МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

М.Ш.Маматов
А.М.Байтураев

Сборник задач по основаниям геометрии

(учебное пособие)

Ташкент
«Университет»
2018

М.Ш.Маматов, А.М.Байтураев
Сборник задач по основаниям геометрии. Учебное пособие.
–Т.: «Университет», 2018. – 120с.

Сборник содержит материалы для практических занятий по курсу «Основания геометрии» для математических направлений университетов. Многие задачи снабжены подробными решениями.

Сборник предназначен для студентов бакалавриатуры, магистратуры и преподавателей.

Тўплам университетларнинг математика йўналишларида “Геометрия асослари” фанидан амалиёт дарслари учун материалларни ўз ичига олган. Кўп ҳолларда масалалар тўлиқ ечимлари билан берилган.

Тўплам бакалавриатура, магистратура талабалари ва ўқитувчиларга мўлжалланган.

The collection contains materials for practical training at the rate of the foundations geometry for mathematical undergraduate, graduate studies at universities. Many tasks are provided with detailed solutions.

The volume is intended for students of undergraduate, graduate and teachers.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, проф. А.Я.Нарманов
кандидат физико-математических наук, доц. Д.Э.Давлетов

ISBN: 978-9943-5280-2-4

Содержание

Предисловие

Сборник содержит задачи по курсу «Основания геометрии» в соответствии с программой, принятой для математических направлений университетов.

В начале каждого параграфа изложены основные лекционные материалы, методы, необходимые для решения задач этого параграфа, даны ссылки на соответствующие учебники. В ряде случаев приведены подробные решения типовых задач.

В учебном пособии, в частности, были использованы книги: [1] А.В.Погорелов, Основания геометрии, М., Наука, 1968.; [2] А.В.Погорелов, Геометрия, учебник для 7-11 классов М., Просвещение, 2002.; [3] В.В.Прасолов, Задачи по планиметрии, ч. I, II, М., Наука, 1986.; [4] В.В.Прасолов, И.Ф.Шарыгин, Задачи по стереометрии, М., Наука, 1989.

1. «Начала» Евклида и геометрия Лобачевского

1.1. Методический очерк обоснования геометрии

А. Геометрия как эмпирическая наука в ранний период достигла особенно высокого уровня развития в Египте в связи с землемерными и ирригационными работами.

В первом тысячелетии до н.э. геометрические сведения от египтян перешли к грекам, в Греции начался новый этап в развитии геометрии. За период с VII по III век до н.э. греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми фактами, но предприняли также серьезные шаги к строгому ее логическому обоснованию.

Многовековая работа греческих геометров за этот период была подытожена и систематизирована Евклидом (330-275 гг. до н.э.) в его знаменитом труде «Начала». Это сочинение дает первое дошедшее до нас строгое логическое построение геометрии. В нем изложение было настолько безупречно для своего времени, что в течение двух тысяч лет с момента появления «Начал» оно было единственным руководством для изучающих геометрию.

«Начала» включают тринадцать книг, из коих собственно геометрии посвящены книги I–IV и VI, где излагается планиметрия, а также XI–XIII, охватывающие стереометрию. Остальные книги «Начал» посвящены арифметике в геометрическом изложении.

Каждая книга «Начал» начинается определением понятий, которые встречаются впервые. Так, например, в первой книге даны 23 определения. В частности,

Определение 1. *Точка есть то, что не имеет частей.*

Определение 2. *Линия есть длина без ширины.*

Определение 4. *Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.*

В первой книге «Начал» за определениями следуют постулаты и аксиомы. Например:

Постулат I. *Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.*

Постулат V. *Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые* *пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых*.

А к с и о м а I. *Равные порознь третьему равны между собой*.

А к с и о м а II. *Если к равным прибавим равные, то получим равные*.

Евклид не сумел последовательно провести аксиоматическую точку зрения. Его список аксиом был *неполным*. Многие поколения математиков стремились улучшить евклидову аксиоматику геометрии. Большую роль сыграли работы современника Евклида, древнегреческого *Архимеда*, который сформулировал аксиомы, относящиеся к измерению геометрических величин.

Наиболее сложной из аксиом Евклида была аксиома параллельности. Многие теоремы (например, в равнобедренном треугольнике углы при основании равны) выражают более простые факты. Неудивительно, что многие математики пытались доказать, что эта аксиома является лишней, т.е. может быть доказана как теорема на основании остальных аксиом. То, что такого доказательства не существует, было установлено лишь через два тысячелетия после Евклида. Это открытие принадлежит профессору Казанского университета Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792-1856).

Лобачевский сделал допущение, что через точку A, не принадлежащую прямой a, можно провести в плоскости более одной прямой, не пересекающейся с a (рис.1.1.1).

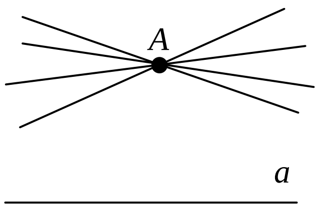

Рис.1.1.1

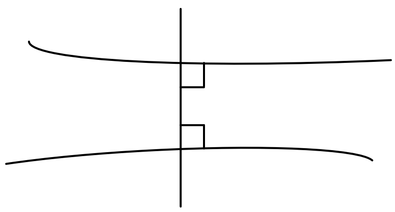
Рис.1.1.2

Он начал выводить различные следствия из этого допущения, надеясь, что рано или поздно он придёт к противоречию, чем и завершится доказательство. Однако он доказал много десятков теорем, не обнаружив логических противоречий. И тогда Лобачевскому пришла в голову гениальная догадка: заменив аксиому параллельности ее отрицанием и сохранив все остальные аксиомы, мы получаем новую геометрию. Лобачевский назвал ее «воображаемой».

Все теоремы, доказываемые в евклидовой геометрии без использования аксиомы параллельности, сохраняются и в геометрии Лобачевского. Например, углы при основании равнобедренного треугольника равны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр. Теоремы же, при доказательстве которых применяется аксиома параллельности, в геометрии Лобачевского видоизменяются. Например, в геометрии Лобачевского *сумма углов любого треугольника меньше* 180^0. В этой геометрии не существует подобных треугольников (не равных между собой): если углы двух треугольников соответственно равны, то в геометрии Лобачевского эти треугольники равны. Две прямые, имеющие общий перпендикуляр, неограниченно отходят друг от друга (как искривленные линии на рис.1.1.2). Имеется в геометрии Лобачевского и много других удивительных теорем.

Математический мир не воспринял идей Лобачевского. Ученые не были подготовлены к мысли о том, что может существовать геометрия, отличная от евклидовой. Мужественно отстаивая правоту своих идей, Лобачевский опубликовал ряд книг и статей об открытой им геометрии. Он умер в 1856 г., так и не добившись признания своих идей.

Были, однако, два человека, которые придерживались такой же точки зрения, и более того, поделили с Лобачевским заслугу открытия неевклидовой геометрии. Это были венгерский математик Я.Бойяи (1802-1860) и «король математики» К.Ф.Гаусс (1777-1855). Работа Я.Бойяи, в которой он излагал идеи новой геометрии, несколько иначе и не столь полно, вышла на несколько лет позже первой книги Лобачевского. Когда Бойяи узнал о трудах Лобачевского, он изучил русский язык, чтобы их прочитать. Непризнание и мысль, что Лобачевский опередил его в этом открытии, сломили душевные силы Бойяи; жизнь его была недолгой.

То, что Гаусс владел идеями неевклидовой геометрии, было обнаружено лишь после смерти ученого, при изучении его архива. Гениальный Гаусс, к мнениям которого прислушивались все, не рискнул опубликовать свои работы или выступить в поддержку

Лобачевского. Свое отношение к научному подвигу русского ученого он выразил тем, что добился избрания Лобачевского членом-корреспондентом Геттингенского королевского научного общества. Эта единственная научная почесть, выпавшая на долю Лобачевского при жизни.

Признание открытия Лобачевского пришло во второй половине XIX в. после появления работ итальянского математика Э.Бельтрами (1835-1900), английского математика А.Кэли (1821-1895), немецкого математика Ф.Клейна (1849-1925), французского математика А.Пуанкаре (1854-1912). Каждый из них сделал то, чего не добился Лобачевский: они доказали, что геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и евклидова.

Интересно, что взаимосвязь пространства и времени, открытая Эйнштейном в его специальной теории относительности, очень точно описывается геометрией Лобачевского. Например, в расчетах современных синхрофазотронов были использованы формулы геометрии Лобачевского.

Работа по аксиоматизации евклидовой геометрии была завершена в самом конце XIX столетия известным немецким математиком Д.Гильбертом (1862-1943). В своей книге «Основания геометрии» (1899) Гильберт дает полный список евклидовой геометрии (21 аксиома), а также доказывает непротиворечивость этой аксиоматики.

Усовершенствование аксиоматики геометрии продолжалось и XX столетии. Различные системы аксиом геометрии были предложены В.Ф.Каганом, Бахманом, Биркгофом и другими математиками. Наиболее интересная с современной точки зрения аксиоматика была предложена выдающимся немецким математиком Германом Вейлем (1885-1955) в его книге «Пространство, время, материя», вышедшей в 1918 г.

Б. Основным пунктом, откуда начинается разделение геометрии на обычную евклидову («употребительную» по терминологии Лобачевского) и неевклидову («воображаемую» геометрию или «пангеометрию», по его же терминологии), является, как известно, постулат о параллельных линиях.

В основе обычной геометрии лежит предположение (аксиома, постулат), *что через точку, не лежащую на данной прямой, можно*

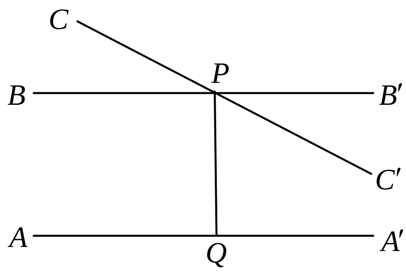

Рис.1.1.3

провести в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, не более одной прямой, не пересекающей данную прямую. Тот факт, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит, по крайней мере, одна пересекающая прямая, относится к «абсолютной геометрии», т.е. может быть доказан без помощи постулата о параллельных линиях (достаточно принять во внимание, что перпендикуляры к одной и той же прямой не пересекаются). Так, прямая BB' (рис.1.1.3), проходящая через точку P под прямым углом к перпендикуляру PQ, опущенному на AA', не пересекает прямой AA'; эта прямая в евклидовой геометрии, как известно, и называется параллельной к AA'.

В противоположность постулату Евклида, Лобачевский принимает в основу построения теории параллельных линий следующую аксиому:

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Отсюда непосредственно вытекает существование бесконечного множества прямых, проходящих через одну и ту же точку и не пересекающих данную прямую. В самом деле, пусть прямая CC' не пересекает AA' (рис.1.1.3); тогда все прямые, проходящие внутри двух вертикальных углов $\angle BPC$ и $\angle B'PC'$, также не пересекаются с прямой AA'.

Исследуем прежде всего связь постулатов Евклида и Лобачевского с вопросом о сумме углов треугольника. Мы покажем, что постулат Евклида равносилен предположению, что сумма углов треугольника равна двум прямым, а постулат Лобачевского – что эта сумма меньше двух прямых.

Задача 1. Докажите, что сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых.

Р е ш е н и е. Предположим, что сумма углов треугольника ABC (рис.1.1.4) равна $2d+\varphi$. Пусть $\angle BAC=\alpha$ – наименьший угол этого треугольника (в частном случае, если ABC – равносторонний треугольник или равнобедренный треугольник, основание которого больше боковой стороны, то α – один из его равных углов). Проводим медиану AD противоположной стороны и откладываем отрезок DB_1, равный этой медиане. Из равенства треугольников ABD и B_1DC выводим, что

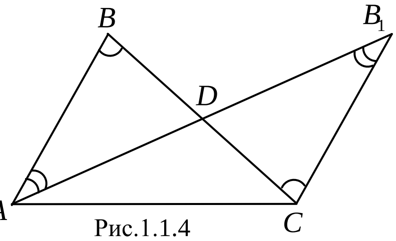

Рис.1.1.4

$$\angle DB_1C = \angle DAB, \ \angle DCB_1 = \angle DBA.$$

Таким образом, в треугольнике AB_1C (назовем его первым выводным треугольником) сумма трех углов равна также $2d+\varphi$, сумма двух углов с вершинами в конечных точках удвоенной медианы исходного треугольника равна α, а наименьший угол $\le \frac{\alpha}{2}$. Из первого выводного треугольника получаем аналогичным построением второй выводной: берем его наименьший угол, проводим медиану противолежащей стороны и т.д. В полученном таким образом втором выводном треугольнике сумма трех углов равна попрежнему $2d+\varphi$, сумма двух углов с вершинами в конечных точках удвоенной медианы первого выводного треугольника $\le \frac{\alpha}{2}$, а наименьший угол $\le \frac{\alpha}{2^2}$. Продолжая этот процесс далее, получим ряд выводных треугольников; в n-м треугольнике сумма углов равна $2d+\varphi$, а сумма углов с вершинами в концах удвоенной медианы $(n-1)$-го выводного треугольника – $\le \frac{\alpha}{2^{n-1}}$. Если взять n достаточно большим, то $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ можно сделать меньше φ, т.е. третий угол этого треугольника будет больше $2d$; мы получаем противоречие.

Задача 2. Если в каком-нибудь треугольнике сумма углов равна $2d$, *то это имеет место и во всяком другом треугольнике.*

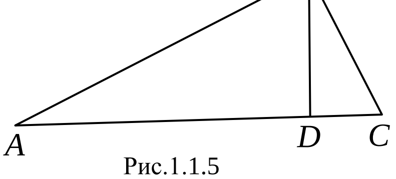

Рис.1.1.5

Р е ш е н и е. Для удобства условимся обозначать сумму углов треугольника ABC через S_{ABC}. Пусть в треугольнике ABC (рис.1.1.5) сумма углов равна $2d$; тогда два угла, например $\angle A$ и $\angle C$ – острые, и нетрудно показать, что высота BD, опущенная из вершины B, пройдет внутри этого треугольника, т.е. разобьет его на два прямоугольных треугольника. Учитывая, что

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} - 2d,$$

и принимая во внимание предыдущую задачу, выводим, что $S_{ABC} = S_{ABD} = 2d$.

Покажем теперь, что в каждом прямоугольном треугольнике сумма углов равна $2d$. Для этого возьмем треугольник ABD и дополним его до прямоугольника, пристроив к нему равный ему треугольник AEB с прямым углом в вершине E и катетами $AE = BD$ и $EB = AD$ (рис.1.1.6). В этом прямоугольнике $AEBD$ сумма углов равна $4d$. Откладывая сторону AD n раз вдоль прямой AX, а сторону AE n раз вдоль прямой AY и прикладывая

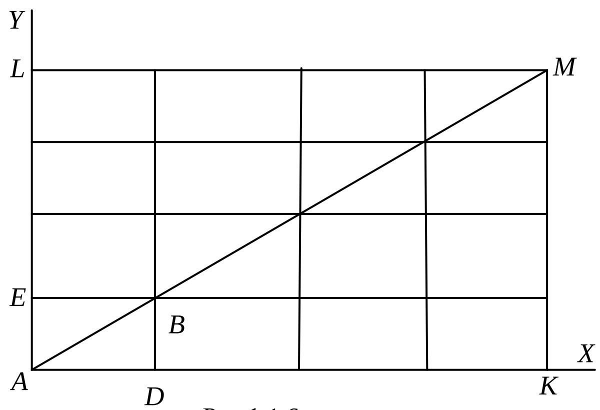

Рис.1.1.6

затем один к другому прямоугольники, равные $AEBD$, построим прямоугольник $ALMK$, составленный из n^2 прямоугольников, равных $AEBD$. В прямоугольнике $ALMK$ сумма углов также равна $4d$. Диагональ AM разбивает этот прямоугольник на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма углов равна $2d$ (на основании задача 1). Принимая n достаточно большим, получим прямоугольный треугольник AMK, у которого катеты будут больше катетов некоторого заданного прямоугольного треугольника PQR (рис 1.1.7). Откладывая отрезки $QT = KM$, $QS = AK$, получим ΔSTQ, равный ΔAMK и вмещающий в

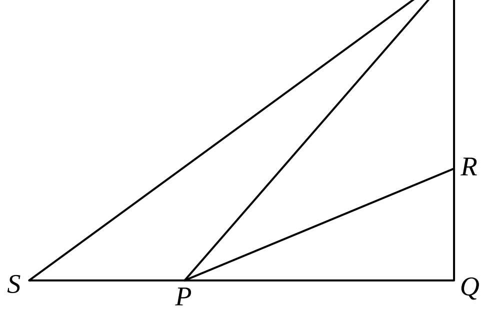

Рис.1.1.7

себе заданный ΔPQR. Отрезок PT разбивает ΔSTQ на два треугольника, и так как

$$S_{SQT} = S_{SPT} + S_{PTQ} - 2d,$$

то

$$S_{SPT} + S_{PTQ} = 4d,$$

откуда (на основании той же задача)

$$S_{SPT} = S_{PTQ} = 2d.$$

Применяя то же рассуждение к треугольнику PTQ и отрезку PR, устанавливаем, что $S_{PQR} = 2d$.

Итак, в каждом прямоугольном треугольнике сумма углов равна $2d$. Но мы видели выше, что каждый треугольник может быть разбит на два прямоугольных. Отсюда получаем, что в любом треугольнике сумма углов равна $2d$.

Итак, возможны только два предположения: *или во всех треугольниках сумма углов равна* $2d$, *или же во всех она меньше* $2d$.

Теперь мы установим связь вопроса о сумме углов треугольника с постулатом параллельности.

Задача 3. Если сумма углов треугольника равна $2d$, *то имеет место постулат Евклида, если же она меньше* $2d$, *то справедлив постулат Лобачевского.*

Имеет место и обратное предложение.

Р е ш е н и е. Прежде всего покажем, что если сумма углов треугольника равна $2d$, то через точку P (рис.1.1.8), не лежащую на прямой AA', можно провести прямую, образующую с прямой BB' (AA' и BB' перпендикулярны к PQ) сколь угодно малый угол и пересекающую AA'. Для этого

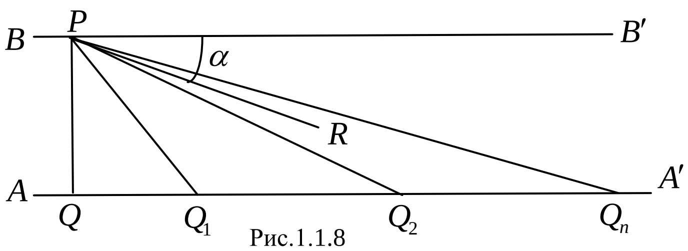

Рис.1.1.8

построим отрезок $QQ_1 = PQ$; тогда угол $B'PQ = \frac{d}{2}$. Откладываем отрезок $Q_1Q_2 = PQ_1$; $\angle B'PQ_2 = \frac{d}{2^2}$. Затем продолжаем этот процесс: строим отрезки $Q_2Q_3 = PQ_2$, $Q_3Q_4 = PQ_3$, …, $Q_{n-1}Q_n = PQ_{n-1}$. Получаем лучи PQ_3,

PQ_4, …, PQ_n, образующие с лучом PB' углы $\frac{d}{2^3}$, $\frac{d}{2^4}$, …, $\frac{d}{2^n}$. При увеличении n мы можем, таким образом, получить угол, меньший любого заданного.

Теперь уже просто доказать постулат Евклида. Пусть некоторый луч PR образует с PB' угол α. Выбирая n достаточно большим (так, чтобы $\frac{d}{2^n} < \alpha$), мы получим треугольник PQQ_n, причем луч PR проходит внутри угла QPQ_n, т.е. пересекает сторону QQ_n.

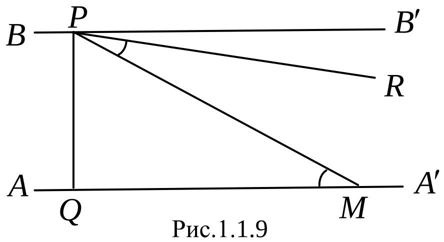

Рис.1.1.9

Рассмотрим теперь предположение, что сумма углов треугольника меньше $2d$. Покажем, что имеются прямые, отличные от BB', проходящие через точку P и не пересекающие AA'.

Соединим некоторую точку M, лежащую на AA', с P (рис.1.1.9) и проведем луч PR так, чтобы $\angle MPR$ был равен $\angle PMQ$. Из предположения о сумме углов треугольника вытекает, что $\angle MPB' > \angle PMQ$, т.е. луч PR пройдет внутри угла MPB'; этот луч не пересекает AA', так как в противном случае получился бы треугольник, у которого внешний угол QMP равен внутреннему (MPR), с ним не смежному.

Таким образом, первая половина задачи решена, а из нее непосредственно вытекает обратное предложение.

При помощи задача 3 читатель может показать, что при формулировке постулатов Евклида и Лобачевского можно ограничиться более слабыми требованиями, например, постулат Евклида можно формулировать так: существуют прямая a и не лежащая на ней точка P, обладающие тем свойством, что в плоскости, определяемой ими, через точку P проходит не более одной прямой, не пересекающей a.

Учитывая, что в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d$, введем понятие о дефекте треугольника, который равен разности между $2d$ и суммой углов этого треугольника:

$$D_{ABC} = 2d - S_{ABC}.$$

Нетрудно видеть, что если отрезок BD разделяет треугольник ABC на треугольники ABD и DBC, то

$$D_{ABC} = D_{ABD} + D_{DBC}.$$

Для n-угольника дефект вводится как разность между $2d(n-2)$ и суммой его углов. Можно доказать вообще, что если многоугольник разбит ломаными на несколько многоугольников, то дефект полного многоугольника равен сумме дефектов его частей.

Перейдем к вопросу о связи постулатов параллельности с вопросом о существовании подобных фигур. Мы покажем, что существование подобных фигур возможно только в том случае, если справедлив постулат Евклида.

Задача 4. Если существует два подобных треугольника, то справедлив постулат Евклида.

Р е ш е н и е. Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ углы попарно равны: $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$, но сторона $AB > A'B'$. На стороне AB отложим отрезок $A_1B = A'B'$ и проведем прямую A_1M под углом не $BA_1M = \angle A$ (рис.1.1.10). Так как A_1M не может пересекать прямую AC, то она

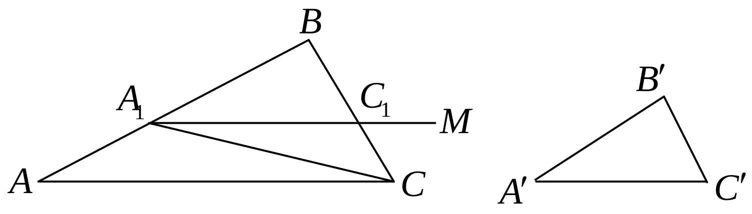

Рис.1.1.10

пересечет BC в некоторой точке C_1. Так как $\Delta A_1BC_1 = \Delta A'B'C'$, то в четырехугольнике AA_1C_1C сумма углов равна $4d$. Разделяя его диагональю на два треугольника, получим, что в каждом из них сумма углов равна $2d$, т.е. справедлив постулат Евклида.

1.2. Построение линейкой

Задача 5. На прямой l даны три различные точки A, B, C. Построить точку D, разделяющую гармонически вместе с точкой C пару точек A, B.

Р е ш е н и е. Идея построения, основанного на использовании гармонических свойств полного четырехугольника, очевидна. Все же мы рассмотрим подробно все этапы построения, учитывая важность данной задачи.

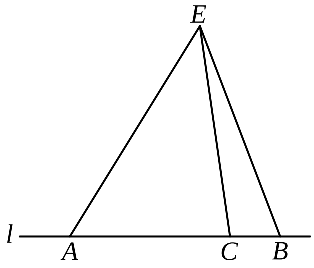

Рис.1.2.1

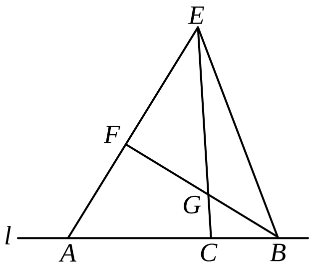

Рис.1.2.2

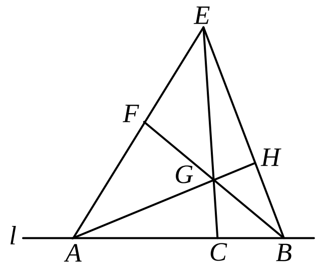

Рис.1.2.3

Берем произвольную точку E вне прямой l и проводим прямые AE, BE, CE (рис.1.2.1). На AE берем точку F, отличную от A и E, и строим прямую BF, пересекающую CE в точке G (рис.1.2.2). Проводим прямую AG, пересекающую BE в точке H (рис.1.2.3). Прямая FH пересекает l в искомой точке D (рис.1.2.4).

На рис.1.2.5 выполнено то же построение для случая, когда точка C лежит вне отрезка AB.

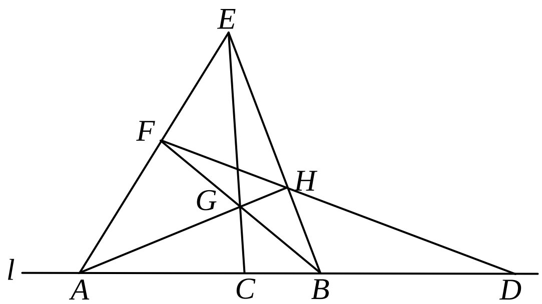

Рис.1.2.4

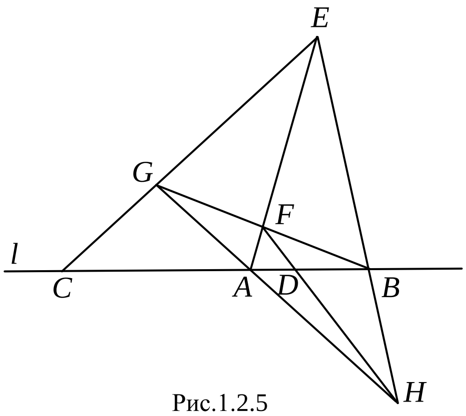

Рис.1.2.5

Задача 6. Даны три различные прямые a, b, c, принадлежащие одному пучку. Построить прямую d, разделяющую гармонически вместе с c пару прямых a, b.

Р е ш е н и е. Проводим прямую l, не проходящую через центр пучка, т.е. через точку пересечения данных прямых; пусть l пересекает их соответственно в точках A, B, C. Строим точку, разделяющую гармонически вместе с C пару точек A, B (задача 5), и соединяем ее прямой с центром пучка.

Задача 7. Провести прямую через данную точку A и недоступную точку пересечения данных прямых a и b.

Р е ш е н и е. Построение приведено на рис.1.2.6; его правильность доказывается следующими соображениями. Обозначим через X недоступную точку пересечения прямых a и b. Прямые a и b являются сторонами, прямые XA и XF – диагоналями полного четырехугольника $BDCE$; поэтому XA есть четвертая гармоническая прямая к a, b; XF. Точно так же, рассматривая полный четырехугольник $BDGH$, убеждаемся, что XK есть четвертая гармоническая прямая к тем же прямым a, b; XF. Итак, прямые XA и XK совпадают, следовательно, AK есть искомая прямая.

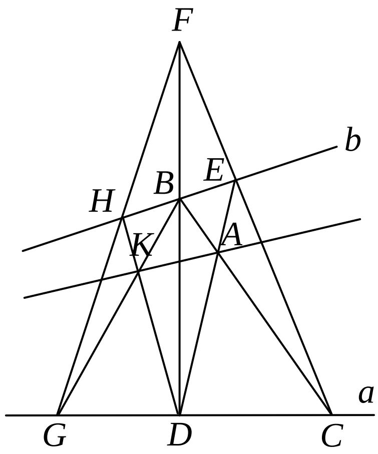

Рис.1.2.6

Предлагаем читателю рассмотреть случай, когда точка A лежит вне полосы, заключенной между прямыми a, b.

1.3. Построение с помощью циркуля

Задача 8. Построить угол равный данному.

Данный угол определяется вершиной A (рис.1.3.1) и точками B и C, взятыми где-либо на его сторонах.

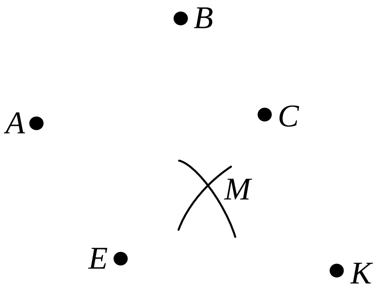

Рис.1.3.1

П о с т р о е н и е. Строим отрезок $EK = AC$, т.е. отмечаем циркулем две точки, расстояние между которыми равно AC. Описываем из точек E и K дуги радиусов, соответственно, AB и CB. Эти дуги пересекутся в некоторой точке M. Угол MEK – искомый.

Р е ш е н и е. Треугольники ABC и EMK – конгруэнтны.

Задача 9. Из данной точки C (рис.1.3.2) провести прямую, параллельную данной прямой AB.

П о с т р о е н и е. Строим угол BCE, равный углу ABC (см. предыдущую задачу). Линия CE – искомая.

Р е ш е н и е. Углы BCE и ABC – накрест лежащие.

Задача 10. Построить точку, симметричную данной точке A (рис.1.3.3) относительно данной прямой BC.

П о с т р о е н и е. Точки B и C суть центры окружностей, радиусы которых, соответственно, равны BA и CA. Точка E – их пересечение есть искомая.

Р е ш е н и е. Так как треугольники BAC и BEC – конгруэнтны (по третьему признаку), то при перегибе чертежа по линии BC точка A

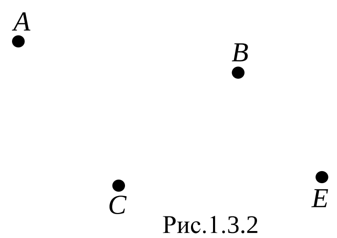

Рис.1.3.2

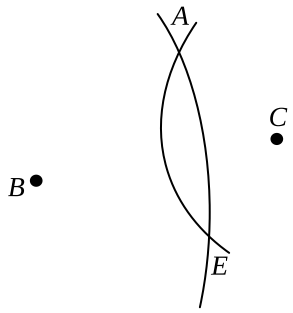

Рис.1.3.3

совместится с точкой E.

Задача 11. Из данной точки A (рис.1.3.3) провести прямую, перпендикулярную к данной прямой BC.

Р е ш е н и е (см. предыдущую задачу). Так как точки A и E симметричны относительно прямой BC, то AE – перпендикулярна к BC. Таким образом точки A и E определяют искомую прямую.

Задача 12. Определить, лежат ли три данные точки A, B и C на одной прямой линии (рис.1.3.4).

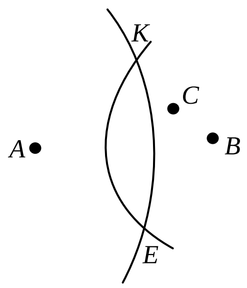

Рис.1.3.4

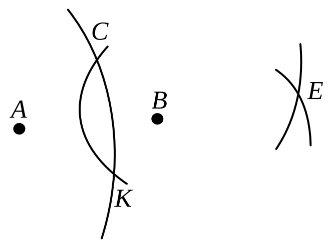

Рис.1.3.5

Р е ш е н и е. Возьмем вне прямой AB произвольную точку K и построим точку E, симметричную точке K относительно прямой AB.

Очевидно, что точка C лежит на прямой AB, если отрезки KC и EC равны между собою.

Задача 13. Даны две точки A и B (рис.1.3.5). Построить точку, лежащую на прямой линии AB.

П о с т р о е н и е. Строим точку K, симметричную произвольной точке C относительно прямой AB. Проведя из C и K дуги равных радиусов, получаем в пересечении этих дуг искомую точку E.

Р е ш е н и е опирается на решение предыдущей задачи. Таким образом можно построить сколько угодно точек, лежащих на данной прямой

Задача 14. Найти точки пересечения данной прямой AB (рис.1.3.6) с окружностью данного радиуса с центром в данной точке O.

П о с т р о е н и е. Строим точку C, симметричную точке O относительно прямой AB. Из точки C описываем окружность радиусом, равным радиусу данной окружности, пересекающую данную окружность в точках E и K. Точки E и K – искомые.

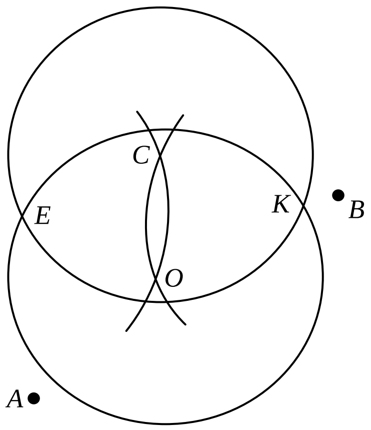

Рис.1.3.6

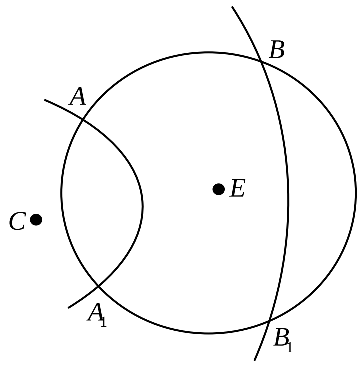

Рис.1.3.7

Р е ш е н и е. Точки E и K лежат на прямой AB (см.задачу 13).

Задача 15. Определить, параллельны ли данные прямые AB и CE (рис.1.3.7).

Р е ш е н и е. Строим точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно прямой CE.

Если $AA_1 = BB_1$, то AB параллельна CE. В самом деле, AA_1 перпендикулярна к CE и BB_1 перпендикулярна к CE, следовательно,

AA_1 параллельна BB_1; поэтому, если кроме того $AA_1 = BB_1$ или $\frac{AA_1}{2} = \frac{BB_1}{2}$, то точки A и B одинаково отстоят от прямой CE.

1.4. Построение циркулем и линейкой

Фигурой в геометрии называют любую совокупность точек (содержащую по крайней мере одну точку).

Будем предполагать, что в пространстве дана некоторая плоскость, которую назовём *основной плоскостью*. Ограничимся рассмотрением только таких фигур, которые принадлежат этой плоскости.

Примерами фигур могут служить: точка, пара точек, прямая (рассматриваемая как совокупность принадлежащих ей точек), пара параллельных прямых, *отрезок* (фигура, состоящая из двух точек и всех точек прямой, лежащих между ними), *интервал*, или открытый отрезок (совокупность всех точек, лежащих между двумя данными точками прямой), луч (фигура, состоящая из некоторой точки прямой и всех точек этой прямой, расположенных по одну сторону от этой точки), окружность (совокупность всех точек плоскости отстоящих на данное расстояние от некоторой данной точки этой плоскости), круг (совокупность всех точек плоскости, расстояния которых от данной в этой плоскости точки не превышают длины данного отрезка) и др.

Одна фигура называется *частью* другой фигуры, если каждая точка первой фигуры принадлежит второй фигуре. Так, например, частями прямой будут: всякий лежащий на ней отрезок, лежащий на этой прямой луч, точка на этой прямой, сама прямая.

Соединением двух или нескольких фигур называется совокупность всех точек, принадлежащих хотя бы одной из этих фигур. Соединение фигур Φ_1 и Φ_2 обозначают так: $\Phi_1 + \Phi_2$ или $\Phi_1 \cup \Phi_2$.

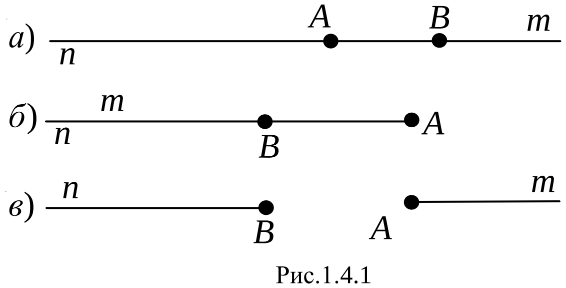

Рис.1.4.1

Пример. Соединение двух лучей Am и Bn одной прямой может представлять собой: а) всю прямую (рис.1.4.1, a); б) луч этой прямой (рис.1.4.1,$б$); в) прямую без интервала (рис.1.4.1,$в$).

Понятием соединения можно воспользоваться для определения некоторых фигур. Например, если A_1, A_2, …, A_n – n точек, то соединение отрезков A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 называется n-угольником.

Пересечением, или общей частью двух или нескольких фигур, называется совокупность всех точек, которые являются общими для этих фигур. Пересечение двух фигур Φ_1 и Φ_2 обозначают так: $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ или $\Phi_1 \cap \Phi_2$.

Пример. Если расстояние прямой от центра окружности меньше радиуса этой окружности, то пересечение прямой с окружностью представляет пару точек. Если расстояние прямой от центра окружности равно радиусу окружности (случай касания), то пересечением будет одна точка (точка касания).

Разностью двух фигур Φ_1 и Φ_2 называется совокупность всех таких точек фигуры Φ_1, которые не принадлежат фигуре Φ_2. Разность фигур Φ_1 и Φ_2 обозначается так: $\Phi_1 \setminus \Phi_2$. Например, разность между прямой и лежащим на ней интервалом есть совокупность двух лучей, принадлежащих этой прямой.

Может оказаться, что пересечение (или разность) двух фигур не содержит ни одной точки. В этом случае говорят, что пересечение (или соответственно разность) данных фигур есть *пустое множество* точек. Так, пересечение прямой с окружностью будет пустым множеством, если расстояние прямой от центра окружности окажется больше радиуса этой окружности. Разность между интервалом прямой и всей прямой есть пустое множество.

Ясно, что если фигура Φ_1 есть часть фигуры Φ_2, то разность $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ – пустое множество. Нетрудно показать (способом от противного) и обратное: если разность $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ – пустое множество, то фигура Φ_1 есть часть фигуры Φ_2.

Раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называют *конструктивной геометрией*. Основным понятием конструктивной геометрии является понятие *построить геометрическую фигуру*.

Мы примем это понятие *без определения*. Конкретный его смысл известен из практики, где оно означает то же, что “начертить”, “провести” (линию), “отметить” (точку) и т.п. В интересах логической строгости изложения необходимо чётко формулировать те основные требования (постулаты), которыми характеризуется это понятие. Эти требования обычно не формулируются в условиях школьного курса элементарной геометрии, но они подразумеваются в процессе решения любой геометрической задачи на построение как нечто само собой разумеющееся. Основные требования (постулаты) конструктивной геометрии выражают в абстрактной форме наиболее существенные моменты чертёжной практике. Они являются аксиомами, принимаются без доказательства и служат в дальнейшем логической основой конструктивной геометрии. Перейдем к рассмотрению этих основных положений (аксиом) теории геометрических построений.

Если о какой-либо фигуре сказано, что она *дана*, то при этом естественно подразумевается, что она уже изображена, начерчена, т.е. построена. Таким образом, первое основное требование конструктивной геометрии состоит в следующем:

I. Каждая данная фигура построена.

Заметим, что не следует смешивать понятия “данная фигура” и “фигура, *заданная* (или *определённая*) такими-то данными её элементами”. В последнем случае дана не сама фигура, а лишь некоторые её элементы, которые определяют положение этой фигуры. Например, если даны две точки прямой, то существует единственная прямая, соединяющая эти точки, т.е. эта прямая определена двумя точками, но это не означает, что прямая эта построена (начерчена). Точно также центр O и точка A на окружности определяют эту окружность по величине и положению, но если сказано только, что даны точки O и A, то ещё не следует считать (в том смысле, как это понимается в конструктивной геометрии), что дана сама окружность.

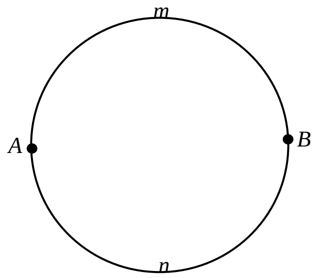

Рис.1.4.2

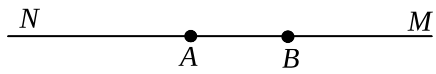

Рис.1.4.3

Представим себе, что построена полуокружность AmB (рис.1.4.2), а также построена и полуокружность AnB. Конечно, после этого надо считать, что построена вся окружность $AmBnA$. Точно так же, если построен луч AM некоторой прямой (рис.1.4.3), а затем луч BN той же прямой, то, естественно, считается, что построена прямая MN, являющаяся соединением этих лучей. Если построены три отрезка AB, BC, CA, то нет надобности строить что-либо ещё, чтобы построить треугольник ABC. Эти примеры разъясняют смысл следующего постулата:

II. Если построены две (или более) ***фигуры, то построено и соединение этих фигур***.

Представим себе, что построены два отрезка одной прямой: AB и CD. Естественно, считается возможным ответить на вопрос, принадлежит ли отрезок CD целиком отрезку AB (рис.1.4.4,a) или нет (рис.1.4.4,$б$). Если построена

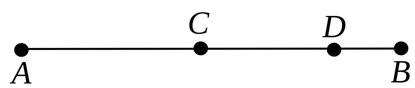

Рис.1.4.4, а

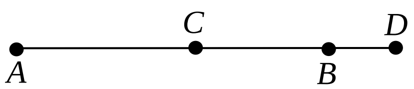

Рис.1.4.4, б

окружность и точка, то при непосредственном рассмотрении чертежа можно ответить на вопрос, лежит ли построенная точка на построенной окружности или нет. Вообще, если построены две фигуры, то считается известным, является ли одна из них частью другой или нет. А так как фигура Φ_1 является частью фигуры Φ_2 в том и только в том случае, когда разность $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ представляет собой пустое множество, то третье основное требование теории геометрических построений можно выразить в следующей форме:

III. Если построены две фигуры, то можно установить, является ли их разность пустым множеством или нет.

Пусть A, B, C, D – четыре точки прямой (рис.1.4.5). Допустим, что отрезки AC и BD построены. Тогда мы, конечно, будем считать построенными как отрезок AB, который является разностью отрезков AC и BD, так и отрезок CD, который является разностью отрезков BD и AC. Другой пример: если построена окружность и на ней точка, то мы считаем построенной также ту фигуру, которая останется, если из окружности удалить эту точку, т.е. считаем построенной разность между окружностью и точкой.

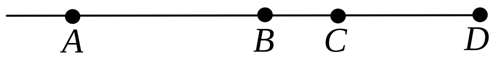

Рис.1.4.5

IV. Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность построена.

Построив две прямые, мы всегда считаем возможным сказать, пересекаются они или нет. Точно так же, если две окружности построены, то мы считаем возможным установить (по чертёжу), имеют ли они общие точки. Это же относится к любым двум построенным фигурам. Таким образом:

V. Если две фигуры построены, то можно установить, является ли их пересечение пустым множеством или нет.

С точки зрения чертёжной практики последнее условие отражает определённые требования к качеству выполненных чертежей. Так, например, если построены некоторая окружность и точка, то должно быть ясно, лежит ли точка на окружности или нет. Если построены две окружности, то можно сказать, имеют ли они общие точки или нет.

Обратимся ещё раз к рисунку 1.4.5. Пусть известно, что построены отрезки AC и BD. В этом случае мы будем также считать построенным и отрезок BC, который является пересечением этих двух отрезков. Если начерчены две пересекающиеся окружности, то мы будем считать построенной также пару точек их пересечения. Такого рода соглашения выражаются следующим образом.

VI. Если пересечение двух построенных фигур не пусто, то оно построено.

В следующих трёх основных требованиях говорится о возможностях *построения* отдельных точек.

VII. Можно построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют.

VIII. Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

IX. Можно построить точку, заведомо не принадлежащую построенной фигуре.

В дальнейшем требования I-IX этого параграфа мы будем называть общими аксиомами конструктивной геометрии.

Для конструктивной геометрии необходимо располагать точным и для математических целей полным описанием того или иного инструмента. Такое описание даётся в виде аксиом. Эти аксиомы в абстрактной математической форме выражают те свойства реальных чертёжных инструментов, которые используются для геометрических построений.

Наиболее употребительными инструментами геометрических построений являются: линейка (односторонняя), циркуль, двусторонняя линейка (с параллельными краями) и некоторые другие.

Переходим к формулировке соответствующих аксиом.

А. А к с и о м а л и н е й к а. Линейка позволяет выполнить следующие геометрические построения:

а) построить отрезок, соединяющий две построенные точки;

б) построить прямую, проходящую через две построенные точки;

в) построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

Б. А к с и о м а ц и р к у л я. Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:

а) построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или его концы);

б) построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг.

В. А к с и о м а д в у с т о р о н н е й л и н е й к и. Двусторонняя линейка позволяет:

а) выполнить любое из построений, перечисленных в аксиоме А;

б) в каждой из полуплоскостей, определяемых построенной прямой, построить прямую, параллельную этой прямой и проходящую от неё на расстоянии h, где h – фиксированный для данной линейки отрезок (ширина линейки);

в) если построены две точки A и B, то установить, будет ли AB больше некоторого фиксированного отрезка h (ширина линейки), и если $AB > h$, то построить две пары параллельных прямых, проходящих соответственно через точки A и B и отстоящих одна от другой на расстоянии h.

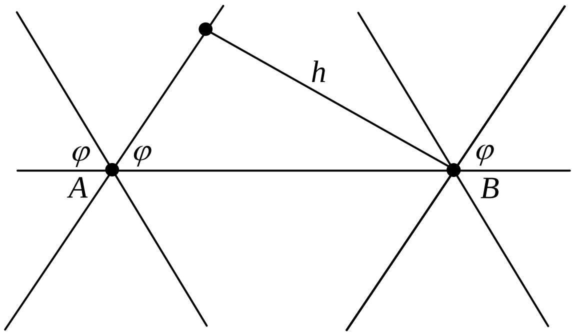

Рис.1.4.6

Реальное содержание пункта в) аксиомы В видно из рисунка 1.4.6. Из этого рисунка видно также, что каждая из упомянутых прямых образует с прямой AB угол $\varphi = arc\sin\frac{h}{AB}$, зависящий только от ширины линейки и расстояния AB.

Г. А к с и о м а п р я м о г о у г л а. Прямой угол позволяет:

а) выполнить построения, перечисленные в аксиоме линейки;

б) через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой построенной прямой;

в) если построены отрезок AB и некоторая фигура Ф, то установить, содержит ли фигура Ф точку, из которой этот отрезок виден под прямым углом, и если такая точка существует, то построить такую точку.

Рисунок 1.4.7 поясняет смысл пункта в) аксиомы Г.

Помимо перечисленных инструментов, для геометрических построений можно пользоваться и другими инструментами: произвольным углом, угольником, линейкой с отметками, парой прямых углов, различными приспособлениями для вычерчивания специальных кривых и др. Примеры таких построений встретятся нам позднее. Пока мы заметим только, что геометрические построения производятся каждый раз с определёнными, наперёд указанными инструментами, причём каждый набор инструментов характеризуется определённой системой аксиом.

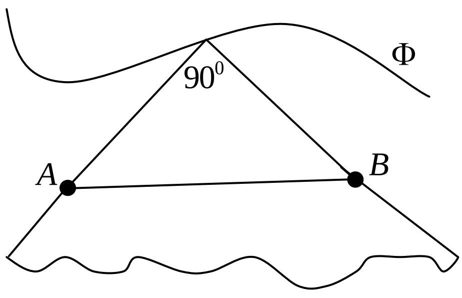

Рис.1.4.7

Построения, о возможности которых сказано в аксиомах VII-IX, вместе с построениями, перечисленными в аксиомах тех инструментов, которые избраны для построения, мы в дальнейшем будем называть *основными* построениями (для данного набора инструментов).

В частности, циркуль и линейка позволяют выполнить следующие основные построения:

1. Построить отрезок, соединяющий две построенные точки (аксиома А, а).

2. Построить прямую, проходящую через две построенные точки (аксиома А, б).

3. Построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку (аксиома А, в).

4. Построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности, или его концы (акс. Б, а).

5. Построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг (акс. Б, б).

6. Построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют (акс. VII).

7. Построить точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре (акс. VIII).

8. Построить точку, заведомо не принадлежащую какой-либо построенной фигуре (акс. IX).

Подобным же образом можно составить список основных построений для любого указанного набора инструментов.

Задача на построение состоит в том, что требуется построить наперёд указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры.

Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется *решением* этой задачи.

Н а й т и р е ш е н и е задачи на построение – значит свести её к конечному числу основных построений, т.е. указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура будет уже считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии. Перечень допустимых основных построений, а следовательно и ход решения задачи существенно зависит от того, какие именно инструменты употребляются для построений.

Задача 16. Построить середину отрезка, заданного своими концами A и B.

Р е ш е н и е. Найдём решение этой задачи с помощью различных инструментов.

1. Ц и р к у л е м и л и н е й к о й (рис.1.4.8).

Строим последовательно:

1) прямую AB (основное построение 2);

2) окружность $\omega_1(A, AB)$ (осн. постр. 4);

3) окружность $\omega_2(B, BA)$;

4) общие точки M и N окружностей ω_1 и ω_2 (осн. постр. 6);

5) прямую MN (основное построение 2);

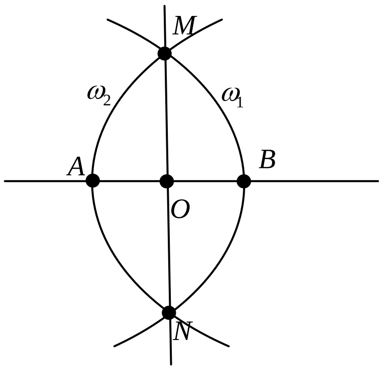

Рис.1.4.8

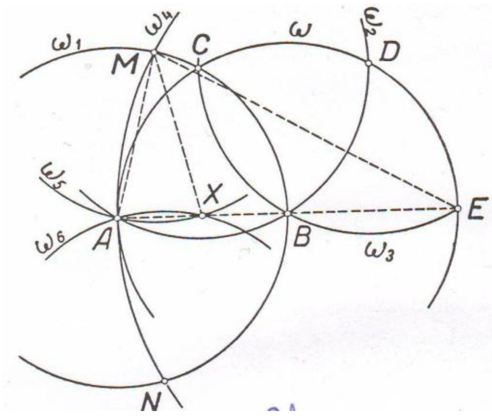

Рис.1.4.9

6) общую точку O прямых AB и MN (осн. постр. 6).

Легко убедиться, что $AO = BO$, т.е. точка O – искомая.

2. Ц и р к у л е м. (рис.1.4.9).

Строим последовательно:

1) окружность $\omega(B, BA)$ (акс. Б, а);

2) окружность $\omega_1(A, AB)$;

3) общую точку C окружностей ω_1 и ω (акс. VII);

4) окружность $\omega_2(C, CA)$;

5) общую точку D окружностей ω и ω_2, отличную от точки A;

6) окружность $\omega_3(D, DB)$;

7) общую точку E окружностей ω и ω_3, отличную от точки C.

Заметим, что точки A, B и E расположены на одной прямой, причем $AE = 2AB$. Строим далее:

8) окружность $\omega_4(E, EA)$;

9) общие точки M и N окружностей ω_1 и ω_4;

10) окружность $\omega_5(M, MA)$;

11) окружность $\omega_6(N, NA)$;

12) общую точку X окружностей ω_5 и ω_6, отличную от точки A.

Нетрудно усмотреть, что точка X расположена на прямой AB.

Кроме того, треугольник AMX подобен треугольнику AEM, так как они равнобедренные и имеют общий угол MAE при основании. Поэтому $AX : AM = AM : AE$ или $AX : AB = AB : 2AB$, так что $AX = \frac{1}{2}AB$ и, значит, точка X – искомая.

3. Д в у с т о р о н н е й л и н е й к о й (рис.1.4.10).

Строим последовательно:

1) прямую AB (акс. В, а);

2) прямую a, параллельную AB (акс. В, б) и проходящую на расстоянии h от неё (h – ширина линейки);

3) прямую b, параллельную a, отстоящую от неё на расстоянии h и отличную от прямой AB;

4) точку C на прямой b (акс. VIII);

5) прямые AC и BC;

6) точки $D \equiv a \times AC$ и $E \equiv a \times BC$ (акс. VII);

7) прямые AE и BD;

8) точку $P \equiv AE \times BD$;

9) прямую CP;

10) точку $X \equiv CP \times AB$.

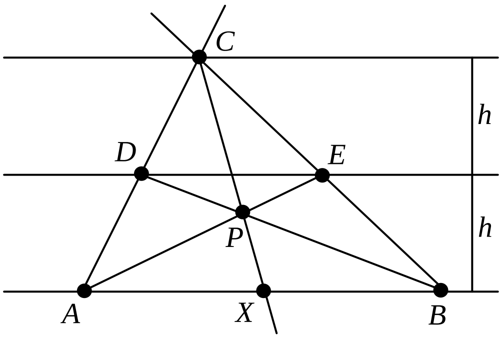

Рис.1.4.10

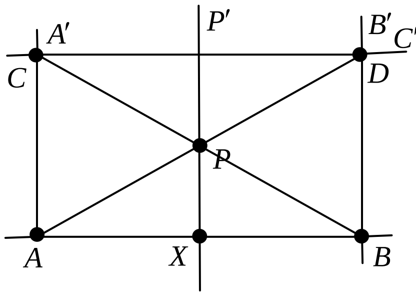

Рис.1.4.11

Так как DE – средняя линия треугольника ACB, то AE и BD – его медианы, а следовательно, и CP – медиана, так что точка X – искомая.

4. П р я м ы м у г л о м (рис.1.4.11).

1) строим прямую AB (акс. Г, а);

2) проводим прямые AA' и BB', перпендикулярные прямой AB (акс. Г, б);

3) выбираем на AA' произвольную точку C, отличную от A (акс. IV и VIII);

4) через точку C проводим $CC' \perp AC$.

Далее строим последовательно:

5) точку $D \equiv CC' \times BB'$ (акс. VII);

6) прямые AD и BC;

7) точку $P \equiv AD \times BC$;

8) прямую $PP' \perp AB$;

9) $X = PP' \times AB$.

Точка X – искомая.

Может оказаться, что какая-либо из задач на построение имеет несколько различных решений, т.е. существует несколько различных фигур, удовлетворяющих всем условиям задачи. Так, например, к двум данным внешнерасположенным окружностям можно провести , как известно, четыре различные общие касательные.

Решить задачу на построение – значит найти *все* её *решения*.

Существует ряд простейших геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются, преимущественно, в первых главах школьного курса геометрии. Будем называть их элементарными геометрическими задачами на построение. Список элементарных задач является, конечно, условным. К числу элементарных задач относят обычно следующие:

1. Деление данного отрезка пополам.
2. Деление данного угла пополам.
3. Построение на данной прямой отрезка, равного данному.
4. Построение угла, равного данному.
5. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.
6. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.
7. Деление отрезка в данном отношении.
8. Построение треугольника по трём данным сторонам.
9. Построение треугольника по стороне и прилежащим углам.
10. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.
11. Построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности.
12. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Первая из задач подробно рассмотрена нами выше (задача 16). По этому образцу читателю следует составить для себя подробные решения остальных элементарных задач с помощью циркуля и линейки. Необходимые для этого указания можно найти в школьном учебнике геометрии. В дальнейшем мы будем пользоваться этими решениями без дополнительных разъяснений.

Задача 17. Построить треугольник по основанию и двум медианам, проведённым к боковым сторонам.

А н а л и з. Допустим, что треугольник ABC (рис.1.4.12) – искомый, AB – основание, AM_1 и BM_2 – медианы, проведённые к боковым сторонам, P – точка пресечения медиан. По условию заданы отрезки c, m_1 и m_2 и требуется, чтобы $AB = c$; $AM_1 = m_1$; $BM_2 = m_2$. Построение треугольника ABC сводится к построению трёх точек – его вершин. Так как построение основания (т.е. отрезка AB) не вызывает затруднения, то задача сводится к построению вершины C. $C \equiv AM_2 \times BM_1$, так что нужно строить точки M_1 и M_2.

Точки M_1 и M_2 лежат, соответственно, на лучах AP и BP, причём точка M_1 удалена от A на расстояние m_1, а точка M_2 удалена от B на расстояние m_2. Поэтому задача сводится к построению точки P. Точку P можно построить как третью вершину треугольника ABP, если вершины A и B заданы, так как $AP = \frac{2}{3}m_1$, $BP = \frac{2}{3}m_2$, т.е. все стороны треугольника ABP известны.

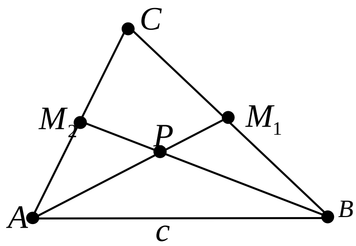

Рис.1.4.12

П о с т р о е н и е. Строим последовательно:

1) отрезок AB, равный данному отрезку c (элементарная задача 3);

2) отрезок $r_1 = \frac{2}{3}m_1$ (элементарные задачи 7 и 3);

3) отрезок $r_2 = \frac{2}{3}m_2$;

4) треугольник ABP по трём сторонам: c, r_1 и r_2 (элементарная задача 8);

5) лучи AP и BP (осн. постр. 3);

6) точку M_1 на луче AP так, чтобы $AM_1 = m_1$ (элементарная задача 3);

7) на луче BP точку M_2 так, чтобы $BM_2 = m_2$;

8) точку $C \equiv AM_2 \times BM_1$.

Треугольник ABC – искомый.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если N_1 – середина AP, N_2 – середина BP, то четырехугольник $M_1M_2N_1N_2$ – параллелограмм, так как его диагонали взаимно делятся пополам (рис.1.4.13). Следовательно, отрезки M_1M_2 и N_1N_2 равны и параллельны. А так как N_1N_2 – средняя линия ΔAPB, то $M_1M_2 \parallel AB$ и $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$. Отсюда

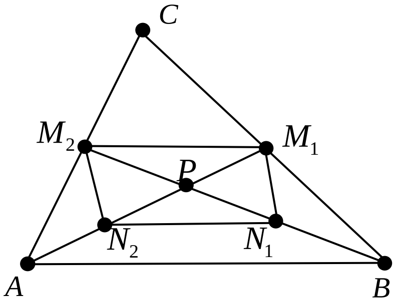

Рис.1.4.13

можно вывести, что отрезок M_1M_2 служит средней линией треугольника ABC, так что AM_1 и BM_2 действительно медианы этого треугольника.

И с с л е д о в а н и е. Построения 1), 2) и 3) всегда выполнимы. Для выполнимости построения 4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2).$$

Построения 5), 6) и 7) всегда выполнимы. Покажем, что построение 8) также всегда можно осуществить.

Прямые AM_2 и BM_1 всегда пересекутся, притом по ту же сторону от прямой AB, где расположена точка P. В самом деле, если бы AM_2 была параллельна BM_1, то параллельные отрезки AB и M_1M_2 между параллельными прямыми AM_2 и BM_1 были бы равны, вопреки тому, что $M_2M_1 = \frac{1}{2}AB$ (см. доказательство). А если бы прямые AM_2 и BM_1 пересеклись по другую сторону от AB, то отрезок M_1M_2 был бы больше отрезка AB.

Итак, задача имеет решение при условии

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2).$$

При нашем способе построения решение единственно, так как каждый шаг построения выполняется однозначно (с точностью до равенства).

Для полного исследования нужно ещё показать, что ни при каком другом способе построения нельзя получить треугольник, удовлетворяющий всем условиям задачи, но не равный построенному нами треугольнику. Это равносильно предложению: если основание и “боковые” медианы одного треугольника, соответственно, равны основанию и “боковым” медианам другого треугольника, то треугольники также равны. Доказательство этой несложной теоремы мы опускаем.

Задача 18. Две прямые a и b пересечены третьей прямой c. Построить отрезок, равный данному отрезку l, так, чтобы он был параллелен прямой c и конец его располагался на a и b.

А н а л и з. Пусть AB (рис.1.4.14) – искомый отрезок, т.е $AB = l$, $AB \parallel c$, $A \in a$, $B \in b$.

Для выяснения связей между данными и искомыми придётся ввести некоторые вспомогательные точки и линии.

Пусть $P \equiv c \times b$. Проведём $AM \parallel b$, и пусть $Q \equiv AM \times c$. Тогда $PQ = AB = l$, так как четырехугольник $ABPQ$ – параллелограмм.

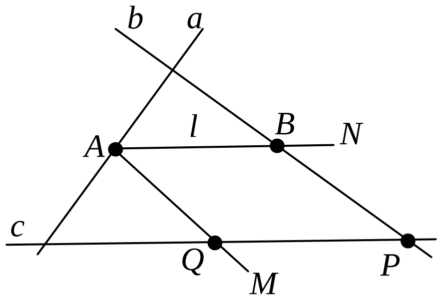

Рис.1.4.14

Для построения отрезка AB достаточно определить положение точки A, что сводится к построению точки Q. В свою очередь, построение точки Q не вызывает затруднений.

П о с т р о е н и е. 1) Строим точку $P \equiv b \times c$ (осн. постр. 6 §3);

2) На прямой c откладываем от точки P отрезок $PQ = l$ (элементарная задача 3).

Далее строим последовательно:

3) прямую $QM \parallel b$ $PQ = l$ (элементарная задача 5);

4) точку (осн. постр. 6);

5) прямую $AN \parallel c$ (элементарная задача 5);

6) точку $B \equiv AN \times b$.

AB – искомый отрезок.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения видно, что $A \in a$, $B \in b$ и $AB \parallel c$. Кроме того, $AB = PQ = l$; как противоположные стороны параллелограмма.

И с с л е д о в а н и е. Точка P существует, так как по условию прямая c пересекает прямую b. Поэтому построение 1) всегда возможно. Построение 2) всегда возможно и даёт две точки Q и Q' (рис.1.4.15).

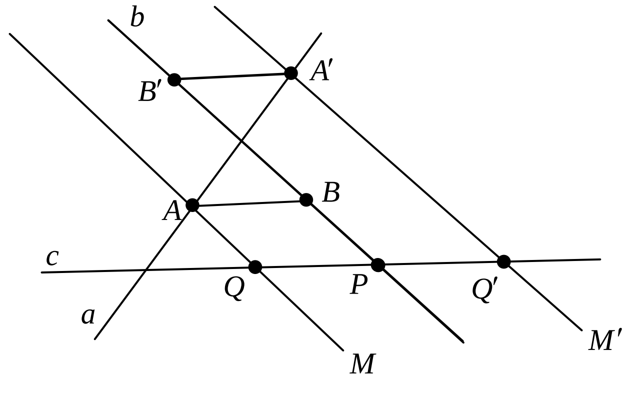

Рис.1.4.15

Построение 3) всегда однозначно выполнимо для каждой из точек Q и Q'.

Возможны три случая:

α) QM (одновременно $Q'M'$) пересекает a (рис.1.4.15);

β) QM (одновременно $Q'M'$) параллельна a (рис.1.4.16);

γ) QM или $Q'M'$ совпадает с a (рис.1.4.17);

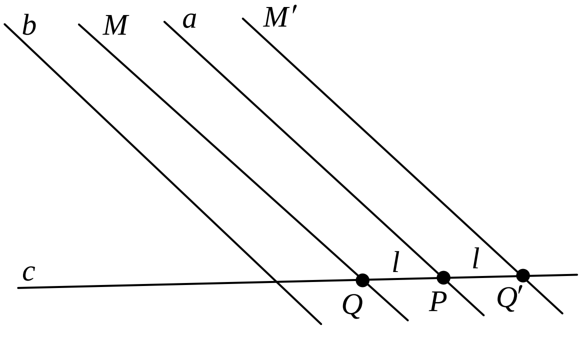

Рис.1.4.16

Случай α) имеет место, если b пересекает a. При этом построения 4)-6) однозначно выполнимы для каждой из точек Q и Q'. Получаем два решения задачи.

Случай β) имеет место, когда $a \| b$, причём прямые a и b отсекают на прямой c отрезок, не равный l. В этом случае построение 4) не выполнимо, мы не получим ни одного решения.

В случае γ) (рис.1.4.17), т.е. когда $a \| b$ и отрезок, отсекаемый этими прямыми на прямой c, равен l, задача имеет бесконечное множество решений: искомый отрезок можно провести через любую точку прямой a.

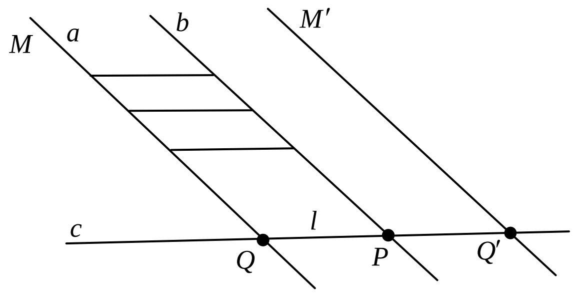

Рис.1.4.17

Для полноты исследования надо ещё показать, что при всяком другом способе построения не могут возникнуть какие-либо новые решения. В случае пересечения прямых a и b это сводится к предложению: все отрезки, отсекаемые сторонами угла на параллельных прямых, различны по величине. Ясно, что в случае параллельности прямых a и b не могут возникнуть решения, отличные от полученных нами.

Задача 19. Построить треугольник, зная биссектрису, медиану и высоту, проведённые из одной его вершины.

А н а л и з. Пусть ABC (рис.1.4.18) – искомый треугольник, $AH = h_A$ – его высота, $AM = m_A$ – медиана, $AD = b_A$ – биссектриса угла BAC. Представим себе окружность ω, описанную около треугольника ABC.

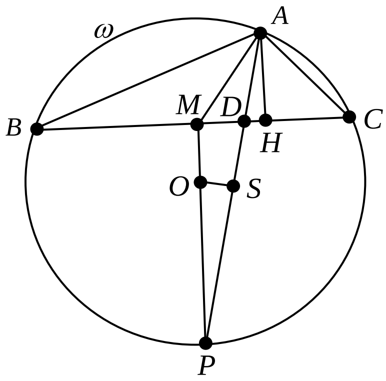

Рис.1.4.18

Пусть O – её центр. Тогда прямая OM перпендикулярна хорде BC и поэтому делит пополам каждую из двух дуг окружности, стягиваемых этой хордой. Но биссектриса AD также делит пополам ту же дугу окружности ω, на которую опирается угол BAC. Поэтому прямая OM и биссектриса AD встретятся в точке P описанной окружности. Заметим ещё, что перпендикуляр из O на AP проходит через середину S отрезка AP.

П о с т р о е н и е. По гипотенузе b_A и катету h_A строим прямоугольный треугольник AHD. На луче HD находим точку M, проводя окружность (A, m_A) до пересечения с прямой DH. Находим точку P пересечения прямой AD с перпендикуляром к прямой DH в точке M. Строим центр O описанной окружности ω как пересечение прямой MP с перпендикуляром к отрезку AP, проведённым через его середину. Точки B и C образуются в пересечении прямой DH с окружностью $\omega(O, OA)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отрезок AH служит высотой треугольника ABC, так как при точке H строился прямой угол. Точка M – середина отрезка BC, так как является основанием перпендикуляра, опущенного из центра окружности на её хорду BC. Так как точка P – середина дуги BPC, то вписанные углы BAP и CAP равны между собой, так что AD – биссектриса угла A.

И с с л е д о в а н и е. Необходимым условием разрешимости являются соотношения:

$$m_A \geq b_A \geq h_A,$$

так как в треугольнике либо биссектриса располагается между медианой и высотой, либо все эти линии совпадают. Если $m_A = b_A = h_A$, то задача состоит в построении равнобедренного треугольника по его высоте (которая одновременно служит его биссектрисой и медианой).

Такая задача является неопределённой, причём построение отдельных её решений не представляет никакого труда. Обратимся к случаю $m_A > b_A > h_A$ и исследуем задачу по ходу приведённого выше построения. Треугольник ADH может быть построен и определяется условием однозначно. Окружность (A, m_A) пересечётся с лучом HD в точке M (так как $m_A > h_A$).

Точка P всегда существует и определяется однозначно, как пересечение перпендикуляра и наклонной к одной прямой. Прямая AP не перпендикулярна MP, так как она не параллельна DH; поэтому перпендикуляр к отрезку AP всегда встретится с MP, т.е. центр описанной окружности существует и определяется при данном способе построения однозначно. Прямая DH пересекается с окружностью ω в двух точках B и C, так как проходит через внутреннюю точку D этой окружности. Итак, указанный приём построения всегда приводит к решению.

Другой приём построения не может дать никакого нового решения: путём наложения можно доказать равенство двух треугольников, если медиана, биссектриса и высота одного треугольника, проведённые из одной его вершины, соответственно равны медиане, биссектрисе и высоте другого треугольника, также проведённым из одной вершины.

Задача 20. Построить треугольник по двум высотам h_B и h_C и медиане m_A.

А н а л и з. Пусть ABC (рис.1.4.19) – искомый треугольник, AD – его медиана m_A, $BL = h_B$, $CH = h_C$. Построение треугольника ABC станет совсем

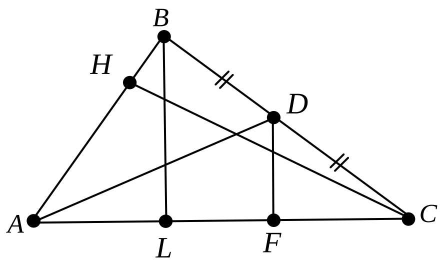

Рис.1.4.19

простым, если удастся определить его угол BAC. Но $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD + \measuredangle BAD$. Проведём $DF \perp AC$. Тогда станет ясно, что угол CAD легко определяется путём построения прямоугольного треугольника AFD, в котором известна гипотенуза $AD = m_A$ и катет $DF = \frac{1}{2}h_B$. Аналогично определяется и угол BAD.

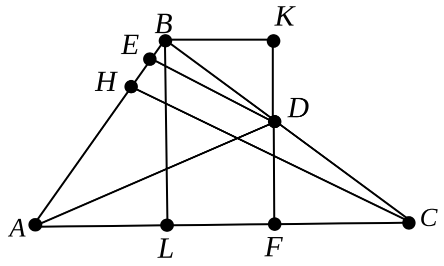

Рис.1.4.20

П о с т р о е н и е (см. рис 1.4.20). 1) Строим прямоугольный треугольник ADF по гипотенузе и катету $DF = \frac{1}{2}h_B$. 2) Строим прямоугольный треугольник ADE так, чтобы точки E и F располагались по разные стороны прямой AD и чтобы $DE = \frac{1}{2}h_C$. 3) На луче FL откладываем отрезок $FK = h_B$. 4) Через точку K проводим прямую, параллельную AF, и отмечаем точку B её встречи с лучом AE. 5) Строим прямую BD. 6) Отмечаем точку C встречи прямых BD и AF. Треугольник ABC искомый.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства треугольников DBK и CDF следует, что $BD = DC$, т.е. AD – медиана. $AD = m_A$ по построению. Опустим из B перпендикуляр BL на AF. Тогда $BL = KF = h_B$. Пусть $CH \perp AB$. В треугольнике CHB отрезок DE служит средней линией. Поэтому $CH = 2DE = h_C$, так как $DE = \frac{1}{2}h_C$ по построению.

И с с л е д о в а н и е. Первый шаг вышеприведённого построения возможен и однозначно выполним, если $m_A > \frac{1}{2}h_B$, второй – если $m_A > \frac{1}{2}h_C$. Шаги 3, 4, 5 и 6 всегда возможны. Таким образом, приведённый способ построения даёт единственное решение, если одновременно $h_B < 2m_A$ и $h_C < 2m_A$. Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то решений нет. Невозможность получения иных решений другим способом следует из того, что при условии $m'_{A'} = m_A$, $h'_{B'} = h_B$, $h'_{C'} = h_C$ два треугольника $A'B'C'$ и ABC оказываются равными.

1.5. ЗАДАЧИ

1.5.1. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше 180^0. Разность между 180^0 и суммой углов треугольника ABC называется *дефектом* этого треугольника. Докажите, что если D – внутренняя точка отрезка AB, то дефект треугольника ABC равен сумме дефектов треугольников ACD и BCD.

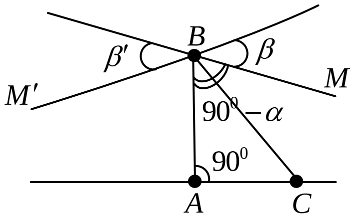

Рис.1.5.1

1.5.2. Дефект прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90^0$) равен α. Через точку B проведена такая прямая BM, что $\angle ABM = 90^0 - \alpha$ (рис.1.5.1). Докажите, что прямые AC и BM не пересекаются.

1.5.3. Пусть прямая BM построена, как в задаче 1.5.2, а прямая BM' симметрична ей относительно прямой AB. Докажите, что любая прямая, проходящая внутри углов β и β', показанных на рисунке 44, не пересекается с (AC). Таким образом, в геометрии Лобачевского через точку $B \notin (AC)$ проходит б е с к о н е ч н о м н о г о прямых, не пересекающихся с (AC).

1.5.4. На стороне OB острого угла AOB отложены последовательно равные отрезки: $|OB_1| = |B_1B_2| = |B_2B_3| = |B_3B_4| = \ldots$ и через точки B_1, B_2, B_3, … проведены прямые l_1, l_2, l_3, …, перпендикулярные (OB). Пусть прямые l_1, l_2, l_3, … пересекают сторону (OA) в точках A_1, A_2, A_3, …. Докажите, что если дефект треугольника OA_1B_1 равен α, то дефект треугольника OA_2B_2 больше 2α, дефект треугольника OA_3B_3 больше 3α и т. д. Выведите отсюда, что при достаточно большом n прямая l_n н е п е р е с е к а е т с я с (OA) (рис.1.5.2).

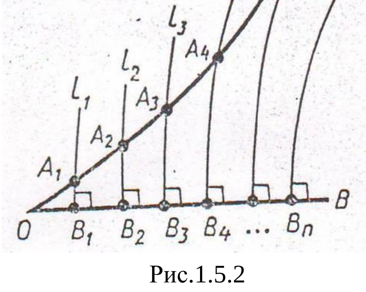

Рис.1.5.2

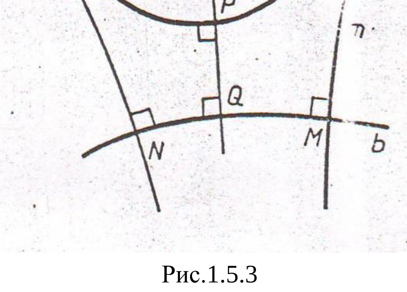

Рис.1.5.3

1.5.5. Используя результат задачи 1.5.4, докажите, что в геометрии Лобачевского существует треугольник, не имеющий описанной окружности.

1.5.6. Прямые a и b – не перпендикулярны. Докажите, что в геометрии Лобачевского ортогональная проекция прямой a на прямую b представляет собой некоторый о т р е з о к (без концов).

1.5.7. Докажите, что в геометрии Лобачевского две прямые, имеющие общий перпендикуляр, неограниченно отходят друг от друга.

1.5.8. Прямые a и b имеют общий перпендикуляр. Проекцией прямой a на прямую b является отрезок MN (без концов). Через точку M проведена прямая m, перпендикулярная b. Докажите, что прямые a и m неограниченно сближаются (рис.1.5.3).

1.5.9. Даны коническое сечение q и точка P, не лежащая на q. Провести из P касательные к q.

1.5.10. Через точку P данного конического сечения провести касательную к нему.

1.5.11. Даны пять точек A, B, C, D, E конического сечения q. Построить какую-нибудь шестую точку линии q.

1.5.12. Даны пять точек A, B, C, D, E конического сечения q. Построить касательную к q в одной из этих точек.

1.5.13. Даны четыре точки A, B, C, D конического сечения q и касательная a к q в точке A. Построить пятую точку линии q.

1.5.14. Даны пять касательных a, b, c, d, e к коническому сечению q. Построить шестую касательную к линии q.

1.5.15. Даны пять касательных a, b, c, d, e к коническому сечению q. Построить точку, в которой прямая a касается линии q.

1.5.16. Даны четыре точки A, B, C, D конического сечения q и касательная a к нему в точке A. Построить касательную к q в точке B.

1.5.17. Даны три точки A, B, C конического сечения q, касательная a к q в точке A и касательная b к q в точке B. Построить четвертую точку линии q.

1.5.18. Даны четыре касательные a, b, c, d к коническому сечению q и точка A касания прямой a с линией q. Построить касательную к q в точке C.

1.5.19. Даны четыре касательные a, b, c, d к коническому сечению q и точка A касания прямой a с линией q. Построить пятую касательную к q.

1.5.20. Даны четыре касательные a, b, c, d к коническому сечению q и точка A касания прямой a с линией q. Построить точку касания линий b и q.

1.5.21. Даны три касательные a, b, c к коническому сечению q, точка A касания прямой a с линией q и точка B касания прямой b с линией q. Построить четвертую касательную к q.

1.5.22. Даны три касательные a, b, c к коническому сечению q, точка A касания прямой a с линией q и точка B касания прямой b с линией q. Построить точку касания линий c и q.

1.5.23. Дан отрезок AB и его середина K. Через данную точку D провести прямую, параллельную прямой AB.

1.5.24. Прямые l и m – параллельны. Разделить пополам отрезок AE прямой l.

1.5.25. Через точку A, лежащую вне данных параллельных прямых l и m, провести прямую, параллельную данным.

1.5.26. Увеличить отрезок AB на n раз (n – целое число).

1.5.27. Даны две параллельные прямые l и m, на l – отрезок AB и точка C. Построить на l отрезок CD, равный отрезку AB.

1.5.28. Разделить этот отрезок на n

1.5.29. Даны две параллельные прямые l и m и на l отрезок AB. Построить $\frac{1}{n}$ часть отрезка AB (n – целое число).

1.5.30. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой l.

1.5.31. Через данную точку K провести перпендикуляр к данной прямой l.

1.5.32. Разделить пополам данный прямой угол.

1.5.33. К данной прямой линии AB восстановить перпендикуляр в точке B.

1.5.34. Дан отрезок AB. Построить отрезок, равный $\sqrt{3}\cdot AB$.

1.5.35. Построить отрезок, в n раз больший данного отрезка AB.

1.5.36. Разделить данный отрезок AB пополам.

1.5.37. Из данной точки A провести касательные к данной окружности радиуса OB с центром в точке O.

1.5.38. Разделить данный отрезок AB на n равных частей.

1.5.39. Разделить данную дугу AB пополам.

1.5.40. Построить сумму и разность двух данных отрезков AB и CE.

1.5.41. Разделить данный угол BAC пополам.

1.5.42. Построить отрезок, четвертый пропорциональный трем данным a, b и c.

1.5.43. Найти точку пересечения двух данных прямых AB и CE.

1.5.44. Разделить данный отрезок AB в данном отношении $m:n$, где m и n – данные отрезки.

1.5.45. Построить отрезок, средний пропорциональный двум данным a и b.

1.5.46. Построить квадрат по данной его стороне.

1.5.47. Около данного треугольника ABC (рис.1.5.4) описать окружность.

П о с т р о е н и е. 1) Восстанавливаем к сторонам AB и AC перпендикуляры в их серединах. Для этого описываем

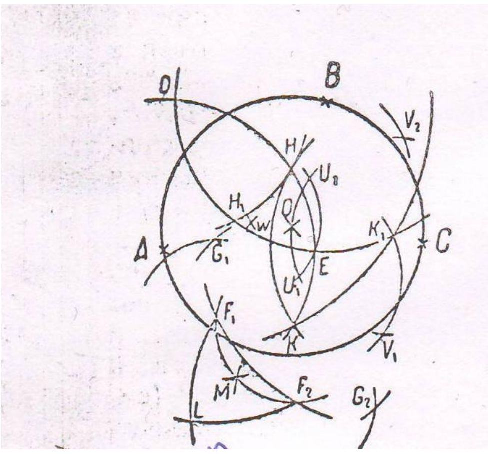

Рис.1.5.4

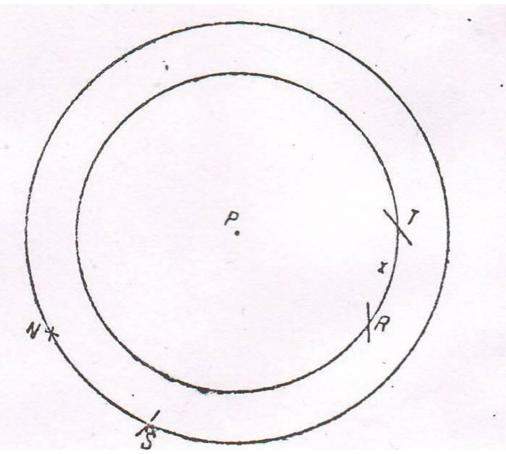

Рис.1.5.6

из A, B и C дуги одного и того же произвольного радиуса. Эти дуги пересекутся попарно в точках D и E, H и K. Имеем $DE \perp AB$ и $HK \perp AC$. Центр искомой окружности находится в пересечении прямых DE и HK. 2) Находим точки H_1 и K_1, симметричные точкам H и K относительно прямой DE. Для этого описываем дуги из точки D радиуса DH и из той же точки D дугу радиуса DK. Эти дуги вместе с дугой, проведенной из B, определяют точки H_1 и K_1. 3) Находим на продолжении прямой KK_1 точку M так, чтобы $KM = HH_1$. Для этого описываем из точки K дугу радиуса HH_1 и из точки K_1 дугу произвольного радиуса. Эти дуги пересекутся в точках F_1 и F_2. Описываем из точек F_1 и F_2 дуги радиуса $KF_1 = KF_2$ и из точки K дугу радиуса F_1F_2. Эти дуги пересекутся в точках G_1 и G_2. Описываем из G_1 и G_2 дуги радиуса $G_2F_1 = G_1F_2$, которые пересекутся в точке L. Описываем из G_1 и G_2 дуги радиуса KL, которые пересекутся в точке M. Получим, что точка M делит дугу F_1MF_2 пополам. 4) Находим отрезок x так, чтобы $x : K_1H_1 = KK_1 : K_1M$. Для этого на отдельном рис.1.5.6 проводим две концентрические окружности радиусов $PN = K_1M$ и $PR = K_1H_1$. Из точки N описываем дугу радиуса, которая пересечет внешнюю из концентрических окружностей R. Из точки S описываем дугу радиуса NR, которая пересечет внутреннюю из концентрических окружностей в точке T. Тогда $RT = x$. 5) Находим на прямой KH_1 точку O так, чтобы $K_1O = x = RT$. Для этого описываем из K_1 дугу радиуса x и из H_1 дугу хотя бы того же радиуса. Эти дуги пересекутся в точках U_1 и U_2. Разделим первую из этих дуг пополам. Для этого описываем из U_1 и U_2 дуги радиуса $K_1U_1 = K_1U_2$, а из K_1 дугу радиуса U_1U_2. В пересечении этих дуг найдем точки V_1 и V_2. дуги радиуса $V_1U_2 = U_1V_2$, в точке W. Описываем из V_1 и V_2 дуги радиуса K_1W, которые пересекутся в точке O. Точка O и есть пересечение прямых DE и HK. Проводим наконец из точки O окружность радиуса OA. Она пройдет через точки B и C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения перпендикуляров, вставленных к сторонам треугольника в их серединах.

1.5.48. Построить прямоугольник с заданными сторонами и описать около него окружность.

1.5.49. Построить общие касательные к двум данным не пересекающимся окружностям.

1.5.50. Построить треугольник, зная середины его сторон.

У к а з а н и е. Средние линии треугольника параллельны его сторонам.

1.5.51. Построить на данном отрезке, как на хорде, дугу, вмещающую данный угол, т.е. найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

1.5.52 Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и высоте, соответствующей данному основанию.

1.5.53. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

У к а з а н и е. Треугольник дан его вершинами A, B и C. Построив высоту BE, соответствующую основанию AC, найдем отрезок x так, чтобы $x^2 = AC \cdot \frac{1}{2} BE$.

1.5.54. Разделить площадь данного треугольника ABC пополам прямой, параллельной одной из его сторон.

У к а з а н и е. Если точка E лежит на AB, точка K на AC и $EK \parallel BC$, то вследствие подобия треугольников ABC и AEK имеем $AK^2 : AC^2 = \frac{1}{2}$, откуда $AK = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sqrt{2}$.

1.5.55. Построить треугольник по основанию, прилежащему углу и сумме двух других сторон.

У к а з а н и е. Если ABC (рис.1.5.7) есть искомый треугольник с заданным основанием AC и прилежащим углом A, если по предложению AB отложим $BE = BC$, если $CK = KE$, то перпендикуляр, восставленный к CE в точке K, пересечет AE в точке B. Таким образом надо построить сначала треугольник AEC и затем найти точку B.

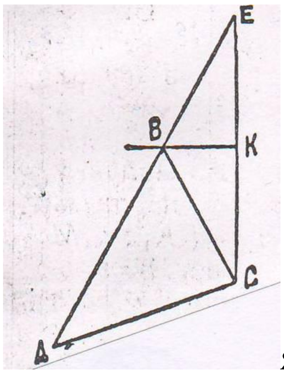

Рис.1.5.7

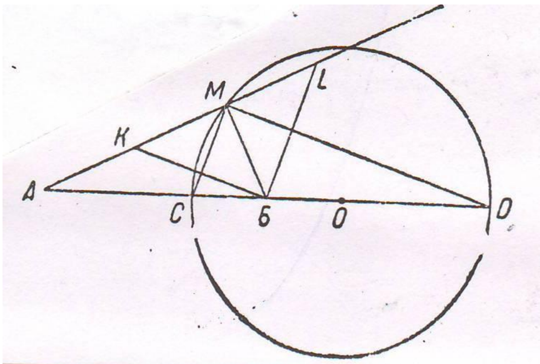

Рис.1.5.8

1.5.56. Построить треугольник по основанию, прилежащему углу и разность двух других сторон.

1.5.57. Построить окружность Аполлония, т.е. геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся в данном отношении.

У к а з а н и е. Аполлоний – один из знаменитых греческих математиков древности – жил приблизительно за 200 лет до нашей эры. Он прославился исследованием конических сечений, т.е. кривых линий, получающихся в пересечении поверхности прямого круглого конуса плоскостями, при этом могут получиться окружность, эллипс, парабола и гипербола.

Пусть данные точки суть A и B (рис.1.5.8) и данное отношение есть $a:b$, где a и b суть или данные отрезки, или данные целые числа. Находим на прямой AB две такие точки C и D, чтобы $AC:CB=a:b$ и $AD:BD=a:b$.

Тогда CD есть диаметр искомой окружности. Для доказательства возьмем на окружности произвольную точку M и докажем, что $AM:MB=a:b$. Проведя $BK||DM$, получим

$$AM:KM=AD:BD=a:b. \qquad (1)$$

Проведя $BL||MC$, получим:

$$AM:ML=AC:CB=a:b. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что $KM=ML$ и что MB есть медиана гипотенузы KL треугольника KBL, так как CMD есть прямой угол и $\angle CMD=\angle KBL$ как углы с параллельными сторонами. Итак, $MB=KM$ и, следовательно, равенство (1) превращается в

$$AM:MB=a:b,$$

что и требовалось доказать.

1.5.58. Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и отношению двух других сторон.
1.5.59. Построить треугольник по двум сторонам и углу против одной из них.
1.5.60. Построить общую касательную к двум данным окружностям.
1.5.61. Стороне, противолежащему ей углу и сумме двух других сторон.
1.5.62. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.
1.5.63. Построить треугольник по углу и двум высотам, опущенным на стороны этого угла.
1.5.64. Через данную точку провести прямую так, чтобы две данные равные окружности отсекали от неё равные отрезки.
1.5.65. Построить квадрат по сумме стороны с диагональю.
1.5.66. Построить ромб по стороне и сумме диагоналей.
1.5.67. Даны две прямые и точка. Провести через эту точку такую секущую, чтобы часть её, заключённая между данными прямыми, делилась данной точкой пополам.
1.5.68. Построить треугольник по высоте, периметру и углу при основании.
1.5.69. Построить треугольник по двум углам и периметру.
1.5.70. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и сумме (или разности) основания и высоты.
1.5.71. Провести в данном треугольнике прямую, параллельную основанию, так, чтобы отрезок этой прямой, заключённой между боковыми сторонами треугольника, был равен сумме отсекаемых прямой отрезков боковых сторон, считая от основания.
1.5.72. Построить параллелограмм по стороне, разности (или сумме) диагоналей и углу между ними.
1.5.73. Дана окружность и на ней три точки, в которых пересекаются с окружностью при продолжении высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины вписанного треугольника. построить этот треугольник.

1.5.74. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трёх данных параллельных прямых.

1.5.75. Через точку, данную вне окружности, провести секущую так, чтобы она делилась данной окружностью пополам.

1.5.76. Даны две концентрические окружности. Через данную точку на большей из них провести секущую так, чтобы хорда, отсекаемая на этой секущей большей окружностью, была в три раза больше хорды, отсекаемой на той же прямой меньшей окружностью.

1.5.77. Построить параллелограмм, зная середины трёх его сторон.

1.5.78. Построить треугольник по двум его высотам и медиане, проведённой из той же вершины, что и одна из высот.

2. Современное аксиоматическое построение евклидовой геометрии

2.1. Аксиомы связи

Аксиоматическое изложение евклидовой геометрии опирается на пять групп аксиом: аксиомы связи, аксиомы порядка, аксиомы движения, аксиома непрерывности и аксиома параллельности.

В первой группе аксиом речь идет о свойствах взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выражаемых словом «принадлежать». При этом считаются равнозначными выражения: точка A принадлежит прямой a, точка A лежит на прямой a и прямая a проходит через точку A, а также точка A принадлежит плоскости α, точка A лежит в плоскости α и плоскость α проходит через точку A.

Мы будем говорить, что прямые a и b пересекаются в точке C, если точка C принадлежит прямой a и прямой b; что прямая a принадлежит плоскости α, или плоскость α проходит через прямую a, если каждая точка прямой a (принадлежащая прямой a) принадлежит плоскости α. Наконец, мы будем говорить, что плоскости α и β пересекаются по прямой c, если каждая из этих плоскостей проходит через прямую c.

Первая группа содержит следующие восемь аксиом:

Аксиома I_1. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая c, проходящая через точку A и через точку B.*

Аксиома I_2. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует не более одной прямой, которая проходит через эти точки.*

Аксиома I_3. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

Аксиома I_4. *Каковы бы ни были три точки A, B, C, существует плоскость σ, проходящая через каждую из этих точек. На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка.*

Аксиома I_5. *Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих точек.*

Аксиома I_6. *Если две точки* A *и* B *прямой* g *(т.е. принадлежащие прямой* g*) лежат на плоскости* σ*, то прямая* g *лежит на плоскости* σ.

Аксиома I_7. *Если две плоскости* α *и* β *имеют одну общую точку* C *(точку, лежащую на каждой из этих плоскостей), то они имеют еще по крайней мере одну общую точку* D.

Аксиома I_8. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Задача 1. Докажите, что две прямые имеют не более одной общей точки; две плоскости либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую; плоскость и не лежащая на ней прямая имеют не более одной общей точки.

Р е ш е н и е. Первое утверждение следует из аксиомы I_2. Докажем второе утверждение. Пусть плоскости α и β имеют общую точку P. По аксиоме I_7 они тогда имеют еще общую точку Q. Прямая, проходящая через P и Q по аксиоме I_6, принадлежит α и β. И утверждение доказано. Третье утверждение следует из аксиомы I_6.

Задача 2. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку, а также через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость.

Р е ш е н и е. Пусть точка B не лежит на прямой a. В силу аксиомы I_3 на прямой a лежат две точки P и Q. По аксиоме I_4 существует плоскость α, проходящая через точки B, P, Q. По аксиоме I_6 плоскость α проходит через прямую a. Другой плоскости, проходящей через прямую a и точку B, не существует, так как, проходя через точки B, P, Q, не лежащие на одной прямой, плоскость α определяется однозначно (аксиома I_5).

Докажем второе утверждение. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C. По аксиоме I_3 на прямой a есть точка A, а на прямой b – точка B, отличные от C. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме I_4 существует плоскость σ, проходящая через точки A, B, C. В силу аксиомы I_6 эта плоскость проходит через прямые a и b. Единственность следует из аксиомы I_5.

Задача 3. Докажите, что каждая плоскость содержит по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Р е ш е н и е. Пусть данная плоскость будет α. По аксиоме I_4 на ней лежит точка A. По аксиоме I_8 существует четыре точки B, B_1, B_2, B_3, не лежащие в одной плоскости. По крайней мере одна из них, например B, не лежит в плоскости α. Среди трех плоскостей ABB_1, ABB_2, ABB_3 есть по крайней мере две β_1 и β_2 различные, в противном случае точки B, B_1, B_2, B_3 лежали бы в одной плоскости. Так как плоскостям β_1 и β_2 принадлежит точка B, не принадлежащая плоскости α, то прямые a_1 и a_2 пересечения плоскостей β_1 и β_2 с плоскостью α различные (задача 2). В силу аксиомы I_3 на каждой из прямых a_1 и a_2, кроме A, лежат точки A_1 и A_2, отличные от A. Три точки A, A_1, A_2 лежат в плоскости α, но не лежат на одной прямой.

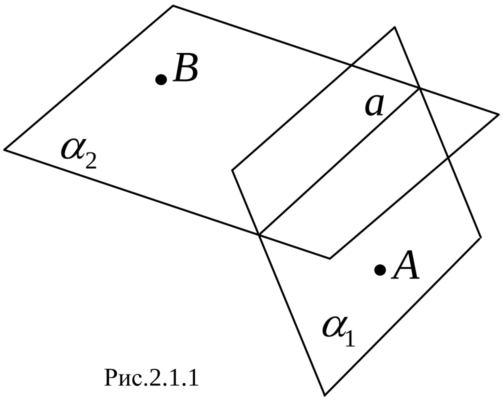

Рис.2.1.1

Задача 4. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

Р е ш е н и е. Пусть a – данная прямая (рис.2.1.1). По аксиоме I_3 существует точка A, не лежащая на прямой a. В силу задачи 2 через прямую a и точку A можно провести плоскость, обозначим её α_1. По аксиоме I_8 существует точка B, не лежащая в плоскости α_1. Проведем через прямую a и точку B плоскость α_2. Плоскости α_1 и α_2 различны, так как точка B плоскости α_2 не лежит на плоскости α_1.

Задача 5. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Проведем через данные прямые a и b плоскость α (рис.2.1.2). Это можно сделать в силу задачи 2. Прямая c, пересекающая данные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки M и N (точки пересечения с данными прямыми). По аксиоме I_6 эта прямая должна лежать в плоскости.

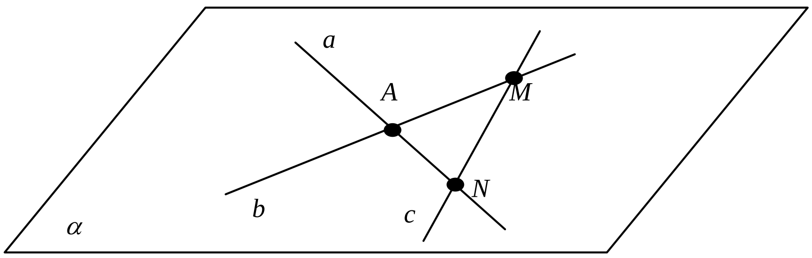

Рис.2.1.2

ЗАДАЧИ

2.1.1. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.

2.1.2. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Объясните ответ.

2.1.3. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

2.1.4. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

2.1.5. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a, и прямая b, которая лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.

2.1.6. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.

2.1.7. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

2.1.8. Даны две непересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая, пересекающая одну из этих плоскостей, пересекает и другую.

2.1.9. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

2.1.10. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости.

2.1.11. Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.

2.1.12. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три из этих точек? Объясните ответ.

2.1.13. Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.

2.1.14. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другую две точки. Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

2.1.15. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещиваются.

2.1.16. Можно ли через точку C, не принадлежащую скрещивающимся прямым a и b, провести две различные прямые, каждая из которых пересекает прямые a и b? Объясните ответ.

2.1.17. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

2.1.18. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

2.1.19. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и если: 1) $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м; 2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм; 3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

2.1.20. Решите предыдущую задачу при условии, что отрезок AB пересекает плоскость.

2.1.21. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если: 1) $CC_1 = 15$ см, $AC:BC = 2:3$; 2) $CC_1 = 8{,}1$ см, $AB:AC = 11:9$; 3) $AB = 6$ см, $AC:CC_1 = 2:5$; 4) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

2.1.22. Даны параллелограмм $ABCD$ и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Найдите длину отрезка DD_1, если: 1) $AA_1 = 2$м, $BB_1 = 3$м, $CC_1 = 8$м; 2) $AA_1 = 4$м, $BB_1 = 3$м, $CC_1 = 1$м; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

2.1.23. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

2.1.24. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и BC, параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AD и CD.

2.1.25. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма(вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

2.1.26. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямые, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

2.1.27. Дан треугольник ABC, плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC – в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если: 1) $AB = 15$см, $AA_1 : AC = 2:3$; 2) $AB = 8$см, $AA_1 : A_1C = 5:3$; 3) $B_1C = 10$см, $AB : BC = 4:5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

2.1.28. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.

2.1.29. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

2.1.30. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

2.1.31. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α.

2.1.32. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

2.1.33. Докажите, что через две скрещивающие прямые можно провести параллельные плоскости.

2.1.34. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую каждую из двух скрещивающихся прямых. Всегда ли это возможно?

2.1.35. Докажите, что геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым.

2.1.36. Даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD и BC в вершинах параллелограмма.

2.1.37. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

2.1.38. Плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α, β.

2.1.39. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

2.1.40. Через данную точку проведите плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых. Всегда ли это возможно?

2.1.41. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 тоже параллелограмм.

2.1.42. Через вершины параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже параллелограмм.

2.1.43. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

2.1.44. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

2.1.45. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку A, пересекают плоскость α в вершинах параллелограмма, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через точку A, тоже в вершинах параллелограмма.

2.1.46. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если $AB = a$?

2.1.47. Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 – точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

2.1.48. Точка A лежит вне плоскости α, X – произвольная точка плоскости α, X' – точка отрезка AX, делящая его в отношение $m:n$. Докажите, что геометрическое место точек X' есть плоскость, параллельная плоскости α.

2.1.49. Даны три параллельные плоскости α_1, α_2 и α_3. Пусть X_1, X_2 и X_3– точки пересечения этих плоскостей с произвольной прямой. Докажите, что отношение длин отрезков $X_1X_2 : X_2X_3$ не зависит от взятой прямой, т.е. одинаково для любых двух прямых.

2.1.50. Даны четыре параллельные прямые. Докажите, что если какая-нибудь плоскость пересекает эти прямые в вершинах параллелограмма, то любая плоскость, не параллельная данным прямым, пересекает их в вершинах некоторого параллелограмма.

2.1.51. Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

2.1.52. Дана параллельная проекция треугольника. Чем изобразится проекция средней линии треугольника?

2.1.53. Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция? Объясните ответ.

2.1.54. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проектировании быть квадратом?

2.1.55. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

2.1.56. Дана параллельная проекция окружности и ее диаметра. Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

2.2. Аксиомы порядка

Аксиомы порядка устанавливают свойства взаимного расположения точек на прямой и плоскости.

Мы полагаем, что на прямой есть два взаимно противоположных направления и по отношению к каждому из них каждая пара точек A и B находится в известном отношении, которое выражается словом «предшествовать».

Это отношение обозначается знаком $<$, так что выражение «A предшествует B» символически записывается так:

$$A < B.$$

Требуется, чтобы указанное отношение для точек на прямой удовлетворяло нижеследующим пяти аксиомам.

Аксиома II_1. *Если* $A < B$ *в одном направлении, то* $B < A$ *в противоположном направлении.*

Аксиома II_2. *В одном из двух направлений* $A < B$ *исключает* $B < A$.

Аксиома II_3. *В одном из двух направлений, если* $A < B$, *а* $B < C$, *то* $A < C$.

Аксиома II_4. *В одном из двух направлений для каждой точки* B *найдутся точки* A *и* C *такие, что* $A < B < C$.

Прежде чем сформулировать последнюю аксиому, определим некоторые понятия. Пусть a – прямая и A – точка на ней. При фиксированном направлении на прямой точка A разбивает ее на две части – *полупрямые*, для каждой точки X одной из них $X < A$, а для каждой точки X другой $A < X$. Очевидно, это разбиение прямой на части не зависит от выбранного на ней направления (аксиома II_1).

Пусть A и B – две точки на прямой a. Если для точки C прямой a выполняется условие $A < C < B$ или $B < C < A$, то мы будем говорить, что точка C лежит *между* точками A и B. Часть прямой a, все точки которой лежат между A и B, мы будем называть *отрезком* AB, а точки A и B – *концами* отрезка.

Аксиома II_5.*Прямая* a, *лежащая в плоскости* α, *разбивает эту плоскость на две части – полуплоскости так, что если* X *и* Y *– две точки одной полуплоскости, то отрезок* XY *не пересекается с прямой* a, *если же* X *и* Y *принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок* XY *пересекается с прямой* a.

Мы будем говорить, что две точки X и Y плоскости α *расположены по одну сторону прямой* a, или *по разные стороны*, смотря по тому, принадлежат они одной или разным полуплоскостям, на которые a разбивает α.

Задача 1. Среди трех точек A, B, C *на прямой* g *одна и только одна лежит между двумя другими.*

Р е ш е н и е. В одном из двух направлений на прямой g $A<C$. Если B не лежит между A и C, то это значит, что либо $B<A$, либо $C<B$. Но в первом случае A лежит между B и C, а во втором C лежит между A и B.

Задача 2. Каждый отрезок содержит по крайней мере одну точку.

Р е ш е н и е. Пусть A и B – концы отрезка (рис.2.2.1). по аксиоме I_3 вне прямой AB есть точка C. Возьмем на прямой AC точку D так, чтобы C была между A и D. Это возможно по аксиоме II_4. Возьмем на прямой BD точку E так, чтобы B была между D и E. Прямая CE разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки B и D находятся в одной полуплоскости, так как отрезок BD не пересекает прямую CE, а точки A и D в разных полуплоскостях, так как отрезок AD пересекает прямую CE (в точке C). Отсюда следует, что точки A и B находятся в разных полуплоскостях, а значит, отрезок AB пересекает прямую CE. Точка пересечения F и есть точка отрезка AB.

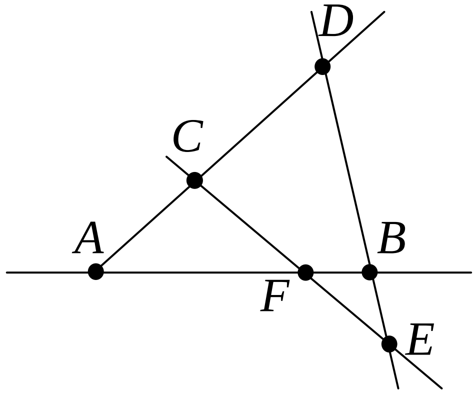

Рис.2.2.1

Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой. Фигура, составленная из трех отрезков AB, BC и CA, называется *треугольником*, точки A, B, C – *вершинами* треугольника, а отрезки AB, BC, CA – *сторонами*.

Задача 3. Пусть ABC – треугольник в плоскости α и a – прямая в этой плоскости, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда, если эта прямая пересекает сторону AB, то она пересекает и притом только одну из двух других сторон BC или AC.

Р е ш е н и е. В силу аксиомы II_5 прямая a разбивает плоскость α на две полуплоскости. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях. Если точка C лежит в той же полуплоскости, что и B, то a пересекает AC, но не пересекает BC. Если точка C лежит в той же полуплоскости, что и A, то a пересекает BC и не пересекает AC.

Задача 4. Пусть из точки O исходят две полупрямые a и b, не принадлежащие одной прямой. Тогда, если полупрямая h, исходящая из точки O, пересекает отрезок AB с концами на полупрямых a и b, то она пересекает любой другой отрезок с концами на этих полупрямых.

Р е ш е н и е. Ясно, что по условию задач отрезки AB и XY, полупрямые a и h находятся в одной из полуплоскостей, определяемых прямой, содержащей b, а дополнение h' полупрямой h до прямой (мы ее обозначим c) находится в другой полуплоскости. Применяя задачу 3 к треугольникам ABX и BXY и прямой c последовательно, заключаем, что она пересекает BX и YX. Так как h' и XY находятся в разных полуплоскостях и, следовательно, не пересекаются, то отсюда следует, что h пересекает XY (рис.2.2.2).

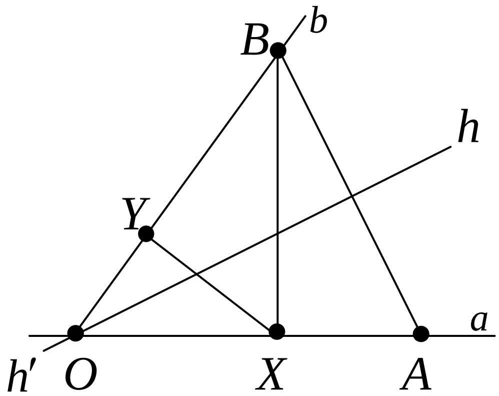

Рис.2.2.2

Задача 5. Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Р е ш е н и е. Пусть a – данная прямая и A – точка на ней (рис.2.2.3). проведем через нее две плоскости и проведем в них через точку A прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Плоскость α, проходящая через эти прямые, перпендикулярна прямой a.

Докажем, что эта плоскость единственна. Допустим, что, кроме плоскости α, существует другая плоскость α', проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (рис.2.2.4). Пусть B – точка плоскости α', не лежащая в плоскости α. Проведем через точку B и прямую a плоскость. Она пересечет плоскости α и α' по различным прямым b и b', перпендикулярным прямой a. А это, как мы знаем, невозможно, так как на плоскости через данную точку прямой проходит только одна перпендикулярная ей прямая. Итак, плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a, единственна.

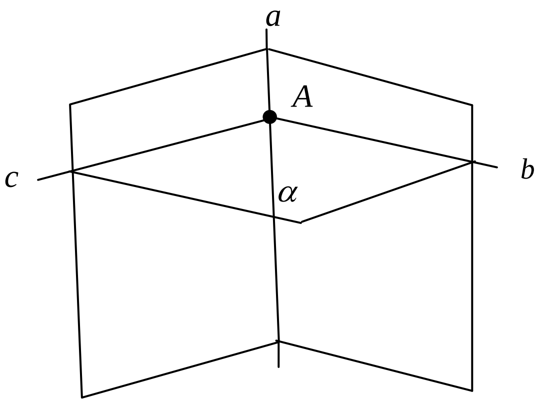

Рис.2.2.3

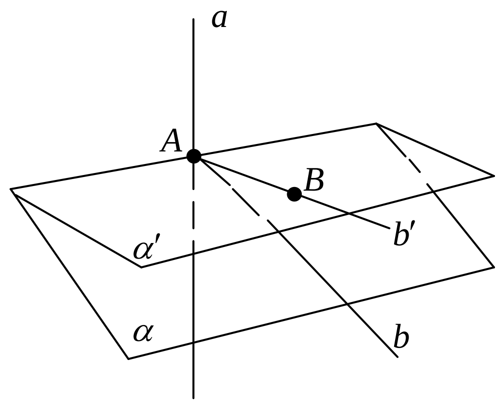

Рис.2.2.4

Задача 6. Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Р е ш е н и е. Пусть α – данная плоскость и A – точка на ней (рис.2.2.5). Проведем в плоскости α через точку A две прямые b и c. Проведем через точку A перпендикулярные им плоскости. Они пересекутся по некоторой прямой a, перпендикулярной прямым b и c. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α.

Докажем, что эта прямая единственна. Допустим, что, кроме прямой a, существует другая прямая a', проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α (рис.2.2.6). Проведем через прямые a и a' плоскость. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой b, перпендикулярной прямым a и a'. А это, как мы знаем, невозможно. Итак, прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная этой плоскости, единственна.

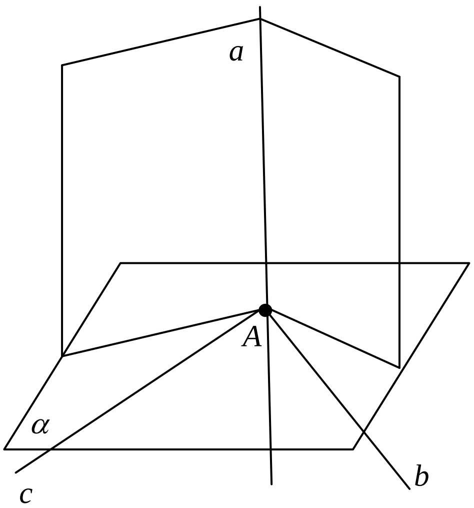

Рис.2.2.5

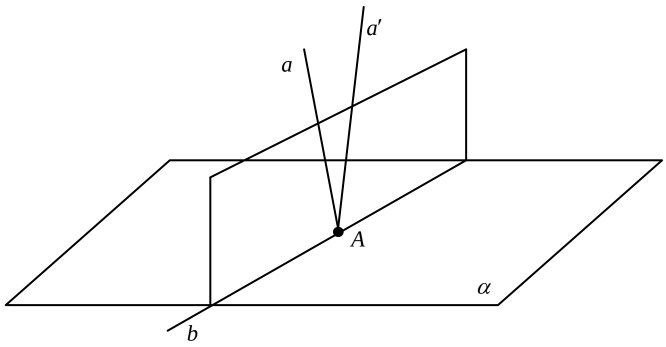

Рис.2.2.6

Задача 7. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C – точки касания сторон треугольника с окружностью, O – центр окружности и S – точка на перпендикуляре (рис.2.2.7). так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина – расстояние от точки S до стороны треугольника. По теореме Пифагора $SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$, где r – радиус вписанной окружности. Аналогично находим $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$, $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$, т.е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

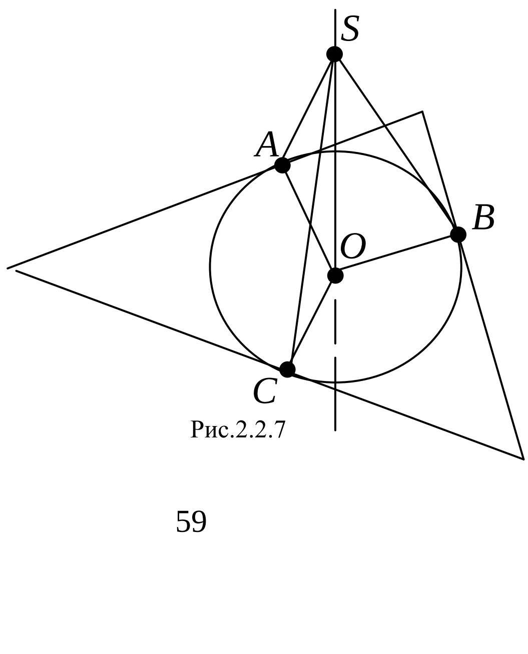

Рис.2.2.7

ЗАДАЧИ

2.2.1. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

2.2.2. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные ей прямые.

2.2.3. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если: 1) $AB=3$ см, $BC=7$ см, $AD=1,5$ см; 2) $BD=9$ см, $BC=16$ см, $AD=5$ см; 3) $AB=b$, $BC=a$, $AD=d$; 4) $BD=c$, $BC=a$, $AD=d$.

2.2.4. Стороны четырехугольника $ABCD$ и прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны. Докажите, что $ABCD$ прямоугольник.

2.2.5. Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, нельзя провести более одной прямой, перпендикулярной плоскости.

2.2.6. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

2.2.7. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м, 9 м. Найдите отрезок AK.

2.2.8. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная его плоскости треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C, если $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$.

2.2.9. Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

2.2.10. Через точку A прямой a проведены перпендикулярные ей плоскость β и прямая b. Докажите, что прямая b лежит в плоскости β.

2.2.11. Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

2.2.12. Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

2.2.13. Через вершину квадрата $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная его плоскости. Докажите, что: 1) прямая AD перпендикулярна плоскости прямых AB и BM; 2) прямая CD перпендикулярна плоскости прямых BC и BM.

2.2.14. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие ее в точках C и D, соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2{,}4$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

2.2.15. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние $3{,}4$ м, соединены перекладиной. Высота одного столба $5{,}8$м, а другого – $3{,}9$ м. Найдите длину перекладины.

2.2.16. Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

2.2.17. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

2.2.18. Из точки S вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

2.2.19. Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин.

2.2.20. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 м. Данная точка находится на расстоянии 6 м от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

2.2.21. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

2.2.22. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки к плоскости.

2.2.23. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см, разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

2.2.24. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если: 1) одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см; 2) наклонные относятся как 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

2.2.25. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.

2.2.26. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

2.2.27. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.

2.2.28. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции сторон.

2.2.29. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AB. Чему равно расстояние CD, если $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$?

2.2.30. Докажите, что расстояния от всех точек плоскости до параллельной плоскости одинаковы.

2.2.31. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно a. Отрезок длины b своими концами упирается в эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую из плоскостей.

2.2.32. Два отрезка длин a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длины a) на плоскость равна c. Найдите проекцию второго отрезка.

2.2.33. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3:7?

2.2.34. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

2.2.35. Через диагональ параллелограмма проведена плоскость. Докажите, что концы другой диагонали находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

2.2.36. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояния от точек A и B до плоскости равны: 1) 3,2 см и 5,3 см; 2) 7,4 см и 6,1 см; 3) a и b.

2.2.37. Решите предыдущую задачу, считая, что отрезок AB пересекает плоскость.

2.2.38. Отрезок длины 1 м пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на 0,5 м и 0,3 м. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.

2.2.39. Через основание трапеции проведена плоскость, отстоящая от другого основания на расстояние a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости, если основания трапеции относятся как $m:n$.

2.2.40. Через сторону параллелограмма проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой плоскости.

2.2.41. Из вершины квадрата восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b ($a<b$). Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата.

2.2.42. Из вершины прямоугольника восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин прямоугольника равны a, b, c ($a<c$, $b<c$). Найдите длину перпендикуляра и стороны прямоугольника.

2.2.43. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные, длиной 2 м. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60^0, а их проекции перпендикулярны.

2.2.44. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равны 60^0.

2.2.45. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

2.2.46. К плоскости треугольника из центра вписанной в него окружности радиуса 0,7 м восставлен перпендикуляр длиной 2,4 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

2.2.47. Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 1,1 м, а до каждой из его сторон – 6.1 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

2.2.48. Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

2.2.49. Через конец A отрезка AB длины b проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в этой плоскости проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно a.

2.2.50. Расстояние от точки A до всех сторон квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна d.

2.2.51. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

2.2.52. Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. Из центра вписанного круга восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

2.2.53. Из вершины прямого угла C треугольника ABC восставлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

2.2.54. Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

2.2.55. Даны прямая a и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.

2.2.56. Из вершины A и B равностороннего треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $AB = 2$м, $CA_1 = 3$м, $CB_1 = 7$м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

2.2.57. Из вершины A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $A_1C = 4$м, $A_1A = 3$м, $B_1C = 6$м, $B_1B = 2$ и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

2.2.58. Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

2.2.59. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: 1) $AC = 6$м, $BD = 7$м, $CD = 6$м; 2) $AC = 3$м, $BD = 4$м, $CD = 12$м; 3) $AD = 4$м, $BC = 7$м, $CD = 1$м; 4) $AD = BC = 5$м, $CD = 1$м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.

2.2.60. Точка находится на расстояниях a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

2.2.61. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая на 1,2 м от нее. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

2.2.62. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая $a \parallel c$, в плоскости β – прямая $b \parallel c$. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c – 0,8 м.

2.3. Аксиомы движения

Переходя к аксиомам третьей группы, мы вводим новое понятие «движение».

Мы требуем, чтобы существовали отображения точек, прямых и плоскостей на точки, прямые и плоскости, именуемые движениями, удовлетворяющие следующим аксиомам.

Аксиома III_1. *Каждое движение* H *сохраняет отношение принадлежности*.

Это означает, что если точка A принадлежит прямой a (плоскости α), то ее *образ* при движении H (мы будем обозначать его HA) принадлежит образу прямой Ha (соответственно образу плоскости $H\alpha$).

Аксиома III_2. *Каждое движение* H *сохраняет отношение порядка на прямой.*

Это означает, что каждому из двух направлений на прямой a можно сопоставить такое направление на прямой Ha, что каждый раз, когда для точек X и Y прямой a имеет место $X < Y$, для соответствующих им точек прямой Ha имеет место $HX < HY$.

Из аксиом III_1 и III_2 следует, что каждое движение переводит полупрямую в полупрямую, полуплоскость в полуплоскость.

Аксиома III_3. *Движения образуют группу.*

Это значит:

а) Сопоставление H^0 каждому элементу x (точке, прямой, плоскости) его самого есть движение. Это движение называется *тождественным*.

б) Если движение H_1 сопоставляет произвольному элементу x элемент y, а движение H_2 сопоставляет y элемент z, то сопоставление элементу x элемента z есть движение. Оно обозначается H_2H_1 и называется *произведением* движений H_2 и H_1.

в) для каждого движения H существует движение H^{-1} такое, что $H^{-1}H = H^0$. Движение H^{-1} будем называть *обратным*.

Аксиома III_4. *Если при движении* H *полупрямая* h, *как целое, и ее начальная точка* A *остаются неподвижными, то все точки* *полупрямой h остаются неподвижными.* Это означает, что если $Hh = h$ и $HA = A$, то для любой точки X полупрямой $HX = X$.

Аксиома III_5. *Для каждой пары точек A и B существует движение H, которое переставляет их местами: $HA = B$, $HB = A$.*

Аксиома III_6. *Для каждой пары лучей h, k (полупрямых), исходящих из одной точки, существует движение H, их переставляющее: $Hh = k$, $Hk = h$.*

Аксиома III_7. *Пусть α и β – любые плоскости, a и b – прямые в этих плоскостях, A и B – точки на прямых a и b. Тогда существует и притом единственное движение, которое переводит точку A в B, заданную полупрямую прямой a, определяемую точкой A, – в заданную полупрямую прямой b, определяемую точкой B, заданную полуплоскость плоскости α, определяемую прямой a, – в заданную полуплоскость плоскости β, определяемую прямой b.*

Фигуру F_1 мы будем называть *конгруэнтной* фигуре F_2, если существует движение H, переводящее F_1 в F_2: $HF_1 = F_2$. Из групповых свойств движения (аксиома III_3) вытекают следующие свойства отношения конгруэнтности:

1. *Каждая фигура F конгруэнтна сама себе.*

Действительно, тождественное движение H^0 переводит F в F.

2. *Если фигура F_1 конгруэнтна F_2, то фигура F_2 конгруэнтна F_1.*

В самом деле, если H – движение, которое переводит фигуру F_1 в F_2, то движение H^{-1} переводит фигуру F_2 в фигуру F_1.

3. *Если фигура F_1 конгруэнтна F_2, а фигура F_2 конгруэнтна фигуре F_3, то фигура F_1 конгруэнтна F_3.*

Действительно, если H' – движение, которое переводит фигуру F_1 в F_2, а H'' – движение, переводящее F_2 в F_3, то движение $H''H'$ переводит F_1 в F_3.

Задача 1. Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

Р е ш е н и е. Это значит, что если точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1, то эти точки также лежат на прямой; если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Пусть точка B прямой AC лежит между точками A и C. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой, то они являются вершинами треугольника. Поэтому $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. По определению движения отсюда следует, что $AC < AB + BC$. Однако по свойству измерения отрезков $AC = AB + BC$, мы пришли к противоречию. Значит, точка B_1 лежит на прямой A_1C_1. Первое утверждение доказано.

Покажем теперь, что точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Допустим, что точка A_1 лежит между точками B_1 и C_1. Тогда $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$, и, следовательно, $AB + AC = BC$. Но это противоречит равенству $AB + BC = AC$. Таким образом, точка A_1 не может лежать между точками B_1 и C_1.

Аналогично доказывается, что точка C_1 не может лежать между точками A_1 и B_1. Так как из трех точек A_1, B_1, C_1 одна лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только B_1.

Из задачи 1 следует, что при движении прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки (рис.2.3.1).

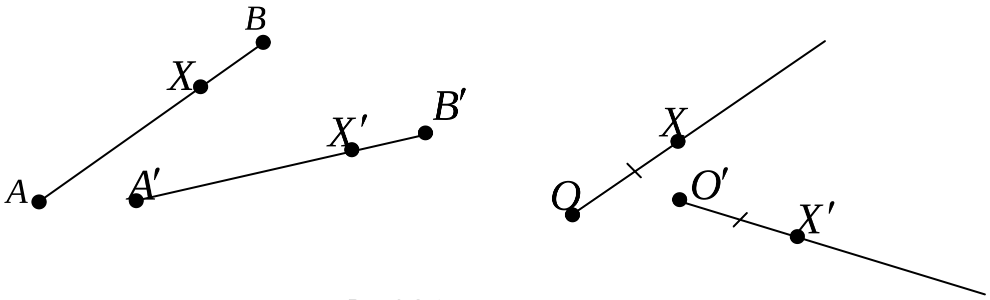

Рис.2.3.1

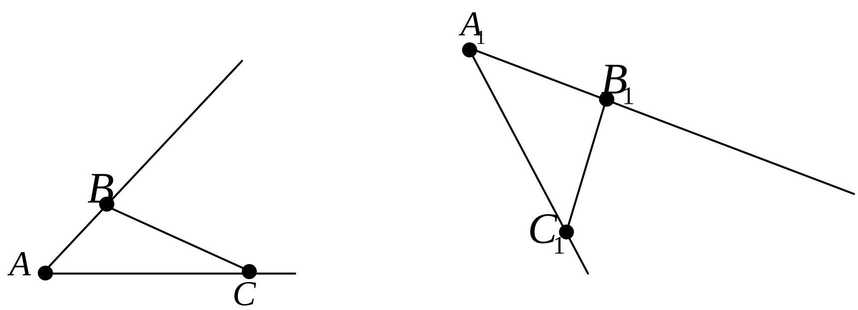

Рис.2.3.2

Задача 2. Докажите, что при движении сохраняются углы между полупрямыми.

Р е ш е н и е. Пусть AB и AC – две полупрямые, исходящие из точки A, не лежащие на одной прямой (рис.2.3.2). При движении эти полупрямые переходят в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$, что и требовалось доказать.

Пусть (h,k) – некоторый угол, $\bar{h}$ и $\bar{k}$ – лучи, дополняющие h и k до прямых. Тогда угол $(k,\bar{h})$ называется *смежным* к (h,k), а угол $(\bar{h},\bar{k})$ – *вертикальным* к (h,k).

Задача 3. Докажите, что если углы (h,k) и (h',k') равны, то смежные с ними углы $(h,\bar{k})$ и $(h',\bar{k}')$ равны.

Угол (h,k) равен вертикальному $(\bar{h},\bar{k})$.

Р е ш е н и е. Так как $(h,k)=(h',k')$, то существует движение H такое, что $Hh'=h$, $Hk'=k$. В силу аксиом III_1 и III_2 $H\bar{k}'=\bar{k}$. Следовательно, $(h,\bar{k})=(h',\bar{k}')$.

По аксиоме III_6 существует движение S такое, что $S\bar{k}=h, Sh=\bar{k}$. В силу аксиом III_1 и III_2 $Sk=\bar{h}, S\bar{h}=k$. Отсюда $(h,k)=(\bar{h},\bar{k})$.

Угол равный смежному, называется *прямым*.

Задача 4. Докажите, что существует прямых углов.

Р е ш е н и е. Возьмем плоскость α, на ней прямую a и на прямой точку A. Пусть α' и α'' – две полуплоскости, определяемые прямой a, и h – одна из полупрямых прямой a, на которые ее разбивает точка A. По аксиоме III_7 существует такое движение H, что $H\alpha'=\alpha''$, $Hh=h, HA=A$. По аксиоме III_4 H тождественно на a. Пусть B' – точка в полуплоскости α'. Соединим ее с точкой $B''=HB'$ прямой b. Пусть C – точка пересечения прямых a и b. Точка C разбивает прямую a на полупрямые a' и a'', а прямую b – на полупрямые b' и b''. Очевидно, $Ha'=a', Hb'=b''$. Поэтому угол (a',b') равен смежному (a',b'').

Задача 5. Докажите, что все прямые углы равны.

Р е ш е н и е. Пусть (h,k) и (h',k') – прямые углы (рис.2.3.3). Пусть α – плоскость угла (h,k) и α' – та его полуплоскость, определяемая лучом h и его продолжением, где лежит луч k. По аксиоме III_7 существует движение H, которое h' переводит в h, а луч k' – в луч k'', расположенный в полуплоскости α'.

Обозначим S движение, переводящее h в его дополнение $\bar{h}$, а луч k в себя. Это возможно, так как $(h,k)=(\bar{h},k)$. Движение S переводит луч k'' в некоторый луч k'''. Углы (k'',h) и (k''',h) равны как углы, полученные движением из равных углов, k'' совпадает с k'''. Так как полуплоскости, определяемые лучом k и его продолжением, при движении S представляются, то это возможно тогда и только тогда, если k'' совпадает с k. Но это значит, что $(h,k)=(h,k'')$ и, следовательно, $(h,k)=(h',k')$.

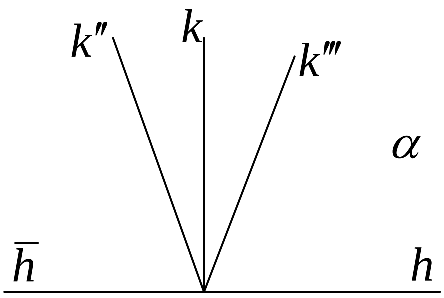

Рис.2.3.3

Пусть O – фиксированная точка и X – произвольная точка плоскости (рис.2.3.4). Отложим на продолжении отрезка OX за точку O отрезок OX', равный OX. Точка X' называется *симметричной точке X относительно точки* O. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

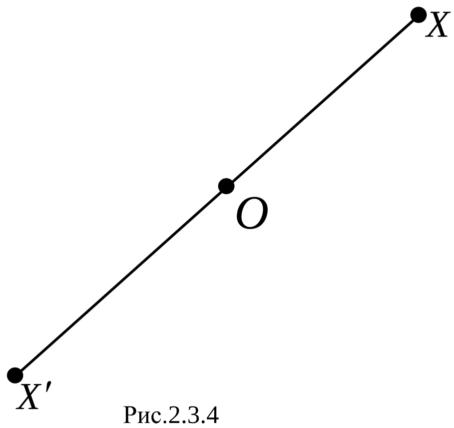

Рис.2.3.4

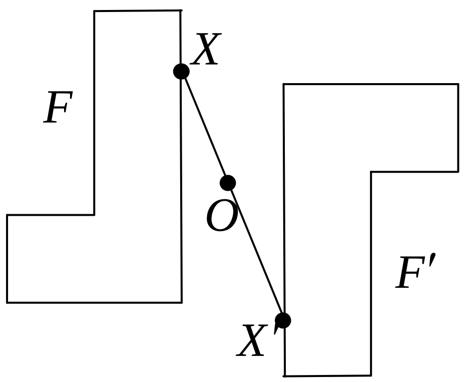

Рис.2.3.5

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной точки O, называется *преобразованием симметрии относительно точки* O. При этом фигуры F и F' называются *симметричными относительно точки* O (рис.2.3.5).

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру F в себя, то она называется *центрально-симметричной,* а точка O называется *центром симметрии*.

Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центром симметрии является точка пересечения диагоналей (рис.2.3.6).

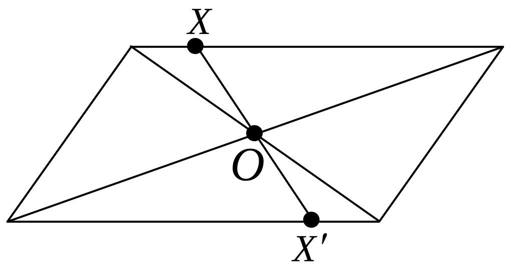

Рис.2.3.6

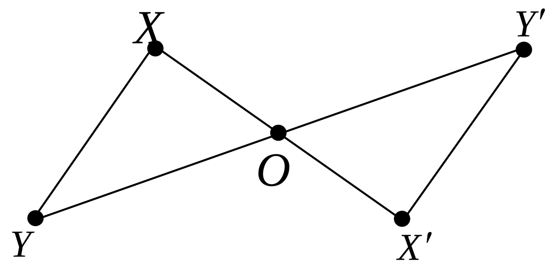

Рис.2.3.7

Задача 6. Докажите, что преобразование симметрии относительно точки является движением.

Р е ш е н и е. Пусть X и Y – две произвольные точки фигуры F (рис.2.3.7). Преобразование симметрии относительно точки O переводит их в точки X' и Y'. Рассмотрим треугольники XOY и $X'OY'$. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OX = OX'$, $OY = OY'$ по определению симметрии относительно точки O. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $XY = X'Y'$. А это значит, что симметрия относительно точки O есть движение.

Пусть g – фиксированная прямая (рис.2.3.8). Возьмем произвольную точку X и опустим перпендикуляр AX на прямую g. На продолжении перпендикуляра за точку A отложим отрезок AX', равный отрезку AX. Точка X' называется *симметричной точке* X *относительно прямой* g. Если точка X лежит на прямой g, то симметричная ей точка есть сама точка X. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

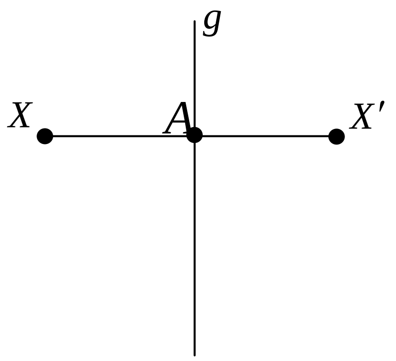

Рис.2.3.8

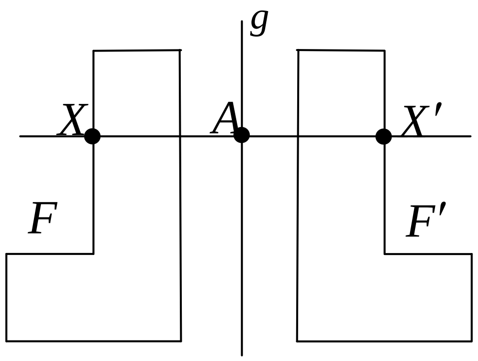

Рис.2.3.9

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной прямой g, называется *преобразованием симметрии относительно прямой* g. При этом фигуры F и F' называются *симметричными относительно прямой* g (рис.2.3.9).

Если преобразование симметрии относительно прямой g переводит фигуру F в себя, то эта фигура называется *симметричной относительно прямой* g, а прямая g называется *осью симметрии* фигуры.

Например, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис.2.3.10). Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис.2.3.11).

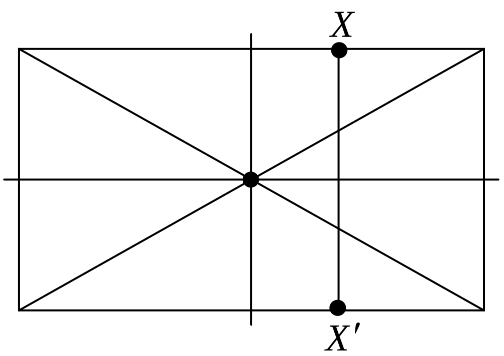

Рис.2.3.10

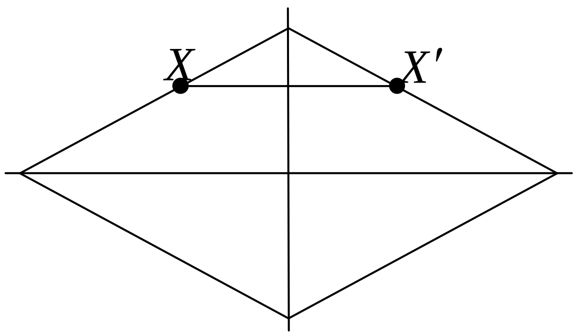

Рис.2.3.11

Задача 7. Докажите, что преобразование симметрии относительно прямой является движением.

Р е ш е н и е. Примем данную прямую за ось y декартовой системы координат (рис.2.3.12). Пусть произвольная точка $A(x;y)$ фигуры F переходит в точку $A'(x';y')$ фигуры F'. Из определения симметрии относительно прямой следует, что у точек A и A' равные ординаты, а абсциссы отличаются только знаком: $x' = -x$.

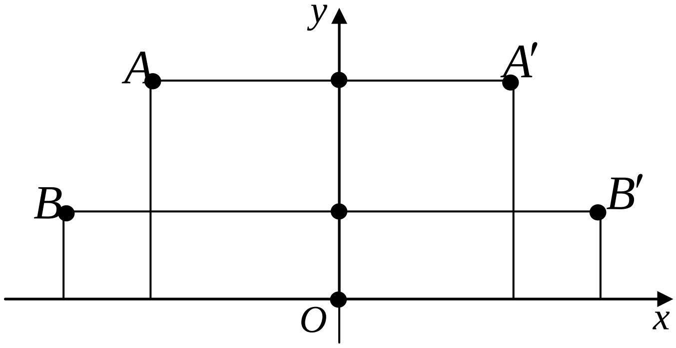

Рис.2.3.12

Возьмем две произвольные точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Они перейдут в точки $A'(-x_1;y_1)$ и $B'(-x_2;y_2)$.

Имеем:

$$AB^2 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1),$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1) + (y_2 - y_1).$$

Отсюда видно, что $AB = A'B'$. А это значит, что преобразование симметрии относительно прямой есть движение.

Поворотом плоскости около данной точки называется такое движение, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (рис.2.3.13). Это значит, что если при повороте около точки O точка X переходит в точку X', то лучи OX и OX' образуют один и тот же угол, какова бы ни была точка X. Этот угол называется *углом поворота*. Преобразование фигур при повороте плоскости также называется *поворотом*.

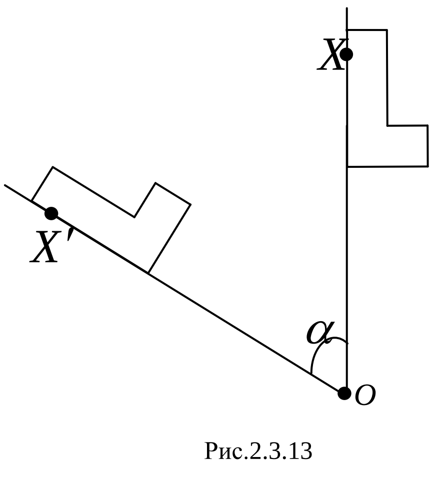

Рис.2.3.13

Задача 8. 1) Постройте точку A_1, в которую переходит точка A при повороте около точки O на угол 60^0 по часовой стрелке. 2) Постройте фигуру, в которую переходит отрезок AB при повороте около точки O на угол 60^0 по часовой стрелке.

Р е ш е н и е. 1) Проведем луч OA и построим луч OM так, что $\angle AOM = 60^0$ (рис.2.3.14, а). Отложим на луче OM отрезок OA_1, равный отрезку OA. Точка A_1 является искомой.

2) Построим точки A_1 и B_1, в которые переходят при заданном повороте точки A и B, являющиеся концами отрезка AB (рис.2.3.14, б). Отрезок A_1B_1 является искомым, поскольку при повороте отрезок переходит в отрезок.

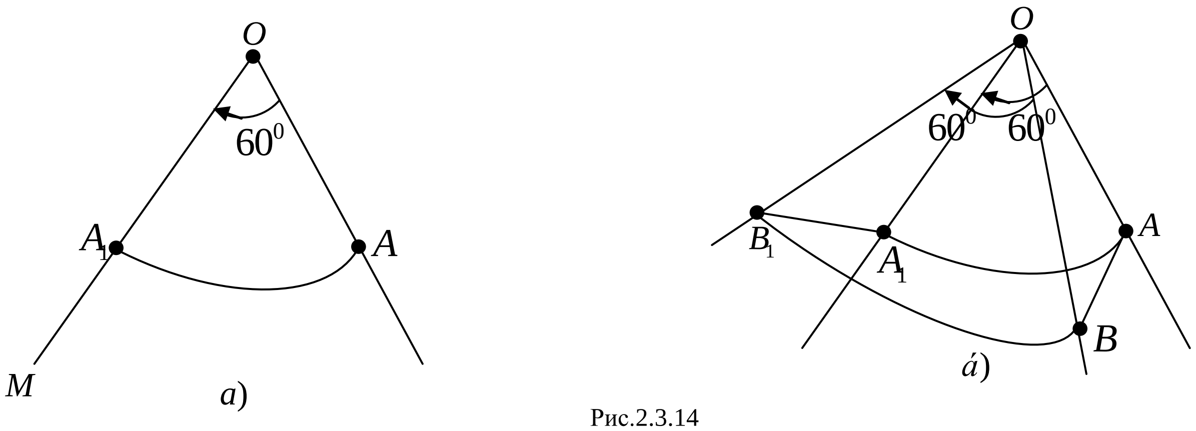

Рис.2.3.14

Наглядно параллельный перенос определяется как преобразование, при котором точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние (рис.2.3.15). Такое определение не является математически строгим, потому что в нем употребляется выражение «в одном и том же направлении», которое само нуждается в точном определении. В связи с этим параллельному переносу мы дадим другое, отвечающее тому же наглядному представлению, но уже строгое определение.

Введем на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(x+a; y+b)$, где a и b одни и те же для всех точек $(x; y)$, называется *параллельным переносом* (рис.2.3.16). Параллельный перенос задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при параллельном переносе.

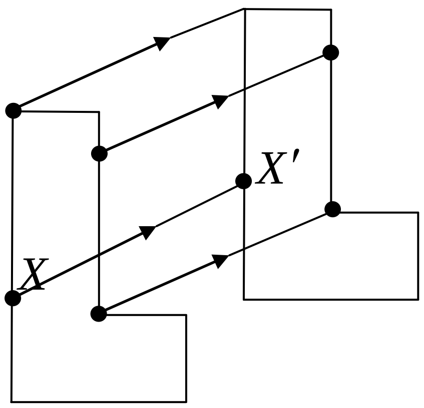

Рис.2.3.15

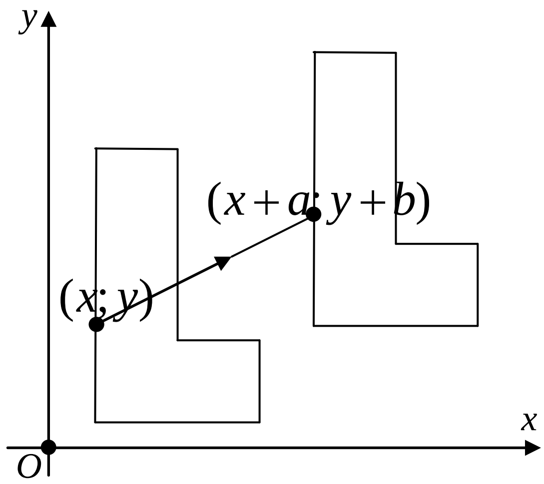

Рис.2.3.16

Задача 9. Параллельный перенос есть движение.

Р е ш е н и е. Действительно, две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ переходят при параллельном переносе в точки $A'(x_1 + a; y_1 + b)$, $B'(x_2 + a; y_2 + b)$. Поэтому

$$AB^2 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1),$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1).$$

Отсюда $AB = A'B'$. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния, а значит, является движением, что и требовалось доказать.

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что *при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние*.

Действительно, пусть точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ переходят в точки $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ и $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ (рис.2.3.17). Середина отрезка AB' имеет координаты

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

Те же координаты имеет и середина отрезка $A'B$. Отсюда следует, что диагонали четырехугольника $AA'B'B$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, этот четырехугольник –

параллелограмм. А у параллелограмма противолежащие стороны AA' и BB' параллельны и равны.

Заметим, что у параллелограмма $AA'B'B$ параллельны и две другие противолежащие стороны – AB и $A'B'$. Отсюда следует, что *при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя)*.

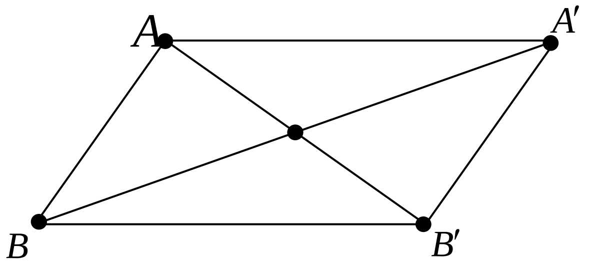

Рис.2.3.17

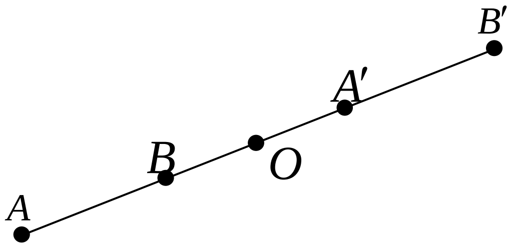

Рис.2.3.18

З а м е ч а н и е. В предыдущем доказательстве предполагалось, что точка B не лежит на прямой AA'. В случае, когда точка B лежит на прямой AA', точка B' тоже лежит на этой прямой, так как середина отрезка AB' совпадает с серединой отрезка BA' (рис.2.3.18). Значит, все точки A, B, A', B' лежат на одной прямой. Далее,

$$AA' = \sqrt{(x_1 + a - x_1)^2 + (y_1 + b - y_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$BB' = \sqrt{(x_2 + a - x_2)^2 + (y_2 + b - y_2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, в этом случае точки A и B смещаются по прямой AB на одно и то же расстояние $\sqrt{a^2 + b^2}$, а прямая AB переходит в себя.

Задача 10. Каковы бы ни были две точки A *и* A', *существует один и только один параллельный перенос, при котором точка* A *переходит в точку* A'.

Р е ш е н и е. Начнем с доказательства существования параллельного переноса, переводящего точку A в A'. Введем декартовы координаты на плоскости. Пусть a_1, a_2 – координаты точки A и a_1', a_2' – координаты точки A'. Параллельный перенос, заданной формулами

$$x' = x + a_1' - a_1,\ y' = y + a_2' - a_2,$$

переводит точку A в точку A'. Действительно, при $x = a_1$ и $y = a_2$ получаем $x' = a_1',\ y' = a_2'$.

Докажем единственность параллельного переноса, переводящего точку A в точку A'. Пусть X – произвольная точка фигуры и X' – точка, в которую она переходит при параллельном переносе (рис.2.3.19). Как мы знаем, отрезки XA' и AX' имеют общую середину O. Задание точки X однозначно определяет точку O – середину отрезка $A'X$. А точки A и O однозначно определяют точку X', так как точка O является серединой отрезка AX'. Однозначность в определении точки X' и означает единственность параллельного переноса.

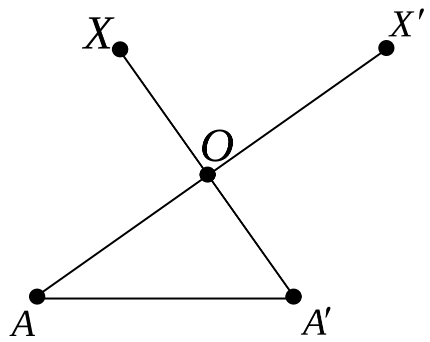

Рис.2.3.19

Задача 11. При параллельном переносе точка $(1;1)$ *переходит в точку* $(-1;0)$. *В какую точку переходит начало координат*?

Р е ш е н и е. Любой параллельный перенос задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Так как точка $(1;1)$ переходит в точку $(-1;0)$, то $-1 = 1 + a, 0 = 1 + b$. Отсюда $a = -2, b = -1$. Таким образом наш параллельный перенос, переводящий точку $(1;1)$ в $(-1;0)$, задается формулами $x' = x - 2, y' = y - 1$. Подставляя в эти формулы координаты начала $(x = 0,\ y = 0)$, получим $x' = -2, y' = -1$. Итак, начало координат переходит в точку $(-2;-1)$.

ЗАДАЧИ

2.3.1. Докажите, что при движении параллелограмм переходит в параллелограмм.

2.3.2. В какую фигуру переходит при движении квадрат? Объясните ответ.

2.3.3. Даны точки A и B. Постройте точку B', симметричную точке B относительно точки A.

2.3.4. Решите предыдущую задачу, пользуясь только циркулем.

2.3.5. Докажите, что центр окружности является ее центром симметрии.

2.3.6. При симметрии относительно некоторой точки точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.

2.3.7. Может ли у треугольника быть центр симметрии?

2.3.8. Докажите, что у параллелограмма точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

2.3.9. Докажите, что четырехугольник, у которого есть центр симметрии, является параллелограммом.

2.3.10. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

2.3.11. Что представляет собой фигура, симметричная относительно данной точки: 1) отрезку; 2) углу; 3) треугольнику?

2.3.12. Даны точки A, B, C. Постройте точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.

2.3.13. Решите предыдущую задачу, пользуясь только циркулем.

2.3.14. Чему равны координаты точки, симметричной точке $(-3;4)$ относительно 1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) начала координат?

2.3.15. При симметрии относительно некоторой прямой точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.

2.3.16. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

2.3.17. Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является осью симметрии треугольника.

2.3.18. Докажите, что если у треугольника есть ось симметрии, то 1) она проходит через одну из его вершин; 2) треугольник равнобедренный.

2.3.19. Сколько осей симметрии у равностороннего треугольника?

2.3.20. Докажите, что прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются его осями симметрии.

2.3.21. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.

2.3.22. Докажите, что диагонали квадрата и прямые, проходящие через точку их пересечения параллельно его сторонам, являются осями симметрии квадрата.

2.3.23. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

2.3.24. Даны три попарно пересекающиеся прямые a, b, c. Как построить отрезок, перпендикулярный прямой b, с серединой на прямой b и концами на прямых a и c?. Всегда ли задача имеет решение?

2.3.25. 1) Постройте точку A_1, в которую переходит точка A при повороте около точки O на угол 60^0 по часовой стрелке. 2) Постройте фигуру, в которую переходит отрезок AB при повороте около точки O на угол 60^0 по часовой стрелке.

2.3.26. Постройте фигуру, в которую переходит треугольник ABC при повороте его около вершины C на угол 60^0.

2.3.27. Даны точки A, B, C. Постройте точку C', в которую переходит точка C при параллельном переносе, переводящем точку A в B.

2.3.28. Параллельный перенос задается формулами $x' = x+1,\ y' = y-1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки $(0;0), (1;0), (0;2)$?

2.3.29. Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x' = x+a,\ y' = y+b$, если известно, что: 1) точка $(1;2)$ переходит в точку $(3;4)$; 2) точка $(2;-3)$ – в точку $(-1;5)$; 3) точка $(-1;-3)$ – в точку $(0;-2)$.

2.3.30. При параллельном переносе точка $(1;1)$ переходит в точку $(-1;0)$. В какую точку переходит начало координат?

2.3.31. Существует ли параллельный перенос, при котором: 1) точка $(1;2)$ переходит в точку $(3;4)$, а точка $(0;1)$ – в точку $(-1;0)$; 2) точка $(2;-1)$ переходит в точку $(1;0)$, а точка $(-1;3)$ – в точку $(0;4)$?

2.3.32. Прямые AB и CD – параллельны. Точки A и D лежат по одну сторону от секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.

2.3.33. Докажите, что в задаче 4.32 лучи BA и CD противоположно направлены, если точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC.

2.3.34. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Среди лучей $AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA$ назовите пары одинаково направленных и противоположно направленных лучей.

2.3.35. Докажите, что отрезки равной длины и углы с равной градусной мерой совмещаются движением.

2.3.36. У параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что параллелограммы равны, т.е. совмещаются движением.

2.3.37. Докажите, что ромбы равны, если у них равны диагонали.

2.3.38. Докажите, что две окружности одинакового радиуса равны, т.е. совмещаются движением.

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз (рис.2.3.20). Это значит, что если произвольные точки X, Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X', Y' фигуры F', то $X'Y' = k \cdot XY$, причем число k – одно и то же для всех точек X, Y. Число k называется *коэффициентом подобия*. При $k = 1$ преобразование подобия, очевидно, является движением.

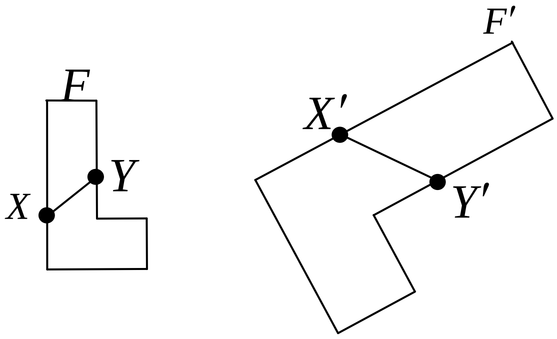

Рис.2.3.20

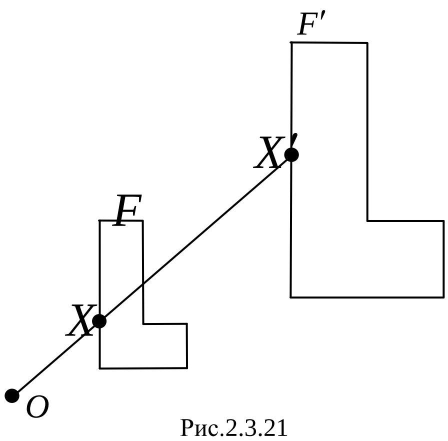

Рис.2.3.21

Пусть F – данная фигура и O фиксированная точка (рис.2.3.21). Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX', равный $k \cdot OX$, где k – положительное число.

Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в точку X', построенную указанным способом, называется *гомотетией относительно центра* O. Число k называется *коэффициентом гомотетии*, фигуры F и F' называются *гомотетичными.*

Задача 12. Докажите, что гомотетия есть преобразование подобия.

Р е ш е н и е. Пусть O – центр гомотетии, k – коэффициент гомотетии, X и Y – две произвольные точки фигуры (рис.2.3.22)

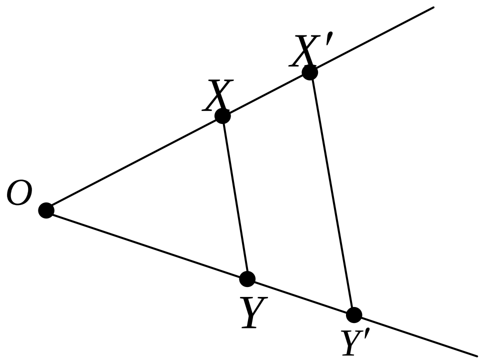

Рис.2.3.22

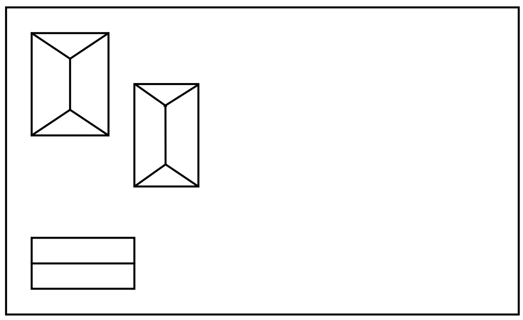

Рис.2.3.23

При гомотетии точки X и Y переходят в точки X' и Y' на лучах OX и OY, соответственно, причем $OX' = k \cdot OX, OY' = k \cdot OY$. Отсюда следуют векторные равенства

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY'} = k\overrightarrow{OY}.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим:

$$\overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}).$$

Так как $\overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{X'Y'}$, $\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XY}$, то $\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}$. Значит, $\left|\overrightarrow{X'Y'}\right| = k\left|\overrightarrow{XY}\right|$, т.е. $X'Y' = kXY$. Следовательно, гомотетия есть преобразование подобия.

Преобразование подобия широко применяется на практике при выполнении чертежей деталей машин, сооружений, планов местности и др. Эти изображения представляют собой подобные преобразования воображаемых изображений в натуральную величину. Коэффициент подобия при этом называется масштабом. Например, если участок местности изображается в масштабе 1:100, то это значит, что одному сантиметру на плане соответствует 1 м на местности.

Задача 13. На рисунке 2.3.23 изображен план усадьбы в масштабе 1:1000. Определите размеры усадьбы (длину и ширину).

Р е ш е н и е. Длина и ширина усадьбы на плане равны 4 см и 2,7 см. Так как план выполнен в масштабе 1:1000, то размеры усадьбы равны, соответственно, $2{,}7 \times 1000\,\text{см} = 27\,(\text{м})$, $4 \times 1000\,\text{см} = 40\,(\text{м})$.

Так же как и для движения, доказывается, что при преобразовании подобия три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1, C_1, также лежащие на одной прямой. Причем, если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Отсюда следует, что *преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки*.

Задача 14. Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.

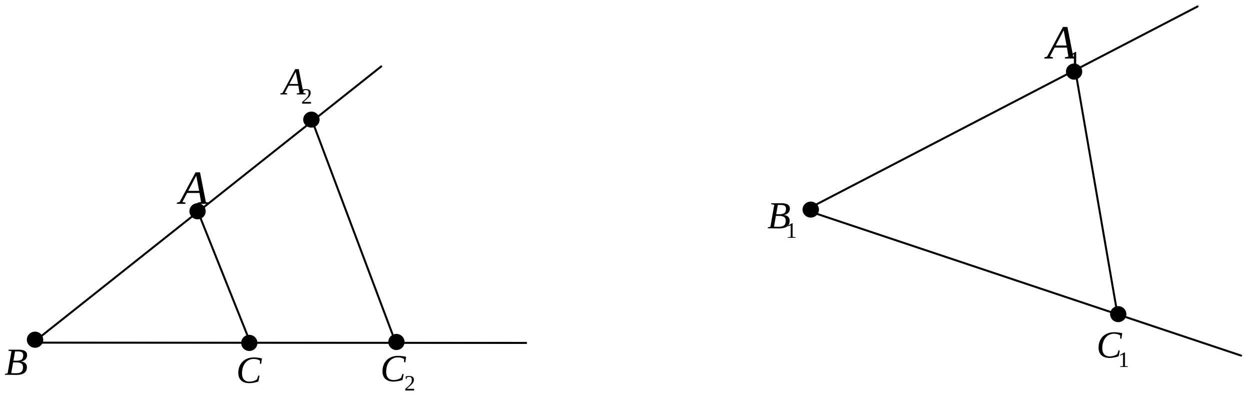

Рис.2.3.24

Р е ш е н и е. Действительно, пусть угол ABC преобразованием подобия с коэффициентом k переводится в угол $A_1B_1C_1$ (рис.2.3.24). Подвергнем угол ABC преобразованию гомотетии относительно его вершины B с коэффициентом гомотетии k. При этом точки A и C перейдут в точки A_2 и C_2. Треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку. Из равенства треугольников следует равенство углов A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$. Значит, углы ABC и $A_1B_1C_1$ равны, что и требовалось доказать.

Две фигуры называются *подобными*, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия. Для обозначения подобия фигур используется специальный значок: ~. Запись $F \sim F'$ читается так: «Фигура F подобна фигуре F'».

Задача 15. Докажите, что если фигура F_1 подобна фигуре F_2, а фигура F_2 подобна фигуре F_3, то фигуры F_1 и F_3 подобны.

Решение. Пусть X_1 и Y_1 – две произвольные точки фигуры F_1. Преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2, переводит эти точки в точки X_2, Y_2, для которых $X_2Y_2 = k_1X_1Y_1$.

Преобразование подобия, переводящее фигуру F_2 в F_3, переводит точки X_2, Y_2 в точки X_3, Y_3, для которых $X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$.

Из равенств

$$X_2Y_2 = k_1X_1Y_1,\ X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$$

следует, что $X_3Y_3 = k_1k_2X_1Y_1$. А это значит, что преобразование фигуры F_1 в F_3, получающееся при последовательном выполнении двух преобразований подобия, есть подобие. Следовательно, фигуры F_1 и F_3 – подобны, что и требовалось доказать.

В записи подобия треугольников: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ – предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т.е. A переходит в A_1, B – в B_1 и C – в C_1.

Из свойств преобразования подобия следует, что *у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны*. В частности, *у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$*

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

ЗАДАЧИ

2.3.39. При гомотетии точка X переходит в точку X', а точка Y – в точку Y'. Как найти центр гомотетии, если точки X, X', Y, Y' не лежат на одной прямой?

2.3.40. При гомотетии точка X переходит в точку X'. Постройте центр гомотетии, если коэффициент гомотетии равен 2.

2.3.41. Начертите треугольник. Постройте гомотетичный ему треугольник, приняв за центр гомотетии одну из его вершин и коэффициент гомотетии равным 2.

2.3.42. Что представляет собой фигура, подобная треугольнику?

2.3.43. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = 30^0$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м. Чему равны угол A_1 и сторона A_1B_1?

2.3.44. Докажите, что фигура, подобная окружности, есть окружность.

2.3.45. Даны угол и внутри его точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.

2.3.46. Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной стороне, а две другие вершины – на двух других сторонах.

2.3.47. Докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах, противолежащих основаниям.

2.3.48. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.

2.3.49. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.

2.3.50. Решите задачу 2.3.49 при условии, $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.

2.3.51. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.

2.3.52. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке A_1, а сторону BC – в точке B_1. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$.

2.3.53. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две – на боковых сторонах. Вычислите сторону квадрата.

2.3.54. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит его сторону AC в отношении $m:n$, считая от вершины C. В каком отношении она делит сторону BC?

2.3.55. В треугольнике ABC проведен отрезок DE, параллельный стороне AC (конец D отрезка лежит на стороне AB, а E – на стороне BC). Найдите AD, если $AB = 16$ см, $AC = 20$ см и $DE = 15$ см.

2.3.56. В задаче 4.56 найдите отношение $AD:BD$, если известно, что $AC:DE = 55:28$.

2.3.57. Найдите длину отрезка DE в задаче 4.56, если 1) $AC = 20$ см, $AB = 17$ см и $BD = 11{,}9$ см; 2) $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм и $AD = 10$ дм.

2.3.58. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Докажите подобие треугольников BCE и DAE.

2.3.59. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как $m:n$.

2.3.60. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, делит одно основание в отношение $m:n$. В каком отношении она делит другое основание?

2.3.61. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Найдите диагональ AC, если основания BC и AD, соответственно, равны 12 м и 27 м.

2.3.62. Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношение $m:n$. В каком отношении делит она вторую боковую сторону?

2.3.63. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите стороны треугольника AED, если $AB=5$ см, $BC=10$ см, $CD=6$ см, $AD=15$ см.

2.3.64. Найдите высоту треугольника AED из задачи 4.64, опущенную на сторону AD, $BC=7$ см, $AD=21$ см и высота трапеции равна 3 см.

2.3.65. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F. Докажите, что прямая EF делит основания трапеции пополам.

2.3.66. У равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и противолежащим углом 36^0 проведена биссектриса AD.

1) Докажите подобие треугольников ABC и CAD.

2) Найдите основание треугольника ABC, если его боковая сторона равна a.

2.3.67. Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны треугольника ABC, прилежащие к углу B, в 2,5 раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащие к углу B_1. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

2.3.68. В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta EDC$.

2.3.69. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Найдите углы треугольника DEF, зная углы треугольника ABC.

2.3.70. Докажите, что биссектрисы треугольника DEF в задаче 2.3.69 лежат на высотах треугольника ABC.

2.3.71. Подобны ли два равносторонних треугольника?

2.3.72. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB=1$ м, $AC=1{,}5$ м, $BC=2$ м;

$A_1B_1=10$ см, $A_1C_1=15$ см, $B_1C_1=20$ см;

2) $AB=1$ м, $AC=2$ м, $BC=1{,}5$ м;

$A_1B_1=8$ дм, $A_1C_1=16$ дм, $B_1C_1=12$ дм;

3) $AB=1$ м, $AC=2$ м, $BC=1{,}25$ м;

$A_1B_1=10$ см, $A_1C_1=20$ см, $B_1C_1=13$ см?

2.3.73. Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

2.3.74. Стороны треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5 м.

2.3.75. Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 1 м. Найдите эти стороны.

2.3.76. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол, равный 40^0, а другого – угол, равный: 1) 50^0; 2) 60^0?

2.3.77. Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.

2.3.78. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

2.3.79. Докажите, что соответствующие высоты подобных треугольников относятся как соответствующие стороны.

2.3.80. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $m:n$. Как относятся проекции катетов на гипотенузу?

2.3.81. Длина тени фабричной трубы равна 35,8 м; в это же время вертикально воткнутый в землю кол высотой 1,9 м дает тень длиной 1,62 м. Найдите высоту трубы.

2.3.82 В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB=c$ и $AC=b$.

2.3.83. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что $AD:BD=AC:BC$.

2.3.84. Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (не равно единице), есть окружность.

2.3.85. Найдите дополнительные плоские углы, зная, что: 1) один из них в 5 раз больше другого; 2) один из них на 100^0 больше другого; 3) разность их равна 20^0.

2.3.86. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30^0, а диаметр окружности 10 см?

2.3.87. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)

2.3.88. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

2.3.89. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

2.3.90. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

2.3.91. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен α? (Два случая.)

2.3.92. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50^0, угол ACD равен 80^0. Найдите угол CAD.

2.3.93. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противолежащих углов равна 180^0.

2.3.94. Докажите, что геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность.

2.3.95. Докажите, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках.

2.3.96. Докажите, что острый угол между хордой окружности и касательной к окружности в конце хорды равен половине угла между радиусами, проведенными к концам хорды.

2.3.97. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

2.3.98. Из точки C окружности проведен перпендикуляр CD к диаметру AB. Докажите, что $CD^2 = AD \cdot BD$.

2.3.99. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки: $AC \cdot BC = CD^2$.

2.4. Аксиома непрерывности

Четвертая группа аксиом у нас будет состоять из одной аксиомы – *аксиомы Дедекинда*.

Аксиома IV. *Если точки прямой разбиты на два непустых класса так, что в одном из двух направлений на прямой каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса, то либо в первом классе существует точка, следующая за всеми остальными точками первого класса, либо во втором классе есть точка, предшествующая всем остальным точкам второго класса*.

Задача 1. Пусть дана бесконечная последовательность точек на прямой A, A_1, A_2, ..., удовлетворяющая условиям:

1. В одном из двух направлений

$$A < A_1 < A_2 < \ldots$$

2.

$$AA_1 = A_1A_2 = \ldots$$

Доказать, что тогда, какова бы ни была точка $B > A$, найдется такое n, что $B < A_n$.

Р е ш е н и е. Допустим, утверждение неверно и, следовательно, при любом n $A_n < B$. Разобьем все точки прямой на два класса следующим образом. Точку X отнесем второму классу, если при любом n $A_n < X$. Остальные точки отнесем первому классу.

Таким образом, в первый класс попадают все точки A_n и каждая точка X, предшествующая хотя бы одной точке A_n $(X < A_n)$, следовательно, каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Очевидно, каждый из классов не пуст: второй класс содержит точку B, а первый – все точки A_n.

Пусть C – точка, существование которой утверждается аксиомой IV. Точка C не совпадает ни с одной точкой A_n, так как в противном случае A_{n+1} была бы во втором классе. Следовательно, при любом n $A_n < C$.

Возьмем на прямой точку D такую, чтобы $D < C$ и $CD = AA_1$. D не совпадает ни с одной точкой A_n, ибо в противном случае $C = A_{n+1}$, что невозможно. Так как D принадлежит первому классу ($D < C$) и не совпадает ни с одной точкой A_n, то существует точка A_n такая, что $D < A_n$. Тем более $D < A_{n+2}$. Так как, кроме того, $A_n < C$ и $A_{n+2} < C$, то отрезок $A_n A_{n+2}$ принадлежит CD, что невозможно $CD < A_n A_{n+2}$.

Отрезок AB, по определению, состоит из точек, лежащих между A и B. Когда говорят о замкнутом отрезке, то к числу его точек относят также его концы A, B.

Задача 2. Пусть дана бесконечная последовательность замкнутых отрезков $A_n B_n$ на прямой, причем каждый следующий отрезок содержится в предыдущем. Пусть, далее, не существует отрезка, который был бы меньше любого из отрезков $A_n B_n$.

Доказать, что тогда существует и притом единственная точка С, принадлежащая всем отрезкам $A_n B_n$.

Р е ш е н и е. Не ограничивая общности, можно считать, что при любом n $A_n < B_n$. Так как при $m < n$ отрезков $A_n B_n$ принадлежит $A_m B_m$ и $A_n < B_n$, а $A_m < B_m$, то $A_n < B_m$ и $A_m < B_n$. Таким образом, при любых m и n $A_n < B_m$.

Разобьем множество точек прямой на два класса. Во второй класс отнесем все точки B_n, а также любую точку X, следующую хотя бы за одной точкой B_n ($B_n < X$). В первый класс отнесем остальные точки. Таким образом, первый класс состоит из точек X, предшествующих всем точкам B_n ($X < B_n$), следовательно, каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Очевидно, каждый из классов не пуст: точки, предшествующие A_1, принадлежат первому классу, а точки, следующие за B_1 – второму классу.

Пусть C – точка, существование которой утверждается аксиомой IV. Покажем, что она принадлежит всем отрезкам A_nB_n. Не существует точки B_n, предшествующей C, так как в противном случае для точек X отрезка B_nC $X < C$, а это точки второго класса.

Если точка C совпадает с A_n, то все точки A_{n+q} $(q > 0)$ совпадают с A_n. В противном случае, так как $A_n < A_{n+q}$, точки отрезка A_nA_{n+q} принадлежали бы второму классу, вместе с тем каждая такая точка предшествует A_{n+q}, что невозможно. Отсюда следует, что если $A_n \equiv C$, то C принадлежит всем отрезкам A_pB_p при $p \geq n$, так как является их общим концом, а первым $n-1$ отрезкам принадлежит по причине включения отрезков оговоренной в задаче.

Аналогично рассматривается случай, когда C совпадает с одной из точек B_n.

Пусть, наконец, точка C не совпадает ни с одной из точек A_n и B_n. Так как каждая точка A_n принадлежит первому классу, а каждая точка B_n второму классу, то $A_n < C < B_n$ при любом n. А это значит, что C принадлежит всем отрезкам A_nB_n.

Докажем единственность точки C. Допустим, существуют две точки C_1 и C_2, принадлежащие всем отрезкам A_nB_n. Тогда и отрезок C_1C_2 принадлежит каждому из отрезков A_nB_n. Пусть C – какая-нибудь точка отрезка C_1C_2. Отрезок CC_1 меньше C_1C_2, а следовательно, меньше любого отрезка A_nB_n, что противоречит условию задачи.

Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность. Пусть O – центр окружности. Тогда

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC,$$

если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и

$$\angle ABC = 180^0 - \frac{1}{2}\angle AOC,$$

если точки B и O лежат по разные стороны от AC.

Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD (обозначение : $\angle(AB,CD)$) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на $n\cdot 180^0$, считаются равными.

Задача 3. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH=\angle OAC$.

Р е ш е н и е. Проведем диаметр AD. $\angle CDA=\angle CBA$, поскольку эти углы опираются на одну дугу. Треугольники CAD и HAB прямоугольные, поэтому $\angle BAH=\angle DAC$.

Задача 4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO – биссектриса прямого угла C.

Р е ш е н и е. $\angle BOA=90^0$, поэтому точки O и C лежат на окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре. Треугольник AOB – равнобедренный, следовательно дуга BO равна дуге OA и $\angle BCO=\angle OCA$, т.е. CO – биссектриса.

Задача 5. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD, соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую – в точках B и D. Докажите, что $AC\,||\,BD$.

Р е ш е н и е. Чтобы нам не пришлось разбирать различные варианты расположения точек, воспользуемся свойствами ориентированных углов.

$$\angle(AC,CK)=\angle(AM,MK)=\angle(BM,MK)=\angle(BD,DK)=\angle(BD,CK),$$

т.е. $AC\,||\,BD$.

Задача 6. n диаметров делят окружность на разные дуги. Докажите, что основания перпендикуляров опущенных из произвольной точки M внутри окружности на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

Р е ш е н и е. Ясно, что основания перпендикуляров, опущенных из точки M на диаметры, лежат на окружности S, построенной на отрезке OM как на диаметре (O – центр исходной окружности). Точки пересечения данных диаметров с окружностью S, отличные от точки O, делят ее на n дуг. Поскольку на все дуги, не содержащие точку O, опираются углы $180^0/n$, угловые величины этих дуг равны $360^0/n$. Поэтому угловая величина дуги, на которой лежит точка O, равна $360^0-(n-1)\cdot 360^0/n=360^0/n$. Следовательно, основания перпендикуляров делят окружность S на n равных дуг, т.е. являются вершинами правильного n-угольника.

ЗАДАЧИ

2.4.1. а) Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A.

2.4.2. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP=\angle C_1B_1P$.

2.4.3. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника кратные $180^0/n$.

2.4.4. Центр описанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB. Найдите углы треугольника ABC.

2.4.5. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB правильного треугольника ABC. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C имеют общую точку.

2.4.6. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M – середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ – вписанный четырехугольник.

2.4.7. По стороне правильного треугольника катится окружность радиуса, равного его высоты. Докажите, что угловая величина дуги, высекаемой на окружности сторонами треугольника, всегда равна 60^0.

2.4.8. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. A_1, B_1, C_1, D_1 – середины дуг AB, BC, CD и DA, соответственно. Докажите, что прямые A_1C_1 и B_1D_1 – перпендикулярны.

2.4.9. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.

а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами углов треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

в) В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T_1 и T_2, диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

2.4.10. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B, S_2 – в точке C. В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A.

2.4.11. Две окружности касаются в точке A. К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках C и D. Докажите, что $\angle CAD = 90^0$.

2.4.12. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB – хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MC – биссектриса угла AMB.

2.4.13. AB и CD – диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

2.4.14. В окружность вписаны две равнобедренные трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна по длине диагонали другой трапеции.

2.4.15. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?

2.4.16. В треугольнике ABC угол B равен 60^0, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

2.4.17. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.

2.4.18. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные вокруг этих треугольников, имеют одну общую точку.

2.4.19. Диагонали AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ разделены точками M и N так, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Найдите λ, если известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

2.4.20. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC опущен на гипотенузу AB перпендикуляр MN. Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

2.4.21. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P – точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что $\angle BPC = 90^0$.

2.4.22. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P. Опустив из нее перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны, получаем треугольник $A_1B_1C_1$. Проделав для него ту же операцию, получаем треугольник $A_2B_2C_2$, а затем – треугольник $A_3B_3C_3$. Докажите, что треугольник $A_3B_3C_3$ подобен треугольнику ABC.

2.4.23. Докажите, что если проекции точки пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ на стороны соединить последовательно четырьмя отрезками, то получится описанный четырехугольник.

2.4.24. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M так, что $ABMD$ – параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

2.4.25. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки описанной окружности на стороны треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

2.4.26. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то точка пересечения биссектрис углов A и B лежит на стороне CD.

2.4.27. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда проекции их точки пересечения на все четыре стороны лежат на одной окружности (предполагается, что проекции попадают на стороны).

2.4.28. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этой вершины, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^0$.

2.4.29. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины C, делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

2.4.30. Докажите, что в любом треугольнике ABC биссектриса AE лежит между медианой AM и высотой AH.

2.4.31. Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной вершины.

2.4.32. На сторонах AC и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Докажите, что прямые A_1B, A_2B_2 и AB_1 пересекаются в одной точке.

2.4.33. На сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, A_1BC и

AB_1C. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и образуют углы, равные 60^0.

2.4.34. На сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные треугольники ABC_1, A_1BC и AB_1C так, что $\angle CA_1B = \angle CAB_1 = \angle C_1AB$ и $\angle AB_1C = \angle A_1BC = \angle ABC_1$.

а) Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников ABC_1, AB_1C и A_1BC, пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что в той же точке пересекаются прямые AA_1, BB_1, CC_1.

2.4.35. Три равные окружности имеют общую точку H, а точки их пересечения, отличные от H, образуют остроугольный треугольник ABC. Докажите, что H – точка пересечения высот треугольника ABC.

2.4.36. Докажите, что точки пересечения трех окружностей одного радиуса, проходящих через одну точку, лежат на окружности того же радиуса.

2.4.37. Три окружности одинакового радиуса попарно пересекаются: первая со второй в точках A и A_1, вторая с третьей в точках B и B_1, третья с первой в точках C и C_1. При этом A, B, C – внешние точки; A_1, B_1, C_1 – внутренние точки (рис.2.4.1). Докажите, что сумма угловых величин дуг AB_1, BC_1 и CA_1 равна 180^0.

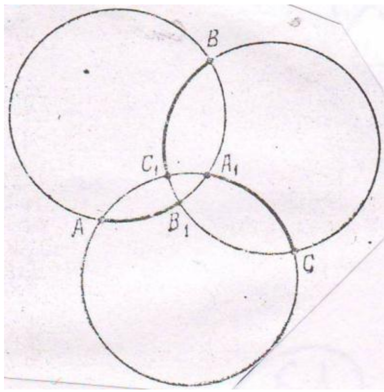

Рис.2.4.1

2.4.38. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, O – центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle C - \angle B|$.

2.4.39. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, продолжения сторон которого пересекаются в точках E и K. Докажите, что четыре точки пересечения биссектрис углов AED и AKB со сторонами четырехугольника $ABCD$ являются вершинами ромба.

2.4.40. Точки K и P симметричны основанию H высоты BH треугольника ABC относительно сторон AB и BC. Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC (или их продолжениями) являются основаниями высот треугольника.

2.4.41. На продолжении диаметра EF данной окружности фиксирована точка C. Точки A и A_1 расположены на окружности по разные стороны от EF так, что $AC \neq A_1C$, но $\angle ACE = \angle A_1CE$. Докажите, что положение точки пересечения прямых EF и AA_1 не зависит от положения точек A и A_1.

2.4.42. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, причем касательные к S_1 в этих точках являются радиусами S_2. На внутренней дуге S_1 взята точка C и соединена с точками A и B прямыми. Докажите, что вторые точки пересечения этих прямых с S_2 являются концами одного диаметра.

2.4.43. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон (если эти стороны не параллельны) вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (теорема Паскаля).

2.4.44. Из центра O окружности опущен перпендикуляр OA на прямую l. На прямой l взяты точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках P и Q, а вторая – в точках M и N. Прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S. Докажите, что $AR = AS$.

2.5. Аксиома параллельности

Пятая группа аксиом состоит из одной аксиомы – аксиомы параллельности.

Аксиома V. *Через данную точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную.*

Эта прямая называется *параллельной данной*.

Аксиомой V завершается система аксиом евклидовой геометрии.

Задача 1. Докажите, что каждая прямая в пересечении с двумя параллельными образует равные соответственные углы.

Р е ш е н и е. Пусть a и b – две параллельные прямые, c – прямая, их пересекающая, и A, B – точки пересечения. Через точку B проходит прямая b', не пересекающая a так, что соответственные углы пересечения прямых a и b' с прямой c равны. А по аксиоме V прямая b' совпадает с b.

Задача 2. Докажите, что в каждом треугольнике сумма углов равна двум прямым.

Р е ш е н и е. Пусть ABC – данный треугольник. Проведем через C прямую, параллельную AB. Две полупрямые, на которые разбивает эту прямую точка C, и полупрямые CA и CB образуют три угла. Один из них – угол C треугольника, а два других в силу задачи 1 равны углам треугольника A и B. Отсюда следует, что сумма углов треугольника ABC равна двум прямым.

Четырехугольник называется параллелограммом, если его противоположные стороны параллельны.

Задача 3. Докажите, что в каждом параллелограмме противоположные углы равны, сумма смежных равна двум прямым, противоположные стороны равны.

Р е ш е н и е. Первые два утверждения непосредственно вытекают из задачи 1 и свойств смежных и вертикальных углов. Третье утверждение следует из равенства треугольников, на которые параллелограмм разбивается его диагональю.

Задача 4. Пусть a, b, c – три попарно пересекающиеся прямые. Установим соответствие точек прямых a и b путем проектирования прямыми, параллельными c. Докажите, что тогда существующие отрезки прямых a, b – пропорциональны.

Р е ш е н и е. Из аксиомы V следует, что каждая прямая, параллельная c, пересекает a и b, так что указанное соответствие точек действительно возможно. Легко видеть, что равным отрезкам прямой a соответствуют равные отрезки прямой b.

Сопоставим каждому отрезку δ_a прямой a число $\nu(\delta_a)$, равное длине $\mu(\delta_b)$ соответствующего ему отрезка прямой b. Функция отрезка ν отличается от длины только некоторым множителем. Таким образом,

$$\mu(\delta_a) = k\mu(\delta_b).$$

1. Для элементов треугольника используются следующие обозначения:

a, b, c – длины сторон BC, CA, AB;

α, β, γ – величины углов при вершинах A, B, C;

m_a, m_b, m_c – длины медиан, проведенных из вершины A, B, C;

h_a, h_b, h_c – длины высот, опущенных из вершин A, B, C;

l_a, l_b, l_c – длины биссектрис, проведенных из вершины A, B, C;

r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей.

2. Если A, B, C – произвольные точки, то $AB \le AC + CB$, причем равенство достигается, только если точка C лежит на отрезке AB (неравенство треугольника).

3. Медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон: $m_a \le \frac{1}{2}(b+c)$.

4. Если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего.

5. Сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы длин любой пары его противоположных сторон.

6. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

7. Длина отрезка, лежащего внутри выпуклого многоугольника, не превосходит либо наибольшей стороны, либо наибольшей диагонали.

8. При решении некоторых задач нужно знать разные алгебраические неравенства. Они требуются только для решения достаточно сложных задач, а для решения простых задач понадобится лишь неравенство $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$ и следствия из него.

Задача 5. Докажите, что в любом треугольнике

$$\frac{a+b-c}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}.$$

Р е ш е н и е. Пусть C_1 – середина стороны AB. Тогда $CC_1 + C_1A > CA$ и $BC_1 + C_1C > BC$. Поэтому $2CC_1 + BA > CA + BC$, т.е. $m_c > \frac{a+b-c}{2}$.

Пусть точка C' симметрична C относительно точки C_1. Тогда $CC_1 = C_1C'$ и $BC' = CA$. Поэтому $2m_c = CC' < CB + BC' = CB + CA$, т.е. $m_c < \frac{a+b}{2}$.

Задача 6. Докажите, что в любом треугольнике сумма длин медиан больше ¾ периметра, но меньше периметра.

Р е ш е н и е. Из предыдущей задачи следует, что $m_a < \frac{b+c}{2}$, $m_b < \frac{a+c}{2}$, $m_c < \frac{a+b}{2}$, поэтому сумма длин медиан меньше периметра.

Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $BO + OA > BA$, $AO + OC > AC$ и $CO + OB > CB$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $AO = \frac{2m_a}{3}$, $BO = \frac{2m_b}{3}$, $CO = \frac{2m_c}{3}$, получаем $m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a+b+c)$.

Задача 7. Даны окружность радиуса 1 и n точек $A_1, ..., A_n$ на плоскости. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, чтобы $MA_1 + ... + MA_n \ge n$.

Р е ш е н и е. Пусть M_1 и M_2 – диаметрально противоположные точки окружности. Тогда $M_1A_k + M_2A_k \ge M_1M_2 = 2$. Складывая все эти неравенства при $k = 1, ..., n$, получаем $(M_1A_1 + ... + M_1A_n) + (M_2A_1 + ... + M_2A_n) \ge 2n$. Поэтому либо $M_1A_1 + ... + M_1A_n \ge n$ и тогда положим $M = M_1$, либо $M_2A_1 + ... + M_2A_n \ge n$ и тогда $M = M_2$.

Задача 8. Точки $A_1, ..., A_n$ не лежат на одной прямой. Пусть две различные точки P и Q обладают тем свойством, что

$A_1P+...+A_nP=A_1Q+...+A_nQ=s$. *Докажите, что тогда* $A_1K+...+A_nK<s$ *для некоторой точки* K.

Р е ш е н и е. В качестве K можно взять середину отрезка PQ. В самом деле, тогда $A_iK\le\frac{1}{2}(A_iP+A_iQ)$ (см. задачу 5), причем хотя бы одно неравенство строгое, так как точки A_i не могут все лежать на прямой PQ.

Задача 9. На столе лежит 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелков окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Р е ш е н и е. Пусть A_i и B_i – положения конца минутных стрелок часов с номером i в моменты t и $t+30$ мин, O_i – центр i-х часов, а O – центр стола. Тогда $OO_i\le\frac{1}{2}(OA_i+OB_i)$ для любого i (см. задачу 5). Ясно, что в некоторый момент точки A_i и B_i не лежат на прямой O_iO, т.е. по крайней мере одно из n неравенств становится строгим. Тогда либо $OO_1+...+OO_n<OA_1+...+OA_n$, либо $OO_1+...+OO_n<OB_1+...+OB_n$.

ЗАДАЧИ

2.5.1. Докажите, что площадь треугольника ABC не превосходит $\frac{1}{2}AB\cdot BC$.

2.5.2 Докажите, что если $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$ и a, b, c – положительные числа, то существует треугольник, длины сторон которого равны a, b, c.

2.5.3. Докажите, что $ABC>90^0$ тогда и только тогда, когда точка B лежит внутри окружности с диаметром AC.

2.5.4. Докажите, что внешний угол треугольника больше любого несмежного с ним внутреннего угла.

2.5.5. Докажите, что любая диагональ четырехугольника меньше половины его периметра.

2.5.6. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит $\frac{1}{2}(AB\cdot BC+AD\cdot DC)$.

2.5.7. Радиусы двух окружностей равны R и r, а расстояние между их центрами равно d. Докажите, что эти окружности пересекаются тогда и только тогда, когда $d < R+r, d > |R-r|$.

2.5.8. Внутри треугольника ABC периметра P взята точка O. Докажите, что $\frac{P}{2} < AO+BO+CO < P$.

2.5.9. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась точка E, обладающая тем свойством, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. тогда $BC = \frac{AD}{2}$.

2.5.10. Докажите, что числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника тогда и только тогда, когда $a = y+z, b = x+z, c = x+y$, где x, y, z – положительные числа.

2.5.11. Пусть a, b, c – длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

2.5.12. Пусть a, b, c – положительные числа, причем при любом натуральном n из отрезков длины a^n, b^n, c^n можно составить треугольник. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

2.5.13. Пусть a, b, c – длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc > a^3+b^3+c^3$.

2.5.14. «Коэффициентом неравнобедренности» треугольника со сторонами a, b, c $(a \le b \le c)$ назовем наименьшее из чисел b/a и c/b. Какие значения может принимать «коэффициент неравнобедренности» k?

2.5.15. Пять отрезков таковы, что из любых трех из них можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

2.5.16. Докажите, что если a, b, c – длины сторон произвольного треугольника, то $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \le abc$.

2.5.17. Пусть a, b, c – длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \ge 0$.

2.5.18. Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник. Докажите, что $AB+CD < AC+BD$.

2.5.19. Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник, причем $AB+BD\le AC+CD$. Докажите, что $AB<AC$.

2.5.20. Выпуклый четырехугольник расположен внутри другого выпуклого четырехугольника. Может ли сумма длин диагоналей внешнего четырехугольника быть в два раза меньше суммы длин диагоналей внутреннего? А в 1,99 раза?

2.5.21. На плоскости даны $n>2$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что среди замкнутых ломаных, проходящих через данные точки, наименьшую длину имеет несамопересекающаяся ломаная.

2.5.22. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

2.5.23. На плоскости дано n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

2.5.24. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

2.5.25. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

2.5.26. Могут ли длины сторон разностороннего треугольника быть последовательными членами геометрической прогрессии? Что можно сказать о знаменателе такой прогрессии?

2.5.27. Докажите, что если длины сторон треугольника связаны неравенством $a^2+b^2>5c^2$, то c – длина наименьшей стороны.

2.5.28. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

2.5.29. Центры трех непересекающихся кругов расположены на одной прямой. Докажите, что если окружность касается всех этих кругов, то ее радиус больше радиуса одного из них.

2.5.30. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что $BA_1=\lambda BC$, $CB_1=\lambda CA$, $AC_1=\lambda AB$, причем $\frac{1}{2}<\lambda<1$.

Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр p треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами $(2\lambda-1)P<p<\lambda P$.

2.5.31. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали так, что из них можно составить треугольник.

2.5.32. Дан треугольник площадью 1 со сторонами $a\le b\le c$. Докажите, что $b\ge\sqrt{2}$.

2.5.33. Пусть E, F, G, H – середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$S_{ABCD}\le EG\cdot HF\le\frac{1}{4}(AB+CD)\cdot(AD+BC)$$

2.5.34. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

2.5.35. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $4S\le AM\cdot BC+BM\cdot AC+CM\cdot AB$, где S – площадь треугольника ABC.

2.5.36. В окружность радиуса R вписан многоугольник площадью S, содержащий центр окружности, и на его сторонах выбрано по точке. Докажите, что периметр выпуклого многоугольника с вершинами в выбранных точках не меньше ${}^{2S}\!/_{R}$.

2.5.37. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ площадью S, взята точка O, причем $AO^2+BO^2+CO^2+DO^2=2S$. Докажите, что тогда $ABCD$ – квадрат и O – его центр.

2.5.38. Существует ли треугольник, у которого две высоты больше 1 м, а площадь меньше 1 см^2?

2.5.39. Длины сторон треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит ${}^{\sqrt{3}}\!/_{4}$.

2.5.40. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AM=CN$ и $AN=BM$. Докажите, что площадь четырехугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN.

2.5.41. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, соответственно. Докажите, что площадь одного из треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C не превосходит четверти площади треугольника ABC.

2.5.42. Площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S, S_2, S_3 соответственно, причем $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \geq 4\sqrt{S_1S_2}$.

2.5.43. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник с площадью S. Угол между прямыми AB и CD равен α, угол между AD и BC равен β. Докажите, что

$$AB \cdot CD \sin\alpha + AD \cdot BC \sin\beta \leq 2S \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

2.5.44. Все стороны выпуклого многоугольника отодвигаются во внешнюю сторону на расстояние h. Докажите, что его площадь при этом увеличится больше, чем на $Ph + \pi h^2$, где P – периметр.

2.5.45. Квадрат разрезан на прямоугольники. Докажите, что сумма площадей кругов, описанных около всех этих прямоугольников, не меньше площади круга, описанного около исходного квадрата.

2.5.46. Докажите, что если все биссектрисы треугольника меньше 1, то его площадь меньше а) 1; б) $1/\sqrt{3}$.

2.5.47. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

2.5.48. Два равных прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в 8 точках. Докажите, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

2.5.49. а) Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике площади S найдется диагональ, отсекающая от него треугольник площади, не больше $S/6$.

б) Докажите, что в любом выпуклом восьмиугольнике площади S найдется диагональ, отсекающая от него треугольник площади, не больше $S/8$.

2.5.50. В квадрате со стороной 1 расположено n точек, причем никакие три их них не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не превосходит $\dfrac{1}{n-2}$.

2.5.51. Многоугольник площади B вписан в окружность площади A и описан вокруг окружности площади C. Докажите, что $2B \le A + C$.

2.5.52. В круг радиуса 1 помещено два треугольника, площадь каждого из которых больше 1. Докажите, что эти треугольники пересекаются.

2.5.53. Докажите, что если два противоположных угла четырехугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче другой диагонали.

2.5.54. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, причем $\angle A + \angle C < 180^0$. Докажите, что тогда объединение описанных кругов треугольников ABD и BCD содержится в объединении описанных кругов треугольников ACD и ABC.

2.5.55. Семиугольник $A_1A_2...A_7$ вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри него, то сумма углов при вершинах A_1, A_3, A_5 меньше 450^0.

2.5.56. Внутри правильного многоугольника $A_1...A_n$ взята точка O. Докажите, что по крайней мере один из углов A_iOA_j удовлетворяет неравенствам $\pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \le \angle A_iOA_j \le \pi$.

2.5.57. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. В каких пределах может изменяться величина угла A?

2.5.58. Внутри квадрата со стороной 1 расположена несамопересекающаяся ломаная длины 1000. Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая эту ломаную по крайней мере в 500 точках.

2.5.59. В квадрате со стороной 1 расположена ломаная длиной L. Известно, что каждая точка квадрата удалена от некоторой точки этой ломаной меньше чем на ε. Докажите, что тогда $L \ge \dfrac{1}{2\varepsilon} - \dfrac{\pi}{2}\varepsilon$.

2.5.60. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая все эти точки, длина которой не превосходит: а) $2n+1$; б) $2n$.

2.5.61. Внутри квадрата со стороной 100 расположена ломаная длиной L, обладающая тем свойством, что любая точка квадрата удалена от L не больше, чем на 0,5. Докажите, что на L есть две точки, расстояние между которыми не больше 1, а расстояние по L между ними не меньше 198.

2.6. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

2.6.1. Докажите, что из точки A, лежащей вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности, причем длины этих касательных (т.е. расстояния от A до точек касания) равны.

2.6.2. а) Через точку A проведены две прямые. Первая прямая пересекает окружность в точках B_1 и C_1, вторая – в точках B_2 и C_2. Докажите, что $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$. (Точка A может лежать как внутри окружности, так и вне ее.)

б) Через точку A, расположенную вне окружности, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Докажите, что квадрат касательной, проведенной из точки A к окружности, равен $AB \cdot AC$.

2.6.3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, но не на отрезке AB. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

2.6.4. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом (т.е. ни одна из них не лежит внутри другой). Найдите длину общей касательной к этим окружностям.

2.6.5. Пусть a и b – длины катетов прямоугольного треугольника, c – длина его гипотенузы.

а) Докажите, что радиус вписанной окружности этого треугольника равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

б) Докажите, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

2.6.6. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B – точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая отрезки PA и PB в точках X и Y. Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

2.6.7. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол.

а) К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная. Обозначим точки пересечения этой касательной со сторонами угла через A_1 и A_2, а точки касания – через B_1 и B_2. Докажите, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

б) Через две точки касания окружностей со сторонами угла, лежащие на разных сторонах этого угла и на разных окружностях, проведена прямая. Докажите, что эта прямая высекает на окружностях хорды равной длины.

2.6.8. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке A_1 и S_2 в точке A_2. Докажите, что прямая параллельна прямой O_2A_2.

2.6.9. Три окружности S_1, S_2 и S_3 попарно касаются друг друга в трех различных точках. Докажите, что прямые, соединяющие точку касания S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами ее диаметра.

2.6.10. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O (рис.2.6.1). Найдите периметр треугольника OO_1O_2.

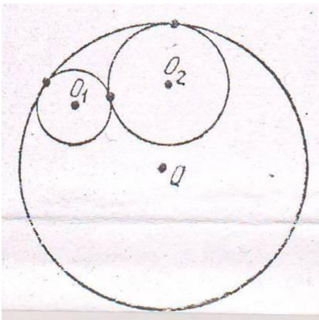

Рис.2.6.1

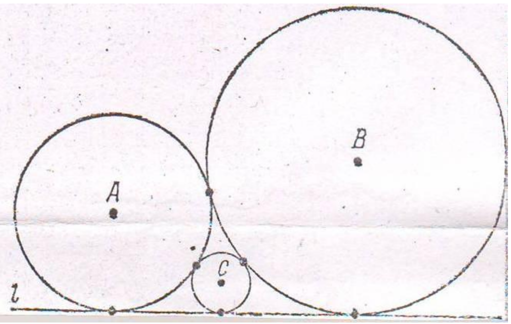

Рис.2.6.2

2.6.11. Три окружности с центрами A, B, C, касающиеся друг друга и прямой l, расположены так, как показано на рис.2.6.2. Обозначим радиусы окружностей с центрами A, B, C через a, b, c, соответственно. Докажите, что $\dfrac{1}{\sqrt{c}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

2.6.12. Две окружности имеют радиусы R_1 и R_2, а расстояние между их центрами равно d. Докажите, что эти окружности ортогональны тогда и только тогда, когда $d^2 = R_1^2 + R_2^2$.

2.6.13. Точки A, B, C, D – вершины выпуклого четырехугольника. S_A – окружность, проходящая через точки B, C, D; S_B – через A, C, D; S_C – через A, B, D; S_D – через A, B, C. Докажите, что окружности S_A и S_C пересекаются в точке B под тем же углом, что и окружности S_B и S_D в точке A.

2.6.14. На плоскости даны окружность S и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

Эта величина, взятая со знаком «плюс» для точки P вне окружности и со знаком «минус» для точки P внутри окружности, называется *степенью точки P относительно окружности S*.

2.6.15. Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности S, ее степень относительно S равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.

2.6.16. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2, является прямая.

Эта прямая называется *радикальной осью окружностей S_1 и S_2*.

2.6.17. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

2.6.18. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

Эта точка называется *радикальным центром трех окружностей*.

2.6.19. а) На плоскости даны три попарно пересекающихся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

б) На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 проходят через точку пересечения высот треугольника ABC.

2.6.20. На стороне BC треугольника ABC взята точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2.6.21. На плоскости даны две непересекающиеся окружности. Проведем к ним одну общую внешнюю касательную и одну внутреннюю. Точки касания с первой окружностью обозначим через A и B, со второй – через C и D. Докажите, что точка пересечения прямых AB и CD принадлежит прямой, соединяющей центры окружностей.

1. *Симметрией относительно точки* A называется преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что A – середина отрезка XX'. Другие названия этого преобразования – *центральная симметрия с центром* A или просто *симметрия с центром* A.

Заметим, что симметрия с центром A представляет собой частный случай двух других преобразований – она является поворотом на 180^0 с центром A, а также гомотетией с центром A и с коэффициентом – 1.

2. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно точки A, то A называется *центром симметрии этой фигуры*.

3. Далее используются следующие обозначения для преобразований:

S_A – симметрия с центром A;

T_a – перенос на вектор a.

4. Композицию симметрий относительно точек A и B мы будем обозначать через $S_B \circ S_A$; при этом сначала выполняется симметрия относительно точки A, а затем – относительно точки B. (Кажущаяся неестественность такой последовательности операций оправдывается тождеством

$$(S_B \circ S_A)(X) = S_B(S_A(X))).$$

Композиции любых отображений обладают свойством ассоциативности: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$. Поэтому порядок, в каком берется композиция, несуществен, и можно просто писать $F \circ G \circ H$.

5. Композиции двух центральных симметрий или симметрии и переноса вычисляются по следующим формулам

а) $S_B \circ S_A = T_{2\overline{AB}}$;

б) $T_a \circ S_A = S_B$ и $S_B \circ T_a = S_A$, где $a = 2\overrightarrow{AB}$.

2.6.22. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

2.6.23. Четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

2.6.24. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что этот шестиугольник имеет центр симметрии.

2.6.25. Даны параллелограмм $ABCD$ и некоторая точка M. Через точки A, B, C, D проводятся прямые, параллельные прямым MC, MD, MA, MB, соответственно. Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, симметричной точке M относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма.

2.6.26. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, проведенными параллельно сторонам, равны.

2.6.27. Докажите, что если в треугольнике медиана и биссектриса совпадают, то треугольник равнобедренный.

2.6.28. Двое игроков поочередно выкладывают на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый игрок всегда может выиграть.

2.6.29. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм. Докажите, что центры этих двух параллелограммов совпадают.

2.6.30. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, соответственно. Перпендикуляры к сторонам треугольника, проведенные через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведенные через A_2, B_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

2.6.31. В треугольнике ABC проведены медианы AF и CE. Докажите, что если $\angle BAF = \angle BCE = 30^0$, то треугольник ABC правильный.

2.6.32. Даны выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка O внутри него. Докажите, что через точку O нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

2.6.33. а) Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

б) Докажите, что композиция параллельного переноса и центральной симметрии (в обоих порядках) является центральной симметрией.

2.6.34. Пусть точка A_1 симметрична некоторой точке A плоскости относительно заданной точки O_1; точка A_2 симметрична A_1 относительно другой точки O_2; A_3 A_2 относительно O_3; A_4 симметрична A_3 относительно O_1; A_5 симметрична A_4 относительно O_2; A_6 симметрична A_5 относительно O_3. Докажите, что A_6 совпадает с A.

2.6.35. а) Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

б) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

в) Пусть M – конечное множество точек на плоскости. Точку O назовем «почти центром симметрии» множества M, если из M можно выбросить одну точку так, чтобы точка O была центром симметрии оставшегося множества (в обычном смысле). Сколько «почти центров симметрии» может иметь M?

2.6.36. Найдите все точки внутри остроугольного треугольника такие, что точки, симметричные им относительно середин сторон треугольника, лежат на описанной около него окружности.

2.6.37. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

2.6.38. Через данную точку A проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения ее с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.

2.6.39. Даны угол ABC и точка D внутри него. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке D.

2.6.40. Даны угол и внутри него точки A и B. Постройте параллелограмм, для которого точки A и B – противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

2.6.41. Даны четыре попарно непараллельные прямые и точка O, не лежащая на этих прямых. Постройте параллелограмм с центром O и вершинами, лежащими на данных прямых, – по одной на каждой.

2.6.42. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности и точка J на хорде CD. Постройте на окружности точку X так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, делящийся точкой J пополам.

2.6.43. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую l так, чтобы разность длин хорд, высекаемых на l окружностями S_1 и S_2, имела заданную величину a.

2.6.44. Даны $m=2n+1$ точек – середины сторон m-угольника. Постройте его вершины.

1. *Гомотетией* называется преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X', обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'}=k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точка O называется *центром гомотетии*, а число k – *коэффициентом гомотетии*. Гомотетию с центром O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k.

2. Две фигуры называются гомотетичными, если одна из них переходит в другую при некоторой гомотетии.

3. Поворотной гомотетией называется композиция гомотетии и поворота, имеющих общий центр. Порядок, в каком берется композиция, безразличен, поскольку $R_O^{\varphi}\circ H_O^k=H_O^k\circ R_O^{\varphi}$.

Коэффициент поворотной гомотетии можно считать положительным, так как $R_O^{180^0}\circ H_O^k=H_O^{-k}$

4. Композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2\neq 1$, является гомотетией с коэффициентам k_1k_2, причем ее центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий.

5. Центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок CD, является точка пересечения описанных окружностей

треугольников ACP и BDP, где P – точка пересечения прямых AB и CD.

2.6.45. Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.

2.6.46. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B, параллельны.

2.6.47. Две окружности касаются в точке K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую – в точках C и D. Докажите, что $AB \| CD$.

2.6.48. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

2.6.49. На плоскости даны точки A, B и прямая l. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC, если точка C движется по прямой l?

2.6.50. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, причем эта точка H лежит на одной прямой с точкой пересечения медиан M и центром описанной окружности треугольника O (точнее, M лежит на отрезке OH и делит его в отношении $OM : MH = 1 : 2$).

2.6.51. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

2.6.52. Окружность S касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K, а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина отрезка PK является центром вписанной в треугольник ABC окружности.

2.6.53. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

2.6.54. Докажите, что в любом треугольнике $R \geq 2r$ (R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей), причем равенство достигается только для равностороннего треугольника.

2.6.55. В треугольнике ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины лежат на боковых сторонах треугольника. Докажите, что сторона квадрата меньше $2r$, но больше $\sqrt{2}r$, где r – радиус вписанной окружности треугольника ABC.

2.6.56. Докажите, что каждый выпуклый многоугольник Ф содержит два непересекающихся многоугольника Φ_1 и Φ_2, подобных Ф с коэффициентом $1/2$.

2.6.57. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

2.6.58. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC.

2.6.59. В окружности проведена хорда AB, стягивающая дугу величиной 120^0. Можно ли провести через середину этой хорды другую хорду, делящуюся точкой пересечения хорд в отношение 1:4?

2.6.60. Две окружности касаются в точке P. Через точку P проведены две секущие, пересекающие первую окружность в точках A_1 и B_1, вторую окружность – в точках A_2 и B_2. Докажите, что треугольник PA_1B_1 подобен треугольнику PA_2B_2.

2.6.61. Внутри окружности S даны две точки A и B. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки A, B и целиком лежащая внутри окружности S.

2.6.62. На отрезке между центрами двух касающихся внешним образом окружностей, как на диаметре, поострена окружность. Докажите, что все три окружности касаются одной прямой.

2.6.63. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM – ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK = DC$.

б) В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

2.6.64. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, CDA, BCD, DAB лежат на одной окружности.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В.Погорелов. Основания геометрии. М., Наука, 1968.
2. А.В.Погорелов. Геометрия. Учебник 7-11 классов М., Просвещение, 2002.
3. В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии, ч. I, II, М., Наука, 1986.
4. В.В.Прасолов, И.Ф.Шарыгин. Задачи по стереометрии, М., Наука, 1989.
5. Н.В.Ефимов. Высшая геометрия. М., Наука, 1978.

Машрабжон Шахабутдинович Маматов
Ашур Махмадалиевич Байтураев

Сборник задач
по основаниям геометрии

(учебное пособие)

Редактор М.А.Хакимов

Подписано в печать 05.07.2018г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Учет.изд. листов 7,5. Усл.печат.лист. 8,25. Тираж 100 экз. Цена договорная. Заказ №

Издательство «Университет» Ташкент 100174.
ВУЗ-городок. НУУз.им. М.Улугбека. Административное здание.

Отпечатано в типографии НУУз им. М.Улугбека.