(\vec{v})| = v \cdot h = \text{const}$ bo'ladi.

Oxirgi natija bunday harakat haqida tasviriy geometrik tafsilot beradi. Yuqoridagilarga asosan $vh = h \cdot ds/dt$, va $h \cdot ds = 2d\sigma$, bu erda $d\sigma$ - OMM' elementar uchburchakning yuzasi, shu sababli $vh = 2d\sigma/dt$. Ushbu $d\sigma/dt$ qiymat, M nuqtaning harakatida OM radius - vektor tomonidan hosil bo'layotgan OMM' elementar uchburchakning yuzasini o'sishini ko'rsatadi va shu sababli uni nuqtaning *sektor tezligi* deb ataladi. Ushbu masalada uning qiymati o'zgarmas bo'ladi:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{m}_O(m\vec{v})| = \text{const} \quad (15.11)$$

Shunday qilib, *faqat markaziy kuch ta'sir etgan nuqta bir tekislikda yotuvchi egri chiziqli harakatda bo'lib, uning sektor tezligi o'zgarmas bo'lar ekan, ya'ni nuqtaning radius - vektori bir xil vaqt davomida, son qiymati teng bo'lgan yuzalar hosil qiladi* (yuzalar qonuni).

15.2. Harakat miqdori, harakat miqdori momenti va energiyning saqlanish qonunlari.

Jismga qo'yilgan kuch ta'sirida, uning ma'lum ko'chishidagi dinamik xarakteristikalarini belgilovchi asosiy qiymatlardan biri, bu kuchning bajargan ishi hisoblanadi va u nafaqat mexanikada, hatto, umuman texnikada katta ahamiyatga ega. Avvaliga elementar ish tushunchasini kiritamiz (*shuni eslatib o'tish lozimki, ishni faqat kuch bajaradi, kuch va siljish (harakat) yo'q joyda ish yo'q, ya'ni ish o'z-o'zidan bajarilmaydi*).

Moddiy M nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuchning, shu kuch ta'sirida bajarilgan *elementar ishi* deb

$$dA = F_{\tau} \cdot ds \quad (15.12)$$

iborat skalyar⁴ qiymatga aytiladi. Bu erda F_{τ} - M nuqtaga ta'sir etayotgan $\vec{F}$ kuchning nuqta harakatining traektoriyasiga urinma M_{τ} - o'qdagi 'roektsiyasi (yoki M nuqtaga ta'sir etayotgan $\vec{F}$ kuchning $\vec{v}$ -tezlik yo'nalishiga 'roektsiyasi); ds - M nuqtaning elementar ko'chishining moduli.

Yuqoridagi ish haqida keltirilgan ifodalar, nuqtaning tezligining modulini o'zgarishiga sababchi bo'lgan ishni bajargan kuch haqidagi tushunchalarga oid xolos. Agar $\vec{F}$ kuchni ikkita F_τ va F_n tashkil etuvchilarga ajratib yuborsak, tezlikning modulini faqat F_τ - orqaligina o'zgartirish mumkin ekanligini ko'ramiz, chunki $F_\tau = ma_\tau = m \cdot dv/dt$. (F_n tashkil etuvchisi esa tezlik $\vec{v}$ -ning yo'nalishini o'zgartiradi, yoki erkin bo'lmagan harakatda jismning bog'lanishiga ko'rsatgan bosim kuchini ifodalaydi).

$F_\tau = F \cdot \cos \alpha$ bo'lgani sababli, (bu erda α - $\vec{F}$ kuch bilan M_τ - o'q orasidagi burchak) elementar ish uchun (15.12) formula orqali boshqacha ifoda olamiz, ya'ni

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad (15.13)$$

Agar α - burchak o'tkir bo'lsa, ish musbat bo'ladi, $\alpha = 0$ bo'lsa elementar ish $dA = F \cdot ds$ -ga teng bo'ladi.

Agar α - burchak o'tmas bo'lsa, ish manfiy bo'ladi, $\alpha = 180^\circ$ bo'lsa elementar ish $dA = -F \cdot ds$ -ga teng bo'ladi.

Agar $\alpha = 90^\circ$ bo'lsa, ya'ni: *kuch harakat yo'nalishiga 'er'endikulyar bo'lsa, bajarilgan elementar ish nolga teng bo'ladi* ($dA = 0$).

Agar $ds = |d\vec{r}|$ -ekanligini e'tiborga olsak ($d\vec{F}$ -elementar ko'chish vektori) va vektor algebrasidagi ikkita vektorning skalyar ko'aytmasi haqidagi qoidaga asosan (15.13) formula quyidagicha ko'rinishga keladi⁵

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (15.14)$$

Demak, *elementar ish deb, kuch vektorini elementar ko'chish vektoriga bo'lgan skalyar ko'aytmasi aytiladi*.

Agar (15.14) formuladagi $\vec{F}$ va $\vec{r}$ vektorlarning skalyar ko'aytmagini ularning koordinata o'qlaridagi 'roektsiyalari, ya'ni: $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ orqali ifodalasak, *elementar ishning analitik ifodasini* aniqlaymiz,

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (15.15)$$

bu erda x, y, z -lar $\vec{F}$ -kuchning qoordinata o'qlaridagi o'rni.

Kuchning ixtiyoriy $M_0 M_1$ tugal ko'chishdagi (83-shakl) bajargan ishi tegishli elementar ishlarning integral yig'indilarining chegarasidan iborat bo'ladi,

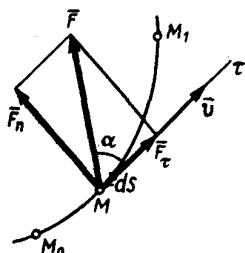
$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds \quad (15.16)$$

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad \text{bo'ladi.} \quad (15.16')$$

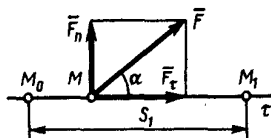
Demak, *ixtiyoriy $M_0 M_1$ ko'chishdagi kuchning bajargan ishi, shu harakat yo'nalishidagi elementar ishlarning integral yig'indisiga teng ekan*.

Agar F_τ -o'zgarmas bo'lsa ($F_\tau = \text{const}$), u holda $M_0 M_1$ egri chiziqni s_1 orqali belgilasak, (15.16) tenglamadagi integral, quyidagicha bo'ladi,

$$A_{(M_0 M_1)} = F_\tau \cdot s_1 \quad (15.17)$$



83-shakl



84-shakl

Bunday holat jismga ta'sir etayotgan kuch ham yo'nalishi, ham moduli o'zgarmas va nuqtaning harakati to'g'ri chiziqli bo'lganda o'rilibo'ladi (84-shakl). Ushbu holda $F_{\tau} = F \cos \alpha = \text{const}$ bo'ladi va

$$A_{(M_0 M_1)} = F_{\tau} \cdot s_1 \cdot \cos \alpha \quad (15.17')$$

16-MA'RUZA

Mavzu: Dalamber printsiplari.

Reja:

1. Nuqta va mexanik sistema uchun Dalamber 'rintsi'i.
2. Inertsia kuchlarining bosh vektori va bosh momenti.
3. Aylanayotgan jismning o'qiga ta'sir etayotgan dinamik reaksiyalar. Aylanayotgan jismlarni muvozanatlash.
4. Analitik mexanika. Bog'lanishlar klassifikatsiyasi.
5. Mumkin bo'lgan ko'chishlar. Erkinlik darajasi. Mumkin bo'lgan ko'chishlar printsiplari.

Tayanch so'z va iboralar:

Dalamber prinsipi, dinamik reaksiyalar, analitik mexanika, bog'lanish klassifikatsiyasi, mumkin bo'lgan ko'chishlar, erkinlik darajasi.

16.1 Nuqta va mexanik sistema uchun Dalamber printsiplari.

Avvalo, ushbu printsiplarning bitta moddiy nuqta uchun bo'lgan ifodasini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, massasi m ga teng bo'lgan moddiy nuqtaga teng ta'sir etuvchisi bo'lgan aktiv kuchlar sistemasi va bog'lanish (agar nuqta erkinmas bo'lsa) reaksiyasi ta'sir etsin. Moddiy nuqta shu kuchlarning ta'sirida inertsial sistemaga nisbatan -tezlanish bilan harakat qilsin.

Quyidagi kattalikni kiritamiz,

$$F = -ma \quad (16.1)$$

ushbu qiymatning o'lchov birligi kuchning o'lchov birligi bilan bir xil. Moduli nuqtaning massasini uning tezlanishiga ko'raytamasiga teng bo'lgan, yo'nalishi esa tezlanishga teskari bo'lgan vektor qiymatni nuqtaning *inertsia kuchi* deb ataladi.

Ushbu qoida, moddiy nuqta uchun Dalamber 'rintsi'ini ifodalab beradi. Ushbu 'rintsi', Nyutonning ikkinchi qonuniga ekvivalent va aksincha ekanligi ko'rinib turibdi.

Endi, n - ta moddiy nuqtalardan iborat bo'lgan mexanik sistemani olib ko'raylik. Shu moddiy nuqtalardan massasi m_k bo'lgan ixtiyoriy bittasini «ajratib», uning harakatini tekshirib ko'ramiz (bunda, nuqtani sistemaning ichidan tashqariga ajratib olish deb tushunmaslik lozim). Ushbu nuqtaga ta'sir etuvchi tashqi va ichki va kuchlar (bularning ichiga aktiv kuchlar va bog'lanishlar reaksiyalari ham kiradi) ta'sirida, inertsial hisob sistemasiga nisbatan qandaydir k tezlanish bilan harakat qiladi.

$$F + J + N = 0 \text{ bo'ladi.} \quad (16.2)$$

ya'ni, va ular muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi. Sistemaning har bir nuqtasi uchun, shunday mulohazalarni kiritib, sistema uchun Dalamber 'rintsi'ini ifodalovchi natijaga kelamiz: *harakatning qaysi davri bo'lishidan qat'iy nazar, sistemaning har bir nuqtasiga, unga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarga qo'shimcha ravishda inertsia kuchini qo'shsak, u holda hosil bo'ladigan kuchlar sistemi muvozanatlashuvchi sistema bo'ladi va unga statikaning barcha tenglamalarini qo'llash mumkin bo'ladi.*

Sistema uchun Dalamber 'rintsi'ining matematik ifodasi (16.2) tenglikdagi n ta vektor tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Shu sababli, Dalamber 'rintsi'idan, dinamikaning barcha umumiy teoremlarini keltirib chiqarish mumkin.

16.2. Inertsia kuchlarining bosh vektori va bosh momenti.

Mexanik sistemaning (xususiy holda, qattiq jismning) inertsia kuchlarining bosh vektori, sistema (jism)ning umumiy massasini massa markazining tezlanishiga ko'aytmisiga teng ekan va shu tezlanishning yo'nalishiga teskari tomonga yo'nalar ekan.

Agar, $\vec{a}_S$ tezlanishni urinma va normal tezlanishga ajratib yuborsak, u holda ham shu o'qlar bo'yicha tashkil etuvchilarga⁶ ajraladi

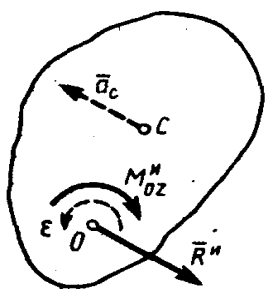
$$\vec{R}_\tau^n = -m \vec{a}_\tau \quad \vec{R}_n^n = -m \vec{a}_n \quad (16.3)$$

Mexanik sistemaning (xususiy holda, qattiq jismning) inertsia kuchlarining birorta O markazga yoki z o'qqa nisbatan olingan bosh momenti, sistema (jism)ning shu markazga yoki shu o'qqa nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan hosilasining manfiy ishorali qiymatiga teng bo'lar ekan.

Qattiq jismning inertsia kuchlarini hisoblash. Ixtiyoriy kuchlar sistemi uchun olingan natijaga ko'ra, qattiq jismlarning inertsia kuchlarini ham, ixtiyoriy olingan birorta O nuqtaga qo'yilgan $\vec{a}_O$ ga teng bo'lgan bitta kuch bilan va momenti $\vec{M}_O$ ga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin. Ayrim xususiy hollarni ko'rib o'tamiz.

1. **Ilgarilama harakat.** Ilgarilama harakatda, jismning barcha nuqtalarining tezlanishlari bir xil bo'lib, massa markazi S nuqtaning tezlanishiga teng ($\vec{a}_S = \vec{a}_C$) bo'ladi. U holda jismning barcha nuqtalarining inertsia kuchlari, og'irlik kuchlari $\vec{K} = m\vec{a}_S$ kabi, o'zaro 'arallel bo'lgan $\vec{K} = -m\vec{a}_C$ kuchlar sistemasini tashkil etadi. Shu sababli, ular ham og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi kabi, jismning og'irlik markazi S nuqtadan o'tadi.

Demak, *qattiq jismning ilgarilama harakatida inertsia kuchlari massa markazidan o'tuvchi teng ta'sir etuvchi bitta kuchga keltirilar ekan.*



16.1 shakl

2. Aylanma harakat. Faraz qilaylik, qattiq jism Oxu dan iborat moddiy simmetrik tekislikka ega bo'lsin, shu tekislikka 'er'endikulyar⁷ bo'lgan Oz o'q atrofida aylanma harakatda bo'lsin (16.1 shaklda, jismning shu Oxu tekislik bilan bo'lgan kesimi tasvirlangan). Agar, jismning barcha nuqtalarining inertsia kuchlari shu O nuqtaga keltirilsa, simmetriya xossasiga asosan teng ta'sir etuvchi inertsia kuchi ham, inertsia kuchlarining shu Oz o'qiga nisbatan momentlarining yig'indisidan iborat bo'lgan bosh juft ham shu Oxu moddiy simmetrik tekislikda joylashadilar va bosh juftning momenti ga teng bo'ladi. U holda, $K_z = J_{Oz}\omega$ bo'lgani uchun formulaning ikkinchisiga ko'ra

$$-J_{Oz} = -J_{Oz} \cdot \varepsilon, \quad (16.5)$$

bu erdagi ε - jismning burchakli tezlanishi.

Demak, aylanayotgan jismning inertsia kuchlarining sistemasi orqali aniqlanadigan va O nuqtaga qo'yiladigan (16.1 shakl) bitta kuchga, va momenti (16.5) formula orqali aniqlanadigan bitta juftga keltirilar ekan. Bu bosh juft ham shu Oxu moddiy simmetrik tekislikda joylashadi.

3. Jismning massa markazidan o'tuvchi o'q atrofidagi aylanma harakati. Agar 2 'unktda ko'rib o'tilgan jism massa markazidan o'tuvchi Sz o'q atrofida aylansa, u holda $\omega = 0$ bo'ladi, chunki $\varepsilon = 0$. Demak, bunday holda inertsia kuchlarining sistemasi momenti ga teng bo'lgan va simmetriya tekisligida joylashgan bitta juftga keltirilar ekan.

4. Tekislikka 'arallel harakat. Agar jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsa va u shu tekislikka 'arallel ravishda harakat qilsa, u holda jismning inertsia kuchlar sistemasi, shu simmetriya tekisligida joylashgan bo'lib, jismning massa markazi S nuqtaga qo'yilgan kuchga, va momenti $= -J_{Sz} \cdot \varepsilon$ ga teng bo'lib, shu simmetriya tekislikda joylashgan bitta juftga keltirilar ekan.

16.3. Aylanayotgan jismning o'qiga ta'sir etayotgan dinamik reaksiyalar. Aylanayotgan jismlarni muvozanatlash.

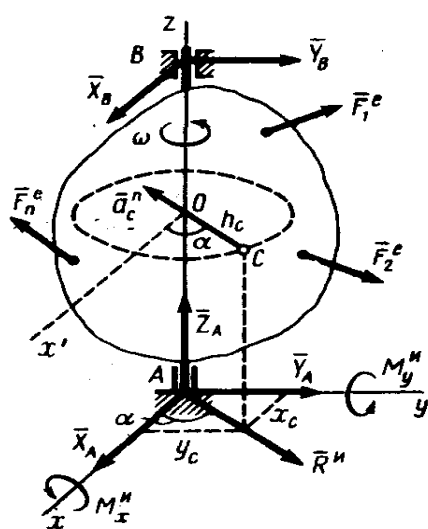
A va B podshipniklarga biriktirilgan va AB o'q atrofida ω burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan qattiq jismni olib ko'ramiz (16.2 shakl). Qattiq jism bilan birgalikda harakatlanuvchi Axyz o'qlarni o'tkazamiz, bunday o'qlarga nisbatan jismning massa markazi va uning inertsia momenti o'zgarmas qiymatlardan iborat bo'ladi. Jismga „...“ kuchlar sistemasi ta'sir etayotgan bo'lsin deb faraz qilaylik.

Ushbu kuchlarning bosh vektorini Axyz o'qlardagi proektsiyalarini, ($R_x = \sum$ va h.) bilan va o'sha o'qlarga nisbatan bosh momentning proektsiyalari,

Podshipniklarga ta'sir etuvchi $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B$ -lardan iborat bo'lgan dinamik reaksiyalarni, ya'ni jismning aylanishidan 'aydo bo'ladigan qo'shimcha reaksiyalarni aniqlash uchun, jismga ta'sir etuvchi reaksiya kuchi va tashqi kuchlar qatoriga aylanayotgan jismning inertsia kuchlari -ni A nuqtaga keltirib, so'ngra

qo'shamiz. U holda inertsia kuchlarining yig'indisi A nuqtaga qo'yilgan bitta kuchga va momenti $=\sum_k()$ bo'lgan juftdan iborat bo'ladi. Ushbu moment vektorining x va u o'qlaridagi 'roektsiyalari: $=\sum m_x()$, $=\sum m_y()$; va yana $=0$ bo'ladi, chunki. $\omega = \text{sonst}$.

Dalamber 'rintsi'iga asosan (16.3) formulalar orqali Axyz o'qlardagi 'roektsiyalardan iborat bo'lgan tenglamalarini tuzamiz, agar $AV=b$ deb hisoblasak



16.2 shakl.

$$X_A + X_B = 0$$

$$Y_A + Y_B = 0$$

$$Z_A = 0$$

$$Y_B b = 0; \quad X_B b = 0, \quad (16.5)$$

Inertsia kuchlarining bosh vektori, bu erdagi m -jismning massasi Agar $\omega = \text{sonst}$ bo'lsa, massa markazi faqat normal tezlanishga ega bo'ladi xolos, $a_{Cn} = \omega^2 h_C$, bu erdagi h_C - massa markazidan o'qqacha bo'lgan masofa.

Demak, vektor OS chiziq bilan bir xil yo'nalishda bo'ladi; $h_C \cos \alpha = x_C$, $h_C \sin \alpha = y_C$, x_C , y_C massa markazining koordinatalari ekanligini e'tiborga olib, vektorni koordinata o'qlarga 'roektsiyalasak:

$$R_x^n = m \omega^2 h_C \cos \alpha = m \omega^2 x_C;$$

$$R_y^n = m \omega^2 h_C \sin \alpha = m \omega^2 y_C;$$

$$R_z^n = 0.$$

M_x^n va M_y^n larni aniqlash uchun, jismning aylanish o'qidan h_k masofada joylashgan m_k massali zarrachasini tanlab olamiz; $\omega = \text{sonst}$ bo'lganligi uchun, uning faqat markazdan qochma inertsia kuchi $= m_k \omega^2 h_k$ bo'ladi xolos va uning koordinata o'qlaridagi 'roektsiyalari ning 'roektsiyasi kabi:

$$F_{kx}^n = m_k \omega^2 x_k, \quad F_{ky}^n = m_k \omega^2 y_k, \quad = 0.$$

U holda:

$$m_x = -z_k = -m_k \omega^2 y_k z_k;$$

$$m_y = z_k = m_k \omega^2 x_k z_k; \quad \text{bo'ladi.}$$

Har bir nuqta uchun shunday tenglamalarni tuzib chiqib, ularni hadma-had qo'shamiz va umumiy ko'aytmalarni qavsdan chiqarib, quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$F = -(\sum m_k y_k z_k) \omega^2 = -J_{yz} \omega^2;$$

$$F = -(\sum m_k x_k z_k) \omega^2 = -J_{xz} \omega^2 \quad (16.6)$$

bu erdagi J_{yz} va J_{xz} lar tegishli bo'lgan markazdan qochma inertsia momentlari⁸. Aniqlangan ushbu qiymatlarni (32.9) formulaga qo'ysak

$$X_A + X_B = -m x_C \omega^2; \quad Y_A + Y_B = -m y_C \omega^2$$

$$Z_A = -; \quad X_B b = -J_{xz} \omega^2; \quad Y_B b = -J_{yz} \omega^2; \quad (16.7)$$

(16.7) tenglamalar sistemasi z o'qig'almas o'qi atrofidagi o'zgarmas ω burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan *dinamik reaksiyalarni* ifodalaydi.

nisbatan qanday joylashganligini aniqlovchi x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} xarakteristikalariga ham bog'liq ekan.

Lekin, (16.7) tenglamalardan ko'rinib turibdiki, agar:

$$x_C=0, y_C=0, \quad (16.8)$$

$$J_{xz}=0, J_{yz}=0 \quad (16.9)$$

bo'lsa, jismning aylanishi A va V 'odshi'niklardagi reaksiyalarga bo'lgan (*qo'shimcha dinamik*) ta'siri nolga teng bo'lar ekan. (16.8) va (16.9) tengliklar, *aylanish o'qiga ko'rsatiladigan dinamik reaksiyalar, faqat statik reaksiyalardan iborat bo'lishligini* yoki *jismning z o'qi atrofidagi aylanma harakatni dinamik muvozanatlashganligini ifodalovchi shartlar* hisoblanadi.

Ushbu xulosa qattiq jismning notekis harakatida ham o'rinli bo'ladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan masala J_{xz} va J_{yz} qiymatlarning mexanik mazmunini tushunishga yordam beradi, aniqrog'i: *markazdan qochma J_{xz} va J_{yz} inertsia momentlari, jismning z o'qi atrofidagi aylanma harakatining dinamik muvozanatlashganlik darajasini xarakterlab beradi.*

Aylanayotgan jismlarni dinamik muvozanatlash masalasi juda muhim texnik masaladan iborat bo'lib, uning mohiyati bosh markaziy inertsia momentlarini aniqlashga borib taqalar ekan. Har qanday jism, hech bo'lmaganda uchta o'zaro 'er'endikulyar yo'nalgan bosh markaziy inertsia o'qiga ega bo'lishi mumkinligi ko'rsatib o'tilgan edi.

Endi esa, *jismning ichidan ixtiyoriy ravishda o'tkazilgan o'qqa, ikkita nuqtaviy massalarni qo'shish evaziga, uni bosh markaziy inertsia o'qiga aylantirish mumkin* ekanligi haqidagi amaliy, juda bir muhim qoidani ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, massasi m -dan iborat bo'lib, aylanayotgan jismning x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} xarakteristikalari bizga ma'lum bo'lsin va ular nolga teng bo'lmasinlar. Qiymatlari m_1 va m_2 bo'lgan ikkita nuqtaviy massalarni, jismning (x_1, y_1, z_1) va (x_2, y_2, z_2) nuqtalariga mahkamlab joylashtiraylik.

$$mx_C+m_1x_1+m_2x_2=0, \quad my_C+m_1y_1+m_2y_2=0$$

$$J_{xz}+m_1x_1z_1+m_2x_2z_2=0, \quad J_{yz}+m_1y_1z_1+m_2y_2z_2=0 \quad (16.10)$$

tenglamalar qanoatlansa, ya'ni z o'qi bosh markaziy inertsia o'qi bo'lib qoladi; m_1 va m_2 massalarni va ularning koordinatalarini asoslanib tegishli tanlab olinsa, oldimizga qo'yilgan masala bajariladi..

Aylanuvchi jismlarni muvozanatlashtirilish usuli, texnika sohasidagi tirsakli vallar, krivoshi'lar, s'arniklar va b., -larni dinamik muvozanatlashda keng qo'llaniladi. Hamda, eng oxirgi natijaviy muvozanatlash ishlari maxsus stendlar yordamida amalga oshiriladi.

16.4. Analitik mexanika. Bog'lanishlar klassifikatsiyasi.

Bog'lanishlar deb, sistemaga ta'sir etayotgan kuchlarning qanday bo'lishligidan qat'iy nazar, mexanik sistema nuqtalarining holatlariga va ularning tezliklariga qo'yiladigan chegaralanishga aytiladi. Bunday bog'lanishlarning qanday klassifikatsiya qilinishini ko'rib o'tamiz.

Vaqtga bog'liq bo'lmagan bog'lanishlarni, *statsionar* bog'lanishlar deb ataladi vaqtga bog'liq holda o'zgaruvchi bog'lanishlarni *nostatsionar* bog'lanishlar deb ataladi.

Sistema nuqtalarining holatlariga (koordinatalariga) chegaralar qo'yuvchi bog'lanishlarni, *geometrik* bog'lanishlar deb ataladi. Lekin, ular agar nuqtalarning tezliklariga (nuqtalarning koordinatalaridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilalariga) ham chegara qo'yadigan bo'lsalar *-kinematik* yoki *differentsial* bog'lanishlar deb ataladi.

Agar, differentsial bog'lanishni geometrik bog'lanish ko'rinishga keltirish mumkin bo'lsa, ya'ni tezliklarga qo'yilgan chegaralarni, ularning koordinatalariga qo'yilgan chegaralar ko'rinishiga keltirish mumkin bo'lsa, bunday bog'lanishlarni *integrallanuvchi*, aks holda *integrallanmaydigan* bog'lanishlar deb ataladi.

Bog'lanishlarning ko'rinishlariga qarab, mexanik sistemalar ham *golonom* (golonomli bog'lanishlarga ega) va *nogolonom* (nogolonom bog'lanishlarga ega) bo'lgan sistemalar bo'linadi.

Va nihoyat, *ushlab tura oluvchi* (bunday chegaralar sistemaning ixtiyoriy holatida ham ta'sir etadigan) va *ushlab tura ololmaydigan*, ya'ni yuqoridagi xossaga ega bo'lmagan (sistema bunday bog'lanishlardan «ozod bo'la olishi» mumkin bo'lgan) bog'lanishlarga ajraladilar. Yuqoridagilarga oid misollarni ko'rib o'tamiz.

1. Statika qismida ko'rib o'tilgan barcha turdagi bog'lanishlar geometrik (golonomli) va statsionar hisoblanadilar. 23.13, a shaklda tasvirlangan, harakatlanayotgan liftning kabinasi ichdagi yuk uchun, lift nostatsionar geometrik bog'lanish hisoblanadi (yuk joylashgan lift vaqt mobaynida o'zining fazodagi holatini o'zgartirib boradi), chunki yukning Oxyz o'qlarga nisbatan holati vaqtga bog'liq ravishda o'zgarib bormoqda.

2. Sir'anmasdan dumalayotgan tsilindrning holati (31.8 shakl), uning markazi S nuqtaning x_C - koordinatasi va burilish burchagi φ - orqali aniqlanadi. Sof dumalashda $v_C = R\omega$ yoki $\dot{\varphi} = \omega$ shart bajarilishi lozim. Bu differentsial bog'lanish hisoblanadi, lekin qo'yilgan shart integrallanadi va $x_C = R\varphi$ ko'rinishga keltiriladi, ya'ni koordinatalarga bog'liq holga keltiriladi. Shu sababli, bu golonom bog'lanish hisoblanadi.

Albatta bunday bog'lanishni to'g'ridan-to'g'ri $x_C = R\varphi$ ko'rinishda yozish ham mumkin edi. Lekin, u holda ushbu shartdan vaqt bo'yicha bir marta hosila olib, yuqoridagi shartni kinematik hisoblash mumkin.

3. Yuqoridagi tsilindr o'rniga, g'adir-budur yuza ustida sof dumalayotgan sharni olib ko'raylik. U holda, sharning yuza bilan tutashgan nuqtasi nolga teng ekanligini (masalan, sharning markazi to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanmasa) va sharning holatini faqat uning koordinatalari orqali ifodalangan ko'rinishdagi shartni (munosabatni) yoza olmaymiz. Bunday bog'lanishlar, nogolonom bog'lanishlar turiga misol bo'ladi. Bunday bog'lanishlar qatoriga harakati boshqariluvchi jismlarning harakati ham misol bo'ladi. Masalan, agar nuqta (raketa) ning harakatida ixtiyoriy vaqt uchun uning tezlik yo'nalishi, harakatlanuvchi boshqa biror nuqta (dushman samolyoti)ning holatiga yo'nalgan bo'lishi shart bo'lsa, u

holda bunday shartni faqat nuqtaning koordinatalari orqali bog'langan tenglamalar orqali ifodalab bo'lmaydi.

16.5. Mumkin bo'lgan ko'chishlar. Erkinlik darajasi. Mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipi.

Yuqoridagi masalalarda ko'rib o'tganimizdek, mexanik bog'lanishlarning samarasini, faqat ularning ko'rsatgan reaksiyalarini tenglamaga kiritish orqaligina aniqlash mumkin edi. Endi esa mexanik sistemalarga qo'yilgan bog'lanishlarni hisobga olgan holda, ular tomonidan qo'yiladigan cheklanishlarni hisobga olgan holda, mexanik sistemalarning harakatlari orqali ham aniqlash mumkin ekanligini ko'rib o'tamiz. Bunday yo'l bilan reaksiyalari noma'lum bo'lgan mexanik sistemalarning muvozanat yoki harakat tenglamalarini to'g'ridan -to'g'ri tuzish mumkin ekanligini ko'rib o'tamiz, natijada mexanika masalalarini echish ancha soddalashadi.

Yuqorida aytib o'tilgan *mumkin bo'lgan (virtual) ko'chishlar*, quyidagi shartlarni bajarishi lozim: 1) ular o'ta kichkina bo'lishlari kerak, aks holda sistemaning katta ko'chishlarida u mutloq boshqa sistemaga aylanib qolishi mumkin va bog'lanishlarning samarasi o'zgarib qoladi; 2) shu elementar ko'chishda, sistemaga qo'yilgan barcha bog'lanishlar saqlanib qolinishi kerak, aks holda sistema boshqa turdagi bog'lanishlar ta'siriga kirib qolishi mumkin.

Masalan, (33.4§ dagi) 33.3 shakldagi krivoshi'-shatunli mexanizmni olib ko'raylik, agar sistemani shaklda ko'rsatilgan holatdan $\varphi=0$ holatga ko'chirsak, bunday ko'chishni mumkin bo'lgan ko'chish deb hisoblash mumkin emas. Chunki, bog'lanishlarning $\varphi=0$ bo'lgan holatdagi samarasi butunlay boshqacha bo'ladi va shu xususiy holni olib ko'radigan bo'lsak, $\bar{P}$ kuch va momenti ga teng bo'lgan juft ta'siridagi mexanizmning muvozanat tenglamasi ham mutloq boshqacha bo'ladi. Shunga o'xshash yana bir holat, ya'ni shatunning V nuqtasini, AV shatun bo'ylab hatto elementar ko'chishi ham aslo mumkin emas; bunday bo'lishi uchun mexanizm umuman boshqa mexanizmga aylanib qoladi, ya'ni V 'olzunning o'rniga tebranuvchi mufta qo'yilgan, mutloq boshqa turdagi mexanizmga aylanib qoladi.

Shunday qilib, *mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishi deb, sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar tomonidan ko'rsatiladigan chegaralanishlar saqlangan holda, uning mazkur holatidan bog'lanishlarning ta'siri o'zgarmaydigan ixtiyoriy bo'lgan boshqa hamma holatlardagi elementar ko'chishlar mumkin bo'lgan ko'chishlar deb ataladi*. Agar ushlab tura olmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, bunday elementar ko'chishda, bog'lanish saqlanib qolingan bo'lishligi zarur (sistemaning nuqtalari «erkin» holatga o'tib olmasligi lozim). irorta bilan ustma-ust tusha olmaydi.

Umuman olganda, har qanday mexanik sistema, bir nechta mumkin bo'lgan ko'chishlarga ega bo'lishligi mumkin. Lekin biz ko'rib o'tadigan ixtiyoriy sistemalar uchun, ma'lum miqdordagi mumkin bo'lgan ko'chishlarni tanlab olish mumkin bo'lib, qolgan barcha mumkin bo'lgan ko'chishlar ular orqali ifodalanadi. Masalan, birorta tekislik (yuza)ning ustida joylashgan nuqtaning mumkin bo'lgan ixtiyoriy ko'chishini, o'zaro 'er'endikulyar bo'lgan ikkita ₁ va ₂ elementar

ko'chishlar orqali ifodalash mumkin bo'ladi, ya'ni $=a_1+b_2$, bu erdagi a va b - ixtiyoriy bo'lgan musbat yoki manfiy sonlar.

Mexanik sistemaning o'zaro bog'liq bo'lmagan mumkin bo'lgan ko'chishlarining soni, uning erkinlik darajasiga teng bo'ladi.

Shu sababli, tekislikda joylashgan nuqta ikkita erkinlik darajasiga ega bo'ladi; uning tekislik ustidagi ixtiyoriy holatini bir vaqtning o'zida ikkita o'zaro bog'liq bo'lmagan (har bir koordinata ikkinchisiga bog'liq bo'lmagan) koordinatalar orqali aniqlash mumkin bo'ladi, masalan, x va u koordinatalar orqali. Erkin moddiy nuqtaning erkinlik darajasi uchta (o'zaro 'er'endikulyar bo'lgan uchta o'qlar bo'yicha harakatlanishi mumkin) bo'ladi; nuqtaning holati bir vaqtning o'zidagi o'zaro bog'liq bo'lmagan x,y,z koordinatalar orqali aniqlanadi.

Ushbu natija, umumiy hisoblanadi, ya'ni *geometrik bog'lanishlarga ega bo'lgan mexanik sistemaning holatini aniqlovchi, o'zaro bog'liq bo'lmagan koordinatalar soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng bo'ladi.* Shu sababli, bunday sistemalarning erkinlik darajasini, mumkin bo'lgan ko'chishlar soni orqali yoki o'zaro bog'liq bo'lmagan koordinatalar orqali aniqlash mumkin ekan

Mexanik sistemaning umumiy muvozanat shartlarini belgilovchi mexanikaning yana bir muhim 'rintsi'i bilan tanishib chiqamiz. Muvozanat holat deb, sistemaning shunday holatiga aytiladiki, unda sistemaga qo'yilgan barcha kuchlar ta'siridagi sistemaning hamma nuqtalari («absolyut» sistema deb hisoblanuvchi) inertsial sistemaga nisbatan tinch holatda bo'ladi. Hamda shu sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar statsionar deb hisoblanadi, shu sababli keyinchalik bu haqda alohida yana aytib o'tilmaydi.

Moddiy nuqtaning harakatida, uning haqiqiy elementar ko'chishlaridan birortasi bilan ustma-ust tushadigan mumkin bo'lgan ko'chishda, shu nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning bajarishi mumkin bo'lgan elementar ishni, *mumkin bo'lgan ish* deb ataladi. Sistemaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishlarini $\delta A^a(\delta A^a.)$ va reaksiya kuchlari -ning bajargan ishlarini $\delta A^r(\delta A^r=.)$ orqali belgilaymiz.

Endi ilgari biz foydalangan ideal bog'lanishlar tushunchasining umumiy ifodasini kiritamiz: *ideal bog'lanishlar deb, shunday bog'lanishlarga aytiladiki, sistemaning mumkin bo'lgan ixtiyoriy ko'chishlarida, ularning bajargan elementar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni*

$$\sum \delta A_k = 0 \quad (16.11)$$

Sistemaning muvozanatini zaruriy sharti shundan iborat bo'ladiki, agar ideal bog'lanishlarga ega bo'lgan mexanik sistema, unga qo'yilgan kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsa, sistemaning mumkin bo'lgan ixtiyoriy ko'chishida

$$\sum \delta A^a = 0 \quad (16.12)$$

yoki

$$\sum_k \delta s_k \cos \alpha_k = 0 \quad (16.13)$$

bo'lishi shart, bu erdagi α_k -k nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chish vektori bilan kuch vektori orasidagi burchak., ya'ni

$$\sum \delta A^a + \sum \delta A^k = 0.$$

Lekin bog'lanishlar ideal bo'lganliklari va k sistema nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishlaridan iborat ekanligi sababli ikkinchi yig'indi nolga teng bo'ladi.

Yuqorida isbot qilinganlar asosida quyidagi mumkin bo'lgan ko'chish 'rintsi'i kelib chiqadi: *ideal bog'lanishlarga ega bo'lgan mexanik sistema muvozanatda bo'lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistemaning mumkin bo'lgan ixtiyoriy ko'chishida, unga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak.* Muvozanatning matematik sharti (33.2) tenglikning analitik ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

(33.3)

Mumkin bo'lgan ko'chish 'rintsi'i mexanik sistemaning umumiy muvozanat shartini belgilab beradi. Natijada, sistema qism (jism)larining muvozanatlik shartlarini alohida-alohida ko'rib chiqishlikning hojati qolmaydi va ideal bog'lanishlarga ega bo'lgan sistemalarning noma'lum reaksiyalari tenglamadan chiqib ketadi.

17-MA'RUZA

Mavzu: Dinamikaning umumiy tenglamasi.

Reja:

1. Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar.
2. Umumlashgan kuchlar, mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi muvozanatlik sharti.
3. Lagranjning tenglamasi.

Tayanch so'z va iboralar:

Umumlashgan koordinatalar, umumlashgan tezliklar, umumlashgan kuchlar, lagranj tenglamalari.

17.1. Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar

Ideal bog'lanishlar qo'yilgan moddiy nuqtalar sistemasini olib ko'raylik. Agar, sistemaning har bir nuqtasiga ularga ta'sir etayotgan aktiv kuchlar va bog'lanishlarning reaksiya k kuchlaridan tashqari inertsia, ya'ni $=-m_{kk}$ kuchlarini ham qo'shsak, u holda hosil bo'lgan kuchlar sistemasi Dalamber 'rintsi'iga asosan muvozanatda bo'ladi. Shu sababli, ushbu kuchlar sistemasiga mumkin bo'lgan ko'chishlar printsiptini qo'llab,

$$\sum \delta + \sum \delta + \sum \delta = 0$$

Lekin, bunday sistema uchun mumkin bo'lgan ko'chishlar 'rintsi'i

$$\sum \delta + \sum \delta = 0. \quad (17.1)$$

Olingan natijadan quyidagi Dalamber - Lagranj 'rintsi'i kelib chiqadi: *ideal bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning harakatida, ixtiyoriy olingan vaqt uchun unga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning va inertsia kuchlarining mumkin bo'lgan ko'chishlaridagi bajargan ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lar ekan.*

Ushbu 'rintsi'ni ifodalovchi (17.1) tenglamani dinamikaning umumiy tenglamasi deb ataladi. Ushbu (17.1) tenglamaning analitik ifodasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum [(F_{kx}^a + F_{kx}^n) \delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^n) \delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^n) \delta z_k] = 0 \quad (17.2)$$

(17.1) yoki (17.2) tenglamalar yordamida, mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasini tuzish mumkin bo'ladi.

Agar, mexanik sistema bir nechta qattiq jismlardan tashkil to'gan bo'lsa, har bir jismga ta'sir etayotgan aktiv kuchlar qatoriga ixtiyoriy markazga qo'yilgan inertsia kuchlarining bosh vektoriga teng bo'lgan kuchni va momenti inertsia kuchlarining shu nuqtaga nisbatan olingan momentlarining yig'indisiga teng bo'lgan juftni (yoki ulardan bittasini) qo'shish kerak, undan so'ng mumkin bo'lgan ko'chishlar 'rintsi'ni qo'llash lozim bo'ladi.

Ixtiyoriy o'lchovli, o'zaro bog'liq bo'lmagan va mexanik sistemaning holatini bir qiymatli ifodalovchi 'arametrlarni *umumlashgan koordinatalar* deb ataladi va ularning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo'ladi. Umumlashgan koordinatalarni lotincha q bilan belgilash qabul qilingan. U holda, erkinlik darajasi s -ga teng bo'lgan mexanik sistemaning holati, s -ta umumlashgan koordinatalar orqali aniqlanadi

$$q_1, q_2, \dots, q_s. \quad (17.3)$$

Umumlashgan koordinatalar erkin (o'zaro bog'lanmagan) bo'lganliklari sababli, ularning elementar orttirmalari

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s. \quad (17.4)$$

ham erkin bo'ladi. Hamda (17.4) dagi *har bir qiymat, boshqalariga bog'liq bo'lmagan holda, sistemaga mumkin bo'lgan ko'chish beradi.*

Har qanday bir koordinatalar sistemasidan boshqasiga o'tilgandagi kabi, mexanik sistemaning ixtiyoriy nuqtasining dekart koordinatalari x_k, y_k, z_k -ni ham, umumlashgan koordinatalar orqali ifodalab olamiz: $x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$ va h. Shu sababli, k nuqtaning radius-vektori uchun $\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$ ham tegishli¹⁰

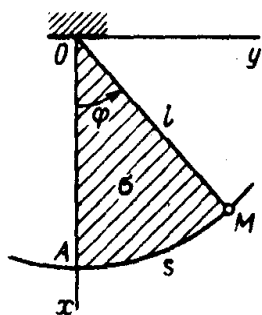
$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (17.5)$$

Agar, umumlashgan koordinata sifatida φ burchak tanlab olinsa, u holda burchakka $\delta\varphi$ orttirma berib, uning mumkin bo'lgan ko'chishini aniqlashimiz mumkin. M nuqtaning x va y Dekart koordinatalarini φ orqali $x = l \cos \varphi$, $y = l \sin \varphi$ ko'rinishda ifodalab olish mumkin, bu erdagi $l = OM$. U holda, (17.5) tenglikka binoan, $\mathbf{q} = (\varphi)$ bo'ladi.

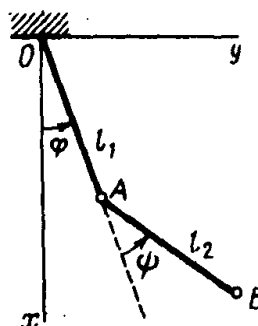
Sistemaning harakatida, uning umumlashgan koordinatalari vaqt mobaynida muntazam o'zgarib turadi va bunday harakatning qonuni quyidagi tenglama orqali aniqlanadi:

$$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), \dots, q_s = f_s(t) \quad (17.6)$$

(17.6) tenglamalar, *sistema harakatining umumlashgan koordinatalardagi kinematik tenglamalari* deb ataladi.



17.1 shakl



17.2 shakl

Umumlashgan koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila, sistemaning *umumlashgan tezliklari* deb ataladi. Umumlashgan tezliklarni

$1, 2, \dots, s$
 orqali belgilash qabul qilingan, bu erdagi $v_i = dq_i/dt$ va h.. Umumlashgan tezlikning o'lchov birligi tegishli umumlashgan koordinatalarning o'lchov birligiga bog'liq bo'ladi. Agar, q_i ning o'lchovi uzunlik bo'lsa, v_i ning o'lchovi chiziqli tezlik bo'ladi; q_i ning o'lchovi burchak bo'lsa, v_i ning o'lchovi burchakli tezlik bo'ladi; q_i ning o'lchovi yuza bo'lsa, v_i ning o'lchovi sektor tezlik bo'ladi va h.. Ko'rinib turganidek, umumlashgan tezliklar tushunchasi, ilgari biz kinematika qismida tezlik to'g'risida ko'rib o'tgan barcha tushunchalarni qamrab olar ekan.

17.2. Umumlashgan kuchlar, mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi muvozanatlik sharti.

Kuchlar ta'siridagi n -ta moddiy nuqtalardan iborat bo'lgan mexanik sistemani olib ko'raylik. Sistemaning erkinlik darajasi s -ga teng bo'lsin va uning holati (17.3) ko'rinishdagi umumlashgan koordinatalar orqali aniqlansin. Sistemaga mumkin bo'lgan shunday ko'chish beraylikki, unda faqat q_1 koordinatagina δq_1 orttirma olsin, qolgan barcha δq_i umumlashgan koordinatalar o'zgarmasdan qolsin. U holda, sistemaning har bir nuqtasining radius-vektorlari lar ham tegishlicha $(\delta r)_i$ elementar orttirma oladi. (17.5) formulaga asosan $r = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ bo'lganligi uchun va hozirgi ko'chishda faqatgina q_1 o'zgarayotganligi (qolganlari o'zgarmasligicha qoladilar) uchun, $(\delta r)_i$ ni xususiy differentsial olish kabi aniqlanadi, shu sababli

$$(\delta r)_i = \delta r_{i1}.$$

Natijada:

$$\delta A_1 = (\delta q_1)_1 + (\delta q_2)_1 + \dots + (\delta q_n)_1 = \delta q_1 + \delta q_1 + \dots + \delta q_1.$$

Umumiy ko'paytma bo'lgan δq_1 ni qavsdan tashqariga chiqarsak,

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1, \quad (17.7)$$

bu yerdagi

$$Q_1 = \sum_k F_{k1}. \quad (17.8)$$

kuchning bajargan ishi $\delta A = F_{\tau} \delta s$ tenglik orqali aniqlangani kabi, ushbu ifodani (17.7) bilan solishtirsak, Q_1 qiymat, umumlashgan koordinata q_1 ga tegishli bo'lgan *umumlashgan kuch* deb ataladi.

Sistemaga ikkinchi q_2 umumlashgan koordinataga mumkin bo'lgan ko'chish berish orqali, sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning shu ko'chishdagi bajargan ishlarini aniqlaymiz,

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2, \quad (17.9)$$

bu yerdagi

$$Q_2 = \sum_k F_{k2}. \quad (17.10)$$

Q_2 qiymat umumlashgan koordinata q_2 ga tegishli bo'lgan *umumlashgan kuch* deb ataladi va h..

Agar sistemaning barcha umumlashgan koordinatalariga, tegishlicha mumkin bo'lgan ko'chishlar berib chiqib, sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarning har bir

ko'chishdagi elementar bajargan ishlarini yig'ib chiqsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (17.11)$$

(17.11) formula *sistemaga ta'sir etayotgan barcha kuchlarning bajargan to'liq elementar ishlarining umumlashgan koordinatalardagi ifodasi* hisoblanadi. Undan ko'rinib turibdiki, *umumlashgan kuchlar, bu sistemaga ta'sir etayotgan barcha kuchlarning bajargan to'liq elementar ishlarining ifodasidagi umumlashgan koordinatalarning orttirmalari oldidagi koeffitsientdan iborat bo'lgan qiymat ekan.*

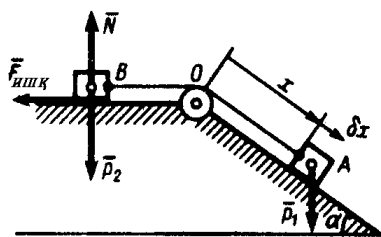
Agar sistemaga faqat ideal bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, u holda mumkin bo'lgan ko'chishlardagi barcha ishlarni faqat aktiv kuchlarga bajaradilar xolos, shu sababli $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ qiymatlarni sistemaning *umumlashgan aktiv kuchlar* deb ataladi.

Umumlashgan kuchlarning o'lchov birliklari tegishli umumlashgan koordinatalarning o'lchov birliklariga bog'liq holda bo'ladi. Ish $Q \cdot q$ ko'aytmadan iborat bo'lgani uchun, u holda Qq ning o'lchov birligi ishning o'lchov birligidan iborat bo'ladi, shu sababli, *umumlashgan kuchning o'lchov birligi, ishning o'lchov birligini tegishli bo'lgan umumlashgan koordinataning o'lchov birligiga bo'lgan nisbatiga teng bo'ladi.* Bundan ko'rinib turibdiki, agar q -masofa orqali o'lchansa, u holda Q ning o'lchov birligi kuchning o'lchov birligidan iborat bo'ladi (SI sistemasida nyutonlarda o'lchanadi); agar q -burchak (o'lchovsiz) orqali o'lchansa, u holda Q ning o'lchov birligi $N \cdot m$, ya'ni momentning o'lchov birligidan iborat bo'ladi; agar q -hajm (masalan, 'orshenning tsilindr ichidagi holatini, 'orshenning orqasidagi hajm orqali o'lchanadi), orqali o'lchansa, u holda Q ning o'lchov birligi N/m^3 , ya'ni bosimning o'lchov birligidan iborat bo'ladi va h.. Ko'rinib turganidek, umumlashgan tezlikning analogi sifatida, umumlashgan kuchlar tushunchasi, moddiy jismlarning o'zaro ta'sirlaridan iborat bo'lgan barcha o'lchovlarni qamrab olar ekan (kuch, kuchning momenti, bosim).

Umumlashgan kuchlarni hisoblash. Ularni (17.7) va (17.9) formulalar yordamida hisoblanadi, ya'ni mumkin bo'lgan elementar ishni aniqlashdan boshlanadi. Avvalo sistemaning erkinlik darajasi aniqlanadi, umumlashgan koordinatalar tanlab olinadi va sistemaga qo'yilgan barcha aktiv kuchlar va ishqalanish (agar ular ish bajarasalar) kuchlar shaklda tasvirlanadi.

So'ngra Q_1 ni aniqlash uchun sistemaga shunday ko'chish beramizki, unda faqat q_1 koordinata o'zgaradi xolos, uning musbat ishorali orttirmasini aniqlab, sistemaga qo'yilgan barcha kuchlarning shu ko'chishda bajargan elementar ishlarini hisoblab chiqamiz va ularni (17.7) ko'rinishda ifodalaymiz. U holda, δq_1 ning oldida turgan koeffitsient biz axtarayotgan Q_1 dan iborat bo'ladi. Xuddi shunday amallarni bajarish orqali $Q_2, Q_3, \dots$ lar aniqlanadi.

17.1 Misol. 17.3-shaklda tasvirlangan sistema uchun, umumlashgan kuchning ifodasi aniqlansin. Og'irligi R_1 bo'lgan A yuk, silliq qiya tekislik ustida sir'anib harakatlanmoqda, og'irligi R_2 bo'lgan V yuk esa, g'adir-budur gorizont tekislik ustida harakatlanmoqda, ishqalanish koeffitsienti f ga teng. Yuklar blok ustidan o'tkazilgan i' orqali o'zaro bog'langanlar. I'ning va blokning massasini hisobga olmaymiz. Sistema bitta erkinlik darajasiga ega va uning holati $q_1=x$ (x -ning musbat yo'nalishi shaklda strelka orqali ko'rsatilgan) koordinata orqali aniqlanadi. Q_1 ni aniqlash uchun, sistemaga mumkin bo'lgan δx ko'chish beramiz, lekin $\delta x > 0$ bo'lishi kerak.



17.3-shakl

So'ngra, va F_{ishq} kuchlarning bajargan elementar ishlarini hisoblaymiz, boshqa kuchlar ish bajarmaydi. $F_{ishq} = fN = fR_2$ bo'lganligi uchun

$$\delta A = (R_1 \sin \alpha - fR_2) \delta x \text{ bo'ladi.}$$

Demak,

$$Q_1 = R_1 \sin \alpha - fR_2.$$

Mumkin bo'lgan printsipga binoan, har qanday mexanik sistema muvozanatining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ediki, sistemaning ixtiyoriy mumkin bo'lgan ko'chishida, unga ta'sir etuvchi aktiv (agar ish bajarsalar, ishqalanish kuchlarining ham) kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni $\sum \delta A_k = 0$. (17.11) tenglikka asosan, ushbu muvozanatlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0, \quad (17.15)$$

$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ qiymatlar o'zaro bog'lanmaganligi sababli (17.15) tenglama qanoatlanishi uchun, faqatgina har $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ larning oldilaridagi koeffitsientlar, alohida-alohida nolga teng bo'lishlari shart, ya'ni

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_s = 0, \quad (17.16)$$

Haqiqatdan ham, birortasi aytaylik Q_1 nolga teng bo'lmasin deb hisoblasak, sistemaga har doim shunday $\delta q_1 \neq 0$ va $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0$ bo'lgan ko'chish berish mumkinki, u holda (17.15) shart bajarilmay qoladi.

Shunday qilib, *mexanik sistema muvozanatda bo'lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistema uchun tanlab olingan barcha umumlashgan koordinatalarga mos bo'lgan umumlashgan kuchlarning har biri nolga teng bo'lishi shart ekan.* (17.16) dagi muvozanat tenglamalarning soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng ekan.

17.3. Lagranjning tenglamasi.

Mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalaridagi harakat tenglamalarini aniqlash uchun dinamikaning umumiy tenglamasi (17.1) ga murojaat qilamiz

$$\sum \delta A_k + \sum \delta = 0. \quad (17.19)$$

Har turli sistemalarni qamrab olish maqsadida sistemaga qo'yilgan bog'lanishlarni ideal deb hisoblamaymiz. Shu sababli, birinchi yig'indiga aktiv kuchlarning bajargan ishlaridan tashqari, ishqalanish kuchlarning ham bajargan ishlarini (agar ular mavjud bo'lsa) qo'shamiz.

ifodalaydi. Tenglamalarning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo'ladi. Lagranj tenglamalari dinamika masalalarini bir xil hamda sodda bo'lgan echimini yaratishga imkon berdi. Eng muhim tomonlaridan yana biri shuki, tenglamalarning ko'rinishi va ularning soni, mexanik sistemani tashkil etuvchi jism (nuqta)larning soniga va ularning qanday harakatda ekanligiga bog'liq bo'lmas ekan; Lagranj tenglamalari sistemasining soni faqat uning erkinlik darajasiga bog'liq ekan.

Agar sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal bo'lsa, (17.26) tenglamaning o'ng tomonidagi qiymatlar faqat umumlashgan aktiv kuchlar ekanligi sababli, bog'lanishlarning noma'lum bo'lgan reaksiya kuchlarini tenglamalardan chiqarib yuborishga imkon beradi.

Dinamikaning umumlashgan koordinatalardagi asosiy vazifasi shundan iboratki, umumlashgan $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ kuchlarni va boshlang'ich shartlari ma'lum bo'lsa, sistemaning (17.6) ko'rinishdagi harakat qonunini aniqlash mumkin ekan, ya'ni umumlashgan $q_1, q_2, \dots, q_s$ koordinatalarining vaqt t -ga bog'liq bo'lgan funtsiyalarini aniqlash mumkin ekan.

Kinetik energiya umumlashgan tezliklar $\dot{q}_i$ -ga bog'liq bo'lganligi uchun, (17.26) tenglamalardan vaqt t -bo'yicha bir marta hosila olinishligi sababli, tenglamalarning o'ng tomonlarida axtarilayotgan umumlashgan koordinatalarning ikkinchi tartibli $\dot{q}_i$ hosilalari 'aydo bo'ladi. Shu sababli, Lagranj tenglamalari umumlashgan $q_1, q_2, \dots, q_s$ koordinatalarning ikkinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalaridan iborat bo'lar ekan.

Potentsial kuch maydondagi sistema. Agar sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar 'otentsial kuchlardan tashkil to'gan bo'lsa, u holda (17.14) formuladan foydalanib (17.26) tenglamalarning birinchisini quyidagicha yozib olishimiz mumkin bo'ladi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_1} = 0$$

Oxirgi tenglik o'rinli bo'ladi, chunki 'otentsial energiya ' faqat umumlashgan $q_1, q_2, \dots, q_s$ koordinatalarga bog'liq bo'ladi xolos, umumlashgan tezliklarga bog'liq bo'lmaydi, shu sababli bo'ladi.

(17.26) ning qolgan tenglamalarini ham shu tarzda o'zgartiriladi. Quyidagi

$$L = T - \Pi \quad (17.27)$$

funktsiyani kiritamiz. Sistemaning kinetik va 'otentsial energiyasining ayirmasidan iborat bo'lgan hamda umumlashgan koordinatalarga va umumlashgan tezliklarga bog'liq bo'lgan L funktsiyani *Lagranj funktsiyasi* yoki *kinetik potentsial* deb ataladi. U holda, potentsial kuchlardan iborat bo'lgan sistema uchun, Lagranjning tenglamalari quyidagi ko'rinishga keladi:

Zarba nazariyasini o'rganishda nuqta(jism)ning boshlang'ich tezligini, ya'ni *zarbagacha bo'lgan tezligini* - bilan, *zarbadan keyingi tezligini* -harfi bilan belgilash qabul qilingan. U holda, zarbadagi harakat miqdorining o'zgarish teoremasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi, *nuqtaning zarba vaqti oralig'idagi harakat miqdorining o'zgarishi, shu nuqtaga ta'sir etgan zarba im'ulslarining yig'indisiga teng ekan.*

(18.1) tenglama, **zarba nazariyasini asosiy tenglamasi** deb ataladi va zarbasiz kuchlar ta'siridagi harakatda dinamikaning asosiy qonuni m qanday muhim bo'lgan bo'lsa, zarba nazariyasida bu tenglama shunday muhim hisoblanadi.

Yana shuni takidlash lozimki, zarba vaqtidagi nuqtaning ko'chishi (*bosib o'tgan yo'li-s*) $s=v^0 \tau$ -ga teng bo'ladi, ya'ni o'ta kichkina qiymat bo'ladi, shu sababli uni e'tiborga olinmaydi.

Shunday qilib, olingan natijalarga asosan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) zarbasiz bo'lgan kuchlar (masalan, og'irlik kuchi)ni, zarba vaqtida hisobga olinmaydi;

2) zarba vaqti oralig'ida nuqtaning bosib o'tgan yo'li, o'ta kichkina qiymat bo'lganligi sababli, u hisobga olinmaydi, ya'ni nuqta zarba vaqtida qo'zg'almas deb hisoblanadi;

3) jism nuqtalarining zarba vaqti oralig'ida tezliklarining o'zgarishi, faqat zarbaning asosiy tenglamasi (36.1) orqali aniqladi.

18.2 Zarba nazariyasining umumiy teoremlari.

Moddiy nuqtalar sistemasining umumiy teoremlarini zarba ta'sirida qanday o'zgarishini ko'rib o'tamiz.

1. Zarba vaqtida sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema. Lekin, oddiy kuchlarning im'ulslarini e'tiborga olinmaganligi sababli, tenglamaning o'ng tarafidagi kuchlar faqat zarbali kuchlardan iborat bo'lishi kerak. Shu sababli, zarba vaqtida

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e \quad (18.1)$$

ya'ni, *zarba vaqtidagi harakat miqdorining o'zgarishi, sistemaga ta'sir etayotgan barcha tashqi kuchlar im'ulslarning yig'indisiga teng ekan.* (18.1) tenglamani ixtiyoriy x o'qdagi proektsiyasi

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum \quad \text{bo'ladi.} \quad (18.2)$$

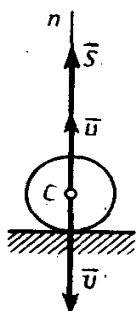
Agar tashqi zarba im'ulslarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, u holda (18.1) ga asosan sistemaning zarba vaqtidagi harakat miqdorining vektori o'zgarmas bo'lar ekan. Shu sababli, ichki zarba im'ulslari sistemaning harakat miqdorini o'zgartira olmas ekan.

2. Zarba vaqtidagi harakat miqdori bosh momentining o'zgarishi haqidagi teorema (momentlar teoremasi). Zarba hodisasida, momentlar teoremasi orqali aniqlangan ifodalar bir muncha o'zgaradi, buning asosiy sababi shundan iboratki, zarba vaqtida nuqtaning holati o'zgarmaydi (yo'l bosib o'tilmaydi); n -ta moddiy nuqtalardan tashkil to'gan mexanik sistemani olib ko'raylik. Sistemaning massasi m_k bo'lgan ixtiyoriy nuqtasiga ta'sir etuvchi tashqi zarba im'ulslari bosh vektorini - bilan va ichki zarba im'ulslari bosh vektorini - harflari bilan belgilaymiz.

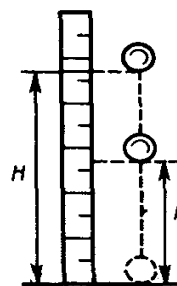
Zarba vaqtida birorta markazga nisbatan sistemaning harakat miqdori momentlarining yig'indisi shu markazga nisbatan tashqi im'ulslarning momentlarini yig'indisiga teng ekan.

18.3 Zabadagi tiklanish koeffitsienti

Ikkita jismlarning o'zaro to'qnashuvlari natijasidagi zarba ta'sirida 'aydo bo'ladigan im'ulsning qiymati ularning massalari va tezliklaridan tashqari to'qnashuvchi jismlarning elastiklik xususiyatlariga ham bog'liq ekan; Jismlarning shunday xususiyatlarini xarakterlovchi (*belgilovchi, ifodalovchi*) qiymatni *tiklanish koeffitsienti* deb ataladi.



18.1 shakl



18.2 shakl

Qo'zg'almas gorizontal tekislikka vertikal holda tushayotgan sharni olib ko'ramiz (18.1 shakl). Ushbu holda sodir bo'ladigan to'g'ri zarbada, ikkita bosqich ro'y beradi. Birinchi bosqich davomida sharning zarrachalari harakatining tezliklari zarbagacha bo'lgan vaqtda v ga teng bo'ladi (sharning harakatini ilgarilama, deb faraz qilamiz) va u kamaya borib nolga ($v=0$) teng bo'ladi. Shu davrda shar deformatsiyalanadi va uning boshlang'ich kinetik energiyasi $mv^2/2$ - deformatsiyalangan sharning ichki 'otentsial energiyasiga aylanadi.

Ikkinchi bosqichda esa, shar ichki (elastiklik kuchlar) kuchlar ta'sirida, o'zining shaklini tiklay boshlaydi; hamda jismning ichki 'otentsial energiyasi shar zarrachalarini harakatlantirib kinetik energiyaga aylanadi. Zarbaning oxirida shar zarrachalarining tezligi u -ga teng bo'ladi va uning kinetik energiyasi $mu^2/2$ -ga teng bo'ladi. Lekin, sharning mexanik energiyasi to'liq ravishda qayta tiklanmaydi, chunki uning ma'lum qismi sharga qoldiq deformatsiya berishga va uni isitish (qizdirish)ga sarf bo'ladi. Shu sababli, zarbadan keyingi u -tezlik zarbadan oldingi v -tezlikdan kichik bo'ladi.

Jismning qo'zg'almas tekislikka bo'lgan to'g'ri zarbasidagi, zarbadan keyingi tezlikning modulini, zarbadan oldingi tezlik moduliga bo'lgan nisbatiga tiklanish koeffitsienti deb ataladi va k harfi bilan belgilanadi, ya'ni:

$$k = u/v \quad (18.3)$$

Turli jismlarning tiklanish koeffitsientlarini son qiymatlari tajriba yo'llari bilan aniqlanadi. Tajribalar natijasida v tezlikni uncha katta bo'lmagan oraliqdagi o'zgarishlarida k - ning aniqlangan qiymati faqat to'qnashayotgan jismlarning materiallariga bog'liq bo'ladi xolos. CHegaraviy holat sifatida absolyut elastik zarba (ya'ni $k=1$) misol qilib olinadi, bunday holda kinetik energiya to'liq qayta tiklanadi hamda absolyut elastik bo'lmagan (ya'ni $k=0$) zarba misol qilib olinadi, bunday holda, birinchi bosqichning oxirida jismning to'liq kinetik energiyasi uni deformatsiyalashga va isitishga sarf bo'ladi.

Tiklanish koeffitsienti k -ni aniqlash uchun, sharni avvaldan belgilangan H balandlikdan vertikal holda boshlang'ich tezliksiz tashlab yuboriladi (18.2 shakl) va uning yonida o'rnatilgan lineyka orqali qancha h -balandlikka qayta ko'tarilishi o'lchab aniqlanadi.

Tiklanish koeffitsientining turli materiallar uchun aniqlangan qiymatlari maxsus spravochniklarda keltiriladi. Xususiyl hol sifatida yog'ochni yog'ochga 3 m/s tezlik bilan urilgandagi tiklanish koeffitsienti $k \approx 0,5$, 'o'latni 'o'latga shu tezlik bilan urilishida $k \approx 0,56$, shishani shishaga urilishidagi $k \approx 0,94$ ekanligi tajribalar usulida aniqlangan.

18.4 Jismning qo'zg'almas to'siqqa urilishidagi zarbasi.

Massasi M bo'lgan jism (shar)ni, qo'zg'almas 'lita ga urilishidagi zarbani ko'rib o'tamiz. Plitaning reaksiyasi jismga ta'sir etuvchi zarba kuch hisoblanadi; bu kuchning zarba vaqtidagi im'ulsini - deb belgilaylik. Jismning 'lita bilan to'qnashgan nuqtasining normali, uning massa markazidan (shar uchun har doim shunday) o'tadi deb faraz qilaylik. Jismning bunday zarbasini, *markaziy zarba* deb ataladi. Agar massa markazining tezlik vektorini yo'nalishi 'litaning normali n - bo'ylab yo'nalgan bo'lsa, to'g'ri zarba, aks holda esa qiya zarba deb ataladi.

1. T o' g' r i z a r b a h o d i s a s i: Ushbu holda (18.1) tenglamani normal n -o'qqa 'roektsiyalaymiz (18.1 shakl) va $0=M_1=M$ ekanligini e'tiborga olsak

$$M(u_n - v_n) = S_n.$$

Lekin, to'g'ri zarbada $u_n = u$, $v_k = -v$, $S_n = S$ bo'ladi. Shu sababli,

$$M(u + v) = S.$$

Masalalarni echishda kerak bo'lgan ikkinchi tenglama (18.3) dan olinadi

$$u = kv.$$

Hosil bo'lgan tenglamalardan M , v , u lar ma'lum bo'lsa u va S larni aniqlash mumkin bo'ladi, bundan

$$S = M(1 + k)v.$$

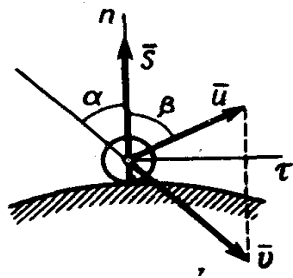
Ushbu tenglikdan ko'rinib turibdiki, tiklanish koeffitsienti qanchalik katta bo'lsa, zarba im'ulsi shunchalik katta bo'lar ekan. 36.3§ da S bilan k ning mana shu munosabati haqida ga'irib o'tilgan edi.

Zarba kuchi (reaksiya) ning o'rtacha qiymatini aniqlash uchun, qo'shimcha ravishda zarbaga sarflangan τ -vaqtning son qiymatini bilish kerak bo'ladi, amalda buni tajriba orqali aniqlanadi.

Misol. Massasi $m = 1$ kg bo'lgan po'lat sharni $N = 3$ m balandlikdan po'lat Plitaga tashlab yuborilganda ($k = 0,56$), zarbagacha bo'lgan tezlikning qiymati $v \approx 7,7$ m/c va zarbadan keyingi tezlikning son qiymati $u = kv = 4,3$ m/s bo'ladi. Zarba im'ulsi $S = mv(1 + k) \approx 12$ H·c ga teng bo'ladi.

Agar zarbaga sarflangan vaqt $\tau = 0,0005$ s bo'lsa, u holda zarba kuchi (reaksiya)ning o'rtacha qiymati $= S/\tau = 24\,000$ H.

2. Q i y a z a r b a h o l a t i. Bunday holda massa markazining tezlik vektori -ning normal bilan zarbagacha tashkil qilgan burchagi α bo'lsin va zarbadan keyingi tezlikning yo'nalishi β burchakni tashkil etsin (36.3 shakl). U holda, (36.2) tenglamani urinma va normal o'qlardagi 'roektsiyasi



18.3 shakl.

$$M(u_{\tau}-v_{\tau})=0, \quad M(u_n-v_n)=S.$$

Bunday zarbadagi tiklanish koeffitsientining son qiymati zarbadan keyingi $|u_n|$ tezlikning modulini, boshlang'ich $|v_n|$ -tezlikning moduliga nisbati orqali aniqlaymiz, chunki zarba faqat normal o'q bo'yicha sodir bo'ladi (ishqalanish kuchini e'tiborga olmaymiz). U holda, roektsiyalarning ishoralarini e'tiborga olsak $u_n=-kv_n$. Natijada, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$u_{\tau}=v_{\tau}, \quad u_n=-v_n, \quad S=M|v_n|(1+k).$$

Hosil bo'lgan tenglamalar orqali, agar M , v , α , k -lar ma'lum bo'lsa, zarbadan keyingi tezlikning moduli va yo'nalishini hamda zarba im'ulsini aniqlashimiz mumkin. Xususiyl holda, birinchi tenglikdan $v_{\tau}=|v_n|\operatorname{tg}\alpha$ va $u_{\tau}=|u_n|\operatorname{tg}\beta$ ekanligini e'tiborga olsak

$$|u_n|\operatorname{tg}\beta=|v_n|\operatorname{tg}\alpha,$$

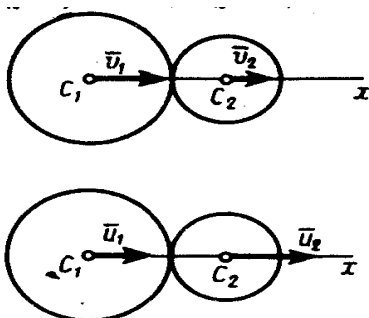
bundan

$$k=|u_n|/|v_n|=\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta.$$

Demak qiya zarbada, urilishdagi burchakning tangensini qaytishdagi burchak tangensiga nisbati tiklanish koeffitsientiga teng bo'lar ekan. Hamda $k<1$, bo'lgani uchun $\alpha<\beta$ bo'ladi, ya'ni urilish burchagi har doim qaytish burchagidan kichkina bo'lar ekan.

18.5 Ikkita jasmning markaziy to'g'ri zarbasi(sharlar zarbasi).

Agar ikkita jismning to'qnashuvida ularning to'qnashgan nuqtalarining umumiy normali ularning massalari markazlaridan o'tsa va massa markazlarining zarbagacha va zarbadan keyingi tezliklari shu to'g'ri chiziqli yotsa, bunday zarbani *markaziy to'g'ri zarba* deb ataladi. Masalan, ikkita bir jinsli sharlarning o'zaro to'qnashuvlaridan oldingi tezlik vektorlari bir to'g'ri chiziqdan o'tsa, bunday zarba markaziy to'g'ri zarba bo'ladi.



18.4 shakl.

To'qnashuvchi jismlarning massalari M_1 va M_2 bo'lsin, ularning massa markazlarining tezliklari to'qnashuvga v_1 va v_2 to'qnashuvdan keyingi tezliklari u_1 va u_2 bo'lsin. Massa markazlari S_1 , S_2 nuqtalardan *har doim* S_1 dan S_2 -ga yo'nalgan S_1x o'qini o'tkazamiz (18.4 shakl). To'qnashuv bo'lishi uchun, $v_{1x}>v_{2x}$ shart (aks holda birinchi jism ikkinchi jismni quvib eta olmaydi); hamda zarbadan keyin $u_{1x}\leq u_{2x}$ bo'lishi shart, chunki orqadagi shar

oldinga o'tib keta olmaydi.

M_1 , M_2 , v_{1x} , v_{2x} va k -lar ma'lum bo'lsa, u_{1x} va u_{2x} ni aniqlash mumkin. Buning uchun to'qnashuvchi jismlarni bitta sistemadan iborat deb hisoblab, harakat miqdorining o'zgarish teoremasini qo'llaymiz. U holda, jismlarning o'zaro to'qnashuvidan aydo bo'ladigan kuchlar ichki kuchlar hisoblanadi va $\Sigma=0$ bo'ladi

$$M_1u_{1x}+M_2u_{2x}=M_1v_{1x}+M_2v_{2x}. \quad (18.5)$$

$$S_{1x}=M_1(u_{1x}-v_{2x}), \quad S_{2x}=-S_{1x}. \quad (18.6)$$

Quyida chegaraviy bo'lgan ikki holatni ko'rib o'tamiz:

1. Absolyut elastik bo'lmagan zarba ($k=0$). Bunday holda (18.5) tenglamalardan

$$u_{1x}=u_{2x}, \quad (18.7)$$

Ikkala jism zarbadan keyin bir xil tezlik bilan harakatlanadi. Jismlarga ta'sir etgan zarba im'uslari

$$S_{2x}=-S_{1x}=(v_{1x}-v_{2x}).$$

2. Absolyut elastik zarba ($k=1$). Bunday holda (18.5) va (18.6) tenglamalardan

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}) \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}) \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

Jismlarga ta'sir etgan im'uslarni aniqlaymiz

$$S_{2x}=-S_{1x}=(v_{1x}-v_{2x}).$$

Ko'rinib turgandek, absolyut elastik zarbaning im'ulsi, absolyut elastik bo'lmagan zarbaning im'usidan ikki marta katta bo'lar ekan.

Xususiyl holda, ya'ni $M_1=M_2$ bo'lganda (18.9) tenglamadan $u_{1x}=v_{2x}$, $u_{2x}=v_{1x}$; shunday qilib, absolyut elastik va bir xil massali ikkita jism urilishganda, ularning tezliklari o'zaro almashinib qolar ekan.

O'zaro to'qnashuvchi jismlarni ilgarilama harakatda deb hisoblab, ularning absolyut elastik bo'lmagan zarbadan keyingi umumiy tezliklarini u bilan belgilasak, ularning zarbagacha va zarbadan keyingi kinetik energiyalarini quyidagicha aniqlaymiz

$$2T_0 = M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2, \quad 2T_1 = (M_1 + M_2)u_x^2, \text{ bo'ladi.} \quad (18.10)$$

Zarbadagi yo'qolgan kinetik energiya T_0-T_1 -ni aniqlaymiz. Buning uchun quyidagicha belgilash kiritamiz,

$$T_0-T_1=T_0-2T_1+T_1 \quad (18.11)$$

(18.8) formuladan

$$(M_1+M_2)u_x=M_1v_{1x}+M_2v_{2x},$$

bundan,

$$2T_1=(M_1+M_2)=(M_1v_{1x}+M_2v_{2x})u_x, \quad (18.12)$$

(18.11) tenglikning o'ng tomoniga (18.10) dan T_0 va T_1 -larni, (18.12) dan $2T_1$ ni keltirib qo'ysak

$$T_0-T_1=\frac{1}{2}(M_1v_{1x}^2 + M_2v_{2x}^2 - 2M_1v_{1x}u_x - 2M_2v_{2x}u_x + M_1u_x^2 + M_2u_x^2)$$

yoki

$$T_0-T_1=\frac{1}{2}M_1(v_{1x}-u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(v_{2x}-u_x)^2, \quad (18.13)$$

$(v_{1x}-u_x)$ va $(v_{2x}-u_x)$ -lar to'qnashgan har bir jismning tezliklarini qanchaga kamayganligini aniqlab beradi. Ularni *zarbada yo'qolgan tezliklar* deb atash ham mumkin.

U holda, (18.13) tenglamadan Karno teoremasi kelib chiqadi: *absolyut elastik bo'lmagan zarbada sistemaning yo'qotgan kinetik energiyasi, to'qnashgan har bir jismning yo'qotgan tezliklariga teng bo'lgan o'zgarmas tezlik bilan qilgan harakatlaridagi kinetik energiyalarning yig'indisiga teng ekan.*

Agar zarba absolyut noelastik (ya'ni $k \neq 0$) bo'lmasa, tegishli o'zgartirishlar orqali, zarbada yo'qolgan kinetik energiya formulasini keltirib chiqaramiz

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2 \right] \quad (18.13')$$

Xususiyl hol sifatida bir jismni qo'zg'almas bo'lgan ikkinchi jismga urilishini ko'rib chiqamiz. Ushbu holda $v_2=0$ bo'ladi

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2, \quad u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

U holda,

$$T_1 = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) u^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \frac{M_1 v_1^2}{2}$$

yoki

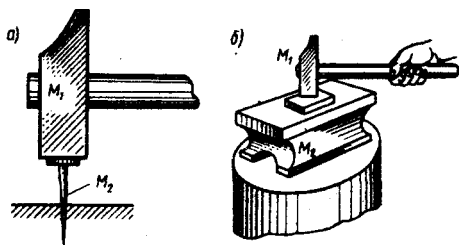
$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} T_0. \quad (18.14)$$

Zarbadan keyin qancha energiya qolishi mumkin ekanligini (18.14) formula orqali aniqlash mumkin bo'ladi.

Quyidagi ikkita qiziqarli holatni ko'rib chiqamiz.

1. Urayotgan jismning massasi urilayotgan jismning massasidan juda katta bo'lsin (ya'ni $M_1 \gg M_2$). Bu holda, $M_1 + M_2 \approx M_1$ deb hisoblaymiz va (18.14) formula orqali $T_1 \approx T_0$ bo'ladi. Demak, zarba absolyut elastik bo'lishiga qaramasdan kinetik energiya deyarli yo'qolmas ekan va sistema zarbadan keyin ham zarbadan avvalgi kinetik energiya bilan o'z harakatini davom etar ekan.

Amalda bunday hodisalar mixni bolg'a bilan urilganda, qoziqlarni katta bosqon bilan qoqilganda sodir bo'lishi mumkin. Shu sababli, bolg'aning massasi mixning massasidan bir qancha katta bo'lishi shart (18.4, a shakl).



18.4 shakl

2. Urayotgan jismning massasi urilayotgan jismning massasidan juda kichkina bo'lsin (ya'ni $M_2 \gg M_1$). Bu holda,

$M_1/(M_1 + M_2) \approx 0$ deb hisoblaymiz va (18.14) dan $T_2 \approx 0$ bo'ladi. Shu sababli, bunday zarbada barcha kinetik energiya jismni deformatsiyalashga sarf bo'lar ekan; zarbadan keyin jismning tezligi nolga teng bo'lar ekan.

Amalda bunday zarbalar jismni sandon ustida ishlashda, yoki 'archinlash ishlarida sodir bo'ladi. Shu sababli, sandon bilan jismning massasi ('archin bilan

uning ostidagi asosning massasi) bolg'aning massasidan ancha katta bo'lishi shart ekan (18.4, b shakl).

Qo'zg'almas z - o'qi atrofida aylanayotgan jismni ko'rib chiqamiz (18.5 shakl). Faraz qilaylik shu jismga im'ulsi -ga teng bo'lgan zarba berilsin. U holda (18.4) tenglamaga asosan

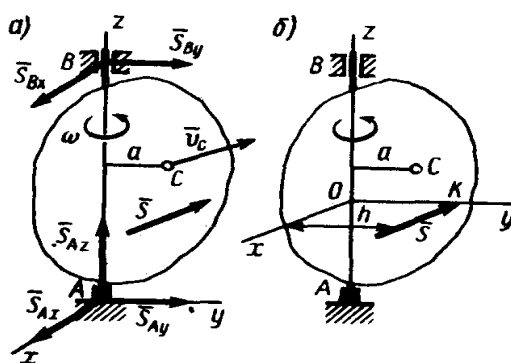
$$K_{1z} - K_{0z} = m_z(F),$$

bo'ladi, chunki 'odshi'niklarda 'aydo bo'ladigan A va V -im'ulsiiv reaksiyalarning z -o'qiga nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi.

Aylanayotgan jismning burchakli tezligi unga ko'rsatilgan zarba im'ulsining jismni aylanish o'qiga nisbatan olingan inertiya momentiga bo'lgan nisbatiga teng qiymatga o'zgarar ekan.

Z a r b a m a r k a z i. Aylanayotgan jismga ta'sir etuvchi im'ulsiiv reaksiyalarning 'aydo bo'lishi yomon oqibatlariga olib keladi, chunki ularning ta'sirida konstruktsiyaning qismlari ('odshi'niklari vallari va h.k.)ni tez eyilishiga yoki umuman ishdan chiqarib yuborishiga sababchi bo'ladi. Shu sababli, qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jismga zarba berilganda A va V 'odshi'niklarga tushadigan im'ulsiiv reaksiyalarni umuman yo'qotib yuborish mumkin ekanligini ko'rib chiqamiz. Buning uchun $A=V=0$ deb hisoblasak, (18.16) tenglamalar sistemasi qaysi shartlar orqali qanoatlanishi mumkinligini ko'rib chiqamiz.

Agarda $A=V=0$ bo'lsa, (18.16) ning 2 va 3 tenglamalaridan $S_y=S_z=0$ bo'ladi;



18.5 shakl.

bularni qanoatlantirish uchun, im'ulsi Ayz tekisligiga 'er'endikular ravishda, ya'ni (yuqorida qabul qilingan shartga ko'ra) aylanish o'qidan va massa markazidan o'tuvchi tekislikka 'er'endikulyar ravishda yo'naltirish zarur bo'ladi.

Endi impuls shunday yo'nalgan deb faraz qilaylik (18.5, b shakl). U holda $A=V=0$ bo'lsa, (18.16) tenglamalarning ko'rinishi koordinata boshi Az -ning qaerda joylashishiga befarq bo'ladi. Shu

sababli, keyingi hisoblash ishlarini soddalashtirish uchun Oxu tekisligini shunday tanlab olamizki, -impuls vektori shu tekislikda joylashgan bo'lsin. Natijada, $m_x()=m_y()=0$ bo'ladi va (18.16) ning oxirgi ikkita tenglamasidan $S_B=0$ bo'lsa, $J_{xz}=J_{yz}=0$ ekanligini aniqlaymiz. Endi (18.16) sistemaning 1 tenglamasini ko'rib chiqamiz. $A=V=0$ va $S_x=-S$ bo'lgani (18.5, b shakl) uchun, u $Ma(\Omega-\omega)=S$ ko'rinishga keladi.

$$h=J_z/(Ma) \quad (18.17)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Ushbu (18.17) formula orqali qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattiq jismga qo'yiladigan im'ulsning qo'yilish nuqtasi z -o'qidan qaysi h - masofada bo'lishligi aniqlanadi.

Shunday qilib, z -o'qi atrofida aylanayotgan jismga tushayotgan zarba ta'sirida, jismning o'qqa mahkamlangan 'odshi'niklariga im'ulsiv reaksiyalar ta'sir etmasligi uchun quyidagi shartlar bajarilishi lozim ekan:

1)zarba im'ulsi z -o'qiga 'er'endikulyar bo'lgan va uning shunday O nuqtasidan o'tishi lozim ekanki, bu nuqtada z -o'qi bosh inertsia o'qidan iborat bo'lishi kerak ekan (xususiyl holda, Oxu tekisligi faqat simmetriya tekisligidan iborat bo'lishi shart ekan);

2)zarba im'ulsi, z -o'qi va massa markazi S nuqtadan o'tuvchi tekislikka 'er'endikulyar ravishda yo'nalgan bo'lishi shart ekan;

3)zarba im'ulsi aylanish o'qidan $h=J_z/Ma$ masofada (massa markazi yotgan tomonda) joylashishi shart ekan.

Agar, zarba impulsi shu K nuqtadan o'tib, aylanish o'qi mahkamlangan nuqtalari ('odshi'niklari)ga zarba reaksiyasi ta'sir etmasa, bunday nuqtani *zarba markazi* deb ataladi.

(18.17) formulaga asosan shuni aniqlash mumkin ekanki, zarba markazi fizik mayatnikning tebranish markazi bilan bir nuqtada joylashar ekan. Demak, ko'rsatilganidek, $h>a$ bo'ladi, ya'ni aylanish o'qidan zarba markazigacha bo'lgan masofa, aylanish o'qidan massa markazigacha bo'lgan masofadan katta ekan. Agar aylanish o'qi massa markazidan o'tsa, u holda $a=0$ bo'ladi, natijada $h=\infty$ bo'ladi. Shu sababli, jismda zarba markazi yo'q bo'ladi va har qanday zarba, albatta aylanish o'qiga zarba reaksiyasi ta'sir qilar ekan.

ASOSIY ADABIYOTLAR

1. П. Шохайдарова, Ш.Шозиётов, Ж.Зоиров. Назарий механика. – Т., Ўқитувчи, 1992 й.
2. Т.Р.Рашидов, Ш.Шозиётов, К.Б.Мўминов. Назарий механика асослари. Т., Ўқитувчи, 1991 й.
3. Shoobidov Sh.A., Habibullaeva X.N., Fayzullaeva F. Nazariy mexanika. O'quv qo'llanma. -T. Yangi asr avlodi. 2008
4. Мирсаидов М.М. ва бошқалар .Назарий механиканинг қисқа курси. -Т.Ўзбекистон. 2008.
5. С.М.Тарг. Краткий курс теоретической механики. -М. Высшая школа. 2002.
6. И.В.Мещерский. Назарий механикадан масалалар тўплами. Тошкент, 1990 .
7. И.В.Мещерский. Сборник задач по теоретической механике. - М. Наука. 1986.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под редакцией В.Яблонского. -М. Высшая школа, 1983
9. R.C.Hibbeler. Engineering Mechanics, Statics and Dynamics. Pearson. ISBN-10: New York, 2017.
10. E.Jotautiene. Theoretical Mechanics. Practicums. UDK 629.1: 631.374, Kaunas-Akademija, 2012.
11. I.V.Szolga. Theoretical Mechanics. UDK 629.1: 631.374, Kaunas-Akademija, 2010.
12. Reiner M. Dreizler , Cora S. Lüdde. Theoretical Mechanics. ISBN 978-3-642-11137- 2, ISSN 1868-4513. Frankfurt/Main, 2010.
13. H. James, R. Williams, Fundamentals of Applied Dynamics. USA, New York, 1996.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Mirziyoyev Sh.M. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. T., "O'zbekiston" 2017y. 102 bet.
2. Mirziyoyev Sh.M. Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash-yurt taraqqiyoti va halq farovonligining garovi. T., "O'zbekiston", 2016y 47-bet
3. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelejagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. T., "O'zbekiston" 2016y, 486 bet
4. В.В. Добронравов, Н.Н.Никитин, Курс теоретической механики, Москва, Высшая школа, 1983 г.
5. Н.В.Бутенин, и др. Курс теоретической механики, т.1,2. Москва, Высшая школа, 1987 г.
6. М.И.Бать и др. Теоретическая механика в примерах и задачах, 1,2 том, Москва, Высшая школа, 1989 г.
7. В.Яблонский, Сборник курсовых работ по теоретической механики. Москва, Высшая школа, 1985 г.
8. В. Ahmadho'jaev. «Механика - 1». Toshkent, Yangi asr avlodi, 2006 yil, 196 bet.

Kafedra tomonidan yaratilgan uslubiy manbaalar:

1. S.I. Ismoilov “Nazariy mexanikadan elektron darslik” FarPI. 2008 y
2. S.I. Ismoilov tarjimasida. Nazariy mexanikaning qisqa kursi. FarPI. 2007 y
3. O.E. Kepe va boshqalar. Nazariy mexanikadan qisqa masalalar to’plami. Yangi asr avlodi. Toshkent. 2008 y.
4. T.M. Sobirjonov “Nazariy mexanikadan mustaqil ishlar uchun uslubiy qo’llanma” FarPI. 2016 y
5. T.M. Sobirjonov “Nazariy mexanikadan amaliy ishlar uchun uslubiy qo’llanma” FarPI. 2017 y

Elektron manbaalar

1. Мирсаидов М.М. ва бошқалар .Назарий механиканинг қисқа курси. -Т.Ўзбекистон.2008.[http:// ziyonet.Uz](http://ziyonet.Uz).
2. S.I. Ismoilov “Nazariy mexanikadan elektron darslik” 2008 y. Far PI.ARM.
3. П. Шохайдарова, Ш.Шозиётов, Ж.Зоиров. Назарий механика. FarPI.ARM.
4. Т.Р.Рашидов, Ш.Шозиётов, К.Б.Мўминов.Назарий механика асослари. Far PI.ARM.
5. Shoobidov Sh.A.,Habibullaeva X.N.,Fayzullaeva F. Nazariy mexanika. O‘quv qo‘llanma. Far PI.ARM.
6. Мирсаидов М.М. ва бошқалар . Назарий механиканинг қисқа курси.
7. С.М.Тарг.Краткий курс теоретической механики.
8. И.В.Мешчерский.Назарий механикадан масалалар тўплами.

Internet saytlari.

1. www.moodle.farpi.uz
2. www.moodle.taqi.uz
3. www.amazon.com
4. www.google.uz
5. www.ziyonet.uz
6. www.bilim.uz
7. www.gov.uz

MUNDARIJA

1-ma'ruza.....	5
2-ma'ruza.....	11
3-ma'ruza.....	16
4-ma'ruza.....	21
5-ma'ruza.....	26
6-ma'ruza.....	31
7-ma'ruza.....	37
8-ma'ruza.....	44
9-ma'ruza.....	50
10-ma'ruza.....	55
11-ma'ruza.....	62
12-ma'ruza.....	69
13-ma'ruza.....	74
14-ma'ruza.....	80
15-ma'ruza.....	84
16-ma'ruza.....	90
17-ma'ruza.....	96
18-ma'ruza.....	105

