

J. MAMAJONOV. , K.A.RAJAPOV., N.A.MAHMUDOVA.

OLIY MATEMATIKA

1 – TOM

Farg‘ona – 2010 y.

SO‘Z BOSHI

Mamlakatimizning oily o‘quv yurtlarida barcha yo‘nalishlar bo‘yicha bakalavrlar tayyorlashtizimiga o‘tilgach, barcha fanlarning o‘quv rejalari va tipik dasturlarini davlat standartiga moslash, shu bilan birga, halqaro ta’lim berish standartlarini qo‘llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarini shu jarayonga jalb qilish zarurati tug‘ildi. Har bir yo‘nalish bir necha mutaxassisliklarni o‘z ichiga olganligi sababli mamlakatimizdagi barcha texnika oliy o‘quv yurtlarida bakalavrlar tayyorlash bo‘yicha oliy matematika fanidan umumiy tipik o‘quv dasturi tayyorlangan.

Mazkur darslik shu yangi dastur bo‘yicha va lotin yozuviga asoslangan yangi o‘zbek alifbosida yozilgan bo‘lib, uning 1-tomi 14 bobdan iboratdir:

- 1-bobda ba’zi bir boshlangi’ch tushunchalar va dastlabki ma’lumotlar;
- 2-bobda determinantlar nazariyasining elementlari;
- 3-bobda vektorlar algebrasining elementlari;
- 4-bobda matritsa va chiziqli tenglamalar sistemasi;
- 5-bobda tekislikdagi analitik geometriya;
- 6-bobda fazodagi tekislik va to‘g‘ri chiziq;
- 7-bobda ikkinchi tartibli sirtlar
- 8-bobda matematik analizga kirish;
- 9-bobda ketma-ketlik va funksiya limitlari. Funksiya uzluksizligi;
- 10-bobda bir o‘zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi;
- 11-bobda kompleks sonlar algebrasining elementlari va ko‘phadlar;
- 12-bobda bir o‘zgaruvchili funksiyaning integral hisobi;
- 13-bobda ko‘p o‘zgaruvchili (argumentli) funksiya;
- 14-bobda oddiy differensial tenglamalar bayon qilingandir.

I-bob. Ba'zi bir boshlang'ich tushunchalar va dastlabki ma'lumotlar

Bu bobda risolaning bayoni davomida zarur bo'ladigan matematikaning ba'zi bir boshlang'ich va yordamchi tushunchalari, hamda dastlabki ma'lumotlar haqida fikr yuritamiz.

Risolada boblar ularning tutgan o'rnini bildiruvchi tartibi, ularning tarkibidagi bosh bandlar nuqta bilan ajratilgan ikkita natural sonlar bilan nomerlangan bo'lib, ulardan birinchisi mazkur bandni o'z tarkibiga olgan bobning nomerini, ikkinchisi esa bandning bob tarkibida tutgan o'rnining tartibini anglatadi. Shuningdek, bosh bandlar tarkibida bo'lgan ichki (kichik) bandlar ham mavjud bo'lsa, ular nuqtalar bilan ajratilgan uchta natural sonlar orqali nomerlangan bo'lib, ulardan birinchi va ikkinchilari yuqorida aytilganlarni, uchinchi esa mazkur ichki (kichik) bandning bosh bantda tutgan o'rnining tartibini anglatadi. Formulalar, ta'riflar, teoremlar va rasmlar ham shu yo'sinda nomerlangandir. Masalan, «2.2.1- teorema» kabi yozilgan bo'lsa, mazkur teorema 2- bobning 2- bandiga tegishli 1-teorema ekanligini bildiradi.

1.1. Matematik mantiqiyot elementlari.

Matematik mantiqiyot (logika) matematikaning bo'limlaridan biri sifatida o'ziga mustaqil fan ekanligi ma'lumdir. Bu bandda ushbu risolaning bayonida zarur bo'ladigan matematik mantiqiyotning ba'zi bir elementlarini keltiramiz.

Barcha fanlar kabi matematika ham o'z alifbosiga egadir. Alifbo harflar, raqamlar va maxsus belgilardan tashkil etilib, ularning har biri o'z navbatida yaxlit deb qabul qilingan belgilardan iboratdir.

Matematikaning alifbosi barcha tillar va fanlar alifbolarining birlashmasidan iboratdir desak yanglish bo'lmaydi va bunga sabab matematika barcha xalqlar uchun va barcha fanlarning asosida bo'lganligidadir deb o'ylaymiz.

Harflar deb qabul qilingan yaxlit belgilarning bir satrga joylashgan birikmasini «so'z» va so'zlarning yuqoridagidek birikmasi esa «gap» yoki «jumla» deb atalishi ham bizga ma'lumdir.

Matematikaning yuqorida aytilgan alifbosi asosida harflar, raqamlar, maxsus belgilar, so'zlar va gaplardan foydalanib bitilgan yozuv *ifoda* deb ataladi.

Ifoda tarkibida qatnashgan harf uning qiymati deb ataluvchi turli ifodalarni (sonlarni) qabul qilsa, uni *o'zgaruvchi* deb ataladi.

Agar o'zgaruvchi faqat sonlardan iborat qiymat qabul qilsa, uni *sonli o'zgaruvchi* deyiladi.

Tarkibida o'zgaruvchi qatnashgan ifoda *shakl*, o'zgaruvchi qatnashmagan ifoda esa, *konstant (o'zgarmas)* deb ataladi.

Tarkibida n ta o'zgaruvchi qatnashgan shakl *n o'zgaruvchili shakl* deyiladi.

Shakl o'zgaruvchilarining qabul qilishi mumkin bo'lgan (shakl ma'noga ega bo'ladigan) qiymatlari majmui *shaklning aniqlanish sohasi* deyiladi.

Masalan, x haqiqiy sonli o'zgaruvchi bo'lganda, ushbu $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ shaklning aniqlanish sohasi $x \neq \pm 2$ bo'lgan barcha haqiqiy sonlardan iboratdir. Ammo, $\{-2; 2\}$ lardan birortasi ham sonli x o'zgaruvchi uchun joiz qiymat bo'la olmaydi.

Agar φ shakl bo'lib, u n ta $x_1; x_2; \dots; x_n$ o'zgaruvchilarga ega bo'lsa, uni $\varphi(x_1; x_2; \dots; x_n)$ kabi yozish qabul qilingandir.

Tegishli o'zgaruvchilarining barcha joiz qiymatlarida sonni bildiradigan shakl *sonli shakl* deyiladi.

Matematikada « $\Rightarrow$ » *tenglik* harfi sifatida qabul qilinib, u turli ma'nolarga ega ekanligini aytamiz:

- 1) bir elementning turli shaklda yozilishini anglatadi, masalan, $\sqrt{4} = 2\sin\frac{\pi}{2}$
 - 2) tenglama o'rinli bo'ladigan uning o'zgaruvchilari qiymatlarini anglatadi, masalan, $(x+2) \cdot (x-3) = 0$ uchun $x = -2$ yoki $x = 3$;
 - 3) sonli shakllarning teng kuchliligi (ekvivalentligi) ni anglatadi, masalan, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- va boshqalar.

So'zlar va jumlar orasida «emas», «va», «yoki» so'zlari bog'lovchilar sifatida kelishi bizga ma'lumdir; matematik mantiqiyotda ham bu so'zlar *mantiqiy bog'lovchilar* deb atalib, ular uchun mos ravishda « $\neg$ », « $\wedge$ », « $\vee$ » kabi maxsus belgilar ishlatiladi.

Biror gapdan «emas» so'zi yordamida hosil qilingan yangi gap berilgan *gapning inkori* deyiladi. Masalan, A « a haqiqiy son musbat» dan iborat bo'lsa, $\neg A$ « a haqiqiy son musbat emas» degan gapdan iboratdir.

Ikkita gapning «va» bog'lovchi so'z yordamida birikishidan hosil qilingan, ikkala gapning ham ayni paytda o'rinli bo'lishidan iborat yangi gap ularning *kon'yunksiyasi* deyiladi. Masalan, P «kvadrat uchhad koefitsiyentlari haqiqiy» degan, Q esa «diskriminanti manfiy» degan gaplardan iborat bo'lsa; $P \wedge Q$ «kvadrat uchhad koefitsiyentlari haqiqiy va diskriminanti manfiy» gapidan iboratdir.

Ikkita gapning «yoki» bog'lovchi so'z yordamida birikishidan hosil qilingan, ayni paytda ulardan aqalli bittasining o'rinli bo'lishidan iborat yangi gap ularning *diz'yunksiyasi* deyiladi. Masalan, A gap yuqoridagidek bo'lib, B esa «-1 dan kichik» gapidan iborat bo'lsa, $A \vee B$ bo'lganda « a soni musbat yoki -1 dan kichik» gapiga egamiz.

Berilgan ikkita M hamda N gaplardan «agar M bo'lsa, u holda N bo'ladi» ko'rinishida hosil qilingan yangi gap ularning *implikatsiyasi* deyiladi va $\Rightarrow$ belgi yordamida $M \Rightarrow N$ kabi yoziladi.

Berilgan ikkita K hamda L gaplardan «agar K bo'lsa, faqat shu holda L bo'ladi» ko'rinishida hosil qilingan yangi gap ularning *ekvivalensiyasi* deyiladi va $\Leftrightarrow$ belgi yordamida $K \Leftrightarrow L$ kabi yoziladi. Bu ba'zan *ikki tomonlama implikasiya* deb ham yuritiladi. « K bo'lishi uchun L ning bo'lishi zarur va yetarlidir» degan gapda ekvivalensiya mavjuddir.

Misol, $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad berilgan bo'lsin. Agar A, P va Q gaplar yuqoridagicha bo'lib, T – «uning haqiqiy ildizi mavjud» degan, F – esa «uning qiymati musbat» degan gaplar bo'lsa, quyidagilar o'rinlidir:

1) $P \wedge Q \wedge A \Rightarrow F$; 2) $P \wedge (\neg Q) \Rightarrow T$; 3) $A \vee (\neg A) \Leftrightarrow$ « a haqiqiy son».

Bularga ishonch hosil qilishni o'quvchining o'ziga qoldiramiz.

Quyidagi belgilashlarga ham ushbu risolaning bayoni davomida ko'p marotabalab murojaat qilamiz:

1) «har qanday (ixtiyoriy) x uchun» degan gap *umumiylik kvantori* deyiladi va $\forall x$ kabi belgilanadi;

2) «shunday x mavjudki» degan gap *mavjudlik kvantori* deyiladi va $\exists x$ kabi belgilanadi.

3) Agar m va n butun sonlar berilgan bo'lib, biror i o'zgaruvchi shu berilganlar va ular orasidagi barcha butun sonlarni o'sish ($m < n$ bo'lganda) yoki kamayish ($m > n$ bo'lganda) tartibida ketma-ket qabul qilsa, uni $i = \overline{m, n}$ kabi belgilashni kelishib olamiz. Masalan, $i = 1, 2, \dots, n$ o'rniga $i = \overline{1, n}$ yozuvni ishlatish mumkin.

4) Agar a_i ($i = \overline{1, n}, n \in N$) ifodalar (sonlar) berilgan bo'lsa, ularning yig'indisi va ko'paytmasini mos ravishda

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i; \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

kabi belgilaymiz.

5) $1 < n \in N$ bo'lganda $\prod_{i=1}^n i = n!$ kabi belgilanadi va uni “ n faktorial” deb o'qiladi. Undan tashqari, $0! = 1! = 1$ deb qabul qilinadi. $\forall n \in N$ uchun $n! = n \cdot (n-1)!$ tenglikning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

1.2. To'plam

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, uni o'zidan soddaroq tushunchalar orqali ta'riflab bo'lmaydi. Shuning uchun to'plam tushunchasi misollar orqali tushuntiriladi. Masalan, auditoriyadagi studentlar to'plami, kutubxonadagi barcha kitoblar to'plami, maktabdagi a'lochi o'quvchilar to'plami, $x^2 - 7x + 10 = 0$ tenglamaning ildizlari to'plami, natural sonlar to'plami, Sirdaryodagi baliqlar to'plami, Galaktikamizdagi planetalar to'plami va boshqalar to'plam tushunchasiga misol bo'la oladi.

Agar to'plamga tegishli bo'ladigan narsalarning belgisi ko'rsatilgan bo'lsa, u holda to'plam berilgan deb hisoblanadi. Odatda, to'plamni tashkil etgan narsalar uning *elementlari* deyiladi. To'plam, qulaylik uchun, lotin alifbosiining bosh harflari, masalan, $A, B, C, \dots, X, Y, \dots$, uning elementlari esa satriy harflari, masalan, $a, b, c, d, \dots, x, y, z, \dots$ bilan belgilanadi. Biror x element A to'plamning elementi ekani $x \in A$ ko'rinishda, elementi emasligi esa $x \notin A$ (yoki $x \notin A$) ko'rinishda yoziladi va birinchi holda « x element A ga tegishli», ikkinchi holda « x element A ga tegishli emas» deb o'qiladi. Masalan, natural sonlar to'plamini olaylik:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\},$$

bunda $2 \in N$, $1000 \in N$ munosabatlar o'rinli; $x^2 + 5x - 14 = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari $x_1 = -7$, $x_2 = 2$ ni olsak, $-7 \notin N$, $2 \in N$ bo'ladi.

To'plamlarni ularning elementlari chekli sonda yoki cheksiz ko'p bo'lishiga qarab ikki sinfga ajratish mumkin. Agar to'plamni tashkil qilgan elementlar chekli sonda bo'lsa, bunday to'plam *chekli to'plam* deyiladi. Masalan, Farg'ona politexnika instituti studentlari to'plami chekli to'plamni tashkil etadi. Agar to'plamning elementlari cheksiz ko'p bo'lsa, bunday to'plam *cheksiz to'plam* deyiladi. Masalan, natural, juft, musbat, toq sonlar to'plamlari cheksiz to'plamlarga misol bo'la oladi.

1.2.1- ta'rif. Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi.

Masalan, $x^2 + 1 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami bo'shdir.

1.2.2- ta'rif. Agar A to'plamning hamma elementlari B to'plamga tegishli bo'lsa, A to'plam B to'plamning *qism to'plami* deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Bunda « A to'plam B da yotadi» yoki « A to'plam B ning qismi» deb o'qiladi. Bu ta'rifdan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi: $\emptyset \subset A$, $A \subset A$.

1.2.3- ta'rif. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa $A = B$ deb qabul qilinadi.

1.2.4- ta'rif. A_i ($i = \overline{1; n}$) to'plamlarning *birlashmasi* (*yig'indisi*) deb, har bir elementi bu to'plamlardan aqalli bittasining elementidan iborat bo'lgan A to'plamga aytiladi va $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ yoki $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A = \{1, 3, 5\}$ va $B = \{2, 3, 4\}$ berilgan bo'lsa,

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

1.2.5- ta'rif. A_i ($i = \overline{1; n}$) to'plamlarning *kesishmasi* (*ko'paytmasi*) deb, har bir elementi bu to'plamlarning barchasining elementidan iborat bo'lgan A to'plamga aytiladi va $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ yoki $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

bo'lsa,

$$C = A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$$

bo'ladi.

1.2.6-ta'rif. A va B to'plamlarning *ayirmasi* deb, A to'plamning B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan iborat C to'plamga aytiladi va u $C = A \setminus B$ orqali belgilanadi.

Masalan,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$$

bo'lsa,

$$C = A \setminus B = \{1, 3, 5\}.$$

1.2.7-ta'rif. $A \supset B$ bo'lganda, $A \setminus B$ ayirma B to'plamning A gacha to'ldiruvchisi deyiladi va B_A kabi belgilanadi.

1.2.8-ta'rif. Agar $A_i (i = \overline{1, n}; n \in N, n \geq 2)$ to'plamlar berilgan bo'lib, ular vositasida $C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in A_i (i = \overline{1, n})\}$ to'plam tuzilgan bo'lsa, uni $A_i (i = \overline{1, n})$ to'plamlarning to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi deyiladi va

$$C = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

ko'rinshida yoziladi.

Biz yuqorida misol tariqasida keltirgan N natural sonlar to'plami kabi quyidagi sonli to'plamlarga bu kurs davomida ko'p marta murojaat qilishimizga to'g'ri keladi. Shu sababli, quyida ularni keltirishni lozim topdik:

- 1) $N = \{1; 2; \dots; n; \dots\}$ -natural sonlar;
- 2) $Z_0 = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$ - manfiy bo'lmagan butun sonlar;
- 3) $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$ -butun sonlar;
- 4) $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$ -ratsional sonlar;
- 5) J -irratsional sonlar;
- 6) $R = Q \cup J = (-\infty; +\infty)$ -haqiqiy sonlar;
- 7) $R_0 = [0; +\infty)$ -manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar;
- 8) $R^+ = (0; +\infty)$ -musbat haqiqiy sonlar;
- 9) $R^- = (-\infty; 0)$ -manfiy haqiqiy sonlar

to'plamlari.

To'plamlar ustidagi asosiy amallar quyidagi xossalarga ega:

$$1^0. A \cup B = B \cup A; \quad 2^0. A \cap B = B \cap A;$$

$$3^0. A \cup A = A; \quad 4^0. A \cap A = A; \quad 5^0. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$6^0. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

1.3. Chiziqli ifodalash

Aytaylik, M to'plam elementlari ustida qo'shish va ularni songa ko'paytirish amallari aniqlangan bo'lsin. Ya'ni $\forall x, y \in M$ uchun shunday $z \in M$ mavjud bo'lsinki, uni x va y larning yig'indisi deb atalib, $x + y = z$ kabi belgilansin, hamda $x + y = y + x$ (kommutativlik xossasi) va $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativlik xossasi) o'rinli bo'lib, undan tashqari, M ning shunday 0 (nol) deb ataluvchi elementi mavjud bo'lsinki, $x + 0 = x$ bajarilsin; shu bilan birga, $x \in M$ va $\lambda \in R$ (λ - son) uchun ularning ko'paytmasi deb ataluvchi va λx (yoki $x\lambda$) kabi belgilanuvchi M to'plamning elementi mavjud bo'lib, bu amal uchun

$$\lambda \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = 0, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

xossalar o'rinli bo'lsin; bu yerda $x, y, z \in M; \lambda, \mu \in R$ dir.

U vaqtda, $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ va $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ bo'lganda

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \left(= \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \right)$$

ifoda M to'plamga tegishli bo'lib, uni $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi deb ataladi. Agar $x \in M$ element

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$$

ko'rinshda ifodalangan bo'lsa, uni $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalangan (yoki qisqacha chiziqli ifodalangan) deb ataladi.

1.4. Haqiqiy sonning absolut qiymati

Berilgan x haqiqiy sonning absolut qiymati deb, u manfiy bo'lmaganda shu sonning o'ziga, manfiy bo'lganda esa uning qarama-qarshisiga aytiladi va $|x|$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Quyidagi xossalar o'rinli ekanligiga, ta'rifga asoslanib, ishonch hosil qilish qiyin emas:

$$1^0. \quad |x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2^0. \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad (a > 0), \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

$$3^0. \quad |x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad |x \pm y| \geq ||x| - |y||, \\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0).$$

$$4^0. \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

1.5. Kombinatorika elementlari

Bu yerda o'rinlashtirish, o'rinalmashtirish va kombinatsiya deb ataluvchi kombinatorika tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik, n ta elementdan tashkil topgan M to'plam berilgan bo'lsin.

Berilgan M to'plamning n ta elementlaridan m tasini ajratib olib ($1 \leq m \leq n$) tuzilgan guruh o'rinlashtirish deb ataladi. Bu yerda bir xil elementlardan tuzilib bu elementlarni joylashtirish tartibi bilan farqlanuvchi guruhlar turli (farqli) guruhlar deb qabul qilinadi. Bu usulda tuzilgan guruhlar sonini A_n^m bilan belgilanadi.

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \quad (1.5.1)$$

o'rinlidir. Buni matematik induksiya usuli yordamida isbotlash mumkin. Haqiqatdan ham,

$$1) \quad m=1 \text{ bo'lganda } A_n^1 = n \text{ bo'lishi ayondir;}$$

- 2) $m = k - 1$ uchun (1.5.1) o‘rinli deb faraz qilaylik ($1 < k \leq n$);
- 3) $m = k$ uchun (1.5.1) ni keltirib chiqaraylik.

Buning uchun $k - 1$ ta elementdan tuzilgan A_n^{k-1} ta o‘rinalashtirishlarning har biriga unda qatnashmagan $n - (k - 1) = n - k + 1$ ta elementlardan har birini birlashtirib k ta elementdan tuzilgan o‘rinlashtirishlarga ega bo‘lishimizni e‘tiborga olsak,

$$A_n^k = A_n^{k-1} \cdot (n - k + 1) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

ni, ya‘ni (1.5.1) formula $m = k$ uchun ham o‘rinli ekanligini olamiz.

Demak, (1.5.1) formula $1 \leq m \leq n$ uchun to‘g‘ridir.

Berilgan n ta elementdan n tadan qilib tuzilgan o‘rinlashtirishlarni o‘rinalmashtirishlar deyiladi va ularning sonini P_n bilan belgilanadi.

Demak,

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n! \quad (1.5.2)$$

Berilgan n ta elementdan m tadan qilib tuzilgan aqalli bitta elementi bilan boshqalaridan farq qiluvchi guruhlarini n ta elementdan m tadan qilib tuzilgan kombinatsiyalar deb ataladi va ularning sonini C_n^m bilan belgilanadi.

Agar o‘rinlashtirishlarda m ta bir xil elementlardan tuzilgan faqat ularning joylashish tartiblari bilan bib-biridan farq qiluvchi $P_m = m!$ ta guruhlar kombinatsiyalarda bitta guruh deb qabul qilinishini (yuqorida kiritilgan kombinatsiyalar tushunchasi asosida) hisobga olsak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

formulani olamiz, yoki

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n - m)!}, \quad (1.5.3)$$

bu yerda $0! = 1! = 1$ va $n \geq 2$ bo‘lganda $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ekanligini eslatamiz.

Agar bo‘sh to‘plam har qanday to‘plamga qism bo‘lishini va u yagona ekanligini e‘tiborga olsak, o‘rinlashtirishlar uchun $A_n^0 = 1$ bo‘ladi.

Undan tashqari, (1.5.1) formulani

$$A_n^m = \frac{n!}{m!}$$

ko‘rinishda yozsak, u vaqtda $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o‘xshash, $C_0^0 = 1$ ni ham olamiz.

1.6. Nyuton binomi formulasi

Oliy matematikani o‘rganishda va uning nazariy hamda ba’zi - bir amaliy masalalarini yechishda *Nyuton binomi* deb ataluvchi $(a + b)$ ikki hadning n -natural darajasini ifodalovchi

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (1.6.1)$$

formuladan foydalanishga to‘g‘ri keladi.

Bu yerda C_n^m larni *binomial koeffitsiyentlar* deb atash qabul qilingan bo'lib, ular uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

$$\begin{aligned} 1^0. \quad C_n^k &= C_n^{n-k}, \\ 2^0. \quad C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= C_n^k. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Bu xossalardan foydalanib, (1.6.1) ni matematik induksiya usuli bilan isbotlaylik.

Haqiqatdan ham, $a \neq 0$ va $b \neq 0$ bo'lganda (aks holda, bir hadning darajasiga ega bo'lib qolamiz):

a) $n=1$ uchun $(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a^1 \cdot b^0 + C_1^1 a^0 b^1$ (1.6.1) formulaning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz;

b) $n=m-1$ uchun (1.6.1) formula o'rinli deb faraz qilamiz:

$$(a+b)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k a^{(m-1)-k} \cdot b^k ;$$

b) $n=m$ uchun (1.6.1) formula o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} (a+b)^m &= (a+b)^{m-1} \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k a^{(m-1)-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \cdot a^{(m-1)-k+1} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \cdot a^{(m-1)-k} \cdot b^{k+1} = \\ &= a^m + \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^k \cdot a^{m-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^{k-1} \cdot a^{m-k} \cdot b^k + b^m = \\ &= a^m + \sum_{k=1}^{m-1} (C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k) \cdot a^{m-k} \cdot b^k + b^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \cdot a^{m-k} \cdot b^k, \end{aligned}$$

ya'ni $(a+b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} \cdot b^k$ kelib chiqdi.

Demak, (1.6.1) Nyuton binomi formulasi ixtiyoriy natural n uchun o'rinlidir.

(1.6.1) formulada b ni $-b$ bilan almashtirib,

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

formulani olamiz.

Agar binomial koeffitsiyentlarning yuqorida keltirilgan (1.6.2) xossalarini e'tiborga olsak, ularni quyidagi *Paskal sxemasi* bo'yicha hisoblash qulay ekanligini ko'ramiz:

1-bob bo'yicha o'z bilimingizni sinab ko'ring

1. Gapning inkori deganda nimani tushunasiz va unga qanday mantiqiy (logik) belgi qo'llaniladi?
2. Gaplarning kon'yunksiyasi va diz'yunksiyasi haqida nimalarni bilasiz?
3. Implikasiya va ekvivalensiya nimalardan iborat?
4. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari tushunchalarini keltiring.
5. «To'plam» tushunchasi qanday ma'noni bildiradi?
6. Har qanday A to'plam uchun $A \subset A$ va $\emptyset \subset A$ munosabatlar o'rinli bo'ladimi?
7. To'plamlar ustida qanday amallarni bilasiz?
8. Berilgan elementlarning chiziqli kombinatsiyasi va chiziqli ifodalashni tushuntiring.
9. Haqiqiy sonning absolut qiymati to'g'risida nimalarni bilasiz?
10. Nyuton binomi formulasini yozing.

2-bob.Determinantlar nazariyasining elementlari

Mazkur bobda oily algebraning determinant tushunchasini va uning chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga tatbiqini keltiramiz.

2.1. Determinant

Faraz qilaylik, $\{a_{ij} : i = \overline{1;n}, j = \overline{1;n}, n \in N\}$ to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari bo'lgan a_{ij} ifodalar ustida arifmetik amallar aniqlangan bo'lsin.

2.1.1-ta'rif. Yuqorida berilgan to'plamning har bir elementini *birinchi tartibli determinant* deb ataymiz va uning qiymati sifatida shu elementning o'zini qabul qilamiz ([4] §16).

Endi , $(n-1)$ – tartibli determinant tushunchasi aniqlangan degan faraz asosida n -tartibli determinantni ($2 \leq n \in N$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.1.1)$$

kabi belgilab, uning qiymatini aniqlash maqsadida quyidagi yordamchi tushunchalarni kiritamiz.

1) Yotiq (gorizontal) ko'rinishda yozilgan $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ni (2.1.1) *determinantning i-satri* (*i-satr – vektori*);

2) tik (vertikal) ko'rinishda yozilgan

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

ni j - ustuni (j - ustun – vektori);

3) $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ni esa *diagonali* (*bosh diagonali*) deb ataymiz.

2.1.2-ta'rif. $2 \leq n \in N$ bo'lganda (2.1.1) n -tartibli determinant a_{ij} ($i = \overline{1;n}, j = \overline{1;n}$) elementining $(n-1)$ - *tartibli minori* (*minori*) deb, mazkur element joylashgan determinantning i -satri va j -ustunini o'chirish natijasida hosil qilingan $(n-1)$ - tartibli determinantni ataymiz hamda M_{ij} kabi belgilaymiz.

Bu ta'rifdan ko'rinadikki, n - tartibli determinantda n^2 ta $(n-1)$ - tartibli minorlar mavjud bo'lib, yuqoridagi farazga ko'ra, ularning barchasi aniqlangandir.

2.1.3- ta'rif. (2.1.1) n - tartibli determinant a_{ij} elementining *algebraik to'ldiruvchisi* deb, $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ ni ataymiz va A_{ij} bilan belgilaymiz.

Demak, bu ta'rifga asosan,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad (i = \overline{1;n}, j = \overline{1;n}). \quad (2.1.2)$$

2.1.4-ta’rif. n -tartibli determinantning qiymati deb

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} \quad (2.1.3)$$

ni qabul qilamiz ([4] §16).

(2.1.3) ning o’ng tomonini *determinantning birinchi satri bo’yicha yoyilmasi* deb yuritiladi.

2.1.1. Ikkinchi tartibli determinant

Agar (2.1.3) da $n=2$ deb olsak, 2.1.1-ta’rif bilan birinchi tartibli determinant tushunchasi aniqlanganligi sababli, (2.1.2) yordamida

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^2 a_{1j} A_{1j} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (2.1.4)$$

ni olamiz.

Ikkinchi tartibli determinantda (a_{11}, a_{22}) *diagonal* bilan bir qatorda (a_{12}, a_{21}) ni *yordamchi diagonal* deb yuritiladi.

(2.1.4) dan *ikkinchi tartibli determinant qiymati diagonal elementlari ko’paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko’paytmasini ayirish natijasiga tengligini ko’ramiz.*

1-misol. $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 6 - (-2) \cdot 5 = -6 + 10 = 4.$

2-misol.

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

3-misol. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 \cdot (-1) = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

4-misol.

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \alpha = \rho (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \rho.$$

2.1.2. Uchinchi tartibli determinant

$n=3$ bo’lganda, ikkinchi tartibli determinant (2.1.4) bilan aniqlanganligini hisobga olib, (2.1.3) dan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
(2.1.5)

ni olish qiyin emas. Bu uchinchi tartibli determinantni hisoblashning asosiy formulasi bo'lib, uning o'ng tomonidagi ifodani hosil qilishda (2.1.3) bilan bir qatorda *uchburchaklar* hamda *Sarius qoidasi* deb ataluvchi usullar mavjuddir.

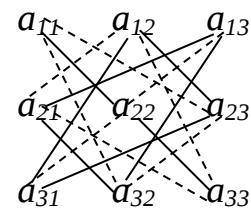
1. *Uchburchaklar qoidasi*. Asosi uchinchi tartibli determinant diagonaliga parallel uchlari esa determinant elementlari joylashgan nuqtalarda bo'lgan teng yonli uchburchaklar chizamiz (tasavvurimizda). Diagonalda joylashgan va aytilgan uchburchaklar uchlarida joylashgan 3 tadan elementlarni ko'paytirib, (2.1.5) ning o'ng tomonidagi ifodaning dastlabki 3 ta hadini, xuddi shunday ishni (a_{13}, a_{22}, a_{31}) yordamchi diagonal uchun ham takrorlab, olingan ko'paytmalarni qarama-qarshi ishoralar bilan olib, so'nggi 3 ta hadini hosil qilamiz (2.1.1-rasm).

5-misol.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 -$$

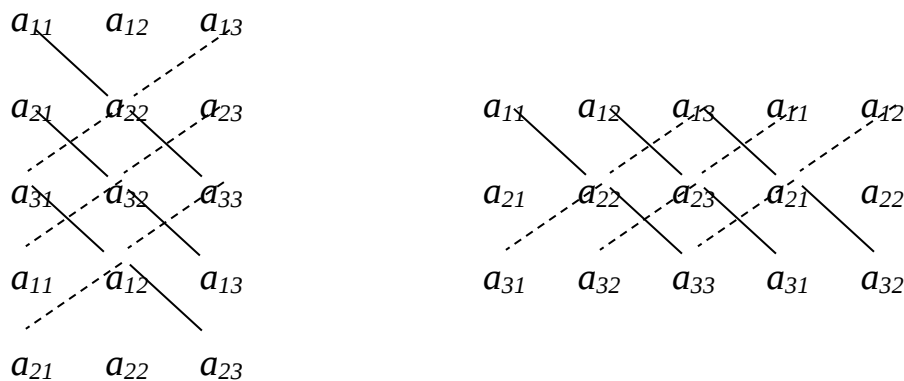
$$- 2 \cdot (-4) \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= 8 - 2 + 0 - 0 - 3 - 2 = 1.$$



2.1.1-rasm.

2. *Sarius qoidasi*. Bu usulda uchinchi tartibli determinantning birinchi va ikkinchi satrlarini uning davomiga mos ravishda to'rtinchi va beshinchi satrlar qilib yozib, determinant diagonaliga parallel uchtdan elementlar orqali o'tuvchi yana ikkita diagonallar o'tkazamiz. Ularga joylashgan uchtdan elementlarni ko'paytirib (2.1.5) ning birinchi uchta hadini va bu ishni yordamchi diagonal uchun ham bajarib olingan ko'paytmalar ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirib, so'ngi uchta hadini olamiz. Huddi shunga o'xshash ishni determinantning birinchi va ikkinchi ustunlarini mos ravishda to'rtinchi va beshinchi ustunlar qilib yozish bilan ham bajarish mumkin (2.1.2-rasm).



2.1.2-rasm.

2.2. Determinantning xossalari

2.2.1-teorema. $2 \leq n \in N$ bo'lganda (2.1.1) n -tartibli determinant uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad i = \overline{1; n} \quad (2.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad j = \overline{1; n}$$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda D_n - (2.1.1) n -tartibli determinantning qiymati, A_{ij} esa a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisidir.

Isbot. (2.2.1) ning birinchi munosabati $i=1$ bo'lgan hol uchun to'g'ri ekanligi n -tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi. Qolganlarini matematik induksiya usuli bilan ko'rsatamiz. Avvalo, (2.2.1) ning birinchi munosabati (2.1.1) n -tartibli determinantning i -satri bo'yicha, ikkinchisi esa j -ustuni bo'yicha yoyilmasi deb atalishini aytamiz.

$n=2$ uchun (2.2.1) o'rinli ekanligini ko'rsatish osondir. Masalan, ikkinchi ustun bo'yicha yoyilmani olsak,

$$\sum_{i=1}^2 a_{i2} A_{i2} = -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11} = D_2.$$

Qolganlari ham xuddi shunga o'xshash ko'rsatiladi.

Endi, (2.2.1) $n-1$ uchun to'g'ri deb uni n uchun ham to'g'ri bo'lishini ko'rsataylik. Yuqorida aytganimizdek,

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = D_n$$

ekanligi n -tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi.

$n \geq 3$ bo'lganda yordamchi $(n-2)$ -tartibli minor tushchasini kiritamiz. (2.1.1) n -tartibli determinant a_{ij} va a_{mk} ($i \neq m, j \neq k$) elementlariga mos $(n-2)$ -tartibli minor deb determinantning i - va m -satrlarini hamda j - va k -ustunlarini o'chirishdan hosil qilingan $(n-2)$ -tartibli determinantga aytamiz va M_{ijmk} kabi belgilaymiz ($M_{ijmk} = M_{mkij}$ ekanligi ravshandir).

Endi, i -satr bo'yicha determinant yoyilmasini qaraylik:

$$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} M_{ij}$$

Bu yerda M_{ij} (2.1.1) n -tartibli determinant a_{ij} elementining $(n-1)$ - tartibli minori ekanligidan, u $(n-1)$ -tartibli determinant bo'lib, yuqoridagi farazga ko'ra, uning uchun (2.2.1) munosabatlar o'rinlidir. $2 \leq i \leq n$ bo'lganda M_{ij} ning birinchi satri bo'yicha yoyilmasi

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k}$$

bo'lib, bu yerda $\sigma = \sigma_0(j-k)$, $\sigma_0(x)$ esa Hevisaydning birlik funksiyasidir:

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Demak,

$$\begin{aligned}
S_i &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{j \neq k=1}^n (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k} = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \sum_{k \neq j=1}^n (-1)^{i+j+\sigma-1} \cdot a_{ij} M_{ij1k} = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = S_1 = D_n,
\end{aligned}$$

ya'ni $S_i = D_n$, $i = \overline{2; n}$ ni olamiz. Bu satrlar bo'yicha yoyilmalar uchun (2.2.1) ning isbotidir.

Ustun bo'yicha yoyilmani olsak, $j = \overline{2; n}$ bo'lganda, xuddi yuqoridagiga o'xshash,

$$U_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = U_1 = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin (buni o'quvchining o'ziga qoldiramiz).

Endi, $U_1 = S_1$ ekanligini ko'rsatish kifoyadir.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} M_{i11j} = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \sum_{i=2}^n (-1)^i a_{i1} M_{i11j} = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = S_1.
\end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

(2.2.1) yordamida (2.1.1) n -tartibli determinantning quyidagi xossalari isbotlash mumkin.

1⁰. Determinantning barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozish (determinantni transponirlash) uning qiymatini o'zgartirmaydi.

2⁰. $2 \leq n \in N$ bo'lganda determinantning ikkita satrlarining (ustunlarining) o'rinlari o'zaro almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi.

3⁰. $2 \leq n \in N$ bo'lganda ikkita bir xil satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

4⁰. Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

5⁰. Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari bir xil ko'paytuvchiga ega bo'lsa, bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin, va aksincha, determinantni biror songa ko'paytirish uchun uning biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlarini shu songa ko'paytirish kifoyadir.

6⁰. Proportsional satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

7⁰. Agar determinantning biror satrining (ustunining) har bir elementi yig'indidan iborat bo'lsa, u mos satrining (ustunining) elementi berilgan determinantdagi mos satr (ustun) elementining mos qo'shiluvchisidan, qolgan

satrlari (ustunlari) esa berilgan determinant mos satrlaridan (ustunlaridan) iborat bo'lgan determinantlarning yig'indisiga tengdir. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8⁰. Determinant biror satri (ustuni) elementlari boshqa satrlar (ustunlar) mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u nolga tengdir.

9⁰. Determinant biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun) mos elementlarini bitta songa ko'paytirib qo'shilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

1⁰ xossani matematik induksiya usulini qo'llab va (2.2.1) dan foydalanib isbotlash mumkin. Haqiqatdan ham, $n=2$ uchun uning o'rinli ekanligiga bevosita (2.1.4) formuladan foydalanib ishonch hosil qilish osondir. Endi, $(n-1)$ -tartibli determinant uchun bu xossa o'rinli deb faraz qilib, uni n -tartibli determinant uchun isbotlaylik. Agar qiymati D_n dan iborat berilgan (2.1.1) n -tartibli determinant barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozishdan hosil qilingan determinantni berilganga *transponirlangan* deb atab, uning qiymatini D_n^* bilan belgilasak, uning birinchi satri bo'yicha yoyilmasidan foydalanib,

$$D_n^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = D_n$$

ni olamiz (M_{ij}^* orqali M_{ij} ning transponirlangani belgilangan bo'lib, qilingan farazga ko'ra ular uchun $M_{ij}^* = M_{ij}$ dir).

2⁰ xossa ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi. Buning uchun $n=2$ bo'lganda bevosita (2.1.4) dan foydalanish, $n \geq 3$ bo'lganda esa determinantning o'z o'rnida qolgan satri (ustuni) bo'yicha (2.2.1) yoyilmasini yozish kifoyadir.

3⁰ xossa 2⁰ ning natijasi sifatida kelib chiqadi.

4⁰ va 5⁰ xossa unda qayd qilingan satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanib isbotlanadi.

6⁰ xossa 5⁰ va 3⁰ larning natijasi sifatida kelib chiqadi.

7⁰ xossani ko'rsatish uchun elementlari yig'indilardan iborat satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanish kerak bo'ladi.

8⁰ va 9⁰ xossalar 7⁰ va 6⁰ larning natijasidir.

Bulardan tashqari determinantning yana bitta xossasini isbotsiz keltiramiz.

10⁰. n -tartibli A va B determinantlarning elementlari vositasida elementlari

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, & c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk} \\ c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ik}, & c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ki} \quad (i = \overline{1;n}, j = \overline{1;n}) \end{aligned}$$

formulalardan biri yordamida hisoblangan C determinant uchun

$$C = A \cdot B$$

o'rinlidir. Bu yerda a_{ij} A , b_{ij} B , c_{ij} esa C determinantlarning i -satri va j -ustuni elementidir ([4] §13).

5-misol.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

Yechish. Uchinchi ustun elementlarini -2 ga ko'paytirib, birinchi ustun mos elementlariga, so'ngra -3 ga ko'paytirib, to'rtinchi ustun mos elementlarga qo'shsak, 9^0 xossaga ko'ra

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 10 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 10 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \\ &= -(-80 - 30 + 18 + 120 - 10 + 36) = -54. \end{aligned}$$

2.2.2-teorema. $2 \leq n \in N$ bo'lganda n -tartibli determinant uchun

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} &= \delta_{ik} D_n \quad (i = \overline{1; n}, \quad k = \overline{1; n}) \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} &= \delta_{jk} D_n \quad (j = \overline{1; n}, \quad k = \overline{1; n}) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda δ_{pq} -Kroneker belgisi deb atalib, $p \in N, q \in N$ bo'lganda

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$$

kabi aniqlanadi.

Isbot. (2.2.2) ning birinchi munosabatida $i=k$, ikkinchisida esa $j=k$ bo'lgan hollarning isboti 2.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Demak, birinchi munosabatda $i \neq k$ va ikkinchisida esa $j \neq k$ deb faraz qilsak, ularning o'ng tomonlari noldan iborat bo'ladi. Chap tomonidagi ifoda esa (2.2.1) lar asosida birinchi munosabatda bir xil i - va k -satrlari, ikkinchisida esa bir xil j - va k -ustunlari mavjud bo'lgan determinantlar sifatida nolga tengdir. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

Determinant biror satri (ustuni) elementlarini algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi determinant qiymatiga, boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi esa nolga tengdir.

2.3. Determinant yordamida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish. Kramer formulalari

Aytaylik, n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = c_i; \quad i = \overline{1, n} \quad (2.3.1)$$

sistemasi berilgan bo'lsin, bu yerda $a_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ sistemaning koeffitsiyentlari va $c_i (i = \overline{1, n})$ uning o'ng tomoni (yoki ozod hadlari) deb atalib, ular berilgan (ma'lum) ifodalar (sonlar)dir, $x_j (j = \overline{1, n})$ esa noma'lumlardir.

Berilgan (2.3.1) sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.3.2)$$

ni sistemaning determinanti (aniqlovchisi) deyiladi.

2.3.1-ta'rif. Agar ushbu n ta $x'_j (j = \overline{1, n})$ ifodalar (sonlar) sistemasi uchun

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j = c_i; i = \overline{1, n}$ tengliklar o'rinli bo'lsa, bu ifodalar (sonlar) sistemasi (2.3.1) sistemaning yechimi deyiladi. Yechimi mavjud bo'lgan sistemani birgalikda, mavjud bo'lmasa, birgalikda emas deyiladi.

Agar (2.3.1) ning har ikki tomonini (2.3.2) ning A_{ik} algebraik to'ldiruvchisiga ko'paytirib, so'ngra, bu sistemaning barcha tenglamalarini hadlab qo'shsak, 2.2.2-teoremaga ko'ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ik} x_j \right) &= \sum_{i=1}^n c_i A_{ik} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} \right) x_j = \Delta_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta \cdot x_k = \Delta_k \end{aligned}$$

ni olamiz. Bu yerda Δ_k (2.3.2) sistema determinantining k -ustuni o'rniga (2.3.1) ning o'ng tomonini yozish bilan hosil qilinib, ularni sistemaning yordamchi determinantlari deb ataladi.

Oxirgi olingan natijani barcha $k = \overline{1, n}$ uchun bajarib,

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j; j = \overline{1, n} \quad (2.3.3)$$

sistemaga kelamiz. Bu shakl almashtirishlar natijasida hosil qilingan, (2.3.3) sistemani (2.3.1) ning yechimi qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas. Agar

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}^2 > 0, j = \overline{1, n} \quad (2.3.4)$$

shart bajarilsa, yuqorida bajarilganlar elementar shakl almashtirishlardan iborat bo'lib, (2.3.1) va (2.3.3) sistemalarning ekvivalent bo'lishi ravshandir.

Eslatma. (2.3.1) sistemada elementar shakl almashtirishlar deyilganda quyidagilarni tushunamiz:

- 1) (2.3.1) ning ixtiyoriy tenglamasining barcha hadlarini noldan farqli songa ko'paytirish yoki bo'lish;
- 2) ixtiyoriy ikkita tenglamalarining o'rinlarini almashtirish;
- 3) ixtiyoriy tenglamasining hadlariga boshqa biror tenglamasi mos hadlarini bitta songa ko'paytirib qo'shish.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2.3.4)ning bajarilishi kelib chiqadi va bu vaqtda (2.3.1) va (2.3.3) ekvivalent sistemalar bo'lib, ularning yechimi uchun

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \quad j = \overline{1, n} \quad (2.3.5)$$

ga ega bo'lamiz. (2.3.5) *Kramer formulalari* deb ataladi.

2.3.1-teorema. Agar (2.3.1) n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining (2.3.2) determinanti noldan farqli bo'lsa, u yagona yechimga egadir.

Isbot. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2.3.1)ning yechimi mavjudligini yuqorida isbotladik. Yagonaligi (2.3.1) va (2.3.3) sistemalar ekvivalentligidan kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$
 sistemani yeching.

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 = -22 \neq 0,$

demak, sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 9 = -44, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 28 = -22.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = \frac{44}{22} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1.$$

Javob:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

2-misol.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 12 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4(7 - 5) = -8 \end{aligned}$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 4 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -40 + 24 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -10 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 42 - 50 = -8;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1.$$

Javob:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

2.3.2-teorema. Agar (2.3.1) sistemaning (2.3.2) determinanti nolga teng (ya'ni $\Delta = 0$) bo'lib, uning yordamchi Δ_j ($j = \overline{1, n}$) determinantlaridan birortasi noldan farqli bo'lsa, (2.3.1) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teorema sharti asosida (2.3.3) sistema yechimga ega emasligi aniqdir. Agar (2.3.1) yechimga ega deb faraz qilinsa, bu yechim (2.3.3)ning ham yechimi bo'lishi kerak, ammo, buning bo'lishi mumkin emas. Demak, (2.3.1) yechimga ega emas ekan. Teorema isbotlandi.

2.3.3-teorema. Agar (2.3.1) sistemaning (2.3.2) determinanti Δ bilan birga uning yordamchi Δ_j ($j = \overline{1, n}$) determinantlarining barchasi nolga teng (ya'ni $\Delta_j = \Delta = 0$, $j = \overline{1, n}$) bo'lsa, u vaqtda (2.3.1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. $n=1$ bo'lgan holda $0x_1=0$ ko'rinishdagi tenglama cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi ma'lumdir. Endi, $n>1$ bo'lgan holni qaraylik. Teorema sharti asosida (2.3.3) sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi ravshandir. Agar (2.3.4) shart bajarilsa, (2.3.1) ham cheksiz ko'p yechimga egaligi kelib chiqadi. Demak, (2.3.4) shart bajarilmagan holni tekshirib ko'rish kifoyadir. Agar sistema ko'effitsiyentlarining barchasi nolga teng bo'lsa, (2.3.4) bajarilmaydi va bu holda sistemaning o'ng tomoni qanday bo'lishidan qa'ti nazar $\Delta_j = 0$, ($j = \overline{1, n}$) bo'lib, birorta tenglamaning o'ng tomonidagi son noldan farqli bo'lsa, bu tenglama ziddiyatli ekanligidan sistema yechimga ega bo'lmaydi; o'ng tomondagi barcha sonlar nolga teng bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi ravshandir.

Agar sistema ko'effitsiyentlaridan birortasi, masalan, $a_{i_0 j_0} \neq 0$ bo'lsa, i_0 tenglamaning har ikki tomonini bu noldan farqli ko'effitsiyentga bo'lib, so'ngra uning yordamida qolgan tenglamalardagi x_{j_0} qatnashgan hadni yo'qatish mumkin. Buning natijasida i_0 -tenglamada x_{j_0} noma'lum qolganlari orqali chiziqli

ifodalanadi va i_0 – tenglamasiz qolgan tenglamalardan tuzilgan $(n-1)$ noma'lumli $(n-1)$ ta chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti $(-1)^{i_0+j_0} \cdot \frac{\Delta}{a_{i_0 j_0}}$ ga teng

bo'lib, u ham $\Delta = 0$ bo'lganligi sababli, nolga tengdir. Xuddi shunga o'xshash bu sistemaning yordamchi determinantlari ham nolga teng bo'lishi ko'rsatiladi. Olingan sistema uchun yana teoremaning yuqorida isbotlangan qismida bayon qilingan hollardan biri yuz bersa, masala hal, aks holda, yuqorida qilingan ishni takrorlab, yana bitta noma'lumni yo'qatib, tenglamalar sonini bittaga kamaytiramiz va hokazo. Bu jarayon davomida biror qadamda teoremaning yuqorida isbotlangan qismida qayd qilingan hollardan biri yuz beradi yoki, aks holda, oxir oqibat (2.3.1) noma'lumlardan birortasiga nisbatan $0x_{k_0} = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga kelamiz va cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar (2.3.1) sistemaning o'ng tomonidagi barcha $c_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$) bo'sa, uni *bir jinsli sistema* deb atalib, $x_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$) unga yechim bo'lishi ayondir va bu holda bir jinsli sistema noldan farqli (x_j ($j = \overline{1, n}$) lardan birortasi noldan farqli bo'ladigan) yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng ($\Delta = 0$) bo'lishi zarur va yetarlidir.

3-misol.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

sistema tekshirilsin.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

sistema ikkinchi tenglamasini 2 ga bo'lib,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 3y = 3 \Leftrightarrow x = -1,5(y - 1)$$

ga ega bo'lamiz. Demak, sistema birgalikda va u cheksiz ko'p yechimga egadir: $\{(-1,5(y-1); y): y \in R\}$.

4-misol.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3, \\ 10x + 4y = 7 \end{cases}$$

sistema tekshirilsin.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Demak, sistema birgalikda emas.

5-misol.

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Berilgan sistema bir jinsli va uning determinanti nolga tengligi sababli u cheksiz ko'p yechimga egadir. Sistemaning uchinchi tenglamasi ikkinchi tenglamasini 2 ga hadlab ko'paytirish natijasi ekanligini ko'rish mumkin. Demak,

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \end{cases}$$

sistema berilganga teng kuchlidir. Bundan

$$\begin{cases} x - y = z, \\ x - 2y = z \end{cases}$$

sistemani hosil qilib, $z \in R$ ixtiyoriy son deb faraz qilib, uni yechsak,

$$\begin{cases} x = z, \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in R$$

ga kelamiz. Demak, $\{(t; 0; t) : t \in R\}$ - sistema cheksiz ko'p yechimga egadir.

2- bobga doir mashqlar

1. Determinantni hisoblang:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^3 & a^2 \end{vmatrix}; \quad e) \begin{vmatrix} a^2 - 1 & b + c \\ a^2 + a & ab + ac \end{vmatrix}; \quad f) \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^4 \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{vmatrix};$$

Javob: a) 17; b) -5; c) 1; d) 0; e) 0; f) $1/\cos^2 \alpha$

2. Tenglamani yeching:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & x^2 - 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x + 22 \end{vmatrix} = 0, \quad c) \begin{vmatrix} x & x + 1 \\ -4 & x + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad d) \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x - 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

Javob: a) $x = \pm 4$; b) $x = 2$; c) $x_1 = -1, x_2 = -4$;

$$d) x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{3}{2}.$$

3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yeching:

$$a) \begin{cases} 8x - y = 4; \\ 9x + 2y = 17 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 9y - 4x = 1; \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x - y = 6; \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

Javob: a) (1;4) b) (2;1) c) $\emptyset$,

4. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$a) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 7; \\ x - 2y + 4z = 6; \\ 3x - y + 5z = 11 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 4y + z = 1; \\ x + 5y - 3z = 18; \\ 3x + y + 9z = 4 \end{cases}$$

Javob: a) (2;0;1) b) (5;2;-1)

5. To'rt noma'lumli to'rtta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x - y + 5z - 2t = -8; \\ 3x - y + 4z - 3t = -12; \\ x - 3y + 6z - t = -12; \\ 3x - 2y + z - t = -11 \end{cases}$$

Javob: (-1;3;0;2)

Determinantlar nazariyasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. Ikkinchi tartibli determinant qanday hisoblanadi?
2. Uchinchi tartibli determinant tushunchasini bering.
3. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashda uchburchaklar usulini ko'rsating.
4. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashda Sarius usulini ko'rsating.
5. n -tartibli determinant haqida tushuncha bering.
6. Determinant minori va algebraik to'ldiruvchilariga ta'rif bering.
7. Determinantning xossalarini keltiring.
8. n ta noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida yechishni ko'rsating.
9. Kramer formulalarini yozing.
10. n ta noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'lishining zaruriy va yetarli shartini ayting.

3-bob. Vektorlar algebrasining elementlari

Tabiiy fanlarning ba'zi-bir bo'limlarida faqat son qiymati bilan tavsiflanuvchi va skalyarlar deb ataluvchi kattaliklar qatorida ham son qiymati ham yo'nalishi bilan tavsiflanuvchi kattaliklarni o'rganishga to'g'ri keladi. Bunday, ham son qiymati ham yo'nalishi bilan tavsiflanuvchi kattaliklarni *vektor kattaliklar* deb ataladi. Masalan, uzunlik, yuza, hajm, massa skalyar kattaliklarga; kuch, tezlik, tezlanish, magnit maydonining biror nuqtasidagi kuchlanishi vektor kattaliklarga misoldir.

Matematikada skalyar kattaliklarni *skalyarlar* deb atalib, ularni sonlar vositasida o'rganilsa, vektor kattaliklarni *vektor* tushunchasi yordamida o'rganiladi.

Geometriyada oddiy kesma tushunchasidan tashqari, yo'nalishli, ya'ni ma'lum bir uchi boshlanishi, ikkinchi uchi esa oxiri deb qabul qilingan kesma tushunchasi ham qaraladi. Yo'nalishli kesmani ma'lum tartibda olingan (berilgan), uning boshi va oxiri deb hisoblanuvchi, ikkita nuqta aniqlaydi. Oddiy kesmada esa uning uchlarini aniqlovchi ikkita nuqtalar tartibining ahamiyati yo'qdir.

3.1. Vektor tushunchasi

3.1.1-ta'rif. *Boshlanish va oxirgi nuqtasi ko'rsatilgan (aniqlangan) kesma (yo'nalishli kesma) yoki ikkita nuqtalarning tartiblangan jufti vektor deb atalib, birinchi nuqta uning boshi, ikkinchisi esa uchi (oxiri) deyiladi.*

Boshi A, uchi esa B nuqtada bo'lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ (yoki $\overline{AB}$) kabi belgilanadi (vektorning boshini anglatadigan harf har doim birinchi o'rinda yoziladi). Ba'zida vektor bitta satriy harf bilan ham belgilanadi, masalan, $\vec{a}$ (yoki $\bar{a}$) kabi. Chizmada vektor ko'rsatkichli kesma shaklida tasvirlanadi (3.3.1-rasm).

Boshi bilan uchi ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va $\vec{0}$ kabi belgilanadi. Nol vektor yo'nalishli emasligi aniqdir, shu sababli, uni oddiy nol soni kabi ham yoziladi.

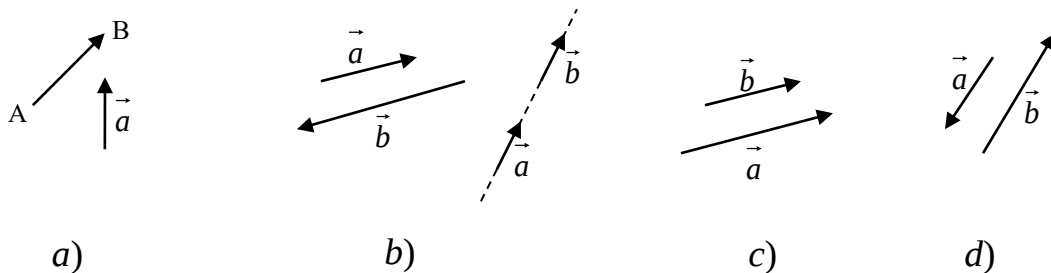
Vektorga mos kesmaning uzunligi uning *moduli* (yoki *uzunligi*) deyiladi. $\overrightarrow{AB}$ ($\vec{a}$) vektor moduli $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$) kabi belgilanadi. Faqatgina *nol vektor moduli nolga teng bo'lib, noldan farqli vektor moduli musbat son bo'lishi aniqdir.*

Moduli birga teng bo'lgan vektorni birlik vektor (ort) deb ataladi.

3.1.2-ta'rif. *Parallel to'g'ri chiziqlarda yoki bitta to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlarni kollinear vektorlar deb ataladi (3.1.1_b-rasm).*

Kollinear bo'lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni $\vec{a} \parallel \vec{b}$ kabi belgilanadi.

3.1.3-ta'rif. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lib, agar vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lsa, ular *yo'nalishdosh* (yoki *bir xil yo'nalishli*) deb ataladi va $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ kabi belgilanadi (3.1.1_c-rasm), agar yo'nalishlari turlicha bo'lsa, *qarama-qarshi yo'nalishli* deb atalib, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ kabi belgilanadi (3.1.1_d-rasm).



3.1.1-rasm.

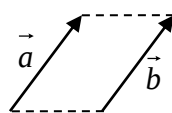
3.1.4-ta’rif. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ va $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ bo’lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi (3.1.2-rasm).

Bu ta’rifdan biror vektorni parallel ko’chirish natijasida hosil qilingan vektor dastlabki vektorga teng bo’lishi kelib chiqadi.

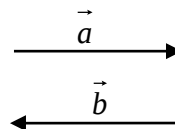
3.1.5-ta’rif. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ va $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ bo’lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar *qarama-qarshi vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = -\vec{b}$ (yoki $\vec{b} = -\vec{a}$) kabi yoziladi (3.1.3-rasm).

$\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ lar qarama-qarshi vektorlar ekanligi ravshandir.

$\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ kabi belgilanadi.



3.1.2-rasm.



3.1.3-rasm.

Quyidagi xossalarning o’rinli ekanligini ko’rsatish qiyin emas:

- 1⁰. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{a}$;
- 2⁰. $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$;
- 3⁰. $\vec{a} = -\vec{b} \wedge \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$.

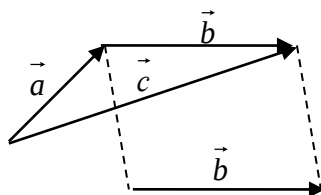
3.2. Vektorlar ustida chiziqli amallar

Vektorlar ustida chiziqli va chiziqsiz bo’lgan amallar mavjuddir. Bu bandda vektorlar ustidagi chiziqli bo’lgan ularni qo’shish, ayirish va songa ko’paytirish amallari bilan tanishamiz.

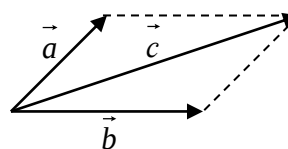
3.2.1. Vektorlarni qo’shish

3.2.1-ta’rif. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi deb, $\vec{b}$ vektor boshini parallel ko’chirish bilan $\vec{a}$ vektorning uchiga keltirilgach, boshi $\vec{a}$ ning boshida

uchi esa $\vec{b}$ ning uchida bo'lgan $\vec{c}$ vektorga aytiladi va $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ kabi yoziladi (3.2.1-rasm).



3.2.1-rasm.

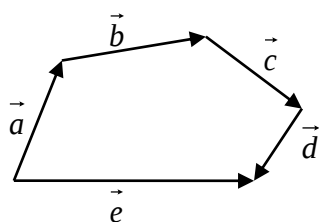


3.2.2-rasm.

Bu ta'rifda keltirilgan usul vektorlarni qo'shishning geometrik usullaridan biri bo'lib, uni *uchburchak qoidasi* (yoki *uch nuqta qoidasi*) deb yuritiladi. Bu borada *parallelogramm qoidasi* ham mavjud bo'lib, unda berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, parallel ko'chirish yordamida vektorlarning boshlari bir nuqtaga keltirilgach, ularga qurilgan parallelogrammning vektorlar umumiy boshidan chiquvchi diagonali qabul qilinadi (3.2.2-rasm).

Vektorlarni qo'shishning uchburchak va parallelogramm qoidalarining ekvivalent ekanligiga mustaqil ishonch hosil qilishni tavsiya qilamiz.

Vektorlar soni ikkitadan ortiq bo'lganda ularning yig'indisi *siniq chiziq qoidasi* bilan ta'riflanadi, ya'ni parallel ko'chirish bilan vektorlardan keyingisining boshini oldingisining uchiga keltirish natijasida hosil qilingan siniq chiziqning birinchi vektori boshini so'nggi vektori uchi bilan tutashtiruvchi (siniq chiziqni yopuvchi) vektor berilgan vektorlarning yig'indisi deb qabul qilinadi (3.2.3-rasm).



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

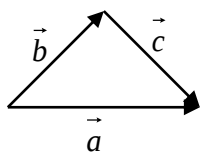
3.2.3-rasm.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

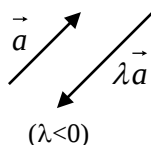
- 1⁰. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2⁰. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
- 3⁰. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 4⁰. $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

3.2.2. Vektorlarni ayirish

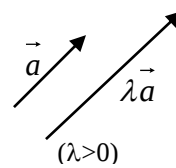
3.2.2-ta'rif. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorga teng bo'ladigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi va $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ kabi yoziladi ($\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$).



3.2.4-rasm.



3.2.5- rasm.



Bu ta'rifdan ko'rinadiki, vektorlarni ayirish ularni qo'shishga teskari amaldir. Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni geometrik jixatdan ayirish uchun ularning boshlarini, parallel ko'chirish yordamida, bitta nuqtaga keltirish, so'ngra, boshi ikkinchi ($\vec{b}$) vektorning uchida, uchi esa birinchi ($\vec{a}$) vektorning uchida bo'lgan ($\vec{c}$) vektorni qurish kifoyadir (3.2.4-rasm).

3.2.3. Vektorni songa ko'paytirish

3.2.3-ta'rif. Berilgan $\vec{a}$ vektorning berilgan λ songa ko'paytmasi deb, quyidagi qoidalar bilan aniqlanuvchi $\vec{b}$ vektorga aytiladi:

- 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, \lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$

va $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ (yoki $\vec{b} = \vec{a} \lambda$) kabi belgilanadi (3.2.5-rasm).

Vektorni songa ko'paytirish amali tubandagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir ($\lambda, \mu \in R$):

- 1⁰. $0\vec{a} = \vec{0}$;
- 2⁰. $\lambda \vec{0} = \vec{0}$;
- 3⁰. $1\vec{a} = \vec{a}$;
- 4⁰. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;
- 5⁰. $\lambda(\vec{a} \pm \vec{b}) = \lambda \vec{a} \pm \lambda \vec{b}$;
- 6⁰. $(\lambda \pm \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} \pm \mu \vec{a}$;
- 7⁰. $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu)\vec{a}$;
- 8⁰. $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

3.2.1-teorema. Agar $\vec{a} // \vec{b} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$ bo'lsa, shunday λ son mavjud bo'lib, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, bu son uchun $|\lambda| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo'lib, uning ishorasi

$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ bo'lsa musbat, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ bo'lsa manfiy, $\vec{b} = \vec{0}$ bo'lganda esa $\lambda = 0$ bo'lishi ravshandir.

Kezi kelganda, noldan farqli $\vec{a}$ vektor yo'nalish, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a_0} \wedge \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = 1$ bo'lgan $\vec{a_0}$ vektor esa, $\vec{a}$ vektorning (yo'nalishning) birlik vektori (orti) deb atalib, uning uchun

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a_0}$$

tenglik bajarilishini aytamiz.

3.3. Vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqlik va bog'liq emaslik (erklilik) tushunchalari

3.3.1-ta'rif. Berilgan $\vec{a}_i (i = \overline{1; n}, n \in N)$ vektorlar sistemasi (to'plami) uchun

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad (3.3.1)$$

tenglik $\lambda_i (i = \overline{1; n})$ sonlarning barchasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq emas (chiziqli erkli), aks holda, chiziqli bog'liq deyiladi.

$\vec{a}_i (i = \overline{1; n})$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lishi uchun (3.3.1) tenglik $\lambda_i (i = \overline{1; n})$ sonlardan aqalli bittasi noldan farqli bo'lganda o'rinli bo'lishi kerak ekan. Bundan, agar vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ulardan birortasini qolganlari orqali chiziqli ifodalash mumkinligi va, aksincha, agar vektorlar sistemasining vektorlaridan birortasini qolganlari orqali chiziqli ifodalash mumkin bo'lsa, ularning chiziqli bog'liqligi kelib chiqadi.

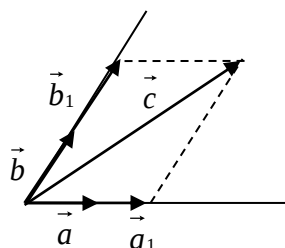
Quyidagi misollarni keltiramiz

1) Noldan farqli bitta $\vec{a}$ dan iborat bo'lgan sistemaning chiziqli erkli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

2) Kollinear bo'lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sitemasi chiziqli bog'liqdir va, aksincha, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sitemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ular kollinearidir. Haqiqatdan ham, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lganda, $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$ hol uchun bu aniqdir, agar vektorlardan biri, masalan, $\vec{a} \neq \vec{0}$ bo'lsa, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ bo'lishi 3.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Demak, $-\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ bo'lib, $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$ tenglik $\lambda_1 = -\lambda$, $\lambda_2 = 1 \neq 0$ uchun o'rinli ekanligidan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqdir. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas (o'quvchining o'ziga havola qilamiz).

3). Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa, ularni komplanar vektorlar deb ataladi.

Komplanar bo'lgan uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi va, aksincha, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, ular komplanardir. Haqiqatdan ham, vektorlardan biror juftligi kollinear (masalan, $\vec{a} \parallel \vec{b}$) bo'lgan hol uchun bu ravshandir. Demak, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasida birorta ham juftlik kollinear bo'lmagan holni qarash kifoyadir. Bu holda, vektorlarning uchulasi ham noldan farqli ekanligi aniq bo'lib, ular komplanar bo'lganligi uchun parallel ko'chirish yordamida ularning boshlari bitta nuqtaga keltirilgach, bitta tekislikda yotishi ham aniqdir. Demak, bu vektorlardan birini (masalan, $\vec{c}$) parallelogramm qoidasi yordamida qolgan ikkitasining (masalan, $\vec{a}, \vec{b}$) yo'nalishlari bo'yicha ikkita vektorlarning (3.2.6-rasmda $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}$ va $\vec{b}_1 \parallel \vec{b}$) yig'indisi orqali ifodalash mumkin.



3.2.6- rasm.

3.2.6-rasmdan $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$.

Endi, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a} \wedge \vec{b}_1 \parallel \vec{b} \wedge |\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{a} \wedge \vec{b}_1 = \lambda_2 \vec{b}$ ekanligini hisobga olsak, $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} \Rightarrow \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} - \vec{c} = 0$.

Demak, $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$ tenglik $\lambda_3 = -1 \neq 0$ bo'lganda bajarilganligi uchun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqdir.

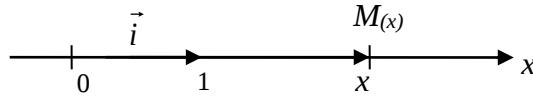
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ularning komplanar ekanligini ko'rsatish qiyinchilik tug'dirmaydi (mustaqil bajarishni tavsiya qilamiz).

3.4. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi

Avvalo, o'q tushunchasini kiritaylik. Agar berilgan to'g'ri chiziqlida yotgan holda qo'zg'aluvchi nuqtani qarasak, u faqat ikki yo'nalish bo'yicha harakatlanishi mumkinligi aniqdir. Bu yo'nalishlardan birini musbat boshqasini esa manfiy deb qabul qilsak, to'g'ri chiziqlida musbat yo'nalish aniqlangan deyiladi.

Musbat yo'nalishi tanlangan to'g'ri chiziqli o'q deyiladi va o'qning yo'nalishi deyilganda, uning musbat yo'nalishini tushunamiz.

O'qning yo'nalishi, odatda, to'g'ri chiziqliga ko'rsatkich qo'yish bilan aniqlanadi (3.4.1-rasm).



3.4.1- rasm.

O‘qning yo‘nalishi bilan yo‘nalishdosh birlik $\vec{i}$ vektor uning *orti (bazisi)* deyiladi.

To‘g‘ri chiziqda musbat yo‘nalish $\vec{i}$ ort va koordinatalar boshi deb ataluvchi O nuqta tanlab olingan bo‘lsin. U vaqtda, bu to‘g‘ri chiziq o‘qdan iborat va unda yotgan M nuqtaga $\overrightarrow{OM}$ vektorni mos qo‘yish mumkin bo‘lib, $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{i} \wedge |\vec{i}| = 1 \neq 0$ ekanligidan 3.2.1-teoremaga ko‘ra

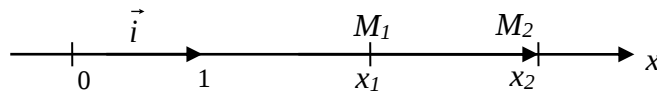
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \quad (3.4.1)$$

ni yozish mumkin. (3.4.1) da $|x| = |\overrightarrow{OM}|$ bo‘lib, $\overrightarrow{OM} \uparrow \vec{i} \Rightarrow x > 0$, $\overrightarrow{OM} \downarrow \vec{i} \Rightarrow x < 0$, M nuqta O bilan ustma-ust tushsa, $x = 0$ bo‘lishi ravshandir.

Demak, yuqorida kiritilgan o‘qning har bir M nuqtasiga (3.4.1) vositasida aniq bitta x sonni mos qo‘yish mumkinligini ko‘ramiz. Va, aksincha, har bir x haqiqiy songa, (3.4.1) vositasida, aytilgan o‘qning bitta M nuqtasi mos qo‘yiladi. Demak, bunday kiritilgan o‘qning nuqtalari va haqiqiy sonlar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan. Bunday kiritilgan o‘qni Ox o‘qi deb nomlab, unda *Dekart koordinatalar sistemasi* kiritilgan deb ataymiz, hamda M nuqtaga (3.4.1) vositasida mos qo‘yilgan x sonni uning *koordinatasi* deb atab, $M(x)$ ko‘rinishda yozishni qabul qilamiz. Shuningdek, x sonni $\overrightarrow{OM}$ vektorning *koordinatasi* deb ham ataymiz.

Bunday kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasini *sonlar o‘qi* deb atalishi bizga ma’lumdir.

Eslatma. Ko‘pincha, x songa o‘qdagi mos nuqtani x ning o‘zi bilan belgilanadi (3.4.1-rasmga qarang).



3.4.2-rasm.

Endi, Ox o‘qining $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalari bilan aniqlanuvchi $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni qarasak (3.4.2-rasm),

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i}$$

ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emasdir.

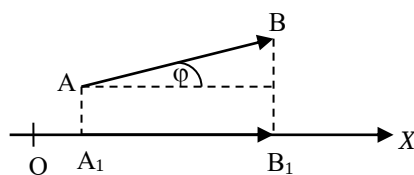
Demak,

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = |x_2 - x_1| \quad (3.4.2)$$

bo'lishi ravshandir. (3.4.2) sonlar o'qidagi ikki nuqta orasidagi masofa formulasidir.

3.4.1-ta'rif. $\overrightarrow{AB}$ vektorning Ox o'qidagi proyeksiyasi deb, uning boshi va uchidan o'qqa tushirilgan perpendikulyarlarning asoslari bo'lgan A_1 va B_1 mos nuqtalar bilan aniqlanuvchi $\overrightarrow{A_1 B_1}$ vektor o'q bilan yo'nalishdosh bo'lganda $|\overrightarrow{A_1 B_1}|$ ga, qarama-qarshi yo'nalishli bo'lganda $-|\overrightarrow{A_1 B_1}|$ ga, nol vektordan iborat bo'lganda (A_1 va B_1 lar ustma-ust tushganda) esa nolga aytiladi va $\pi p_{ox} \overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi (3.4.3-rasm).

Demak, ta'rif bo'yicha $\pi p_{ox} \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1 B_1}|$ bo'lib, bu yerda «+» ishora $\overrightarrow{A_1 B_1} \uparrow \uparrow Ox$, «-» esa $\overrightarrow{A_1 B_1} \uparrow \downarrow Ox$ bo'lgan holga to'g'ri keladi.



3.4.3- rasm.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning Ox o'q yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi $(\overrightarrow{AB}, \wedge Ox) = \varphi$ ma'lum bo'lsa, 3.4.3-rasmidan

$$\pi p_{ox} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi \quad (3.4.2)$$

ekanligini olish qiyin emas.

(3.4.2) yordamida va 3.4.1-ta'rifga asoslanib proyeksiyaning quyidagi xossalari ko'rsatish osondir ($\lambda \in R$):

$$1^0. \quad \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp Ox \Leftrightarrow \pi p_{ox} \vec{a} = 0;$$

$$2^0. \quad \pi p_{ox} (\lambda \vec{a}) = \lambda \pi p_{ox} \vec{a};$$

$$3^0. \quad \pi p_{ox} (\vec{a} \pm \vec{b}) = \pi p_{ox} \vec{a} \pm \pi p_{ox} \vec{b};$$

4⁰. Agar $\vec{a}$ vektorning boshi va uchidan Ox sonlar o'qiga tushirilgan perpendikulyarlar asoslarining (ya'ni ortogonal proyeksiyalarining) koordinatalari mos ravishda x_1 va x_2 bo'lsa, $\pi p_{ox} \vec{a} = x_2 - x_1$ bo'ladi.

3.5. Vektorni berilgan yo'nalishlar bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratish Dekart bazisi

Avvalo, bu tushunchalarni tekislikda qaraymiz. Aytaylik, tekislikda kollinear bo'lmagan (chiziqli erkli) $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar (yo'nalishlar) berilgan bo'lsin. U vaqtda, shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni olsak, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}\}$ vektorlar

sistemi komplanar bo'lib, ular chiziqli bog'liq ekanligidan $\vec{a}$ ni $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar orqali

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad (3.5.1)$$

kabi chiziqli ifodalash mumkin bo'lib (3.3-bandga qarang), $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tekislikdagi *bazis* (yoki *bazis vektorlar*); x va y lar $\vec{a}$ vektorning *koordinatalari*; (3.5.1) ning o'ng tomoni *bazis bo'yicha yoyilmasi*; $x\vec{e}_1$ va $y\vec{e}_2$ larni esa tashkil etuvchilari deb ataladi va $\vec{a}(x; y)$ yoki $\vec{a} = (x; y)$ yoki $\vec{a} = \{x; y\}$ kabi yozishga kelishib olamiz va uni tekislikda koordinatalari bilan berilgan vektor deb ataymiz.

$$\vec{a}(x; y) = \vec{0} \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0) \text{ ekanligi ravshandir, ya'ni } \vec{0}(0; 0).$$

Tekislikda berilgan ikkita yo'nalishlar (vektorlar) ortlardan (birlik vektorlardan) iborat va perpendikulyar bo'lgan holni qarab, ularni $\vec{i}, \vec{j}$ kabi belgilaylik. Demak, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \wedge \vec{i} \perp \vec{j}$.

Mazkur tekislikda biror O nuqtani olib, uni orti $\vec{i}$ dan iborat Ox va $\vec{j}$ dan iborat Oy o'qlarning umumiy boshi deb qabul qilaylik (3.5.1-rasm). Bu tekislikning ixtiyoriy M nuqtasini olib uni O nuqta bilan tutashtiruvchi $\vec{OM}$ vektorni qurib, uning Ox va Oy o'qlarga proyeksiyalarini mos ravishda $\pi_i \vec{OM} = x$, $\pi_j \vec{OM} = y$ deb belgilasak, tekislikdagi har bir M nuqtaga ikkita sonlarning yagona $(x; y)$ juftligi mos kelishini ko'ramiz. Buning aksinchasi ham to'g'ridir, ya'ni ikkita sonlarning har bir $(x; y)$ juftligiga yuqoridagi tekislikning yagona M nuqtasi mos keladi. Demak, bu tekislikning nuqtalari va ikkita sonlarning tartiblashgan juftliklari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjuddir. Bu aytilganlarga asoslanib, *tekislik nuqtasini $M(x; y)$ ko'rinishda belgilashga, x va y larni uning koordinatalari, x ni abssissasi, y ni esa ordinatasi deb, hamda Ox ni abssissalar, Oy ni esa ordinatalar o'qi deb atashga kelishib olamiz.*

Bu usul bilan kiritilgan sistemani *tekislikda Dekart koordinatalar sistemi* deb ataladi va, odatda, uni xOy kabi belgilanadi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar Dekart koordinatalar sistemi kiritilgan tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni sistema o'qlarining ortlari $\vec{i}$ va $\vec{j}$ lar bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratsak, (3.5.1)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

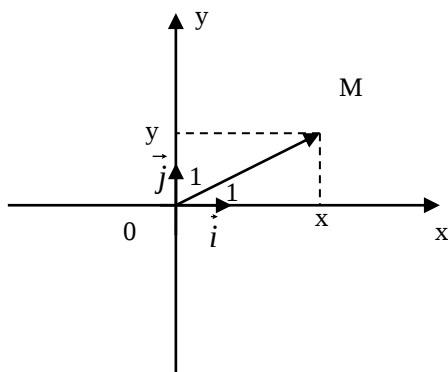
ko'rinishni olib, bunda

$$x = \pi_i \vec{a}, \quad y = \pi_j \vec{a}$$

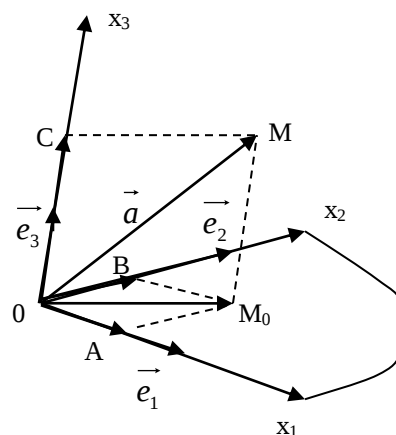
bo'lishi ravshandir. Bu holda, $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlarni *tekislikda Dekart bazisi* deb ataymiz.

Ox – abssissalar o'qini yotiq (gorizontal) holatda (demak, Oy – ordinatalar o'qini tik (vertikal) holatda) olish odatini (an'anasi) saqlab qolamiz (3.5.1-rasm).

1-eslatma. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini ba'zan *koordinatalar tekisligi* deb yuritiladi.



3.5.1-rasm.



3.5.2-rasm.

Endi, fazoda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarning komplanar bo'lmagan sistemasi berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning boshini bitta O nuqtaga keltirib, orte $\vec{e}_i$ vektorning birlik vektori $\vec{e}_{i0}$ ($i = \overline{1;3}$) dan iborat boshi eslatilgan O nuqtada bo'lgan uchta Ox_i ($i = \overline{1;3}$) o'qlarni o'tkazaylik. U vaqtda, yo'nalishlar komplanar bo'lmaganligi sababli bu o'qlarning har ikkitasi orqali bitta (demak, jami 3 ta) tekislik o'tadi. Aniqlik uchun ulardan bittasini, masalan, Ox_1 va Ox_2 o'qlar orqali o'tuvchisini olaylik (3.5.2-rasm). Fazoda $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsa, uni parallel ko'chirish bilan 3.5.2-rasmdagidek $\vec{OM}$ holatga keltirilgan deb faraz qilib, M nuqta orqali Ox_3 o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, u yuqorida aytilgan tekislikni biror M_0 nuqtada kesadi. U vaqtda, $\vec{OM}_0$ vektor kollinear bo'lmagan $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ yo'nalishlar tekisligida yotganligi sababli uni (3.5.1) ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\vec{OM}_0 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

3.5.2-rasmdan $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{M_0M}$ va $\vec{M_0M} \parallel \vec{e}_3$ ekanligidan $\vec{M_0M} = z\vec{e}_3$ bo'lib,

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (3.5.2)$$

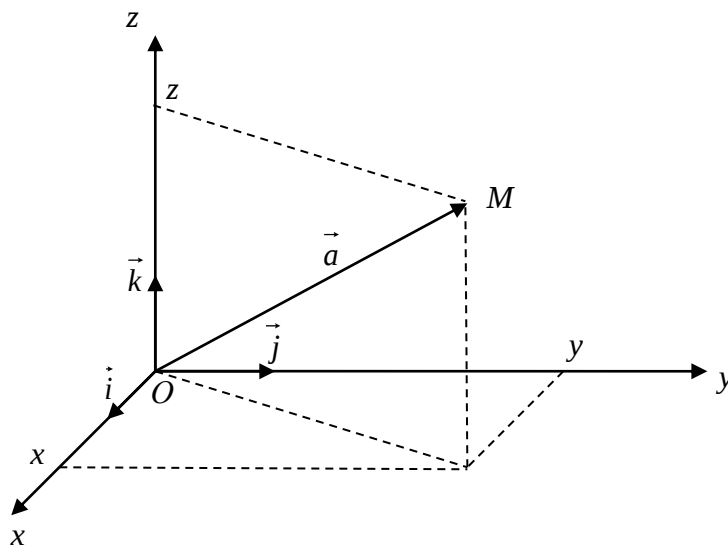
ni olamiz. Demak, fazoda komplanar bo'lmagan uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar berilgan bo'lsa, ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni ular yordamida (3.5.2) ko'rinishda chiziqli ifodalash mumkin ekan. Bunda $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ni *fazoda bazis*; x, y, z larni $\vec{a}$ vektorning *koordinatalari*; (3.5.2) ning o'ng tomonini *bazis bo'yicha yoyilmasi*; $x\vec{e}_1, y\vec{e}_2, z\vec{e}_3$ larni esa *tashkil etuvchilari* deb ataladi. Bu holda $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a}(x; y; z) \text{ yoki } \vec{a} = (x; y; z) \text{ yoki } \vec{a} = \{x; y; z\}$$

kabi yozishga kelishib olamiz va uni *koordinatalari bilan berilgan vektor* deb ataymiz. $\vec{0}(0; 0; 0)$ ekanligi ravshandir.

Yuqorida qilingan mulohazalarga asoslanib, fazoda uchtdan ortiq vektorlardan iborat sistema chiziqli bog'liq bo'ladi degan xulosani chiqarish mumkin.

Fazoda berilgan uchta yo'nalishlar (vektorlar) ortlardan (birlik vektorlardan) iborat va ular juft-jufti bilan perpendikulyar bo'lgan holni qaraylik. U vaqtda, yuqorida kiritilgan o'qlarni mos ravishda Ox-abssissalar, Oy-ordinatalar, Oz-applikatalar o'qi deb ataymiz va ularning ortlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ deb belgilaymiz. Ox va Oy o'qlarini yotiq (gorizontal) tekislikda yotadi (an'anaga asoslanib) deb faraz qilamiz (3.5.3-rasm).



3.5.3-rasm.

Bu holda (3.5.2)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ko'rinishni oladi va $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ ekanligidan M nuqta x, y, z koordinatalarga ega deb, $M(x; y; z)$ kabi yozishni shartlashamiz. Undan tashqari,

$$x = \pi_{\vec{i}} \overrightarrow{OM}, \quad y = \pi_{\vec{j}} \overrightarrow{OM}, \quad z = \pi_{\vec{k}} \overrightarrow{OM}$$

ekanligi ravshandir.

Bunday kiritilgan sistemani *fazoda Dekart koordinatalar sistemasi*, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ esa *fazoda Dekart bazisi* deb ataladi va Oxyz kabi belgilanadi.

2-eslatma. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini *koordinatalar fazosi* va har ikkita koordinatalar o'qlari orqali o'tuvchi tekislikni koordinatalar tekisligi deb yuritiladi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar uchun quyidagilar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2), x_i; y_i; z_i \in R (i = \overline{1; 2}), \lambda \in R$ bo'lsin:

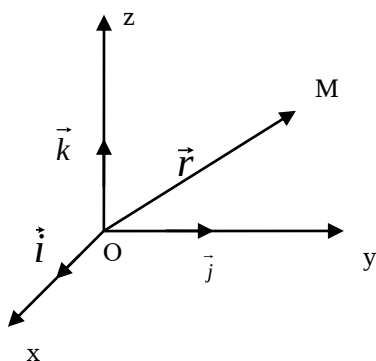
- 1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2);$
- 2) $\vec{O}(0; 0; 0);$
- 3) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2);$
- 4) $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1).$

3-eslatma. Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoning nuqtalari to'plami va $R^3 = R \times R \times R = \{(x; y; z): x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$ to'plam orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjudligi sababli uni R^3 (*uch o'lchovli*) fazo deb yuritiladi. Xuddi

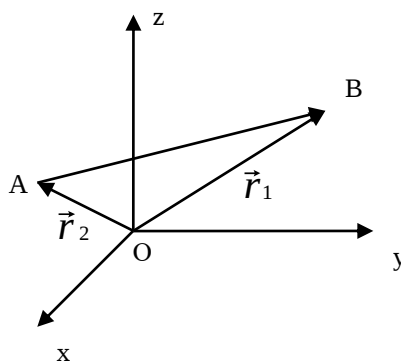
shunga o'xshash, Dekart koordinatalar tekisligini R^2 (ikki o'lchovli), sonlar o'qini esa R (bir o'lchovli) fazo deb yuritilishini aytamiz.

3.6. Nuqtaning radius vektori

Aytaylik, fazoda Oxyz Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, unda $M(x;y;z)$ nuqta olingan bo'lsin. U vaqtda, M nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashiruvchi $\overrightarrow{OM}$ vektor uning *radius vektori* deyilib, $\vec{r}$ bilan belgilanadi, ya'ni $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (3.6.1-rasm).



3.6.1- rasm.



3.6.2- rasm.

$M(x;y;z)$ nuqta radius vektorining koordinatalari shu nuqta koordinatalaridan iborat, ya'ni $\vec{r} = (x; y; z)$ ekanligini ko'rish qiyin emasdir.

Demak,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ni yozish mumkin.

Agar fazoda boshi $A(x_1;y_1;z_1)$, uchi $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalarda bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni qarasak, 3.6.2-rasmdan foydalanib, $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin (mustaqil bajaring). Demak, $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatalari uchi va boshining mos koordinatalarining ayirmasidan iborat bo'lar ekan.

3.7. Vektorning moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari

Aytaylik, $\vec{a}(x;y;z)$ vektor berilgan bo'lsin. Uni uch o'lchovi $|x|, |y|, |z|$ lardan iborat to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonali deb qarash mumkin (3.7.1-rasm). U vaqtda,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.7.1)$$

ni olamiz. (3.7.1) vektor modulini uning koordinatalari vositasida topish formulasidir.

Agar $\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{i})$, $\beta = (\vec{a} \wedge \vec{j})$, $\gamma = (\vec{a} \wedge \vec{k})$ burchaklarni kiritsak,

$\pi p_i \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$, $\pi p_j \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta$, $\pi p_k \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma$ tengliklardan hamda
 $\pi p_i \vec{a} = x$, $\pi p_j \vec{a} = y$, $\pi p_k \vec{a} = z$ va (3.7.1) ni hisobga olib, $|\vec{a}| \neq 0$ bo'lganda

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

larni olamiz. Bunday aniqlangan $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ lar $\vec{a}$ vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari deb ataladi. Ular quyidagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

- 1⁰. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$;
- 2⁰. $\vec{a}_0(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ berilgan $\vec{a}$ vektorning birlik vektoridan iboratdir.

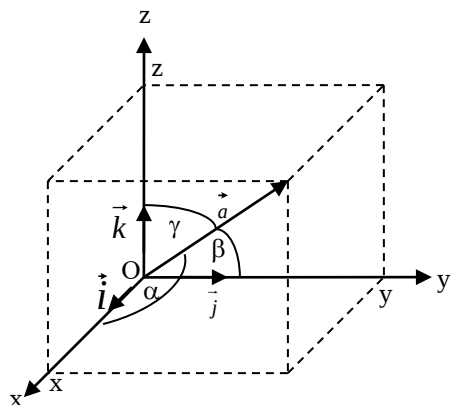
Agar $\vec{a}(x; y)$ vektor koordinatalar tekisligida berilgan bo'lsa, (3.7.1)

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

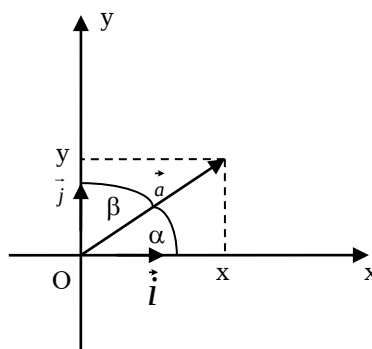
ko'rinishni oladi. Bu holda, $\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{i})$, $\beta = (\vec{a} \wedge \vec{j})$ burchaklar uchun $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ bo'lib, $|\vec{a}| \neq 0$ bo'lganda yo'naltiruvchi kosinuslar

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

bo'ladi (3.7.2-rasmga qarang).



3.7.1- rasm.



3.7.2- rasm.

3.8. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Agar $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar koordinatalar fazosida berilgan bo'lsa, ular orasidagi masofani $d(A; B)$ bilan belgilasak,

$$d(A; B) = |\overrightarrow{AB}|$$

ekanligi ravshandir.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

bo'lganligidan (3.7.1) formulaga ko'ra

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.8.1)$$

ni olamiz. (3.8.1) *ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidir.*

Aytaylik, yuqoridagi A va B nuqtalar bilan birga λ son ham berilgan bo'lib, nuqtalar ustma-ust tushmasin. U vaqtda, AB kesmani λ nisbatda bo'lish masalasi quyidagicha qo'yiladi: AB kesma yotgan to'g'ri chiziqda shunday C nuqta topilsinki, $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ tenglik o'rinli bo'lsin (3.8.1-rasm).

$C(x; y; z)$ desak, $\overrightarrow{AC} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{CB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}$ bo'lib, yuqoridagi tenglikdan

$$\begin{aligned} \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} &= \{\lambda (x_2 - x_1); \lambda (y_2 - y_1); \lambda (z_2 - z_1)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow x - x_1 &= \lambda (x_2 - x_1), y - y_1 = \lambda (y_2 - y_1), z - z_1 = \lambda (z_2 - z_1). \end{aligned}$$

ni va oxirigidan

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (3.8.2)$$

ni olamiz. (3.8.2) *kesmani berilgan λ nisbatda bo'lish formulalaridir.*

Agar $\lambda=1$ bo'lsa, kesmaning o'rtasini topish formulalariga ega bo'lamiz:

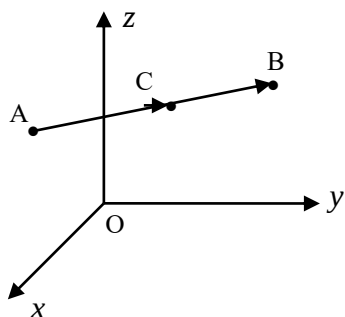
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (3.8.3)$$

Eslatma. Agar yuqorida koordinatalar tekisligi haqida so'z ketsa, (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3) formulalarda uchinchi koordinata qatnashmaydi. Ya'ni koordinatalar tekisligida berilgan $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar uchun (3.8.1) formula

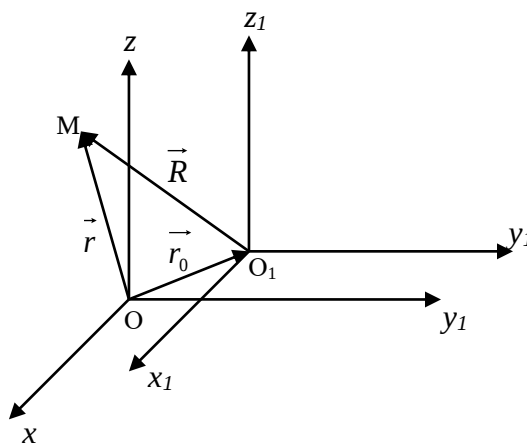
$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ko'rinishni; (3.8.2) esa $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

ko'rinishni oladi. Sonlar o'qidagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar uchun

$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$, $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ kabi bo'ladi.



3.8.1- rasm.



3.9.1- rasm.

3.9. Koordinatalar boshini ko'chirish formulalari

Aytaylik, fazoda kiritilgan Oxyz Dekart koordinatalar sistemasining boshini, o'qlari yo'nalishlarini saqlagan holda, uning $O_1(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasiga ko'chirib yangi $O_1x_1y_1z_1$ sistema hosil qilingan bo'lsin (3.9.1-rasm).

Fazodagi M nuqta Oxyz sistemada $M(x; y; z)$, $O_1x_1y_1z_1$ da esa $M(x_1; y_1; z_1)$ koordinatalarga ega deb faraz qilaylik. U vaqtda, 3.9.1-rasmdan ko'rinadiki, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$ tenglik o'rinlidir. Radius-vektorlar uchun $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$ $\vec{R} = (x_1; y_1; z_1)$ ekanligidan, yuqoridagi tenglikka asosan,

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0, \\ z_1 = z - z_0 \end{cases} \quad (3.9.1)$$

ni olamiz. (3.9.1) *koordinatalar boshini ko'chirish formulalari (almashtirishlari)* deb yuritiladi.

Eslatma. Agar yuqorida koordinatalar tekisligi haqida so'z ketgan bo'lsa, (3.9.1) da uchinchi z koordinata qatnashmaydi. Ya'ni, xOy koordinatalar tekisligi boshini, uning o'qlari yo'nalishini o'zgartirmay, $O_1(x_0; y_0)$ nuqtasiga ko'chirilgan bo'lsa, M nuqtaning dastlabki xOy sistemadagi $(x; y)$ va keyingi x_1Oy_1 sistemadagi $(x_1; y_1)$ koordinatalari orasidagi bog'lanish

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0 \end{cases}$$

dan iborat bo'lishi ravshandir.

Sonlar o'qida O koordinatalari boshi uning $M_0(x_0)$ nuqtasiga ko'chirilsa, M nuqtaning dastlabki va keyingi sonlar o'qidagi mos x va x_1 koordinatalari orasida

$$x_1 = x - x_0$$

bog'lanish borligi aniqdir.

3.10. Vektorlar ustida chiziqsiz amallar

Vektorlar ustida turli chiziqsiz amallar mavjud bo'lib, bu yerda ulardan uchta, ya'ni ikki vektorning skalyar va vektor ko'paytmalarini hamda uch vektorning aralash ko'paytmasini keltiramiz.

3.10.1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

3.10.1-ta'rif. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ularning modullaridan va ular orasidagi burchak kosinusidan iborat sonlarning ko'paytmasiga aytiladi va $(\vec{a}, \vec{b})$ yoki $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Ta'rif bo'yicha

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (3.10.1)$$

bo'lib, bu yerda $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ dir (3.10.1-rasm).

Skalyar ko'paytmaning quyidagi xossalriga, uning ta'rifiga asoslanib, ishonch hosil qilish osondir:

$$1^0. \quad \vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee (\vec{a} = \vec{0} \wedge \vec{b} = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0;$$

$$2^0. \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

ya'ni vektorning skalyar kvadrati modulining kvadratiga tengdir;

$$3^0. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$4^0. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \pi p_a \vec{b} = |\vec{b}| \pi p_b \vec{a};$$

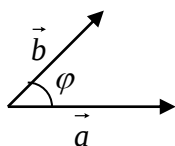
$$5^0. \quad (\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} \pm \vec{a}_2 \cdot \vec{b};$$

$$6^0. \quad (\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}) = (\lambda \mu) (\vec{a}, \vec{b}),$$

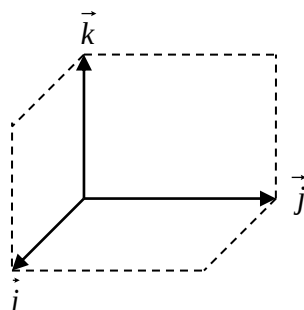
bu yerda $\lambda, \mu \in R$.

Eslatma. Agar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal deyiladi.

1⁰ xossadan ko'rinadiki, vektorlarning ortogonallik tushunchasi ularning perpendikulyarlik tushunchasidan kengroqdir. Darhaqiqat, $\vec{0}$ vektor boshqa bir vektorga perpendikulyar deb bo'lmaydi (chunki, $\vec{0}$ yo'nalishga ega emas), ammo, $\vec{0} \cdot \vec{b} = 0$ dir.



3.10.1- rasm



3.10.2- rasm.

Endi, $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar fazoda Dekart bazisida berilganda ularning skalyar ko'paytmasini aniqlaylik:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 \vec{i}^2 + x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i}, \vec{k}) + \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) + y_1 y_2 \vec{j}^2 + y_1 z_2 (\vec{j}, \vec{k}) + \\ &+ z_1 x_2 (\vec{k}, \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k}, \vec{j}) + z_1 z_2 \vec{k}^2 \end{aligned}$$

3.10.2-rasmdan hamda $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ ekanligidan ko'rinadiki,

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, (\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = 0$$

o'rinlidir, demak,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (3.10.2)$$

ni olamiz. (3.10.2) vektorlarning skalyar ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.

Ikki vektor orasidagi burchak ularning koordinatalari orqali quyidagicha topiladi: skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra (3.10.1) dan

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Yuqorida olingan skalyar ko'paytma (3.10.2) va vektor moduli (3.7.1) formulalarini hisobga olib, ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ deb faraz qilib),

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (3.10.3)$$

ni olamiz. (3.10.3) *ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi* deb yuritiladi.

Agar

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad (3.10.4)$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0; \quad (3.10.5)$$

shu sababli, (3.10.4) ni vektorlarning kollinearligi, (3.10.5) ni esa ortogonalligi (perpendikulyarligi) sharti deb yuritiladi.

3.10.2. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi

Avvalo, fazoda nokomplanar vektorlar uchligining joylashish tartibiga bog'liq bo'lgan quyidagi tushunchani keltiramiz.

3.10.2-ta'rif. Agar fazoda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tartibida nokomplanar vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, ularning boshi umumiy nuqtaga keltirilgach, uchinchi bo'lgan $\vec{c}$ vektorning uchidan uning yo'nalishiga qarama-qarshi qaralganda birinchisi $\vec{a}$ vektordan ikkinchisi $\vec{b}$ vektorga tomon yoyiq burchakdan kichik burilish burchagining yo'nalishi soat ko'rsatkichi harakati yo'nalishiga qarama-qarshi (ya'ni musbat) bo'lsa, bu tartibdagi vektorlar uchligini o'ng uchlik, aks holda chap uchlik deb ataladi.

Vektorlarning tartiblangan uchligi quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish osondir:

1⁰. Vektorlarning tartiblangan uchligida ixtiyoriy ikki vektorlarning o'rinlari (tartiblari) o'zaro almashtirilsa, uchlik o'z nomini o'zgartiradi;

2⁰. Tartiblangan uchlik vektorlarining o'rinlari (tartiblari) doiraviy shaklda almashtirilsa, uchlik o'z nomini o'zgartirmaydi, ya'ni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ lar bir xil nomli uchliklar bo'ladi.

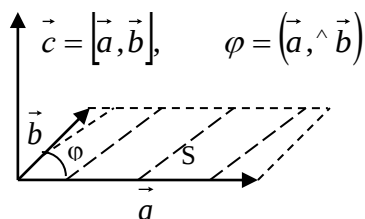
Eslatma. Agar fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar o'ng uchlikni tashkil qilsa, uni *o'ng sistema*, chap uchlikni tashkil qilsa, *chap sistema* deb yuritiladi. Biz asosan o'ng sistema bilan ishlaymiz.

3.10.3-ta'rif. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb, quyidagi shartlar bilan aniqlanuvchi va $[\vec{a}, \vec{b}]$ (yoki $\vec{a} \times \vec{b}$) kabi belgilanuvchi $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

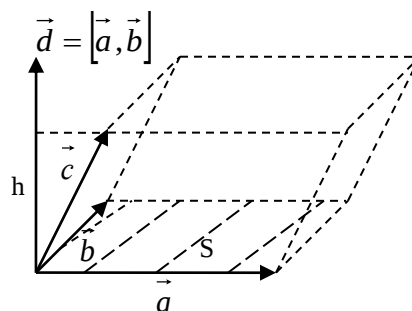
- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi|$, ($\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$);
- 2) $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$;

3) $|\vec{c}| \neq 0$ bo'lganda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng uchlikni tashkil etadi.

Bu ta'rif bilan kiritilgan $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$ vektor ko'paytmaning geometrik ma'nosini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lmagan hol uchun 3.10.3-rasmda ko'rish mumkin.



3.10.3-rasm.



3.10.4-rasm.

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi uchun quyidagi xossalar o'rinlidir (mustaqil ishonch hosil qiling):

- 1⁰. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$;
- 2⁰. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;
- 3⁰. $[\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2, \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{b}] \pm [\vec{a}_2, \vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b}_1 \pm \vec{b}_2] = [\vec{a}, \vec{b}_1] \pm [\vec{a}, \vec{b}_2]$;
- 4⁰. $[\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}] = (\lambda \mu)[\vec{a}, \vec{b}]$, $(\lambda \mu \in R)$.

Keltirilgan 1⁰ xossadan ko'rinadiki, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearlik sharti sifatida $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo'lishini olish mumkindir.

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar koordinatalari bilan fazoda Dekart bazisida berilgan bo'lsin. U vaqtda,

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}] = \\ &= (x_1 x_2) [\vec{i}, \vec{i}] + (x_1 y_2) [\vec{i}, \vec{j}] + (x_1 z_2) [\vec{i}, \vec{k}] + \\ &+ (y_1 x_2) [\vec{j}, \vec{i}] + (y_1 y_2) [\vec{j}, \vec{j}] + (y_1 z_2) [\vec{j}, \vec{k}] + \\ &+ (z_1 x_2) [\vec{k}, \vec{i}] + (z_1 y_2) [\vec{k}, \vec{j}] + (z_1 z_2) [\vec{k}, \vec{k}]. \end{aligned}$$

3.10.2-rasmdan hamda $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ ekanligidan ko'rinadiki, $[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}$, $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$ o'rinlidir. Demak,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

ni va, nihoyat, oxirigidan

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (3.10.4)$$

ni olamiz. (3.10.4) vektorlarning vektor ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.

Vektor ko'paytmaning ta'rifidan uning moduli son qiymati jihatidan berilgan (ko'paytuvchi) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga tengdir (3.10.3-rasmga qarang):

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Masalan, uchlari $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchuburchak yuzini hisoblaylik. ABC uchburchakning yuzi $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzining yarmiga tengligi ravshandir:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

$\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarni hisoblaylik:

$$\vec{AB} = \{3-1; 0-2; -3-0\} = \{2; -2; -3\},$$

$$\vec{AC} = \{5-1; 2-2; 6-0\} = \{4; 0; 6\}.$$

Endi, hisoblangan bu vektorlarning vektor ko'paytmasini topamiz. (3.10.4) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}). \end{aligned}$$

Demak,

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} 4 |-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}| = 2\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \\ &= 2\sqrt{9+36+4} = 2\sqrt{49} = 14. \end{aligned}$$

3.10.3. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

3.10.4-ta'rif. *Tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchligining aralash ko'paytmasi deb, $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ ga aytiladi.*

Bu ta'rifdan, agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchligi komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga tengligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $d = [\vec{a}, \vec{b}]$ deb belgilasak, vektor ko'paytma ta'rifiga ko'ra $(\vec{d}, \vec{a}) = (\vec{d}, \vec{b}) = 0$ bo'ladi.

Undan tashqari, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar ekanligidan ular bitta tekislikda yotishi sababli (vektorlar umumiy boshga keltirilgan degan faraz asosida) $(\vec{d}, \vec{c}) = 0$ kelib chiqadi.

Endi, vektorlarning $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchligi nokomplanar deb faraz qilaylik. U vaqtda, 3.10.4-rasmdan

$$h = \pi p_{\vec{d}} \vec{c}$$

bo'lib, $|h|$ asosi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammdan iborat bo'lgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning balandligidir. Uning hajmi

$$V = S|h|$$

bo'lib, $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ ekanligidan

$$V = \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right| \cdot |h| = \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] h \right| = \\ = \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \cdot \vec{c} \right| = \left| \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) \right|$$

ni olamiz. Bundan

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \pm V$$

ga kelamiz. Demak, nokomplanar bo'lgan tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchligining aralash ko'paytmasining absolut qiymati son qiymati jihatidan bu vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmiga teng bo'lar ekan. Oxirgi tenglik o'ng tomondagi «+» ishora tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi o'ng uchlikni, «-» esa chap uchlikni tashkil qilgan holga mos kelishiga ishonch hosil qilish qiyin emas (mustaqil bajaring).

Bu uchta vektorlar aralash ko'paytmasining geometrik ma'nosidir.

Uch vektorlar aralash ko'paytmasi uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

1⁰. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = 0$ bo'ladi va, aksincha, aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lgan vektorlar uchligi komplanardir;

2⁰. Aralash ko'paytmada vektor ko'paytuvchilardan ixtiyoriy ikkitasining o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi, masalan, $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = - \left(\left[\vec{c}, \vec{b} \right], \vec{a} \right)$;

3⁰. Aralash ko'paytmada vektor ko'paytuvchilarning o'rinlari doiraviy shaklda almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \left(\left[\vec{b}, \vec{c} \right], \vec{a} \right) = \left(\left[\vec{c}, \vec{a} \right], \vec{b} \right)$;

4⁰. Aralash ko'paytmada vektor ko'paytirish va skalyar ko'paytirish belgilarining o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right)$.

Aralash ko'paytmaning yuqorida keltirilgan 4⁰ xossasi asosida uni vektor va skalyar ko'paytirish belgilarisiz yozish imkoniyati tug'iladi, ya'ni

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$$

Bundan buyon shunday belgilashdan foydalanamiz.

Yuqorida keltirilgan 1⁰ xossaga ko'ra, berilgan uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanarlik sharti sifatida $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ ni qabul qilish mumkindir.

Agar $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2), \vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ vektorlar fazoda Dekart bazisida berilgan bo'lsa, (3.10.4) dan

$$\left[\vec{a}, \vec{b} \right] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

ni va (3.10.1) dan

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

ni olamiz va, nihoyat,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (3.10.5)$$

ga kelamiz. (3.10.5) vektorlarning aralash ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.

Bu o'rinda Dekart bazasida berilgan $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ vektorlarning komplanarlik sharti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

ekanligini aytamiz.

3.11. n o'lchovli vektorlar fazosi tushunchasi

Yuqorida vektor sonlar o'qida uning koordinatasi deb ataluvchi bitta x son; koordinatalar tekisligida tartiblangan $(x; y)$ sonlarning jufti va koordinatalar fazosida esa $(x; y; z)$ sonlarning tartiblashgan uchligi bilan aniqlanishini (berilishini) ko'rdik. Shu sababli, ularni mos ravishda bir, ikki va uch o'lchovli vektorlar deb ataladi. Xuddi shunga o'xshash, agar n ta $x_i (i = \overline{1; n})$ sonlarning tartiblangan sistemasi (to'plami) bilan aniqlanadigan $\vec{a}$ vektor tushunchasi kiritlsa, uni n o'lchovli, mazkur sonlar sistemasini esa uning koordinatalari (komponentalari) deyilib, $\vec{a}(x_1; x_2; \dots; x_n)$ yoki $\vec{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ yoki $\vec{a} = [x_1; x_2; \dots; x_n]$ yoki $\vec{a} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ kabi yoziladi.

n o'lchovli vektorlar uchun aniqlangan quyidagi amallarni keltiramiz ($\vec{a}_j(x_1^{(j)}; x_2^{(j)}; \dots; x_n^{(j)})$ deb faraz qilamiz):

- 1) $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \Leftrightarrow \{x_i^{(1)} = x_i^{(2)}, i = \overline{1; n}\}$
- 2) $\vec{a}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \{x_i^{(1)} = 0, i = \overline{1; n}\}$
- 3) $|\vec{a}_1|$ kabi belgilanuvchi $\vec{a}_1$ vektorning moduli deb,

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(1)})^2}$$

ni qabul qilinadi;

4) moduli 1 ga teng bo'lgan vektorni birlik vektor (ort) deb ataladi;

5) berilgan $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning yig'indisi deb, koordinatalari ularning mos koordinatalarining yig'indisidan iborat bo'lgan $\vec{a}_3$ vektorga aytiladi, ya'ni

$$x_i^{(3)} = x_i^{(1)} + x_i^{(2)}, i = \overline{1; n},$$

va $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ kabi yoziladi;

xossalari:

- 1⁰. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
- 2⁰. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
- 3⁰. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

4⁰. agar $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar qarama-qarshi vektorlar deb ataladi va $\vec{a} = -\vec{b}$ ($\vec{b} = -\vec{a}$) kabi yoziladi hamda $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ kabi belgilanadi;

6) berilgan $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{a}_3$ vektorga aytiladiki, uning $\vec{a}_2$ bilan yig'indisi $\vec{a}_1$ dan iborat bo'ladi va $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ kabi yoziladi demak, bu ta'rif bo'yicha

$$\vec{a}_3 + \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_3$$

ekanligini va vektorlarni qo'shish ta'rifi yordamida

$$x_i^{(3)} = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}, \quad i = \overline{1; n}$$

formulani olamiz;

7) berilgan $\vec{a}_1$ vektorning berilgan λ songa ko'paytmasi deb, shunday $\vec{a}_2$ vektorga aytiladiki, uning har bir koordinatasi $\vec{a}_1$ ning mos koordinatasining λ songa ko'paytmasidan iborat bo'ladi va $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1 = \vec{a}_1 \lambda$ kabi yoziladi, demak,

$$x_i^{(2)} = \lambda x_i^{(1)}, \quad i = \overline{1; n}$$

formula o'rinlidir; vektorni songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga egadir ($\lambda, \mu \in R$):

- 1⁰. $0\vec{a} = \vec{0}$,
- 2⁰. $\lambda \vec{0} = \vec{0}$,
- 3⁰. $1\vec{a} = \vec{a}$,
- 4⁰. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$,
- 5⁰. $\lambda (\vec{a} \pm \vec{b}) = \lambda \vec{a} \pm \lambda \vec{b}$,
- 6⁰. $(\lambda \pm \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} \pm \mu \vec{a}$,
- 7⁰. $\lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$,
- 8⁰. $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

8) berilgan $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi va $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ yoki $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ kabi belgilanadi, demak,

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \sum_{i=1}^n (x_i^{(1)} \cdot x_i^{(2)});$$

xossalari ($\lambda, \mu \in R$):

- 1⁰. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- 2⁰. $(\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}) = (\lambda \mu) (\vec{a}, \vec{b})$;
- 3⁰. $(\vec{a} \pm \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) \pm (\vec{b}, \vec{c})$;
- 4⁰. $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ - vektorning skalyar kvadrati modulining kvadratiga

tengdir;

- 5⁰. $(\vec{a}, \vec{0}) = 0$;
- 6⁰. agar $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ bo'lsa, bu vektorlar ortogonal deb ataladi.

Eslatma. Bu keltirilgan amallar $n = \overline{1;3}$ bo'lgan hollarda oldingi ko'rilganlar bilan ustma-ust tushishiga ishonch hosil qilish qiyinchilik tug'dirmaydi.

Koordinatalari (komponentlari) haqiqiy bo'lgan barcha n o'lchovli vektorlar to'plami *n o'lchovli vektorlar fazosi* deb ataladi.

Agar n o'lchovli vektorlar fazosining $\vec{e}_i(\delta_{i1}; \delta_{i2}; \dots; \delta_{in})$ ($i = \overline{1;n}$) vektorlari sistemasini qarasak, bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisi, ularning har biri birlik vektordan (ortdan) iborat ekanligi ravshandir. Shu sababli, ularni *n o'lchovli vektorlar fazosining ortlari sistemi* deb yuritiladi.

Quyidagi tasdiq o'rinlidir.

3.11.1-teorema. $\vec{a}_i(a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in})$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemi chiziqli erkli bo'lishi uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.11.1)$$

determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Yetarliligi. Aytaylik, $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemi uchun (3.11.1) determinant noldan farqli ($\Delta \neq 0$) bo'lsin. Ma'lumki, bu vektorlar sistemi chiziqli erkli bo'lishi uchun

$$\sum_{i=1}^n c_i \vec{a}_i = 0 \quad (3.11.2)$$

tenglik $c_i = 0$ ($i = \overline{1;n}$) bo'lgandagina bajarilishi kerakdir. (3.11.2) ni koordinatalar shaklida yozib,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} c_i = 0, \quad j = \overline{1;n} \quad (3.11.3)$$

n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli sistemasiga kelimiz. (3.11.3) sistemaning determinanti (3.11.1) ga transponirlangan determinantdan iborat bo'lib, u noldan farqli ekanligidan yagona $c_i = 0$ ($i = \overline{1;n}$) yechimga egadir (2-bobga qarang). Demak, vektorlar sistemi chiziqli erkli.

Zaruriyligi. Endi, $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemi chiziqli erkli bo'lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda, (3.11.2) tenglik $c_i = 0$ ($i = \overline{1;n}$) bo'lgandagina o'rinli va u (3.11.3) bir jinsli sistemaning yagona yechimidan iborat bo'lib, $\Delta \neq 0$ bo'lishi kelib chiqadi (2-bobga qarang).

3.11.2-teorema. $\vec{a}_i(a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in})$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemi chiziqli erkli bo'lsa, u vaqtda, ixtiyoriy n o'lchovli vektorni yagona tarzda ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Isbot. Teorema sharti bajarilsin va $\vec{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$ ixtiyoriy n o'lchovli vektor berilgan bo'lsin. Agar $\vec{b}$ vektorning berilgan vektorlar sistemi bo'yicha chiziqli kombinatsiyasini

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$$

deb faraz qilsak, x_i ($i = \overline{1;n}$) larga nisbatan quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i = b_j, \quad j = \overline{1;n}. \quad (3.1.4)$$

Uning determinanti, $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemasi chiziqli erkli ekanligidan, 3.11.1-teoremaga asosan, noldan farqli bo'lib, yagona yechimga egadir (2-bobga qarang). Teorema isbotlandi.

Isbotlangan 3.11.2-teoremadan ko'ramizki, agar n o'lchovli vektorlar fazosida (to'plamida) chiziqli erkli bo'lgan n ta vektorlar berilgan bo'lsa, n o'lchovli ixtiyoriy vektorni shu berilgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida yagona tarzda ifodalash mumkin bo'lib, berilgan bunday *chiziqli erkli n ta vektorlarning sistemasini n o'lchovli vektorlar fazosining (to'plamining) bazisi* deb ataladi. 3.11.1-teoremaga asosan esa berilgan n ta vektorlar n o'lchovli vektorlar fazosida bazisni tashkil etishi uchun ularning koordinatalari vositasida tuzilgan (3.11.1) determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemasi n o'lchovli vektorlar fazosida bazisni tashkil etib,

$$i \neq j \Rightarrow (\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0 \quad (i, j = \overline{1;n})$$

shartni qanoatlantirsa, ya'ni bazisning vektorlari juft-juft ortogonal bo'lsa, uni *ortogonal bazis* deb; bazis vektorlarning barchasi birlik vektorlardan (ortlardan) iborat bo'lsa, uni *normal bazis* deb; ham ortogonal ham normal bo'lgan bazisni esa *ortonormal bazis* deb ataladi.

Bu o'rinda, agar $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) ortonormal bazisdan iborat bo'lsa,

$$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = \overline{1;n})$$

bo'lishini aytamiz (bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisi).

Agar $\vec{e}_i(\delta_{i1}; \delta_{i2}; \dots; \delta_{in})$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) n o'lchovli vektorlar fazosining ortlari sistemasini olsak, u chiziqli erkli bo'lib, bazisni tashkil etishi aniqdir; bazis to'g'risida maxsus eslatilmagan holda n o'lchovli vektorlar fazosining bazisi deb xuddi shu sistemani tushunamiz. Undan tashqari, bu sistema ortonormal bazisdan iborat ekanligiga ishonch hosil qilish osondir. Masalan, uch o'lchovli vektorlar fazosini olsak, unda $\vec{e}_1(1;0;0), \vec{e}_2(0;1;0), \vec{e}_3(0;0;1)$ sistema ortonormal bazisdan iborat bo'lib, uni oldinroq $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ kabi belgilanishini aytgan edik.

Misol. $\vec{a}_1(1;-1;0;1), \vec{a}_2(1;1;0;-1), \vec{a}_3(1;1;0;1), \vec{a}_4(0;1;-1;0)$ berilgan. Ularning 4 o'lchovli vektorlar fazosida bazis tashkil etishini tekshiring va ijobiy javob olingan taqdirda $\vec{b}(2;2;4;2)$ vektorni shu bazisdagi koordinatalarini aniqlang.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+1-1+1+1 = 4 \neq 0.$$

$\Delta \neq 0$ ekanligidan, 3.11.1-teoremaga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ vektorlar sistemasi 4 o'lchovli fazoda bazisni tashkil qiladi.

Endi, $\vec{b}(2;2;4;2)$ vektorning bu bazisdagi koordinatalarini $\vec{b}(x_1; x_2; x_3; x_4)$ deb belgilab, (3.11.4) sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Bu sistemaning determinanti yuqorida hisoblangan determinantga transponirlanganligidan u ham 4 ga tengdir. Yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2-6-2-6+2 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+6+2-2+2+6 = 16,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4(1+1+1-1+1+1) = -16.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = \frac{-8}{4} = -2, \quad x_2 = \frac{0}{4} = 0, \quad x_3 = \frac{16}{4} = 4, \quad x_4 = \frac{-16}{4} = -4.$$

Demak, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ bazisda $\vec{b}(-2;0;4;-4)$.

3-bobga doir mashqlar

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedda berilgan $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ vektorlarga ko'ra
a) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$; b) $\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; c) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ vektorlarni yasang.
2. Ixtiyoriy ABC uchburchakda E va F nuqtalar mos ravishda AB va AC tomonlarining o'rtasi bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ vektorlar orqali ifodalang.
Javob: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 2(\vec{b} - 2\vec{a})$, $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{b} - \vec{a})$.
3. Tekislikda $A(2;3)$, $B(-3;3)$, $C(-3;0)$ nuqtalarga koordinatalar boshidan $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ kuchlar qo'yilgan. Ularning teng ta'sir etuvchisi $\overrightarrow{ON}$ ni yasang va uning koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini hamda modulini toping.
Javob: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $np_{ox} \overrightarrow{ON} = -3$; $np_{oy} \overrightarrow{ON} = 6$ $|\overrightarrow{ON}| = 3\sqrt{50}$
4. To'rtburchak uchlarining koordinatalari berilgan:
 $A(4;0;8)$, $B(5;2;6)$, $C(3;1;4)$, $D(2;-1;6)$ Shu to'rtburchakning kvadrat ekanligini ko'rsating.
5. $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshi $A(-1;2;4)$ va uni teng ikkiga bo'luvchi nuqta $C(2;0;2)$ berilgan bo'lsa, B uchining koordinatalarini toping.
Javob: $B(8;-4;-2)$.
6. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.
Javob: 0.
7. $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ vektorlar berilgan. m ning qanday qiymatlarida bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi?
Javob: 4.
8. $\vec{a} = \{2;3;5\}$ va $\vec{b} = \{1;2;1\}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.
Javob: $7\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.
9. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblang.
Javob: 33.

Vektor tushunchasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring.

1. Vektorga ta'rif bering.
2. Qanday shartlar bajarilganda vektorlar o'zaro teng bo'ladi?
3. Ikkita va undan ortiq vektorlar berilganda, qanday qoida bo'yicha ularning yig'indisini topasiz?
4. Vektorlarni qo'shishda guruhlash va o'rin almashtirish qonunlarini keltiring.
5. Vektorlarni songa ko'paytirishga ta'rif bering.

6. Vektorning o'qdagi proyeksiyasini chizmada ko'rsating.
7. Bazis deganda nimani tushunasiz?
8. Dekart bazisi nima?
9. Vektorni Dekart bazisi bo'yicha tashkil etuvchilarga yoyishni ko'rsating.
10. Vektorning moduli qanday formula yordamida topiladi?
11. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini tushuntiring.
12. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday formula yordamida topiladi?
13. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalarini yozing.
14. Vektorlarni skalyar ko'paytirish haqida tushuncha bering.
15. Skalyar ko'paytma qanday shartni qanoatlantirganda ikki vektor ortogonal bo'ladi?
16. Skalyar ko'paytmaning xossalarini keltiring.
17. Skalyar ko'paytma formulasining koordinatalar shaklini yozing.
18. Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
19. Vektorlarning vektor ko'paytmasini ta'riflang.
20. Vektor ko'paytmaning xossalarini keltiring.
21. Vektor ko'paytmaning koordinatalar shaklini yozing.
22. Vektor ko'paytmaning nolga teng bo'lish shartini yozing.
23. Vektorlarning aralash ko'paytmasini ta'riflang.
24. Aralash ko'paytmaning Dekart bazisi orqali ifodasini yozing.
25. Aralash ko'paytmaning xossalarini keltiring.
26. n o'lchovli vektor va ular ustidagi amallar haqida nimalarni bilasiz?

4-bob. Matritsa va chiziqli tenglamalar sistemasi

Bu bob oily algebraning matritsa tushunchasini va uning chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishga tatbiqini hamda Jordan-Gauss usulini yoritishga bagishlanadi.

4.1. Matritsalar algebrasining elementlari

Aytaylik, $a_{ij} (i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n})$ $m \cdot n$ ta ifodalar (sonlar) berilgan va ular ustida arifmetik amallar aniqlangan bo'lsin.

4.1.1-ta'rif. Agar $a_{ij} (i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n})$ $m \cdot n$ ta ifodalar (sonlar) m ta satr va n ta ustundan iborat

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

jadval ko'rinishda yozilgan bo'lsa, uni *matritsa*, $m \times n$ ni esa uning *tuzilishi* (*tarkibi*) deb ataladi.

Yotiq (gorizontal) ko'rinishda yozilgan $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ni *matritsaning i-satri* (*i-satr-vektori*), tik (vertikal) ko'rinishda yozilgan

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

ni esa *j-ustuni* (*j-ustun-vektori*) deb ataladi. Demak, matritsani satr-vektorlar (yoki ustun-vektorlar) sistemasi sifatida ham qarash mumkin ekan.

Matritsalarini belgilash uchun, odatda, Lotin alifbosining bosh, uni tashkil etgan $a_{ij} (i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n})$ ifodalarni (sonlarni) esa uning *elementlari* deyilib, qo'sh indeks bilan ta'minlangan satriy harflaridan foydalaniladi. Aytilgan qo'sh indekslardan birinchisi mazkur element joylashgan matritsa satrining, ikkinchisi esa ustunining tartibini bildiradi.

Matritsalarini belgilashda $[\cdot]$ qavslardan tashqari $(\cdot)$ va $\{\cdot\}$ qavslar, hamda $\|\cdot\|$ kabi belgilash ham qo'llaniladi. Shuningdek, soddalik uchun $[a_{ij}]_{m \times n}$, $(a_{ij})_{m \times n}$ va boshqa shularga o'xshash belgilashlardan ham foydalanamiz.

Agar matritsaning tuzilishi $m \times n$ da $m \neq n$ bo'lsa, uni *to'g'ri to'rtburchak*, $m = n$ bo'lganda esa *kvadrat matritsa* deb ataladi ($m = n$ bo'lganda kvadrat

matritsani n -tartibli matritsa deb ham yuritiladi va $[a_{ij}]_{n \times n}$ o'rniga $[a_{ij}]_n$ belgilashdan ham foydalanamiz).

Agar $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matritsaning $a_{ii} (i = \overline{1; k})$ diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lsa, uni *diagonal matritsa* deyiladi, bu yerda $k = \min\{m, n\}$. Diagonal matritsa, odatda, D bilan belgilanadi.

Barcha diagonal elementlari 1 ga teng bo'lgan kvadrat diagonal matritsani *birlik matritsa* deyiladi va E harfi orqali belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Kroneker belgisi (simvoli) dan foydalanib, D va E matritsalarini qisqacha ko'rinishda yozish mumkin:

$$D = [\delta_{ij} \cdot d_{ij}]_{m \times n}, \quad E = [\delta_{ij}]_n.$$

Matritsaning barcha elementlari nollardan iborat bo'lsa, uni *nol matritsa* deyiladi va E^0 yoki oddiy nol orqali belgilanadi, ya'ni $E^0 = [0]_{m \times n} = 0$.

Bir xil tuzilishli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ va $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matritsalaridan birining barcha elementlari ikkinchisining mos elementlariga teng (ya'ni $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n}$) bo'lsa, bu *matritsalar teng* deb hisoblanadi va $A=B$ ko'rinishda yoziladi. Agar birinchi matritsaning kamida bitta elementi ikkinchisining mos elementiga teng bo'lmasa, bu *matritsalar teng emas* deyiladi va $A \neq B$ ko'rinishda yoziladi.

Quyidagi xossalar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

$$1^0. A=B \Leftrightarrow B=A;$$

$$2^0. A=B \wedge B=C \Rightarrow A=C.$$

Odatda, *kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinant uning determinanti* deb ataladi va A kvadrat matritsa determinantini $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matritsaning determinanti quyidagidir:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinanti noldan farqli bo'lgan kvadrat matritsa *maxsus emas* deb, nolga teng bo'lsa, *maxsus* deb ataladi.

Masalan,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ maxsus matritsadir, chunki

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0;$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ esa maxsusmas matritsadir, chunki

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 8 \neq 0.$$

4.1.1. Matritsalarini qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallari

4.1.2-ta'rif. Bir xil tuzilishli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ va $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matritsalarining yig'indisi deb shunday C matritsaga aytiladiki, uning elementlari A va B matritsalar mos elementlarining yig'indisidan iborat bo'ladi va $C = A + B$ deb yoziladi.

Ta'rif bo'yicha

$$C = A + B, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Matritsalar yig'indisi ta'rifidan ularni qo'shish amalining quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. A + (B + C) = (A + B) + C;$$

$$2^0. A + B = B + A;$$

$$3^0. A + E^0 = A \text{ (bunda } E^0 = (0), \text{ } A, B, C \text{ – berilgan bir xil tuzilishli matritsalar)}.$$

Matritsalarining ayirmasi ularni qo'shishga teskari amal tariqasida ta'riflanadi, ya'ni bir xil tuzilishli A va B matritsalarining ayirmasi deb, shunday C matritsaga aytiladiki, $B + C = A$ bo'ladi va $C = A - B$ deb belgilanadi.

Bu ta'rif asosida $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ va $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ bo'lsa,

$$C = A - B, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

natija olinadi.

Tuzilishlari bir xil bo'lmagan, matritsalarini qo'shish va ayirish amallari aniqlanmagandir.

4.1.3-ta'rif. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matritsaning α songa ko'paytmasi deb, uning barcha elementlarini shu α songa ko'paytirishdan hosil qilingan matritsaga aytiladi va αA yoki $A\alpha$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifga ko'ra

$$A \cdot \alpha = \alpha \cdot A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}.$$

Matritsani songa ko'paytirish amalining ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. 1 \cdot A = A \cdot 1 = A;$$

$$2^0. A \cdot 0 = 0 \cdot A = E^0;$$

$$3^0. \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A;$$

$$4^0. (\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A;$$

$$5^0. \alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B.$$

Bu yerda A va B – bir xil tuzilishli matritsalar, α va β - haqiqiy sonlardir.

Yuqorida ta’riflangan *qo’shish, ayirish va songa ko’paytirish matritsalar ustidagi chiziqli amallardan iboratdir.*

4.1.2. Matritsalarini ko’paytirish

Tuzilishlari mos ravishda $m \times n$ va $p \times q$ bo’lgan

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{p \times q}$$

to’g’ri to’rt burchak matritsalar berilgan bo’lsin. Agar A matritsaning ustunlari soni n B matritsaning satrlari soni p ga teng bo’lsa, bu matritsalarini ko’paytirish amali ma’noga ega bo’ladi.

4.1.4-ta’rif. Berilgan tartibda olingan $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ va $B = [b_{ij}]_{n \times q}$ matritsalarining ko’paytmasi deb shunday $C = [c_{ij}]_{m \times q}$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}; \quad i = \overline{1; m}, \quad j = \overline{1; q} \quad (4.1.2)$$

formula bilan aniqlanadi va $AB=C$ kabi belgilanadi.

Ta’rifdan matritsalarini ko’paytirish uchun quyidagi qoida kelib chiqadi:

Ikki matritsaning ko’paytmasidan iborat bo’lgan matritsaning i – satri va j – ustunida turuvchi elementni hisoblash uchun birinchi matritsaning i – satridagi har bir elementini ikkinchi matritsaning j –ustunining mos elementiga ko’paytirib, so’ngra ularni qo’shish kerak ((4.1.2) formulaga qarang).

Masalan, quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

to’g’ri to’rt burchak matritsalar ko’paytmasini topaylik:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) & 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 2 & 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

Matritsalarini ko’paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

$$1^0. A(BC) = (AB)C;$$

$$2^0. \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$3^0. (A \pm B)C = AC \pm BC;$$

$$4^0. C(A \pm B) = CA \pm CB;$$

$$5^0. A \text{ va } B \text{ lar bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo’lsa,}$$

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) \quad [4].$$

Bu yerda A, B, C matritsalar, α - haqiqiy son.

Ikki matritsaning ko’paytmasi uchun kommutativlik (o’rin almashtirish) xossasi umuman aytganda o’rinli emas, yani ushbu $AB=BA$ tenglik doim o’rinli bo’lavermaydi. Ammo, ular bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo’lib, bittasi E – birlik matritsadan iborat bo’lganda (masalan, $B=E$) $AE=EA=A$ tenglik o’rinlidir.

Agar A va B matritsalar uchun $AB=BA$ bajarilsa, u vaqtda ular *kommutativ matritsalar* deyiladi. Yuqorida eslatganimizdek, birlik matritsa o'zi bilan bir xil tartibga ega bo'lgan kvadrat matritsa bilan kommutativdir.

Matritsalarini ko'paytirish ular ustidagi chiziqsiz amaldir.

4.1.3. Matritsani transponirlash

4.1.5-ta'rif. Berilgan $m \times n$ tuzilishli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matritsadan uning satrlarini mos ustunlar qilib yozish natijasida hosil qilinadigan matritsani A ga nisbatan *transponirlangan matritsa* deyiladi va uni A^* (yoki A') bilan belgilanadi, ya'ni

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, agar A matritsa $m \times n$ tuzilishli bo'lsa, A^* matritsa $n \times m$ tuzilishli bo'ladi.

Matritsani transponirlash amali doimo aniqlangan bo'lib, quyidagi hossalarga ega:

1⁰. $(A^*)^* = A$

2⁰. A va B lar bir xil tuzilishli bo'lganda $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$

3⁰. $A = [a_{ij}]_n$ – *simmetrik kvadrat matritsa*, ya'ni $a_{ij} = a_{ji}$ $i, j = \overline{1, n}$ bo'lsa, $A^* = A$ bo'ladi, va aksincha.

4⁰. Agar A va B matritsalar uchun AB aniqlangan bo'lsa, $(AB)^* = B^* A^*$ o'rinlidir.

4.1.4. Teskari matritsa

4.1.6-ta'rif. Agar bir xil tuzilishli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB=BA=E$ (E -birlik matritsa) munosabat o'rinli bo'lsa, u vaqtda ularni *o'zaro teskari matritsalar* deyiladi.

Agar A kvadrat matritsa berilgan bo'lsa, unga teskari matritsani A^{-1} orqali belgilanadi. Yuqoridagi ta'rifga ko'ra

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar teskari matritsa mavjud bo'lsa, uning yagona bo'lishi ta'rifidan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, A matritsaga ikkita A_1^{-1} va A_2^{-1} teskari matritsalar mavjud deb faraz qilsak,

$$AA_1^{-1} = A_1^{-1}A = E, AA_2^{-1} = A_2^{-1}A = E \Rightarrow A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = A_1^{-1}E \Rightarrow \\ \Rightarrow (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow EA_2^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow A_2^{-1} = A_1^{-1}$$

ni olamiz.

Berilgan kvadrat matritsaga teskari matritsa har doim ham mavjud bo'lavermaydi. Bu o'rinda quyidagi tasdiq to'g'ridir.

4.1.1-teorema. Matritsaga teskari matritsa mavjud bo'lishi uchun u maxsus bo'lmasligi (determinanti nolga teng bo'lmasligi) zarur va yetarlidir.

Isboti. $A = [a_{ij}]_n$ – kvadrat matritsa berilgan bo'lsin. Unga teskari matritsani $A^{-1} = [x_{ij}]_n$ deb faraz qilaylik. U vaqtda, $AA^{-1} = E$ tenglikdan

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = \delta_{ij}; \quad i = \overline{1; n}, \quad j = \overline{1; n} \quad (4.1.3)$$

dan iborat n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalarning n ta sistemalarini olamiz. Bu sistemalar koeffitsiyentlari bir xil bo'lib, A matritsa elementlaridir, o'ng tomoni esa birlik matritsaning mos ustun elementlaridir (δ_{ij} – Kroneker belgisi ekanligini eslatamiz).

Demak, $\det A \neq 0$ bo'lsa, bu sistemalarning har biri yagona yechimga ega bo'lib, teskari matritsaning mos ustun elementlarini aniqlaydi. Bu teoremaning yetarli qismining isbotidir.

Endi, A^{-1} mavjud bo'lsin deylik, u vaqtda $AA^{-1} = E$ o'rinli bo'lib, bundan $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ ni olamiz. Agar $\det A = 0$ deb faraz qilsak, oxirgi tenglikdan $0 = 1$ ziddiyatli tenglikka kelamiz, demak, $\det A \neq 0$ bo'lar ekan. Bu teoremaning zaruriy qismining isbotidir.

Bu yerda Kramer formulalaridan foydalansak va (4.1.3) ning har bir sistemasining o'ng tomoni birlik matritsaning mos ustuni ekanligini e'tiborga olsak, $\det A \neq 0$ bo'lganda

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}, \quad i = \overline{1; n}, \quad j = \overline{1; n}$$

ekanligi kelib chiqadi, bu yerda A_{ji} $\det A$ ning a_{ji} elementiga mos algebraik to'ldiruvchidir.

Agar $C = [A_{ij}]_n$ matritsani qarasak, u vaqtda

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^*$$

ekanligi ravshandir. Demak,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun teskari matritsani topaylik. Buning uchun, avvalo, $\det A$ determinantni yozamiz va uni hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Demak, A – maxsusmas matritsa, unga teskari matritsa mavjud. Endi, $\det A$ ning har bir satr algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -1, & A_{12} &= -(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 3, & A_{13} &= 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2, \\ A_{21} &= -(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = 3, & A_{22} &= 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = -3, & A_{23} &= -(5 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 1, \\ A_{31} &= 2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = -2, & A_{32} &= -(1 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = 1, & A_{33} &= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Bularni mos ravishda ustunlar qilib yozib, C^* matritsani tuzamiz:

$$C^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nihoyat, C^* ning barcha elementlarini $\det A = -1$ ga bo'lib teskari matritsaga ega bo'lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi, $A \cdot A^{-1} = E$ ekanligini tekshiramiz. Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Shunga o'xshash, $A^{-1} \cdot A = E$ ekani ham ko'rsatiladi.

4.1.5. Matritsaning rangi

Aytaylik, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matritsa berilgan bo'lsin. Agar $k \leq \min(m, n)$ bo'lsa, A matritsaning k ta ustuni va k ta satri kesishishidagi elementlaridan hosil bo'lgan k -tartibli kvadrat matritsaning determinantini A matritsaning k -tartibli minori deb ataladi. Matritsaning har bir elementini uning birinchi tartibli minori deb qabul qilinadi.

Matritsaning rangi deb, uning noldan farqli minorlari tartiblarining eng kattasiga aytiladi.

Agar A matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, bu matritsada hech bo'lmaganda bitta noldan farqli r -tartibli minor borligini, biroq, uning r dan katta tartibli

minorlari mavjud bo'lsa, ularning barchasi nolga tengligini anglatadi. A matritsaning rangini $\text{rank } A$ yoki $r(A)$ orqali belgilanadi.

Ushbu matritsani qaraylik:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uning yagona to'rtinchi tartibli minori nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(ikkita satri bir xil bo'lgan determinant sifatida); uchinchi tartibli minorlaridan biri

esa noldan farqli, masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Demak, berilgan matritsaning rangi 3

ga teng, ya'ni $r(A)=3$.

Matritsaning rangini uning ta'rifi bo'yicha topish uchun ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Bu ishni matritsadagi elementar almashtirishlar tushunchalari yordamida osonlashtirish mumkin.

Elementar almashtirishlar deb quyidagilarga aytiladi:

- 1) Matritsaning biror satri (ustuni) barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish yoki bo'lish;
- 2) Matritsaning biror satri (ustuni) barcha elementlariga boshqa satri (ustuni)ning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish;
- 3) Matritsaning satrlari (ustunlari) o'rnini o'zaro almashtirish;
- 4) Matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lgan satrini (ustunini) tashlab yuborish.

Bir-biridan elementar almashtirishlar orqali hosil qilinadigan matritsalar *ekvivalent matritsalar* deb ataladi. Ekvivalent matritsalarining ranglari teng bo'lishi isbotlangandir.

Shuningdek, matritsada ko'pi bilan uning rangiga teng sondagi chiziqli erkli satrlari (ustunlari) mavjud bo'lib, ular matritsa rangiga teng tartibli noldan farqli minoriga mos keluvchi satrlaridan (ustunlaridan) iborat bo'lishi isbotlangandir. Agar matritsaning rangiga teng sondagi uning chiziqli erkli satrlari (ustunlari) sistemasi aniqlangan bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali qolgan satrlarini (ustunlarini) ifodalash mumkin bo'ladi va elementar almashtirishlar yordamida ularga mos satrlarining (ustunlarining) elementlari nollardan iborat bo'lgan ekvivalent matritsani olish mumkin [4]. Bu aytilganlarni matritsaning rangini topish jarayoniga qo'llash ishni birmuncha osonlashtiradi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini hisoblaylik. Berilgan matritsaning birinchi satri elementlarini -1 ga ko'paytirib, uchinchi satriga qo'shaylik:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

endi, A_1 ning 2-satrini -1 ga ko'paytirib, uchinchi satriga qo'shsak,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ni olamiz.

A_2 matritsaning nollardan iborat uchinchi satrini tashlab yuborib,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsaga kelamiz; uning rangi ikkiga tengligi ravshandir. Demak, berilgan matritsaning rangi ham ikkiga teng, ya'ni $r(A)=2$.

4.1.6. Matritsaning xos soni va xos vektori

Aytaylik, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matritsa berilgan bo'lsin. U vaqtda X n o'lchovli vektor (ustun-vektor) bo'lsa, AX ko'paytma mavjud bo'lib, u m o'lchovli Y vektordan iborat bo'ladi va

$$AX = Y \quad (4.1.4)$$

chiziqli almashtirishga ega bo'lamiz. (4.1.4) da A ni *chiziqli almashtirish matritsasi* deb ataladi. Agar chiziqli almashtirish matritsasi kvadrat matritsadan iborat bo'lsa, ($m=n$), u vaqtda X va Y lar bir xil n o'lchovli vektorlardan iborat bo'lib, ular kollinear bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu vektorlarning kollinear bo'lib qolgan holi aloxida ahamiyatga ega bo'lib, bu hol ko'p masalalarni hal qilishda uchraydi.

Agar A kvadrat matritsaga ega bo'lgan (4.1.4) chiziqli almashtirish biror noldan farqli X vektorni o'ziga kollinear bo'lgan Y vektorga akslantirsa (o'tkazsa), X vektor A kvadrat matritsaning (chiziqli almashtirishning) *xos vektori*, Y ning X ga proporsionallik koeffitsiyentidan iborat bo'lgan λ son esa uning *xos soni* deyiladi [4].

Demak, agar X berilgan A kvadrat matritsaning xos vektori bo'lsa, yuqoridagi ta'rif bo'yicha

$$AX = \lambda X \quad (4.1.5)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda λ matritsaning xos sonidan iboratdir.

(4.1.5) ni oddiy shakl o'zgartirishlar yordamida

$$(A - \lambda E)X = 0 \quad (4.1.6)$$

ko‘rinishga keltirish qiyin emas. Bu X ga nisbatan bir jinsli matritsaviy tenglamadir. Agar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

deb, $A = [a_{ij}]_n$ - kvadrat matritsa ekanligini hisobga olsak, (4.1.6) dan

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0, \quad i = \overline{1; n} \quad (4.1.7)$$

n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli sistemasini olamiz, bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisidir. Bu bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekanligi bizga ma'lum (2-bobga qarang):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1.8)$$

Bu (4.1.8) λ ga nisbatan tenglama bo'lib, undan A matritsaning xos soni aniqlanadi. Umumiy holda, (4.1.8) dan ko'rinadiki, λ ga nisbatan n - darajali algebraik tenglamaga egamiz. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra bu tenglama n ta kompleks ildizga ega bo'lib [4], ular oddiy yoki karrali bo'lishi mumkin.

Demak, (4.1.8) tenglamani yechib, λ xos sonning qiymati aniqlangach, uni (4.1.7) ga qo'yish natijasida determinanti nolga teng bo'lgan bir jinsli sistemani olamiz va uning noldan farqli yechimini topib, A matritsaning xos vektorini aniqlaymiz.

1-misol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

matritsaning xos soni va xos vektorini topilsin.

Yechish. (4.1.8) tenglamani yozamiz va uni echamiz:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda_{-1} = -1, \quad \lambda_2 = 7$$

Demak, A matritsa ikkita haqiqiy xos sonlarga ega. Endi, bu xos sonlarning har biriga mos keladigan xos vektorlarni aniqlaymiz. Buning uchun topilgan λ xos son qiymatini (4.1.7) ga qo'yib, undan noldan farqli yechimni aniqlaymiz.

1) $\lambda = -1$ xos son uchun:

$$\begin{cases} (1 - (-1))x_1 + 4x_2 = 0, \\ 3x_1 + (5 - (-1))x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2.$$

Xos vektor: $\begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \neq 0.$

Agar $x_2=1$ desak,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

xos vektorni olamiz.

2) $\lambda=7$ xos son uchun:

$$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow 3x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1.$$

Xos vektor: $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix}$

Agar $x_1=2$ desak,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

xos vektorni olamiz.

2-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaning xos vektorlari aniqlansin.

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 17 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0;$$

$$\lambda_1 = 2 + 4i, \quad \lambda_2 = 2 - 4i.$$

Demak, matritsaning xos sonlari mavhum.

1) $\lambda = \lambda_1 = 2 + 4i$:

$$\begin{cases} (3 - (2 + 4i))x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 + (1 - (2 + 4i))x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 4i)x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 - (1 + 4i)x_2 = 0; \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x_2 = (1 - 4i)x_1;$$

Xos vektor:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ (1 - 4i)x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 4i \end{pmatrix}.$$

$x_1=1$ deb olsak,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 4i \end{pmatrix}$$

xos vektor kelib chiqadi.

2) $\lambda = \lambda_2 = 2 - 4i$:

$$\begin{cases} (3 - (2 - 4i))x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 + (1 - (2 - 4i))x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 4i)x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 - (1 - 4i)x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = (1 + 4i)x_1;$$

Xos vektor:

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ (1 + 4i)x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 4i \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 1$ deb olsak,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 4i \end{pmatrix}.$$

xos vektorni olamiz.

Matritsaning (chiziqli almashtirishning) turli xos sonlariga mos keluvchi xos vektorlarining sistemasi chiziqli erkli bo'lishi isbotlangandir [4].

4.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida tekshirish

4.2.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar vositasida yozish va yechish

Ushbu tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = c_i, \quad i = \overline{1; m}. \quad (4.2.1)$$

Bu sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsani hamda noma'lumlari va ozod hadlarini matritsa-ustunlar (ustun-vektorlar) sifatida yozamiz:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

A- sistemaning matritsasi X -noma'lum vektor, C esa sistemaning o'ng tomoni deb yuritiladi.

Bizga ma'lum bo'lgan matritsalarini ko'paytirish qoidasidan va matritsalarining tengligi shartidan foydalanib, (4.2.1) tenglamani (4.2.2) asosida, quyidagicha yozish mumkin:

$$AX = C. \quad (4.2.3)$$

(4.2.3) ni *matritsaviy tenglama* deb ataladi.

Agar (4.2.1) sistema (4.2.3) matritsaviy shaklda yozilgan bo'lib, $m = n$ hamda sistemaning A matritsasi maxsus bo'lmasa, bu tenglama quyidagicha yechiladi. Uning har ikki tomonini chapdan A^{-1} matritsaga ko'paytiramiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C.$$

Matritsalarini ko'paytirishning guruhlash qonunidan foydalanib, oxirgini quyidagicha yozish mumkin:

$$(A^{-1}A) \cdot X = A^{-1}C.$$

$A^{-1}A=E$ va $EX=X$ bo'lgani uchun (4.2.3) matritsaviy tenglamaning yechimini ushbu ko'rinishda hosil qilamiz:

$$X=A^{-1} \cdot C. \quad (4.2.4)$$

Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini matritsaviy usulda yechaylik.

Buning uchun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$$

matritsalarini kiritamiz va teskari matritsani topish uchun quyidagilarni bajaramiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - 12 - 1 = -9 \neq 0.$$

A maxsusmas ekan, demak, unga teskari matritsa mavjud. Endi, A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

Teskari matritsani hisoblaymiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Berilgan sistemaning yechimini (4.2.4) ko'rinishda yozamiz:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bu yerdan, matritsalarining tenglik shartiga asosan, $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=5$ kelib chiqadi.

4.2.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimining mavjudligi haqidagi Kroneker-Kopelli teoremasi

Faraz qilaylik, n noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalarning (4.2.1) sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema koeffitsiyentlari, noma'lumlari va ozod hadlari bo'lgan o'ng tomonidan tuzilgan (4.2.2) matritsalaridan tashqari sistema matritsasiga yana bitta $(n+1)$ – ustun qilib sistema o'ng tomonini yozish bilan kengaytirib, B matritsani hosil qilinadi va uni *sistemaning kengaytirilgan matritsasi* deb ataladi. Demak, sistemaning kengaytirilgan matritsasi

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu o'rinda quyidagi tushunchalarni eslatamiz: agar (4.2.1) sistema yechimga ega bo'lsa, u birgalikda, aks holda birgalikda emas deb yuritiladi.

Agar sistema o'ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng, ya'ni $C=0$ (nol matritsa) bo'lsa, (4.2.1) sistema *bir jinsli* deb yuritiladi. Bunday bir jinsli sistema har doim birgalikdadir, ya'ni $X=0$ uning yechimi bo'lishi ravshandir.

4.2.1-teorema(Kroneker-Kopelli). Chiziqli algebraik tenglamalarning (4.2.1) sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning matritsasi A ning rangi kengaytirilgan matritsasi B ning rangiga teng bo'lishi ($r(A)=r(B)$) zarur va yetarlidir.

Isbot. Sistema bir jinsli bo'lgan hol uchun isbot ravshandir, chunki, bu holda A va B lar ekvivalent bo'lib $r(A)=r(B)$ aniqdir. Endi, sistema bir jinsli bo'lmagan, ya'ni uning o'ng tomonidagi ozod hadlardan aqalli bittasi noldan farqli bo'lgan holni qaraymiz.

Zaruriyligi. (4.2.1) sistema birgalikda va x'_j ($j = \overline{1;n}$) sonlar (ifodalar) sistemasi uning yechimi deylik. Bu yechimni sistemaning tenglamalariga qo'yib, m ta

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j = c_i, \quad i = \overline{1;m}$$

tengliklarga ega bo'lamiz va kengaytirilgan B maricaning (4.2.1) sistemaning o'ng tomonidan iborat bo'lgan $(n+1)$ –ustunining har bir elementi oldingi (A matritsaning) n ta ustunlari mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'ramiz. Demak, A va B lar ekvivalent bo'lib, $r(A)=r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, (4.2.1) sistema matritsasining rangi uning kengaytirilgan matritsasining rangiga teng, ya'ni $r(A)=r(B)=r$ bo'lsin.

A matritsaning noldan farqli r – tartibli minorini ajratib olamiz va uni *bazis minor* deb nomlaymiz. Uning ustunlariga (satrlariga) mos A matritsaning ustunlarini (satrlarini) *bazis ustun-vektorlar* (*satr-vektorlar*) deb nomlaymiz. Bazis satr-vektorlarga mos sistema tenglamalarini uning *bazis tenglamalari* deb, bazis ustun-vektorlarga mos noma'lumlarni *sistemaning bazis noma'lumlari* deb yuritiladi, ravshanki, ular r ta bo'ladi; qolgan noma'lumlar ($r < n$ bo'lganda) ozod

(*erkin*) noma'lumlar deb, ozod noma'lumlar soni $S=n-r$ esa sistemaning *ozodlik (erkinlik)* soni deb ataladi.

Agar yuqorida olingan bazis minorga mos keluvchi sistema bazis tenglamalarini ajratib olib, ozod noma'lumlar nolga teng deb qabul qilsak, r noma'lumli r ta chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz va uning determinanti noldan farqli bo'lganligi uchun yagona yechimga ega bo'ladi (Buni 2-bobda ko'rgan edik). Sistemaning qolgan tenglamalari ham bazis minorga mos tenglamalariga chiziqli bog'liq bo'lganliklari sababli, bazis noma'lumlar yuqoridagicha topilganda va ozodlari nolga teng deb olinganini hisobga olsak, qanoatlanishini payqash qiyin emas. Bu teoremaning yetarli qismining isbotidir.

1- eslatma. Yuqoridagi 4.2.1-teorema (4.2.1) sistemaning birgalikda yoki birgalikda emasligi haqida bo'lib, uning yechimlari soni haqida hech narsa demaydi. Haqiqatdan ham, agar $r(A)=r(B)$ bo'lib, $S>0$, ya'ni ozod noma'lum mavjud bo'lsa, unga (yoki ularga) ixtiyoriy qiymatlar berish mumkin bo'lib, bu holda (4.2.1) sistemaning yechimlari soni cheksiz ko'p bo'lishi; $S=0$ bo'lganda esa yechim yagona bo'lishi ravshandir.

Yagona yechimga ega bo'lgan sistema aniqlangan, bittadan ortiq yechimga ega bo'lganda esa aniqlanmagan deb yuritiladi.

2- eslatma. (4.2.1) sistema birgalikda bo'lganda ozod noma'lumlar mavjud ($S>0$) bo'lsa, ularni nolga tenglab olingan sistema yechimini uning *bazis yechimi* deb yuritiladi.

4.2.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Jordan-Gauss usuli

Oldinroq, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda qo'llaniladigan Kramer formulalarini va matritsalar usulini ko'rdik. Bu usullarda tenglamalar va noma'lumlar soni ortgan sari hisoblash ishlarining hajmi juda tez ortib borishini ham payqagan bo'lishimiz kerak. Bu yerda, amaliy jixatdan ancha qulay bo'lgan usullardan biri bilan, ya'ni *Jordan-Gauss usuli* bilan tanishamiz. Bu usulni ba'zan *noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib (chiqarib) borish usuli* deb ham yuritiladi.

Soddalik uchun uch noma'lumli uchta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases}$$

Bu sistema determinanti noldan farqli, ya'ni sistema yagona yechimga ega, undan tashqari, $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilamiz ($a_{11}=0$ bo'lsa, tenglamalarning o'rnini almashtirish bilan bunga erishish mumkin) va uni *etakchi koeffitsiyent*, unga mos tenglamani esa *etakchi tenglama* deb nomlaymiz.

Sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo'lib, etakchi tenglamani

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \quad (4.2.5)$$

ko'rinishga keltiramiz va x_1 ni *bazis noma'lum* deb hisoblaymiz. Bu yerda

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2; 3; 4).$$

Olingan (4.2.5) tenglama yordamida sistemaning qolgan ikkala tenglamalaridagi x_1 qatnashgan hadlarni yo‘qotamiz (masalan, (4.2.5) ni $-a_{21}$ ga ko‘paytirib ikkinchi tenglamaga hadlab qo‘shsak $a_{21}x_1$ had yo‘qotiladi):

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{2n}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{3n}^{(1)}. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Bu yerda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)} \cdot a_{i1} \quad (i = 2; 3, \quad j = 2; 3; 4)$$

Endi, $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib (aks xolda tenglamalar o‘rnini almashtirib bunga erishamiz), uni (4.2.6) sistema uchun etakchi koeffitsiyent hisoblab, (4.2.6) sistemaning birinchi tenglamasini unga bo‘lib, x_2 ni bazis noma‘lum deb hisoblab,

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)}$$

tenglamani olamiz. Bu yerda

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3; 4)$$

olingan oxirgi tenglama yordamida (4.2.6) sistema 2-tenglamasidagi x_2 qatnashgan hadni yo‘qotib

$$a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)}$$

ga ega bo‘lamiz. Bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} \cdot a_{i2}^{(1)} \quad (i = 3, \quad j = 3; 4)$$

Shunday qilib, quyidagi teng kuchli sistemalarni oldik:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ x_3 = a_{34}^{(3)} \end{cases} \end{aligned}$$

Oxirgi sistemada $a_{34}^{(3)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$ va $a_{33}^{(2)}$ uni olish uchun etakchi koeffitsiyent, x_3

esa bazis noma‘lum bo‘lishi ravshandir.

Bu teng kuchli sistemalarni hosil qilish jarayoni Jordan-Gauss usulining *olg‘a borish bosqichi* deb yuritiladi. Unda bitta, ya‘ni x_3 noma‘lumning qiymati aniq bo‘lib qoldi. Qolgan noma‘lumlarning qiymatlari ketma-ket

$$x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3, \quad x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 - a_{13}^{(1)}x_3$$

formulalar bilan hisoblanadi va bu jarayon usulning *ortga qaytish bosqichi* deb yuritiladi.

Bu usulni umumiy holda (4.2.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga qo‘llash jarayoni ham xuddi yuqoridagidek kechadi.

Bu o‘rinda shuni ham aytamizki, (4.2.1) sistemaning birgalikda ekanligi haqidagi ma‘lumot bo‘lmagan taqdirda ham (uni tekshirmasdan ham) unga bu

usulni qo'llash mumkin. Bu holda, uning yechimi yagona bo'lsa, Jordan-Gauss usulining olg'a borish jarayoni yakunida (4.2.1) sistemani

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

ko'rinishga keltirish mumkin bo'lib, uni *uchburchakli sistema* deb yuritiladi va mazkur holda sistemaning aniqlangan ekanligi ravshandir.

(4.2.1) sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lganda esa, uni

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_k + \dots + a_{kn}^{(k)} x_n = a_{k,n+1}^{(k)} \end{cases}$$

ko'rinishga keltirish mumkin bo'ladi, bu yerda $1 \leq k \leq m$, $k < n$. Bunday sistemani *pog'onali sistema* deb ataladi va bu holda sistema aniqlanmagan bo'lishi ravshandir.

Agar (4.2.1) sistemaning yechimi mavjud bo'lmasa, Jordan-Gauss usulining olg'a borish jarayonining biror qadamida (Iteratsiyasida) ziddiyatli tenglama olinadi.

Yuqorida bayon qilingan usulning olg'a borish jarayonini quyidagicha 1-jadvalga joylashtirish qulaydir.

Bu jadvaldagi oxirgi ustun qilingan hisoblar to'g'ri borayotganini nazorat qilib borish uchun kerak bo'lib, unga joylashgan har bir satrdagi son shu satrdagi oldindagi ustunlarga joylashgan sonlar yig'indisiga teng bo'lishi kerak. Bu o'rinda, boshlang'ich Iteratsiyada bu ustunga joylashgan sonlar oldingi ustunlardagi sonlar yig'indisi sifatida hisoblanadi, qolgan Iteratsiyalarda usuldagi hisob jarayoni bu ustunga ham qo'llaniladi va so'ngra, olingan son oldingi ustunlarda joylashgan sonlar yig'indisiga teng ekanligi tekshiriladi, agar hisobda xatoga yo'l qo'yilgan bo'lsa tenglik bajarilmaydi.

1-jadval.

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34}	$\sum a_{1j} = a_{15}$ $\sum a_{2j} = a_{25}$ $\sum a_{3j} = a_{35}$
1-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(1)}$ $a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$

2-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(2)}$ 1	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(2)}$ $a_{33}^{(2)}$	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(2)}$ $a_{34}^{(2)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(2)}$ $a_{35}^{(2)}$
3-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(1)}$ 1	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(2)}$ 1	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(2)}$ $a_{34}^{(3)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(2)}$ $a_{35}^{(3)}$

Misol.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. Jordan-Gauss usulini jadval ko‘rinishida tatbiq etamiz (2-jadval).

2-jadval.

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya	1 2 -1	2 -3 1	-1 1 1	2 -1 4	4 -1 5
1-Iteratsiya	1	2 -7 3	-1 3	2 -5 6	1 -9 9
2-Iteratsiya	1	2 1	-1 -3/7 9/7	2 5/7 27/7	4 9/7 36/7
3-Iteratsiya	1	2 1	-1 -3/7 1	2 5/7 3	4 9/7 4

Olg‘a borish bosqichi yakunida uchburchakli sistemaga keldik.

Oxirgi Iteratsiyadan $x_3=3$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Qolgan noma‘lumlarni ortga qaytish bosqichi bilan topamiz.

$$x_2 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}x_3 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7} \cdot 3 = \frac{14}{7} = 2, \quad x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1.$$

Demak, sistema yechimi (1;2;3) dan iborat ekan.

Yuqorida keltirilgan usulni biroz mukammallashtirib, ortga qaytish bosqichidan holis bo‘lishimiz mumkin. Buning uchun har bir Iteratsiyada (qadamda) etakchi tenglamadan keyingi tenglamalardagi yo‘qotilishi lozim bo‘lgan bazis noma‘lumni undan oldingi tenglamalarda ham yo‘qotib borilsa bas. Bu yo‘l bilan yuqoridagi sistemani yechaylik (3-jadval yordamida).

3-jadval

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich	1	2	-1	2	4

Iteratsiya	2 -1	-3 1	1 1	-1 4	-1 5
1-Iteratsiya	1	2 -7 3	-1 3	2 -5 6	1 -9 9
2-Iteratsiya	1	1	-1 -3/7 9/7	2 5/7 27/7	10/7 9/7 36/7
3-Iteratsiya	1	1	1	1 2 3	2 3 4

Ya'ni, ortga qaytish bosqichi kerak bo'lmay qoldi, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ ekanligi yaqqol ko'rinib turibdi.

Jordan-Gauss usulini qo'llashdagi Iteratsiyalarda (qadamlarda) tanlanadigan etakchi tenglama va Iteratsiya (qadam) nomerlarining mos tushishi shart emas. Har bir Iteratsiyada oldin tanlanmagan ixtiyoriy tenglamani etakchi deb tanlab, navbatdagi bazis noma'lum sifatida oldingi Iteratsiyalarda tanlanmagan va koeffitsiyenti noldan farqli bo'lgan noma'lumni tanlab olish mumkinligini aytamiz. Bundan foydalanib, nol elementlari ko'proq bo'lgan ustun (yoki satr) yordamida hisoblash ishlarini tezlashtirish mumkin. Shuni ham aytamizki, jadval usulini qo'llaganda bazis noma'lumlarini belgilab borish ustunini ham yozib borish foydali bo'ladi.

Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$$

sistemani yechaylik (4-jadval).

Demak, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=1$.

4-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya		1 2 1	1 -1 -2	1 1 -1	4 -6	6 2 -8
1-Iteratsiya	x_3	1 2 3	1 -1 -3	1	4 -6	6 2 -6
2-Iteratsiya	x_2 x_3	1 3 6	1	1	4 4 6	6 8 12
3-Iteratsiya	x_2 x_3 x_1	1	1	1	3 1 1	4 2 2

Uchrashi mumkin bo'lgan ba'zi-bir hollarni quyidagi misollar asosida tushintirishga harakat qilamiz.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (5-jadval).

5-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya		1	1	0	0	1	3
		0	1	2	0	1	4
		0	1	1	-1	0	1
		1	3	3	-1	2	8
1-Iteratsiya	x_1	1	1	0	0	1	3
		0	1	2	0	1	4
		0	1	1	-1	0	1
		0	2	3	-1	1	5
2-Iteratsiya	x_1	1	1	0	0	1	3
		0	1	2	0	1	4
	x_4	0	-1	-1	1	0	-1
		0	1	2	0	1	4
3-Iteratsiya	x_1	1	0	-2	0	0	-1
	x_2	0	1	2	0	1	4
	x_4	0	0	1	1	1	3
		0	0	0	0	0	0

4-Iteratsiyani qilib bo'lmaydi, chunki oxirgi satr elementlarining barchasi nollarga aylanib ketdi. Bu oxirgi tenglama qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'rsatadi. Demak, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, yuqoridagi jarayon natijasida bu yechimlarni $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 1 - 2x_3$, $x_4 = 1 - x_3$ ko'rinishida bo'lib, bu yerda x_3 ozod noma'lum ixtiyoriy qiymat olishi mumkin. Bu misolda oxirgi iteratsiya natijasida pog'onali sistemaga keldik.

2-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (6-jadval).

6-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya		1 1 0	3 -1 1	-1 1 1	1 0 -1	0 1 2	4 2 3
1-Iteratsiya	x_1	1 0 0	3 -4 1	-1 2 1	1 -1 -1	0 1 2	4 -2 3
2-Iteratsiya	x_1 x_4	1 0 0	4 -5 -1	0 1 -1	0 0 1	2 -1 -2	7 -5 -3
3-Iteratsiya	x_1 x_3 x_4	1 0 0	4 -5 -6	0 1 0	0 0 1	2 -1 -3	7 -5 -8

4-Iteratsiyani bajarib bo'lmaydi, chunki bazis ustuni to'lib qoldi. Demak, x_2 —ozod noma'lum bo'lib, yechim $x_1=2-4x_2$, $x_3=-1+5x_2$, $x_4=-3+6x_2$ dan iboratdir. Bu misolda ham pog'onali sistemaga keldik.

3-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (7-jadval).

3-Iteratsiyani bajarib bo'lmaydi, chunki oxirgi satrdagi koeffitsiyentlar barchasi 0 bo'lib, o'ng tomonda noldan farqli 6 soni turibdi (ya'ni $0=6$ ziddiyatli tenglikka egamiz). Demak, sistema yechimga ega emas.

7-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya		1 -1 1	2 -2 2	-1 3 -4	0 2 3	2 2 2
1-Iteratsiya	x_1	1 0 0	2 0 0	-1 2 -3	0 2 3	2 4 0
2-Iteratsiya	x_1 x_3	1 0 0	2 0 0	0 1 0	1 1 6	4 2 6

4 – bobga doir mashqlar

1. Amallarni bajaring:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$c) 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matritsalar ko'paytmasini toping.}$$

$$\text{Javob: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Matritsalar ni transponirlang:

$$a) A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Javob: } a) \begin{pmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} & \frac{-9}{13} \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

5. Matritsani rangini toping:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasidan foydalanib tekshiring:

$$a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

7. Tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usulidan foydalanib yeching:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Javob: } a) (1; 5; 2), \quad b) (1; 2; 3; -4)$$

Matritsa va chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. Matritsaga ta'rif bering. Matritsaning tuzilishi nimadan iborat?
2. Diagonal matritsaning ko'rinishini yozing.
3. Birlik matritsaning ko'rinishini yozing.
4. Matritsalarining tengligiga va teng emasligiga ta'rif bering.
5. Maxsus va maxsusmas matritsalariga ta'rif bering.
6. Berilgan matritsalarini qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish qanday bajariladi?
7. Matritsalarini ko'paytirish amalini tushuntiring.
8. Teskari matritsa haqida tushuncha bering.
9. Kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak? Teskari matritsa qanday topiladi?
10. Matritsaning rangi deganda nimani tushunasiz?
11. Matritsada elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?
12. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida yozishni ko'rsating.
13. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida qanday yechiladi?
14. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqidagi Kroneker-Kapelli teoremasini ayting.
15. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Jordan-Gauss usulini tushuntirib bering.
16. Pog'onali va uchburchak sistemalar haqida tushuncha bering.
17. Matritsaning xos soni va xos vektori haqida tushuncha bering.

5 - bob. Tekislikdagi birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, bu tekislikning koordinatalari berilgan iki o'zgaruvchili

$$F(x; y) = 0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $M(x; y)$ nuqtalarining to'plami qaralsa, u biror chiziqdan iborat bo'ladi. Bunday holda yuqoridagi tenglamani shu *chiziqning tenglamasi* deb yuritiladi.

Bu bobda birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlarning tenglamalarini keltiramiz.

5.1. To'g'ri chiziqning tekislikdagi tenglamalari

Nuqta va to'g'ri chiziq planimetriyaning (tekislikdagi geometriyaning) boshlang'ich tushunchalari bo'lib, koordinatalar tekisligida nuqta o'zining koordinatalari deb ataluvchi ikkita sonlarning juftligi bilan aniqlanishini 3-bobda ko'rdik. Mazkur bandda to'g'ri chiziqni ikki o'zgaruvchili chiziqli tenglama vositasida aniqlash mumkinligini keltiramiz.

5.1.1. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

Tekislikda xOy Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, unda Oy o'qiga parallel (ya'ni Ox o'qiga tik) bo'lmagan ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. U holda ℓ to'g'ri chiziq Oy o'qni biror $(0; b)$ nuqtada kesib o'tishi ravshandir. Bunda b ni ℓ to'g'ri chiziqning Oy o'qdan ajratgan kesmasi deb yuritiladi. Endi ℓ to'g'ri chiziqning Ox o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qiluvchi va $[0; \pi)$ ga tegishli burchagini φ bilan belgilaylik. Qaralayotgan hol uchun $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ bo'lib, bu burchak tangensining mavjudligini e'tiborga olgan holda $tg\varphi = k$ deb belgilaymiz va bu sonni ℓ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb ataymiz. Albatta, to'g'ri chiziq uchun b va k sonlar berilgan bo'lsa, uni koordinatalar tekisligida qurish mumkin.

Endi, $\varphi = 0$ (ya'ni $k = 0$) bo'lgan holni qarasak, to'g'ri chiziq $(0; b)$ nuqta orqali Ox o'qiga parallel bo'lib o'tishi va uning ixtiyoriy nuqtasining ordinatasi b ga tengligi ravshandir. Demak, bunday Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini

$$y = b$$

ko'rinishda yozish mumkin ekan.

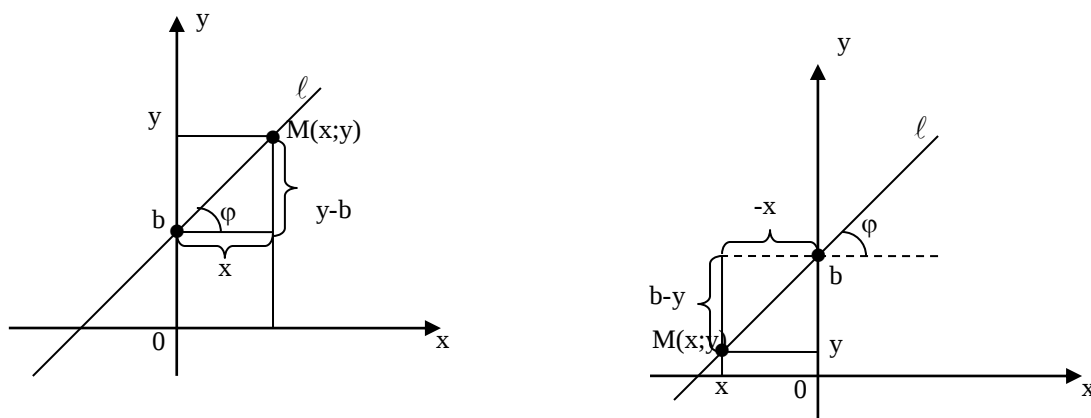
To'g'ri chiziq Ox o'qiga ham, Oy o'qiga ham parallel bo'lmasin, ya'ni $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ya'ni o'tkir burchak bo'lgan holni qarasak, $M(x; y)$ to'g'ri chiziqning $(0; b)$ dan farqli nuqtasi bo'lganda, 5.1.1-rasmdan ko'rinadiki,

$$tg\varphi = \begin{cases} \frac{y-b}{x}, x > 0, \\ \frac{b-y}{-x}, x < 0 \end{cases}$$

kelib chiqadi. Bundan, $x \neq 0$ deb faraz qilib,

$$y = kx + b \quad (5.1.1)$$

tenglamaga kelamiz. Agar bu tenglamada $x=0$ desak, $y=b$ ni, ya'ni $(0; b)$ nuqtani olamiz. Demak, (5.1.1) tenglama ℓ to'g'ri chiziqlarning barcha nuqtalari uchun o'rinli bo'lar ekan ($x \in \mathbb{R}$). Uni *to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli tenglamasi* deb ataladi.



5.1.1-rasm.

Agar (5.1.1) da $k=0$ ($\varphi=0$) deyilsa, $y=b$ bo'lib, Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasiga ega bo'lamiz.

Olingan (5.1.1) tenglama $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ - ya'ni o'tmas burchak bo'lgan hol uchun ham to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Endi, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (to'g'ri chiziq Ox o'qqa tik) bo'gan holni qaraylik. Bu hol uchun burchak koeffitsiyent k mavjud emasligi ravshandir. Ammo, bunday to'g'ri chiziq Ox o'qidan biror a kesma ajratadi va unda yotgan barcha nuqtalarning absissasi shu a songa teng, ya'ni

$$x = a \quad (5.1.2)$$

bo'ladi. Bu Ox o'qqa tik (ya'ni Oy o'qqa parallel) to'g'ri chiziq tenglamasidir. Demak, Ox o'qqa tik to'g'ri chiziq tenglamasini burchak koeffitsiyentli ko'rinishda ifodalab bo'lmas ekan.

5.1.2. To'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi

Yuqorida koordinatalar tekisligida yotuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasi (5.1.1) yoki (5.1.2) shaklda bo'lishini ko'rdik. U x va y o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglamadir.

Ushbu,

$$Ax + By + C = 0 \quad (5.1.3)$$

x va y o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglama $A^2+B^2>0$ shart bajarilganda koordinatalar tekisligida yotuvchi birorta to'g'ri chiziqlarning tenglamasi ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu yerda A va B lar tenglama ko'effitsiyentlari C esa ozod hadi deyilib, ular berilgan sonlardir.

(5.1.3) tenglamada A yoki B ko'effitsiyentlardan aqalli bittasi nolga teng emas deb faraz qilaylik (aks holda biz tenglama emas $C=0$ sonli tenglikka ega bo'lardik). Masalan, $B=0$ va $A\neq 0$ bo'lsin, bu holda (5.1.3) tenglama

$$x = -\frac{C}{A}$$

tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Bu Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasidir. Agar $B\neq 0$ bo'lsa, (5.1.3)

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (5.1.4)$$

tenglamaga ekvivalent bo'ladi. (5.1.4) da $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ deb belgilansa, undan to'g'ri chiziqlarning (5.1.1) burchak ko'effitsiyentli tenglamasini olamiz. Demak, (5.1.3) tenglama $A^2+B^2>0$ bo'lganda, to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Shu sababli, (5.1.3) ni *to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi* deb ataladi.

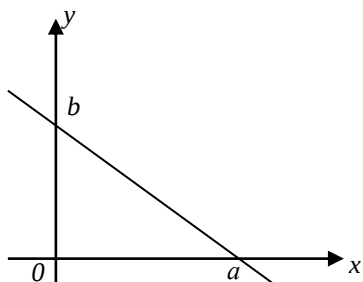
5.1.3. To'g'ri chiziqlarning kesmalar bo'yicha tenglamasi

(5.1.3) da $A\cdot B\cdot C\neq 0$ bo'lsa, uni $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ ko'rinishga keltirish oson. –

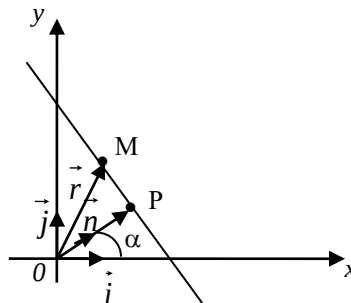
$\frac{C}{A}=a$ va $-\frac{C}{B}=b$ belgilashlarni kiritib, oxirini

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5.1.5)$$

ko'rinishga keltiramiz. (5.1.5) ni *to'g'ri chiziqlarning kesmalar bo'yicha (kesmalardagi) tenglamasi* deyiladi. Undagi a va b lar to'g'ri chiziqlarning mos ravishda Ox va Oy o'qlardan ajratgan kesmalari ekanligiga ishonch hosil qilish oson (5.1.2-rasm).



5.1.2-rasm.



5.1.3-rasm.

5.1.4. To'g'ri chiziqlarning normal tenglamasi

Koordinatalar boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziqlar uchun ko'pincha (5.1.3.) tenglamaning maxsus shaklidan foydalaniladi. ℓ koordinatalar boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziq bo'lsin. Koordinatalar boshidan ℓ to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi p ga teng deylik, ya'ni $|\vec{OP}| = p$, bunda P – perpendikulyarning asosi. $\vec{n}$ $\vec{OP}$ ning birlik vektori bo'lsin. Bu holda $\vec{OP} = p\vec{n}$ deb yozish mumkin. $\vec{OP}$ vektor bilan $\vec{i}$ vektor o'zaro α burchak hosil qilsin (5.1.3-rasm). $\vec{OP}$ ni ℓ chiziqlarning normali deyiladi. Agar ixtiyoriy $M(x,y) \in \ell$ nuqtani olsak, u vaqtda, $\vec{OM} = \vec{r}$ radius-vektorning koordinatalari (x, y) , ya'ni

$$\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

5.1.3-rasmdan $\vec{PM} = \vec{r} - \vec{OP}$ bo'lib, u $\vec{n}$ vektorga ortogonal bo'lgani uchun ushuni yoza olamiz:

$$(\vec{r} - \vec{OP}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{OP} \cdot \vec{n}.$$

Agar $\vec{n}$ birlik vektor uchun

$$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha$$

ekanini e'tiborga olsak, yuqoridagi tenglamadan, $\vec{OP} \cdot \vec{n} = p$ bo'lganligi sababli,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (5.1.6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. (5.1.6) ℓ to'g'ri chiziqlarning normal tenglamasi deyiladi. Bu yerda, agar ℓ to'g'ri chiziq koordinatalar boshi orqali o'tsa $p=0$ bo'lib, $\vec{n}$ to'g'ri chiziqqa tik bo'lgan birlik vektor ekanligi ravshandir. Demak, (5.1.6) tenglamada $p \geq 0$ hamda o'zgaruvchilar koeffitsiyentlari kvadratlarining yig'indisi birga tengdir. Endi, to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasini normal tenglama ko'rinishiga keltiraylik. Buning uchun $A^2 + B^2 > 0$ shart bajarilganda (5.1.3) tenglamaning har ikkala tomonini $\lambda \neq 0$ ga ko'paytirib,

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + \lambda C = 0$$

da λ ni yuqorida aytilgandek tanlaymiz:

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1, \quad \lambda C = -p \quad (p \geq 0).$$

Bundan

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5.1.7)$$

va $p = -\lambda C \geq 0$ bo'lishi uchun λ ning ishorasini C ning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlash kifoyadir. λ ning topilgan qiymatini oxirgi tenglamaga qo'yib, uni (5.1.6) ko'rinishga keltiramiz. (5.1.7) formula bilan aniqlangan λ ni *normallovchi ko'paytuvchi* deyiladi. Yuqoridagi mulohazalardan to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasini normal tenglamaga keltirish uchun umumiy tenglamaning ikkala tomonini normallovchi ko'paytuvchiga ko'paytirish kifoya degan xulosa kelib chiqadi:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (5.1.8)$$

Eslatma. Agar to'g'ri chiziqlarning normal tenglamasidagi x va y o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari to'g'ri chiziqqa koordinatalar boshidan tushirilgan (yoki o'tkazilgan) perpendikulyar birlik vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari ekanligini eslasak, $\vec{N}(A;B)$ bilan $\vec{n}(\lambda A; \lambda B)$ kollinear ekanligidan to'g'ri chiziq umumiy tenglamasidagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan $\vec{N}(A;B)$ vektor shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli, $\vec{N}(A;B)$ ni ham *to'g'ri chiziqlarning normali* deb yuritiladi.

5.1.5. To'g'ri chiziqlar dastasi

Tekislikning berilgan nuqtasidan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami to'g'ri chiziqlar dastasi, berilgan nuqta esa uning markazi deyiladi.

Agar to'g'ri chiziqlar dastasining markazi $M_0(x_0; y_0)$ dan iborat bo'lsa (5.1.4-rasm), uning tenglamasini

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (5.1.9)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $A^2 + B^2 > 0$ deb faraz qilinadi.

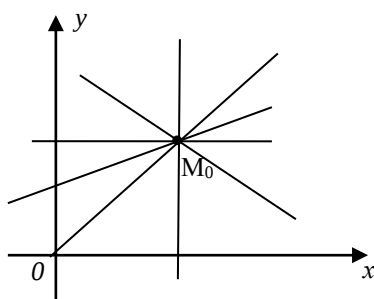
Haqiqatdan ham, agar dastaga tegishli $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq $M_0(x_0; y_0)$ nuqta orqali o'tishini hisobga olsak, $C = -Ax_0 - By_0$ bo'lib, (5.1.9) tenglamani olamiz.

Agar (5.1.9) da $B \neq 0$ deb faraz qilinsa, dasta tenglamasini

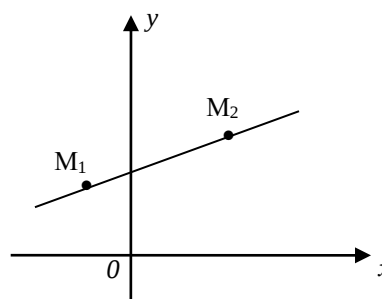
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

ko'rinishga keltirish mumkinligi ravshandir. Oxirgi tenglama vositasida yozilgan dastada $x = x_0$ to'g'ri chiziqlarning etishmasligini aytamiz.

Agar $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan berilgan k yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab qilingan bo'lsa, yuqoridagi tenglamani yozish kifoyadir.



5.1.4-rasm.



5.1.5- rasm.

5.1.6. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Agar $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ular orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab qilingan bo'lsa, ular ustma-ust tushmagan holda bu masala yagona yechimga egadir (5.1.5-rasm).

$x_1 = x_2$ bo'lgan holda talab qilingan tenglama $x = x_1, y_1 = y_2$ bo'lganda esa $y = y_1$ bo'lishi ravshandir. Endi, $x_1 \neq x_2$ va $y_1 \neq y_2$ bo'lgan holni qarasak, markazi M_1 nuqtada bo'lgan

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

dasta to'g'ri chiziqlaridan M_2 orqali o'tuvchisini ajratsak,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ni olamiz. Buni yuqoridagi tenglamaga qo'yib, oddiy shakl o'zgartirish bajarish natijasida

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ga ega bo'lamiz. Bu *ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir*.

5.1.7. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$(\ell_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{va} \quad (\ell_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

U vaqtda, $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ ℓ_1 ga, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ esa ℓ_2 ga normal vektor bo'ladi.

Agar $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ o'zaro kollinear bo'lmasa, $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ orasidagi φ burchak ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar o'zaro tashkil qilgan burchaklardan biriga teng bo'ladi. Agar ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, ular orasidagi burchak nolga teng deb qabul qilinadi. Endi, umumiy holda φ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bo'lsa, uni topish uchun $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ larning skalyar ko'paytmasidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (5.1.10)$$

Agar $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$ bo'lsa, olingan (5.1.10) formulani

$$\cos \varphi = \frac{\left| \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} + 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{A_1^2}{B_1^2} \right) + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{A_2^2}{B_2^2} \right) + 1}}$$

ko'rinishga keltirib, to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsiyentlari uchun

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

ifodalardan foydalansak,

$$\cos \varphi = \frac{|k_1 \cdot k_2 + 1|}{\sqrt{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)}}$$

ni olamiz. Sodda hisoblashlar yordamida quyidagi

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

formulani hosil qilish mumkin.

Endi, ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini ko'raylik. Agar $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ va $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ lar berilgan ikki to'g'ri chiziqning tenglamalari bo'lib, ular perpendikulyar bo'lsa, $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ normalarning ortogonaligidan

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (5.1.11)$$

yoki ($B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ deb faraz qilib) burchak koeffitsiyentlar orqali

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \quad (5.1.12)$$

ni olamiz. (5.1.11) yoki (5.1.12) *munosabat to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidan iboratdir.*

Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti vektorlarning kollinearlik shartidan kelib chiqadi. Agar $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ yoki $\{A_1, B_1\} = \{\lambda A_2; \lambda B_2\}$ bo'lsa, undan

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0. \quad (5.1.13)$$

Buni $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ bo'lganda burchak koeffitsiyentlar orqali

$$k_1 = k_2 \quad (5.1.14)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

(5.1.13) yoki (5.1.14) *to'g'ri chiziqlarning parallellik shartidir.*

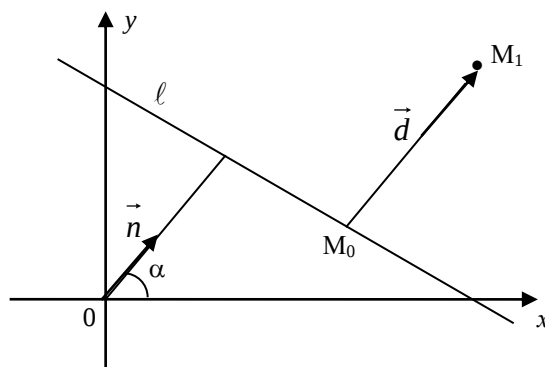
5.1.8. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

Koordinatalar tekisligida berilgan $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan berilgan ℓ to'g'ri chiziqqacha masofani topish talab qilingan bo'lsin. ℓ to'g'ri chiziq $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ ($p \geq 0$) normal tenglamaga ega deb faraz qilaylik. M_1 nuqta va ℓ to'g'ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashishini quyidagicha izohlaymiz (5.1.6-rasm):

$M_0 \in \ell$, $\overrightarrow{M_0 M_1} \perp \ell$, $\vec{n} \perp \ell$, $\vec{n}(\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\vec{d} = \overrightarrow{M_0 M_1}$. Demak, agar $M_0(x_0; y_0)$ desak, $x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p = 0$; $\vec{d}(x_1 - x_0; y_1 - y_0)$;

$$\begin{aligned} \vec{d} \parallel \vec{n} &\Rightarrow \delta = |\vec{d}| = |\vec{d} \cdot \vec{n}| = |(x_1 - x_0) \cos \alpha + (y_1 - y_0) \sin \alpha| = \\ &= |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)| = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|. \\ \delta &= |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p| \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

kelib chiqadi. (5.1.15) berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofa formulasidir.



5.1.6- rasm.

Yuqorida normallovchi ko‘paytuvchi yordamida to‘g‘ri (5.1.3) chiziqling umumiy tenglamasini normal (5.1.8) ko‘rinishga keltirgan edik. Demak, bu hol uchun (5.1.15) ni

$$\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5.1.16)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

5.2. Qutb koordinatalari sistemasi

Tekislikda boshi biror O nuqtada bo‘lgan ℓ nurni olamiz. Tekislikda olingan ixtiyoriy M nuqtani O bilan tutashtirib, $\overrightarrow{OM}$ vektorni hosil qilaylik va

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|$$

deb belgilaylik. $\overrightarrow{OM}$ vektor bilan ℓ nur (yo‘naltirilgan nur) orasidagi burchakni φ deylik (5.2.1-rasm).

Shu yo‘sinda olingan ρ va φ sonlar M nuqtaning *qutb koordinatalari* deyilib, bu holda, *tekislikda qutb koordinatalari sistemasi kiritilgan, O nuqta qutb boshi ℓ nur qutb o‘qi, ρ qutb radiusi, φ qutb burchagi* deb yuritiladi. Xuddi shuningdek, M nuqtaning qutb koordinatalari ρ va φ berilgan bo‘lsa, $M(\rho; \varphi)$ ko‘rinishda yozilib, uni qutb koordinatalari tekisligida qurish mumkinligi ravshandir. Kezi kelganda shuni ham aytamizki, qutb boshi O nuqta uchun $\rho=0$ bo‘lib, φ ixtiyoriy qiymat qabul qilishi mumkin, aniqlik uchun ko‘pincha $\varphi=0$ deb olinadi. Undan tashqari, qutb radiuslari teng qutb burchaklari esa bir-biridan 2π ga karrali (radianlarda hisoblanganda) burchakka farq qiluvchi nuqtalar ustma-ust tushishini, ya’ni aslida bitta nuqta ekanligini ham aytamiz. Haqiqatdan ham, agar $M(\rho, \varphi)$ bilan aniqlangan nuqtani olinsa, xuddi shu nuqta $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ koordinatalar bilan ham aniqlanadi. Bu holat, hatto, ko‘p tekshirishlarda qulaylikka ham olib keladi. Bu tekislikda qutb sistemasining Dekart sistemasiga qaraganda kengroq imkoniyatga egaligini ko‘rsatadi.

Agar tekislikda koordinatalar boshi qutb bilan, absissalar o‘qining musbat qismi esa qutb o‘qi bilan ustma-ust tushadigan Dekart koordinatalar sistemasi

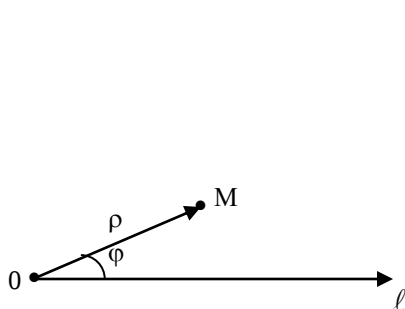
kiritilsa (5.2.2-rasm), u vaqtda, M nuqtaning (x,y) - Dekart va (ρ,φ) -qutb koordinatalari quyidagi formulalar bilan bog‘langandir:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi.$$

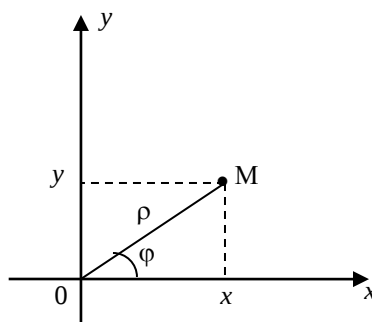
O‘z navbatida, ρ va φ lar x va y orqali, $|x| + |y| > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ bo‘lganda bir qiymatli topiladi:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, y > 0; \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x \cdot y \neq 0, x < 0; \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x \cdot y < 0, x > 0; \\ 0, & x \cdot y = 0, x > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x \cdot y = 0, y > 0; \\ \pi, & x \cdot y = 0, x < 0; \\ \frac{3\pi}{2}, & x \cdot y = 0, y < 0. \end{cases}$$



5.2.1- rasm.



5.2.2- rasm.

5.3. Ikkinchi tartibli chiziqlar

5.3.1-ta’rif. Chiziq ikki o‘zgaruvchili n -darajali algebraik tenglama vositasida aniqlangan bo‘lsa, uni n -tartibli deyiladi.

Yuqorida ko‘rilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi birinchi darajali bo‘lganligi sababli, keltirilgan ta’rifga ko‘ra u birinchi tartibli chiziq ekan.

Bu bandda ikkinchi tartibli chiziqlar to‘g‘risida fikr yuritamiz.

Tekislikda ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (5.3.1)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda A, B, C, D, E, F o‘zgarmas koeffitsiyentlar bo‘lib; A, B, C lardan aqalli bittasi nolan farqli deb faraz qilamiz (aks holda birinchi tartibli chiziqqa ega bo‘lamiz).

5.3.1. Aylana

5.3.2–ta’rif. *Koordinatalar tekisligida berilgan $C(a;b)$ nuqtadan berilgan $R>0$ masofada joylashgan nuqtalar to‘plami markazi $C(a;b)$ nuqtada bo‘lgan R radiusli aylana deyiladi.*

Aylana tekislikda o‘z markazining koordinatalari va radiusi bilan bir qiymatli aniqlanadi. Agar $M(x;y)$ markazi $C(a;b)$ nuqtada radiusi R ga teng bo‘lgan aylananing nuqtasi bo‘lsa (5.3.1_a-rasm), uning koordinatalari

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (5.3.2)$$

tenglamani qanoatlantirishini keltirib chiqarish qiymin emas.

Endi, (5.3.2) da shakl almashtirishlar qilib, uni

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Agar ushbu

$$-2a = 2D, \quad -2b = 2E, \quad a^2 + b^2 - R^2 = F$$

belgilashlarni kiritsak, u vaqtda, aylananing tenglamasi

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (5.3.3)$$

ko‘rinishga keladi. Bundan aylana ikkinchi tartibli chiziq ekani kelib chiqadi, chunki oxirgi tenglama (5.3.1) bilan $A=1, B=0, C=1$ bo‘lganda ustma-ust tushadi. Demak, (5.3.1) tenglama aylanani ifoda etish uchun $A=C \neq 0, B=0$ bo‘lishi zarurdir.

Agar aylana markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, u holda $a=b=0$ bo‘lib, (5.3.2) tenglama

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ko‘rinishni oladi.

Endi, (5.3.3) tenglama berilgan bo‘lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda, elementar shakl almashtirishlar qilib, uni

$$(x+D)^2 + (y+E)^2 = D^2 + E^2 - F$$

ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lib, bu yerda uch hol mavjudligi yaqqol ko‘rinib turibdi:

- 1) $D^2 + E^2 - F > 0$ bo‘lsa, $R^2 = D^2 + E^2 - F$ belgilash bilan markazi $(-D; -E)$ nuqtada bo‘lgan R radiusli aylanaga ega bo‘lamiz;
- 2) $D^2 + E^2 - F = 0$ bo‘lganda, oxirgi tenglamani tekislikning faqat bitta $(-D; -E)$ nuqtasi qanoatlantiradi, ya’ni bitta nuqtaga ega bo‘lamiz (5.3.1_b-rasm);
- 3) $D^2 + E^2 - F < 0$ bo‘lsa, oxirgi tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikning birorta ham nuqtasi mavjud bo‘lmaydi. Bu holda mavhum aylanaga egamiz deyiladi.

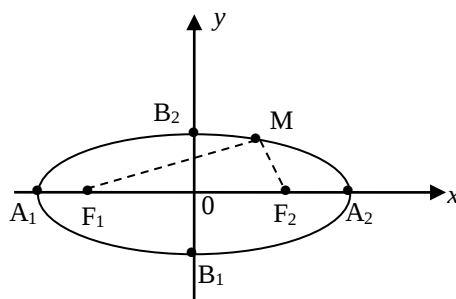


5.3.1- rasm.

5.3.2. Ellips

5.3.3-ta'rif. Ellips deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi berilgan o'zgarmas songa teng bo'lib, bu berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi talab qilinadi.

Ellips fokuslarini F_1 va F_2 bilan belgilaymiz. Ellipsning sodda tenglamasini olish maqsadida Dekart koordinatalar sistemasini Ox o'q fokuslardan o'tadigan, Oy o'q esa $|F_1F_2|$ kesmani teng ikkiga bo'ladigan qilib kiritamiz (5.3.2-rasm). Fokuslar orasidagi masofani $2c$ orqali belgilaymiz. U holda, F_1 va F_2 nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ bo'ladi. Ta'rifda aytilgan berilgan o'zgarmas sonni $2a$ bilan belgilaymiz.



5.3.2- rasm.

$M(x;y)$ —ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, undan fokuslarigacha bo'lgan $r_1 = d(F_1; M)$, $r_2 = d(F_2; M)$ masofalarni fokal radiuslari deb atalib, ta'rifga ko'ra:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Bunga

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ifodalarni qo'yib,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu ellipsning yuqoridagidek qilib kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir. Bu tenglamani soddalashtirish uchun quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \Rightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \end{aligned}$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

F_1MF_2 uchburchakda $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$, ya'ni $2a > 2c > 0$ yoki $a^2 - c^2 > 0$. Shuning uchun,

$$a^2 - c^2 = b^2$$

deb belgilab, oxirgi tenglamani

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ko'rinishda yozish mumkin yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.3.4)$$

(5.3.4) *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Ellips haqidagi ba'zi bir mulohazalarni keltiramiz.

1) Agar ellipsning fokuslari deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalar ustma-ust tushib qolsa, u holda $c=0$, $a^2=b^2$ bo'lib, (5.3.4) tenglama

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ko'rinishga keladi. Bu bizga tanish markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana tenglamasidir. Demak, aylana ellipsning xususiy holidir.

2) (5.3.4) ellips Ox o'q bilan ikkita $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ nuqtalarda, Oy o'q bilan ham ikkita $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ nuqtalarda kesishadi (5.3.2-rasm). A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalar *ellipsning uchlari* deb ataladi.

$|A_1A_2| = 2a$; $|B_1B_2| = 2b$, $a > b$ ekanligi ravshandir. Shu sababli $|A_1A_2|$ kesmani *ellipsning katta o'qi*, $|B_1B_2|$ kesmani esa *kichik o'qi* deyiladi. Demak, a va b sonlar *ellipsning yarim o'qlaridir*.

3) Fokuslari orasidagi masofaning katta o'qi uzunligiga nisbati *ellipsning ekssentrisiteti* deb ataladi va ε harfi bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

bundan $0 \leq c < a$ ga asosan ellips ekssentrisiteti uchun

$$0 \leq \varepsilon < 1$$

tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Ekssentrisitet ellipsning cho'ziqlik darajasini tavsiflaydi. U qanchalik birga yaqin bo'lsa, ellips shunchalik cho'ziq bo'ladi. $\varepsilon=0$ bo'lganda fokuslar ustma-ust tushadi va yarim o'qlar teng bo'lib, ellips aylanaga o'tadi.

4) Ellipsning kanonik tenglamasidan uning nuqtalari Ox o'qqa nisbatan ham Oy o'qqa nisbatan ham simmetrik joylashganligi, shuningdek, koordinatalar boshiga nisbatan ham markaziy simmetriklik hossasiga ega ekanligi yaqqol ko'rinishga keladi. Demak, ellips ikkita simmetriya o'qlariga (ular katta va kichik o'qlaridan iborat) va bitta simmetriya markaziga ega ekan. Ellipsning simmetriya markazini uning *markazi* deb ataladi. Demak, *ellips markazli chiziqlar turkumiga tegishlidir*.

5) (5.3.4) ellipsning kanonik tenglamasidan uning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasi uchun $|x| \leq a \wedge |y| \leq b$, ya'ni ellips tomonlari $2a$ va $2b$ hamda koordinata o'qlariga simmetrik bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichiga joylashgan ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek, (5.3.4) ellipsning koordinatalar tekisligining birinchi choragiga tegishli qismi uchun

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a$$

ni yoza olamiz. Bundan $x=0 \Rightarrow y=b$ bo'lib, x o'zgaruvchining qiymati 0 dan a gacha o'sib borganda y o'zgaruvchining qiymati b dan 0 gacha kamayib borishini ko'rish mumkin. Demak, (5.3.4) ellipsning birinchi chorakdagi yoyining nuqtasi $B_2(0;b)$ nuqtadan $A_2(a;0)$ nuqtaga qarab pastlab boradi (5.3.2-rasm). (5.3.4) ellipsning qolgan choraklaridagi qismlari uchun uning simmetriklik xossasi asosida xulosa chiqarish osondir.

6) Ellipsning fokal radiuslari uchun $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

5.3.3. Giperbola

5.3.4–ta'rif. *Giperbola deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan o'zgarmas songa teng bo'ladi.*

Ta'rifda aytilgan o'zgarmasni $2a$ deb, fokuslar orasidagi masofani $2c$ deb belgilanadi. Shu bilan birga $2c > 2a$ deb hisoblanadi. Giperbolaning sodda tenglamasini keltirib chiqarish maqsadida Dekart koordinatalar sistemasini ellips tenglamasini keltirib chiqargandagidek tanlaymiz (5.3.3-rasm). $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, uning fokal radiuslar deb ataluvchi, $r_1 = |F_1M|$ va $r_2 = |F_2M|$ lar uchun

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

U holda, giperbola ta'rifi bo'yicha ushbu tenglamani yozish mumkin:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

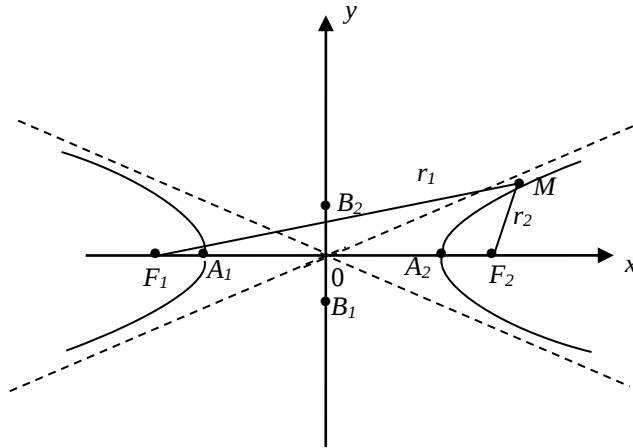
yoki

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Ellips kanonik tenglamasini keltirib chiqarishda qilingan shakl almashtirishlarni bu yerda ham bajarib, giperbolaning quyidagi *kanonik tenglamasini* olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.3.5)$$

Bu tenglamada $b^2 = c^2 - a^2$.



5.3.3-rasm.

Giperbola haqida quyidagi mulohazalarni keltiramiz.

1) Giperbolaning (5.3.5) kanonik tenglamasidan $|x| \geq a$ bo'lishi kerakligi yaqqol ko'rinib turibdi. Demak $(-a;a)$ oralikda giperbolaning nuqtasi yo'qdir. Giperbola Ox o'q bilan $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalar giperbolaning uchlari (5.3.3-rasm), $|A_1A_2|$ kesmani esa *giperbolaning haqiqiy o'qi* deb ataladi. Giperbola ordinatalar o'qi bilan kesishmaydi, shu sababli uchlari $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ nuqtalarda bo'lgan $|B_1B_2|$ kesmani *giperbolaning mavhum o'qi* deb ataladi. a va b sonlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlaridir.

2) (5.3.5) giperbola tarmoqlari ushbu

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib borishi sababli ular *giperbolaning asimptotalari* deb yuritiladi (5.3.4-rasmga qarang).

Haqiqatdan ham giperbola (5.3.5) tenglamasini y ga nisbatan yechsak,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad |x| \geq a$$

ni olamiz. Aniqlik uchun giperbolaning koordinatalar tekisligining I choragiga tegishli qismini olib, uning ordinatasi bilan $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq ordinatasi orasidagi ayirmani topsak,

$$\delta(x) = \frac{b}{a} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right), \quad x \geq a$$

yoki oddiy shakl o'zgartirishlardan so'ng

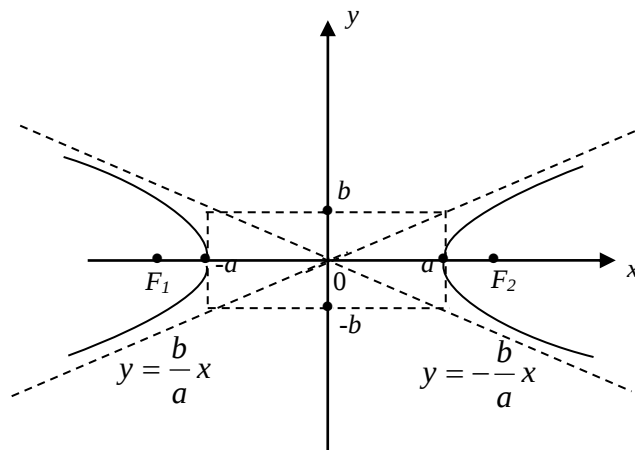
$$\delta(x) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ga ega bo'lamiz. Bu ifodadan x cheksiz kattalashib borganda $\delta(x)$ nolga yaqinlashib borishi yaqqol ko'rinib turibdi, ya'ni giperbolaning koordinatalar

tekisligi I choragida yotgan tarmogʻi $y = \frac{b}{a}x$ toʻgʻri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borar ekan.

Umuman olganda giperbola ikkita $y = \pm \frac{b}{a}x$ asimptotalarga ega boʻlib, ularni koordinatalar tekisligida qurish uchun giperbolaning haqiqiy uchlari boʻlgan $A_1(-a;0)$ va $A_2(a;0)$ nuqtalar orqali Oy oʻqiga parallelar hamda mavhum oʻqining uchlari boʻlgan $B_1(-b;0)$ va $B_2(b;0)$ nuqtalar orqali Ox oʻqiga parallelar oʻtkazsak, ularning kesishishi natijasida hosil boʻlgan toʻgʻri toʻrtburchak *asimptotalar toʻrtburchagi* deb atalib, uning diagonallari giperbola asimptotalarida yotishidan foydalanish maqsadga muvofiqdir (5.3.4-rasm).

Agar $a=b$ boʻlsa, *giperbola teng tomonli* deb ataladi va uning kanonik tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ koʻrinishda boʻlib asimptotalari $y = \pm x$ dir.



5.3.4- rasm.

3) Fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy oʻqi uzunligiga nisbati *giperbolaning eksentrisiteti* deyiladi va ε orqali belgilanadi.

Taʼrifga koʻra,

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Giperbolada $c > a$ boʻlgani sababli $\varepsilon > 1$ dir.

4) Xuddi ellipsdagidek, giperbola uchun ham ikkita simmetriya oʻqlari (ular haqiqiy va mavhum oʻqlar) va bitta simmetriya markazi mavjudligi uning kanonik tenglamasidan kelib chiqadi. Simmetriya markazini *giperbolaning markazi* deb ataladi. Demak, *giperbola markazli chiziqlar turkumiga tegishlidir*.

5) Agar giperbolada haqiqiy va mavhum oʻqlar oʻz oʻrinlarini almashtirsa, uning tenglamasini

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

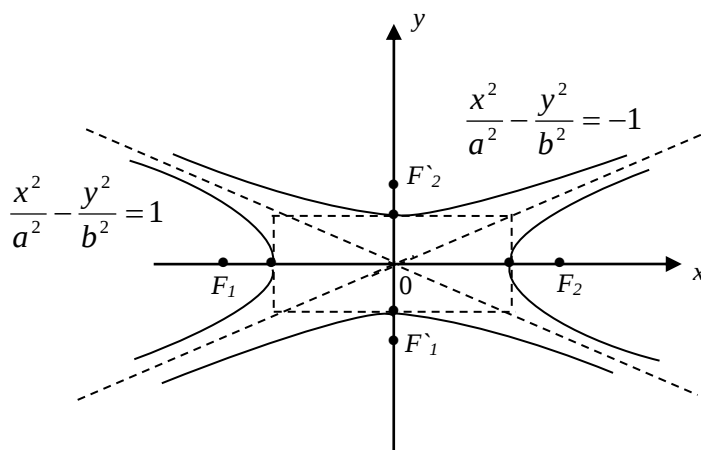
koʻrinishda yozish mumkin boʻlib, uni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

giperbolaga *qo'shma giperbola* deb ataladi. Demak, o'zaro qo'shma giperbolalarni bitta

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

tenglama bilan ifodalash mumkin (5.3.5-rasm).



5.3.5- rasm.

5.3.4. Parabola

5.3.5-ta'rif. *Parabola deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biri fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrissa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlashgan bo'ladi.*

Parabolaning sodda tenglamasini keltirib chiqarish uchun, ellips va giperbola kanonik tenglamalarini chiqarishda qilinganidek, Dekart koordinatalar sistemasi maxsus tanlanadi. Bunda fokus deb ataluvchi F nuqtadan o'tuvchi va berilgan ℓ to'g'ri chiziqqa (direktrissaga) perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni Ox o'q deb qabul qilamiz, berilgan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p deb belgilaymiz. Agar F dan ℓ ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq direktrissa bilan B nuqtada kesishadi deb faraz qilinsa, $|FB|$ kesmaning o'rtasini koordinatalar boshi O deb qabul qilamiz (5.3.6-rasm). U vaqtda, $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ bo'lib, direktrissaning tenglamasi

$$x + \frac{p}{2} = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Parabolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasi uchun uning ta'rifiga binoan $|MD| = |MF|$ ($MD \perp \ell$, $D \in \ell$).

Agar $|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $|MD| = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ ekanini hisobga olsak, yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Bu tenglamada shakl almashtirishlar bajarib,

$$y^2 = 2px \quad (5.3.6)$$

parabolaning kanonik tenglamasini olamiz. Endi, (5.3.6) tenglama bilan aniqlangan parabola haqidagi ba'zi-bir mulohazalarni keltiraylik.

- 1) Parabola koordinatalar boshidan o'tadi;
- 2) Ox o'qqa nisbatan simmetrik, ya'ni uning faqat bitta simmetriya o'qi bo'lib, uni *parabolaning o'qi* deyiladi. Simmetriya markaziga ega emas, shu sababli parabola markazsiz chiziqlar turkumiga tegishlidir.
- 3) Parabolaning o'z o'qi bilan kesishish nuqtasi (qaralayotgan holda $O(0; 0)$ – koordinatalar boshi) uning *uchi* deb ataladi.
- 4) Agar parabolaning (5.3.6) tenglamasida x bilan y ning o'rinlarini almashtirsak, uning tenglamasi

$$x^2 = 2py$$

ko'rinishni oladi, bu holda parabola koordinatalar o'qlariga nisbatan 5.3.7-rasmda ko'rsatilgandek joylashadi.

- 5) Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan uning F fokusigacha bo'lgan masofani $|MF| = r$ bilan, direktrissagacha bo'lgan masofani $MD = k$ bilan belgilasak, ta'rifidan $r = k$ deb yozish mumkin (5.3.6-rasmga qarang).

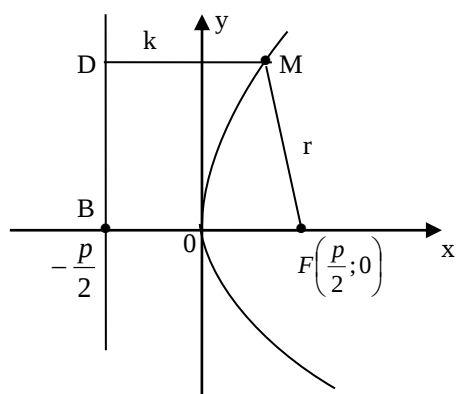
Parabolaning eksentrisiteti deb $\varepsilon = \frac{r}{k}$ songa aytiladi. Bu holda, ravshanki,

$$\varepsilon = \frac{r}{k} = 1.$$

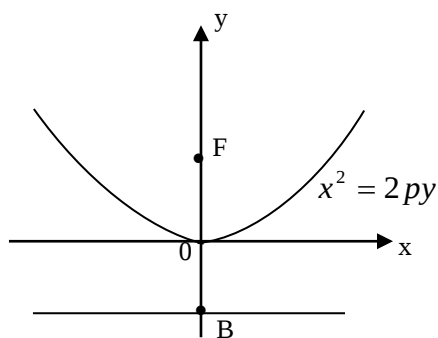
- 6) (5.3.6)dan parabolaning koordinatalar tekisligi I choragidagi yoyi uchun

$$y = \sqrt{2px}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

bo'ladi. Bundan parabola I chorakdagi qismi nuqtasining obcissasi 0 dan $+\infty$ gacha o'sib borganda ordinatasi 0 dan $+\infty$ gacha o'sishni ko'rish osondir. Parabolaning IV chorakdagi yoyi haqida uning simmetriklik xossasi asosida xulosa chiqarish mumkin. (5.3.6) ning II va III choraklarga tegishli nuqtasi yo'qdir.



5.3.6- rasm.



5.3.7- rasm.

5.3.5. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini tekshirish

Yuqorida ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini (5.3.1) ko'rinishda yozgan edik. Agar unda $B=0$ bo'lsa, tenglama

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (5.3.7)$$

ko'rinishni olib, x va y o'zgaruvchilar bo'yicha chap tomondagi ifodaning to'la kvadratlarini ajratish imkoniyati tug'iladi.

Haqiqatdan ham, agar $A \cdot C \neq 0$ bo'lsa, (5.3.7) ni

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = f \quad (5.3.8)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $f = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$.

1. Agar (5.3.7) da $A \cdot C > 0$ bo'lsa, tenglama elliptik tipga tegishli deyiladi va bu holda (5.3.7) dan olingan (5.3.8) tenglamada quyidagi hollar kuzatilishishi mumkin:

a) $Af > 0$ ($Cf > 0$) bo'lsa, $x + \frac{D}{A} = x_1$, $y + \frac{E}{C} = y_1$ almashtirishlar yordamida

(ya'ni koordinatalar boshini $\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{C}\right)$ nuqtaga ko'chirish bilan) (5.3.8) ni

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ko'rinishga keltiramiz, bu yerda $a^2 = \frac{f}{A}$, $b^2 = \frac{f}{C}$. Demak, bu holda ellipsga ($a^2 = b^2$ bo'lsa, aylanaga) egamiz.

b) $f = 0$ bo'lsa, (5.3.8) ni faqat bitta $\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{C}\right)$ nuqta qanoatlantiradi, ya'ni,

bu holda, bitta nuqtaga egamiz:

c) $Af < 0$ ($Cf < 0$) bo'lsa, (5.3.8) ni a) banddagidek

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = -1$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Tekislikning bu tenglamani qanoatlantiradigan nuqtasi yo‘qdir. Bu holda, *mavhum ellips*ga ($a^2=b^2$ bo‘lganda *mavhum aylanaga*) egamiz deyish qabul qilingan.

2. Agar (5.3.7) da $A \cdot C < 0$ bo‘lsa, *tenglama giperbolik tipga tegishli* deyiladi va (5.3.8) tenglamada quyidagi hollar kuzatiladi:

a) $A \cdot f \neq 0$ bo‘lsa, yuqoridagiga o‘xshash (5.3.8) ni

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \pm 1$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Bu yerda $A \cdot f > 0$ bo‘lganda «+», aks holda, «-» ishora olinadi. Bu giperboladir.

b) $f=0$ bo‘lsa, (5.3.8) dan

$$\left(y + x \sqrt{-\frac{A}{C}} \right) \left(y - x \sqrt{-\frac{A}{C}} \right) = 0$$

ni olamiz. Bundan esa ikkita kesishuvchi

$$y = \pm x \sqrt{-\frac{A}{C}}$$

to‘g‘ri chiziqlarga ega ekanligimizni ko‘ramiz.

3. Nihoyat, (5.3.7) da $A \cdot C = 0$ bo‘lsa, *tenglama parabolik tipga tegishli* deb ataladi. $A=C=0$ bo‘lishi mumkin emas, aks holda (5.3.7) chiziqli tenglamaga aylanib qoladi. Aniqlik uchun $A=0$, $C \neq 0$ deb faraz qilsak ($A \neq 0$, $C=0$ hol ham shunga o‘xshash bo‘ladi), (5.3.7) ni

$$\left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = -2 \cdot \frac{D}{C} x - \frac{CF - E^2}{C^2} \quad (5.3.9)$$

ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lib, quyidagi hollar kuzatiladi:

a) $D \neq 0$ bo‘lsa, (5.3.9) ni

$$\left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = 2p \left(x + \frac{CF - E^2}{2DC} \right)$$

ga keltiramiz, bu yerda $p = -\frac{D}{C}$. Oxirigidan $y + \frac{E}{C} = y_1$, $x + \frac{CF - E^2}{2DC} = x_1$ almashtirish bilan

$$y_1^2 = 2px_1$$

parabolaning kanonik tenglamasiga kelamiz.

b) $D=0$, $E^2 - CF > 0$ bo‘lsa,

$$\left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = \frac{E^2 - CF}{C^2}$$

tenglamadan, ikkita parallel bo‘lgan

$$y = -\frac{E}{C} \pm \sqrt{\frac{E^2 - CF}{C^2}}$$

to‘g‘ri chiziqlarga ega bo‘lamiz.

c) $D=0$, $E^2 - CF = 0$ bo‘lsa, bitta

$$y = -\frac{E}{C}$$

to'g'ri chiziqqa ega bo'lamiz. Bu holda, *ustma-ust tushgan ikkita to'g'ri chiziqqa* egamiz deyiladi.

d) $D=0$, $E^2-CF<0$ bo'lsa, (5.3.9) tenglama o'ng tomoni manfiy o'zgarman son bo'lib, u haqiqiy sohada yechimga ega emas, ya'ni hech qanday chiziqqa ega bo'lmaymiz. Bu holda, *ikkita parallel mavhum to'g'ri chiziqqa egamiz deyish qabul qilingan*.

Endi, (5.3.1) tenglamada $B\neq 0$ bo'lgan holni qaraymiz. Koordinatalar o'qlarini biror α burchakka burish bilan bu koeffitsiyentni nolga teng qilish mumkinligini ko'rsatamiz. 5.3.8-rasmdagidek M nuqtaning boshlang'ich xOy sistemadagi koordinatalari $M(x;y)$, koordinatalar o'qlarini biror α burchakka burib olingan yangi x_1Oy_1 sistemadagi korodinatalarini $M(x_1;y_1)$ bilan belgilaylik. Agar α va φ burchaklarni hisobga olib, Dekart va qutb koordinatalar orasidagi bog'lanishlarni eslasak, 5.3.8-rasmdan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ y_1 = r \sin \varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos(\alpha + \varphi) = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = r \sin(\alpha + \varphi) = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

Demak,

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (5.3.10)$$

bog'lanishlarga egamiz. Ular koordinatalar o'qlarini α burchakka burish almashtirishlari deb ataladi. Olingan (5.3.10) almashtirishlar yordamida (5.3.1) ni

$$A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0 \quad (5.3.11)$$

ko'rinishga keltirish mumkin, bu yerda

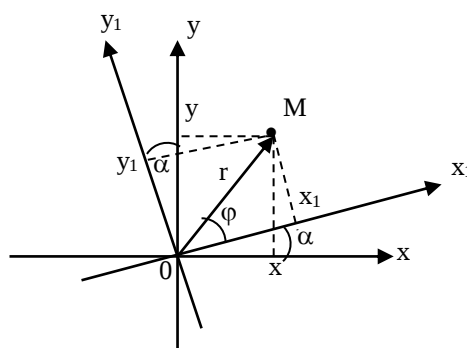
$$A_1 = A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha,$$

$$B_1 = -A \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$C_1 = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha,$$

$$D_1 = D \cos \alpha + E \sin \alpha,$$

$$E_1 = -D \sin \alpha + E \cos \alpha.$$



5.3.8- rasm.

Agar α burchakni $B_1=0$ bo'ladigan qilib tanlasak, (5.3.11) tenglama (5.3.7) ko'rinishga keladi.

Demak, α burchakni

$$-A \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

tenglamadan aniqlash kerak ekan.

Agar $B \neq 0$ ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglamani

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} \quad (5.3.12)$$

ko‘rinishga keltirish mumkin.

Shunday qilib, koordinatalar o‘qlarini (5.3.12) tenglamadan aniqlangan α burchakka bursak, (5.3.11) tenglamada $B_1=0$ bo‘lib, u (5.3.7) ko‘rinishga kelar ekan.

(5.3.10) almashtirish natijasida olingan (5.3.11) va (5.3.1) tenglamalarning koeffitsiyentlari uchun $A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2$ bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. Demak, bu almashtirish natijasida berilgan tenglama tipini saqlaydi va agar α burchak (5.3.12) dan aniqlangan deb faraz qilib, (5.3.7) tenglamani tekshirishdagi muloxozalarni eslasak, $AC - B^2$ ifoda qiymati musbat bo‘lsa, (5.3.1) tenglama eliptik; manfiy bo‘lsa, giperbolik; nolga teng bo‘lganda esa parabolik tipga tegishli bo‘lishi kelib chiqadi.

5 – bobga doir mashqlar

1. $2x-y+3=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti va ordinatalar o‘qidan ajratgan kesmasini toping.

Javob: $k=2$; $b=3$.

2. Oy o‘qdan 2 birlik kesma ajratuvchi hamda $x-2y+3=0$ to‘g‘ri chiziq bilan 45° li burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Javob: $3x-y+2=0$ yoki $x+3y-6=0$.

3. $6x-8y-15=0$ to‘g‘ri chiziq normalining yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

Javob: $\cos\varphi = \frac{3}{5}$; $\sin\varphi = -\frac{4}{5}$.

4. $A(2;5)$ nuqtadan $6x+8y-6=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Javob: $\delta=4,6$.

5. Aylananing ushbu

$$2x^2+2y^2-3x+4y+2=0$$

tenglamasiga ko‘ra uning markazini va radiusini aniqlang.

Javob: $C\left(\frac{3}{4}; -1\right)$; $R = \frac{3}{4}$.

6. $A\left(4; \frac{9}{5}\right)$ va $B\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}; -2\right)$ nuqtalardan o‘tuvchi ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Javob: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. Fokuslari orasidagi masofa 26 ga, eksentrisiteti esa $\varepsilon = \frac{13}{12}$ ga teng bo'lsa giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

Javob: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$

8. Uchi koordinatalar boshida va fokusi $4x-3u+4=0$ to'g'ri chiziq bilan Ox o'qning kesishish nuqtasida bo'lgan parabola tenglamasi yozilsin.

Javob: $y^2 = -4x.$

Tekislikdagi birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini yozing.
2. Ox (yoki Oy) o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi qanday ko'rinishga ega?
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini yozing.
4. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglamaga keltirish mumkinmi?
5. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.
6. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
7. Normallovchi ko'paytuvchi qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. Ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
9. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasini yozing.
10. Qutb koordinatalar sistemasiga ta'rif bering.
11. Aylana deb tekislikning qanday nuqtalari to'plamiga aytiladi?
12. Ellipsga ta'rif bering.
13. Giperbolaga ta'rif bering.
14. Parabolaga ta'rif bering.
15. Ellips, giperbola va parabolalarning eksentrisiteti formulalarini yozing.

6 – BOB. Fazodagi tekislik va to'g'ri chiziq

Ma'lumki, nuqta, to'g'ri chiziq va tekislik fazo geometriyasining (stereometriyaning) boshlang'ich tushunchalaridan iboratdir. Agar fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsa, undagi har bir M nuqta o'zining koordinatalari deb ataluvchi tartiblangan uchta x, y, z sonlar bilan aniqlanishi va $M(x;y;z)$ kabi yozilishi ham bizga ma'lumdir. To'g'ri chiziq va tekislikka kelsak, ularni tenglamalar vositasida ifodalash qulaydir.

Koordinatalar fazosining uch o'zgaruvchili

$$F(x;y;z)=0$$

berilgan tenglamani koordinatalari qanoatlantiruvchi $M(x;y;z)$ nuqtalarining to'plami *sirt*, berilgan tenglama esa *uning tenglamasi* deb yuritiladi.

6.1. Tekislikning tenglamalari

Fazoda tekislikni turli tenglamalar vositasida aniqlash mumkin.

6.1.1. Tekislikning vektor tenglamasi

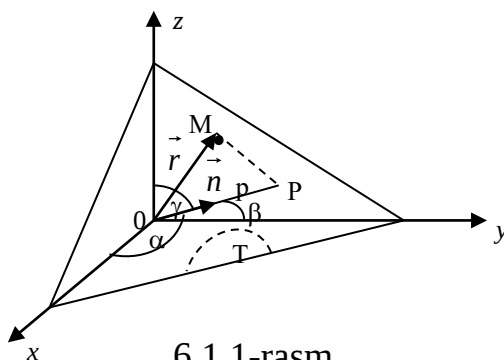
Faraz qilaylik, Dekart koordinatalar sistemasining boshidan berilgan T tekislikkacha bo'lgan masofa p ga teng bo'lib ($p \geq 0$), koordinatalar boshidan T tekislikka tushirilgan ($p=0$ bo'lganda o'tkazilgan) perpendikulyarning birlik vektori (normali) $\vec{n}$ bo'lsin. U vaqtda, T tekislikning ixtiyoriy M nuqtasining $\vec{r}$ radius vektori uchun (6.1.1-rasm)

$$\pi p_{\vec{n}} \vec{r} = p \Leftrightarrow \pi p_{\vec{n}} \vec{r} - p = 0$$

bo'lishi ravshandir. Endi, skalyar ko'paytmaning proyeksiya orqali ifodalanuvchi xossasini esga keltirsak, yuqoridagini

$$\vec{r} \cdot \vec{n} - p = 0 \quad (6.1.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (6.1.1) ni *tekislikning vektor tenglamasi* deb yuritiladi.



6.1.1-rasm.

6.1.2. Tekislikning normal tenglamasi

Endi, yuqorida olingan tekislikning vektor tenglamasida tekislikning ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasining radius-vektori $\vec{r}(x;y;z)$ va birlik vektor koordinatalari uning yo'naltiruvchi kosinuslari, ya'ni $\vec{n}(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ ekanligini etiborga olsak,

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \quad (6.1.2)$$

ni olamiz. (6.1.2) *tekislikning normal tenglamasi* deb yuritiladi va unda $p \geq 0$ va $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ bo'lishini yodda tutmoq lozimdir.

6.1.3. Tekislikning umumiy tenglamasi

Tekislikning normal tenglamasi bo'lgan (6.1.2) dan ko'rinadiki, u uch o'zgaruvchili chiziqlidir. Shu sababli, uch o'zgaruvchili

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (6.1.3)$$

chiziqli (umumiy) tenglama fazoda biror tekislikni aniqlashi haqidagi savolning qo'yilishi tabiiy bo'lib, agar

$$A^2+B^2+C^2>0 \quad (6.1.4)$$

shart bajarilsa, unga javob ijobiydir.

Haqiqatdan ham, $\vec{N}(A;B;C)$ vektorni kiritsak, (6.1.4) shartga ko'ra $|\vec{N}|>0$ ekanligi ravshandir. Endi, (6.1.3) tenglamaning har ikki tomonini *normallovchi ko'paytuvchi* deb ataluvchi

$$\mu = \pm \frac{1}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

songa ko'paytiramiz va unda $D \geq 0$ bo'lsa «-» ishorani, $D < 0$ bo'lganda esa «+» ishorani tanlaymiz. U vaqtda,

$$(\mu A)x + (\mu B)y + (\mu C)z - (\mu D) = 0 \text{ yoki } \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \quad (6.1.5)$$

tenglamani olamiz va bu yerda

$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = 1$, $P = -\mu D \geq 0$ bo'lishi, μ ning yuqoridagicha aniqlanishidan yaqqol ko'rinib turibdi.

Demak, (6.1.3) tenglama (6.1.5) ko'rinishdagi tekislikning normal tenglamasiga keltirildi, ya'ni (6.1.4) shart bajarilganda (6.1.3) tenglama fazoda biror tekislikni ifodalashi isbotlandi. Shu sababli, (6.1.3) ni *tekislikning umumiy tenglamasi* deb yuritiladi.

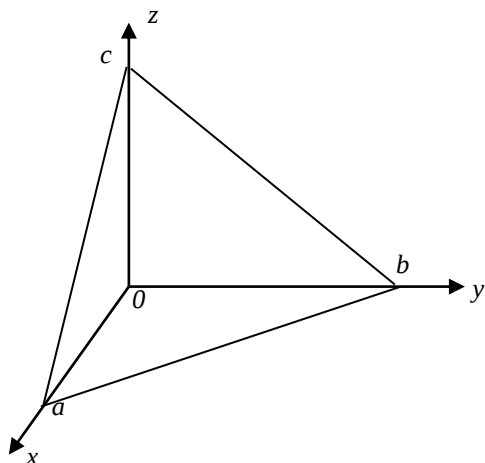
$\vec{n}(\mu A; \mu B; \mu C)$ birlik vektor bo'lib, u (6.1.3) tekislikka perpendikulyar hamda $\vec{n} \parallel \vec{N}$ ekanligidan $\vec{N}(A;B;C)$ ham tekislikka perpendikulyar bo'ladi va uni *tekislikning normali* deb yuritiladi.

6.1.4. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi

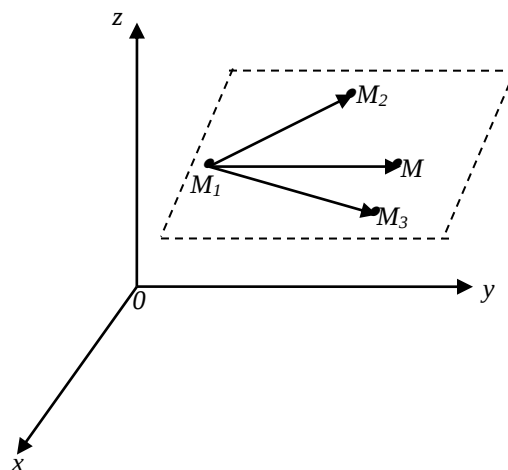
Endi, (6.1.3) tenglamada $ABCD \neq 0$ deb faraz qilaylik. U holda, tenglamani

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (6.1.6)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (6.1.6) tenglamadagi a, b, c lar tekislikning Ox, Oy, Oz o‘qlaridan ajratgan mos kesmalarning miqdorlari ekanligini payqash qiyin emas (6.1.2-rasm). Shu sababli, (6.1.6) ni *tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi* deb yuritiladi.



6.1.2-rasm.



6.1.3- rasm.

6.1.5. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

Agar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmovchi $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ va $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, ular orqali yagona tekislik o‘tishi ma’lumdir. Faraz qilaylik, $M(x; y; z)$ shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U vaqtda, $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ vektorlar komplanar (6.1.3-rasm) va

$$\overrightarrow{M_1M} \overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

bo‘lishi ravshandir.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

ekanligini va aralash ko‘paytmaning koordinatalar shaklini e‘tiborga olsak,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.1.7)$$

ni olamiz. (6.1.7) berilgan *uchta nuqta orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasidir*. Uni to‘rtinchi tartibli determinant orqali quyidagicha yozsa bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.1.6. Tekisliklar bog'lami

Berilgan bitta $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tuvchi barcha tekisliklar to'plami *tekisliklar bog'lami*, M_0 nuqta uning *markazi* deb ataladi.

Agar bog'lamga tegishli tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

deb qarab, u M_0 nuqta orqali o'tishini hisobga olsak,

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

ekanligidan

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (6.1.8)$$

ga kelamiz. (6.1.8) tekisliklar bog'laming tenglamasidir va unda A, B, C lar ixtiyoriy qiymatlar qabul qilib, ular (6.1.4) shartni qanoatlantirishi kerak.

6.1.7. Tekisliklar dastasi

Berilgan to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi barcha tekisliklar to'plami *tekisliklar dastasi* deyilib, berilgan to'g'ri chiziq uning *o'qi* deyiladi.

Agar dastaga tegishli bo'lgan ikkita

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tekisliklar ma'lum bo'lsa, dastaning umumiy tenglamasini

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lib, bu yerda λ va μ lar ixtiyoriy $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ shartni qanoatlantiruvchi sonlardir. Buni isbotlaylik. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ dasta o'qining ixtiyoriy nuqtasi desak, ikkala tekislik ham o'q orqali o'tganligi sababli

$\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \mu(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ to'g'ri tenglikni olamiz.

Eslatma. Dasta tenglamasini bir parametrlilik ko'rinishda ham yozsa bo'ladi, masalan,

$\lambda \neq 0$ deb faraz qilinsa,

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

ni olish mumkin, bu yerda $q = -\frac{\mu}{\lambda}$. Ammo, bu tenglamadan ikkinchi tekislik tenglamasini olib bo'lmaydi, ya'ni bu to'plamga ikkinchi tekislik kirmaydi.

$\mu \neq 0$ deb qilingan faraz ham shunga o'xshashdir.

6.2. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

Aytaylik, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

normal tenglamasi bilan berilgan T tekislikgacha bo'lgan masofani topish talab qilingan bo'lsin. Ma'lumki p koordinatalar boshidan tekislikgacha bo'lgan masofa, $\vec{n}$ esa uning birlik vektoridir. 6.2.1-rasmda

$$M_1 \in T, \quad \overrightarrow{M_1 M_0} = \vec{d}, \quad \vec{d} \parallel \vec{n}, \quad \vec{d} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \quad r_0(x_0; y_0; z_0);$$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ desak, $\vec{r}_1(x_1; y_1; z_1)$ bo'lib, $\vec{r}_1 \cdot \vec{n} = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = p$ bo'lishi aniq.

$\vec{d} \parallel \vec{n}$ va $|\vec{n}| = 1$ ekanligidan

$$\delta = |\vec{d}| = |\vec{d} \cdot \vec{n}| = |(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}| = |\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \vec{r}_1 \cdot \vec{n}| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|,$$

ya'ni, berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofa uchun

$$\delta = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p| \quad (6.2.1)$$

formulani olamiz.

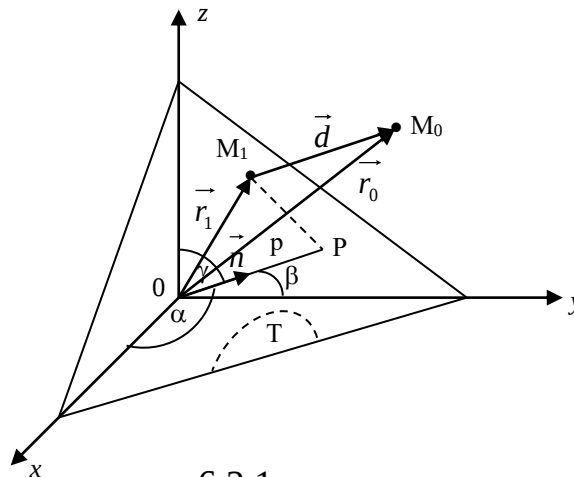
Agar tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, normallovchi ko'paytuvchi yordamida uni normal ko'rinishga keltirilishini yodga keltirsak, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan bu tekislikkacha bo'lgan masofa uchun

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6.2.2)$$

formulani olish qiyin emas.



6.2.1- rasm.

6.3. Ikki tekislik orasidagi burchakni topish

Ikki tekislik orasidagi burchak sifatida ularning normallari orasidagi burchakni qabul qilamiz. U vaqtda, agar T_1 va T_2 tekisliklar o'zlarining

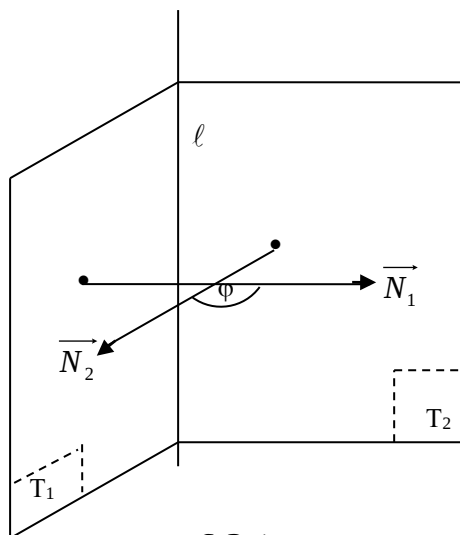
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ularning normallari $\vec{N}_1(A_1; B_1; C_1)$ va $\vec{N}_2(A_2; B_2; C_2)$ bo'lib, tekisliklar orasidagi burchak φ uchun (6.3.1-rasm)

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formulani olamiz.



6.3.1-rasm.

Agar tekisliklar parallel bo'lsa, $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ dan

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ni olamiz. Bu tekisliklarning parallellik shartidir.

Eslatma. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ bo'lgan holda tekisliklarning ustma-ust tushishini ko'rish qiyin emasdir.

Agar tekisliklar perpendikulyar bo'lsa, $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ ekanligidan $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$, ya'ni

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

kelib chiqadi. Bu tekisliklarning perpendikulyarlik shartidir.

6.4. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari

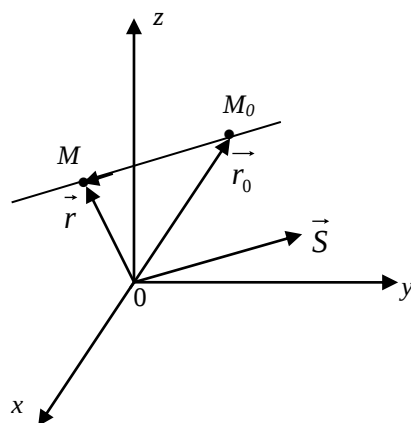
To'g'ri chiziqning tekislikdagi kabi fazoda ham turli ko'rinishlardagi tenglamalari mavjuddir.

6.4.1. To'g'ri chiziqning vektor – parametrik tenglamasi

Aytaylik, ℓ to'g'ri chiziq fazoning M_0 nuqtasi orqali berilgan $\vec{S}$ yo'nalish bo'yicha o'tgan bo'lsin. 6.4.1-rasmda $\vec{r}_0$ berilgan M_0 nuqtaning, $\vec{r}$ esa to'g'ri chiziqning ixtiyoriy M nuqtasining radius-vektorlari bo'lib, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S}$ va $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ekanligini hisobga olsak,

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{S} \quad (6.4.1)$$

ni olamiz. (6.4.1) to'g'ri chiziqning vektor-parametrik tenglamasi deb yuritiladi. Bu yerda t parametr deb atalib, $t \in (-\infty; +\infty)$.



6.4.1-rasm.

6.4.2. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

Agar to'g'ri chiziqning $M_0(a; b; c)$ nuqtasi va yo'nalishi $\vec{S}(m; n; p)$ berilgan bo'lib, uning ixtiyoriy nuqtasini $M(x; y; z)$ desak, (6.4.1) dan

$$\begin{cases} x = a + mt, \\ y = b + nt, \\ z = c + pt \end{cases} \quad (6.4.2)$$

larni olamiz. (6.4.2) *to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari* deb atalib, $t \in (-\infty; +\infty)$.

6.4.3. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari

(6.4.2) dan

$$\frac{x-a}{m} = t, \quad \frac{y-b}{n} = t, \quad \frac{z-c}{p} = t$$

larni hosil qilish qiyin emas. Bulardan

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad (6.4.3)$$

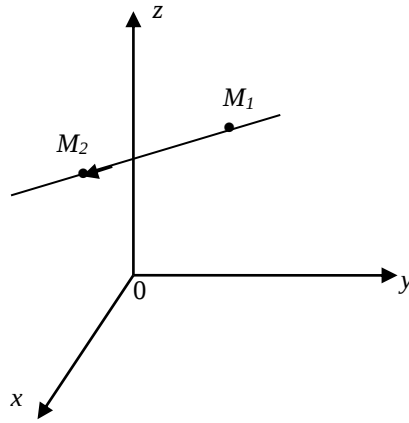
kelib chiqadi. (6.4.3) *to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalaridir*.

6.4.4. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari

Agar $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ustma-ust tushmasa, ular orqali yagona to'g'ri chiziq o'tishi ma'lum. Bu to'g'ri chiziqni M_1 nuqta orqali $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ yo'nalish bo'yicha o'tuvchi sifatida qaralsa (6.4.2-rasm),

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (6.4.4)$$

ni olamiz. (6.4.4) berilgan *ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalaridir*.



6.4.2-rasm.

6.4.5. To'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishish chizig'i sifatida

Agar $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar uchun parallelllik sharti bajarilmasa, ular bitta to'g'ri chiziq bo'ylab kesishishi aniqdir.

Demak, bu to'g'ri chiziq

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

sistema vositasida aniqlanishi ravshandir (6.3.1-rasmda $T_1 \cap T_2 = \ell$).

6.5. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak sifatida ularning yo'nalishlari orasidagi burchakni qabul qilamiz. Agar ikki to'g'ri chiziq o'zlarining

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1},$$

$$\frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}$$

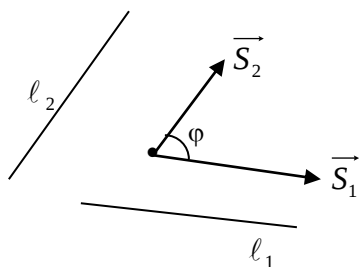
kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ularning yo'nalishlari mos ravishda $\vec{S}_1(m_1; n_1; p_1)$ va $\vec{S}_2(m_2; n_2; p_2)$ bo'lib, bu yo'nalishlar orasidagi φ burchak (6.5.1-rasm) uchun

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (6.5.1)$$

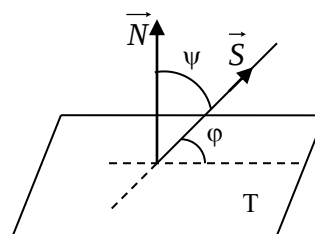
ni olamiz. (6.5.1) ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasidir.

Agar $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ bo'lsa, to'g'ri chiziqlar parallel; $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

shart bajarilganda esa ular perpendikulyar bo'lishi vektorlarning parallelllik hamda perpendikulyarlik shartlaridan kelib chiqadi.



6.5.1- rasm.



6.6.1- rasm.

6.6. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak

To'g'ri chiziq bilan o'zining tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi (soyasi) orasidagi burchakni to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb qabul qilinadi.

Bu ta'rif bo'yicha bir-birini yoyiq burchakka to'ldiruvchi ikkita burchakka ega bo'lamiz. Odatda, aytilgan burchak sifatida ulardan kichigi qabul qilinadi.

Aytaylik, ℓ to'g'ri chiziq

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

kanonik tenglamalari, T tekislik esa

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. 6.6.1-rasmdan ko'rinadiki, ℓ to'g'ri chiziq bilan T tekislik orasidagi burchak φ hamda to'g'ri chiziq yo'nalishi $\vec{S}(m;n;p)$ va tekislik normali $\vec{N}(A;B;C)$ orasidagi burchak ψ lar uchun $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ o'rinlidir.

$$\cos \psi = \frac{\vec{S} \cdot \vec{N}}{|\vec{S}| \cdot |\vec{N}|} \quad \text{yoki} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\vec{S} \cdot \vec{N}}{|\vec{S}| \cdot |\vec{N}|},$$

$$\sin \varphi = \frac{mA + nB + pC}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Bu to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasidir.

Agar $\ell \parallel T$ bo'lsa, $\vec{S} \perp \vec{N}$ bo'lib,

$$mA + nB + pC = 0$$

ni olamiz. Bu to'g'ri chiziqning tekislikka parallellik shartidir.

Agar $\ell \perp T$ bo'lsa, $\vec{S} \parallel \vec{N}$ bo'lib, $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$ ni olamiz. Bu to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarlik shartidir.

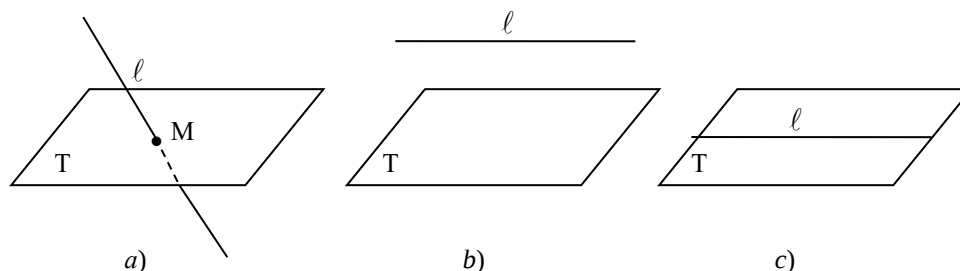
6.7. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashuvi

Agar fazoda ℓ to'g'ri chiziq va T tekislik berilgan bo'lsa, ularning o'zaro joylashishi bo'yicha quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) ular kesishuvchi, ya'ni faqat bitta umumiy nuqtaga ega va bu umumiy nuqta ℓ to'g'ri chiziqning T tekislikdagi izi deb yuritiladi. 6.7.1_a-rasmida $\ell \cap T = M$;

2) ℓ to'g'ri chiziq T tekislik bilan birorta ham umumiy nuqtaga ega emas, ya'ni 6.7.1_b-rasmida $\ell \cap T = \emptyset$ ($\ell \parallel T$);

3) ℓ to'g'ri chiziq T tekislikda yotadi, ya'ni $\ell \subset T$ (6.7.1_c-rasm).



6.7.1- rasm.

Aytaylik, ℓ to'g'ri chiziq

$$\begin{cases} x = a + mt, \\ y = b + nt, \\ z = c + pt \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty)$$

parametrik tenglamalari, T tekislik esa

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. U holda, ℓ va T lar umumiy nuqtaga ega yoki ega emasligini aniqlash maqsadida, to'g'ri chiziq parametrik tenglamalarini tekislik umumiy tenglamasiga qo'yib, ba'zi-bir elementar shakl o'zgartirishlardan so'ng t parametriga nisbatan

$$(mA + nB + pC)t = -(Aa + Bb + Cc + D)$$

tenglamani olamiz. Bundan ko'rinadiki, agar

$$mA + nB + pC \neq 0$$

bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishadi va bu kesishish nuqtasi uchun t parametrning qiymati

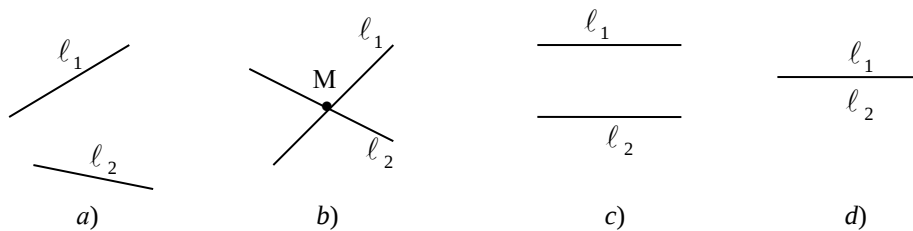
$$t = -\frac{Aa + Bb + Cc + D}{mA + nB + pC}$$

bo'ladi. Agar $mA + nB + pC = 0$ va $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$ bo'lsa, ℓ va T lar umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi, ya'ni $\ell \parallel T$ bo'ladi. Nihoyat, $mA + nB + pC = 0$ va $Aa + Bb + Cc + D = 0$ bo'lsa, ℓ va T cheksiz ko'p umumiy nuqtaga ega bo'lib, $\ell \subset T$ hol kuzatiladi.

6.8. Fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashuvi

Agar fazoda ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsa, ularning o'zaro joylashuvi bo'yicha quyidagi hollarni kuzatish mumkin: 1) ℓ_1 va ℓ_2 lar bir tekislikda yotmaydi, bu holda ular *uchrashmas* (*ayqash*) to'g'ri chiziqlar deb ataladi (6.8.1_a-rasm); 2) ℓ_1 va ℓ_2 lar bir tekislikda yotadi; bu yerda yana quyidagi hollar mavjuddir: a) ℓ_1 va ℓ_2 lar faqat bita umumiy nuqtaga ega, ya'ni ular

kesishuvchi (6.8.1_b-rasm $\ell_1 \cap \ell_2 = M$); b) ℓ_1 va ℓ_2 lar umumiy nuqtaga ega emas, ya'ni $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ bo'lib, ular paralleldir (6.8.1_c-rasm); c) ℓ_1 va ℓ_2 lar cheksiz ko'p umumiy nuqtalarga ega, ya'ni $\ell_1 = \ell_2$ bo'lib, ular ustma-ust tushadi (6.8.1_d-rasm).



6.8.1- rasm.

Aytilgan hollarni aniqlash maqsadida ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar o'zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan deb faraz qilaylik:

$$\ell_1: \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1},$$

$$\ell_2: \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}.$$

Bu holda, $\vec{s}_1(m_1; n_1; p_1)$ vektor ℓ_1 ning, $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$ esa ℓ_2 ning yo'nalishlari bo'lib, $M_1(a_1; b_1; c_1) \in \ell_1$, $M_2(a_2; b_2; c_2) \in \ell_2$ ekanligi ravshandir.

Endi, $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1\}$ vektorni kiritsak, uning boshi ℓ_1 ga uchi esa ℓ_2 ga tegishlidir (6.8.2-rasm). Agar $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{S}$ vektorlar komplanar bo'lsa, ℓ_1 va ℓ_2 lar bir tekislikda yotishi, aks holda yotmasligi kelib chiqadi.

Demak,

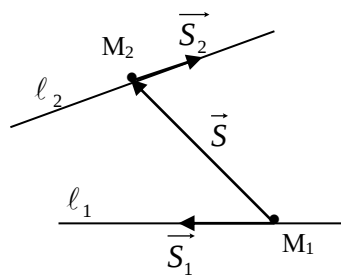
$$\vec{s}_1 \vec{s}_2 \vec{S} \neq 0,$$

ya'ni

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lishi ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlarning uchrashmaslik (ayqashlik) shartidir.

Agar $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \vec{S} = 0$ bo'lsa, ℓ_1 va ℓ_2 lar bitta tekislikda yotuvchi bo'lib, $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq \vec{0}$ bo'lganda ular kesishuvchi, $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \wedge \vec{s}_1 \times \vec{S} \neq \vec{0}$ bo'lganda parallel va, nihoyat, $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \wedge \vec{s}_1 \times \vec{S} = \vec{0}$ bo'lganda esa ustma-ust tushuvchi bo'lishini ko'rish qiyin emasdir.



6.8.2- rasm.

6 – bobga doir mashqlar

1. $A(0;2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=\{1;0;1\}$, $\vec{n}_1=\{2;3;-1\}$ vektorlarga parallel bo'lgan tekislikning tenglamasini tuzing.
Javob: $x-y-z+5=0$
2. $A(2;3;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=\{1;2;-4\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislikning tenglamasini tuzing.
Javob: $x+2y-4z-12=0$
3. $N(2;1;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{S}=\{1;-3;1\}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli tenglamasini tuzing.
Javob: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$.
4. $A(1;-5;3)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar o'qlari bilan mos ravishda $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{4}$ burchaklar tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqli kanonik va parametrik tenglamalarini tuzing.
Javob: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$;
$$\begin{cases} x = -t+1, \\ y = t-5, \\ z = \sqrt{2}t+3 \end{cases}$$
5. $A(7;9;7)$ nuqtadan $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{3}$ to'g'ri chiziqli bo'lgan masofani toping.
Javob: $\sqrt{\frac{467}{34}}$.
6. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ to'g'ri chiziqli $4x+3y-z+3=0$ tekislikda yotadimi?
7. Ushbu $\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = t+2, \\ z = 1-t \end{cases}$ to'g'ri chiziqli $3x-2y+z-3=0$ tekislik bilan kesishish nuqtasining koordinatalari topilsin.
Javob: $(5; 5; -2)$
8. $N(2;3;-5)$ nuqtadan $4x-2y+5z-12=0$ tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligini toping.

Javob: $P = \frac{7\sqrt{5}}{3}$.

Fazodagi tekislik va to'g'ri chiziq bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. Tekislikning umumiy tenglamasini yozing.
2. Tekislikning normal vektorining koordinatalarini yozing.
3. Tekislikning normal ko'rinishdagi tenglamasini yozing.
4. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish formulasini yozing.
5. Tekislik umumiy tenglamasining normallovchi ko'paytuvchisi nima?
6. Ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
7. Qanday shart bajarilganda tekisliklar o'zaro parallel bo'ladi?
8. Qanday shartda ikki tekislik o'zaro perpendikulyar bo'ladi?
9. To'g'ri chiziqning vektor-parametrik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
10. Fazoda to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
11. Fazoda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
12. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
13. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel yoki perpendikulyar bo'ladi?
14. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
15. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziq bilan tekislik o'zaro parallel yoki perpendikulyar bo'ladi?
16. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishadi?
17. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziq tekislikda yotadi?
18. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziqlar uchrashmas (ayqash) bo'ladi?

7 – bob. Ikkinchi tartibli sirtlar

Uch o'zgaruvchili n – darajali algebraik tenglama vositasida aniqlangan sirt n – tartibli sirt deyiladi.

6-bobda tekislik uch o'zgaruvchili chiziqli (birinchi darajali) tenglama vositasida ifodalanishini ko'rdik, demak, u birinchi tartibli sirtidir.

Ikkinchi tartibli sirt uchun

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + Kx + Ly + Mz + N = 0$$

umumiy tenglamani yoza olamiz. Bunda $A, B, C, D, E, F, K, L, M, N$ lar berilgan koeficientlar; x, y, z lar o'zgaruvchilar bo'lib, $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0$ dir.

Bu bobda aylanma, konik, silindrik sirtlarning hamda ellipsoid, giperboloid va paraboloidlarning kanonik tenglamalarini keltirish bilan cheklanamiz. Shu bilan birga, tenglamasi yuqoridagi ko'rinishda bo'lgan sirtning umumiy holda analitik geometriyaga oid qat'iyroq yozilgan adabiyotlardan o'rganish mumkinligini aytamiz (masalan, [5]).

7.1. Aylanma sirtlar

Biror tekis L chiziqning tayin ℓ o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami *aylanma sirt* deyiladi. L chiziq aylanma sirtning *meridiani*, ℓ o'q esa *uning aylanish* o'qi deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, meridianning har bir nuqtasi o'q atrofida aylanishi jarayonida markazi aylanish o'qida bo'lgan aylana chizadi.

Quyida koordinatalar fazosida aylanish o'qi biror koordinatalar o'qi bilan ustma-ust tushadigan aylanma sirtning tenglamasini qaraymiz.

Aytaylik, aylanish o'qi Oz o'qdan iborat, L meridian esa Oyz tekislikda yotuvchi va

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad (7.1.1)$$

sistema bilan aniqlanuvchi chiziq, S berilgan L chiziqning Oz o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt va $M(x; y; z)$ uning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (7.1.1-rasm). M nuqta orqali Oz o'qqa perpendikulyar qilib o'tkazilgan tekislik S sirtning markazi Oz o'qda yotuvchi K nuqtada bo'lgan aylana bo'ylab kesadi va bu aylananing barcha nuqtalarining va K ning ham applikasi M ning applikasi bo'lgan z dan iborat bo'lishi aniqlanadi.

Aylana bilan L chiziqning kesishish nuqtasini $N(0; y_1; z)$ desak, $K(0; 0; z)$ ekanligidan 7.1.1-rasmdan ko'rinadiki,

$$|y_1| = |KN| = |KM| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

va $N \in L$ ekanligidan (7.1.1) sistemadan

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad (7.1.2)$$

ni olamiz. Demak, S aylanma sirt ixtiyoriy M nuqtasining koordinatalari (7.1.2) tenglamani qanoatlantiradi. Shunday qilib, (7.1.2) tenglama meridianlaridan biri

Oyz tekisligida yotib, (7.1.1) sistema bilan aniqlanuvchi, aylanish o'qi esa Oz o'qdan iborat bo'lgan S aylanma sirtini aniqlaydi.

Yuqoridagiga o'xshash, agar (7.1.1) bilan aniqlanuvchi meridian Oy o'q atrofida aylantirilsa, hosil bo'lgan aylanma sirt tenglamasi

$$F(y; \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0 \quad (7.1.3)$$

bo'ladi.

Agar L meridian Oxy tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad (7.1.4)$$

sistema bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda, L ni Ox yoki Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning tenglamasi, mos ravishda,

$$F(x; \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \quad (7.1.5)$$

yoki

$$F(\pm \sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0 \quad (7.1.6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar L meridian Oxz tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad (7.1.7)$$

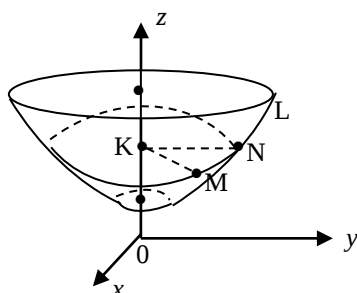
sistema bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda, L ni Ox yoki Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning tenglamasi, mos ravishda,

$$F(x; \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \quad (7.1.8)$$

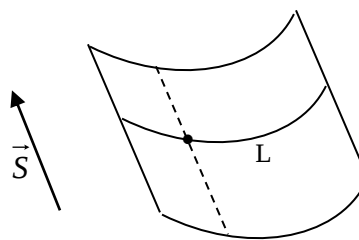
yoki

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad (7.1.9)$$

ko'rinishda bo'ladi.



7.1.1-rasm.



7.2.1-rasm.

7.2. Silindrik sirtlar

Berilgan $\vec{S}$ vektor yo'nalishiga parallel bo'lib, berilgan L tekis chiziqni kesadigan to'g'ri chiziqlar to'plami *silindrik sirt* deyiladi (7.2.1-rasm). Bunda L chiziq silindrik sirtning *yo'naltiruvchisi*, $\vec{S}$ vektorga parallel va L ni kesuvchi to'g'ri chiziqlar silindrik sirtning *yasovchilari* deyiladi. Bu yerda $\vec{S}$ vektor L chiziq tekisligiga parallel emas deb faraz qilinadi.

Ba'zi-bir xususiy hollarni qarash bilan cheklanamiz.

1) Aylanish o'qi Oz o'qdan, meridiani esa Oyz tekislikda yotuvchi $y=a$ ($a>0$) to'g'ri chiziqdan iborat bo'lgan aylanish sirtini qaraylik (7.2.2_a-rasm). Bu aylanish sirtining tenglamasi

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = a \text{ yoki } x^2 + y^2 = a^2$$

dan iborat bo'lib, uni yo'naltiruvchisi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0 \end{cases}$$

aylanadan iborat, yasovchilari Oz o'qga parallel bo'lgan silindrik sirt sifatida ham qarash mumkin. Shu sababli, bu sirt *doiraviy silindrik sirt* deyiladi.

2) Yasovchilari Oz o'qga parallel, yo'naltiruvchisi L esa Oxy tekislikda yotgan silindrik sirt qaraylik. Ravshanki, L yo'naltiruvchi biror

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad (7.2.1)$$

tenglamalar sistemasi bilan beriladi. $M(x; y; z)$ sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U vaqtda, M ning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $N(x; y; 0)$ bo'lib, bu nuqta L yo'naltiruvchida yotadi. Shu sababli, $M(x; y; z)$ ning koordinatalari

$$F(x; y) = 0$$

tenglamaning qanoatlantiradi. Demak, bu tenglama qaralayotgan silindrik sirt tasvirlaydi. Xuddi shunga o'xshash, yasovchilari Ox o'qga parallel, yo'naltiruvchisi L esa Oyz tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

sistema bilan berilgan silindrik sirt $F(y; z) = 0$ tenglama bilan; yasovchilari Oy o'qga parallel, yo'naltiruvchisi L esa Oxz tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

sistema bilan berilgan silindrik sirt $F(x; z) = 0$ tenglama bilan tasvirlanishi ravshandir.

Yuqoridagilardan silindrik sirtning yasovchilari biror koordinatalar o'qiga parallel bo'lsa, shu koordinatalar o'qiga mos o'zgaruvchi uning tenglamasida qatnashmasligini ko'ramiz.

3) Ko'rilgan hollarda, yo'naltiruvchisi ikkinchi tartibli chiziqdan iborat bo'lgan silindrik sirt ikkinchi tartibli bo'lishi ravshandir.

Yasovchisi Oz o'qga parallel bo'lgan ikkinchi tartibli asosiy silindrik sirtlar quyidagilardir:

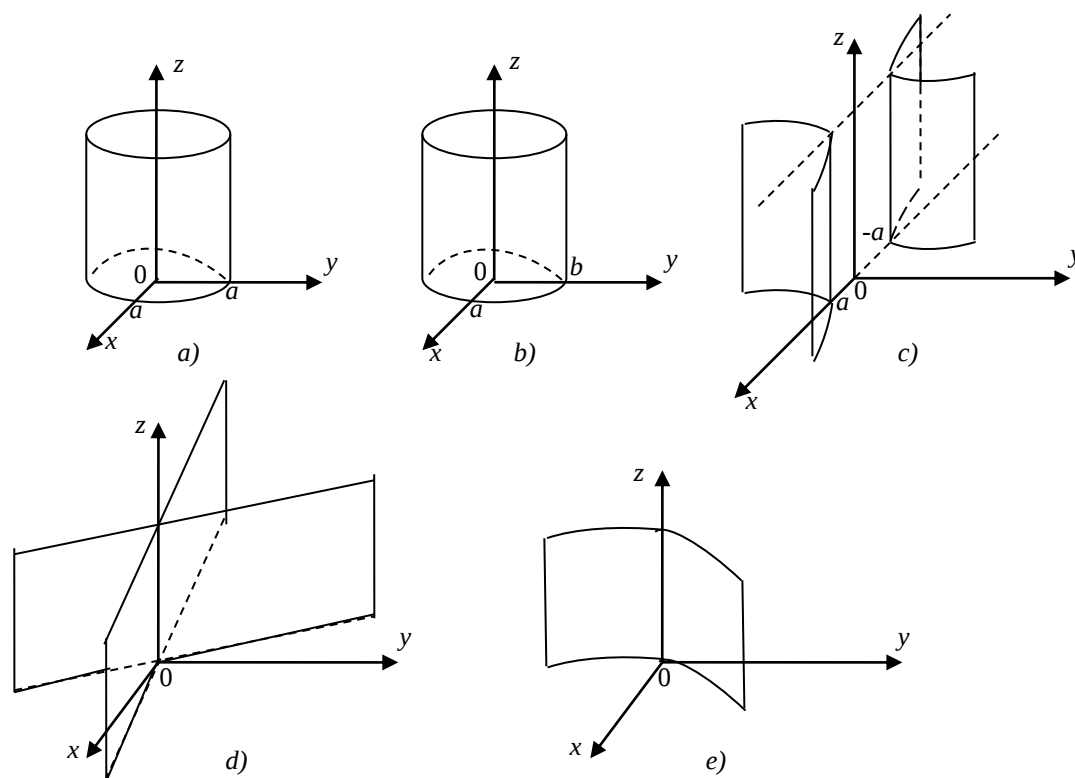
$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - elliptik silindrik sirt (7.2.2}_b\text{-rasm);}$$

xususan $a=b$ bo'lsa, *doiraviy silindrik sirt* (7.2.2_a-rasm);

$$2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \right) \text{ - giperbalik silindrik sirt (7.2.2}_c\text{-rasm);}$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ - vertikal ikki yoqli burchak (7.2.2}_d\text{-rasm);}$$

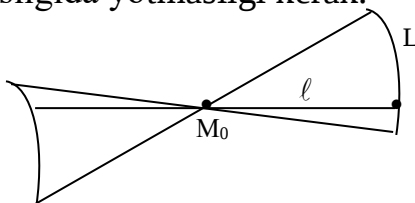
$$4) y^2 = 2px \quad (x^2 = 2py) \text{ - parabolik silindrik sirt (7.2.2}_e\text{-rasm).}$$



7.2.2-rasm.

7.3. Konus sirtlar

Koordinatalar fazosida biror qo'zg'almas $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tib, berilgan L tekis chiziqni kesuvchi barcha ℓ to'g'ri chiziqlar hosil qilgan sirt *konus sirt* deyiladi (7.3.1-rasm). $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtani konus sirtning *uchi*, L chiziq *yo'naltiruvchisi*, ℓ to'g'ri chiziq esa *yasovchisi* deyiladi. Konus sirtning uchi, uning yo'naltiruvchisining tekisligida yotmasligi kerak.



7.3.1- rasm.

Bu bandda quyidagilarni keltirish bilan cheklanamiz.

1) Koordinatalar fazosida berilgan

$$\begin{cases} \frac{y}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad (a > 0, c > 0)$$

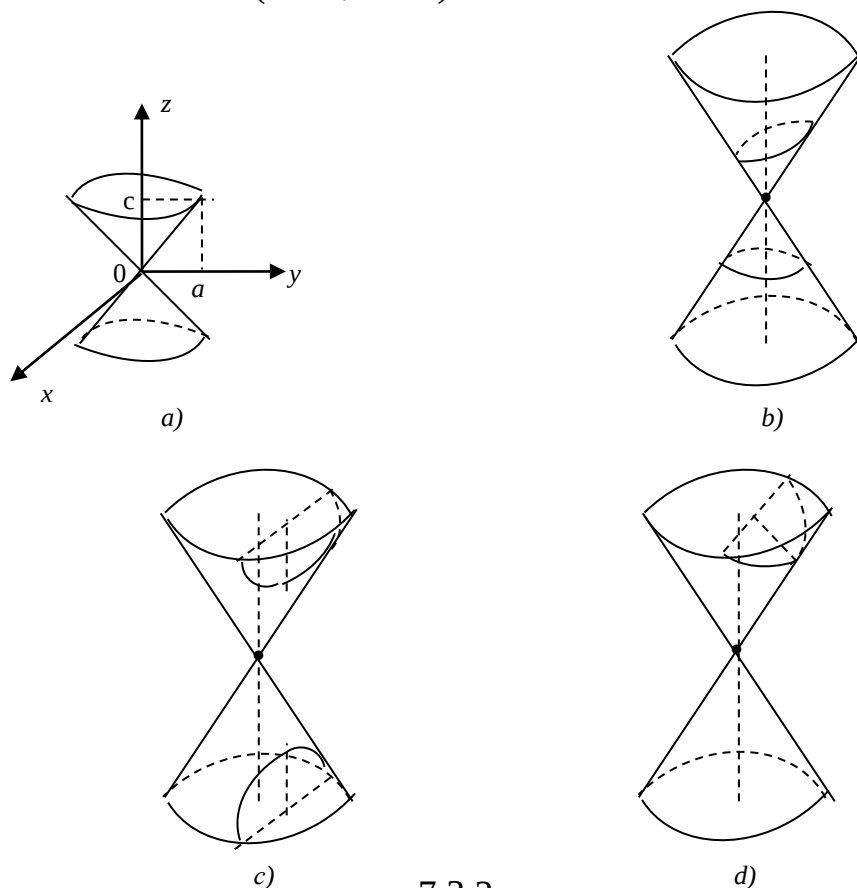
to'g'ri chiziqni Oz o'q atrofida aylantirish natijasi bo'lgan sirtning tenglamasi, (7.1.2) ga asosan,

$$\frac{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}{a} - \frac{z}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

bo'lishi ravshandir. Bu aylanish sirtini uchi $O(0;0;0)$ nuqtadan, yo'naltiruvchisi esa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = c \end{cases}$$

aylanadan iborat konus sirti deb qarash ham mumkin. Shu sababli, uni *doiraviy konus sirt* deb ataladi (7.3.2_a-rasm).



7.3.2- rasm.

Agar doiraviy konus sirtini tekislik bilan kesilsa, tekislik barcha yasovchilarni kesib o'tgan holda kesim ellips, aylana, konus uchidan iborat nuqta (7.3.2_b-rasm), tekislik ikkita yasovchiga parallel bo'lgan holda giperbola (7.3.2_c-rasm) yoki ikkita yasovchi va, nihoyat, bitta yasovchiga parallel bo'lsa parabola (7.3.2_d-rasm) yoki bitta yasovchi bo'lishi aniqlangandir.

2) Endi, uchi $O(0;0;0)$ nuqtadan, yo'naltiruvchisi esa

$$\begin{cases} F(x; y) = 0, \\ z = c \end{cases} \quad (c > 0)$$

sistema bilan aniqlanuvchi tekis chiziqdan iborat bo'lgan konus sirtini qaraylik. Uning ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtasi orqali o'tuvchi yasovchisi yo'naltiruvchisi bilan $M_0(x_0; y_0; c)$ umumiy nuqtaga ega deb faraz qilsak, bu yasovchining parametrik tenglamalari

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = ct$$

bo'lib, ularda $z \neq 0$ deb faraz qilib, t parametrni yo'qotsak,

$$x_0 = c \frac{x}{z}, \quad y_0 = c \frac{y}{z}$$

ni olamiz. Buni yo'naltiruvchi tenglamasiga qo'yib, konus sirtning

$$F\left(c \frac{x}{z}; c \frac{y}{z}\right) = 0$$

tenglamasiga kelimiz.

Olingan bu tenglama yordamida yo'naltiruvchisi ikkinchi tartibli chiziq bo'lgan konus sirt ikkinchi tartibli bo'lishini ko'rsatish mumkin (mustaqil bajaring).

Masalan, uchi $O(0;0;0)$ nuqtada, yo'naltiruvchisi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, & (a > 0, b > 0, c > 0) \\ z = c \end{cases}$$

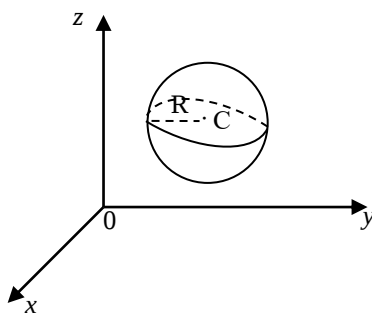
ellipsdan iborat konus sirtning tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

ekanligiga ishonch hosil qilish osondir. Bu sirtning $z=h$ ($h \neq 0$) bo'lgan kesimi ellipsdan, $z=0$ bo'lsa bitta nuqtadan, $x=h \neq 0$ ($y=h \neq 0$) kesimi giperboladan, $x=0$ ($y=0$) bo'lganda esa ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

7.4. Sfera

Ma'lumki, *sfera deb fazoda markazi deb ataluvchi berilgan $C(a;b;c)$ nuqtadan radiusi deb ataluvchi berilgan $R>0$ masofada joylashgan nuqtalarning to'plamiga aytiladi* (7.4.1-rasm).



7.4.1- rasm.

Agar $M(x;y;z)$ sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, uning ta'rifi asosida

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

bundan

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

tenglamani olamiz. Bu markazi $C(a;b;c)$ nuqtada bo'lgan R radiusli sfera tenglamasidir. Xususiyl holda markazi $O(0;0;0)$ nuqtada bo'lsa,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

bo'lib, bu markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera tenglamasidir.

Sfera tenglamasi ikkinchi darajali uch o'zgaruvchili algebraik tenglama ekanligidan u ikkinchi tartibli sirtidir.

7.5. Ellipsoid

Koordinatalar sistemasini tegishliicha tanlanganda kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7.5.1)$$

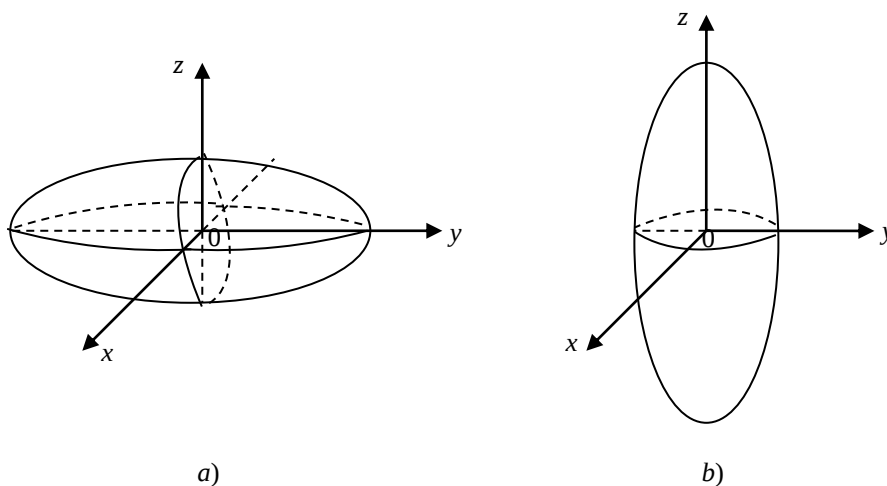
dan iborat bo'lgan sirt *ellipsoid* deyiladi, bunda a, b, c — musbat sonlar bo'lib, *ellipsoidning yarim o'qlari* deb yuritiladi.

Ellipsoid haqida umumiy tasavvurga ega bo'lish maqsadida quyidagi masalani qaraylik: Oyz tekislikda $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tenglama bilan berilgan ellipsning Oz o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirtning tenglamasini tuzish talab qilingan bo'lsin 7.1-bandda qilingan mulohazalardan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7.5.2)$$

(7.5.2) tenglama bilan berilgan sirt *aylanma ellipsoid* deyiladi. Agar $b > c$ bo'lsa, (7.5.2) tenglama qisilgan aylanma ellipsoidni (7.5.1_a-rasmga qarang), $b < c$ bo'lsa, cho'zilgan aylanma ellipsoidni (7.5.1_b-rasmga qarang), $b = c$ bo'lganda esa tenglama $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

ko'rinishni olib, u sferani ifodalashi ma'lumdir.



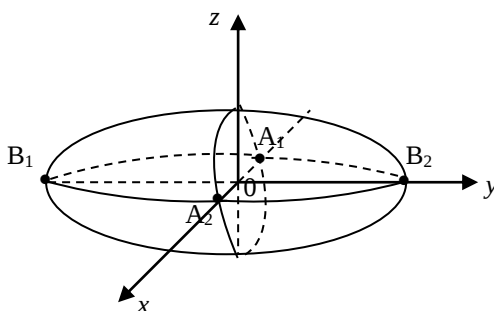
7.5.1- rasm.

Ellipsoidning shaklini tekshirish uchun uni koordinatalar tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimlarini qarash kifoya.

Masalan, (7.5.1) ellipsoidni $z=0$ tekislik bilan kesishish chizig'i ushbu

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{array} \right.$$

tenglamalar sistemasi bilan beriladi. Bu chiziq yarim o'qlari a va b dan iborat bo'lib, Oxy tekisligida yotuvchi $A_1B_1A_2B_2$ ellipsdir (7.5.2-rasmga qarang). Xuddi shunga o'xshash, $y=0$, $x=0$ tekisliklar bilan kesishish chizig'i ham ellipsdan iborat bo'ladi.



7.5.2- rasm.

7.6. Giperboloidlar

Oyz tekislikda $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tenglama bilan berilgan giperbolaning Oz o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tenglamasini tuzaylik. 7.1-bandda qilingan mulohazalardan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{(\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bu tenglama bilan berilgan sirt *bir pallali aylanma giperboloid* deyiladi (7.6.1-rasm).

Agar Oyz tekislikda yuqoridagiga qo'shma

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

giperbolani Oz o'q atrofida aylantirsak, hosil bo'lgan sirt tenglamasi

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

ko'rinishda bo'lib, uni *ikki pallali aylanma giperboloid* deyiladi (7.6.2-rasm).

Umuman, tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7.6.1)$$

ko'rinishda bo'lgan sirt *bir pallali giperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (7.6.2)$$

ko'rinishda bo'lsa, *ikki pallali giperboloid* deb ataladi.

Agar (7.6.1) bir pallali giperboloidni $z=h$ tekislik bilan kesilsa, kesim

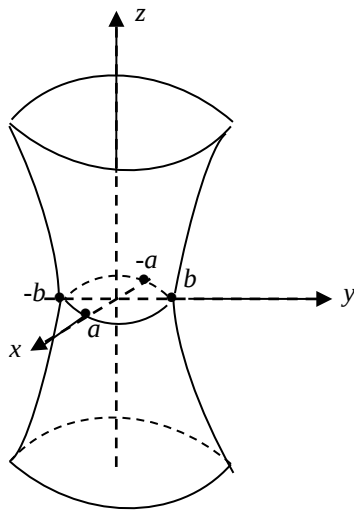
$$\left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h \end{array} \right. \left(a_1^2 = a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right), b_1^2 = b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right) \right)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi hamda yarim o'qlari a_1 va b_1 bo'lgan ellips bo'ladi. Agar Oyz (yoki Oxz) tekislikka parallel tekislik bilan kesilsa, kesimda giperbola hosil bo'ladi. Masalan, $x=h$ tekislik (7.6.1) bir pallali giperboloidda

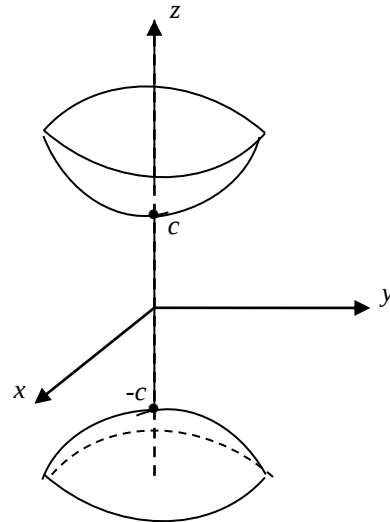
$$\left\{ \frac{y^2}{b_2^2} - \frac{z^2}{c_2^2} = 1 \quad \left(b_2 = b^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2} \right), c_2 = c^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2} \right) \right) \right.$$

giperboladan iborat kesim hosil qiladi.

Agar (7.6.2) ikki pallali giperboloidning $z=h$ tekislik bilan kesimi qaralsa, $|h| > c$ bo'lganda kesimda ellips hosil bo'ladi, $|h| = c$ bo'lganda bitta nuqta, $|h| < c$ bo'lganda kesim hosil bo'lmaydi. $x=h$ ($y=h$) tekislik bilan kesimi giperboladan iborat bo'lishini ko'rish qiyin emas.



7.6.1- rasm.



7.6.2- rasm.

7.7. Paraboloidlar

Koordinatalar fazosida ushbu

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (7.7.1)$$

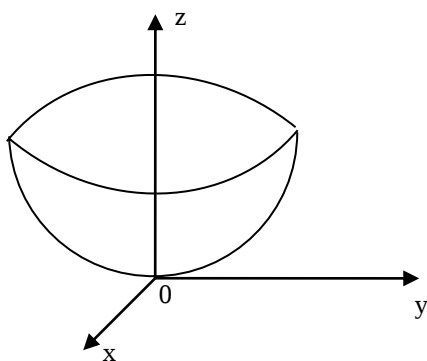
tenglama bilan ifodalangan sirt *elliptik paraboloid* deyiladi, bunda $p, q > 0$. Agar $p=q$ bo'lsa, elliptik paraboloid

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$$

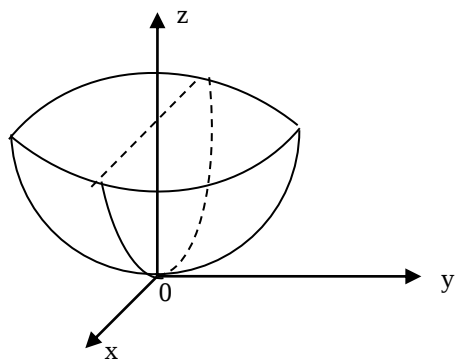
parabolani Oz o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanish sirtidan iborat bo'ladi (7.7.1-rasm). $p \neq q$ bo'lgan umumiy holda elliptik paraboloid aylanma sirt bo'lmaydi. Uning Oz o'qqa perpendikulyar tekislik bilan kesimi ellipsdan iborat bo'ladi (7.7.2-rasm).

(7.7.1) elliptik paraboloidning Ox (yoki Oy) o'qqa perpendikulyar tekislik bilan kesimi paraboladir.

(7.7.1) tenglamada x va y o'zgaruvchilarning faqat kvadratlari qatnashganligi sababli Oxz va Oyz tekisliklar sirtning simmetriya tekisliklari bo'ladi (7.7.2-rasmga qarang).



7.7.1-rasm.



7.7.2-rasm.

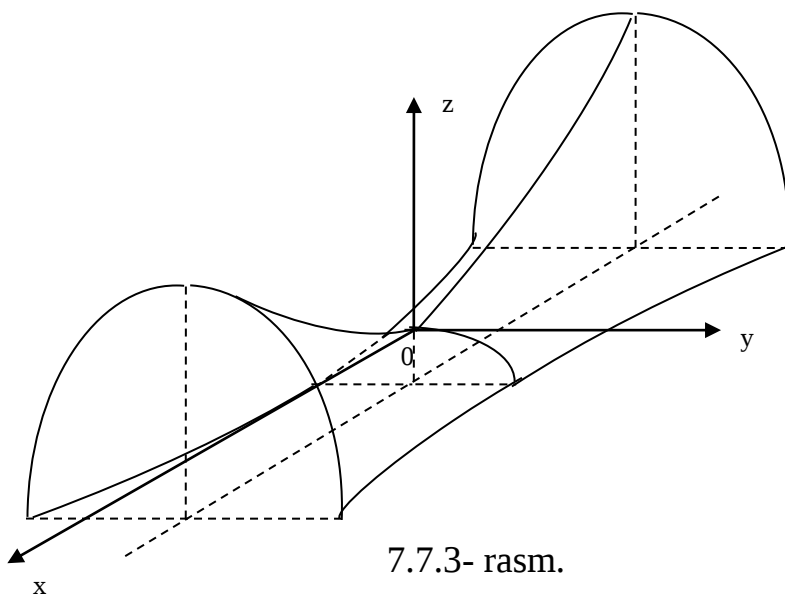
Agar

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \quad (7.7.2)$$

tenglamada $p \cdot q > 0$ bo'lsa, unga mos sirt *giperbolik paraboloid* deb ataladi.

(7.7.2) sirtning Oz o'qga perendikulyar tekislik bilan kesimi giperbola ($z=0$ bo'lganda kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq), Ox (yoki Oy) o'qga perendikulyar tekislik bilan kesimi paraboladir.

Giperbolik paraboloid shakli «egarsimon» bo'lib, uni biror parabola uchini uning tekisligiga perendikulyar tekislikda yotuvchi o'qi birinchi parabola o'qiga qarama-qarshi yo'nalishli bo'lgan ikkinchi parabola ustida parallel harakatlantirish bilan olish mumkin (7.7.3-rasm). Agar bu jarayonda ikala parabola o'qlari bir xil yo'nalishli bo'lsa, natija elliptik paraboloid bo'lishini ko'rish qiyin emasdir (7.7.2-pacm).



7.7.3- rasm.

7 – bobga doir mashqlar

1. $\begin{cases} y = z, \\ x = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning Oz o'q atrofida aylanishdan hosil bo'lgan aylanma

sirtning tenglamasini tuzing.

Javob: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ - doiraviy konus.

2. Yo'naltiruvchisi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ z = 0 \end{cases}$$

chiziqdan iborat bo'lgan va yasovchisi $\vec{a}(1;1;1)$ vektorga parallel bo'lgan silindrik sirtning tenglamasini yozing.

Javob: $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 4(x-z)$.

3. Uchi $C(0;0;8)$ nuqtada va yo'naltiruvchisi

$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

bo'lgan konus sirtining tenglamasini tuzing.

Javob: $4y^2 + xz - 8x = 0$

4. $3x^2 + 36y^2 + 81z^2 - 324 = 0$ tenglama qanday sirtni tasvirlaydi?

Javob: $\frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ - ellipsoid.

5. $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ ellipsning Oz o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning

tenglamasini yozing.

Javob: $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

6. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{36} = 1$ ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesilishidan hosil bo'lgan ellipsning tenglamalarini yozing.

7. $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ egri chiziqning a) Oz o'q; b) Ox o'q atrofida aylanishidan hosil

bo'lgan sirtning tenglamasini yozing.

Javoblar: a) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - bir pallali giperboloid;

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$ - ikki pallali giperboloid.

8. $y^2 = 2px$ parabolaning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma sirtning tenglamasini tuzing.

Javob: $y^2 + z^2 = 2px$ - elliptik paraboloid.

**Ikkinchi tartibli sirt tenglamalari bo'yicha
bilimingizni sinab ko'ring**

1. Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasini yozing.
2. Aylanma sirtga ta'rif bering.
3. Aylanma sirt tenglamasini yozing.
4. Silindrik sirtga ta'rif bering.
5. Doiraviy silindrik sirtning tenglamasini yozing.
6. Konus sirtga ta'rif bering.
7. Doiraviy konus sirt tenglamasini yozing.
8. Ellipsoidning sodda tenglamasini yozing.
9. Bir pallali va ikki pallali giperboloidlarning sodda tenglamalarini yozing.
10. Elliptik va giperbolik paraboloidlarning tenglamasini yozing.