



МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ФЕРГАНСКИЙ ФИЛИАЛ
ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

**Контрольные задания по высшей математике
для студентов заочной формы обучения
Учебно-методическое пособие
по дисциплине
МАТЕМАТИКА 1
(МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ)**

Фергана 2018

**TATU FF
O'QUV USLUBIY
BO'LIM**

Perz №-306
28.10.2018

Учебно-методическое пособие по предмету «Математика 1» предназначен для студентов заочного обучения всех направлений бакалавриата филиала.

Утверждено и рекомендовано к изданию на заседании Совета Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, протокол № 8, от «29» 10 2018 г..

Составитель:

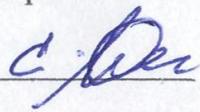
Ё. А. Рахимов  – ФФ ТУИТ, ассистент кафедры «Естественные дисциплины»

Рецензенты:

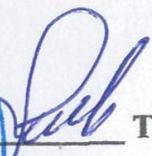
И. Тожибоев  – ФФ ТУИТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Компьютерные системы»

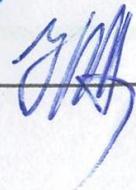
А. Абдуқодиров  – ФФ ТУИТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Информационные технологии»

Учебно-методическое пособие обсужден и одобрен на заседании кафедры «Естественные дисциплины» (протокол № 20 от «25» 09 2018 г.) и рекомендован к рассмотрению на Учебно-методическом Совете факультета «Компьютерный инжиниринг».

Зав. кафедрой ЕД:  к.ф.-м.н., доцент Сабиров С. С.

Учебно-методическое пособие обсужден и одобрен на заседании Учено-методического Совета Факультета «Компьютерный инжиниринг» (протокол № 2 от «28» 09 2018 г.)

Председатель Учено-методического Совета факультета КИ:  Тожибоев И.

СОГЛАСОВАНО:
Начальник учебно-методического отдела  Умаров Ш.

Основная форма учебных занятий студентов-заочников – самостоятельная работа над учебным материалом, слагающаяся из следующих составных элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка и выполнение контрольных работ.

Математический анализ.

Содержание

1.Теория пределов	4
2.Элементы дифференциального исчисления	11
3.Исследование функций одной переменной	16
4.Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	20
5.Экстремумы функций нескольких переменных.	24
6.Элементы интегрального исчисления (неопределенные интегралы) ..	26
7.Определенные интегралы.....	33
8.Ряды	41
9.Знакомство с обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ).	49

1. Теория пределов

Вопросы для повторения

1. Понятие функции, области определения и множества значений функции.
2. Понятие четности, нечетности и периодичности функции.
3. Понятие предела функции в точке и на бесконечности.
4. Первый и второй замечательные пределы.
5. Понятие непрерывности функции.
6. Свойства непрерывных функций.

Найти области определения функции

1. $f(x) = \frac{5x+12}{x^2-4}$

Ответ: $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

2. $f(x) = \sqrt{3-8x}$

Ответ: $D(f) = \left[-\infty; \frac{3}{8}\right]$

3. $f(x) = \ln(2x+5)$

Ответ: $D(f) = (-2.5; +\infty)$

4. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin \frac{x+2}{3}$

Ответ: $D(f) = [-5; 0) \cup (0; 1]$

5. $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}} - 7 \cos 2x$

Ответ: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

6. $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

7. $f(x) = \sqrt{4-5x} + 3 \arccos \frac{2x+3}{6x}$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; \frac{4}{5}\right]$

8. $f(x) = \frac{\log_5(x^2+4x)}{\sqrt{25-x^2}}$

Ответ: $(-5;-4) \cup (0;5)$

9. $f(x) = \log_{\frac{x+1}{2x}}(3 + 5x - 2x^2)$

Ответ: $(0;1) \cup (1;3)$

10. $f(x) = \sqrt{\sin x}$

Ответ: $[2k\pi; (2k+1)\pi]$

11. $f(x) = \sin \sqrt{x}$

Ответ: $[0; +\infty[$

12. $f(x) = \sqrt{\lg(\cos x)}$

Ответ: $2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

13. $f(x) = \arccos(\lg x)$

Ответ: $[0.1; 10]$

Найти множество значений функции

14. $f(x) = \frac{2}{x+1}$

Ответ: $(-\infty, +\infty)$

15. $f(x) = 3^{x^2+4x-12}$

Ответ: $[3^{16}, +\infty)$

16. $f(x) = 5 + 4x - x^2$

Ответ: $(-\infty, 5]$

17. $f(x) = 5^{-\sqrt{x^2+x}}$

Ответ: $(0, 1]$

Установить четность или нечетность функций

18. $f(x) = a^x + a^{-x}$

Ответ: Четная

19. $f(x) = a^x - a^{-x}$

Ответ: Нечетная

20. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Ответ: Четная

21. $f(x) = \log_2(x^2 - 4)$

Ответ: Четная

22. $f(x) = x^5$

Ответ: Нечетная

23. $f(x) = 5^x$

Ответ: Не четная и не нечетная

Найти пределы последовательности при $n \rightarrow \infty$

24. $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n;$

Ответ: $\frac{1}{2}$

25. $a_n = \frac{2^n + 3}{2^{n+1} + 1};$

Ответ: $\frac{1}{2}$

26. $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-3};$

Ответ: 0

Найти пределы последовательности при $n \rightarrow \infty$ используя замечательные пределы

27. $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_n \cdot ctg \alpha_n}$

Ответ: 1

28. $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\sin 3\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n + 3} - \sqrt{3}}$

Ответ: $6\sqrt{3}$

29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$

Ответ: e^{-4}

30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$

Ответ: e^{-2}

31. $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{tg \alpha_n - \sin \alpha_n}{\alpha_n^3}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Найти пределы функций

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

Ответ: 1

$$33. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

Ответ: $\frac{2}{3}$

$$34. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{5x^2 - 5x - 30}$$

Ответ: 0,2

$$35. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{5x^2 - 5x - 30}$$

Ответ: $\frac{1}{15}$

$$36. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{5x^2 - 5x - 30}$$

Ответ: 0,04

$$37. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$38. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{5x^2 - 5x - 30}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$

Найти пределы функций, используя замечательные пределы

$$39. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 5x};$$

Ответ: 0,2

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x};$$

Ответ: α

$$41. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$$

Ответ: $\frac{5}{3}$

$$42. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi};$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

$$\text{Ответ: } 1$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{3/x}$$

$$\text{Ответ: } e^6$$

$$45. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ответ: } e^k$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{1/x}$$

$$\text{Ответ: } e^5$$

$$47. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$$

$$\text{Ответ: } e^5$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}$$

Найти односторонние пределы

$$49. \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{-\cos x}{x}}$$

$$\text{Ответ: } 0$$

$$50. \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{-\cos x}{x}}$$

$$\text{Ответ: } \infty$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{1-x}}}$$

$$\text{Ответ: } 1$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{1-x}}}$$

$$\text{Ответ: } 0$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2}$$

Ответ: ∞

$$54. \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2}$$

Ответ: $-\infty$

$$55. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{|x|}$$

Ответ: 1

$$56. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{|x|}$$

Ответ: -1

$$57. \lim_{x \rightarrow -1+0} 2^{\frac{1}{x+1}}$$

Ответ: ∞

$$58. \lim_{x \rightarrow -1-0} 2^{\frac{1}{x+1}}$$

Ответ: 0

Исследовать функции на непрерывность

59. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

Решение:

Подозрительными на разрыв являются точки $x_1 = 1$ и решение уравнения $1 - e^{\frac{x}{1-x}} = 0$, т.е.

$$x_2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = +\infty$$

т.е. $x_1 = 1$ – разрыв 2 рода;

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1$$

т.е. $x_2 = 0$ – разрыв 1 рода.

60. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$$

Ответ: $x = 3$ – разрыв 1 рода;
 $x = -3$ – разрыв 2 рода.

61. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

62. При каком значении A будет непрерывной функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = 2 \text{ Следует принять } A = 2$$

2. Элементы дифференциального исчисления

Контрольные вопросы к теме

1. Понятия приращения аргумента и приращения функции.
2. Производная функции, ее геометрический смысл.
3. Понятие дифференцируемости функции.
4. Дифференциал функции, его определение и геометрический смысл.
5. Понятие сложной и обратной функции.
6. Правила вычисления производных сложной и обратной функций.
7. Основные теоремы дифференцирования.
8. Раскрытие неопределенностей по правилам Лопиталю.
9. Производные высших порядков.

Используя таблицу производных и правила дифференцирования, найти производные функций

1.
$$y = 5 + 7x^2 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2-x} + 3^x - \log_2 x + \cos x + \operatorname{ctg} x$$

Ответ:
$$y' = 14x + \frac{5}{2x\sqrt{x}} + \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} + 3^x \ln 3 - \frac{1}{x \ln 2} - \sin x - \frac{1}{\sin^2 x}$$

2. $y = x^2 \ln x$

Ответ: $y' = 2x \ln x + x = x \ln ex^2$

3. $y = \log_2^3(5x-3)$

Ответ:
$$y' = 15 \frac{\ln^2(5x-3)}{\ln^3 2 \cdot (5x-3)} = \frac{15 \log_2^2(5x-3)}{(5x-3) \ln 2}$$

4. $y = 3x^2 - 5x + 3$

Ответ: $y' = 6x - 5$

5. $y = 5x^4 + 3x^2 - 6$

Ответ: $y' = 20x^3 + 6x$

Пример. Найти производную функции:

$$y = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^5(x+2)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$$

Для функций, представляющих собой громоздкие произведения и частные различных степенных выражений, удобно, а для показательно-степенных

функций, где от переменного зависят как основание степени, так и ее показатель, – необходимо применять прием логарифмического дифференцирования.

Этот прием основан на соотношении

$$(\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)} \Rightarrow y'(x) = y(x)(\ln y(x))'.$$

Решение:

$$y = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^5(x+2)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x-1) + 5 \ln(x+3) + 7 \ln(x+2) - \frac{2}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{3} \ln(x-2);$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x+2} - \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-2)};$$

$$y' = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^5(x+2)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}} \left[\frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x+2} - \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-2)} \right]$$

Найти производные функций методом логарифмического дифференцирования

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = y \cdot (\ln y)'$$

6. $y = x^{\arctg(x)}$

Ответ: $y' = x^{\arctg(x)} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\arctg(x)}{x} \right)$

7. $y = x^{\sin x}$

Ответ: $y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

8. $y = (\sin x)^x$

Ответ: $y' = \sin x^x \left(\ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x} \right)$

9. $y = (x+1)^{\ln x}$

$$\text{Ответ: } y' = (x+1)^{\ln x} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln x}{x+1} \right)$$

$$10. y = (3x^2 + 3x - 1)^x$$

$$\text{Ответ: } y' = (3x^2 + 3x - 1)^x \left(\ln(3x^2 + 3x - 1) + x \frac{6x + 3}{3x^2 + 3x - 1} \right)$$

Найти производную функции, заданной неявно

$$11. x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}$$

$$12. x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}$$

$$13. x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}$$

$$14. y = x^3 + 3x, \quad x_0 = 1;$$

$$15. y = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$16. y = \frac{x+2}{e^x}, \quad x_0 = 0;$$

$$17. y = \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1.$$

Найти производные порядка n

Если u и v - функции, имеющие производные порядка n , то

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \quad \text{- формула Лейбница.}$$

$$18. y = x^4 + 3x^2 + 2, \quad a)n = 2 \quad b)n = 4 \quad c)n = 5;$$

19. $y = x \ln x$, a) $n = 2$ b) $n = 3$;
 20. $y = x^2 \arctg x$, a) $n = 2$ b) $n = 3$;
 21. $y = x^2 \cos x$, $n = 10$;
 22. $y = e^x x^3$, $n = 20$;
 23. $y = (x^2 + 1)2^x$, $n = 15$;
 24. $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$, $n = 10$;
 25. $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$, $n = 1$.

Составить уравнения касательных и нормалей к кривым

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $A_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ а уравнение нормали - } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$y = x^2 + 2$ в точке $x_0 = 1$

Касательная $y - 3 = 2(x - 1)$

Нормаль $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

$y = \frac{x^3}{3}$ в точке $x_0 = -1$

$y = \frac{8}{4 + x^2}$ в точке $x_0 = 2$

$y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$

$y = x \ln x$ в точке $x_0 = e$

$y = e^{-2x}$ в точке $x_0 = 0$

Найти дифференциалы функций

Если u и v дифференцируемые функции от x

26. $y = u + v^2$;

27. $y = u^3 v^2 + u^m v^n$;

28. $y = \frac{u}{v}$;

29. $y = \arctg \frac{u}{v}$;

30. $y = \cos(uv)$;

31. $y = e^{u^2 + v^2}$.

Вычислить приближенно

32. $\sqrt[3]{28}$;

34. $\lg 101$;

36. $x^3 + x$ при $x = 2.01$

38. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$ при $x = 2.9$

33. $\sqrt[4]{255}$;

35. $\sin 31^\circ$;

37. $\sqrt{x^2 - 5x + 12}$ при $x = 1.3$

39. $\sqrt{1+x}$ при $x = 3.02$

Вычислить пределы с использованием правила Лопиталья

40. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$;

42. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{0,1}}$;

44. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$;

46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$;

48. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$;

50. $\lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln x$, $\varepsilon > 0$;

52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$;

54. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$;

56. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$;

58. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{x} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{x}}$;

41. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\operatorname{tg} 3x}$;

43. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$;

45. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$;

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$;

49. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$;

51. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$;

53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x}$;

55. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \ln x}{x}$;

57. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

59. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$.

3. Исследование функций одной переменной

Контрольные вопросы к теме

1. Критерии монотонности функции.
2. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции.
3. Понятие стационарных точек функции.
4. Области выпуклости графика функции и точки перегиба.
5. План исследования функции и построение ее графика.
6. Интерполяция и аппроксимация функций.
7. Интерполяционный полином Лагранжа.
8. Формула Тейлора и формула Маклорена.
9. Понятие эмпирических функций.

Найти асимптоты кривой

$$y = 2x + \frac{1}{x}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(2x + \frac{1}{x} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(2x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ — вертикальная асимптота}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) = 2;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \Rightarrow y = 2x \text{ — наклонная асимптота при } x \rightarrow \pm\infty$$

Исследовать функцию и построить график:

Пример. План исследования функции и построения ее графика рассмотрим на примере функции

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

I. Область определения $X = \mathbf{R}$.

Функция не является периодической.

$$y(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -(y(x)) \Rightarrow \text{функция четная}$$

II. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow y = 0$ — асимптота, причем,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = -0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = +0;$$

Так как $y(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, то возможно существование наклонных асимптот (негоризонтальных).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \text{кроме горизонтальной асимптоты}$$

$y = 0$ наклонных асимптот нет

III. Найти локальные экстремумы функции

$$y' = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2};$$

Из уравнения $y'(x) = 0$ находим стационарные точки при $x = 1$ и $x = -1$

IV. Найти точки перегиба функции

$$y'' = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)2x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

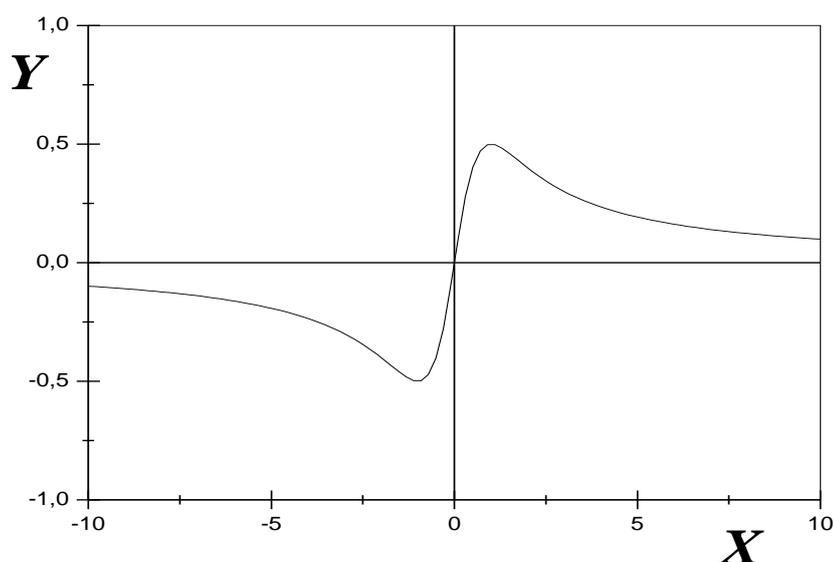
$y'' = 0$ при $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$ (точки перегиба)

$y''(-1) > 0 \Rightarrow$ при $x = -1$ - максимум; $y''(1) < 0 \Rightarrow$ при $x = 1$ - минимум

V. Строим таблицу, в которой выделены промежутки однообразного поведения функции и ее характерные точки.

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 1)$	-1	$(-1; 0)$	0
$y'(x)$	-	-	-	0	+	+
$y''(x)$	-	0	+	+	+	0
				min		
		точка перегиба				точка перегиба

x	0	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
$y'(x)$	+	+	0	-	-	-
$y''(x)$	0	-	-	-	0	+
			max			
	точка перегиба				точка перегиба	



Построить графики функций:

1. $y = \frac{e^x}{x}$	2. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
3. $y = \frac{2x}{\ln x}$	4. $y = x \operatorname{arctg} x$
5. $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x$	6. $y = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$
7. $y = x^2 \ln x$	8. $y = x^2 e^{-x^2}$

Формула Тейлора

1. Используя основные разложения, представить функцию $f(x)$ формулой Тейлора порядка n в окрестности точки a .

9. $f(x) = \sin x^2, \quad n = 10;$

10. $f(x) = e^{x^2+x}, \quad n = 5;$

11. $f(x) = e^x \cos x, \quad n = 5;$

12. $f(x) = \ln(1+2x^2), \quad n = 6;$

13. $f(x) = \ln(\cos x), \quad n = 6;$

14. $f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad n = 6;$

15. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad n = 5;$

16. $f(x) = \cos(\sin x), \quad n = 6;$

7. Представить формулой Тейлора порядка n в окрестности точки $a = 0$ функцию $y = y(x)$, заданную неявно условиями:

17. $x^2 + y^2 = 1, \quad y(0) = -1, \quad n = 6;$
 18. $x^2 + y^2 = 1, \quad y(0) = 1, \quad n = 6;$
 19. $x + y + e^x - e^y = 0, \quad y(0) = 0, \quad n = 2;$
 20. $\sin x + x^2 + e^y - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad n = 2.$

8. Вычислить пределы

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+5\sin^2 x} - \sqrt[3]{1+3\sin^2 x}\right)}{\sin^4 x};$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[4]{1+4\sin^2 x} - \sqrt[5]{1+5\sin^2 x}\right)}{\sin^4 x};$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{x - \sin x};$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt[5]{x^5 - x^4}\right).$$

4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Контрольные вопросы к теме

1. Понятия точки и расстояния.
2. Внешняя точка, внутренняя точка и граничная точка. Понятия открытой области и замкнутого множества.
3. Ограниченность и сходимости последовательности точек.
4. Полный дифференциал функции. Формула Тейлора.
5. Метод наименьших квадратов.

Найти частные и полное приращения функции в точке M_0

1. $z = xy^2 - \frac{x}{y}; M_0(3;-2); \Delta x = 0,1; \Delta y = -0,05$

Ответ: $\Delta_x z = 0,45 \quad \Delta_y z = 0,57 \quad \Delta z = 1,04$

2. $z = x^2 y; M_0(1;2); \Delta x = 0,1; \Delta y = -0,2$

Ответ: $\Delta_x z = 0,42 \quad \Delta_y z = -0,2 \quad \Delta z = 0,178$

3. $z = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 - (x - y)^2}; M_0(2;2); \Delta x = -0,2; \Delta y = 0,1$

Ответ: $\Delta_x z = 0,0031 \quad \Delta_y z = 0,0006 \quad \Delta z = 0,0063$

4. $z = \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)^2; M_0(1;1); \Delta x = -0,1; \Delta y = -0,1$

Ответ: $\Delta_x z = 0,04 \quad \Delta_y z = 0,04 \quad \Delta z = 0$

Найти частные производные функций

5. $z = \frac{x}{y^3} + \frac{y}{x^3} - \frac{1}{6x^2 y}$

$$\text{Ответ: } z'_x = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3y}; \quad z'_y = -\frac{3x}{y^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{6x^2y^2}$$

$$6. \quad z = \frac{x^2 - 2xy}{y^2 + 2xy + 1}$$

$$\text{Ответ: } z'_{x'} = \frac{(2x - 2y)(y^2 + 2xy + 1) - (x^2 - 2xy) \cdot 2xy}{(y^2 + 2xy + 1)^2};$$

$$z'_{y'} = \frac{-2x(y^2 + 2xy + 1) - (2y - 2x) \cdot (x^2 - 2xy)}{(y^2 + 2xy + 1)^2}$$

$$7. \quad z = e^{x^2+y^2}$$

$$\text{Ответ: } z'_x = 2x \cdot e^{x^2+y^2}; \quad z'_y = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$8. \quad u = t^5 \cdot \sin^3 z$$

$$\text{Ответ: } u'_t = 5t^4 \cdot \sin^3 z; \quad u'_z = 3t^5 \cdot \sin^2 z \cos z$$

$$9. \quad v = x^4 \cdot \cos^2 y - y^4 \cdot \sin^3 x^5$$

$$\text{Ответ: } v'_x = 4x^3 \cdot \cos^2 y - 15x^4 y^4 \cdot \sin^2 x^5 \cdot \cos x^5; \quad v'_y = -x^4 \cdot \sin 2y - 4y^3 \cdot \sin^3 x^5$$

$$10. \quad u = x^y + (xy)^z + z^{xy}$$

$$\text{Ответ: } u'_x = yx^{y-1} + y^z \cdot z \cdot x^{z-1} + yz^{xy} \cdot \ln z$$

$$u'_y = x^y \cdot \ln x + x^z \cdot z \cdot y^{z-1} + xz^{xy} \cdot \ln z$$

$$u'_z = (xy)^z \cdot \ln(xy) + xyz^{xy-1}$$

Полный дифференциал функции

Вычислить приближенно:

$$11. \quad (1,07)^{3,97}$$

$$\text{Ответ: } 1,28$$

$$12. \quad \sin 28^0 \cdot \cos 61^0$$

$$\text{Ответ: } 0,227$$

13. $\sqrt{(\sin^2 1,55 + 8 \cdot e^{0,015})^5}$

Ответ: 251,1

Найти полный дифференциал функции

14. $u = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$

Ответ: $du = \frac{dx}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{xy dy + xz dz}{\sqrt{(y^2 + z^2)^3}}$

15. $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$

Ответ: $dz = 30xy \cdot (5x^2 y - y^3 + 7)^2 dx + 3(5x^2 y - y^3 + 7)^2 (5x^2 - 3y^2) dy$

16. $z = \arccos \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Ответ: $dz = -\frac{xy\sqrt{2} dx - x^2\sqrt{2} dy}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}$

Производные и дифференциалы высших порядков

17. Для функции $z = e^{xy^3}$ найти $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$

Ответ: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = y^{12} e^{xy^3}$

$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 9y^8 e^{xy^3} + 3y^{11} \cdot x \cdot e^{xy^3}$

$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 3y^4 e^{xy^3} [10 + 14xy^3 + 3x^2 y^6]$

18. Найти $d^2 z$ для функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Ответ: $d^2 z = \frac{2[xy dx^2 + (y^2 - x^2) dx dy - xy dy^2]}{(x^2 + y^2)^2}$

19. Найти d^2z для функции $z = \sin x \sin y$

Ответ: $d^2z = -\sin x \sin y dx^2 + 2 \cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2$

20. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Ответ: $24x + 6y$

21. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z = \ln(\operatorname{tg}(x + y))$

Ответ: $-\frac{4 \cos 2(x + y)}{\sin^2 2(x + y)}$

22. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z = x^2 \ln(x + y)$

Ответ: $\frac{x(x + 2y)}{(x + y)^2}$

Найти дифференциалы

23. $d^{10}u$ если $u = \ln(x + y)$

Ответ: $-\frac{9!(dx + dy)^{10}}{(x + y)^{10}}$

24. d^4u если $u = \ln(x^x \cdot y^y \cdot z^z)$

Ответ: $2 \frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}$

25. $d^n u$ если $u = e^{ax+by}$

Ответ: $e^{ax+by} \cdot (a dx + b dy)^n$

5. Экстремумы функций нескольких переменных.

Контрольные вопросы к теме

1. Частные приращения и частные производные.
2. Полный дифференциал функции. Формула Тейлора.
3. Локальный экстремум.
4. Условный экстремум.
5. Понятия стационарных и критических точек.
6. Метод наименьших квадратов.

Исследовать на экстремум функцию

1. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

Ответ: $z(1,1) = z_{\min} = -1$

2. $z = x^3 + y^2$

Ответ: Экстремумов нет

3. $z = x^4 + y^4$

Ответ: $z(0,0) = z_{\min} = 0$

4. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Ответ: $z(2,1) = z_{\min} = -28$

$z(-2,-1) = z_{\max} = 28$

5. $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y$

Ответ: Экстремумов нет

6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

Ответ: $z(1,0) = z_{\min} = -1$

7. Найти экстремум функции $z = x^2 - y^2$ при условии, что $y = 2x - 6$

Ответ: $z(4,2) = z_{\max} = 12$

8. Найти экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 5$

Ответ: $z(-1,-2) = z_{\min} = -5$

$z(1,2) = z_{\max} = 5$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной линиями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = -3$

$$\text{Ответ: } z(-3,0) = z(0,-3) = z_{\text{наиб}} = 6$$

$$z(-1,-1) = z_{\text{наим}} = -1$$

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в области, ограниченной линиями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 3$

$$\text{Ответ: } z(0,0) = z_{\text{наиб}} = 5$$

$$z(3,0) = z_{\text{наим}} = -9$$

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(4 - x - y)$ в области, ограниченной линиями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$

$$\text{Ответ: } z(2,1) = z_{\text{наиб}} = 4$$

$$z(4,2) = z_{\text{наим}} = -64$$

6. Элементы интегрального исчисления (неопределенные интегралы)

Контрольные вопросы к теме

1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла.
2. Операция интегрирования, табличные интегралы.
3. Метод замены переменных и особенности его применения.
4. Метод интегрирования по частям и основные виды интегралов, вычисляемых с его использованием.
5. Интегрирование рациональных выражений, метод рационализации.

Используя таблицу неопределенных интегралов, найти

1. $\int \sin 7x dx$

Ответ: $-\frac{1}{7} \cos 7x + C$

2. $\int \sqrt[5]{2x-8} dx$

Ответ: $\frac{5}{12} \sqrt[5]{(2x-8)^6} + C$

3. $\int \frac{dx}{(6x+11)^4}$

Ответ: $-\frac{1}{18(6x+1)^3} + C$

4. $\int \frac{dx}{25x^2+1}$

Ответ: $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} 5x + C$

5. $\int 3^{2-11x} dx$

Ответ: $-\frac{1}{11 \ln 3} 3^{2-11x} + C$

6. $\int \sin^2 3x dx$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

$$7. \int (3\operatorname{tg}x - 2\operatorname{ctg}x)^2 dx$$

$$\text{Ответ: } 9\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x - 25x + C$$

$$8. \int \frac{4\sqrt{1-x^2} + 3x^2}{x^2 - 1} dx$$

$$\text{Ответ: } 3x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - 4\arcsin x + C$$

$$9. \int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$\text{Ответ: } -\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$$

$$\text{Ответ: } -2\cos x + C$$

$$11. \int \frac{x^4 dx}{x^2 - 1}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

$$13. \int \frac{(9-x) dx}{3+\sqrt{x}}$$

$$\text{Ответ: } 3x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$14. \int \frac{(1+x)dx}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + C$$

$$15. \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x} dx$$

$$\text{Ответ: } \sin x - \cos x + C$$

Интегрирование методом подстановки (замены переменной)

Вычислить методом замены переменной интегралы

$$16. \int (7x-1)^{23} dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{(7x-1)^{24}}{168} + C$$

$$17. \int x^2 \sin(x^3+1) dx$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{3} \cos(x^3+1) + C$$

$$18. \int \frac{x dx}{x^2+1}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$19. \int \frac{\ln^5 x dx}{x}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6} \ln^6 x + C$$

$$20. \int e^{x^3} x^2 dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$21. \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C$$

$$22. \int \frac{(x - \sin \frac{1}{x}) dx}{x^2}$$

$$\text{Ответ: } \ln|x| - \cos \frac{1}{x} + C$$

$$23. \int \frac{(5x-1) dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{Ответ: } -5\sqrt{4-x^2} - \arcsin \frac{x}{2} + C$$

$$24. \int \frac{(4x+3) dx}{\sqrt{x^2-5}}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{x^2-5} + 3\ln|x + \sqrt{x^2-5}| + C$$

$$25. \int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$$

(подсказка – использовать замену $x = \sin t$)

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$\text{Ответ: } 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$27. \int \sqrt{9-x^2} dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + C$$

(подсказка – использовать замену $x = 3\sin t$)

$$28. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+16}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{x} - 8 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{4} + C$$

$$29. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C$$

$$30. \int \frac{dx}{\arccos x \sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Ответ: } -\ln(\arccos x) + C$$

$$31. \int \frac{7^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{\ln 7} 7^{\sqrt{x}} + C$$

$$32. \int \frac{e^{1/x} dx}{x^2}$$

$$\text{Ответ: } -e^{1/x} + C$$

$$33. \int (\cos^2 x - \sin^2 x) \sqrt[3]{1 + \sin 2x} dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{8} \sqrt[3]{(1 + \sin 2x)^4} + C$$

(воспользоваться тождеством $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$)

$$34. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 7 \sin x + 5 \sin 2x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Ответ: } e^{\operatorname{tg} x} - \frac{7}{\cos x} - 10 \ln |\cos x| + C$$

$$35. \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$$

$$\text{Ответ: } e^{\sin^2 x} + C$$

Интегрирование по частям

Вычислить методом интегрирования по частям интегралы

$$36. \int (2x-1)e^{3x} dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{6x-5}{9}e^{3x} + C$$

$$37. \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1+\ln x}{x} + C$$

$$38. \int x2^x dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{\ln^2 2} + C$$

$$39. \int e^x \sin x dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

$$40. \int \sin(\ln x) dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

$$41. \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$$

$$42. \int (2x+3)\cos x dx$$

$$\text{Ответ: } (2x+3)\sin x + 2\cos x + C$$

$$43. \int x^2 \ln x dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C$$

$$44. \int (x^2 - 4x + 1)e^{-x} dx$$

$$\text{Ответ: } e^{-x}(1 + 2x - x^2) + C$$

$$45. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\text{Ответ: } 2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}) + C$$

$$46. \int \cos(\ln x) dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$

$$47. \int e^{3x} \cos^2 x dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^{3x}}{13}(2 \sin 2x + 3 \cos 2x) + C$$

7. Определенные интегралы

Контрольные вопросы к теме

1. Понятия интегральной суммы и определенного интеграла.
2. Верхняя и нижняя суммы Дарбу, их сходимость.
3. Понятие равномерной сходимости функции.
4. Приложения определенного интеграла.
5. Методы приближенного вычисления определенных интегралов.

Формула Ньютона-Лейбница

Вычислить значения интегралов

1. $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$

Ответ: π^2

2. $\int_0^{\lg 2} 2^x 5^x dx$

Ответ: $\frac{1}{\ln 10}$

3. $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$

Ответ: $\frac{1}{2} \ln 7$

4. $\int_1^2 \frac{(x+2)dx}{3-x}$

Ответ: $5 \ln 2 - 1$

5. $\int_0^2 x \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2} dx$

Ответ: 4

6. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) dx$

Ответ: $\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

7. $\int_1^e \frac{(x + \sqrt{x})dx}{x\sqrt{x}}$

Ответ: $2\sqrt{e}-1$

8. $\int_0^{\pi} (\cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x) dx$

Ответ: 0

9. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$

Ответ: $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

10. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(\frac{1}{x}) dx}{x^2}$

Ответ: 1

11. Найти значение интеграла $\int_0^2 f(x) dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ответ: $e+1$

12. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x} dx$

Ответ: $\frac{4}{3}$

13. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

Ответ: $1-\cos 1$

14. $\int_{-1}^0 \frac{3^x - 2^x}{6^x} dx$

Ответ: $\frac{1}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 3}$

Интегрирование подстановкой (замена переменной в определенном интеграле)

Вычислить интегралы методом подстановки

15. $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$

Ответ: $2 - \frac{5}{2} \ln \frac{11}{7}$

16. $\int_0^{\ln 2} \frac{dz}{e^z + 1}$

Ответ: $\ln \frac{4}{3}$

17. $\int_1^{16} \frac{dx}{x + \sqrt[4]{x}}$

Ответ: $\frac{4}{3} \ln \frac{9}{2}$

18. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$

Ответ: $3 \ln 3$

19. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$

(подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$)

20. $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx$

Ответ: $\frac{81}{16} \pi$

21. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

Ответ: $\frac{\pi - 2}{2}$

22. $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x \, dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{1 - \ln 2}{2}$$

$$24. \int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} \, dx$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

25. Решить уравнение

$$\int_{\sqrt{2}t}^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Ответ: } x=2$$

Интегрирование по частям

Используя интегрирование по частям, вычислить интегралы

$$26. \int_1^e (x+1) \ln x \, dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^2 + 5}{4}$$

$$27. \int_{-1}^0 x e^{-x} \, dx$$

$$\text{Ответ: } -1$$

$$28. \int_0^2 \ln(x^2 + 4) \, dx$$

$$\text{Ответ: } \pi - 4 + 6 \ln 2$$

$$29. \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x^2} \, dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{6e - 16}{e}$$

$$30. \int_{-1}^0 9x^2 \ln(x+2) \, dx$$

Ответ: $24\ln 2 - 16$

31. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$

Ответ: $\frac{\pi - \ln 4}{4}$

32. $\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$

Ответ: $\frac{\pi^2 - 8}{4}$

33. $\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \ln(1+\sqrt{2})$

34. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx$

Ответ: $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

35. $\int_0^{\pi/4} x \cos^2 x dx$

Ответ: $\frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$

36. $\int_0^1 x^2 3^x dx$

Ответ: $\frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} + \frac{4}{\ln^3 3}$

37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$

Ответ: $\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

38. $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx$

Ответ: $2e^2 - 2$

$$39. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\ln 3 - \pi}{2} + \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Несобственные интегралы

Найти значения несобственных интегралов или установить их расходимость

$$40. \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4}$$

$$41. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}$$

$$42. \int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

Ответ: расходится

$$43. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$$

Ответ: расходится

$$44. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}$$

$$45. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$$

Ответ: ln 2

$$46. \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}$$

Ответ: ln(2+√5)

$$47. \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

Ответ: -1

$$48. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$$

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

$$49. \int_0^{+\infty} 2e^{-\sqrt{x}} dx$$

Ответ: 4

Приложения определенного интеграла

Вычисление площади плоской фигуры

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$ и прямыми $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$

Ответ: $\frac{1}{2}(8 - \sqrt{3} - \sqrt{2})$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

$$50. y = -x^3, y = -9x$$

Ответ: $\frac{81}{2}$

$$51. y = \arccos x, x = -1, x = 0, y = 0$$

Ответ: $\pi - 1$

$$52. y = \operatorname{tg}^2 x, x = \frac{\pi}{4}, y = 0$$

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$

$$53. y = x^2 - 6, y = -x^2 + 5x - 6$$

Ответ: $5\frac{5}{24}$

$$54. y = 2 - |x|, y = x^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{3}$$

55. $y = \sin|x|$, $y = |x| - \pi$

$$\text{Ответ: } 4 + \pi^2$$

56. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x + 5$, касательной к ней в точке $A(3;2)$ и прямой $x = 1$.

$$\text{Ответ: } \frac{8}{3}$$

Вычисление объема тела вращения

57. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x = 1, x = 4, y = 0$ вокруг оси Ox и вокруг оси Oy .

$$\text{Ответ: } V_x = 27\pi, V_y = 36\pi$$

58. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной линиями $y = e^{-x}, x = 0, y = 0 (x \geq 0)$

$$\text{Ответ: } V_y = 2\pi$$

59. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2, y = -x + 2$

$$\text{Ответ: } V_x = \frac{1}{5}$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

60. $y = \sqrt{x}e^x, x = 0, x = \ln 2$ вокруг оси Ox

$$\text{Ответ: } 4\pi^2$$

61. $y = 6x, x = 3, x = 5$ вокруг оси Ox

$$\text{Ответ: } 48\pi$$

8. Ряды

Контрольные вопросы к теме

1. Понятия числового ряда и его сходимости.
2. Признаки сходимости ряда. Геометрический и гармонический ряды.
3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды, их сходимости и абсолютная сходимости.
4. Область сходимости функционального ряда. Понятие равномерной сходимости ряда.
5. Радиус сходимости степенного ряда, основные методы его определения.
6. Ряд Тейлора. Разложение функций в ряд Тейлора.

Изучить последовательность частных сумм ряда и выяснить, является ли ряд сходящимся:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5n}$

Ответ: ряд расходится

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Ответ: ряд сходится, $S = 1$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

Ответ: ряд сходится, $S = \frac{3}{4}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$;

Ответ: ряд сходится, $S = 2$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{10}{9}\right)^n$;

Ответ: ряд расходится

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$;

Ответ: ряд сходится, $S = \frac{11}{18}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;

Ответ: ряд сходится, $S = 2$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

Ответ: ряд сходится, $S = -\ln 2$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$;

Ответ: ряд сходится, $S = \frac{3}{2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

Ответ: ряд расходится

Установить расходимость ряда, пользуясь необходимым условием сходимости

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n-1};$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \Rightarrow$ ряд расходится

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1} \Rightarrow$ ряд расходится

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1} \right)^{n^2}$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \Rightarrow$ ряд расходится

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \Rightarrow$ ряд расходится

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow$ ряд расходится

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n};$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ряд расходится

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right);$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \Rightarrow$ ряд расходится

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n};$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow$ ряд расходится

Пользуясь признаками сравнения, изучить сходимость рядов

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

Ответ: ряд расходится

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ответ: ряд расходится

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+10}}$$

Ответ: ряд расходится

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ответ: ряд сходится

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1};$

Ответ: ряд расходится

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right);$

Ответ: ряд расходится

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right);$

Ответ: ряд сходится

С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряды

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$

Ответ: ряд сходится

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Ответ: ряд расходится

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{100}}$

Ответ: ряд сходится

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n!}$

Ответ: ряд сходится

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$

Ответ: ряд сходится

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^3}{3^n};$

Ответ: ряд сходится

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$

Ответ: ряд сходится

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Ответ: ряд расходится

С помощью признака Коши исследовать на сходимость ряды

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

Ответ: ряд сходится

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^n}$$

Ответ: ряд сходится

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(\frac{1}{2n} \right)$$

Ответ: ряд сходится

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$$

Ответ: ряд сходится

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}$$

Ответ: ряд сходится

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$$

Ответ: ряд расходится

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n};$$

Ответ: ряд сходится

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2 + 2}{3n^2 + 1} \right)^n;$$

Ответ: ряд расходится

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \left(\frac{1}{n} \right);$$

Ответ: ряд сходится

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2};$$

Ответ: ряд расходится

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n};$$

Ответ: ряд сходится

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{3^n};$$

Ответ: ряд сходится

При помощи степенного признака сравнения исследовать на сходимость ряды

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 3n + 1}$$

Ответ: ряд расходится

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n\sqrt{n^2 + n + 2}}$$

Ответ: ряд сходится

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) \cdot \sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Ответ: ряд расходится

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}\right)$$

Ответ: ряд расходится

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+3}{n+2}$$

Ответ: ряд расходится

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+3n}$$

Ответ: ряд сходится

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2n+2}$$

Ответ: ряд расходится

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Ответ: ряд сходится

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n+2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+3}\right)$$

Ответ: ряд сходится

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

Ответ: ряд расходится

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Ответ: ряд сходится

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}$$

Ответ: ряд сходится

Доказать сходимость знакпеременных рядов, убедившись в их абсолютной сходимости

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}}{n\sqrt{n+1}}$$

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{3}\right)}{2^n}$$

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\left(n \frac{\pi}{6}\right)}{n^3+3}$$

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3 + 2}};$$

$$63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n^2}{3^n + 2};$$

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n};$$

$$65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sin n)}{n^2 + 1}.$$

Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды, пользуясь признаком Лейбница

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2};$$

$$69. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2};$$

$$70. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2+1}{n^3+1};$$

$$71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)};$$

$$72. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n};$$

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{n}{\sqrt{n^3}}.$$

Функциональные ряды

Найти интервал сходимости степенного ряда

$$74. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!};$$

$$75. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n};$$

$$76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

$$77. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{3^n};$$

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^n};$$

$$79. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n;$$

$$80. \sum_{n=0}^{\infty} (x+4)^n;$$

$$81. \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (x+1)^n.$$

Найти множество сходимости степенного ряда

$$82. \sum_{n=0}^{\infty} (x+2)^n;$$

$$83. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n};$$

$$84. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n};$$

$$85. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!};$$

$$86. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2};$$

$$87. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n + 1};$$

$$88. \sum_{n=1}^{\infty} n(x+3)^n;$$

$$89. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n};$$

$$90. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n+2};$$

$$91. \sum_{n=0}^{\infty} n!(x-10)^n;$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n}};$$

$$93. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n};$$

$$94. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^n;$$

$$95. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n;$$

$$96. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{x-5}{5} \right)^n;$$

$$97. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2} x^n;$$

Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $f(x)$

$$98. f(x) = e^{5x};$$

$$99. f(x) = e^{2x+1};$$

$$100. f(x) = (x-1)\sin 3x;$$

$$101. f(x) = \sin x^2;$$

$$102. f(x) = \ln(1+2x);$$

$$103. f(x) = \frac{1}{x+2};$$

$$104. f(x) = \cos(x+2);$$

$$105. f(x) = \frac{1}{1-x^2};$$

$$106. f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6};$$

$$107. f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$108. f(x) = \ln(1+3x+2x^2);$$

$$109. f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2};$$

$$110. f(x) = \sqrt{x+1};$$

$$111. f(x) = \sin(x^3 + 1);$$

$$112. \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x};$$

$$113. \quad f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$

Разложите функции по степеням $(x-a)$

$$114. \quad f(x) = e^x, \quad a=1;$$

$$115. \quad f(x) = xe^{2x}, \quad a=1;$$

$$116. \quad f(x) = \cos x, \quad a=2;$$

$$117. \quad f(x) = x^2 \sin 3x, \quad a=2;$$

$$118. \quad f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad a=1;$$

$$119. \quad f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad a=-2;$$

$$120. \quad f(x) = \ln x, \quad a=1;$$

9. Знакомство с обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ).

Контрольные вопросы к теме

1. Понятия дифференциального уравнения.
2. Порядок дифференциального уравнения.
3. Методы интегрирования линейных дифференциальных уравнений.
4. Методы приближенного решения линейных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера.
5. Методы интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Понятие характеристического уравнения.

1. Доказать, что функция $y = xe^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$

2. Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная в неявном виде:

$F(x, y) \equiv \ln \frac{y}{x} - 5 + xy = 0$ является решением дифференциального уравнения

$$(x + x^2 y)y' = y - xy^2$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$

$$\text{Ответ: } \ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln|C|$$

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

4. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$

$$\text{Ответ: } (1 + y)(1 - x) = C$$

5. $(xy^2 + x)dx = (y - x^2 y)dy$

$$\text{Ответ: } (x^2 - 1)(y^2 + 1) = C$$

6. $xy' - y = y^3$

$$\text{Ответ: } x = \frac{Cy}{\sqrt{1 + y}}$$

7. $x^2 dy + (1 - y)dx = 0$

$$\text{Ответ: } y = Ce^{\frac{1}{x}} + 1$$

8. $2(xy + y)dx = xdy$

$$\text{Ответ: } y = Cx^2 e^{2x}$$

9. $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx$

$$\text{Ответ: } \cos y = C \cos x$$

10. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$

$$\text{Ответ: } y = \sqrt[3]{1 - \frac{3\pi}{4} + 3 \arctg e^x}$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $2x^2 y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$

$$\text{Ответ: } y = x - \frac{x}{1 + \ln \sqrt{|x|}}$$

12. Найти частное решение дифференциального уравнения $2x^2 y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$

$$\text{Ответ: } y = x - \frac{x}{1 + \ln \sqrt{|x|}}$$

13. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1)$. Решить задачу Коши при начальном условии $y(-2) = 2$

$$\text{Ответ: общее решение } y = x^2 + \frac{Cx}{x-1}$$

$$\text{частное решение } y = x^2 - \frac{3x}{x-1}$$

Найти частные решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

14. $x^2 x d + y dy = 0$ при $y(0) = 1$

$$\text{Ответ: } 2x^3 + 3y^2 = 3$$

15. $(1 + x^2)dy - 2x(y + 3)dx = 0$ при $y(0) = -1$

$$\text{Ответ: } y = 2x^2 - 1$$

16. $(1+x)ydx = (y-1)xdy = 0$ при $y(1) = 1$

Ответ: $y = \ln|xy| + x$

17. Проинтегрировать уравнение $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ методом Бернулли. Решить задачу Коши при начальном условии $y(\pi) = 1$

Коши при начальном условии $y(\pi) = 1$

Ответ: общее решение $y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$

частное решение $y = \sin x - \cos x$

18. Проинтегрировать уравнение Бернулли $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$.

Ответ: $y = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2$

19. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = xy^2 \ln x$

Ответ: $y = -\frac{2}{x(C + \ln^2 x)}$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$

Ответ: $\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C$

21. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} = \frac{8}{(x-3)^5}$

Ответ: $y = \frac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

22. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$, $y(1) = e$,

$y'(1) = e^2$

Ответ: общее решение $y = \frac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2$

частное решение $y = (x-1)e^{1+x} + e$

23. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' \operatorname{ctg} x + y'' = 2$

Ответ: $y = x^2 + C_1 \cos x + C_2 x + C_3$

24. Решить задачу Коши $y^3 y' y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Ответ: общее решение $y = \frac{(x + C_2)^3}{18}$

частное решение $y = \frac{1}{18} (x + \sqrt[3]{18} - 1)^3$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Сборник задач по высшей математике. – М.: Физматлит, 2001. - 304 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высшая школа, 1999. - 304 с.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2. – М.: Высшая школа, 1999. - 416 с.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть 1. – М.: Наука, 1998. – 616 с.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть 2. – М.: Наука, 1998. – 448 с.
7. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. – М.: Физматлит, 2002. - 400 с.
8. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 2. – М.: Физматлит, 2002. - 424 с.
9. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1971. - 352 с.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 416 с.
11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.
12. Сахарников Н. А. Высшая математика. Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1973. – 472 с.
13. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. 1. – СПб.: Лань, 2002. – 448 с.
14. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. 2. – СПб.: Лань, 2002. – 464 с.
15. Шипачев В. С. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1999. – 176 с.
16. Шипачев В. С. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2004. – 304 с.

