ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
УРГЕНЧСКИЙ ФИЛИАЛ

Факультет «Компьютерный инжиниринг»

Кафедра «Программный инжиниринг»

ЮСУПОВ Ф.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ТРЕБОВАНИЯ»

53300600 – Программный инжиниринг

Ургенч 2017

Юсупов Ф. Методические пособие для выполнения лабораторных работ по курсу «Системный анализ и требования». Ургенч, ТУИТ Ургенчский филиал, 2017. – 52 с.

Методические указания по написанию курсовой работы являются частью учебно-методического комплекса дисциплины «Основы системного анализа». Роль курсовой работы в освоении дисциплины «Основы системного анализа» для направлении 5521900 - Информатика и информационные технологии (по отраслям), 5140900 – Профессиональное образование (Информатика и информационные технологии), 5811100 – Сервис предприятия (электронная и компьютерная техника) состоит в формировании и закреплении элементарных навыков применения комплекса методов системного анализа к исследованию информационных, хозяйственных либо финансовых систем. Курсовая работа имеет прикладную направленность.

Настоящее издание предназначено для использования студентами информационно-технологических образовательных учреждений высшего профессионального образования, обучающимися в бакалавриате по выше указанным направлениям, в процессе самостоятельного выполнения курсовой работы. Оно предлагает рекомендуемую тематику курсовых работ, содержит методические указания по выполнению и оформлению курсовой работы, устанавливает критерии её оценки.

Рецензенты:

Зав.кафедрой “Информационной технологии” УрГУ
Матлатипов Ғ.

Доцент кафедры “Информационно образовательной технологии”
Ургенчского филиала ТУИТ Аширова А.И.

Методическое указание размножена
на основание решения научно-методического совета
факультета Компьютер инжиниринг Ургенчского филиала ТУИТ
Протокол №____ от «___» ______________ 2017 г.

Содержание

ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Общие понятия

В экономике сельского хозяйства понятие корреляционно-регрессионных моделей объединяет все математически выраженные связи и зависимости результатов производства от различных производственных факторов. Например, продуктивность скота зависит от таких факторов, как кормление, породность скота, способ его содержания и т. д. Связь продуктивности скота с определяющими ее факторами можно выразить с помощью корреляционно-регрессионной модели, которую в общем виде можно записать так:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$$

где y — функция (продуктивность скота);

$x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ — аргументы (факторы, влияющие на продуктивность).

Однако эта запись модели дает только общую характеристику зависимости, поэтому в процессе исследования нужно найти конкретный вид математического уравнения, которое соответствовало бы исследуемым взаимосвязям.

Вопрос о форме связи можно решить несколькими способами: на основе логического анализа, по данным статистической группировки или графическим способом. Наиболее распространен последний способ, так как с его помощью можно не только выяснить характер связи, но и получить наглядное представление о степени связи.

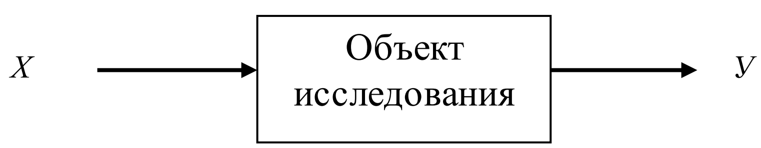
1-лабораторная работа
ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ НА НОРМАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

<u>Цель:</u> Изучение численных характеристик экспериментальных данных

<u>Задании:</u>	1. Изучение теоретических материалов по статистике;
	2.Определение численных характеристик экспериментальных данных по 13 формулам;
	3. Разработка алгоритма и написание программы;
	4. Отладка и тестирование программы;
	5. Оформление лабораторной работы.

Определения закона распределения статистических данных

Допустим, имеем статистические данные об объекте исследования



$X = \{x_i\}, (i = 1 \div n); \quad Y = \{y_i\}, (i = 1 \div n).$ На основе полученных (экспериментальными методами) статистических данных установить вид функции связи между выходным и входным фактором исследуемого объекта

$$y = f(x).$$

Для этого сначала установим закон распределения статистических данных согласно формулам:

1) Среднеарифметическая

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Примечания: для удобства записи $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ используем запись $\sum$.

2) Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

3) Коэффициент вариации

$$\text{c} = \frac{\sigma}{s} \cdot 100\%, \quad \text{здесь} \quad \text{s} = \frac{1}{N} \sum \left| x_i - \overline{x} \right|$$

4) Показатель точности

$$\text{P}= \frac{\sigma}{\overline{x}\sqrt{N}} \cdot 100\%$$

5) Показатель асимметрии $\quad \text{A} = \dfrac{\sum \left(x_i - \overline{x}\right)^3}{N\sigma^3}$

6) Эксцесс (показатель круто вершинности) $\quad \text{E} = \dfrac{\sum \left(x_i - \overline{x}\right)^4}{N\sigma^4} - 3$

7) Ошибки среднеарифметического. $\quad m_x = \sigma / \sqrt{N}$

8) Ошибки среднеквадратического отклонения $\quad m_\sigma = \sigma / \sqrt{2N}$

9) Ошибки вариации $\quad m_c = \left(c / \sqrt{2N} \right) \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot c / 100}$

10) Ошибки показателя точности $\quad m_p = p \cdot \sqrt{1/2N + (p/100)^2}$

11) Ошибки асимметрии $\quad m_A = \sqrt{\sigma / N}$

12) Ошибки эксцесса $m_E = \sqrt{24/N} = 2m_A$

13) Приближенный критерий нормального распределения

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{E(N-1)}{(n+1)(n+3)}} \qquad \sigma_E = \sqrt{\frac{24(N-2)(N-3)N}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}$$

14) Условия нормального распределения: если $\sigma_A \le A \quad и \quad \sigma_E \le E$ то статистические данные имеют Гауссовое нормальное распределения.

15. Если это условие не выполняется, тогда вместо x_i рассчитываем $\ln(x_i)$. Вычисляем формулы 1-13 заново и проверяем на нормальность распределения данных. Если условие выполняется, значить, данные распределены логарифмически нормально, в противном случае переходим к пункту 16.

16. Если это условие не выполняется, тогда вместо x_i рассчитываем $\exp(x_i)$. Вычисляем формулы 1-13 заново и проверяем на нормальность распределения данных. Если условие выполняется, значить, данные распределены экспоненциально нормально, в противном случае устанавливаем степень близости статистических данных к нормальному распределению соответственно критериям академика А.Н. Колмогорова, К.Пирсона (χ^2 *критерии хи - квадрат*) и В.И.Романовского.

Установление корреляционно-регрессионных зависимостей

1. Вычисляем коэффициент корреляции между факторами X и Y по формуле:

$$R = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)\left(n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right)}}$$

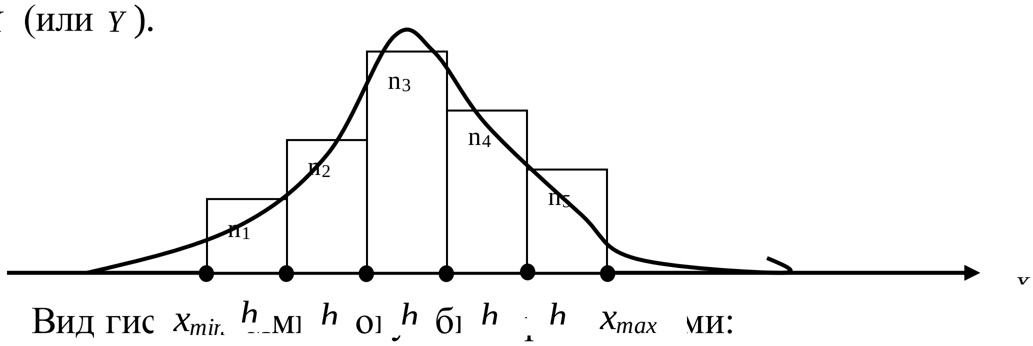
Значения коэффициента корреляции колеблется $-1 \le R \le +1$.

$$R = \begin{cases} +1, & \textit{сильная пропорциональная связь}; \\ +0.5, & \textit{слабая пропорциональная связь}; \\ 0, & \textit{случайная связь}; \\ -0.5, & \textit{слабая отрицательная связь}; \\ -1, & \textit{сильная отрицательная связь}. \end{cases}$$

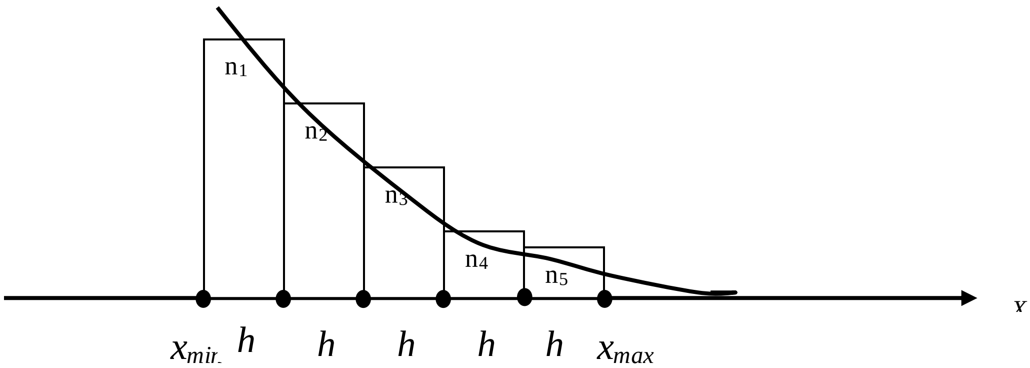
Коэффициент корреляции определяет вид связи между факторами X и Y.

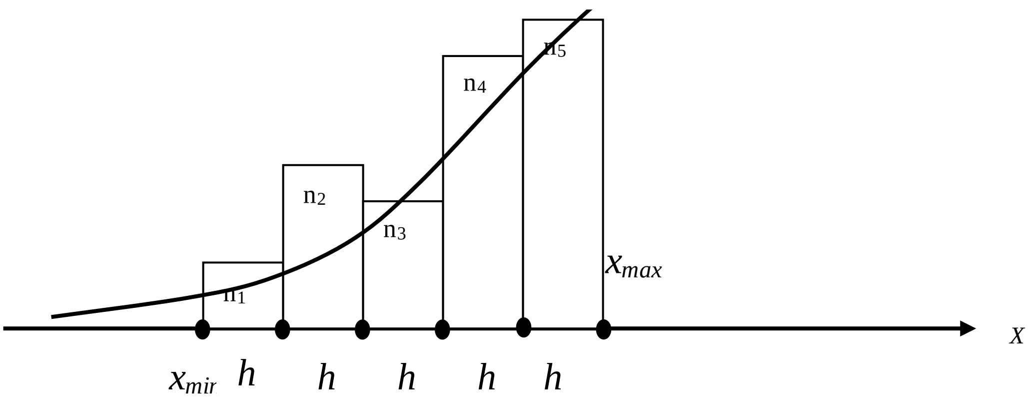
1. Построим гистограмму статистических данных X (или Y). Определяем $\min(x_i)$ и $\max(x_i)$, далее интервал $\min(x_i)$ и $\max(x_i)$ делим на $m = 5,7,9,...$ частей, желательно на $m = 5$ частей. Подсчитаем количество

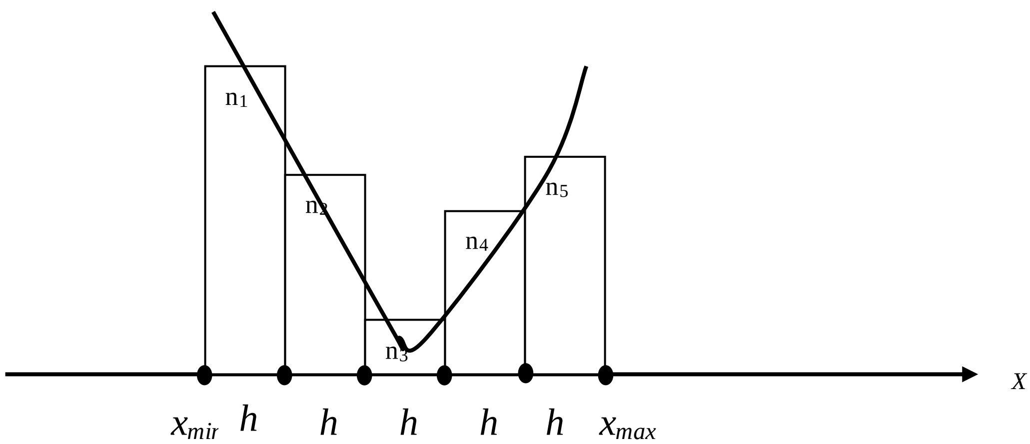
данных попадающих соответствующие интервалы, соответственно $n_1, n_2, n_3 n_4 n_5$. При этом должно выполнятся равенство $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$. По данным n_i построим гистограмму данных X (или Y).

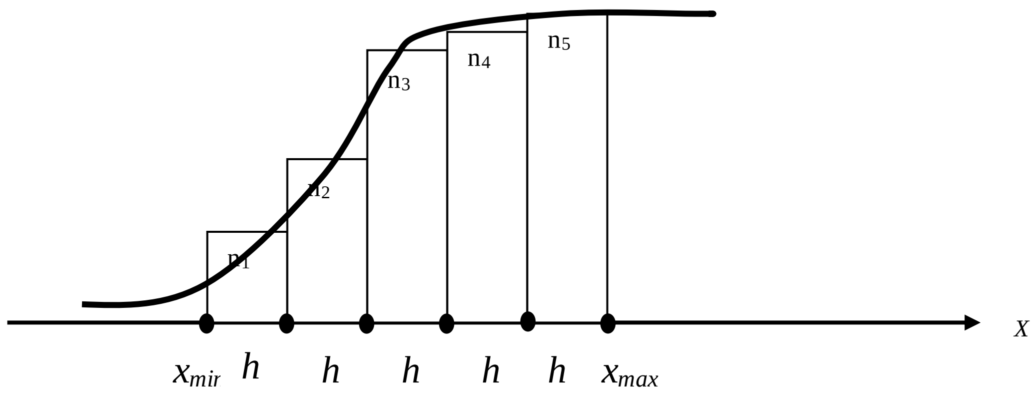


Вид гис[illegible]ми:









Содержание отчета по лабораторной работе

1. Получение варианта заданий (Приложение 1);
2. Алгоритм вычисления численных характеристик экспериментальных данных;
3. Программа алгоритма;
4. Результаты отладки и тестирования программы;
5. Оформление лабораторной работы.

Теоретические вопросы

1. Какие численные характеристики используется для определения закона распределения экспериментальных данных?
2. Что такое математическая статистика?
3. Пустое множество, выборка, параметр
4. Как строится гистограммы?

Литература

1. Тереков Л.Л и др. Математические методы и модели в планировании эксперимента. Учебное пособие для студентов вузов.- Киев: вища школа 1981.
2. Барабашук В.И., Креденпер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике .- Киев: Техника, 1984.- 200 с.
3. Румшиский Л.З Математическая обработка результатов эксперимента .- М.: Наука, 1971.- 192 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: высшая школа, 1985.- 271 с.

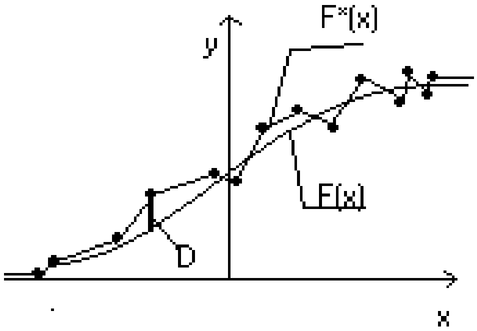
2-лабораторная работа
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Цель: Оценки близости к нормальному закону распределения статистических данных критериями А.Н. Колмогорова, К. Пирсона и В.И. Романовского

Задании:	1. Изучение теоретических материалов по статистике;
	2.Определение численных характеристик экспериментальных данных по критерии В.И.Романовского;
	3. Разработка алгоритма и написание программы;
	4. Отладка и тестирование программы;
	5. Оформление лабораторной работы.

Краткое теоретическое сведение

1. Критерий академика А.Н. Колмогорова.



F(x) – функции теоретического распределения

F*(x) – эмпирическое распределение функции

D = max| F*(x) – F(x) | , $\lambda = D\sqrt{n}$

Из соответствующей таблицы определяется значение p(λ). Если значение вероятности p(λ) существенно меньше, то данная гипотеза о близости экспериментальных данных к нормальному закону распределения отклоняется, в противном случае близость принимается и считается соответствует теоретической функции распределения. Ограничения к критерии А.Н.Колмогорова состоит в том, что мы долджны знать теоретическое распределение функции *F(x)* , этого не всегда можно установить, сложная задача.

2**. Критерий К. Пирсон**. χ^2 (*критерий хи - квадрат*)

$$\chi^2 = \sum \frac{|m - F(x)N|^2}{F(x)N}$$

Здесь ***m*** и ***F(x)N*** – эмпирические и теоретические частоты.

Определяем табличное значение $\chi^2_{табл}$ и сравниваем значением $\chi^2_{расч}$. Если $\chi^2_{расч} > \chi^2_{табл}$ данное условие выполняется (при *p = 0,95*), то экспериментальные данные можно считать близким к нормальному закону распределения.

3.Критерий В.И. Романовского. $$R = \frac{\left| \sum \frac{(n_x + y_x)^2}{y_x} - B \right|}{\sqrt{2B}}$$

Здесь B – количество интервалов минус 3. Если R<3 то, тогда разница между эмпирическим и теоретическими распределениями имеет случайный характер.

Пример. Оценка близости экспериментальных данных к нормальному закону распределения с помощью критерия А.Н. Колмогорова и В.И. Романовского.

Интервалы	$x_{ср}$	n_x	$x_{ср}n_x$	$x_{ср} - \bar{x}$	$(x_{ср} - \bar{x})^2$	$(x_{ср} - n_x)^2 n_x$
71,005 – 72,635		4				
72,635 – 74,265		5				
74,265 – 75,895		6				
75,895 – 77,525		10				
77,525 – 79,155		11				
79,155 – 80,785		8				
80,785 – 82,415		7				
82,415 – 84,045		6				
84,045 – 85,675		5				
85,675 – 87,305		1				

Продолжение таблицы

$a = \frac{x_{ср} - \bar{x}}{s}$	$\Phi(u)$	$y_x = \Phi(u)\Delta$	$n_x - y_x$	$(n_x - y_x)^2$	$\frac{(n_x - y_x)^2}{y_x}$	$\sum n_x$	$\sum y_x$

$$\Delta = \frac{h \cdot n}{s} = \frac{1{,}63 \cdot 63}{3{,}768} = 27{,}1 \; ; \quad y_x = \Phi(u) \cdot \Delta \; ; \quad R = \frac{\left| \sum \frac{(n_x - y_x)^2}{y_x} - B \right|}{\sqrt{2B}}$$

=0,59 ; $\lambda = \frac{2{,}52}{63} \cdot \sqrt{63} = 0{,}38$;

$p(\lambda) = 0{,}997$;

Экспериментальные данные по двум критериям соответствует Гауссовскому нормальному закону распределения.

Содержание отчета по лабораторной работе

1. Цель лаборатории.
2. Краткое теоретическое сведения.
3. Описание и алгоритм расчета оценка близости экспериментальных данных к нормальному закону распределения по критериям А.Н. Колмогорова, К. Пирсона, В. И. Романовского;
4. Текст программы;
5. Результаты отладки и тестирования программы;
6. Оформление работы.

Теоретические вопросы

1) объясните критерий А.Н. Колмогорова?
2) объясните критерий К. Пирсона?
3) объясните критерий В.И. Романовского?

Литература

1. Тереков Л.Л и др. Математические методы и модели в планировании эксперимента. Учебное пособие для студентов вузов.- Киев: вища школа 1981.
2. Барабашук В.И., Креденпер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике .- Киев: Техника, 1984.- 200 с.
3. Румшиский Л.З Математическая обработка результатов эксперимента .- М.: Наука, 1971.- 192 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: высшая школа, 1985.- 271 с.

3-лабораторная работа
АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И АНАЛИЗ РЕГРЕССИОНЫХ МОДЕЛЕЙ

Цель: **Построение и анализ линейных и нелинейных моделей по экспериментальным данным**

Задании:	1. Изучение теоретических материалов по статистическому моделированию;
	2.освоние метода наименьших квадратов;
	3. Разработка алгоритма вычисления коэффициентов регрессионной модели, комплексный анализ модели;
	4. Отладка и тестирование программы;
	5. Оформление лабораторной работы.

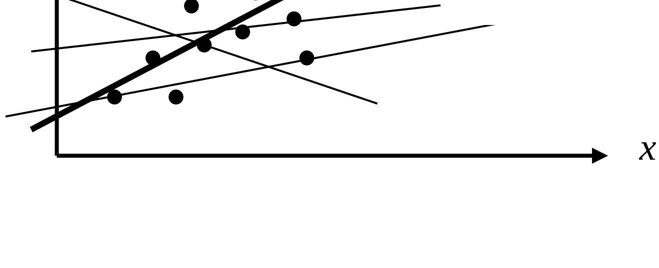
Краткое теоретическое сведение
Построение регрессионной модели объекта исследования

После того как определен вид модели, необходимо найти числовые значения ее параметров. При вычислении параметров корреляционно-регрессионных моделей применяют метод наименьших квадратов, метод средних, метод наименьшего предельного уклонения и другие численные методы. Наиболее распространенным: является метод наименьших квадратов. Сущность его заключается в том, что необходимо найти такие значения параметров модели, при которых сумма квадратов отклонений фактических данных от расчетных окажется минимальной.

1. Вид связи выбираем линейной:

$$\bar{y} = a_1 x + a_0 .$$

Данную прямую линии на корреляционной поле необходимо установить так чтобы сумма квадратов отклонений фактических данных от аналитических (расчетных) окажется минимальной. Таких линий можно провести бесконечно. Это зависит от значения параметра прямой a_0 и a_1.



Это условие можно записать следующим образом:

$$S=\sum\left(y-\bar{y}\right)^2 \Rightarrow \min.$$

где y -фактическое значение зависимой переменной;

$\bar{y}$ - аналитическое (расчетное) значение зависимой перемиенной.

Для выполнения поставленного условия следует решить систему нормальных уравнений, которые строятся следующим образом: исходное уравнение перемножают сначала на коэффициент при первом неизвестном и полученные данные суммируют. Затем исходное уравнение перемножают на коэффициент при втором неизвестном, полученные выражения также суммируют и т. д.

Рассмотрим, как получается система нормальных уравнений для корреляционно-регрессионной модели $\hat{y} = a_0 + a_1 x$. В данном уравнении коэффициент при первом неизвестном a_0 равен 1. Следовательно, исходное уравнение после перемножения сохраняет вид:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x \ ,$$

а после суммирования

$$\sum y = na_0 + a_1\sum x.$$

Коэффициент при втором неизвестном a_1 равен x. Умножая на него все члены уравнения, получим:

$$xy = a_0 x + a_1 x^2 \ ,$$

а после суммирования

$$\sum xy = a_0\sum x + a_1\sum x^2 \ .$$

Значения $\sum x$, $\sum y$, $\sum xy$ *и* $\sum x^2$ рассчитывают по данным наблюдения, а неизвестные параметры a_0 и a_1 определяют решением системы уравнений:

$$\sum y = na_0 + a_1\sum x;$$
$$\sum xy = a_0\sum x + a_1\sum x^2 \ .$$

Правила получения системы нормальных уравнений распространяются на все виды корреляционно-регрессионных моделей.

После того как определен вид модели и найдены ее параметры, необходимо ее оценить, т.е. проверять, насколько она соответствует изучаемой зависимости и как тесно связан результативный показатель с факторами, обусловливающими его уровень.

Для оценки корреляционно-регрессионных моделей используют коэффициент корреляции, если связь линейная, и корреляционное отношение близок к 1, если связь нелинейная, то корреляционное отношение близок к 0.

Общая формула для определения коэффициента корреляции имеет вид:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}}$$

где $\sigma^2_{общ} = \frac{\sum\left(y - \overline{y}\right)^2}{n}$ - средний квадрат отклонений фактических значений y от общей средней $\overline{y}$.

$\sigma^2_{ост} = \frac{\sum\left(y - \overline{y}_x\right)^2}{n}$ - средний квадрат отклонений фактических значений y от $\overline{y}_x$, вычисленных по уравнению.

Эта формула имеет ряд модификаций. Для коэффициента парной линейной корреляции

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)\left(n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right)}};$$

для измерения влияния двух факторов на результат

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r^2_{yx_1} + r^2_{yx_2} - 2r_{x_1x_2}\, r_{yx_1} r_{yx_2}}{1 - r^2_{x_1x_1}}},$$

где r_{yx_1} , r_{yx_2} , $r_{x_1x_2}$ - коэффициенты парной линейной корреляции.

Корреляционное отношение вычисляется так же, как и коэффициент корреляции, по формуле

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}}$$

где η - корреляционное отношение.

Значения коэффициента корреляции R и корреляционного отношения η меняются в пределах от 0 до 1. Чем ближе к единице R и η, тем зависимость теснее, т.е. линейная. Значение коэффициента корреляции r при парной линейной зависимости меняется в пределах от —1 до +1. Знак показывает направление связи. Если связь прямо пропорциональная, то коэффициент r положительный, если обратно пропорциональная — отрицательный.

Надежность изучения связей в значительной степени зависит от количества сопоставляемых данных, в связи с чем необходимо измерить существенность полученного коэффициента корреляции или корреляционного отношения, т. е. определить, не является ли его величина случайной.

Существенность коэффициента корреляции и корреляционного отношения проверяется с помощью t-критерия Стьюдента, который определяется как отношение величины r, R или η к их средней ошибке. Например, формула определения t-критерия для коэффициента корреляции при парной связи имеет вид:

$$t_r = \frac{r}{m_r},$$

где m_r - средняя ошибка.

Если расчетный t-критерий больше табличного, то с большой вероятностью можно утверждать что значение коэффициента корреляции или корреляционного отношения существенно, т. е. связь между признаками не является случайной; если t-критерий меньше, то связь между признаками несущественна, т. е. является случайной.

Средняя ошибка m находится по следующим формулам:

для коэффициента парной линейной корреляции:

$$m_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}};$$

для коэффициента множественной корреляции:

$$m_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{n-k-1}};$$

для корреляционного отношения (парная зависимость):

$$m_\eta = \frac{1-\eta^2}{\sqrt{n-1}};$$

для корреляционного отношения (множественная зависимость):

$$m_\eta = \frac{1-\eta^2}{\sqrt{n-k-1}},$$

где n - число наблюдений;

k - число факторов.

Программа построения модели приведена в приложении 3. С помощью данной программы можно выражать зависимость результативного показателя от одного или нескольких независимых факторов, связь между которыми носит линейный характер, т. е. строить линейные однофакторные или многофакторные модели.

С помощью преобразований нелинейную зависимость можно свести к линейной. Например, если связь между признаками надо выразить в виде уравнения параболы $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, то в исходных данных x необходимо возвести в квадрат и использовать его как фактор x'. Уравнение связи будет иметь вид: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x'$.

Корреляционно-регрессионный анализ объекта исследования

Пример 3. Требуется построить модель зависимости настрига шерсти от живой массы и оценить ее. Сведения о живой массе овец и настриге шерсти по выборочным данным приведены в табл. 3.1

Таблица 3.1.

Номер овца Показатели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Настриг шерсти, кг	5,3	6,2	5,0	5,7	6,3	5,4	6,8	7,3	6,6	6,2
Живая масса, кг	50,2	50,3	50,4	51,0	51,2	51,4	51,6	51,9	52,3	52,4
Номер овца Показатели	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Настриг шерсти, кг	6,3	6,7	7,8	6,8	7,2	7,7	8,8	7,8	8,4	8,8
Живая масса, кг	52,9	53,0	53,2	53,5	53,6	54,3	54,7	55,2	55,5	56,5

1. Определяем закон распределения статистических данных по 1-13 формулам. Разработка алгоритма и программы вычисления по формулам 1-13 предлагается студентам.

2. Сроим гистограмму данных Y, $m = 5$.

$mn\{y_i\} = 50.2; max\{y_i\}=56.5; h =(max\{y_i - min\{y_i\})/m = 1.34.$

В интервале *50.2 ч 51.54* количество данных: $n_1 = 6$ штук;

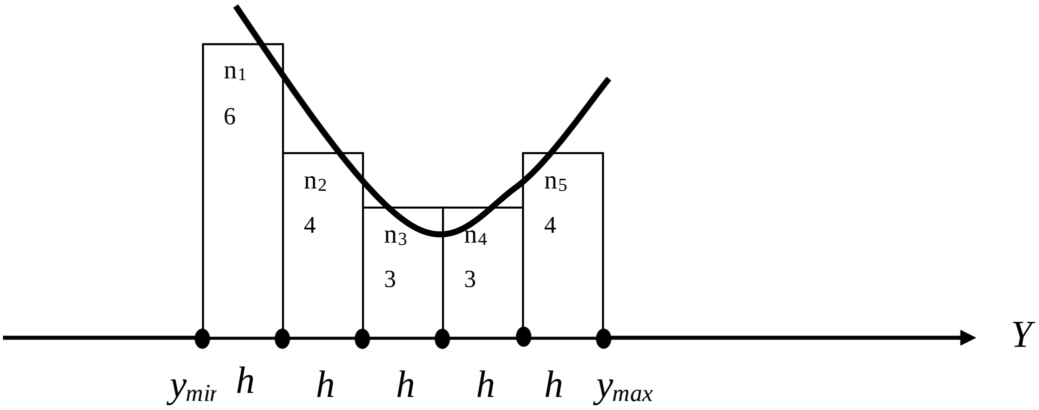
В интервале *51.54 ч 52.88* количество данных: $n_2 =4$ штук;

В интервале *52.88 ч 53.22* количество данных: $n_3 =3$ штук;

В интервале *53.22 ч 54.56* количество данных: $n_4 =3$ штук;

В интервале *50.2 ч 55.90* количество данных: $n_5 = 4$ штук;

$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$ = 6 + 4 + 3 + 3 + 4 = 20. Гистограмма зависимого фактора Y представлена на рисунке



2. Вычисляем коэффициент парной корреляции

$$R = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)\left(n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right)}}$$

R = 0.897.

3. Построим линейную регрессионную модель исследуемого объекта $\overline{y} = a_1 x + a_0$. Коэффициенты регрессионной модели определим из системы нормальных уравнений:

$$\sum y = na_0 + a_1 \sum x\,;$$
$$\sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2\ .$$

$$a_0 = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = -21{,}53$$

$$a_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = 0{,}54.$$

Уравнение регрессии выглядеть $\overline{y} = 0.54x - 21.53$.

Сумма отклонений фактических данных от аналитических, регрессионных моделей

$$S_L = \sum\left(y - (0.54x - 21.53)\right)^2 =$$

Анализ регрессионной модели

4. Существенность коэффициента корреляции и корреляционного отношения проверяем с помощью критерия Стьюдента, которая определяется как отношение величины $r,\ R$ *или* η к их средней ошибке:

$$m_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{1-0.897^2}{\sqrt{20-1}} = 0.0448$$

$$t_r = \frac{r}{m_r} = \frac{0.897}{0.0448} = 20.0223$$

Табличное значение $t_{tabl(0.001)} = 2.86$

$$\eta = \sqrt{1-\frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}} = \sqrt{1-\frac{\sum(y-\overline{y})^2}{\sum(y-\overline{y})^2}} = \sqrt{1-\frac{}{}} =$$

$$m_\eta = \frac{1-\eta^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{1-}{\sqrt{20-1}} =$$

Корреляционно-регрессионная модель зависимости настрига шерсти от живой массы овец имеет вид:

$$\overline{y} = 0.54x - 21.53.$$

Величина свободного члена -21,53 в уравнении модели не имеет экономического смысла. Коэффициент регрессии 0,54 характеризует изменение настрига шерсти по данной совокупности при повышении (или понижении) живой массы овец на единицу. Например, при увеличении живой массы на 1 кг следует ожидать прирост настрига шерсти 0,54 кг, а если на 2 кг, то на 1,08 кг и т.д.

Коэффициент корреляции 0,897 близок к 1, поэтому можно утверждать, что данная модель хорошо описывает исследуемую зависимость.

В связи с тем, что t - критерий (20,0223) больше табличного $(t_{0.001} = 2.86)$, то с большой вероятностью можно считать связь между живой массой овец и настригом шерсти достоверной.

Построенную модель можно использовать при планировании настрига шерсти в зависимости от живой массы овец.

Анализ выборочных дисперсии

Для анализа полученной регрессионной модели необходимо выполнить следующие работы [2, гл.2, б.26-56]:

а) Для экспериментальных данных, которые соответствует нормальному закону распределения, ошибки воспроизведения δ_i должны быт независимыми

$$M[\delta_i] = 0, D[\delta_i] = M[\delta_i^2] = \delta^2, N(0,\delta);$$

б) Каждый эксперимент выполнен m раз (m = 3 пробы), всего произведена n экспериментов. При этом выборочные дисперсии экспериментальных данных $S_1^2, S_2^2, ..., S_n^2$ должны быт однозначны. Это условие проверяется критериями Кохрена по ниже представленной процедуре [3, §2.5]:

1. На основе выполненных независимых параллельных экспериментов вычисляется средние величины.

$$\overline{y_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ji}, i = \overline{1, n} \tag{10}$$

2.Определяется выборочная оценка дисперсии:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij} - \overline{y_i}\right)^2, i = \overline{1, n} \tag{11}$$

2. Определяется сумма выборочных дисперсий:

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^{n} S_i^2 \tag{12}$$

3. Вычисляется отношение:

$$G_{\max} = \frac{S_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^{n} S_i^2} \tag{13}$$

Из таблицы Кохрена (таблица - 1) при α=0,05 определяем значение $G_{1-\alpha}(n, m-1)$. Если

$$G_{\max} < G_{1-\alpha}(n, m-1) \tag{14}$$

условие (14) выполняется, тогда выборочные дисперсии экспериментальных данных считается однозначно.

Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии производится на основе критерия Стьюдента (иногда называют *t*- критерий):

1. Вычисляется дисперсии коэффициентов регрессии (***a*** и ***b***):

$$S_a^2 = S_b^2 = \frac{1}{nm} S_{ab\sup}^2 = \frac{1}{nm} S_y^2$$

2. Вычисляется отношения:

$$t_a = \frac{|a|}{S_a}; t_b = \frac{|b|}{S_b}$$

3. Определяется уровень свободы эксперимента.

$$f = n(m-1)$$

4. выбирается степень вероятности, в основном $q = 0.05$.

5. Из таблицы Стьюдента согласно значениям параметров ***f*** и ***q*** определяется значение $t_{кр}$ (табличный).

6. Если условия $t_i > t_{kp}$, выполняется для ***i = a, b,*** тогда коэффициенты ***a*** и ***b*** считается значимыми, в противном случае незначимыми. Те коэффициенты,

которые незначимыми удаляется из уравнения регрессии.

Проверка адекватности уравнения регрессии к исследуемому процессу. Данная проверка выполняется согласно критерии Фишера [4, гл.7, с.188-200] по следующей методике:

1. Вычисляется дисперсия (Кузатув):

$$S_{ab\,\sup} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i^2}{n} \tag{15}$$

1. Вычисляется остаточная дисперсия:

$$S_{oct}^2 = \frac{m\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y_i}\right)^2}{n-d} \tag{16}$$

здесь d – количества коэффициентов в уравнении регрессии после проверки по критерии Стьюдента.

2. Вычисляется отношения:

$$F = \frac{S_{oct}^2}{S_{ab\,\sup}} \tag{17}$$

Из таблицы Фишера (таблица - 2) определяем значение F согласно параметрам $F_{1-\alpha}\left(f_1, f_2\right)$ где $\alpha = 0.05,\ f_1 = n - d,\ f_2 = n(m-1)$.

Если

$$F < F_{1-\alpha}\left(f_1, f_2\right) \tag{18}$$

Условие (18) выполняется, тогда построенный регрессионный модель считается адекватным исследуемому объекту, в противном случае считается неадекватным. Тогда необходимо все начинать сначала.

5. Построим нелинейную регрессионную модель исследуемого объекта в виде полинома второй степени $\overline{y} = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Коэффициенты регрессионной модели определим из системы нормальных уравнений:

$$\sum y = na_0 + a_1\sum x + a_2\sum x^2;$$

$$\sum xy = a_0\sum x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3.$$

$$\sum x^2 y = a_0\sum x^2 + a_1\sum x^3 + a_2\sum x^4.$$

$$a_0 = \frac{\sum y\sum x^2 - \sum xy\sum x}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} =$$

$$a_1 = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} =$$

$$a_2 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} =$$

Уравнение регрессии выглядеть $\bar{y} = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Сумма отклонений фактических данных от аналитических, регрессионных моделей

$$S_{NL} = \sum \left(y - (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\right)^2 =$$

6. Существенность коэффициента корреляции и корреляционного отношения проверяем с помощью критерия Стьюдента, которая определяется как отношение величины $r,\ R\ или\ \eta$ к их средней ошибке:

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{1-}{\sqrt{20-1}} =$$

$$t_r = \frac{r}{m_r} = - =$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - -} =$$

$$m_\eta = \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{1-}{\sqrt{20-1}} =$$

При построении многофакторных моделей, кроме данных характеристик, выводятся множественный и парные коэффициенты корреляции.

Корреляционно-регрессионная нелинейная модель зависимости настрига шерсти от живой массы овец имеет вид:

$$\bar{y} = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ .$$

Коэффициент корреляции 0,897 близок к 1, поэтому можно утверждать, что данная модель хорошо описывает исследуемую зависимость.

В связи с тем, что t-критерий (20,0269) больше табличного ($t_{0,001} = 2.86$), то с большой вероятностью можно считать связь между живой массой овец и настригом шерсти достоверной.

Построенную модель можно использовать при планировании настрига шерсти в зависимости от живой массы овец.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. ознакомление с теоретическими материалами.
2. получение варианта заданий.
3. вычисление коэффициента корреляции между параметрами ***x*** и ***y;*** построение алгоритма, написание программы, отладка и тестирование программы.
4. оценка совместности выборочных дисперсий и его алгоритм, программа.
5. алгоритм вычисления коэффициентов регрессионной модели его программа.
6. алгоритм анализа адекватности регрессионной модели объекта, программа.

Содержание лабораторной работы

1. цель работы.
2. краткое теоретическое сведения.
3. алгоритм, программа, результаты вычислений R_{xy} и R_{yx} .
4. оценка совместности выборочных дисперсий и его алгоритм, программа.
5. алгоритм вычисления коэффициентов регрессионной модели его программа.
6. алгоритм анализа адекватности регрессионной модели объекта, программа.
5. построение лини эмпирической функции в корреляционном поле.
7. Заключение.

Теоретические вопросы

1. Модель, моделирование, корреляционный модель.
2. Корреляционое поле, коэффициент корреляции.
3. метод наименьших квадратов.
4. критерий Кохрена.
5. критерий Стьюдента.
6. критерий Фишера.
7. алгоритмы вычисления критериев Кохрена, Стьюдента, Фишера.
8. Корреляцион моделни объектга адекватлигини баҳолаш масаласининг қўйилиши.
9. Корреляцион моделнинг объектга адекват бўлмаган ҳолати.
10. Регрессия чизиғини қуриш методикаси.

Литература

1. Тереков Л.Л и др. Математические методы и модели в планировании эксперимента. Учебное пособие для студентов вузов.- Киев: вища школа 1981.
2. Барабашук В.И., Креденпер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике .- Киев: Техника, 1984.- 200 с.
3. Румшиский Л.З Математическая обработка результатов эксперимента .-М.: Наука, 1971.- 192 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: высшая школа, 1985.- 271 с.

4-лабораторная работа
ПОСТРОЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА В ВИДЕ ПОЛИНОМА *М*-СТЕПЕНИ РЕГРЕССИОННЫМИ МЕТОДАМИ И ИХ АНАЛИЗ

Цель: **Построение и анализ нелинейной модели *М*-степени по экспериментальным данным**

Задании:	1. Изучение теоретических материалов по статистике;
	2.Определение коэффициентов полиномиальной модели с помощью метода наименьших квадратов;
	3. Разработка алгоритма и написание программы;
	4. Отладка и тестирование программы;
	5. Оформление лабораторной работы.

Краткие теоретические сведения

Когда коэффициент корреляции между входными и выходными параметрами исследуемого объекта близок к нулю, это означает что, зависимость будет нелинейной. Поэтому построение нелинейной модели исследуемого объекта обычно строятся в виде полинома различных степеней (в основном до 5-7 степеней).

Допустим получены экспериментальные данные:

$$X = \{x_j\},\ j = \overline{1,n};\qquad Y = \{y_j\},\ j = \overline{1,n};\ n \geq 25.$$

Будем искать эмпирическую функцию исследуемого объекта ***y = f(x)*** *в виде полинома* ***m***-степени, тогда уравнения регрессии выглядить следующим образом:

$$\bar{y} = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_m x^m,\quad m < n. \tag{1}$$

Согласно по методу наименьших квадратов:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min \tag{2}$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2{}_2 - \ldots a_m x^m\right)^2 \to \min \tag{3}$$

$s = f(a_0, a_1, a_2,\ \ldots\ , a_m)$, экстремальные значение функции из *m*-аргументов определяется:

$$\begin{cases} \frac{ds}{da_0} = 0, \\ \frac{ds}{da_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{ds}{da_m} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

После математических преобразований получим:

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_m a_m = b_0, \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \ldots + c_{m+1} a_m = b_1, \\ c_2 a_0 + c_3 a_1 + c_4 a_2 + \ldots + c_{m+2} a_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \ldots + c_{m+m} a_m = b_m, \end{cases} \qquad (5)$$

где $C = \{c_k\},\ \ k = \overline{0,2m};\ \ B = \{b_i\},\ \ i = \overline{0,m}.$

$$c_k = x_i^k,\ \ k = \overline{0,2m}; \qquad (6)$$

$$b_k = \sum x_i^k y_i,\quad k = \overline{0,m}. \qquad (7)$$

Теперь, представим коэффициенты нормальных уравнений виде матрицы, свободные члены – вектором, т.е.

$C = \{c_k\},\ \ k = \overline{0,2m};$ представим матрицей $Z = \{z_{ij}\},\ \ i, j = \overline{0,m}.$

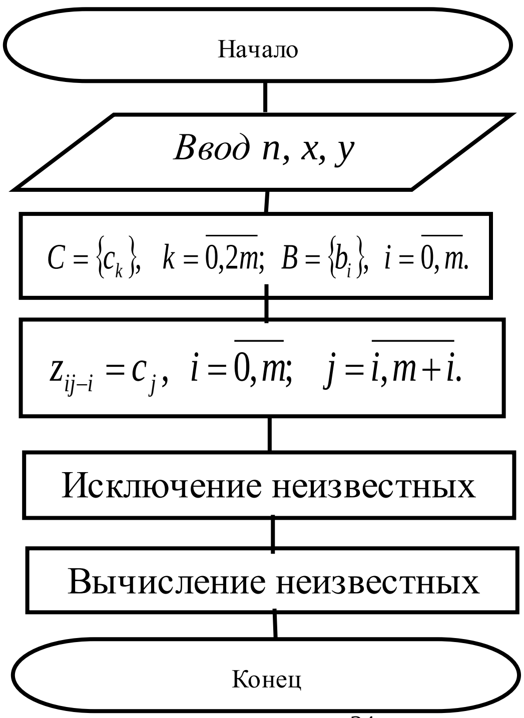
Элементы матрицы Z определяется по следующему алгоритму:

$$z_{ij-i} = c_j,\ \ i = \overline{0,m};\quad j = \overline{i,m+i}. \qquad (8)$$

В результате получим систему линейных уравнений с новыми коэффициентами:

$$\begin{cases} Z_{00} a_0 + Z_{01} a_1 + Z_{02} a_2 + \ldots + Z_{0m} a_m = b_0 \\ Z_{10} a_0 + Z_{11} a_1 + Z_{12} a_2 + \ldots + Z_{1m} a_m = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{m0} a_0 + Z_{m1} a_1 + Z_{m2} a_2 + \ldots + Z_{mm} a_m = b_m \end{cases} \qquad (9)$$

Для определения неизвестных параметров воспользуемся методом Гаусса. Укрупненный алгоритм метода Гаусса приведена ниже.



Содержание отчета по лабораторной работе

1. Краткое описание работы;
2. Алгоритм вычисления коэффициентов полиномиальной модели методом наименьших квадратов;
3. Программа алгоритма;
4. Результаты отладки и тестирования программы;
5. Оформление лабораторной работы.

Теоретические вопросы

1. Метод наименьших квадратов при построении полиномиальной модели объекта.
2. Получение нормальных систем уравнений.
3. Что такое полиномиальная модель?
4. Прямой и обратный алгоритм Гаусса для решения нормальных систем уравнений.
5. Алгоритм и программа визуализации полиномиальной модели в корреляционном поле.

Литература

5. Тереков Л.Л и др. Математические методы и модели в планировании эксперимента. Учебное пособие для студентов вузов.- Киев: вища школа 1981.
6. Барабашук В.И., Креденпер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике .- Киев: Техника, 1984.- 200 с.
7. Румшиский Л.З Математическая обработка результатов эксперимента .-М.: Наука, 1971.- 192 с.
8. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: высшая школа, 1985.- 271 с.

5-лабораторная работа
ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА МЕТОДОМ БРАНДОНА И ИХ АНАЛИЗ

<u>Цель:</u> Построение и анализ нелинейной модели методом Брандона.

<u>Задании:</u>	1. Изучение теоретических материалов по построению нелинейной множественной регрессионной модели объекта методом Брандона;
	2.последовательное построение линейных моделей, определение коэффициентов модели, анализ модели;
	3. Разработка алгоритма и написание программы;
	4. Отладка и тестирование программы;
	5. Оформление лабораторной работы.

Краткое теоретическое сведение

При многофакторном планировании эксперимента методом комбинационных квадратов (рис.1) для анализа результатов данного плана эксперимента и составления математической модели необходимо получить уравнения множественной нелинейной регрессии для каждого из показателей свойств исследуемого бурового раствора.

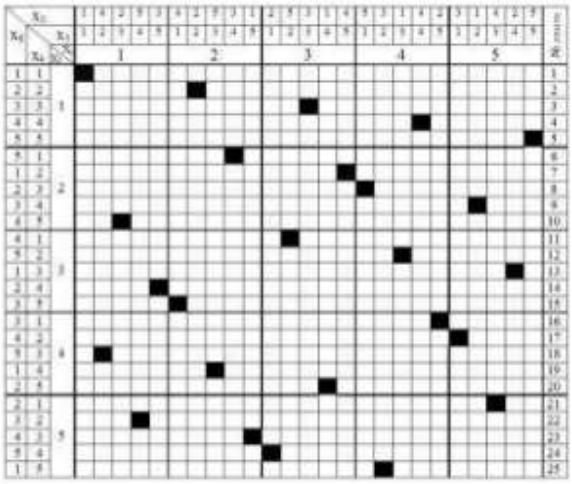


Рис.1. Пример шестифакторного комбинационного квадрата

Построение уравнений множественной нелинейной регрессии с помощью аналитических методов в большинстве случаев невозможно. Для выхода из этой ситуации прибегают к помощи эмпирических методов, дающих адекватные результаты. Одним из таких является метод Брандона. Далее приведён его алгоритм с начальными данными, представленными в таблице 1. Форма линии парной регрессии выбирается из заданного множества стандартных зависимостей, к которым отнесём:

1) $y = a + bx$; 2) $y = a + b\ln x$; 3) $y = a + be^x$; 4) $y = a + b\sqrt{x}$; 5) $y = a + bx^2$;

6) $y = a + bx^y$; 7) $y = ab^x$; 8) $y = ae^{bx}$; 9) $y = ax^b$; 10) $y = ax^{bx}$;

11) $y = \dfrac{1}{a + bx}$; 12) $y = \dfrac{1}{a + be^{-x}}$; 13) $y = ae^{\frac{b}{x}}$; 14) $y = \dfrac{x}{a + bx}$;

15) $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$;

16) $y = a_0 + \sum_{i=1}^{m} (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$

Коэффициенты всех этих уравнений можно определить, используя метод наименьших квадратов.

Таблица 1. Коэффициенты уравнений

x_1	x_2	…	x_n	y
x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1
…	…	…	…	…
x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	y_m

Алгоритм Брандона состоит в следующем: сначала вычисляем среднее значение выходной характеристики $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$, $y_i > 0$. Затем выполняем преобразование $y_{0i} = \frac{y_i}{\bar{y}}$, $i = \overline{1,m}$, для пары переменных (y_0, x_1) строим зависимости типа 1-16 (см. выше) и по критерию Дарбина-Уотсона (DW) и по величине корреляционного отношения η (для линейных зависимостей берут коэффициент корреляции r) выбираем зависимость, имеющая максимальный уровень спецификации: $\tilde{y}_0 = f_1(x_1)$. Далее выполняем преобразование $y_{1i} = \frac{y_{0i}}{\tilde{y}_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$, и для пары переменных (y_1, x_2) выбираем вид зависимости, имеющий максимальный уровень спецификации: $\tilde{y}_1 = f_2(x_2)$. Продолжаем процесс до исчерпания всех факторов, воздействующих на выходную характеристику.

После определения $\tilde{y}_{n-1} = f_n(x_n)$, строим общую формулу множественной регрессии:

$$\tilde{y} = \bar{y} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \tilde{y}_k = \bar{y} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k(x_k) \qquad (2)$$

Корреляционное отношение считаем по формуле:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y}_i)^2}} \qquad (3)$$

Если, например, $\eta=0.7$, то это означает, что средняя относительная ошибка аппроксимации равна 30%.

Пусть $e_i = y_i - \tilde{y}_i$. Тогда значение критерия Дарбина-Уотсона определяют по формуле:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{m}(l_i - l_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{m} l_i^2} \quad (4)$$

Если $DW \approx 2$, то автокорреляция отсутствует, если $DW = 0$, или $DW = 4$, то имеет место полная автокорреляция. Промежуточные результаты проверяют с помощью специальных таблиц.

Недостатком математической модели, полученной данным методом, является отсутствие учета влияния физико-химического взаимодействия между компонентами дисперсной системы на показатели свойств бурового раствора. Таким образом, при наличии синергетических эффектов между химическими реагентами, составляющими буровой раствор, применение метода комбинационных квадратов для решения поставленной задачи малоэффективно. В этом случае более приемлемым является моделирование с использованием ротатабельного планирования эксперимента.

1.2. Ротатабельное планирование эксперимента

Для составления экспериментального плана выявляются основные факторы, влияющие на исследуемый процесс и характеризующие его выходные параметры. Применительно к буровому раствору это группа реагентов, регулирующих те или иные свойства раствора. Уровни варьирования факторов определяются из анализа априорной информации, часто по литературным или промысловым данным.

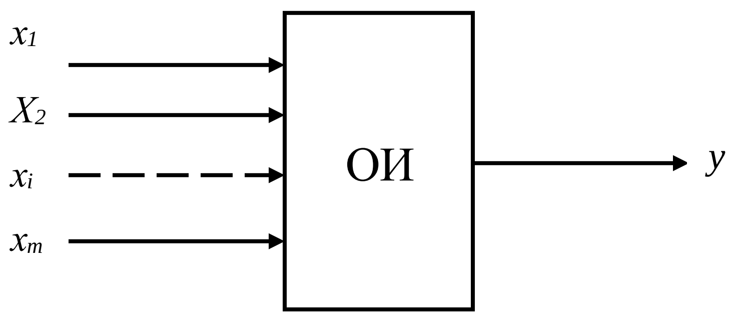
При квадратичном планировании факторы изменяются фактически на пяти уровнях (при полнофакторном эксперименте – на двух), что очень важно для описания нелинейной зависимости выходного параметра от влияющих факторов [3].

Устанавливаются границы изменения концентрации (x_i) реагентов. Для каждого из факторов кроме нижнего, верхнего и основного уровней устанавливаются два дополнительных уровня “±α”, где α вычисляется по формуле:

$$\alpha = 2^{k/4}, \quad (5)$$

где k – количество факторов.

При использовании полинома в качестве математической модели процесса факторы кодируют по формуле



где x_i, $i=\overline{1,m}$; - входные данные;

у – выходной параметр;

ОИ – объект исследования.

Результаты эксперимента:

Т.р.	x_1	x_2	….	x_m	Y
1	x_{11}	x_{21}	….	x_{m1}	Y_1
2	x_{12}	x_{22}	….	x_{m2}	Y_2
.	. …	….	….	….	….
.	….	….	….	….	. . .
.	….	….	….	….	….
N	x_{1n}	x_{2n}		x_{mn}	y_n

Эмпирический модель объекта исследования методом Брандона выглядет следующим образом:

$$\hat{y} = \bar{y} f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_m(x_m) \tag{1}$$

где $\bar{y}$ определяется по формуле:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y$$

$f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_m(x_m)$ - независимые функции от переменных $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$. Переменные $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ независимые. В уравнении (1) вхождение $f_j(x_j)$; j=$\overline{1,m}$ имеет свой определенный порядок. Порядок вхождения определяется коэффициентом R_{y,x_j} - частной корреляции $\boldsymbol{y}$ с параметрами x_j ($j=\overline{1,m}$), значении R_{y,x_j} вычисляется по формуле:

$$R_{y,x_j} = \frac{\operatorname{cov}(x_j, y)}{S_{x_j} S_y} = \frac{\sum(x_j - \overline{x_j})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_j - \overline{x_j})^2 (y - \bar{y})^2}} =$$

$$= \frac{n\sum x_j y - \sum x_j \sum y}{\sqrt{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}} \quad ; \quad j = \overline{1,m} \tag{2}$$

R_{y,x_j} упорядочивается по убыванию значений, $\max_j\{R_{y,x_j}\}$.

Порядок вхождения функции f_j соответствует порядку R_{y,x_j}

1) Методика вычислений для первого параметра вхождений (значения R_{y,x_j} имеет максимальное)

y	$\frac{y}{\bar{y}}$
y_1	$z_1^{(1)}$
y_1	$z_2^{(1)}$
.	.
.	.
.	.
y_1	$z_N^{(1)}$

$$z_i^{(1)} = \frac{y}{\bar{y}} \quad ; \quad i = \overline{1,n}$$

$$z^{(1)} = f_1(x_1)$$

$$z^{(1)} = b_1 + a_1 x_1$$

b_1 ва a_1

Вычисляется МНК

Т.н	$z^{(1)}$	x_1
1	$z_1^{(1)}$	x_{11}
2	$z_2^{(1)}$	x_{12}
.	.	. …
.	.	… .
.	.	… .
N	$z_N^{(1)}$	x_{1N}

2) Методика вычислений для первого параметра вхождений (значения R_{y,x_j} второй по порядку в упорядоченной последовательности)

$z^{(1)}$	$\hat{z}^{(1)} = b_1 + a_1 x_1$	$z^{(2)}$	x_2
$z_1^{(1)}$	$\hat{z}_1^{(1)}$	$z_1^{(1)} / \hat{z}_1^{(1)}$	x_{21}
$z_2^{(1)}$	$\hat{z}_2^{(1)}$	$z_2^{(1)} / \hat{z}_2^{(1)}$.	x_{22}
.	.	.	. …
.	.	.	… .
.	.	$z_N^{(1)} / \hat{z}_N^{(1)}$	… .
$z_N^{(1)}$	$\hat{z}_N^{(1)}$		x_{2N}

$\hat{z}^{(2)} = f_2(x_2)$, $\hat{z}^{(2)} = b_2 + a_2 x_2$; b_2 ва a_2 вычисляется МНК.

$$\hat{z}_i^{(2)} = \frac{\hat{z}_i^{(1)}}{f_1(x_{1i})} \qquad (3)$$

3) m. Для параметра m (последний вхождений, для параметра m R_{y,x_j} имеет минимальное значение).

$z^{(m-1)}$	$\hat{z}^{(m-1)} = b_{m-1} + a_{m-1} x_{m-1}$	$z^{(m)}$	x_m

$z_1^{(m-1)}$	$\widehat{z}_1^{(m-1)}$	$z_1^{(m-1)} / \widehat{z}_1^{(m-1)}$	x_{m1}
$z_2^{(m-1)}$	$\widehat{z}_2^{(m-1)}$	$z_2^{(m-1)} / \widehat{z}_2^{(m-1)}$	x_{m2}
.	.	.	. …
.	.	.	… .
.	.	.	… .
$z_N^{(m-1)}$	$\widehat{z}_N^{(m-1)}$	$z_N^{(m-1)} / \widehat{z}_N^{(m-1)}$	x_{mN}

$\widehat{z}^{(m)} = f_m(x_m)$, $\widehat{z}^{(m)} = b_m + a_m x_m$; b_m *ва* a_m вычисляется МНК.

$$\widehat{z}_i^{(m)} = \frac{\widehat{z}_i^{(m-1)}}{f_{m-1}(x_{m-1,i})} \qquad (4)$$

Все эмпирические функции вставляем формулу (1), далее формулу преобразуем. Адекватность эмпирической модели полученной методом Брандона оценивается по формуле.

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\overline{y} f_1(x_{1,i}) f_2(x_{2,i}) .... f_m(x_{m,i})} \qquad (5)$$

Теоретические вопросы

1. что требуется для построения уравнения множественной регрессии?
2. R_{y,x_j} - как считается значение частных коэффициентов корреляции?
3. как определяется значение коэффициентов уравнения регрессии **a** и **b**?
4. $z_i^{(m-1)}$; i=1,2,3, …. m – чему равно?

Содержание отчета по лабораторной работе

3. Краткое описание метода Брандона;
4. Алгоритм вычисления коэффициента множественной корреляции.
5. Алгоритм вычисления коэффициентов линейных регрессионных моделей;
6. Программа алгоритма;
7. Результаты отладки и тестирования программы;
8. Оформление лабораторной работы.

Теоретические вопросы

1. Методика построения модели методом Брандона?
2. Определение параметров модели.
3. В каких условиях применяется для построения модели метод Брандона?
4. Как определяется коэффициенты регрессионных моделей?

Литература

1) Тереков Л.Л и др. Математические методы и модели в планировании эксперимента. Учебное пособие для студентов вузов.- Киев: вища школа 1981.
2) Барабашук В.И., Креденпер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике .- Киев: Техника, 1984.- 200 с.
3) Румшиский Л.З Математическая обработка результатов эксперимента .- М.: Наука, 1971.- 192 с.
4) Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: высшая школа, 1985.- 271 с.

6-лабораторная работа
СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА. АНАЛИЗ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ СВЯЗЕЙ

Цель: **Изучение связи между дисциплинами и их статистический анализ**

Задании:	1. Ознакомление учебным процессом. Изучение теоретических материалов по статистическому анализу;
	2.Определение множественных корреляционных зависимостей между предметами. Установление статистической зависимости с помощью статистических моделей;
	3. Разработка алгоритма и написание программы;
	4. Отладка и тестирование программы;
	5. Оформление лабораторной работы.

Содержание отчета по лабораторной работе

1) Краткое описание учебного процесса в вузе;
2) Краткое описание о статистическом анализе учебного процесса;
3) Определение междисциплинарных связей;
4) Установление зависимости освоение учебного материала с помощью статистических моделей и их анализ;
5) Оформление лабораторной работы.

Теоретические вопросы

1. Методика организации учебного процесса в вузе?
2. Управление учебным процессом?
3. Понятие корреляции в учебном процесса?

4. Функции деканата?
5. Функции зам.декана?
6. Как строится расписание занятии на факультете?

Литература

1) Тереков Л.Л и др. Математические методы и модели в планировании эксперимента. Учебное пособие для студентов вузов.- Киев: вища школа 1981.
2) Барабашук В.И., Креденпер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике .- Киев: Техника, 1984.- 200 с.
3) Румшиский Л.З Математическая обработка результатов эксперимента .- М.: Наука, 1971.- 192 с.
4) Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: высшая школа, 1985.- 271 с.

3.Решение экономико-математических задач методами линейного программирования
Методические указания

Для решения задач определенных классов созданы прикладные программы, реализующие различные численные методы. В данном разделе приведены задачи, для решения которых используются аппарат линейного программирования и корреляционно-регрессионный анализ. Программы на языке Паскаль, предназначенные для решения такого рода задач, приведены в приложениях.

3.2. Решение транспортных задач методами линейного программирования
2.1. Методические указания

Среди задач линейного программирования выделяется группа так называемых транспортных или распределительных задач, для решения которых могут использоваться специальные методы: распределительный метод, метод потенциалов, метод дифференциальных рент и др.

Транспортная задача линейного программирования записывается в следующем виде. Найти

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max(\min)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,,\ (i = 1 \div m);$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \,,\ (j = 1 \div n);$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

$$x_{ij} \ge 0,\ (i = 1 \div m;\ \ j = 1 \div n);$$

где i — номер поставщика;

m — число поставщиков;

j — номер потребителя;

n — число потребителей;

x_{ij} — количество ресурса, распределяемого от i-го поставщика j-му потребителю;

c_{ij} — оценка распределения ресурса от i-го поставщика j-му потребителю;

a_i — наличие ресурса у i-го поставщика;

b_j — потребность в ресурсе j-го потребителя.

Решение задач с помощью симплексного метода и метода потенциалов рассмотрим на примерах.

Пример 2. В хозяйстве за время уборки при заготовке силоса необходимо перевезти 4000 т зеленой массы с пяти полей к четырем фермам, в том числе с первого поля 600 т, со второго — 240 т, третьего —1360 т, четвертого — 1000 т и пятого — 900 т. Для первой фермы требуется 600 т зеленой массы, второй — 800 т, третьей — 1400 т и четвертой — 1200 т.

Расстояние перевозки зеленой массы с полей к фермам приведено в табл. 1.3.

Таблица 1.3.

Поле (поставщики)		Объемы ресурса	Ферма (потребители)			
			1-я	2-я	3-я	4-я
			B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1-е	600	5	6	2	2
A_2	2-е	240	9	7	4	6
A_3	3-е	1360	1	1	4	5
A_4	4-е	1000	5	2	2	4
A_5	5-е	900	6	4	3	4
Объемы потребления		$4100 \neq 4000$	600	800	1400	1200

Требуется составить такой план перевозок, чтобы общие транспортные затраты были минимальными.

Данная задача относится к классу транспортных задач линейного программирования. При решении транспортных задач, прежде всего проверяется условие равенства ресурсов поставщиков потребностям в них потребителей. Если это условие не выполняется, то вводится «фиктивный» поставщик или потребитель. «Фиктивные» объемы ресурсов или потребностей включаются в задачу с нулевыми оценками, т. е. «открытая» транспортная задача сводится к «закрытой».

В рассматриваемом нами примере наличие зеленой массы на полях превышает потребность в ней ферм на 100 т. В этом случае вводится пятая «фиктивная» ферма с потребностью в 100 т зеленой массы. Расстояние от нее до полей принимается равным 0.

Таблица 1.4.

Поле		Ферма (потребители)

(поставщики)	Объемы ресурса	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1 1-е	600	5 $X_{1,1}$	6 $x_{1,2}$	2 $x_{1,3}$	2 $x_{1,4}$	0 $x_{1,5}$
A_2 2-е	240	9 $X_{2,1}$	7 $x_{2,2}$	4 $x_{2,3}$	6 $x_{2,4}$	0 $x_{2,5}$
A_3 3-е	1360	1 $X_{3,1}$	1 $x_{3,2}$	4 $x_{3,3}$	5 $x_{3,4}$	0 $x_{3,5}$
A_4 4-е	1000	5 $X_{4,1}$	2 $x_{4,2}$	2 $x_{4,3}$	4 $x_{4,4}$	0 $x_{4,5}$
A_5 5-е	900	6 $X_{5,1}$	4 $x_{5,2}$	3 $x_{5,3}$	4 $x_{5,4}$	0 $x_{5,5}$
Объемы потребления	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100

Данную задачу можно решить как симплексным методом, так и методом потенциалов. Для решения задачи симплексным методом необходимо, как и в примере 1, составить развернутую экономико-математическую модель. Переменными величинами в задаче будут:

$x_{1,1}$ – количество зеленой массы, перевозимой с 1-го поля на 1-ю ферму, т;
$x_{1,2}$ – количество зеленой массы, перевозимой с 1-го поля на 2-ю ферму, т;
……………………………………………………………………………………..
$x_{1,5}$ – количество зеленой массы, перевозимой с 1-го поля на 5-ю ферму, т;
……………………………………………………………………………………..
$X_{5,1}$ – количество зеленой массы, перевозимой с 5-го поля на 1-ю ферму, т;
$X_{5,2}$ – количество зеленой массы, перевозимой с 5-го поля на 2-ю ферму, т;
………………………………………………………………………………………
$X_{5,5}$ – количество зеленой массы, перевозимой с 5-го поля на 5-ю ферму, т.

Развернутая экономико-математическая модель оптимизации перевозки зеленой массы с полей к фермам будет иметь следующий вид:

7. *Ограничения по наличию зеленой массы на полях:*

1) на 1-м поле

$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} = 600;$

2) на 2-м поле

$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} = 240;$

3) на 3-м поле

$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} = 1360;$

4) на 4-м поле

$x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} = 1000;$

5) на 5-м поле

$x_{5,1} + x_{5,2} + x_{5,3} + x_{5,4} + x_{5,5} = 900;$

8. *Ограничения по наличию зеленой массы на полях:*

6) 1-й фермы

$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} + x_{5,1} = 600;$

7) 2-й фермы

$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} + x_{5,2} = 800;$

8) 3-й фермы

$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} + x_{5,3} = 1400;$

9) 4-й фермы

$x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} + x_{5,4} = 1200;$

10) 5-й фермы (фиктивной)

$x_{1,5} + x_{2,5} + x_{3,5} + x_{4,5} + x_{5,5} = 100.$

Целевая функция – минимум затрат (тонно-километров) на перевозку зеленой массы:

$$Z = 5x_{1,1} + 6x_{1,2} + 2x_{1,3} + 2x_{1,4} + 0x_{1,5} + 9x_{2,1} + 7x_{2,2} + 4x_{2,3} + 6x_{2,4} + 0x_{2,5} + 7x_{3,1} + 1x_{3,2} + 4x_{3,3} + 5x_{3,4} + 0x_{3,5} + 5x_{4,1} + 2x_{4,2} + 2x_{4,3} + 4x_{4,4} + 0x_{4,5} + 6x_{5,1} + 4x_{5,2} + 3x_{5,3} + 4x_{5,4} + 0x_{5,5} \rightarrow \min.$$

После составления модели задача решается с помощью симплексного метода аналогично задаче, описанной в примере 1.

Решение транспортной задачи симплексным методом – трудоемкий процесс, так как модель получается большой размерности. В данном случае в модели 25 переменных и 10 ограничений. Предпочтительнее при решении такого рода задач использовать специальные методы, более эффективные по сравнению с симплексным методом.

3.3. Нахождение опорного (начального) плана перевозок транспортной задачи методом северо-западного угла

Решение транспортной задачи начинается с нахождения опорного плана. Для этого существуют различные способы. Например, способ северо-западного угла, способ минимальной стоимости по строке, способ минимальной стоимости по столбцу и способ минимальной стоимости таблицы.

Рассмотрим простейший, так называемый способ северо-западного угла. Пояснить его проще всего будет на конкретном примере:

Условия транспортной задачи заданы транспортной таблицей.

Таблица 1.5.

Поле (поставщики)		Объемы ресурса	Ферма (потребители)				
			1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
			B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1-е	600	5	6	2	2	0
A_2	2-е	240	9	7	4	6	0
A_3	3-е	1360	1	1	4	5	0
A_4	4-е	1000	5	2	2	4	0
A_5	5-е	900	6	4	3	4	0
Объемы потребления		4100 = 4100	600	800	1400	1200	100

Будем заполнять таблицу 1.5 перевозками постепенно начиная с левой верхней ячейки ("северо-западного угла" таблицы). Будем рассуждать при этом следующим образом. Ферма 1 подал заявку на 600 т груза зеленой массы. Удовлетворим эту заявку за счёт поставщика 1 (у поставщика 1 имеется зеленая масса 600 т) зеленой массой в количестве 600 т. Таким образом мы удовлетворили потребности первой фермы и полностью перевезли вес зеленой массы у поставщика 1. Теперь удовлетворим вторую ферму, потребность 2-й фермы 800 т зеленой массы, а у поставщика 2 имеется всего 240 т зеленой массы, удовлетворим потребность 2-й фермы в количестве 240 т зеленой массы, а недостающая часть удовлетворит за счет 3-го поставщика в количестве 560 т зеленой массы. Таким образом 2-я ферма удовлетворена, а у потребителя 3 осталось еще 800 т зеленой массы. Удовлетворим за счет них потребности 3-й фермы в количестве 800 т зеленой массы, потребность 3-й фермы 1400 т, недостающая часть 600 т удовлетворим за счет поставщика 4 в объеме 600 т зеленой массы. Таким образом, вес объем поставщика 3 распределен, а потребитель 3-я ферма тоже удовлетворен. Оставшихся часть объема 400 т зеленой массы у поставщика 4 выделим потребителю 4, т.е. 4-ю ферму, а недостающая часть удовлетворим за счет поставщика 5 в объеме 800 т зеленой массы. Оставшихся 100 т зеленой массы распределим 5-ю (фиктивную) ферму.

На этом распределение ресурсов у потребителей закончено; каждый потребитель, ферма получил груз - зеленой массы, согласно своей заявки. Это выражается в том, что сумма перевозок в каждой строке равна соответствующему ресурсу поставщика, а в столбце – заявке фермам, потребителям. Таким образом, нами сразу же составлен план перевозок, удовлетворяющий балансовым условиям. Полученное решение является опорным решением транспортной задачи, таблица 1.6. Транспортные

расходы при этом составляет:
$Z_1 = 5*600 + 7*240 + 1*560 + 4*800 + 2*600 + 4*400 + 4*800 + 0*100 = 14440$ сумов.

Таблица 1.6.

Поле (поставщики)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)				
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1 1-е	600	5 **600**	6	2	2	0
A_2 2-е	240	9	7 **240**	4	6	0
A_3 3-е	1360	1	1 **560**	4 **800**	5	0
A_4 4-е	1000	5	2	2 **600**	4 **400**	0
A_5 5-е	900	6	4	3	4 **800**	0 **100**
Объемы потребления	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100

Составленный нами план перевозок, не является оптимальным по стоимости, так как при его построении мы совсем не учитывали стоимость перевозок C_{ij} .

3.4. Нахождение опорного (начального) плана перевозок транспортной задачи методом минимальной стоимости перевозок груза

Другой способ - способ минимальной стоимости по строке - основан на том, что мы распределяем продукцию от пункта поставщика A_i не в любой из пунктов потребителю B_j, а в тот, к которому стоимость перевозки минимальна. Если в этом пункте заявка полностью удовлетворена, то мы убираем его из расчетов и находим минимальную стоимость перевозки из оставшихся пунктов B_j. Во всем остальном этот метод схож с методом северо-западного угла. В результате, опорный план, составленный способом минимальной стоимости по строке выглядит, так как показано в таблице № 7.

При этом методе может получиться, что стоимости перевозок C_{ij} и C_{ik} от пункта A_i к пунктам B_j и B_k равны. В этом случае, с экономической точки зрения, выгоднее распределить продукцию в тот пункт, в котором заявка больше. Так, например, в строке 1: $C_{13} = C_{14}$, но заявка b_3 (1400 т) больше заявки b_4 (1200 т), поэтому 600 т зеленой массы которая имеется у поставщика 1 мы распределим в клетку (1,3).

Таблица 1.7.

Поле (поставщики)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)				
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1 1-е	600	5	6	2 **600**	2	0
A_2 2-е	240	9	7	4 **240**	6	0
A_3 3-е	1360	1 **560**	1 **800**	4	5	0
A_4 4-е	1000	5	2	2 **560**	4 **440**	0
A_5 5-е	900	6 **40**	4	3	4 **760**	0 **100**
Объемы потребления	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100

Транспортные расходы при этом составляет:
Z_2 = 2*600 + 4*240 + 1*560 + 1*800 + 2*560 + 4*440 + 4*760 + 0*100 = 9540 сумов.

Способ минимальной стоимости по столбцу аналогичен предыдущему способу. Их отличие состоит в том, что во втором способе мы распределяем продукцию от пунктов B_i к пунктам A_j по минимальной стоимости C_{ji}, таблица 1.8.

Таблица 1.8.

Поле (поставщики)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)				
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1 1-е	600	5	6	2 **440**	2 **160**	0
A_2 2-е	240	9	7	4	6 **140**	0 **100**
A_3 3-е	1360	1 **600**	1 **760**	4	5	0
A_4 4-е	1000	5	2 **40**	2 **960**	4	0
A_5 5-е	900	6	4	3	4 **900**	0
Объемы потребления	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100

Транспортные расходы при этом составляет:
Z_3 = 2*440 + 2*160 + 6*140 + 1*600 + 1*760 + 2*40 + 2*960 + 4*900 = 9000 сумов.

Опорный план, составленный способами минимальных стоимостей (по столбцу или по строке) таблицы 1.7 и 1.8, обычно более близок к оптимальному решению. Так в нашем примере общие затраты на транспортировку по плану, составленному по плану северо-западного угла, минимальных стоимостей по строке и по столбцу соответственно составляет: Z_1 = 14440, Z_2 = 9540, Z_3 = 9000 сумов.

Клетки таблицы, в которых стоят ненулевые перевозки, являются *базисными*. Их число должно равняться $m + n - 1$. Необходимо отметить также, что встречаются такие ситуации, когда количество базисных клеток меньше чем $m + n - 1$. В этом случае распределительная задача называется вырожденной. И следует в одной из свободных клеток поставить количество перевозок равное нулю. Так, например, в таблице № 1.6:

$$m + n - 1 = 5 + 5 - 1 = 9,$$

а базисных клеток 8, поэтому нужно в одну из клеток строки 1 или столбца 1 поставить значение “0”. Например, в клетку (5,1).

Составляя план по способам минимальных стоимостей в отличии от плана по способу северо-западного угла мы учитываем стоимости перевозок C_{ij}, но все же не можем утверждать, что составленный нами план является оптимальным.

3.5. Поиск оптимального решения транспортной задачи. Решение транспортной задачи методом потенциалов.

Этот метод позволяет автоматически выделять циклы с отрицательной ценой и определять их цены.

Стоимость перевозки единицы груза из A_i в B_j равна C_{ij}; таблица стоимостей задана. Требуется найти план перевозок x_{ij}, который удовлетворял бы балансовым условиям и при этом стоимость всех перевозок бала минимальна.

Идея метода потенциалов для решения транспортной задачи сводиться к следующему. Представим себе что каждый из пунктов отправления A_i вносит за перевозку единицы груза (всё равно куда) какую-то сумму α_i; в свою очередь каждый из пунктов назначения B_j также вносит за перевозку груза (куда угодно) сумму β_j. Эти платежи передаются некоторому третьему лицу (“перевозчику“). Обозначим $\alpha_i + \beta_j = \boldsymbol{c}_{ij}$ $(i=1..m\ ;j=1..n)$ и будем называть величину $\boldsymbol{c}_{ij}$ “псевдостоимостью” перевозки единицы груза из A_i в B_j. Заметим, что платежи α_i и β_j не обязательно должны быть положительными; не исключено, что “перевозчик” сам платит тому или другому пункту какую-то премию за перевозку. Также надо отметить, что суммарная псевдостоимость любого допустимого плана перевозок при заданных платежах (α_i и β_j) одна и та же и от плана к плану не меняется.

До сих пор мы никак не связывали платежи (α_i и β_j) и псевдостоимости $\boldsymbol{c}_{ij}$ с истинными стоимостями перевозок C_{ij}. Теперь мы установим между ними связь. Предположим, что план x_{ij} невырожденный (число базисных клеток в таблице перевозок ровно m + n - 1). Для всех этих клеток $x_{ij} > 0$. Определим платежи (α_i и β_j) так, чтобы во всех базисных клетках псевдостоимости были ровны стоимостям:

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j = \boldsymbol{c}_{ij}, \text{ при } x_{ij} > 0.$$

Что касается свободных клеток (где $x_{ij} = 0$), то в них соотношение между псевдостоимостями и стоимостями может быть, какое угодно.

Оказывается соотношение между псевдостоимостями и стоимостями в свободных клетках показывает, является ли план оптимальным или же он может быть улучшен. Существует специальная теорема: Если для всех базисных клеток плана $x_{ij} > 0$,

$$\alpha_i + \beta_j = \boldsymbol{c}_{ij} = u_{ij},$$

а для всех свободных клеток $x_{ij} = 0$,

$$\alpha_i + \beta_j = \boldsymbol{c}_{ij} \geq u_{ij},$$

то план является ***оптимальным*** и никакими способами улучшен быть не может. Нетрудно показать, что это теорема справедлива также для вырожденного плана, и некоторые из базисных переменных равны нулю. План обладающий свойством :

$\boldsymbol{c}_{ij} = c_{ij}$ (для всех базисных клеток) (1)

$\boldsymbol{c}_{ij} \geq u_{ij}$ (для всех свободных клеток) (2)

называется ***потенциальным*** планом, а соответствующие ему платежи (α_i и β_j) — потенциалами пунктов A_i и B_j ($i=1,...,m$; $j=1,...,n$). Пользуясь этой терминологией вышеупомянутую теорему можно сформулировать так:

<u>Всякий потенциальный план является оптимальным.</u> Итак, для решения транспортной задачи нам нужно одно - построить потенциальный план. Оказывается его можно построить методом последовательных приближений, задаваясь сначала какой-то произвольной системой платежей, удовлетворяющей условию (1). При этом в каждой базисной клетке получиться сумма платежей, равная стоимости перевозок в данной клетке; затем, улучшая план следует одновременно менять систему платежей. Так, что они приближаются к потенциалам. При улучшении плана нам помогает следующее свойство платежей и псевдостоимостей: какова бы ни была система платежей (α_i и β_j) удовлетворяющая условию (1), для каждой свободной клетки цена цикла пересчёта равна разности между стоимостью и псевдостоимостью в данной клетке : $\gamma_{i,j} = c_{i,j} - \boldsymbol{u}_{i,j}$.

Таким образом, при пользовании методом потенциалов для решения транспортной задачи отпадает наиболее трудоёмкий элемент распределительного метода: поиски циклов с отрицательной ценой.

Процедура построения потенциального (оптимального) плана состоит в следующем.

В качестве первого приближения к оптимальному плану берётся любой допустимый план (например, построенный способом минимальной стоимости по строке). В этом плане $m + n - 1$ базисных клеток, где m - число строк, n - число столбцов транспортной таблицы. Для этого плана можно определить платежи (α_i и β_j), так, чтобы в каждой базисной клетке выполнялось условие :

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \qquad (3)$$

Уравнений (3) всего $m + n - 1$, а число неизвестных равно $m + n$. Следовательно, одну из этих неизвестных можно задать произвольно (например, равной нулю). После этого из $m + n - 1$ уравнений (3) можно найти остальные платежи α_i, β_j, а по ним вычислить псевдостоимости, $u_{i,j} = \alpha_i + \beta_j$ для каждой свободной клетки.

Таблица 1.9

Поле (поставщики)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)					α_i
		1-я B_1	2-я B_2	3-я B_3	4-я B_4	5-я B_5	
A_1 1-е	600	5 $u_{11} = 2$	6 $u_{12} = 2$	2 − **440**	2 + **160**	0 $u_{15} = -4$	0
A_2 2-е	240	9 $u_{21} = 6$	7 $u_{22} = 6$	4 + $u_{23} = 6$	6 **140** −	0 **100**	4
A_3 3-е	1360	1 **600**	1 **760**	4 $u_{33} = 1$	5 $u_{34} = 1$	0 $u_{35} = -5$	-1
A_4 4-е	1000	5 $u_{41} = 2$	2 **40**	2 **960**	4 $u_{44} = 2$	0 $u_{45} = -4$	0
A_5 5-е	900	6 $u_{51} = 4$	4 $u_{52} = 4$	3 $u_{53} = 4$	4 **900**	0 $u_{55} = -2$	2
Объемы потребления	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100	
β_j		2	2	2	2	**-4**	

Для клеток $x_{ij} \neq 0$ определяем потенциалы:

$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$		
$\text{б}_1 + \text{в}_3 = c_{13}$	$\text{б}_1 + \text{в}_3 = 2$	$\boldsymbol{\text{б}_1 = 0}$ $\text{в}_1 = 2$
$\text{б}_1 + \text{в}_4 = c_{14}$	$\text{б}_1 + \text{в}_4 = 2$	$\text{б}_2 = 4$ $\text{в}_2 = 2$
$\text{б}_2 + \text{в}_4 = c_{24}$	$\text{б}_2 + \text{в}_4 = 6$	$\text{б}_3 = -1$ $\text{в}_3 = 2$
$\text{б}_2 + \text{в}_5 = c_{25}$	$\text{б}_2 + \text{в}_5 = 0$	$\text{б}_4 = 0$ $\text{в}_4 = 2$
$\text{б}_3 + \text{в}_1 = c_{31}$	$\text{б}_3 + \text{в}_1 = 1$	$\text{б}_5 = 2$ $\text{в}_5 = -4$
$\text{б}_3 + \text{в}_2 = c_{32}$	$\text{б}_3 + \text{в}_2 = 1$	
$\text{б}_4 + \text{в}_2 = c_{42}$	$\text{б}_4 + \text{в}_2 = 2$	
$\text{б}_4 + \text{в}_3 = c_{43}$	$\text{б}_4 + \text{в}_3 = 2$	
$\text{б}_5 + \text{в}_4 = c_{54}$	$\text{б}_5 + \text{в}_4 = 4$	

Для клеток $x_{ij} = 0$ определяем псевдостоимости:

$б_i + в_j = u_{ij}$ $б_1 + в_1 = u_{11} = 2$ $б_1 + в_2 = u_{12} =2$ $б_1 + в_5 = u_{15} = -4$ $б_2 + в_1 = u_{21} =6$ $б_2 + в_2 = u_{22} =6$ $б_2 + в_3 = u_{23} =6$ $б_3 + в_3 = u_{33} =1$ $б_3 + в_4 = u_{34} =1$ $б_3 + в_5 = u_{35} = -6$ $б_4 + в_1 = u_{41} =2$ $б_4 + в_4 = u_{44} =2$ $б_4 + в_5 = u_{45} = -4$ $б_5 + в_1 = u_{51} =4$ $б_5 + в_2 = u_{52} =4$ $б_5 + в_3 = u_{53} =4$ $б_5 + в_5 = u_{55} = -2$	$\boldsymbol{б_1 = 0}$ $в_1 = 2$ $б_2 = 4$ $в_2 = 2$ $б_3 = -1$ $в_3 = 2$ $б_4 = 0$ $в_4 = 2$ $б_5 = 2$ $в_5 = -4$

Если оказалось, что все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей

$$\boldsymbol{u}_{ij} \le \boldsymbol{c}_{ij} ,$$

то план потенциален и, значит, оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость больше стоимости (как в нашем примере), то план не является оптимальным и может быть улучшен переносом перевозок по циклу, соответствующему данной свободной клетке. Цена этого цикла ровна разности между стоимостью и псевдостоимостью в этой свободной клетке.

В таблице № 1.9 мы получили в двух клетках (2,3) и (5,3) $\boldsymbol{u}_{ij} > \boldsymbol{c}_{ij}$, теперь можно построить цикл в любой из этих двух клеток. Выгоднее всего строить цикл в той клетке, в которой разность $\boldsymbol{u}_{ij} - \boldsymbol{c}_{ij}$ максимальна. В нашем случае в клетке (2,3) разность больше чем разность клетки (5,3), которая равна 2, поэтому, для построения цикла выберем, клетку (2,3). Построим цикл перераспределения груза между потребителями. Таким циклом является клетки: (2,3 +) → (1,3 -) → (1,4 +) → (2,4 -) → (2,3 +). Теперь будем перемещать по циклу число 140, так как оно является минимальным из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком «-» . При перемещении мы будем вычитать 140 из клеток со знаком «-» и прибавлять к клеткам со знаком «+». Таким образом мы получили новый план перевозок груза таблица 1.10, транспортные расходы которого составляет:

Z_4 = 2*300 + 2*300 + 4*140 + 1*600 + 1*760 + 2*40 + 2*960 + 4*900 = 8720 сумов.

Таблица 1.10

Поле (поставщики)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)					α_i
		1-я B_1	2-я B_2	3-я B_3	4-я B_4	5-я B_5	
A_1 1-е	600	5	6	2 **300**	2 **300**	0	
A_2 2-е	240	9	7	4 **140**	6	0 **100**	
A_3 3-е	1360	1 **600**	1 **760**	4	5	0	
A_4 4-е	1000	5	2 **40**	2 **960**	4	0	
A_5 5-е	900	6	4	3	4 **900**	0	
Объемы потребления	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100	
β_j							

После этого необходимо подсчитать потенциалы α_i и β_j и цикл расчетов повторяется, в итоге получим таблицу 1.11.

Таблица 1.11

Поле (поставщики)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)					α_i
		1-я B_1	2-я B_2	3-я B_3	4-я B_4	5-я B_5	
A_1 1-е	600	5 $u_{11} = 2$	6 $u_{12} = 2$	2 - **300**	2 + **300**	0 $u_{15} = -2$	0
A_2 2-е	240	9 $u_{21} = 4$	7 $u_{22} = 4$	4 **140**	6 $u_{23} = 4$	0 **100**	2
A_3 3-е	1360	1 **600**	1 **760**	4 $u_{33} = 1$	5 $u_{34} = 1$	0 $u_{35} = -3$	-1
A_4 4-е	1000	5 $u_{41} = 2$	2 **40**	2 **960**	4 $u_{44} = 2$	0 $u_{45} = -2$	0
A_5 5-е	900	6 $u_{51} = 4$	4 $u_{52} = 4$	3 + $u_{53} = 4$	4 **900** -	0 $u_{55} = 0$	2
Объемы потребления	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100	
β_j		2	2	2	2	**-2**	

Итак, мы приходим к следующему алгоритму решения транспортной задачи методом потенциалов, таблица 1.12, транспортные расходы которого составляет:
Z_5 = 2*600 + 4*140 + 1*600 + 1*760 + 2*40 + 2*960 + 3*300 + 4*600 = 8420 сумов.

Таблица 1.12

Поле (поставщи-ки)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)					
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1 1-е	600	5	6	2	2 **600**	0	0
A_2 2-е	240	9	7	4 **140**	6	0 **100**	0
A_3 3-е	1360	1 **600**	1 **760**	4	5	0	0
A_4 4-е	1000	5	2 **40**	2 **960**	4	0	1
A_5 5-е	900	6	4	3 **300**	4 **600**	0	2
Объемы потребле-ния	4100 = 4100	600	800	1400	1200	100	
β_j		0	1	1	2	**0**	

Теперь для таблицы 1.12 необходимо подсчитать потенциалы α_i и β_j и цикл расчетов повторяется, в итоге получим таблицу 1.13.

Таблица 1.13

Поле (поставщи-ки)	Объемы ресурса	Ферма (потребители)					
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1 1-е	600	5 $u_{11}=0$	6 $u_{12}=1$	2 $u_{13}=1$	2 **600**	0	0
A_2 2-е	240	9 $u_{21}=0$	7 $u_{22}=1$	4 **140**	6 $u_{24}=2$	0 **100**	0
A_3 3-е	1360	1 **600**	1 **760**	4 $u_{33}=1$	5 $u_{34}=2$	0	0
A_4 4-е	1000	5 $u_{41}=1$	2 **40**	2 **960**	4 $u_{44}=3$	0	1
A_5 5-е	900	6 $u_{51}=2$	4 $u_{52}=3$	3 **300**	4 **600**	0	2
Объемы потреб-ния	4100 =	600	800	1400	1200	100	

	4100						
β_j		0	1	1	2	**0**	

Наконец мы получили таблицу, где все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей

$$c_{ij} \le c_{ij} \ ,$$

то план потенциален и, значит, оптимален. Наконец, оптимальный план перевозок груза составляет

$Z_5^* =$ 2*600 + 4*140 + 1*600 + 1*760 + 2*40 + 2*960 + 3*300 + 4*600 = 8420 сумов.

Итак, мы приходим к следующему алгоритму решения транспортной задачи методом потенциалов.

1. Взять любой опорный план перевозок, в котором отме*чены* $m + n - 1$ базисных клеток (остальные клетки свободные).

2. Определить для этого плана платежи (α_i и β_j) исходя из условия, чтобы в любой базисной клетке псевдостоимости были равны стоимостям. Один из платежей можно назначить произвольно, например, положить равным нулю.

3. Подсчитать псевдостоимости $c_{i,j} = \alpha_i + \beta_j$ для всех свободных клеток. Если окажется, что все они не превышают стоимостей, то план оптимален.

4. Если хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость превышает стоимость, следует приступить к улучшению плана путём переброски перевозок по циклу, соответствующему любой свободной клетке с отрицательной ценой (для которой псевдостоимость больше стоимости).

5. После этого заново подсчитываются платежи и псевдостоимости, и, если план ещё не оптимален, процедура улучшения продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Так в нашем примере после 3-х циклов расчетов получили оптимальный план. При этом стоимость всей перевозки изменялась следующим образом: Z_1 = 14400, Z_2 = 9540, Z_3 = 9000, Z_4 = 8720, Z_5 = Z_{min} = 8420.

Следует отметить так же, что оптимальный план может иметь и другой вид, но его стоимость останется такой же Z_{min} = 8420.

Список использованной литературы

1. Светлов Н.М. Практикум по теории систем и системному анализу для студентов бакалавриата по направлениям «Прикладная информатика в экономике» и «Математические методы в экономике». М.: Изд-во РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева, 2008.
2. Сурмин Ю.П. Теория систем и системный анализ: Учеб. пособие. / Межрегиональная академия управления персоналом. Киев, 2003.

3. Антонов А.В. Системный анализ: Учебник для ст-тов высших учеб. заведений, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника» и специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления»: Изд. 3-е. М.: Высшая школа, 2008.

4. Тереков Л.Л и др. Математические методы и модели в планировании эксперимента. Учебное пособие для студентов вузов.- Киев: вища школа 1981.

5. Барабашук В.И., Креденпер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике .- Киев: Техника, 1984.- 200 с.

6. Румшиский Л.З Математическая обработка результатов эксперимента .-М.: Наука, 1971.- 192 с.

7. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: высшая школа, 1985.- 271 с

Приложении

Таблица значений критерия Стьюдента (t-критерия).
Критические значения коэффициента Стьюдента (t-критерия) для различной доверительной вероятности *p* и числа степеней свободы k_2:

K_2	p							
	0.80	**0.90**	**0.95**	**0.98**	**0.99**	**0.995**	**0.998**	**0.999**
1	3.0770	6.3130	12.7060	31.820	63.656	127.656	318.306	636.619
2	1.8850	2.9200	4.3020	6.964	9.924	14.089	22.327	31.599
3	1.6377	2.35340	3.182	4.540	5.840	7.458	10.214	12.924
4	1.5332	2.13180	2.776	3.746	4.604	5.597	7.173	8.610
5	1.4759	2.01500	2.570	3.649	4.0321	4.773	5.893	6.863
6	1.4390	1.943	2.4460	3.1420	3.7070	4.316	5.2070	5.958
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.998	3.4995	4.2293	4.785	5.4079
8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554	3.832	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.780
10	1.3720	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869
11	1.363	1.795	2.201	2.718	3.105	3.496	4.024	4.437
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0845	3.4284	3.929	4.178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.1123	3.3725	3.852	4.220
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.976	3.3257	3.787	4.140
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.732	4.072
16	1.3360	1.7450	2.1190	2.5830	2.9200	3.2520	3.6860	4.0150

17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5668	2.8982	3.2224	3.6458	3.965
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5514	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.08600	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495
21	1.3230	1.7200	2.2.0790	2.5170	2.8310	3.1350	3.5270	3.8190
22	1.3212	1.7117	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.5050	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.1040	3.4850	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.0905	3.4668	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.4502	3.7251

26	1.315	1.705	2.059	2.478	2.778	3.0660	3.4360	3.7060
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4210	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.0360	3.3962	3.8494
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.0298	3.3852	3.6460
32	1.3080	1.6930	2.0360	2.4480	2.7380	3.0140	3.3650	3.6210
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.9520	3.3479	3.6007
36	1.3050	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	9.490	3.3326	3.5821
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	3.9808	3.3190	3.5657
40	1.303	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.9712	3.3069	3.5510
42	1.320	1.682	2.018	2.418	2.6980	2.6930	3.2960	3.5370
44	1.301	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923	3.9555	3.2861	3.5258
46	1.300	1.6767	2.0129	2.4102	2.6870	3.9488	3.2771	3.5150
48	1.299	1.6772	2.0106	2.4056	2.6822	3.9426	3.2689	3.5051
50	1.298	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.9370	3.2614	3.4060
55	1.2997	1.673	2.0040	2.3960	2.6680	2.9240	3.2560	3.4760
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.9146	3.2317	3.4602
65	1.2947	1.6686	1.997	2.3851	2.6536	3.9060	3.2204	3.4466
70	1.2938	1.6689	1.9944	2.3808	2.6479	3.8987	3.2108	3.4350
80	1.2820	1.6640	1.9900	2.3730	2.6380	2.8870	3.1950	3.4160
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3885	2.6316	2.8779	3.1833	3.4019
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	2.8707	3.1737	3.3905

120	1.2888	1.6577	1.9719	2.3578	2.6174	2.8598	3.1595	3.3735
150	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.6090	2.8482	3.1455	3.3566
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	2.8385	3.1315	3.3398
250	1.2849	1.6510	1.9695	2.3414	2.5966	2.8222	3.1232	3.3299
300	1.2844	1.6499	1.9679	2.3388	2.5923	2.8279	3.1176	3.3233
400	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882	2.8227	3.1107	3.3150
500	1.2830	1.6470	1.9640	2.3330	2.7850	2.8190	3.1060	3.3100

Таблица значений критерия Фишера (F-критерия)

Значения критерия Фишера (F-критерия) для уровня значимости *p = 0.05*

	k_1										
k_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**15**
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.95
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	-	2,42	-	-	-
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	-	2,40	-	-	-

23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	-	2,38	-	-	-
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	-	2,36	-	-	-
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	-	2,34	-	-	-
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	-	2,32	-	-	-
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	-	2,30	-	-	-
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	-	2,29	-	-	-
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	-	2,28	-	-	-
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	-	2,27	-	-	-
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	-	2,22	-	-	-
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	-	2,18	-	-	-
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	-	2,15	-	-	-
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	-	2,13	-	-	-
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	-	2,10	-	-	-
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	-	2,07	-	-	-
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	-	2,06	-	-	-
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	-	2,04	-	-	-
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	-	2,03	-	-	-
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	-	2,01	-	-	-
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	-	2,00	-	-	-
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	-	1,98	-	-	-
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	-	1,97	-	-	-
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	-	1,96	-	-	-
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	-	1,96	-	-	-
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	-	1,95	-	-	-
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	-	1,94	-	-	-