

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ХУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УРУНБАЕВ ЖАСУР ЭРКИНОВИЧ

**ИККИ КОМПОНЕНТЛИ МУҲИТЛАРДАГИ КРОСС
ДИФФУЗИЯ ЖАРАЁНЛАРИНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ**

**05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)
по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD)
on physical and mathematical sciences

Урунбаев Жасур Эркинович

Икки компонентли мухитлардаги кросс диффузия жараёнларини сонли
моделлаштириш..... 3

Урунбаев Жасур Эркинович

Численное моделирование процесса кросс диффузии в двухкомпонентных
средах..... 21

Urunbaev Jasur Erkinovich

Numerical modeling of the cross diffusion process in two-component media..... 39

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works 42

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ХУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УРУНБАЕВ ЖАСУР ЭРКИНОВИЧ

**ИККИ КОМПОНЕНТЛИ МУҲИТЛАРДАГИ КРОСС
ДИФФУЗИЯ ЖАРАЁНЛАРИНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ**

**05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2021

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий Аттестация комиссиясида B2019.4.PhD/FM452 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) ва «Ziynet» Ахборот таълим порталида (www.ziynet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	Раҳмонов Зафар Равшанович физика-математика фанлари доктори
Расмий оппонентлар:	Нормуродов Чори Бегалиевич физика-математика фанлари доктори, профессор Маматов Алишер Зулунович техника фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Қорақалпоқ Давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашининг 2021 йил «___» _____ соат ___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2021 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2021 йил «___» _____ даги № ___-рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

А.М. Полатов

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., профессор

Б.Ф. Абдурахимов

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида диффузион жараёнлар ва уларнинг системаларига бағишланган тадқиқотлар долзарб ва зарур ҳисобланиб, биология, кимё, физика, технология, биофизика ва илм-фаннинг бошқа қатор соҳаларида кенг татбиқ этилади. Диффузия жараёнларининг математик моделлари хусусий ҳосилали ночизикли дифференциал тенгламалар орқали ифодаланиб, сейсмология, ночизикли тўлқинлар назарияси, эпидемия тарқалиши, биологик популяция, таксис тўлқинлар, фильтрация ва бошқа шу каби масалаларнинг тадқиқот объекти ҳисобланади. Шу сабабли икки компонентали муҳитлардаги диффузия жараёнларининг ночизикли математик моделларини тадқиқ этиш, самарали сонли ечиш схемалари ва алгоритмларни қуриш ҳамда уларнинг дастурий таъминотини яратиш амалий математиканинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда ночизикли чегаравий шартлар билан боғланган параболик типдаги тенгламалар системаси билан тавсифланувчи кросс-диффузиянинг математик моделлари кенг тадқиқ этилмоқда. Кросс-диффузия жараёнларининг математик моделлари биофизикада морфогенезларнинг биофизик механизмларини тавсифлашда, биологик популяция, иссиқлик ўтказувчанлик ва фильтрация жараёнларини моделларини қуришда, тектоник плиталарнинг ўзаро таъсирини тадқиқ этишда кенг қўлланилади. Шу сабабли ночизикли кросс-диффузия системаларини сонли ва аналитик ечиш усулларини ишлаб чиқиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадқиқига эга бўлган биофизик, химик, биологик, сейсмологик жараёнларни математик моделлаштириш ҳамда ночизикли математик моделларни сонли-аналитик ечиш усулларини ишлаб чиқиш каби долзарб йўналишларига катта эътибор қаратилмоқда. Бу борада тўлқин тарқалиши, фильтрация, биологик популяция ва иссиқлик ўтказувчанлик каби жараёнларни математик моделлаштириш, математик моделларнинг сонли ва аналитик тадқиқ этиш усулларини ишлаб чиқиш, ночизикли масалаларни ечиш бўйича олинган натижаларни амалиётга кенг жорий этишда салмоқли натижаларга эришилди. Республикамизда “Математик физика, амалий математика ва математик моделлаштириш” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди¹. Қарор ижросини таъминлашда табиий жараёнларнинг параболик типдаги тенгламалар системаси орқали ифодаланувчи ночизикли математик моделларини қуриш, сонли ҳисоблаш усулларини ишлаб чиқиш ҳамда уларни такомиллаштириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 6 октябрдаги ПҚ-4851-сон «Ахборот технологиялари соҳасида таълим тизимини янада такомиллаштириш, илмий тадқиқотларни ривожлантириш ва уларни ИТ-индустрия билан интеграция қилиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Бир нечта популяциянинг ўзаро муносабатини тасвирловчи дастлабки тадқиқотлар А.Лотка ва В.Вольтералар томонидан олиб борилган. “Йиртқич-ўлжа” принципида ўзаро муносабатда бўлган иккита популяциянинг кўпайиш динамикасининг модели, оддий дифференциал тенгламалар системаси кўринишида таклиф этилган. Бундай кўринишдаги системаларни тадқиқ этиш оддий дифференциал тенгламалар системаси ечимини турғунлиги масаласига келади. Ночизикли жараёнларни математик моделлаштириш ва ечиш усуллари ишлаб чиқиш ҳозирги даврдаги илмий тадқиқотларнинг долзарб йўналиши ҳисобланади. Жумладан, математик моделлаштириш ва уни ривожлантиришга Н.Fujita, N.Shigesada, K.Kawasaki, E.Teramoto, Ansgar Jüngel, L.Rossi, A.A.Самарский, А.С.Калашников, В.А.Галактионов, М.А. Цыганов, В.Н. Бикташев, М.Д. Васильев ва бошқа олимларнинг ишлари бағишланган бўлиб, улар томонидан ечимнинг чегараланмаганлиги, чекли тезликда тарқалиш эффекти ва фазовий локализация, манба ва ютилиш таъсирида ночизикли муҳитлардаги чекли вақтда кўчишнинг мавжуд бўлиш хоссалари аниқланган.

Ilan G. Ron, Ido Golding, Beatrice Lifshitz-Mercer, Eshel Ben-Jacobларнинг ишларида бактериал колониялар ривожланишининг баъзи бир таркибий тузилмаси, ўсимта ривожланишининг мумкин бўлган модели сифатида қаралган. Y.Tao, X.He ва S.N.Zhengларнинг ишларида, кросс-диффузия системаси классик ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган ва классик ечим глобал чегараланганлиги кўрсатилган. Г.Н.Голубев., Е.А.Апони́на, А.Д.Базикин, Г.Ю.Ризниченко., P.Auger, J-Ch.Poggiale, A.I.Khibnik, B.Blasius, F.Belgacem, C.Cosner, E.Chauvet, P.Waltmanлар томонидан бир қанча турларнинг ўзаро ҳаракатининг оддий дифференциал

тенгламалар билан ифодаланадиган математик моделлари қурилган. Табиатда кросс-диффузия системалари кенг тарқалган ва улар G.Flierl, D.Grunbaum, S.Levin, D.Olsonларнинг ишларида ижтимоий ҳолатларнинг модели сифатида қаралган. Локал чегаравий шартлар билан берилган ночизикли диффузия тенгламалар системаси ечимларининг вақт бўйича асимптотик турғунлиги X.Y.Chen, H.Matano, M.Sugimoto, John King, A.A.Самарский, А.П.Михайлов, В.А.Галактионов, Е.Куркина каби муаллифлар томонидан исботланган.

Ўзбекистонда турли хил диффузион жараёнларни ифодаладиган ночизикли диффузия ва уларнинг системалари билан Н.М.Мухитдинов, М.М.Арипов, Б.Х.Хужаёров, А.С.Расулов, Н.Равшанов, Ж.Тохиров, Н.Утеулиев, З.Р.Рахмонов, Ш.А.Садуллаева, А.С.Матякубов, Д.К.Мухамедиева ва бошқа олимлар шуғулланишган. Уларнинг асосий ишлари диффузия ночизикли тенгламалар системасини ечиш масаласини сонли тадқиқ этишга бағишланган бўлиб, кросс-диффузия, фильтрация, иссиқлик ўтказувчанлик, биологик популяция жараёнларини моделлаштириш масалаларига тадбиқ этиш мумкин. М.М.Ариповнинг ишларида ночизикли масалаларнинг тадқиқ этишнинг самарали усуллари сифатида чизиксиз ажратиш ва эталон тенгламалар усуллари асосланган. Чизиксиз чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия системаларини моделлаштириш, blow-up ечимлар ва глобал ечимларнинг мавжуд шартларини аниқлаш бўйича олинган натижалар ҳамда мавжуд усул ва алгоритмлар таҳлили шуни кўрсатадики, ночизикли жараёнларни моделлаштириш соҳасидаги назарий ва амалий масалаларни янада чуқурроқ ва тўлиқ тадқиқ этиш усуллари ишлаб чиқишни талаб этади.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлар режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг илмий-тадқиқот ишлари режасининг №19.12-«Муҳандислик ва табиий жараёнларнинг математик моделларини тузиш ва сонли тадқиқ қилиш» ҳамда №ОТ-Ф4-64-рақамли «Биржинслимас ғовак муҳитларда суюқлик сизиши ва моддалар кўчирилиши гидродинамик моделларини тузиш ва сонли тадқиқ этиш» мавзуидаги илмий-тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ночизикли чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия масаласини аналитик ва сонли ечиш усуллари, сонли ечиш алгоритмлари ва дастурий таъминотини ишлаб чиқишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

кросс-диффузиянинг математик модели учун глобал ечимнинг мавжудлик шартларини топиш;

ночизикли чегаравий шартлар билан берилган ночизикли кросс-диффузия модели учун критик экспоненталарни топиш;

кросс-диффузия системаси учун компакт юритувчи автомодел ечимлар асимптотикасининг бош ҳадларини топиш;

ночизикли кросс-диффузия масалаларини сонли ечиш ва визуаллаштириш алгоритмлари ва дастурий мажмуасини яратиш.

Тадқиқотнинг объекти ночизикли чегаравий шартлар билан берилган параболик тенгламалар системаси орқали ифодаланувчи ночизикли кросс-диффузия жараёнларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети ночизикли чегаравий шартлар билан берилган диффузия системаларининг математик моделлари сифат хоссаларини тадқиқ қилиш учун сонли схемалар қуриш ва дастурий мажмуалар яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда автомодел ва яқинлашувчи автомодел, ечимларни таққослаш теоремалари, ночизикли дифференциал тенгламалар системасини ечиш учун эталон тенгламалар, сонли схемаларни тузишнинг айирмали, итерация, Томас, чизиклаштириш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

кросс-диффузиянинг ночизикли математик модели учун глобал ечимнинг мавжудлик шarti топилган;

ночизикли чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия модели учун Фуджита типдаги критик экспонента қиймати топилган;

кросс-диффузия системаси учун қўйилган чегаравий масала учун автомодел ечимлар асимптотикасининг бош ҳадлари топилган;

ночизикли чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия масалаларини сонли ечиш алгоритмлари ва айирмали схемалари ишлаб чиқилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

кросс-диффузия масаласи автомодел ечимларининг асимптотикалари олинган;

политропик фильтрация системаси учун қўйилган чегаравий масаланинг сонли ечимлари қурилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги диссертация ишида олинган тасдиқлар солиштириш теоремалари ва максимум принципи асосида қатъий исботланганлиги ҳамда ҳисоблаш эксперименти натижалари билан тасдиқланганлиги, олинган натижаларнинг сақланиш қонунларига мувофиқлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти автомодел ечимни қуриш усуллари, асимптотик формулалар, сонли ечиш схемалари ва алгоритмларидан биологик популяциянинг кросс-диффузион модели, Бурриж-Кнопфф модели, сейсмология масалалари, таксис тўлқинлар моделини сонли ва аналитик ечишда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти итерацион жараёнларни қурилганлиги, сонли ҳисоблаш схемаси ва дастурий таъминотни яратилганлиги, улардан таксис тўлқин, политропик фильтрация, биологик популяция, ўрмонлар структурасининг ўсиш динамикаси, тектоник плиталар ҳаракати каби ночизикли масалалар учун самарали ҳисоблаш тажрибаларини ўтказишга имкон бериши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ночизикли кросс-диффузия масалаларини сонли ва аналитик ечиш бўйича олинган илмий натижалар асосида:

ночизикли чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия масалаларини сонли ечиш алгоритмлари ва глобал ечимнинг мавжудлик шартларидан R.J130000.7854.5F235 “Аргументлари бўлакли ўзгармас бўлган иккинчи тартибли кечикувчи дифференциал тенгламалар учун янги даврий ечимлар” грант лойиҳасида қисман-ўзгармас аргументли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни сонли ечишда фойдаланилган (Малайзия технология университетининг 2020 йил 19 январдаги UTM-J-5401/12-16/1/5JID-2(84)-сон маълумотномаси). Натижада, қисман-ўзгармас аргументли иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечимлари мавжудлик ва ягоналик шартларини аниқлаш имконини берган;

кросс-диффузия системаларини сонли ечиш алгоритмлари ва дастуридан «Зарафшон» магистрал тизимлари Бошқармасида сув омборлари ва каналларида филтрланиш натижасидаги сув сарфининг ўсишини башорат қилишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Ахборот технологиялари ва коммуникацияларини ривожлантириш вазирлигининг 2019 йил 26 ноябрдаги 33-8/8343-сон маълумотномаси). Натижада, муҳит параметрларининг турли қийматларида филтрланиш тезлигини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқот натижалари 10 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 6 та халқаро ва 4 та республика миқёсидаги илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 17 та илмий иш чоп этилган, шулардан, 7 таси Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этишга тавсия этилган илмий нашрларда, жумладан 3 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган, шунингдек 2 та ЭҲМ учун дастурга муаллифлик гувоҳномаси олинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 96 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот

натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Кросс-диффузия жараёнларининг математик моделлари**» деб номланган биринчи боби ёрдамчи характерга эга бўлиб, биринчи параграфда кросс-диффузия жараёнларининг математик моделлари хусусиятлари ва халқаро тадқиқотлар натижалари шарҳи келтирилган. Биринчи бобнинг иккинчи параграфда асосий таърифлар ва ёрдамчи тасдиқлар келтирилган.

Биринчи бобнинг асосий натижаларини келтирамыз.

Қуйида нозикли чегаравий шартлар билан берилган, нозикли кросс-диффузия системаси ечимларининг хусусиятларини кўриб чиқамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$-v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^{q_1}(0, t), \quad -u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (3)$$

бу ерда $m_i \geq 1$, $q_i > 0$ ($i=1, 2$), $u_0(x)$ ва $v_0(x)$ - R_+ да компакт юритувчи, узлуксиз, манфий бўлмаган функциялар.

(1) система кросс-диффузия (ўзаро кесишувчи диффузия) жараёнини ифодалайди. Кросс-диффузия моделлари табиатшуносликнинг турли соҳаларида учрайди. Жумладан, физикада (плазма физикаси, ғовак муҳитда масса кўчиши), кимёда (электролитик аралашма динамикаси), биологияда (кросс-диффузия транспорти, биологик популяция), экологияда (ўрмонлар таркиби ортиши динамикаси), сейсмологияда (тектоник плиталарнинг ўзаро ҳаракатини ифодаловчи, Бурридж-Кнопф модели).

Кросс-диффузия фазодаги бир объект диффузияси коэффициентининг фазодаги бошқа бир объектнинг диффузиясига боғлиқлигидир.

Маълумки, $u, v \equiv 0$ бўладиган соҳада (1) тенгламалар системаси бузилувчи бўлиб, классик маънода ечимга эга бўлмайди. Бундай ҳолларда (1)-(3) масаланинг ечими умумлашган ечим маъносида тушунилади. Қуйида автомодел таҳлил асосида (1)-(3) масаланинг умумлашган глобал ечимларининг мавжудлик шартларини келтирамыз.

Теорема 1. Агар $q_1 \leq 1$, $q_2 \leq 1$ шартлар ўринли бўлса, у ҳолда (1)-(3) масаланинг ечими глобал бўлади.

Теорема 2. Агар $q_1 > 1$, $q_2 > 1$ ва бошланғич шарт етарлича катта бўлса, у ҳолда (1)-(3) масаланинг ечими чегараланмаган (blow-up) бўлади.

Теорема 3. Агар $q_1 > m_2 + 1$, $q_2 > m_1 + 1$ ва бошланғич шарт етарлича кичик бўлса, у ҳолда (1)-(3) масаланинг ечими глобал бўлади.

Изоҳ 1. 1-теоремадан глобал ечим мавжудлигининг критик экспоненталари $q_{10} = 1$, $q_{20} = 1$ эканлиги келиб чиқади.

Изоҳ 2. 3-теоремага кўра (1)-(3) масала учун Фуджита типдаги критик экспоненталар қийматлари қуйидагича бўлади: $q_{1c} = m_2 + 1$, $q_{2c} = m_1 + 1$.

1.4-параграф (1)-(3) масалаларнинг автомодел ечимлари асимптотикасини топишга ва сонли моделлаштиришга бағишланган.

(1) системанинг қуйидаги кўринишга эга компакт юритувчили автомодел ечимини қараймиз

$$\begin{cases} \underline{u}(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ \underline{v}(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi), \quad \xi = x(T + t)^{-\beta}, \end{cases} \quad (4)$$

бу ерда $T > 0$, $\beta = \frac{q_1 - m_2}{2q_1 - m_2 - 1} = \frac{q_2 - m_1}{2q_2 - m_1 - 1}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2q_1 - m_2 - 1}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2q_2 - m_1 - 1}$,

$(\varphi(\xi), f(\xi))$ функциялар эса қуйидаги масалаларнинг ечими ҳисобланади

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2 \varphi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (6)$$

Қуйидаги функцияларни қараймиз:

$$\tilde{f}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_2-1}}, \quad \tilde{\varphi}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_1-1}} \quad (7)$$

бу ерда $a > 0$.

Унда қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 4. (5), (6) чегаравий масаланинг компакт юритувчили автомодел ечими $\xi \rightarrow \sqrt{a}$ да қуйидаги асимптотикага эга

$$f(\xi) = c_1 \tilde{f}(\xi)(1 + o(1)), \quad \varphi(\xi) = c_2 \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \quad (8)$$

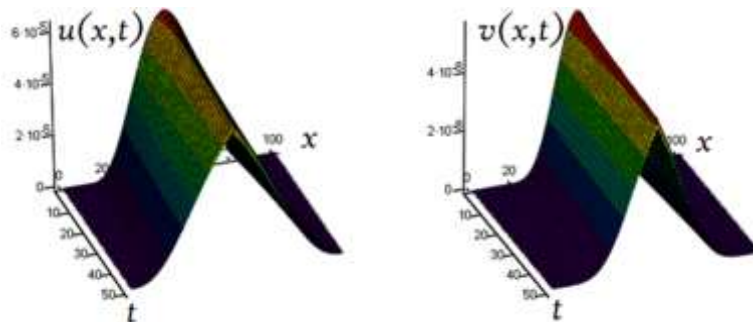
бу ерда $c_1 = \left(\frac{\beta(m_2 - 1)}{2} \right)^{1/(m_1-1)}$, $c_2 = \left(\frac{\beta(m_1 - 1)}{2} \right)^{1/(m_2-1)}$.

Бундан ташқари, ушбу параграфда чекли айирмалли усул асосида сонли схемалар ишлаб чиқилган. Бу ҳолда (1) тенглама фазовий координата бўйича иккинчи тартибли аниқликда ва t бўйича биринчи тартибли аниқликда аппроксимация қилинди.

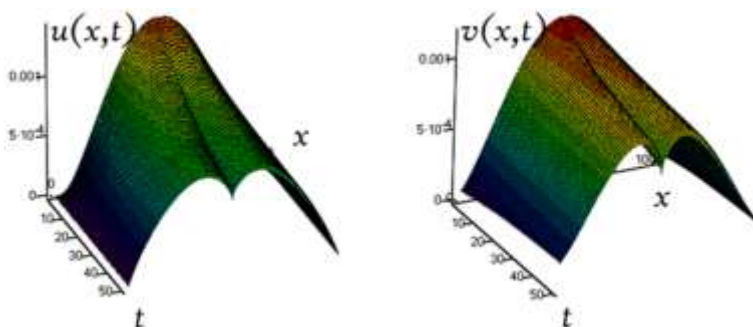
Итерацион жараёни ҳосил қилишда, итерациянинг ички қадамларида тугунлардаги функция қийматлари ҳайдаш усули ёрдамида ҳисобланган. Бундай нозикли масалаларни сонли ечишдаги асосий қийинчилик итерацион жараён учун мос келувчи бошланғич яқинлашишни танлаш ҳисобланади. Шунинг учун конкрет масалани ечиш жараёнида изланаётган

ечимнинг характерли хусусиятларини акс эттирувчи ва нозикли масалаларни сифат хоссалари таҳлили асосида олинadиган функциялардан фойдаланилади. Мазкур муаммо сонли параметрларнинг турли қийматларига мувофиқ асимптотик формулаларни танлаш орқали ҳал қилинади.

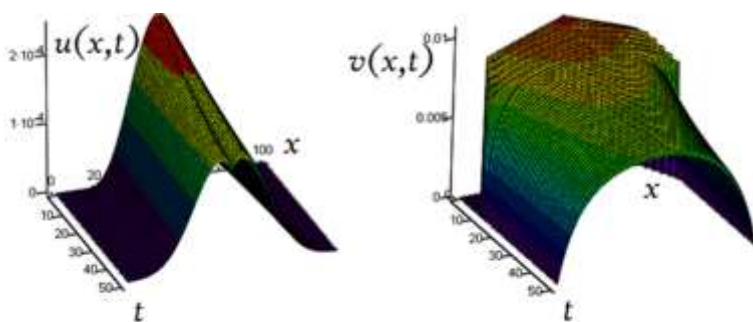
§1.3-параграфнинг натижаларига мувофиқ, тегишли сонли ҳисоблашлар амалга оширилди, улар қуйидаги графиклар кўринишида кўрсатилган. Итерацион жараён учун (4), (8) формулалардан бошланғич яқинлашиш сифатида фойдаланилган.



1-расм. (1)-(3) масаланинг сонли ечими: $q_1 = 4.75$, $q_2 = 5.5$, $m_1 = 1.15$, $m_2 = 1.35$.



2-расм. (1)-(3) масаланинг сонли ечими: $q_1 = 1.75$, $q_2 = 1.95$, $m_1 = 1.55$, $m_2 = 1.65$.



3-расм. (1)-(3) масаланинг сонли ечими: $q_1 = 1.8$, $q_2 = 2.3$, $m_1 = 1.75$, $m_2 = 1.25$

1-3 расмларда (1)-(3) масаланинг секин диффузия ҳоли $m_i > 1$ ($i=1,2$) учун сонли ҳисоблаш натижаларининг графиклари келтирилган. Бу ҳолда, (4), (8) асимптотик формулалар ва графиклардан келиб чиқиб, объект ҳаракати $m_i > 1$ ($i=1,2$) да чекли тезликда содир бўлади. Ҳар бир муҳит учун диффузия тўлқинининг етиб борган нуқтаси вақтга ва тўлқин фронтига боғлиқ ($u(x,t)$, $v(x,t)$ нолга айланадиган нуқталар).

1.5 параграфда ночизикли чегаравий шартлар ва ўзгарувчан зичликка эга (1)-(3) кросс-диффузия система ечимларининг сифат хоссалари тадқиқ қилинган. Автомодел ечим асимптотикасининг бош ҳади олинган ва мазкур масалани сонли ечишда итерацион жараён учун бошланғич яқинлашишни танлаш усули таклиф этилган.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Ночизикли чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия системалари хусусияти**» ночизикли чегаравий шартлар билан берилган муҳитдаги параболик типдаги ночизикли кросс-диффузия тенгламалар системасининг ечимлари хусусиятларини тадиқ этишга бағишланган.

Биринчи параграфда қуйидаги ночизикли чегаравий шартлар билан берилган ночизикли кросс-диффузия масаласи ечимларининг сифат хусусиятлари ўрганилган:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad x \in R_+, t > 0, \quad (9)$$

$$\begin{cases} -v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} (0, t) = u^{q_1} (0, t), \\ -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} (0, t) = v^{q_2} (0, t), \end{cases} \quad t > 0, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (11)$$

бу ерда $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $m_i > 1$, $q_i > 0$ ($i=1, 2$) $u_0(x)$ ва $v_0(x)$ - R_+ да узлуксиз, компакт юритувчили манфий бўлмаган функциялар.

Автомодел таҳлил асосида (9)-(11) масалани вақт бўйича глобал ечимларининг мавжудлик ва мавжуд бўлмаслик шартлари ўрганилган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1)}{p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1)} = \\ &= \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1)}{p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1)}, \\ \alpha_1 &= \frac{(p - 1)(q_2 - 1)}{l_1}, \quad \alpha_2 = \frac{(p - 1)(q_1 - 1)}{l_2}, \\ l_1 &= p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1), \\ l_2 &= p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1). \end{aligned}$$

Теорема 5. Агар $\min\{l_1, l_2\} > 0$ ва бошланғич шарт етарлича катта бўлса, у ҳолда (9)-(11) масаланинг ечими чегараланмаган (blow-up) бўлади.

Теорема 6. Агар $\max\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} < 0$ ва бошланғич шарт етарлича кичик бўлса, у ҳолда (9)-(11) масаланинг ечими глобал бўлади.

Теорема 7. Агар $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$ шартлар ўринли бўлса, у ҳолда (9)-(11) масаланинг ечими глобал бўлади.

Изоҳ 3. 7-теорема глобал ечим мавжуддигининг критик экспоненталари $q_{10} = 1, q_{20} = 1$ эканлигини кўрсатади..

Изоҳ 4. 5-теоремага кўра (9)-(11) масала учун Фуджита типдаги критик экспоненталар қийматлари қуйидагича бўлади: $\min\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} = 0$.

2.2 параграфда (9)-(11) кросс-диффузия масаласининг автомодел ечими асимптотикаси ўрганилган ва қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 8. (9)-(11) масаланинг компакт юритувчили автомодел ечими $\xi \rightarrow a^{(p-1)/p}$ да қуйидаги асимптотикага эга

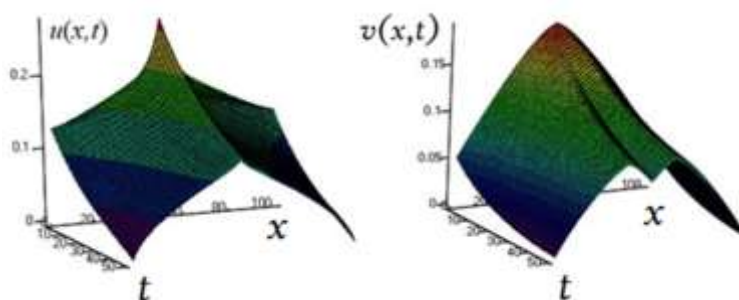
$$\begin{cases} u(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \\ v(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)). \end{cases} \quad (12)$$

бу ерда $A_1^{m_1-1} A_2^{p-2} \left(\frac{zp}{p-1} \right)^{p-1} = A_2^{m_1-1} A_1^{p-2} \left(\frac{kp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta, \quad \tilde{\varphi}(\xi) = A_1 \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)^k,$

$$\tilde{\varphi}(\xi) = A_2 \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)^z, \quad z = \frac{(p-1)(p-m_2-1)}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}, \quad k = \frac{(p-1)(p-m_1-1)}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}$$

$a > 0$.

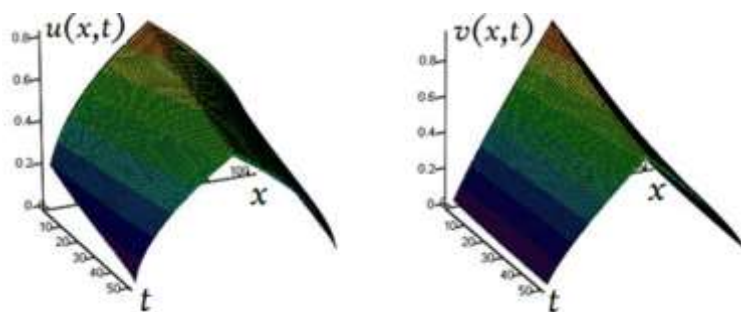
§2.3 да (9)-(11) масала учун айирмали схемалар ишлаб чиқилган ва ҳисоблаш эксперименти ўтказилган. Ҳисоблаш учун $h=0.05$ қадам танланган, тугунлар сони $N=2500$ та ҳамда итерация аниқлиги сифатида $\varepsilon = 10^{-5}$ олинган. Ҳисоблаш $t=2$ гача $\tau = 0.02$ қадам билан амалга оширилган. Итерация жараёни учун бошланғич яқинлашиш сифатида (12) формуладан фойдаланилган.



4-расм. (9)-(11) масаланинг сонли ечими:

$$q_1 = 2.25, q_2 = 2.25, p = 3.75, m_1 = 1.95, m_2 = 1.35.$$

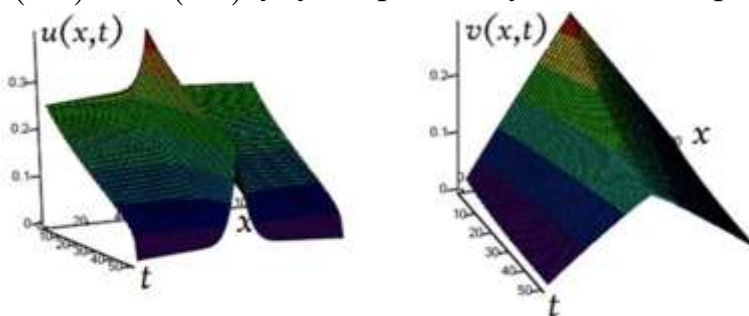
4-расмда (9)-(11) масаланинг сонли ечимлари графиги тасвирланган бўлиб, бунда $t=0.3$ дан бошлаб $v(x, t)$ функция графигида структура ҳосил бўлган. Иккала муҳитлардаги фронтнинг узунлиги ўзаро тенг.



5-расм. (9)-(11) масаланинг сонли ечими:

$$q_1 = 2.75, q_2 = 2.95, p = 3.25, m_1 = 2, m_2 = 1.6$$

Бу ҳолда $u(x,t)$ ва $v(x,t)$ учун тарқалиш узоклиги деярли бир хил.



6-расм. (9)-(11) масаланинг сонли ечими:

$$q_1 = 2.3, q_2 = 2.2, p = 3, m_1 = 1.9, m_2 = 1.4$$

Ҳисоблаш эксперименти натижалари шуни кўрсатадики, $u(x,t)$ нинг тарқалиш тезлиги $v(x,t)$ га нисбатан 5 баробар кичик.

Диссертациянинг «**Ночизикли чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия жараёнларининг математик модели хусусиятлари**» деб номланган учинчи бобида ночизикли чегаравий шартлар билан берилган кросс-диффузия масаласининг вақт бўйича глобал ечимларининг мавжудлик ва мавжуд бўлмаслик шартлари олинган. Сақланиш қонунини қаноатлантирувчи баланс усули асосида кўп ўлчовли диффузия масаласи учун айирмали схема қурилган ва глобал ечимнинг асимптотикаси топилган.

§3.1 да чизиксиз чегаравий шартлар билан берилган қуйидаги система қаралган

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\begin{cases} -v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u^{q_1}(0,t), \\ -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = v^{q_2}(0,t), \quad t > 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (15)$$

бу ерда $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $k > 0$, $m_i > 1$, $q_i > 0 (i=1,2)$, $u_0(x)$ ва $v_0(x)$ - R_+ да узлуксиз, компакт юритувчили манфий бўлмаган функциялар.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$\beta = \frac{(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1)}{(k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1)} =$$

$$\frac{(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1)}{(k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1)},$$

$$\alpha_1 = \frac{(k(p-2)+1)(q_2-1)}{r_1}, \quad \alpha_2 = \frac{(k(p-2)+1)(q_1-1)}{r_2},$$

$$r_1 = (k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1),$$

$$r_2 = (k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1).$$

Қуйидаги теоремалар мазкур параграфнинг асосий натижалари ҳисобланади.

Теорема 9. Агар $\min\{r_1, r_2\} > 0$ ва бошланғич шарт етарлича катта бўлса, у ҳолда (13)-(15) масаланинг ечими чегараланмаган (blow-up) бўлади.

Теорема 10. Агар $\max\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} < 0$ ва бошланғич шарт етарлича кичик бўлса, у ҳолда (13)-(15) масаланинг ечими глобал бўлади.

Ушбу бобнинг иккинчи параграфида (13)-(15) масаланинг автомодел ечими асимптотикаси ўрганилган.

Қуйидаги функцияларни қарайлик

$$\begin{cases} u_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ v_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} g(\xi), \quad \xi = x(T+t)^{-\beta}, \end{cases} \quad (16)$$

бу ерда $T > 0$, $f(\xi)$ ва $g(\xi)$ изланаётган функциялар бўлиб, ечимларни таққослаш теоремасига мувофиқ қуйидаги тенгсизликлар системасини қаноатлантириши лозим

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(g^{m_1-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f \leq 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(f^{m_2-1} \left| \frac{dg^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{dg}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{dg}{d\xi} + \alpha_2 g \leq 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} -g^{m_1-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi}(0) \geq f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \left| \frac{dg^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{dg}{d\xi}(0) \geq g^{q_2}(0). \end{cases} \quad (18)$$

Қуйидаги функцияларни қараймиз:

$$\begin{cases} \bar{f}(\xi) = A_1 \left(a - (\xi + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^y, \\ \bar{g}(\xi) = A_2 \left(a - (\xi + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^z, \end{cases} \quad (19)$$

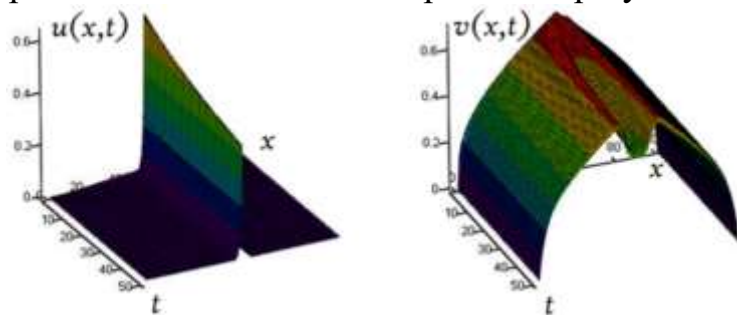
бунда $h \in \left(0, a^{\frac{p-1}{p}} \right)$, $A_2^{m_1-1} A_1^{k(p-2)} k^{p-2} \left(\frac{yp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta$, $A_1^{m_2-1} A_2^{k(p-2)} k^{p-2} \left(\frac{zp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta$,

$$a > 0, \quad y = \frac{(p-1)(k(p-2) - m_1 - 1)}{k^2(p-1)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}, \quad z = \frac{(p-1)(k(p-2) - m_2 - 1)}{k^2(p-1)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}.$$

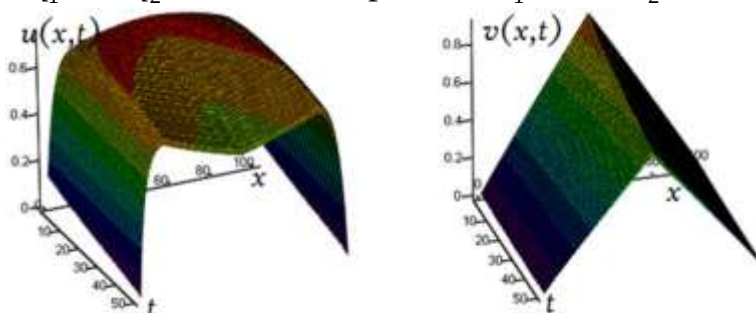
Теорема 11. Агар $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $m_i > 1$ бўлса, у ҳолда (17), (18) чегаравий масаланинг компакт юритувчили ечими $\xi \rightarrow a^{(p-1)/p}$ да қуйидаги асимптотикага эга бўлади

$$\begin{cases} f(\xi) = \bar{f}(\xi)(1 + o(1)), \\ g(\xi) = \bar{g}(\xi)(1 + o(1)). \end{cases} \quad (20)$$

Шунингдек (13)-(15) учун сонли ечиш учун айирмалли схемалар ишлаб чиқилган ва улар асосида ҳисоблаш экспериментлари ўтказилган.



7-расм. (13)-(15) масаланинг сонли ечими:
 $q_1 = 3, q_2 = 2.7, k = 1.3, p = 3.3, m_1 = 1.5, m_2 = 1.8$



8-расм. (13)-(15) масаланинг сонли ечими:

$$q_1 = 3.1, q_2 = 3.7, k = 1.25, p = 3.8, m_1 = 2.1, m_2 = 1.2$$

§3.3 да нозикли чегаравий шартлар билан берилган мухитларда кўп ўлчовли диффузия тенгламалар системаси қаралган

$$\begin{cases} u_t = \nabla \left(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \right), & x \in R_+^N, t > 0, \\ v_t = \nabla \left(|\nabla v|^{p_2-2} \nabla v \right), & x \in R_+^N, t > 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} -|\nabla u|^{p_1-2} \frac{\partial u}{\partial x_1} = u^{q_1}, & x_1 = 0, t > 0, \\ -|\nabla v|^{p_2-2} \frac{\partial v}{\partial x_1} = v^{q_2}, & x_1 = 0, t > 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0, \quad (23)$$

бу ерда $R_+^N = \{(x_1, x') | x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $p_i > 2$, $q_i > 0 (i=1, 2)$. $u_0(x)$ ва $v_0(x)$ R_+^N да узлуксиз компакт юритувчили манфий бўлмаган функциялар.

(21) параболик тенгламалар системаси табиатшуносликнинг турли соҳаларида фильтрация жараёнлари, термодинамик реакция, иссиқлик ўтказувчанлик, реакция-диффузия каби жараёнларни математик моделлаштиришда учрайди.

(21) тенгламалар $p_i > 2 (i=1, 2)$ шартда секин диффузия, $1 < p_i < 2 (i=1, 2)$ да эса тез кечувчи диффузия жараёнларини ифодалайди. Секин диффузия ҳолида (21) тенглама бузилувчи бўлиб, унинг ечими умумлашган ечим маъносида тушунилади.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{q_1 p_1 (p_2 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - 4(p_1 - 1)(p_2 - 1)}, \\ \alpha_2 &= \frac{q_2 p_2 (p_1 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - 4(p_1 - 1)(p_2 - 1)} \\ \beta_1 &= \frac{q_1 \alpha_2 - \alpha_1 (p_1 - 1)}{p_1 - 1}, \quad \beta_2 = \frac{q_2 \alpha_1 - \alpha_2 (p_2 - 1)}{p_2 - 1}. \end{aligned}$$

(21)-(23) масаланинг қуйидаги автомодел ечимини қараймиз

$$\begin{cases} u_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), \\ v_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} \phi(\eta), \end{cases} \quad (24)$$

бу ерда $\xi = |\zeta|$, $\zeta_1 = (x_1 + h_1)(T + t)^{-\beta_1}$, $\zeta_i = x_i (T + t)^{-\beta_1}$, $\eta = |\theta|$, $\theta_1 = (x_1 + h_2)(T + t)^{-\beta_2}$, $\theta_i = x_i (T + t)^{-\beta_2}$, $(i=2, \dots, N)$, $T > 0$, $(\varphi(\xi), \phi(\eta))$ функциялар эса қуйидаги масаланинг ечими

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta_1 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1 \varphi = 0, \\ \eta^{1-N} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{N-1} \left| \frac{d\phi}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta} \right) + \beta_2 \eta \frac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2 \phi = 0, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} - \left| \frac{d\varphi}{d\xi_1} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \Big|_{\xi_1=h_1} = \phi^{q_1}(h_2), \\ - \left| \frac{d\phi}{d\eta_1} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta_1} \Big|_{\eta_1=h_2} = \varphi^{q_2}(h_1). \end{cases} \quad (26)$$

Бунда (25) ва (26) ифодалар (24) ни (21)-(23) га қўйиш ва баъзи соддалаштиришларни амалга оширгандан сўнг ҳосил бўлади.

Қуйидаги функцияларни қараймиз

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi) = \left(a_1 - b_1 \xi^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}, \\ \tilde{\phi}(\eta) = \left(a_2 - b_2 \eta^{\frac{p_2}{p_2-1}} \right)^{\frac{p_2-1}{p_2-2}}, \end{cases} \quad (27)$$

бу ерда $a_i > 0$ ($i=1,2$), $b_1 = \frac{p_1-2}{p_1} \beta_1^{\frac{1}{p_1-1}} > 0$, $b_2 = \frac{p_2-2}{p_2} \beta_2^{\frac{1}{p_2-1}} > 0$.

Қуйидаги теорема ўринли.

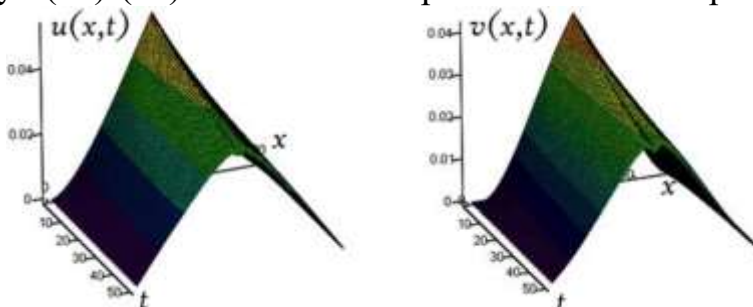
Теорема 12. (25) тенгламалар системасининг компакт юритувчили ечими

$\xi \rightarrow (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1}}$, $\eta \rightarrow (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$ да қуйидаги асимптотикага эга

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)), \\ \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1+o(1)), \end{cases}$$

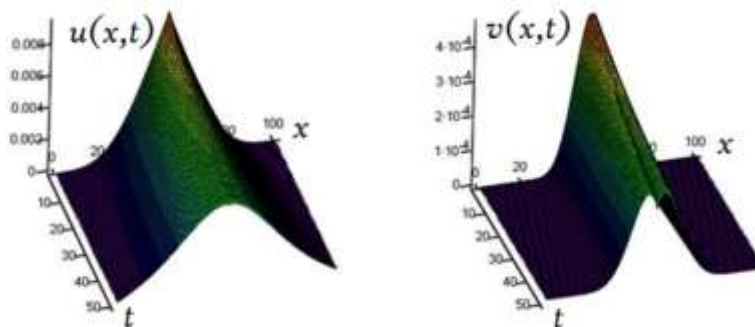
бу ерда $\tilde{\varphi}(\xi)$, $\tilde{\phi}(\eta)$ (27) да аниқланган функциялардир.

Қуйида сонли параметрлар ва бошланғич функцияларнинг турли қийматлари учун (21)-(23) масаланинг айрим сонли ечимлари келтирилган.



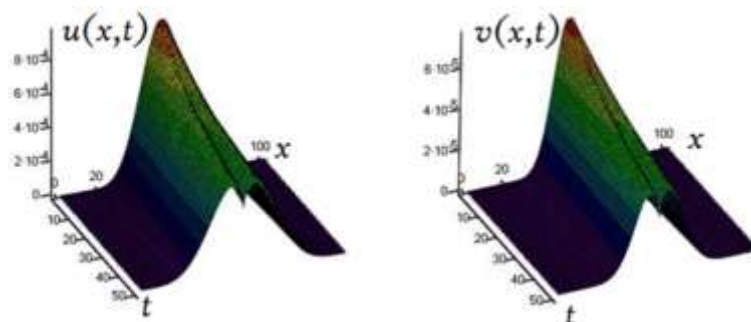
10-расм. (21)-(23) масаланинг сонли ечими:

$$q_1 = 2.67, q_2 = 2.78, p_1 = 3.5, p_2 = 3.6.$$



11-расм. (21)-(23) масаланинг сонли ечими:

$$q_1 = 1.36, q_2 = 2.0, p_1 = 2.2, p_2 = 2.1$$



12-расм. (21)-(23) масаланинг сонли ечими:

$$q_1 = 1.37, q_2 = 1.58, p_1 = 2.2, p_2 = 2.1$$

ХУЛОСА

«Икки компонентли муҳитлардаги кросс диффузия жараёнларини сонли моделлаштириш» мавзусидаги диссертация бўйича олиб борилган тадқиқот натижалари хулосалари қуйидагилардан иборат:

1. Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган муҳитларда ночизикли кросс-диффузия моделларининг сифат хоссалари тадқиқ этилган. Кросс-диффузия системаси автомодел ечими асимптотикасининг бош ҳади топилган, қаралаётган масалани сонли ечишда итерацион жараён учун бошланғич яқинлашишни танлаш усули таклиф қилинган.

2. Ночизикли кросс-диффузия масаласининг турли автомодел ечимлари қурилган, глобал ечимнинг мавжудлик шартлари ва Фуджита типдаги критик экспонента қийматлари топилган.

3. Ночизикли чегаравий шартлар билан берилган ночизикли параболик типдаги кросс-диффузия тенгламалар системаси сонли параметрларнинг маълум бир қийматларида глобал ечимларга эга бўлмаслиги исботланган.

4. Сақланиш қонунларига мувофиқ баланс усули асосида кўп ўлчовли диффузия масаласи учун айирмали схемалар ва итерацион жараён қурилган ҳамда сонли ҳисоблашлар бажарилган.

5. Ночизикли чегаравий шартлар билан берилган ночизикли кросс-диффузия моделини сонли ечиш ва ҳисоблаш эксперименти натижаларини визуаллаштириш учун алгоритмлар ва дастурий воситалар ишлаб чиқилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
УЗБЕКИСТАНА**

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УРУНБАЕВ ЖАСУР ЭРКИНОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КРОСС ДИФФУЗИИ
В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ**

**05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы
программ (физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.4.PhD/FM452.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (<http://ik-fizmat.nuu.uz>) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyo.net).

Научный руководитель:

Рахмонов Зафар Равшанович
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты:

Нормуродов Чори Бегалиевич
доктор физико-математических наук, профессор

Маматов Алишер Зулдунович
доктор технических наук, профессор

Ведущая организация:

Каракалпакский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _____ 2021 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № ____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2021 года.
(протокол рассылки № ____ от «___» _____ 2021 года).

А.Р. Марахимов

Председатель Научного совета по
присуждению научных степеней,
д.т.н., профессор

А.М. Полатов

Ученый секретарь Научного совета по
присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

Б.Ф. Абдурахимов

Заместитель председателя научного семинара при
Научном совете по присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Мировые исследования, посвященные диффузионным процессам и системам, являются актуальными и востребованными, имеют широкое применение в задачах биологии, химии, физики, технологии, биофизики и многих других областях знаний. Математические модели диффузионных процессов описываются нелинейным дифференциальными уравнениями в частных производных и являются объектом исследований в задачах сейсмологии, в теории нелинейных волн, в задачах распространения эпидемий, биологической популяции, таксисных волн, фильтрации и других. Поэтому исследование нелинейных математических моделей диффузии в двухкомпонентных средах, построение эффективных численных схем и алгоритмов, разработка комплекса программ остаются важными задачами прикладной математики.

В мире в настоящее время широко исследуются математические модели кросс-диффузии, которые описываются с помощью систем уравнений параболического типа с нелинейными граничными условиями. Математические модели процессов кросс-диффузии широко применяется в биофизике для описания биофизических механизмов морфогенеза, для построения моделей процессов биологических популяций, теплопроводности и фильтрации, а также изучения взаимодействия тектонических плит. Поэтому разработанные методов численного и аналитического решения нелинейных систем кросс-диффузии считается целевым научным исследованием.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как математическое моделирование биофизических, химических, биологических, сейсмологических процессов и разработке методов численного и аналитического решения нелинейных математических моделей, имеющих научное и практическое применение фундаментальных наук. В связи с этим были достигнуты значительные результаты в математическом моделировании таких процессов, как распространение волн, фильтрация, биологическая популяция и теплопроводность, разработке численных и аналитических методов математических моделей, широком внедрении полученных результатов в практику решения нелинейных задач. Приоритетные направления математическая физика, прикладная математика и математическое моделирование в нашей Республике отмечен как основные задачи и направления деятельности - проведение исследований на уровне международных стандартов. В обеспечении исполнения решения важное значение имеет построение нелинейных математических моделей природных процессов, выражаемых через систему уравнений параболического типа, разработка и совершенствование численных методов расчета.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» и постановлениях президента Республики

Узбекистан, № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и № ПП-4851 от 6 октября 2020 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы образования в области информационных технологий, развитию и интеграции научных исследований с IT-индустрией» а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первые работы, описывающие взаимодействие нескольких популяций, принадлежат А. Лотка и В. Вольтера. Модель динамики численности двух популяций, взаимодействующих по принципу «хищник-жертва», была предложена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучение таких систем приводит к задаче об устойчивости решений системы дифференциальных уравнений. Решение задач, связанных с моделированием нелинейных процессов, является в настоящее время весьма актуальным направлением научных исследований. В том числе, вопросам разработки и совершенствования моделирования посвящены работы ряда ученых: Н. Fujita, N.Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto, Ansgar Jüngel, L.Rossi, А.А.Самарского, А.С.Калашникова, В.А.Галактионова, М.А. Цыганова, В.Н. Бикташева, М.Д. Васильева и других авторов, обнаружены неограниченность решений, эффект конечной скорости распространения и пространственная локализация возмущений, в конечном времени существования возмущений в нелинейной среде при наличии источника и поглощения.

В работе авторов Ilan G. Ron, Ido Golding, Beatrice Lifszitz-Mercer, Eshel Ben-Jacob некоторые из структурных форм развития бактериальной колонии рассмотрены как возможные модели роста опухоли. В работе авторов Y.Тao, X.Не и S.N.Zheng доказано существование и единственность классических решений системы уравнений кросс-диффузии и показано, что классические решения глобально ограничены. Математические модели взаимодействия нескольких видов, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, представлены, в работах Г.Н. Голубева, Е.А. Апонина, А.Д. Базикина, Г.Ю. Ризниченко, Р. Auger, J-Ch. Poggiale, A.I. Khibnik, Blasius B., Belgacem F., Cosner C., Chauvet E., Waltman P. В природе системы с кросс-диффузией широко распространены и интерпретируются как результат социального поведения особей в работах G. Flierl, D. Grunbaum, S. Levin, D. Olson. Асимптотическая устойчивость по времени решений нелинейных систем уравнений диффузии с нелокальными граничными условиями была рассмотрена

следующими авторами: Х.У. Chen, Н. Matano, M.Sugimoto, John King, А.А.Самарский, А.П.Михайлов, В.А. Галактионов, Е.Куркина.

В Узбекистане нелинейными задачами диффузии и их системами, описывающие различные процессы диффузии, занимались Н.М.Мухитдинов, М.М.Арипов, Б.Х.Хужаёров, А.С.Расулов, Н.Равшанов, Ж.Тохиров, Н.Утеулиев, З.Р.Рахмонов, Ш.А.Садуллаева, А.С.Матякубов, Д.К.Мухамедиева и другие. Их основные работы посвящены численному изучению свойств решений задач нелинейных систем уравнений диффузии, которые можно применить к задачам моделирования процессов кросс-диффузии, фильтрации, теплопроводности и биологической популяции. Как доказано в работах М.М.Арипова, эффективными методами исследования нелинейных задач являются метод нелинейного расщепления и метод эталонных уравнений. Анализ работ по моделированию кросс-диффузионных систем исследованием условий blow-up решений, о глобальной разрешимости и не разрешимости решений по времени задачи нелинейными граничными условиями для систем уравнений кросс-диффузии и результаты практического применения методов и алгоритмов при решении различных прикладных задач показывает, что теоретические и прикладные проблемы в области моделирования нелинейных процессов требуют более глубокого и полного исследования. К их числу относится проблема разработки алгоритмов, обеспечивающая решение нелинейных кросс-диффузионных систем на основе автомодельного анализа и эталонных уравнений.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ Самаркандского государственного университета №19.12 «Разработка математических моделей и численных анализ инженерных и природных процессов», а также фундаментальными грантами №ОТ-Ф4-64 «Составление и численный анализ гидродинамических моделей фильтрации жидкости и переноса веществ в неоднородных пористых средах».

Целью исследования является разработка аналитических и численных методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения нелинейной задачи кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями.

Задачи исследования:

получить условие глобального существования решения для математической модели кросс-диффузии;

установить критические экспоненты для нелинейной модели кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями;

получить главный член асимптотики автомодельных решений с компактным носителем нелинейной задачи кросс-диффузии;

разработать алгоритм и комплекс программ для численного решения нелинейных задач кросс-диффузии и визуализировать решения.

Объектом исследования являются нелинейные модели кросс-диффузии, описываемые системами параболических уравнений с нелинейными граничными условиями.

Предмет исследования. Предметом исследования являются вычислительные схемы и программное обеспечения для численного исследования

качественных нелинейных свойств математических моделей кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями.

Методы исследования. В диссертации использовались автомодельный анализ и приближенно автомодельные методы, принцип сравнения решений, методы эталонных уравнений, разностные схемы для построения численных решение, методы итерации, метод прогонки.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получено условие существования глобального решения для математической модели кросс-диффузии;

найден значение критической экспоненты типа Фуджита для модели кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями;

получен главный член асимптотики автомодельных решений для системы кросс-диффузии поставленными с нелинейными граничными условиями;

разработаны алгоритмы и разностные схемы для численного решения задач кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями.

Практические результаты исследования следующие:

получены асимптотики автомодельных решений задачи кросс-диффузии;

построены численные решений краевой задачи для системы политропической фильтрации.

Достоверность полученных результатов. Полученные утверждения в диссертации, обоснованы строгими доказательствами на основе теорем сравнения и принципа максимума, а также подтверждением результатами вычислительных экспериментов, соответствием полученные результаты с законами сохранения.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется применением методы построения автомодельного решения, асимптотические формулы, схемы численного решения и алгоритмы в численных расчетах и аналитическое решение кросс-диффузионной модели биологической популяции, модели Бурриджа-Кнопфа, сейсмологических задач, модели таксисных волн.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что построены итерационные процессы, созданы численные вычислительные схемы и программное обеспечение, позволяющие проводить эффективные вычислительные эксперименты по таким нелинейным задачам, как таксисные волны, политропическая фильтрация, биологическая популяция, динамика роста структуры леса, движение тектонических плит.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты, по численному и аналитическому решению нелинейных задач кросс-диффузии полученные в диссертационной работе, внедрены в практику в следующих направлениях:

из алгоритмов численного и условий существования глобального решения краевой задачи кросс-диффузии использованы для решения дифференциальных уравнений в частных производных с кусочно-постоянными аргументами в исследованиях по проекту гранта «Новые периодические решения дифференциальных уравнений с запаздыванием второго порядка с кусочно-постоянными аргументами» R.J130000.7854.5F235 (справка UTM-J-5401/12-16/1/5JLD-2(84) от 19 января 2020 года Университета Технологий Малайзии). В

результате, дало возможность получить критерии существования и единственности решения второго порядка дифференциальных уравнений в частных производных с кусочно-постоянными аргументами;

алгоритмы и программа численного решения системы кросс-диффузии использовалась для прогнозирования роста потери воды на фильтрацию из водохранилищ и каналов в Управлении магистральных систем «Зарафшон» (справка №33-8/8343 от 26 ноября 2019 года Министерства по развитию информационных технологий и коммуникаций Республики Узбекистан). В результате, позволило оперативно определять скорости фильтрации при различных значениях числовых параметров среды.

Апробация результатов исследований. Результаты данного исследования апробировались на 10 научно-практических конференциях, в том числе, на 6 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 7 статей в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации результатов диссертационных исследований, в том числе 3 статьи опубликованы в зарубежных с импакт-фактором изданиях, 4 в республиканских научных изданиях, получены 2 авторских свидетельства на программы для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 96 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «**Математические модели процессов кросс-диффузии**», имеет обзорный характер. В первом параграфе излагаются свойства математической модели кросс-диффузионных процессов и результаты исследований международных обзоров. Во втором параграфе первой главы приводятся основные определения и вспомогательные утверждения.

Далее, подробно приведем основные результаты первой главы.

Рассмотрим свойства решений следующей нелинейной системы кросс-диффузии, с нелинейными граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$-v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^{q_1}(0, t), \quad -u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (3)$$

где $m_i \geq 1$, $q_i > 0 (i=1,2)$, $u_0(x)$ и $v_0(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+ .

Система (1) описывает процесс кросс-диффузии (перекрестная диффузия). Кросс-диффузионные модели встречаются в различных областях естествознания. Например, в физике (физика плазмы, тепло и массоперенос в пористых средах), в химии (динамика электролитических растворов), в биологии (кросс-диффузионный транспорт, динамика популяционных систем), в экологии (динамика возрастной структуры леса), в сейсмологии – модель Бурриджа-Кнопоффа, описывающая взаимодействие тектонических плит.

Процесс кросс-диффузия означает, что пространственное перемещение одного объекта, описываемого одной из переменных, происходит за счет диффузии другого объекта, описываемого другой переменной.

Известно, что системы вырождающихся уравнений может не иметь классического решения в области, где $u, v \equiv 0$. Далее приведем условия существования и несуществования глобальных решений задачи (1)-(3) на основе автомодельного анализа.

Теорема 1. Решение задачи (1)-(3) является глобальным при следующих условиях $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$.

Теорема 2. Решение задачи (1)-(3) для достаточно больших начальных данных является неограниченным при следующих условиях $q_1 > 1, q_2 > 1$.

Теорема 3. Если $q_1 > m_2 + 1, q_2 > m_1 + 1$ и начальные данные достаточно малы, то решение задачи (1)-(3) является глобальным.

Замечания 1. Теорема 1 показывает, что критические экспоненты глобального существования решения являются $q_{10} = 1, q_{20} = 1$.

Замечания 2. Теорема 3 показывает, что критические экспоненты типа Фуджита является $q_{1c} = m_2 + 1, q_{2c} = m_1 + 1$.

Параграф 1.4 посвящен исследованию асимптотики автомодельных решений и численному моделированию задачи кросс-диффузии (1)-(3) с нелинейными граничными условиями.

Система (1) имеет ограниченные автомодельные решения с компактным носителем следующего вида:

$$\begin{cases} \underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ \underline{v}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi), \end{cases} \quad \xi = x(T+t)^{-\beta}, \quad (4)$$

где $T > 0$, $\beta = \frac{q_1 - m_2}{2q_1 - m_2 - 1} = \frac{q_2 - m_1}{2q_2 - m_1 - 1}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2q_1 - m_2 - 1}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2q_2 - m_1 - 1}$, а

функции $(\varphi(\xi), f(\xi))$ являются решением следующей задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2 \varphi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (6)$$

которое получается после подстановки (4) в (1)-(3) и некоторых упрощений. Рассмотрим следующие функции:

$$\tilde{f}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_2-1}}, \quad \tilde{\varphi}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_1-1}}, \quad (7)$$

где $a > 0$.

Имеет место теорема.

Теорема 4. Решение краевой задачи (5), (6) при $\xi \rightarrow \sqrt{a}$ с компактным носителем имеет асимптотику

$$f(\xi) = c_1 \tilde{f}(\xi)(1 + o(1)), \quad \varphi(\xi) = c_2 \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \quad (8)$$

где $c_1 = \left(\frac{\beta(m_2-1)}{2} \right)^{1/(m_1-1)}, \quad c_2 = \left(\frac{\beta(m_1-1)}{2} \right)^{1/(m_2-1)}.$

Далее в этом параграфе разработана численная схема, ориентируясь на метод конечных разностей. В этом случае система уравнений (1) по пространственным координатам аппроксимируется со вторым порядком точности и с первым порядком по t .

Для создания итерационного процесса, целесообразно значения узлов на внутренних шагах итерации вычислять методом прогонки. При этом основная трудность численного решения нелинейных задач заключается в подборе подходящего начального приближения для итерационного процесса. Поэтому, как правило, в процессе решения конкретных задач используются функции, отражающие характерные свойства искомого решения и полученные на основе качественного анализа нелинейной задачи. В зависимости от значения числовых параметров задачи данная проблема решается выбором адекватного начального приближения, в качестве которого при вычислениях использованы установленные асимптотические формулы.

В соответствии с результатами параграфа §1.3 проведены соответствующие численные расчеты, которые приведены ниже в виде графиков. В качестве начального приближения для итерационного процесса использованы формулы (4), (8).

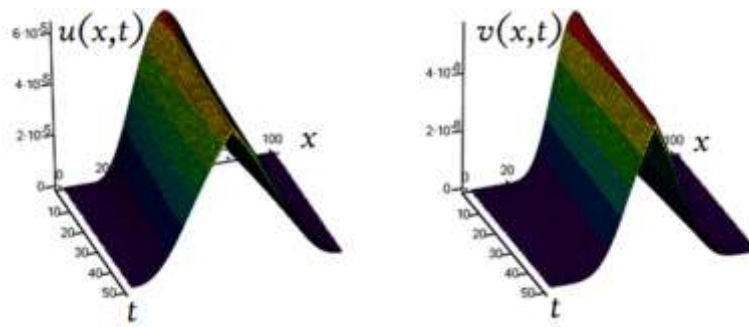


Рис.1. Численное решение задачи (1)-(3) при $q_1 = 4.75$, $q_2 = 5.5$, $m_1 = 1.15$, $m_2 = 1.35$.

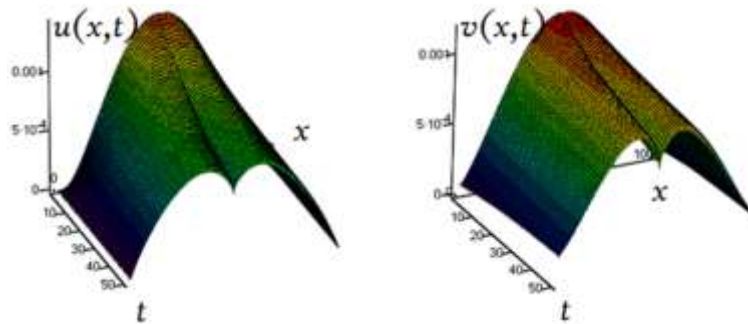


Рис.2. Численное решение задачи (1)-(3) при $q_1 = 1.75$, $q_2 = 1.95$, $m_1 = 1.55$, $m_2 = 1.65$.

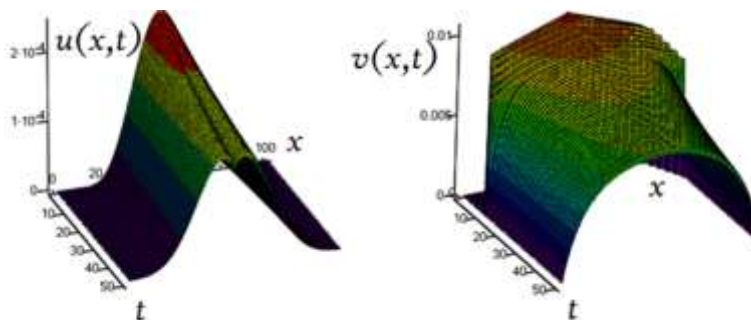


Рис.3. Численное решение задачи (1)-(3) при $q_1 = 1.8$, $q_2 = 2.3$, $m_1 = 1.75$, $m_2 = 1.25$.

Графики результатов численного решения задачи (1)-(3) при $m_i > 1$ ($i = 1, 2$) представлены на рисунках. 1-3, что соответствует случаю медленной диффузии. При этом перемещение объекта происходит с конечной скоростью, если $m_i > 1$ ($i = 1, 2$), как следует из асимптотических формул (4), (8) и графиков. Для каждой среды, находящейся в конечной точке, глубина проникновения диффузионной волны зависит от времени и фронта волны (точка, в которой $\underline{u}(x, t)$, $\underline{v}(x, t)$ обращаются в нуль).

В параграфе 1.5 исследованы качественные свойства решений нелинейной системы кросс-диффузии (1)-(3) с нелинейными граничными условиями и переменной плотностью. Получен главный член асимптотики автомодельных решений, для численного исследования рассматриваемой задачи предложен способ выбора начального приближения для итерационного процесса.

Вторая глава диссертации «Свойства системы кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями» посвящена исследованию свойств

решений нелинейной системы параболических уравнений кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями.

В первом параграфе изучены качественные свойства решений следующей нелинейной модели кросс-диффузии, с нелинейными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\begin{cases} -v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^{q_1}(0, t), \\ -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \end{cases} \quad t > 0, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (11)$$

где $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $m_i > 1$, $q_i > 0$ ($i = 1, 2$), u_0 и $v_0(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+ .

На основе автомодельного анализа установлены условия существования и не существования в целом по времени решений задачи (9)-(11).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1)}{p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1)} = \\ &= \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1)}{p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1)}, \\ \alpha_1 &= \frac{(p - 1)(q_2 - 1)}{l_1}, \quad \alpha_2 = \frac{(p - 1)(q_1 - 1)}{l_2}, \\ l_1 &= p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1), \\ l_2 &= p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1). \end{aligned}$$

Теорема 5. Решение задачи (9)-(11) для достаточно больших начальных данных является неограниченным при следующих условиях $\min\{l_1, l_2\} > 0$.

Теорема 6. Если $\max\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} < 0$ и начальные данные достаточно малы, то решение задачи (9)-(11) является глобальным.

Теорема 7. Решение задачи (9)-(11) является глобальным при следующих условиях $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$.

Замечания 3. Теорема 7 показывает, что критические экспоненты глобального существования решения являются $q_{10} = 1, q_{20} = 1$.

Замечания 4. Теорема 5 показывает, что критической экспонентой типа Фуджита является условие $\min\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} = 0$.

В параграфе 2.2 изучены асимптотики решений задачи кросс-диффузии (9)-(11). Доказана следующая теорема.

Теорема 8. Решение задачи (9)-(11) при $\xi \rightarrow a^{(p-1)/p}$ с компактным носителем имеет асимптотику

$$\begin{cases} u(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} \tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)), \\ v(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \tilde{\phi}(\xi)(1+o(1)). \end{cases} \quad (12)$$

где $\tilde{\varphi}(\xi) = A_1 \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)^k$, $\tilde{\phi}(\xi) = A_2 \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)^z$, $k = \frac{(p-1)(p-m_1-1)}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}$,
 $z = \frac{(p-1)(p-m_2-1)}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}$, $A_1^{m_2-1} A_2^{p-2} \left(\frac{zp}{p-1} \right)^{p-1} = A_2^{m_1-1} A_1^{p-2} \left(\frac{kp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta$,
 $a > 0$.

В §2.3 разработаны разностные схемы для (9)-(11) и проведен вычислительный эксперимент. Для расчета использовали шаг сетки $h=0.05$, число узлов $N=2500$ и точность итерации $\varepsilon=10^{-5}$. Счет проводился до $t=2$ шагом $\tau=0.02$. В качестве начального приближения для итерационного процесса использованы формулы (12).

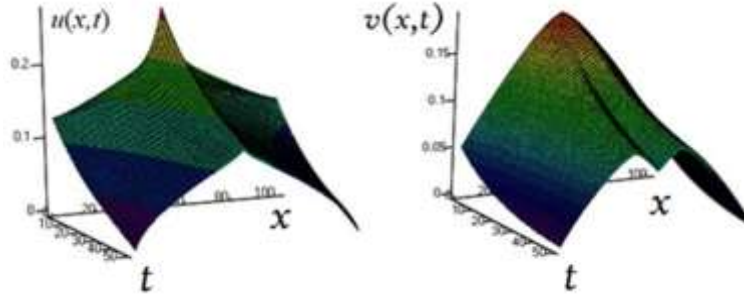


Рис.4. Численное решение задачи (9)-(11) при $q_1 = 2.25$, $q_2 = 2.25$, $p = 3.75$, $m_1 = 1.95$, $m_2 = 1.35$.

На рис.4 представлены графики численных результатов, где начиная с $t=0.3$, в $v(x,t)$ появляется структура. Глубина проникновения двух компонентов совместима.

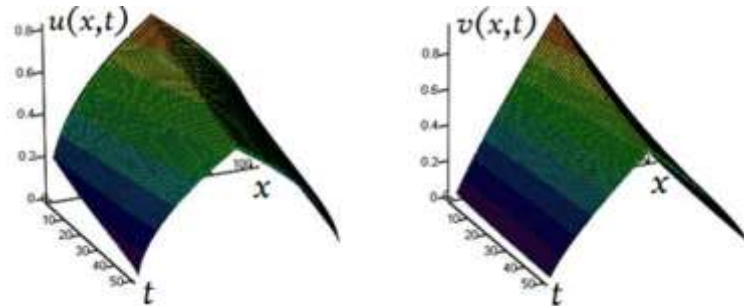


Рис.5. Численное решение задачи (9)-(11) при $q_1 = 2.75$, $q_2 = 2.95$, $p = 3.25$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1.6$.

В этом случае глубины проникновения для $u(x,t)$ и $v(x,t)$ почти совпадают.

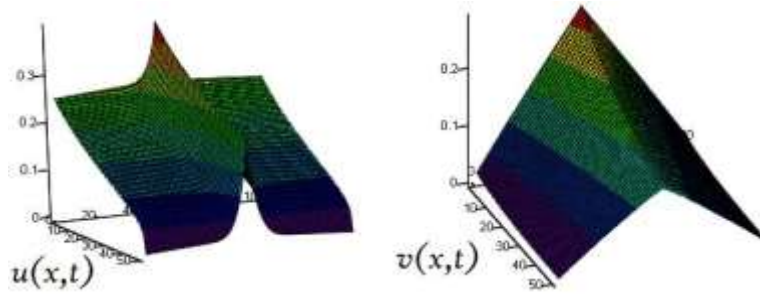


Рис.6. Численное решение задачи (9)-(11) при $q_1 = 2.3, q_2 = 2.2, p = 3, m_1 = 1.9, m_2 = 1.4$.

Результаты численных экспериментов показывают, что глубина проникновения для $u(x, t)$ в 5 раз меньше чем для $v(x, t)$.

Третья глава диссертации «Свойства математической модели процессов кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями» посвящена получению условий существования и не существования в целом по времени решений нелинейной задачи кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями. Получены асимптотики глобальных решений и построены разностные схемы для многомерной задачи диффузии на основе метода баланса, гарантирующей законы сохранения.

В §3.1 рассматривается следующая система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (13)$$

с нелинейными граничными условиями

$$\begin{cases} -v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^{q_1}(0, t), \\ -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \end{cases} \quad t > 0, \quad (14)$$

и начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (15)$$

где $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $k > 0$, $m_i > 1$, $q_i > 0 (i=1, 2)$, $u_0(x)$ и $v_0(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+ .

Введем следующие обозначения:

$$\beta = \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1) - k(p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1)}{(k(p - 2) + 2)(q_1 - 1)(q_2 - 1) - k(p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1)} = \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1) - k(p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1)}{(k(p - 2) + 2)(q_1 - 1)(q_2 - 1) - k(p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1)},$$

$$\alpha_1 = \frac{(k(p-2)+1)(q_2-1)}{r_1}, \alpha_2 = \frac{(k(p-2)+1)(q_1-1)}{r_2},$$

$$r_1 = (k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1),$$

$$r_2 = (k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1).$$

Следующие теоремы являются основными результатами этого параграфа.

Теорема 9. Решение задачи (13)-(15) для достаточно больших начальных данных является неограниченным (blow-up) при следующих условиях $\min\{r_1, r_2\} > 0$.

Теорема 10. Если $\max\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} < 0$ и начальные данные достаточно малы, то решение задачи (13)-(15) является глобальным.

Во втором параграфе этой главы изучены асимптотические представления автомодельного решения задачи (13)-(15).

Пусть

$$\begin{cases} u_+(x, t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ v_+(x, t) = (T+t)^{-\alpha_2} g(\xi), \quad \xi = x(T+t)^{-\beta}, \end{cases} \quad (16)$$

где $T > 0$, $f(\xi)$ и $g(\xi)$ искомые функции, которые по теореме сравнения решений должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(g^{m_1-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f \leq 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(f^{m_2-1} \left| \frac{dg^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{dg}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{dg}{d\xi} + \alpha_2 g \leq 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} -g^{m_1-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi}(0) \geq f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \left| \frac{dg^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{dg}{d\xi}(0) \geq g^{q_2}(0). \end{cases} \quad (18)$$

Наряду с этим, рассмотрим следующие функции:

$$\begin{cases} \bar{f}(\xi) = A_1 \left(a - (\xi + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^y, \\ \bar{g}(\xi) = A_2 \left(a - (\xi + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^z, \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{где } h \in \left(0, a^{\frac{p-1}{p}} \right), A_2^{m_1-1} A_1^{k(p-2)} k^{p-2} \left(\frac{yp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta, A_1^{m_2-1} A_2^{k(p-2)} k^{p-2} \left(\frac{zp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta,$$

$$a > 0, \quad y = \frac{(p-1)(k(p-2)-m_1-1)}{k^2(p-1)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}, \quad z = \frac{(p-1)(k(p-2)-m_2-1)}{k^2(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}.$$

Теорема 11. Если $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $m_i > 1$, то решение краевой задачи (17), (18) с компактным носителем при $\xi \rightarrow a^{(p-1)/p}$ имеет асимптотику

$$\begin{cases} f(\xi) = \bar{f}(\xi)(1+o(1)), \\ g(\xi) = \bar{g}(\xi)(1+o(1)). \end{cases} \quad (20)$$

А также разработаны численные схемы для (13)-(15) и получены на их основе некоторые результаты вычислительных экспериментов.

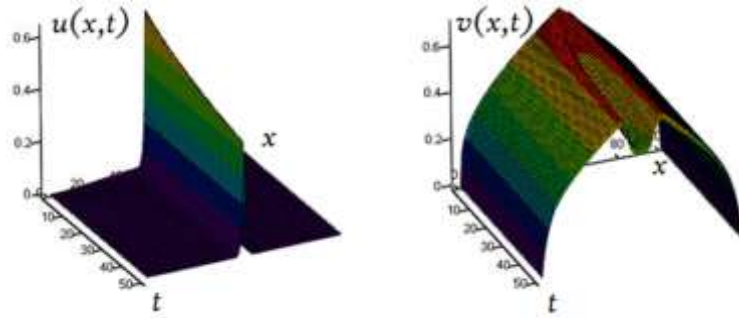


Рис.7. Численное решение задачи (13)-(15) при $q_1 = 3, q_2 = 2.7, k = 1.3, p = 3.3, m_1 = 1.5, m_2 = 1.8$

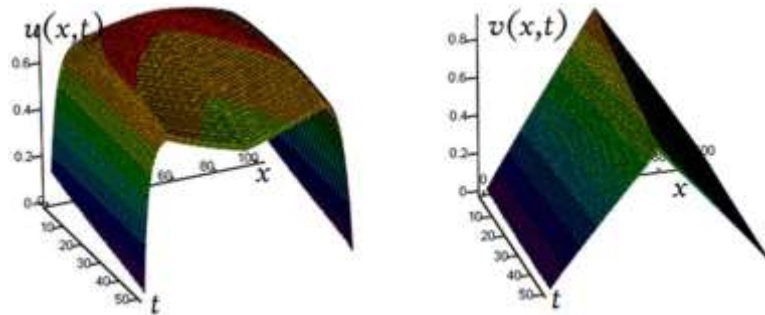


Рис.8. Численное решение задачи (13)-(15) при $q_1 = 3.1, q_2 = 3.7, k = 1.25, p = 3.8, m_1 = 2.1, m_2 = 1.2$

В §3.3 рассмотрена параболическая система многомерных уравнений диффузии в однородной среде с нелинейными граничными условиями

$$\begin{cases} u_t = \nabla(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u), & x \in R_+^N, \quad t > 0, \\ v_t = \nabla(|\nabla v|^{p_2-2} \nabla v), & x \in R_+^N, \quad t > 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} -|\nabla u|^{p_1-2} \frac{\partial u}{\partial x_1} = u^{q_1}, & x_1 = 0, \quad t > 0, \\ -|\nabla v|^{p_2-2} \frac{\partial v}{\partial x_1} = v^{q_2}, & x_1 = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0, \quad (23)$$

где $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $p_i > 2$, $q_i > 0 (i=1, 2)$, $u_0(x)$ и $v_0(x)$ неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+^N .

Система параболических уравнений (21) встречаются в различных областях естествознания при математическом моделировании процессов не-newтоновской фильтрации, термодинамической реакции, теплопроводности, реакции-диффузии и т.д.

При условиях $p_i > 2 (i=1, 2)$ уравнения (21) соответствуют случаю медленной диффузии, а при $1 < p_i < 2 (i=1, 2)$ - случаю быстрой диффузии. В случае медленной диффузии уравнения (21) являются вырождающимися и поэтому решение задачи (21)-(23) понимается в обобщенном смысле.

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{q_1 p_1 (p_2 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - 4(p_1 - 1)(p_2 - 1)}, \\ \alpha_2 &= \frac{q_2 p_2 (p_1 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - 4(p_1 - 1)(p_2 - 1)}, \\ \beta_1 &= \frac{q_1 \alpha_2 - \alpha_1 (p_1 - 1)}{p_1 - 1}, \quad \beta_2 = \frac{q_2 \alpha_1 - \alpha_2 (p_2 - 1)}{p_2 - 1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее автомодельное решение задачи (21)-(23)

$$\begin{cases} u_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), \\ v_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} \phi(\eta), \end{cases} \quad (24)$$

где $\xi = |\zeta|$, $\zeta_1 = (x_1 + h_1)(T + t)^{-\beta_1}$, $\zeta_i = x_i (T + t)^{-\beta_1}$, $\eta = |\theta|$, $\theta_1 = (x_1 + h_2)(T + t)^{-\beta_2}$, $\theta_i = x_i (T + t)^{-\beta_2}$, $(i = 2, \dots, N)$, $T > 0$, функции $(\varphi(\xi), \phi(\eta))$ являются решением следующей задачи

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta_1 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1 \varphi = 0, \\ \eta^{1-N} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{N-1} \left| \frac{d\phi}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta} \right) + \beta_2 \eta \frac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2 \phi = 0, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} - \left| \frac{d\varphi}{d\xi_1} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \Big|_{\xi_1=h_1} = \varphi^{q_1}(h_2), \\ - \left| \frac{d\phi}{d\eta_1} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta_1} \Big|_{\eta_1=h_2} = \varphi^{q_2}(h_1), \end{cases} \quad (26)$$

которое получается после подстановки (24) в (21)-(23) и упрощений.

Рассмотрим функции

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi) = \left(a_1 - b_1 \xi^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}, \\ \tilde{\phi}(\eta) = \left(a_2 - b_2 \eta^{\frac{p_2}{p_2-1}} \right)^{\frac{p_2-1}{p_2-2}}, \end{cases} \quad (27)$$

где $a_i > 0$ ($i=1,2$), $b_1 = \frac{p_1-2}{p_1} \beta_1^{\frac{1}{p_1-1}} > 0$, $b_2 = \frac{p_2-2}{p_2} \beta_2^{\frac{1}{p_2-1}} > 0$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 12. Решение с компактным носителем системы уравнений (25) имеет асимптотику

$$\varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \quad \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1 + o(1)),$$

когда $\xi \rightarrow (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1}}$, $\eta \rightarrow (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$, где $\tilde{\varphi}(\xi)$, $\tilde{\phi}(\eta)$ - определены в (27).

Ниже представлены некоторые результаты численных экспериментов для различных значений числовых параметров и начальных функций.

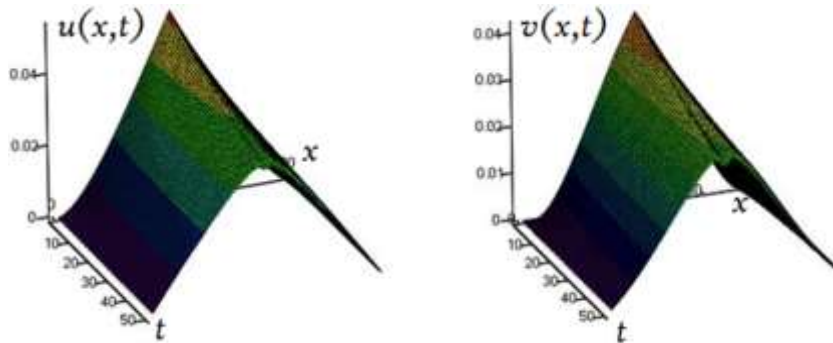


Рис.10. Численное решение задачи (21)-(23) при:
 $q_1 = 2.67$, $q_2 = 2.78$, $p_1 = 3.5$, $p_2 = 3.6$.

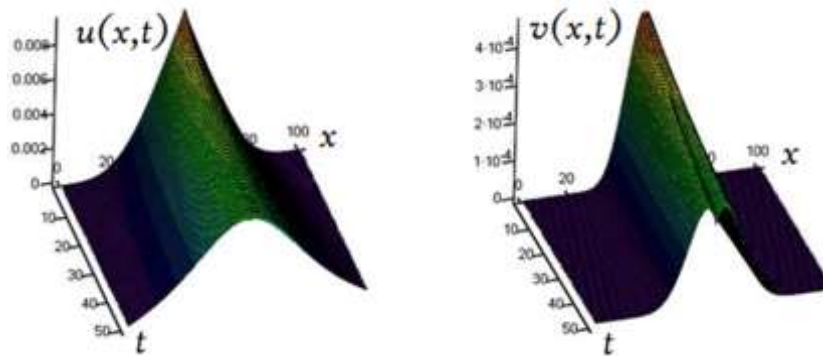


Рис. 11. Численное решение задачи (21)-(23) при:
 $q_1 = 1.36$, $q_2 = 2.0$, $p_1 = 2.2$, $p_2 = 2.1$.

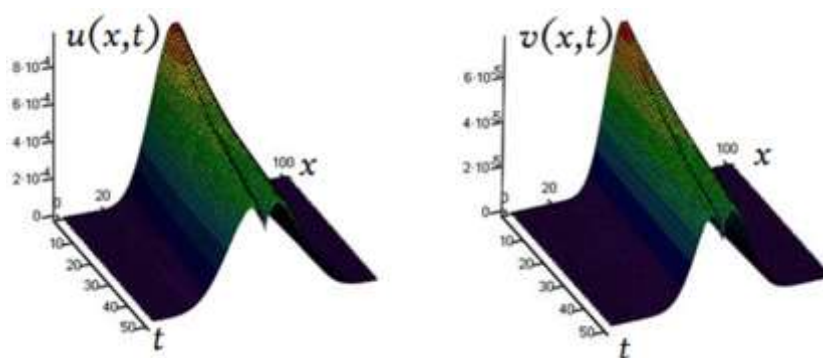


Рис. 12. Численное решение задачи (21)-(23) при:
 $q_1 = 1.37$, $q_2 = 1.58$, $p_1 = 2.2$, $p_2 = 2.1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований по диссертации «Численное моделирование процесса кросс-диффузии в двухкомпонентных средах» представлены следующие выводы:

1. Исследованы качественные свойства решений нелинейной модели кросс-диффузии в однородной и неоднородной среде. Получен главный член асимптотики автомодельных решений системы кросс-диффузии, для численного исследования рассматриваемой задачи предложен способ выбора начального приближения для итерационного процесса.

2. Построены различные автомодельные решения нелинейной задачи кросс-диффузии, установлены значения критической экспоненты типа Фуджита и критические экспоненты для существования глобального решения.

3. Доказано, что при определенных значениях числовых параметров нелинейной системы параболических уравнений кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями могут не иметь глобальных решений по времени.

4. Построены разностные схемы для многомерной задачи диффузии на основе метода баланса, гарантирующий законы сохранения, сконструирован итерационный процесс и проведены численные расчеты, показывающие быструю сходимость к решению.

5. Разработаны алгоритмы, программные средства для численного исследования нелинейной модели кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями и визуализации результатов вычислительного эксперимента.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF
UZBEKISTAN**

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

URUNBAEV JASUR ERKINOVICH

**NUMERICAL MODELING OF THE CROSS DIFFUSION
PROCESS IN TWO-COMPONENT MEDIA**

**05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications
(Physical and mathematical sciences)**

**CONTENT OF DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY
(PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2021

The theme of the philosophy doctor (PhD) dissertation was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2019.4.PhD/FM452.

Dissertation has been prepared at the Samarkand state university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://fti-kengash.uz/> and on the website of “ZiyoNet” Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific supervisor:	Rakhmonov Zafar Ravshanovich doctor of physical and mathematical sciences
Official opponents:	Normurodov Chori Begalievich doctor of physical and mathematical sciences, professor Mamatov Alisher Zulunovich doctor of technical sciences, professor
Leading organization:	Karakalpak State University

Defense will take place on « ____ » _____ 2021 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at the National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is possible to review in Information-resource centre at the National University of Uzbekistan (registered № ____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ____ » _____ 2021.
(mailing report № ____ on « ____ » _____ 2021).

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

A.M.Polatov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

B.F.Abdurakhimov
Deputy Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to develop analytical and numerical methods, algorithms and software for solving the nonlinear cross-diffusion problem with nonlinear boundary conditions..

The research objectives are

to obtain a condition for the global existence of a solution for a mathematical model of cross-diffusion;

establish critical exponents for a nonlinear cross-diffusion model with nonlinear boundary conditions;

obtain the leading term of the asymptotics of self-similar solutions with a compact support of a nonlinear cross-diffusion problem;

develop an algorithm and a complex of programs for the numerical solution of nonlinear cross-diffusion problems and visualize the solutions.

The scientific novelty of the research is as follows:

the condition for the existence of a global solution for the mathematical model of cross-diffusion is obtained;

the value of the critical exponent of the Fujita type for the cross-diffusion model with nonlinear boundary conditions is found;

the main term of the asymptotics of self-similar solutions for a cross-diffusion system with nonlinear boundary conditions is obtained;

algorithms and difference schemes for the numerical solution of cross-diffusion problems with nonlinear boundary conditions are developed.

Implementation of research results. The scientific results on the numerical and analytical solution of nonlinear cross-diffusion problems obtained in the dissertation work are put into practice in the following areas::

from the algorithms of the numerical and existence conditions of the global solution of the boundary value cross-diffusion problem used to solve partial differential equations with piecewise constant arguments in research under the grant project "New periodic solutions of second-order lag differential equations with piecewise constant arguments" R. J130000.7854. 5F235 (reference UTM-J-5401/12-16/1/5JID-2 (84) of 19 January 2020 of the University of Technology Malaysia). As a result, it made it possible to obtain criteria for the existence and uniqueness of a second-order solution of partial differential equations with piecewise constant arguments;

algorithms and a program for numerical solution of the cross-diffusion system were used to predict the growth of water loss for filtration from reservoirs and channels in the Zarafshon Main Systems Department (reference No. 33-8 / 8343 of November 26, 2019 of the Ministry for the Development of Information Technologies and Communications of the Republic of Uzbekistan). As a result, it allowed us to quickly determine the filtration rates for different values of the numerical parameters of the medium.

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and appendices. The volume of the dissertation is 96 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E. Numerical solution to the problem of cross diffusion with nonlocal boundary conditions // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2019, № 4(22), С. 88-100. (01.00.00, №9)
2. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E. On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions //Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2019, 12(5), P. 614–620. (№ 3 Scopus IF=0.6)
3. Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э., Ярметова Д. Численное решение задачи кросс диффузии с нелокальными граничными условиями и переменной плотностью // СамДУ Илмий тадқиқотлар ахборотномаси, 2019, №5, С.28-37. (01.00.00, №2)
4. Urunbaev J. E. Numerical modeling of the cross diffusion process with non-local boundary conditions. // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2020, №2(26), С. 133–145. (01.00.00, №9)
5. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E., Alimov A.A. Shikhiev R.M. On the asymptotic behavior of solutions of a system of diffusion equations with nonlinear boundary conditions // Science and Education in Karakalpakstan, 2020, №2 P. 39-49. (01.00.00, №15)
6. Rakhmonov Z.R., Khaydarov A., Urunbaev J.E. Global Existence and Nonexistence of Solutions to a Cross Diffusion System with Nonlocal Boundary Conditions // Mathematics and Statistics, 2020, №8(4), P. 404-409, (№ 3 Scopus IF=0.1)
7. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E., Allaberdiyev B. On the properties of solutions of a cross-diffusion system with nonlinear boundary flux // Scientific Journal of Samarkand University, 2020, Vol.4, P. 4-11. (01.00.00, №2)

II бўлим (Часть II; Part II)

8. Aripov M., Urunbayev J. E. To asymptotic of self - similar solutions parabolic system coupled via nonlinear boundary flux. Труды международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2014», Самарканд, 2014, Том № 1, с. 43-45.
9. Rakhmonov Z.R. Urunbaev J.E. On the properties of solutions of the cross-diffusion system coupled via nonlinear boundary flux. Сборник тезисов докладов республиканской научной конференции «Новые результаты математики и их приложения» Самарканд, 2018. Том № 2 с. 14.
10. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E. Critical curve of the cross diffusion system coupled via nonlinear boundary flux. «Mathematical analysis, Differential equation & Applications» MADEA 8 Bishkek, Cholpon – Ata, 2018, с.101 (Kyrgyzstan)

11. Rakhmonov Z.R., Urunbayev J.E., Sobirov H. Global existence of solutions to a cross diffusion system with nonlinear boundary conditions Труды международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2018», Самарканд, 2018, с. 102.

12. Aripov M., Rakhmonov Z. R., Urunbayev J. E. On the asymptotic of solutions of cross-diffusion systems coupled via boundary conditions. «Математик моделлаштириш, алгоритмлаш ва дастурлашнинг долзарб муаммолари» Республика илмий-амалий анжуманининг маърузалар тўплами. Тошкент, 2018, 84 б.

13. Арипов М.М., Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э., Асимптотика автомодельных решений нелинейной системы кросс диффузии Международная конференция “Математический анализ и его приложение к современной математической физике”. Самарканд, 2018, с. 124.

14. Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э., Ярметова Д. Об асимптотике решений задачи кросс диффузии с переменной плотностью. “Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики” материалы республиканской конференции. Ташкент, 2019, с. 61-62.

15. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E. Critical curve of the cross diffusion system coupled via nonlinear boundary flux. STEMM: Abstracts of the Joint International Conference. Tashkent, 2019. p. 120-121.

16. Urunbaev J.E. On the qualitative properties of solutions of the cross diffusion system. "Amaliy matematika va information texnologiyalarning dolzarb muammolari" xalqaro anjuman tezislari to'plami Toshkent, 2019, 67 b.

17. Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E. Properties of solutions of a system of nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. «Современные проблемы математики» Нукус, 2020, с. 199-200.

18. Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. Программа для численного решения задачи Кросс-диффузии с нелокальными граничными условиями. № DGU 06286, 15.03.2019.

19. Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. Программа для численного решения задачи Кросс-диффузии с нелокальными граничными условиями. № DGU 07452, 29.11.2019.