

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

Математика ўқитиш методикаси йўналиши 15.03-гуруҳ
битирувчиси Тошпўлатова Гулнозахон Бахтиёр қизининг

**“Сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама
учун Дирихле ва Хольмгрен масалаларининг
тадқиқоти”**
мавзусидаги

БИТИРУВ

МАЛАКАВИЙ ИШИ

Илмий раҳбар: ўқитувчи Ш.Орипов

Фарғона – 2019

Битирув малакавий иш кафедранинг 2019 йил ____ ____даги
____ йиғилишида муҳокама қилинган ва ҳимояга тавсия этилган.

Кафедра мудири _____ Ш.Каримов

Режа

Кириш

I боб. Математик физиканинг айрим махсус функциялари

- 1.1. Эйлер интеграллари
- 1.2. Гаусснинг гипергеометрик функцияси
- 1.3. Бессел функциялари
- 1.4. Лежандр функциялари

II боб. Сингуляр коэффицентга эга бўлган эллиптик типдаги тенглама учун Дирихле ва Хольмгрен масалалари

2.1. Сингуляр коэффицентга эга бўлган эллиптик типдаги тенглама учун Дирихле масаласи

- 2.1.1. Масаланинг қўйилиши
- 2.1.2. Масалани кутб координаталар системасига ўтказиш
- 2.1.3. Оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалаларни ечиш

2.1.4. Дирихле масаласининг ечимини куриш

2.2. Хольмгрен масаласининг тадқиқоти

- 2.2.1. Масаланинг қўйилиши
- 2.2.2. Масаланинг хос сонлари ва хос функцияларини топиш
- 2.2.3. Масаланинг ечимини куриш

Хулоса

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

Кириш

Ўзбекистон Республикасининг биринчи Президенти И.А.Каримов Олий Мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг аҳамиятига изоҳ бериб шундай деган эди: «Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, барибир кадрларга бориб қадалаверади. Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз келажаги, ўрнимизга ким келишига ёки бошқачароқ қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ. ...Мамлакатимиз келажаги учун Олий Мажлиснинг IX сессиясида қабул қилинган «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури»нинг [1] амалга оширилиши жуда ҳам муҳим аҳамиятга эга.

...Юқори малакали педагог кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашга алоҳида эътибор бериш лозим. Кадрлар тайёрлашнинг сифати, эркин фикрловчи шахс - фуқарони камол топтиришига, эртага синф хоналар ва аудиторияларда кимлар дарс ва сабоқ беришига боғлиқ».

Дарҳақиқат, баркамол инсон шахсининг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Шундай экан, ҳар жабҳада муваффақиятга эришишда, жумладан, юқори малакали кадрлар тайёрлашда миллий дастурнинг ўрни ва аҳамияти бекиёсдир.

Кадрлар тайёрлаш миллий дастури ва “Таълим тўғрисидаги” қонунларда[2] олий таълимнинг асосий мақсади бозор иқтисодиёти шароитида мустақил ишлашга қодир, рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат. Бу мақсадга эришиш учун, шунингдек Республикамиз Президенти Шавкат Миромонович Мирзиёев ўзларининг чиқишларида, вилоятларга қилиган сафарларидаги қилинган нутқларида ва Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси академиклари билан бўлган учрашувларда таъкидлангани каби “фундаментал фанларни ривожлантирмасдан туриб, илмий тадқиқот ишлари билан амалиётни ва ишлаб чиқаришнинг интеграциясини таъминламасдан туриб, иқтисодиётни

ривожлантириш анча қийин иш эканлигини” айтиб ўтдилар. Илмий - техникавий салоҳиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш соҳалари - автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника ва электроника саноатларини, телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш учун сабоқ олаётган ҳар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши, қаерда ва қандай татбиқ қилишни билиши, ҳаётда эса ўзи амалиётга татбиқ қила олиши керак. Ана шу нуқтаи назардан қараганда олий ўқув юртининг ҳар бир битирувчиси ўзи эгаллаётган мутахассислик бўйича малака ва кўникмалари даражасини кўрсатиб берувчи битирув малакавий иши бажаришлари мақсадга мувофиқдир.

Механика, физика, геофизиканинг кўплаб масалалари бизга маълум бўлган эллиптик, гиперболик ва параболик типдаги тенгламаларга тегишли бўлмаган хусусий ҳосилали тенгламалар учун масалаларни ечишга келади. Одатда бундай тенгламаларни математик физиканинг классик бўлмаган тенгламалари дейилади.

Математик физиканинг ноклассик тенгламаси биринчи маротаба С.А.Чаплыгиннинг товуш тезлигига яқин бўлган оқимларни текшириш ишларида учрайди, бу ишларда аралаш типдаги тенглама деган тушунча киритилган. Одатда тенглама текшириляётган соҳанинг бир қисмида бир типга, иккинчи қисмида эса бошқа типга тегишли бўлса, бундай тенгламани аралаш типдаги тенглама дейилади.

Ўтган давр мобайнида нолокал шартли чегаравий масалаларни ўрганишга жуда кўп ишлар бағишланган. Булар қаторида А.В.Бицадзе, М.С.Салоҳиддинов, Т.Ж.Джураев, А.М.Нахушев ва улар ўқувчиларининг ишларини айтиб ўтиш лозим.

Эллиптик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни қўйишда, агар соҳанинг чегарасида қидириляётган функциянинг қиймати берилган бўлса, у ҳолда бу масалани Дирихле масаласи дейилади. Агар соҳанинг

чегарасида қидирилаётган функциянинг нормал бўйича ҳосиласи берилган бўлса, бундай масалаларни Нейман масаласи дейилади. Соҳа чегарасининг бир қисмида қидирилаётган функциянинг қиймати, бошқа бир қисмида эса унинг нормал бўйича ҳосиласи берилган бўлса, бундай масалаларга Хольмгрен масаласи дейилади ёки бўлмасам бошқа манбаларда бундай масалаларни Дирихле-Нейман масаласи деб аталади.

Битирув малакавий ишида кўзда тутилган асосий мақсад сингуляр коэффициентли тенглама учун хос сонлар ва хос функциялар ҳақидаги масалаларни ўрганиш ва спектрал анализ усулидан фойдаланган ҳолда яримдоирадан ва чорак доирадан иборат соҳаларда Дирихле ва Хольмгрен масалаларининг тадқиқ қилишдан иборат.

Ї БОБ. МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ АЙРИМ МАХСУС ФУНКЦИЯЛАРИ

1.1. Эйлер интеграллари

А) Биринчи тур Эйлер интеграллари (бета-функция). Бета-функция ушбу

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (1.1)$$

тенглик билан аниқланади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл *Эйлернинг биринчи тур интеграллари* дейилади. Кўрсатиш қийин эмаски, $a > 0$ ва $b > 0$ бўлганда (1.1) интеграл яқинлашувчи, агар a ва b параметрларнинг биттаси нолга тенг ёки нолдан кичик бўлса ҳам узоқлашувчи бўлади. Агар (1.1) интегралда $x = 1 - t$ алмаштириш бажарсак,

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = B(b, a)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, бета-функция ўзининг a ва b аргументларига нисбатан симметрик функция экан. Энди (1.1) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз. Бўлаклаб интеграллаш амалларини

$$u = (1-x)^{b-1}, \quad du = -(b-1)(1-x)^{b-2} dx,$$

$$dv = x^{a-1} dx, \quad v = x^a / a$$

бажариб,

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$$

айниятни эътиборга олсак, $b > 1$ бўлганда

$$\begin{aligned}
B(a, b) &= \left[\frac{(1-x)^{b-1} x^a}{a} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^a}{a} (b-1)(1-x)^{b-2} dx = \\
&= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-2} dx - \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \\
&= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b).
\end{aligned}$$

Бундан

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1). \quad (1.2)$$

Бета-функция a ва b га нисбатан симметрик бўлгани учун, $a > 1$ бўлганда

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b). \quad (1.3)$$

(1.2) ва (1.3) формулаларга асосан

$$(a-1)B(a-1, b) = (b-1)B(a, b-1).$$

Агар

$$a-1 = p, \quad b-1 = q$$

десак, у ҳолда

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q).$$

Агар b параметр бутун сонга тенг бўлса, яъни $b=n$ бўлса, $B(a, n)$ функцияга (1.2) формулани кетма-кет қўллаш натижасида

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \frac{n-2}{a+n-2} \frac{n-3}{a+n-3} \dots \frac{1}{a+1} B(a, 1)$$

тенгликка эга бўламиз. Аммо

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$$

бўлгани учун

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)}.$$

Агарда a параметр ҳам бутун сонга тенг бўлса, яъни $a = m$ бўлса, (1.3) формулани кетма-кет қўллаш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(m+1)(m+2) \dots (m+n-1)} \cdot B(m,1) = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(m+1)(m+2) \dots (m+n-1)} \cdot \frac{m-1}{m} \frac{m-2}{m-1} \dots \frac{1}{2} B(1,1), \end{aligned}$$

бундан, $B(1,1) = 1$ бўлгани учун

$$B(m,n) = B(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Энди (1.1) формулада $a = b$ десак,

$$B(a,a) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{a-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx$$

ёки

$$B(a,a) = 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx.$$

Охирги интегралда $\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{a-1} dt$$

ёки

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

(1.1) интегралда

$$x = \frac{y}{1+y} \quad \text{ёки} \quad y = \frac{x}{1-x}$$

алмаштиришни бажарсак, бета-функция қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$B(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy.$$

Бу формулада $0 < a < 1$ ҳисоблаб, $b = 1 - a$ десак,

$$B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y} dy$$

бўлади.

Ҳосил қилинган интеграл математик анализда Эйлер исми билан боғланган интеграл бўлиб, унинг қиймати $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ га тенгдир. Шундай қилиб,

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Агар хусусий ҳолда, $a = 1 - a = \frac{1}{2}$ десак,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

ҳосил бўлади.

В) Иккинчи тур Эйлер интегралли (гамма-функция). Гамма-функция ушбу

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (1.4)$$

интеграл билан аниқланади ва бу интеграл *иккинчи тур Эйлер интеграл*и деб аталади.

Бу интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да эса узоқлашувчидир.

Бўлаклаб интеграллаш натижасида ушбун

$$a \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} A^a e^{-A} + \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx,$$

яъни

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad (1.5)$$

рекуррент формулани ҳосил қиламиз.

Бу формулани кетма-кет қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a\Gamma(a).$$

Агар бунда $a = 1$ десак ва

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\Gamma(n+1) = n!$$

келиб чиқади. $n = 0$ бўлганда охирги формула

$$0! = \Gamma(1) = 1$$

кўринишга эга бўлади.

Шу пайтгача гамма-функцияда $a > 0$ деб ҳисобладик ва унинг қиймати сифатида (1.4) интегралнинг қийматини олдик. Гамма-функциянинг (1.5) хоссаси уни a нинг манфий қийматларида ҳам аниқлашга ёрдам беради.

Энг аввало $a > 0$ да $\Gamma(a) > 0$ ва $\Gamma(1) = 1$ бўлганлиги учун (1.5) дан

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \Gamma(a+1) = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = +\infty$$

эканлиги келиб чиқади.

Агар $(-1) < a < 0$ бўлса, (1.5) нинг ўнг томони $\Gamma(a+1)$ мавжуд бўлиб, ундан келиб чиқувчи

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \quad (1.6)$$

нисбат ҳам маънога эга бўлади. Шунинг учун таъриф сифатида (1.6) тенгликнинг ўнг томонидаги нисбатнинг қийматини гамма-функциянинг $a \in (-1, 0)$ бўлгандаги қиймати сифатида қабул қиламиз.

У ҳолда (1.6) дан келиб чиқадики,

$$\lim_{a \rightarrow -0} \Gamma(a) = -\infty, \quad \lim_{a \rightarrow (-1)+0} \Gamma(a) = -\infty \quad (1.7)$$

Агар $(-2) < a < (-1)$ бўлса, (1.6) нинг ўнг томони маънога эга бўлади ва шунинг учун унинг қийматини $\Gamma(a)$ функциянинг $a \in (-2, -1)$ бўлгандаги қиймати сифатида қабул қиламиз.

(1.7) тенгликларни эътиборга олсак, (1.6) дан келиб чиқадики,

$$\lim_{a \rightarrow (-1)-0} \Gamma(a) = -\infty, \quad \lim_{a \rightarrow (-2)+0} \Gamma(a) = -\infty$$

Худди шу каби, жараёни давом эттириб, (1.6) тенглик ёрдамида гамма-функцияни $\forall a \in (-n, -n+1)$ ораликда аниқлаймиз, бу ерда $n \in \mathbb{N}$. Бунда

$$\lim_{a \rightarrow (-n)+0} \Gamma(a) = \pm\infty, \quad \lim_{a \rightarrow (-n)-0} \Gamma(a) = \mp\infty$$

бўлиб, n жуфт бўлганда юқори ишорали, тоқ сон бўлганда эса куйи ишорали тенгликлар ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, $a \in (-n, -n+1)$ бўлсин, у ҳолда $a + n > 0$. Шунинг учун $\Gamma(a+n)$ (1.4) таъриф маъносида мавжуд. Унга (1.5) формулани n марта кетма-кет қўллаб,

$$\Gamma(a+n) = (n-1+a)(n-2+a)\dots(1+a)a\Gamma(a)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердан эса

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\dots(a+n-2)(a+n-1)}$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, ихтиёрий бутун бўлмаган манфий сон учун $\Gamma(a)$ нинг қийматини юқоридаги тенглик бўйича ҳисоблаш мумкин экан.

1.2. Гаусснинг гипергеометрик функцияси

А) Асосий таърифлар

Ушбу

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (1.8)$$

гипергеометрик тенглама ёки *Гаусс тенгламаси* деб аталувчи тенгламани текширамиз. Бу ерда a, b, c - учта ихтиёрий параметр бўлиб, ҳақиқий ёки комплекс қийматларни қабул қилади. Булардан икkitаси: a ва b тенгламада симметрик иштирок этади.

$x=0$ ва $x=1$ бўлганда тенгламанинг тартиби бузилиб, биринчи тартибли тенглама ҳосил бўлади, $x=\infty$ да эса (1.8) тенглама умуман маъносини йўқотади. Шунинг учун бу нуқталар махсус нуқталар ҳисобланади.

(1.8) тенгламанинг ечимини $x=0$ махсус нуқта атрофидаги ечимини

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (1.9)$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1}$$

ёки

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) A_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) A_{n+2} x^n.$$

Бу ҳосилаларнинг қийматини ва у ни (1.8) тенгламага кўямиз. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)(n+1)(n+2)A_{n+2}x^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} [c - (a+b+1)x](n+1)A_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} abA_nx^n = 0.$$

Номаълум $A_1, \dots, A_n, \dots$ ўзгармасларни топиш учун аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланамиз, бунга асосан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаш керак. x^k олдидаги умумий коэффициентларни нолга тенглаб, ушбу

$$-(k-1)kA_k + k(k+1)A_{k+1} - k(a+b+1)A_k + \\ + c(k+1)A_{k+1} - abA_k = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$A_{k+1} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+1)(c+k)} A_k$$

рекуррент формулага эга бўламиз.

Бу ерда $A_0 = 1$ ва $c \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ деб ҳисоблаймиз. (1.8) гипергеометрик тенгламанинг биринчи хусусий ечими y_1 ни $F(a, b, c, x)$ орқали белгилаб, A_n коэффициентларнинг топилган қийматларини (1.9) қаторга қўямиз. У ҳолда

$$y_1 = F(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n. \quad (1.10)$$

Бу ерда

$$a_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+n-1),$$

хусусий ҳолда, $(a)_0 = 1$ ва $\forall n \in N$ учун $(1)_n = n!$.

(1.10) қатор *гипергеометрик қатор*, бу қаторнинг йиғиндиси бўлган $F(a, b, c; x)$ функция эса *гипергеометрик функция* дейилади.

Даламбер принципага асосан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} x \right| = |x|.$$

Демак, (1.10) қатор $|x| < 1$ да абсолют яқинлашувчи, $|x| > 1$ да узоқлашувчи бўлади. Исботсиз эслатиб ўтамизки, $x = 1$ бўлганда, агар $c - a - b > 0$ бўлса, (1.10) қатор абсолют яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq 0$ бўлса, узоқлашувчи, $x = -1$ бўлганда эса, агар $c - a - b > 0$ бўлса, абсолют яқинлашувчи, агар $-1 < c - a - b \leq 0$ бўлса, шартли яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq -1$ бўлса узоқлашувчи бўлади.

Агар (1.10) формулада $b = c$ бўлса,

$$(a)_n = (-1)^n (-a)(-a-1)\dots(-a-n+1) = (-1)^n \binom{-a}{n} n!$$

тенгликка асосан

$$F(a, b, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-a}{n} x^n = (1-x)^{-a}$$

биномиал қатор ҳосил бўлади.

Агарда $a = 1, b = c$ бўлса, (1.10) формула ушбу

$$F(1, b, b; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

кўринишга эга бўлади, яъни $a = 1, b = c$ бўлган ҳолда гипергеометрик қатор геометрик прогрессияга айланади, шунинг учун ҳам у гипергеометрик қатор деб аталган.

(1.8) тенгламанинг иккинчи хусусий, умуман айтганда, (1.10) га чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимини топиш учун (1.8) тенгламада

$$y = x^\rho \eta$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда (1.8) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x(1-x)\eta'' + [(c+2\rho) - (a+b+1+2\rho)x]\eta' -$$

$$-\left[ab + \rho(a+b+\rho) - \frac{\rho(\rho+c-1)}{x}\right]\eta = 0$$

Бу тенглама (1.8) тенглама типига тегишли бўлиши учун $\rho = 1 - c$ (ёки $\rho = 0$, албатта бу ҳол бизни қизиқтирмайди) бўлиши керак. У ҳолда

$$x(1-x)\eta'' + \left\{(2-c) - [(a-c+1) + (b-c+1) + 1]x\right\}\eta' - \\ -(a-c+1)(b-c+1)\eta = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, $\rho = 1 - c$ бўлганда $y = x^\rho \eta$ алмаштириш (1.8) тенгламани худди шу кўринишдаги тенгламага ўтказди, бунда фақат a, b, c ларни мос равишда

$$a - c + 1, \quad b - c + 1, \quad 2 - c$$

ларга алмаштириш зарур. Демак, берилган (1.8) тенглама y_1 га чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$y_2 = x^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; x)$$

ечимга эга бўлади. Шу билан бирга, y_2

$$2 - c \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$$

бўлгандагина маънога эга бўлади. Шундай қилиб, (1.8) тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = C_1 F(a, b, c; x) + C_2 x^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; x),$$

бу ерда C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар гипергеометрик функцияга симметрик бўлиб кирган a ва b параметрлардан биттаси манфий бутун сон $(-n)$ га тенг бўлса, (1.10) гипергеометрик қатор узилиб қолади ва у n -даражали кўпхадга айланади.

Агарда $a = -n_1, b = -n_2$ бўлиб, бунда $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ бўлса, у ҳолда гипергеометрик қатор кўпхадга айланиб, унинг даражаси n_1, n_2 сонларнинг кичигига тенг бўлади.

(1.8) тенгламанинг $x = 1$ махсус нукта атрофидаги ечимларини топиш учун $t = 1 - x$ алмаштириш қиламиз. Натижада (1.8) тенгламадан яна ўзига

ўхшаш тенглама ҳосил бўлиб, янги тенглама $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = a + b - c + 1$ параметрларга эга бўлади. Буни эътиборга олиб, (1.8) тенгламанинг $x = 1$ махсус нукта атрофидаги чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларини ёзиш мумкин:

$$y_3 = F(a, b, a + b - c + 1; 1 - x),$$

$$y_4 = (1 - x)^{c - a - b} F(c - a, c - b, c + 1 - a - b; 1 - x),$$

бу ерда $c - a - b \notin Z$ ва $|1 - x| < 1$.

Агар (1.8) тенгламада $t = x^{-1}, \omega = t^{-a} y$ алмаштириш бажарсак, $\omega(t)$ функцияга нисбатан, параметрлари $a_1 = a, b_1 = 1 + a - c, c_1 = 1 + a - b$, бўлган тенгламага эга бўламиз. Бунда (2.1) тенгламанинг $x = \infty$ махсус нуктаси янги тенгламанинг $t = 0$ махсус нуктасига алмашади. Буларни эътиборга олиб, (1.8) тенгламанинг $x = \infty$ махсус нуктаси атрофидаги чизиқли боғлиқ бўлмаган икки ечимларини топамиз:

$$y_5 = x^{-a} F\left(a, 1 + a - c, 1 + a - b; \frac{1}{x}\right),$$

$$y_6 = x^{-b} F\left(b, 1 + b - c, 1 + b - a; \frac{1}{x}\right),$$

бу ерда $a - b \notin Z$ ва $|x| > 1$.

Шундай қилиб, (1.8) тенгламанинг параметрлари $c, c - a - b, a - b \notin Z$ шартларни қаноатлантирганда унинг олти асосий ечимлари гипер-геометрик функция орқали ёзилишини топдик.

В) Асосий таърифдан келиб чиқувчи формулалар

(1.10) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида дарҳол ушбу

$$\frac{d}{dx} F(a, b, c; x) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x)$$

формулани ҳосил қиламиз.

(1.10) қаторни аввал x^a , x^b ёки x^{c-1} га кўпайтириб, сўнгра ҳадлаб дифференциалласак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\frac{d}{dx} [x^a F(a, b, c; x)] = ax^{a-1} F(a+1, b, c; x),$$

$$\frac{d}{dx} [x^b F(a, b, c; x)] = bx^{b-1} F(a, b+1, c; x),$$

$$\frac{d}{dx} [x^{c-1} F(a, b, c; x)] = (c-1)x^{c-2} F(a, b, c-1; x).$$

Худди шу каби қуйидаги тенгликлар ҳам ўринли:

$$1. \frac{d^n}{dx^n} F(a, b, c; x) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n, c+n; x).$$

$$2. \frac{d^n}{dx^n} [x^{a+n-1} F(a, b, c; x)] = (a)_n x^{a-1} F(a+n, b, c; x).$$

$$3. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} F(a, b, c; x)] = (c-n)_n x^{c-n-1} F(a, b, c-n; x).$$

$$4. \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{a+n-1} F(a, b, c; x)] = \\ = (-1)^n \frac{(a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-x)^{a-1} F(a+n, b, c+n; x).$$

$$5. \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{a+b-c} F(a, b, c; x)] = \\ = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-x)^{a+b-c-n} F(a, b, c+n; x).$$

$$6. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} (1-x)^{b-c+n} F(a, b, c; x)] = \\ = (c-n)_n x^{c-n-1} (1-x)^{b-c} F(a-n, b; c-n; x).$$

$$7. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} (1-x)^{a+b-c} F(a, b, c; x)] = \\ = (c-n)_n x^{c-n-1} (1-x)^{a+b-c-n} F(a-n, b-n, c-n; x).$$

$$8. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-a+n-1} (1-x)^{a+b-c} F(a, b, c; x)] = \\ = (c-a)_n x^{c-a-1} (1-x)^{a+b-c-n} F(a-n, b, c; x).$$

Бу тенгликлар тўғрилигига, масалан, математик индукция методи билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Одатда ушбу олтига $F(a \pm 1, b, c; x)$, $F(a, b \pm 1, c; x)$, $F(a, b, c \pm 1; x)$ функциялар $F(a, b, c; x)$ функцияга қўшни функциялар дейилади. $F(a, b, c; x)$ ва ихтиёрий унга қўшни икки функциялар орасида коэффициентлари x га боғлиқ чизиқли функция бўлган чизиқли комбинация мавжуд. Бундай комбинациялар 15 та бўлиб, уларни буюк немис математиги Карл Гаусс топган.

С) Гипергеометрик функциянинг интеграл ифодаси.

(1.10) қаторни

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

тенгликни эътиборга олиб, ушбу

$$F(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c+n) n!} x^n = \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) n!} x^n \right] = \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) n!} x^n$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бундан (1.1) бета функция билан гамма функция орасидаги

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ формулага асосан}$$

$$B(b+n, c-b) = \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} \quad (1.11)$$

бўлганлиги сабабли, аввалги тенглик

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!} x^n B(b+n, c-b)$$

кўринишда ёзилади ёки (1.11) га асосан

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} dt$$

Бу ердаги интеграл n нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлгани учун

$$b > 0, \quad c-b > 0 \quad \text{ёки} \quad c > b > 0 \quad (1.12)$$

шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Аввалги тенгликни ушбу

$$\begin{aligned} F(a, b, c; x) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)} \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} x^n dt = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (xt)^n \right] dt \end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Интеграл остидаги йиғинди $(1-xt)^{-a}$ функциянинг чексиз қаторга ёйилмасидан иборат бўлгани учун

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt \quad (1.13)$$

формулага эга бўламиз. Бу эса гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишидир.

(1.12) шартларни битта $c-a-b > 0$ шарт билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар $a < 0$ бўлса, $-a > 0$ бўлади ва бу тенгсизликнинг (1.12) тенгсизликни иккинчиси билан қўшиб, $a-b-c > 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз; агарда $a > 0$ бўлса, бу тенгсизликдан, (1.12) тенгсизликларнинг иккинчисидан кучлироқ бўлган $c-b > a$ тенгсизликка эга бўламиз.

1.3. Бессел функциялари

А) Биринчи турдаги Бессел функциялари

Ушбу

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (1.14)$$

ёки

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0$$

тенглама *Бессел тенгламаси* дейилади, бунда v ўзгармас сон (1.14) тенгламанинг *индекси* деб аталади.

$v \geq 0$ бўлсин. Кейинги ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида (1.14) тенгламада

$$y = x^v z$$

алмаштириш бажарамиз. У ҳолда z функцияни аниқлаш учун

$$z'' + \frac{2v+1}{x}z' + z = 0 \quad (1.15)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг ечимини

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$z' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + (n+2)c_{n+2}x^{n+1} + \dots$$

$$\frac{z'}{x} = \frac{c_1}{x} + 2c_2 + 3c_3x + \dots + (n+2)c_{n+2}x^n + \dots$$

$$z'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + \dots + (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \dots$$

Ҳосил бўлган қаторларни (1.15) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & \frac{2v+1}{x} c_1 + [2c_2 + (2v+1)2c_2 + c_0] + [2 \cdot 3c_3 + (2v+1)3c_3 + c_1]x + \\ & + [3 \cdot 4c_4 + (2v+1)4c_4 + c_2]x^2 + \dots \\ & + [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2v+1)(n+2)c_{n+2} + c_n]x^n + \dots = 0 \end{aligned}$$

Аниқмас коэффициентлар усулига асосан, x нинг барча даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаймиз:

$$c_1 = 0 \quad (1.16)$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2v+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Бундан

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2v+2)}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

келиб чиқади. (1.16) ва (1.17) га асосан

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2n-1} = \dots = 0,$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2v+2)},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2v+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2v+2)(2v+4)},$$

.....

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{2 \cdot 4 \dots 2n(2v+2)(2v+4) \dots (2v+2n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \dots n(v+1)(v+2) \dots (v+n)}.$$

Шундай қилиб, (1.15) тенгламанинг ечими ушбу

$$z = c_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(v+1)(v+2) \cdot \dots \cdot (v+n)} \right] \quad (1.18)$$

қатор билан ифодаланади. Бунда c_0 - ўзгармасни ихтиёрий танлаб олиш мумкин. Даламбер белгисига асосан, (1.18) қатор x нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлишини текшириб кўриш қийин эмас.

Даражали қаторни ҳадлаб дифференциаллаш (яқинлашиш оралиғи ичида) ҳамма вақт қонуний бўлгани учун (1.18) қатор билан ифодаланган z ҳақиқатдан ҳам (1.15) тенгламанинг ечими бўлади.

Одатда c_0 ўзгармас

$$c_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$$

деб танлаб олинади. Ушбу

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n! = \Gamma(n+1),$$

$$\begin{aligned} (v+1)(v+2)\dots(v+n)\Gamma(v+1) &= (v+2)(v+3)\dots(v+n)\tilde{A}(v+2) = \\ &= \dots = (v+n)\Gamma(v+n) = \Gamma(v+n+1) \end{aligned}$$

тенгликларни эътиборга олсак, z қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2^v \tilde{A}(v+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+v} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(v+1)(v+2) \cdot \dots \cdot (v+n) \tilde{A}(v+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+v} \Gamma(n+1) \Gamma(v+n+1)} \end{aligned}$$

(1.14) тенгламанинг ечими $y = x^v z$ функциядан иборатдир. Бу функцияни $J_v(x)$ орқали белгилаб оламиз. Демак,

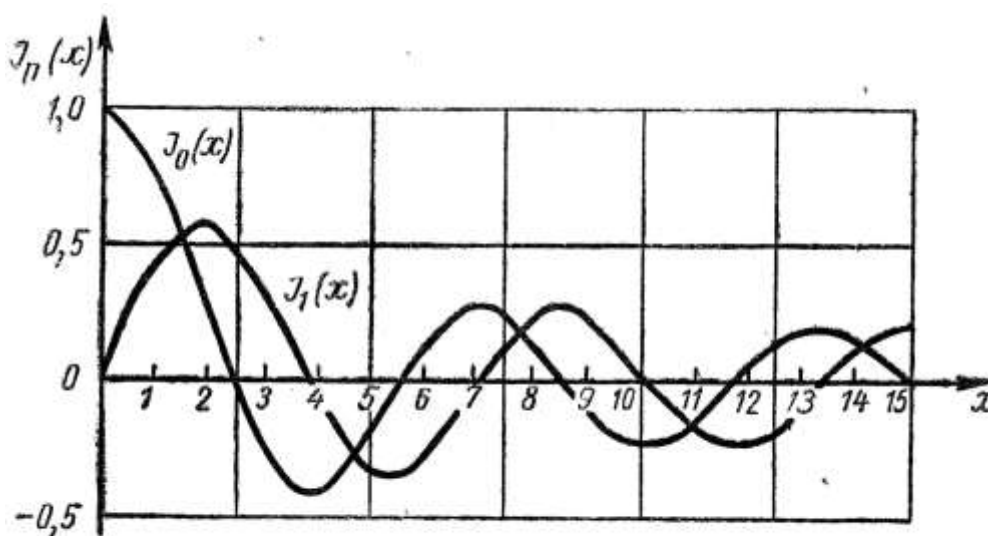
$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}}{\Gamma(n+1) \Gamma(v+n+1)} \quad (1.19)$$

$J_v(x)$ функция *биринчи турдаги v индексли ёки v тартибли Бессел функциялари* дейилади. Айрим адабиётларда бу функциялар *цилиндрик функциялар* деб ҳам аталади.

$J_v(x)$ функция (1.14) Бессел тенгламасининг ечимларидан биридир. Хусусан, $v = 0$ бўлган ҳолда

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma^2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \quad (1.20)$$

$\nu = 1$ да эса



$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

Умуман бутун мусбат ν ларда

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}. \quad (1.21)$$

(1.20) ва (1.21) формулалардан кўринадики, $\nu = 0$ ёки ихтиёрий бутун ва жуфт ν лар учун $J_\nu(x)$ функция жуфт функциядан иборатдир.

Изоҳ. ν каср бўлганда $x < 0$ лар учун $J_\nu(x)$ функция, умуман айтганда, мавҳум қийматларни қабул қилади. ((1.19) га қаралсин). Мавҳум қийматлар билан иш кўрмаслик учун $J_\nu(x)$ ни (ν каср бўлганда) $x \geq 0$ лар учун текширамиз. (1.14) тенгламада ν^2 иштирок этаётганлиги туфайли

юқоридаги мулоҳазалар v ни $(-v)$ билан алмаштирганда ҳам (1.14) тенгламанинг ечимига олиб келади. (1.19) да v ни $(-v)$ га алмаштирсак

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-v+n+1)} \quad (1.22)$$

функция ҳосил бўлади.

$J_v(x)$ функция ҳам биринчи турдаги $(-v)$ индексли ёки $(-v)$ тартибли Бессел функцияси дейилади.

$J_v(x)$ ва $J_{-v}(x)$ функциялар v индекс бутун бўлмаганда чизиқли боғлиқ бўлмайди, чунки бу функцияларни ифодаловчи (1.19) ва (1.22) қаторларнинг бошланғич ҳадлари нолдан фарқли коэффициентларга эга бўлиб, x нинг турли даражаларини ўз ичига олади.

Шундай қилиб, бутун бўлмаган индекс учун (1.14) тенгламанинг умумий ечими қуйидагидан иборат:

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x), \quad (1.23)$$

бу ерда C_1, C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

В) Иккинчи турдаги Бессел функциялари

Агар v бутун сон бўлса, $n = 0, 1, \dots, v-1$ лар учун $-v+n+1$ ифода нол ёки манфий бутун қийматларга тенг бўлади. Демак, n нинг бу қийматларида $\Gamma(-v+n+1) = \infty$ бўлади. Шунинг учун ҳам (1.23) қаторнинг мос ҳадларини нолга тенг деб ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, бутун v лар учун

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=v}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-v+n+1)}$$

ёки, $n = v+k$ десак,

$$J_{-v}(x) = (-1)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(v+k+1)} = (-1)^v J_v(x) \quad (1.24)$$

Демак, $v \geq 0$ бутун сон бўлган ҳолда (1.24) га асосан $J_v(x)$ ва $J_{-v}(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлади, яъни бу ҳолда, аслини олганда (1.14) тенглама битта хусусий ечимга эга бўлади. Шунинг учун (1.23) Бессел тенгламасининг умумий ечими бўла олмайди.

(1.14) тенгламанинг иккинчи хусусий ечимини аниқлаш учун каср v лар учун (1.23) дан C_1 ва C_2 ўзгармасларни махсус танлаб, ушбу

$$\begin{aligned} Y_v(x) &= \operatorname{ctg}(v\pi) J_v(x) - \operatorname{cosec}(v\pi) J_{-v}(x) = \\ &= \frac{J_v(x) \cos(v\pi) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

функцияни тузамиз, v бутун сон бўлганда (1.25) формуланинг сурати $J_v(x)(-1)^v - J_{-v}(x)$ га тенг бўлиб, бу ифода (1.24) га асосан нолга тенг; махражи ҳам нолга тенг бўлади, яъни (1.25) — аниқмасликдан иборат бўлади, v ни бутун сонга интилтириб, бу аниқмасликни очамиз. Лопитал қоидасига асосан

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{v \rightarrow n} Y_v(x) = \lim_{v \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial v} [J_v(x) \cos(v\pi) - J_{-v}(x)]}{\frac{\partial}{\partial v} \sin(v\pi)} = \\ &= \lim_{v \rightarrow n} \frac{\cos(v\pi) \frac{\partial}{\partial v} J_v(x) - \pi J_v(x) \sin(v\pi) - \frac{\partial}{\partial v} J_{-v}(x)}{\pi \cos v\pi} = \\ &= \frac{\left[\frac{\partial}{\partial v} J_v(x) (-1)^n - \frac{\partial}{\partial v} J_{-v}(x) \right]_{v=\pi}}{\pi (-1)^n}. \end{aligned}$$

Охирги ифодада $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ ўрнига уларни ифодаловчи (1.19), (1.22) қаторларни қўйиб, ν бўйича дифференциаллаб, сўнгра ν ўрнига бутун n сонни қўйсак, бир қатор ҳисоблашлардан кейин қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2k} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left(\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right) \quad (1.26)$$

бу ерда $C=0,577215664\dots$ - Эйлер ўзгармаси.

Хусусий $n=0$ бўлган ҳолда

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right)$$

$Y_n(x)$ функцияни $\nu=n$ бўлганда (1.14) тенглама қўйиб, ҳақиқатан ҳам бу тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шу билан бирга $J_n(x)$ ва $Y_n(x)$ функцияларнинг чизиқли боғлиқ бўлиши мумкин эмас, чунки булардан биринчиси $x=0$ да чекли қийматга эга, иккинчиси эса чексизликка айланади. Демак, $Y_n(x)$ функция (1.14) тенгламанинг иккинчи хусусий ечими бўлади.

(1.26) формула билан аниқланган $Y_n(x)$ функция *иккинчи турдаги n -тартибли Бессел функция ёки Вебер функцияси* дейилади.

Демак, Бессел тенгламасининг умумий ечими $\nu=n \in N$ бўлганда

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

формула билан аниқланади. Бунда, C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

С) Турли индексли Бессел функциялари орасидаги муносабатлар

Ихтиёрий ν учун ушбу

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (1.27)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(x) \right] = -x^\nu J_{\nu+1}(x) \quad (1.28)$$

формулалар ўринлидир.

(1.27) формула $J_\nu(x)$ ўрнига унинг (1.19) ифодасини қўйиш натижасида дарҳол келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) \Gamma(n+\nu+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+\nu) x^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) (n+\nu) \Gamma(n+\nu)} = \\ &= x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+2\nu-1}}{\Gamma(n+1) \Gamma[(\nu-1)+n+1]} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

Худди шунга ўхшаш (1.28) формула исботланади. Агар (1.28) формулада ν ни $(-\nu)$ билан алмаштириб,

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu J_{-\nu}(x) \right] = -x^\nu J_{-\nu+1}(x) \quad (1.29)$$

тенгликка эга бўламиз.

Худди шунга ўхшаш формулалар иккинчи турдаги мос функциялар учун ҳам ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ν ни каср сон ҳисоблаб, (1.27) ни $\operatorname{ctg}(\nu\pi)$ га, (1.29) ни эса $\operatorname{cosec}(\nu\pi)$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодаларнинг бирини иккинчисидан айирамиз. У ҳолда

$$\cos(v-1)\pi = -\cos v\pi, \quad \sin(v-1)\pi = -\sin v\pi$$

формуларни эътиборга олсак,

$$\frac{d}{dx} \left[x^v \frac{J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \right] = x^v \frac{J_{v-1} \cos(v-1)\pi - J_{-v+1}}{\sin(v-1)\pi}$$

ёки

$$\frac{d}{dx} [x^v Y_v(x)] = x^v Y_{v-1}(x) \quad (1.30)$$

тенглик ҳосил бўлади.

(1.30) да v ни $(-v)$ га алмаштираш,

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} Y_{-v}(x)] = x^{-v} Y_{-v-1}(x) \quad (1.31)$$

формулага эга бўламиз.

Агар (1.28) ни $\operatorname{ctg}(v\pi)$ га кўпайтириб, сўнгра ундан (1.27) да v ни $(-v)$ га алмаштириш ва $\operatorname{cosec}(v\pi)$ га кўпайтиришдан ҳосил бўлган тенгликни ҳадлаб айириб,

$$\cos(v+1)\pi = -\cos(v\pi), \quad \sin(v+1)\pi = -\sin(v\pi)$$

тенгликларни эътиборга олсак, қаср v лар учун

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} Y_v(x)] = -x^{-v} Y_{v+1}(x) \quad (1.32)$$

формула келиб чиқади.

Бутун v лар учун (1.30), (1.32) формулар v ни бутун сонга интиштириб, лимитга ўтиш натижасида ҳосил бўлади.

(1.27) ва (1.28) формуларнинг натижаси сифатида қуйидаги формулар келиб чиқади:

$$\begin{aligned}
xJ'_v(x) + vJ_v(x) &= xJ_{v-1}(x), \\
xJ'_v(x) - vJ_v(x) &= -xJ_{v+1}(x), \\
J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) &= 2J'_v(x), \\
J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) &= \frac{2v}{x}J_v(x).
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Бу формулаларнинг биринчи иккитаси (1.27) ва (1.28) ни бевосита дифференциаллаш натижасида, кейинги иккитаси эса аввалгиларини қўшиш ва айириш натижасида ҳосил бўлади.

(1.30) ва (1.32) формулалардан фойдаланиб, $J_v(x)$ функция учун ҳам (1.33) га ўхшаш тенгликларни келтириб чиқариш мумкин.

Биринчи тур Бессел функциялари учун қуйидаги

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{(xdx)^m} \left[\frac{J_v(x)}{x^v} \right] &= (-1)^m \frac{J_{v+m}(x)}{x^{v+m}}, \quad m \in N; \\
\frac{d^m}{(xdx)^m} \left[x^v J_v(x) \right] &= x^{v-m} J_{v-m}(x), \quad m \in N;
\end{aligned}$$

рекуррент формулалар ва ушбу

$$\begin{aligned}
J_v(x_1 - x_2) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{v+k}(x_1) J_k(x_2), \\
J_v(x_1 + x_2) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k J_{v+k}(x_1) J_k(x_2).
\end{aligned}$$

қўшиш формулалари ўринлидир. Қўшиш формулаларидан хусусий ҳолда $v = 0$ бўлганда қуйидаги

$$\begin{aligned}
J_0(x_1 - x_2) &= J_0(x_1) J_0(x_2) + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1) J_k(x_2), \\
J_0(x_1 + x_2) &= J_0(x_1) J_0(x_2) + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k J_k(x_1) J_k(x_2),
\end{aligned}$$

муҳим тенгликлар келиб чиқади.

D) Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари

Математик физикада ушбу $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ ва $J_{n+1/2}(x)$ Бессел функциялари энг кўп учрайди. (1.33) формулаларнинг охиргисидан кўриняптики, $J_2(x)$, $J_3(x)$ ва ҳоказо функцияларни ҳисоблаш $J_0(x)$, $J_1(x)$ функцияларнинг мос қийматларини ҳисоблашга келади.

Энди $J_{n+1/2}(x)$, бунда n - бутун сон, функцияни қараймиз. Аввало, $J_{1/2}(x)$, $J_{-1/2}(x)$ функцияларнинг қийматларини ҳисоблаймиз. (2.6) га асосан

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}}{n! \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{2^{2n+1} n! \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}.$$

Маълумки,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}..$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{2^{2n} n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} = \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Бу ерда охирги йиғинди $\sin x$ нинг даражали қаторга ёйилмасидан иборатдир. Демак,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x$$

Худди шунга ўхшаш, (1.22) дан

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

(1.33) формулаларнинг охиргисига асосан

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) = \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right], \\ J_{\frac{5}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{-\sin x + \frac{3}{x} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Умуман, $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ Бессел функцияси бутун n да элементар функциялар

орқали ифодаланади, яъни қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin x \left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

бу ерда $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — $\frac{1}{x}$ га нисбатан n -даражали кўпхад, $Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ эса, $n-1$ даражали кўпхад, шу билан бирга $P_n(0) = 1$, $Q_{n-1}(0) = 0$.

Бундан, x нинг катта қийматларида Бессел функциясининг асимптотик ифодаси келиб чиқади:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right], \quad (1.34)$$

бу ерда $O(x^{-1})$ орқали тартиби x^{-1} бўлган миқдор белгиланган.

Эслатиб ўтамизки, (1.34) асимптотик формула фақат $\nu = n + \frac{1}{2}$ да эмас, балки ν нинг барча қийматларида ҳам ўринли бўлади.

1.4. Лежандр функциялари

Уч ўлчовли фазода Лаплас тенгламасини сферик координатлар системасида ўзгарувчиларини ажратсак, у ҳолда ўзгарувчилардан бири бўйича Лежандр тенгламаси деб аталувчи тенгламага келиб қоламиз:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right] y = 0.$$

Бу тенгламада $\cos \theta = x$ алмаштириш бажарсак,

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (1.35)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Агар (1.35) да ν ва μ лар бутун сон бўлса, у ҳолда (1.35) тенгламанинг хусусий ечимлари Лежандр кўпхадлари ёки бутун тартибли биринчи тур сферик функциялар билан аниқланади:

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \\ &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!} F\left(m-n, m+n+1; m+1; \frac{1-x}{2}\right), \end{aligned}$$

бу ерда $F(\dots)$ – Гаусснинг гипергеометрик функцияси.

Агар $\nu + \mu$ бутун сонга тенг бўлмаса, у ҳолда (1.35) тенглама чизиқли боғлиқ бўлмаган иккита ечимга эга бўлади:

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} F \left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2} \right), \quad (1.36)$$

$$Q_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{\pi}{2 \sin \mu \pi} \left[P_{\nu}^{\mu}(x) \cos \mu \pi - \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} P_{\nu}^{-\mu}(x) \right]. \quad (1.37)$$

Кўплаб адабиётларда [10], [11], [12] (1.36) ва (1.37) тенгликлар билан аниқланувчи функцияларни мос ҳолда қўшилган (присоединенные) биринчи ва иккинчи тур Лежандр функциялари деб аталади. Агар $\mu = 0$ бўлса, яъни $P_{\nu}^0 = P_{\nu}$ ва $Q_{\nu}^0 = Q_{\nu}$ ларни мос ҳолда биринчи ва иккинчи тур Лежандр функциялари дейилади.

Лежандр функциялари орасида қуйидаги рекуррент формулалар ўринлилиги исботланган. Буларнинг айримларини келтирамиз:

$$P_{-\nu-1}^{\mu}(x) = P_{\nu}^{\mu}(x),$$

$$(1-x^2) \frac{dP_{\nu}^{\mu}(x)}{dx} = (\nu+1)xP_{\nu}^{\mu}(x) - (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(x),$$

$$P_{\nu-1}^{\mu}(x) - xP_{\nu}^{\mu}(x) = (\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}P_{\nu}^{\mu-1}(x),$$

$$xP_{\nu}^{\mu}(x) - P_{\nu+1}^{\mu}(x) = (\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}P_{\nu}^{\mu-1}(x),$$

$$(\nu-\mu)xP_{\nu}^{\mu}(x) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(x) = \sqrt{1-x^2}P_{\nu}^{\mu+1}(x),$$

$$(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(x) - (\nu+\mu+1)xP_{\nu}^{\mu}(x) = \sqrt{1-x^2}P_{\nu}^{\mu+1}(x).$$

Биринчи тур Лежандр функциясининг интеграл кўриниши қуйидагича:

$$P_{\nu}^{\mu}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\sin \theta)^{\mu}}{\Gamma\left(-\mu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \varphi d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{\mu + \frac{1}{2}}}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad \operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}.$$

II БОБ. СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТГА ЭГА БЎЛГАН ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН ДИРИХЛЕ ва НЕЙМАН МАСАЛАЛАРИ

2.1. Сингуляр коэффициентга эга бўлган эллиптик типдаги тенглама учун Дирихле масаласи

2.1.1. Масаланинг қўйилиши

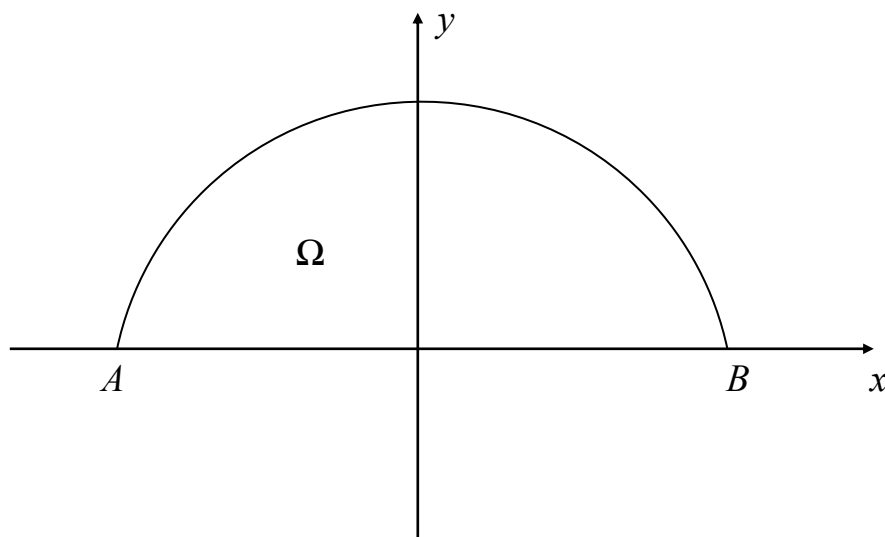
Ушбу

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y}u_y = 0, \quad (2.1)$$

тенгламани x, y текислигининг учлари $A(-1, 0)$ ва $B(0, 1)$ нуқталарда бўлган

$\sigma_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, |x| < 1, y > 0\}$ айлана ёйи, $AB = \{(x, y) : y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$

кесма билан чегараланган Ω соҳада (1-чизма) қараймиз.



1-чизма

Бу соҳада (2.1) тенглама эллиптик типга тегишли бўлиб, соҳанинг AB кесмаси эса шу тенгламанинг сингулярлик чизиғи ҳисобланади.

Ω соҳада аниқланган $u(x, y)$ функция (2.1) тенгламада иштирок этувчи барча ҳосилалари билан узлуксиз бўлиб, уни айниятга айлантирса, $u(x, y)$ функция (2.1) тенгламанинг регуляр (классик) ечими дейилади.

D масала. Ω соҳада (1) тенгламани ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ функция топилсин:

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0, \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (x, 0) \in \overline{AB}. \quad (2.3)$$

2.1.2. Масалани қутб координаталар системасига ўтказиш

(2.1) тенгламанинг (2.3) шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун ўзгарувчиларни қутб координаталар системасида тасвирлаб оламиз. Бунинг учун $u(x, y) = u(r, \varphi)$ алмаштириш бажарамиз, бу ерда

$$x = r \cos \varphi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Биринчи бўлиб (2.1) тенгламани қутб координаталари системасида тасвирлаймиз, бунинг учун қуйидаги ишларни бажарамиз:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

бу системадан тўла дифференциалларни топамиз.

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi; \\ dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Бу системани $dr, d\varphi$ ларга нисбатан ечамиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r;$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} dx & -r \sin \varphi \\ dy & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos \varphi dx + r \sin \varphi dy = r [\cos \varphi dx + \sin \varphi dy],$$

$$\Delta_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & dx \\ \sin \varphi & dy \end{vmatrix} = \cos \varphi dy - \sin \varphi dx,$$

$$dr = \frac{\Delta_r}{\Delta} = \frac{r [\cos \varphi dx + \sin \varphi dy]}{r} = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy, \quad (2.4)$$

$$d\varphi = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta} = \frac{\cos \varphi dy - \sin \varphi dx}{r}. \quad (2.5)$$

Энди $u(r, \varphi)$ функциянинг тўла дифференциалини ҳисоблаймиз:

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (2.6)$$

(2.6) тенгликдаги dr ва $d\varphi$ ларнинг ўрнига (2.4) ва (2.5) билан аниқланган ифодаларни олиб келиб қўямиз ва натижада бизда қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial r} [\cos \varphi dx + \sin \varphi dy] + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} [\cos \varphi dy - \sin \varphi dx] = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi dx - \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \sin \varphi dx \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi dy + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \cos \varphi dy \right] = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \sin \varphi \right] dx + \left[\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \cos \varphi \right] dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Бошқа томондан $u(x, y)$ нинг тўла дифференциалини топамиз:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (2.8)$$

(2.7) ва (2.8) ни таққослаб қуйидагини топамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Биз биламизки, Лаплас тенгламасининг қутб координаталаридаги кўриниши математик физика методлари китобларида [4] маълум ва унинг кўриниши қуйидагича:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0 \quad (2.10)$$

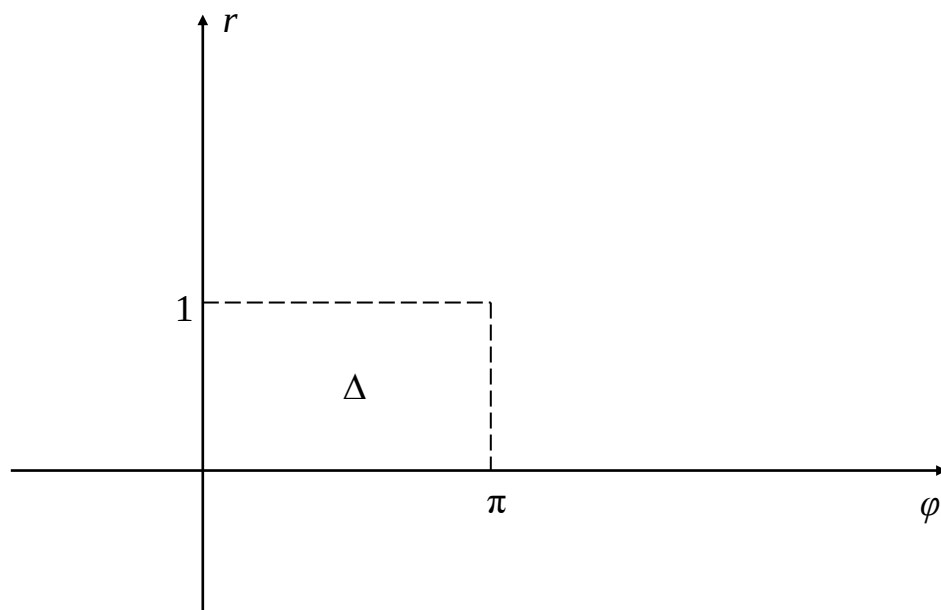
(2.9) ва (2.10) ларни инобатга олиб (2.1) тенгламанинг қутб координаталаридаги кўринишини ёза оламиз:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y}u_y &= \\ &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{2\beta}{r \sin \varphi} \left[\sin \varphi u_r + \frac{1}{r} \cos \varphi u_{\varphi} \right] = \\ &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{2\beta}{r}u_r + \frac{2\beta \cos \varphi}{r^2 \sin \varphi}u_{\varphi} = \\ &= u_{rr} + \frac{1+2\beta}{r}u_r + \frac{2\beta \operatorname{tg} \varphi}{r^2}u_{\varphi} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Энди (2.3) шартни қутб координаталар системасида ифодалаймиз:

$$u(x, y)|_{y=0} = u(r, \varphi)|_{\varphi=0} = 0, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (2.12)$$

Қутб координаталар системасида Ω соҳа қуйидаги Δ соҳага ўтиб қолади:



Демак, (2.1) тенгламанинг Δ соҳада (2.12) шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бу масалани юқорида айтганимиздек, ўзгарувчиларни алмаштириш усули билан ечамиз, яъни ечимни $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ кўринишда қидирамиз. У ҳолда (2.11) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1+2\beta}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{2\beta\operatorname{tg}\varphi}{r^2}R(r)\Phi'(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Биз биламиз $R(r)\Phi(\varphi) \neq 0$. Буни инобатга олиб, охирги тенгликнинг ҳар иккала томонига $\frac{1}{R(r)\Phi(\varphi)}$ ифодани кўпайтирамиз ва $R(r)$ функцияга боғлиқ бўлган ифодани тенгликнинг чап томонида қолдириб, $\Phi(\varphi)$ функцияга боғлиқ ифодани эса тенгликнинг ўнг томонига олиб ўтамыз. Натижада бизда қуйидаги тенглик пайдо бўлади:

$$\frac{r^2 R''(r) + (1 + 2\beta)rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi) + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi \Phi'(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Бу ифоданинг чап ва ўнг томонлари бир-бирига боғлиқ бўлмаганлиги сабабли унинг қийматини қандайдир λ сонга тенг деб олишимиз мумкин. Натижада бизда $R(r)$ ва $\Phi(\varphi)$ функцияларга нисбатан иккита тенглама пайдо бўлади:

$$\begin{aligned} r^2 R''(r) + (1 + 2\beta)rR'(r) - \lambda R(r) &= 0 \\ 0 < r < 1; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi''(\varphi) + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi \Phi'(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) &= 0, \\ 0 < \varphi < \pi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.1.3. Оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалаларни ечиш

Энди эса бу оддий дифференциал тенгламалар учун ёпиқ соҳада узлуксизлик шартидан ва (2.12) дан чегаравий шартларни аниқлаб оламиз.

$u(0,0)=0$ эканлигини эътиборга олиб, $R(0)=0$ ни ҳосил қилиш мумкин. Бу шартни олишда қуйидаги мулоҳазага таяндик, яъни кидирилаётган функция ёпиқ соҳада узлуксиз, жумладан $u(x,0)=0$ эканлиги (2.3) шартдан маълум, буни инобатга олиб $u(0,0)=0$ деб оламиз.

(2.12) тенгликдан эса $U(r,\varphi)|_{\varphi=0} = R(r)\Phi(\varphi)|_{\varphi=0} = 0$ ни ёзамиз, бундан эса $\Phi(0)=0$ га эга бўламиз. $\Phi(\varphi)$ функция учун $\varphi=\pi$ да $\Phi(\pi)=0$ шартни олиш мумкин.

Шундай қилиб, $R(r)$ ва $\Phi(\varphi)$ номаълум функцияларга нисбатан қуйидаги иккита оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалаларга келамиз.

$$r^2 R''(r) + (1 + 2\beta)rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad 0 < r < 1; \quad (2.13)$$

$$R(0) = 0; \quad (2.15)$$

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi \Phi'(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi; \quad (2.14)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\pi) = 0. \quad (2.16)$$

Аввал $\{(2.13), (2.15)\}$ масаланинг ечимини топамиз. (2.13) тенгламанинг умумий ечимини топишга ҳаракат қиламиз. Бунинг учун (2.13)

тенгламада $R(r) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho)$ алмаштириш бажарамиз. $R(r)$ функциядан

биринчи ва иккинчи ҳосилаларни ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned} R'(r) &= \sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M'(\rho) - \beta \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta-1} M(\rho); \\ R''(r) &= \lambda \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M''(\rho) - 2\beta\sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta-1} M'(\rho) + \\ &\quad + \beta(1+\beta) \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta-2} M(\rho). \end{aligned}$$

Буларни олиб бориб (2.13) тенгламага қўямиз

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{2-\beta} M''(\rho) - 2\beta\sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1-\beta} M'(\rho) + \\ &+ \beta(1+\beta) \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho) + (1+2\beta)\sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1-\beta} M'(\rho) - \\ &- \beta(1+2\beta) \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho) - \lambda \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Охирги тенгликнинг иккала томонини $\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta}$ га бўламиз ва соддалаштирамиз, натижада бизда қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\rho^2 M''(\rho) + \rho M'(\rho) - (\beta^2 + \lambda) M(\rho) = 0 \quad (2.17)$$

(2.17) тенглама Эйлер тенгламаси деб аталади. Шуларга асосан ва киритилган алмаштиришимизни инобатга олиб, (2.17) тенгламанинг умумий ечимини ёзамиз:

$$M(\rho) = \rho^{\sqrt{\beta^2 + \lambda}},$$

бу ердан, эски ўзгарувчиларга қайтиб, (2.13) тенгламанинг (2.15) шартни қаноатлантирадиган ечимини ҳосил қиламиз:

$$R(r) = r^{\sqrt{\beta^2 + \lambda}}. \quad (2.18)$$

Энди иккинчи масала, яъни $\{(2.14), (2.16)\}$ масала ечимини топиш билан шуғулланамиз.

$$(2.14) \quad \text{тенгламада} \quad z = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{алмаштириш} \quad \text{бажарамиз.} \quad \Phi(\varphi)$$

функциядан биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаймиз.

$$\Phi'(\varphi) = \frac{1}{2} \sin \varphi \Phi'(z);$$

$$\Phi''(\varphi) = \frac{1}{4} \sin^2 \varphi \Phi''(z) + \frac{1}{2} \cos \varphi \Phi'(z).$$

Бу ҳосилаларни (2.14) тенгламага олиб бориб қўямиз ва натижада бизда қуйидаги тенглама пайдо бўлади:

$$z(1-z)\Phi''(z) + \left[\left(\frac{1}{2} + \beta \right) - (1+2\beta)z \right] \Phi'(z) + \lambda \Phi(z) = 0. \quad (2.19)$$

Бу тенглама I бобнинг иккинчи параграфида келтирилган Гаусснинг гипергеометрик тенгламасига ўхшаш тенгламадир. Бу тенгламанинг умумий ечимидан ва алмаштиришдан фойдаланиб, (2.19) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & A_2 F\left(\beta + \omega, \beta - \omega, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) + \\ & + B_2 \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2} - \beta} F\left(\frac{1}{2} + \omega, \frac{1}{2} - \omega, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

бу ерда A_2 ва B_2 - ўзгармас сонлар бўлиб, $A^2 + B^2 \neq 0$ шартни қаноатлантиради.

(2.20) ни $F(a, b, c; 0) = 1$ ва

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

$$c - a - b > 0$$

тенгликларни эътиборга олиб, (2.16) шартларга олиб бориб қўямиз ва A_2 ва B_2 ларга нисбатан чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\Phi(0) = A_2 \cdot F\left(\beta + \omega, \beta - \omega, \beta + \frac{1}{2}; 0\right) + B_2 \cdot 0 = 0,$$

$$\Phi(\pi) = A_2 \cdot F\left(\beta + \omega, \beta - \omega, \beta + \frac{1}{2}; 1\right) + B_2 \cdot F\left(\frac{1}{2} + \omega, \frac{1}{2} - \omega, \frac{3}{2} - \beta; 1\right) = 0.$$

Бу тенгламалар системасининг биринчи тенгламасида $\Phi(\varphi) \neq 0$ бўлишлигини инобатга олсак, $B_2 \neq 0$ ва $A_2 = 0$ дейишга мажбурмиз.

Иккинчи тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A_2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta - \beta - \omega - \beta + \omega\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta - \beta - \omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta - \beta + \omega\right)} +$$

$$+ B_2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta - \frac{1}{2} - \omega - \frac{1}{2} + \omega\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta - \frac{1}{2} - \omega\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta - \frac{1}{2} + \omega\right)} = 0,$$

$$A_2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \omega\right)} + B_2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right)}{\Gamma(1 - \beta - \omega)\Gamma(1 - \beta + \omega)} = 0.$$

У ҳолда иккинчи тенгламада биринчи ҳад нолга тенг бўлади, иккинчи ҳадда эса $B_2 \neq 0$ ва унга кўпайган касрнинг сурати $0 < \beta < \frac{1}{2}$ бўлганда аниқланган. Махражида қатнашган Эйлернинг гамма функцияларининг аргументларини $-n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) га тенг деб оламиз, чунки касрнинг қиймати нолга тенг бўлади.

$$\begin{cases} 1 - \beta - \omega = -n, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ 1 - \beta + \omega = -n, & n = 0, 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Бу системадан ω ни топамиз ва $\omega \geq \beta$ шартни қаноатлантиради-
ганларини ажратамиз.

У ҳолда у қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega_n = n - \beta, \quad n \in N. \quad (2.21)$$

Шундан сўнг, $\lambda_n = \omega_n^2 - \beta^2$, $n \in N$ эканлигини топамиз, бу эса $\{(2.14), (2.16)\}$ масаланинг хос қийматлари ҳисобланади, бу ерда ω_n — (2.21) тенглик билан аниқланади.

Сўнгра эса (2.20) га $\omega = \omega_n$, $B_2 = c_n$, $n \in N$ ($c_n \neq 0$ - ўзгармас сонлар) ларни қўйиб, λ_n хос қийматларга мос келувчи $\{(2.14), (2.16)\}$ масаланинг хос функцияларини топамиз:

$$\Phi_n(\varphi) = c_n \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\beta} F\left(\frac{1}{2} + \omega_n, \frac{1}{2} - \omega_n, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \quad n \in N. \quad (2.22)$$

(2.18) ва (2.22) ларга асосан, Ω соҳада (2.1) тенгламанинг (2.3) шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимини ҳосил қиламиз:

$$u_n(x, y) = c_n r^{\omega_n} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\beta} F\left(\frac{1}{2} + \omega_n, \frac{1}{2} - \omega_n, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \quad n \in N. \quad (2.23)$$

бу ерда $c_n \neq 0$ -ўзгармас сон.

2.1.4. Дирихле масаласининг ечимини қуриш

Энди Ω соҳада D масаласининг ечимини қуйидаги қатор кўринишида кидирамиз:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{\omega_n} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\beta} F\left(\frac{1}{2} + \omega_n, \frac{1}{2} - \omega_n, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \quad (2.24)$$

бу ерда c_n – ҳозирча номаълум функция.

(2.24) ни (2.2) чегаравий шартга бўйсундирамиз

$$\begin{aligned} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \Big|_{r=1} = \tilde{f}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\beta} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2} + \omega_n, \frac{1}{2} - \omega_n, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.25) дан $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi) = 0$ шарт бажарилиши келиб чиқади.

Энди c_n коэффициентларни топишга ҳаракат қиламиз. Бунинг учун (2.25) нинг ўнг томонини Лежандр функцияси орқали ифодалаб оламиз

$$\Gamma(1-b) P_a^b(\cos \theta) = \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)^{-b} F\left[1+a-b, -a-b; 1-b; \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \right], \quad 0 < \theta < \pi.$$

У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2} + \omega_n, \frac{1}{2} - \omega_n, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = \\ = \Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta \right) \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} P_{-\frac{1}{2}-\omega_n}^{\beta-\frac{1}{2}}(\cos \varphi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26) ни (2.25) га қўямиз

$$\tilde{f}(\varphi) = 2^{\beta-1/2} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta \right) (\sin \varphi)^{(1/2)-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{-\frac{1}{2}-\omega_n}^{\beta-(1/2)}(\cos \varphi).$$

Бу ерда Лежандр функциясининг интеграл кўринишини берувчи Мелер-Дирихле формуласини қўлаймиз:

$$P_{\nu}^{\tau}(\cos t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\sin t)^{\tau}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \tau\right)} \times \\ \times \int_0^t (\cos s - \cos t)^{-\tau-1/2} \cos\left(\left[\nu + \frac{1}{2}\right]s\right) ds, \quad 0 < t < \pi, \quad \operatorname{Re} \tau < \frac{1}{2},$$

натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\tilde{f}(\varphi) = \frac{2^{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \beta)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^{\varphi} \frac{\cos[(n - \beta)s]}{(\cos s - \cos \varphi)^{\beta}} ds. \quad (2.27)$$

Бу қаторни вақтинчалик, яқинлашувчи деб ҳисоблаб, интеграл ва йиғинди белгилари ўрнини алмаштирамиз.

$$\tilde{f}(\varphi) = l_1 \int_0^{\varphi} (\cos s - \cos \varphi)^{-\beta} F(s) ds, \quad (2.28)$$

бу ерда

$$l_1 = \frac{2^{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \beta)}, \\ F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos[(n - \beta)s]. \quad (2.29)$$

(2.28) тенглама $F(s)$ функцияга нисбатан интеграл тенглама ҳисобланади. $F(s)$ ни топиш учун (2.28) да $\cos \varphi = y$, $\cos s = t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада Абел интеграл тенгламасига келамиз:

$$\tilde{f}(\arccos y) = l_1 \int_y^1 \frac{F(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2} (t-y)^{\beta}} dt, \quad -1 < y < 1.$$

Агар бу ерда

$$\tilde{f}(\arccos y) \in C[-1, 1] \cap C^1(-1, 1), \quad f(0) = 0$$

деб талаб қилсак, у ҳолда интеграл тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади

$$F(\arccos y) = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi l_1} \sqrt{1-y^2} \int_y^1 \frac{\tilde{f}'(\arccos s)}{\sqrt{1-s^2} (s-y)^{1-\beta}} ds, \quad -1 < y < 1.$$

Агар бу ерда $\cos t = s$, $\cos \theta = y$ алмаштириш бажарсак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi l_1} \sin \theta \int_0^\theta \frac{\tilde{f}'(t) dt}{(\cos t - \cos \theta)^{1-\beta}} = \\ &= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi l_1} \sin \theta \int_0^\theta \frac{[f(\cos \varphi, \sin \varphi)]'_t dt}{(\cos t - \cos \theta)^{1-\beta}}, \quad 0 < \theta < \pi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

У ҳолда (2.29) га асосан, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos[(n+1-\beta)\theta] = F(\theta). \quad (2.31)$$

Бу ерда c_n , $F(\theta)$ функциянинг $\{\cos[(n-\beta)\theta]\}_{k=0}^{\infty}$ система бўйича ёйилмасининг коэффициентлари ҳисобланади.

У ҳолда Е.И.Моисеевнинг [13] иши натижасига асосан, (2.31) қатор $F(\theta)$ функцияга текис яқинлашади, агар у $C^\delta[0, \pi]$, $\delta \in (0, 1]$ синфга тегишли бўлса. (2.31) қаторнинг коэффициентлари эса қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h_n^c(\theta) F(\theta) d\theta, \quad (2.32)$$

бу ерда $\{h_n^c(\theta)\} - \{\cos[(n+1-\beta)\theta]\}$ косинуслар системасига биортогонал қўшма система,

$$h_n^c(\theta) = \frac{2}{\pi \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{1-\beta}} \left[\sum_{k=0}^n C_{1-\beta}^k \cos[(k-n)\theta] - \frac{1}{2} C_{1-\beta}^n \right],$$

$$C_l^n = \frac{1}{n!} [l(l-1)\dots(l-n+1)].$$

Шундай қилиб, (2.31) қатор текис яқинлашувчи, у ҳолда (2.27) даги сумма ва интеграл ўрнини алмаштириш амали асосланди.

Берилган функцияга маълум шартларни қўйиб, (2.24) ни Ω соҳанинг ёпиғида узлуксизлиги ва иккинчи тартибли ҳосиласи шу соҳанинг очиғида узлуксизлигини, яъни берилган қаторнинг текис яқинлашувчи эканлигини исботлаш мумкин. Демак, (2.24) формулани (2.1) тенглама учун қўйилган Дирихле масаланинг ечимини берувчи формула сифатида қабул қилсак бўлади.

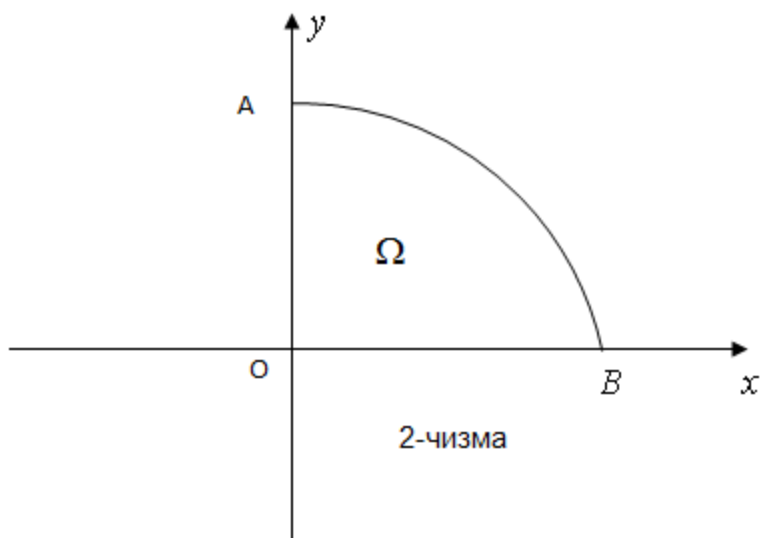
2.2. Хольмгрен масаласининг тадқиқоти

2.2.1. Масаланинг қўйилиши

Ушбу

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y}u_y = 0, \quad (2.1)$$

тенгламани олдинги 2.1 параграфда тасвирланган соҳанинг ярми, яъни чорак доирада (2-чизма) қараймиз.



N масала. Ω соҳада (2.1) тенгламани ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ функция топилсин:

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0, \quad (2.2)$$

$$u(0, y) = 0, \quad (0, y) \in \overline{OA}, \quad (2.33)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y) = 0, \quad (x, 0) \in OB. \quad (2.34)$$

Эллиптик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни кўйишда, агар соҳанинг чегарасида қидириляётган функциянинг қиймати берилган бўлса, у ҳолда бу масалани Дирихле масаласи дейилади. Агар соҳанинг чегарасида қидириляётган функциянинг нормал бўйича ҳосиласи берилган бўлса, бундай масалаларни Нейман масаласи дейилади. Соҳа чегарасининг бир қисмида қидириляётган функциянинг қиймати, бошқа бир қисмида эса унинг нормал бўйича ҳосиласи берилган бўлса, бундай масалаларга Хольмгрен масаласи дейилади ёки бўлмасам бошқа манбаларда бундай масалаларни Дирихле-Нейман масаласи деб аталади.

2.2.2. Масаланинг хос сонлари ва хос функцияларини топиш

(2.1) тенгламанинг (2.33) ва (2.34) шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун ўзгарувчиларни кутб координаталар системасида тасвирлаб оламиз. Бу ишни биз 2.1 параграфда бажарганмиз. (2.1) тенгламанинг кутб координаталари системасидаги кўриниши қуйидагича:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y = \\ = u_{rr} + \frac{1+2\beta}{r} u_r + \frac{2\beta \operatorname{tg} \varphi}{r^2} u_\varphi + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Энди (2.33) шартни кутб координаталар системасида ифодалаймиз:

$$u(0, y) = R(r) \Phi(\varphi)|_{\varphi \rightarrow 0} = 0, \quad (2.35)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[\Phi'(\varphi) (\sin \varphi)^{2\beta} \right] = 0. \quad (2.36)$$

Қутб координаталар системасида Ω соҳа тўғри тўртбурчакка аксланишини олдинги параграфда кўриб чиқдик.

Демак, (2.1) тенгламанинг тўғри тўртбурчак соҳада (2.35), (2.36) шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бу масалани юқорида айтганимиздек, ўзгарувчиларни алмаштириш усули билан ечамиз, яъни ечимни $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ кўринишда қидирамиз. Олдинги параграфдаги ишларни такрорлаб, қуйидаги иккита тенгламага келинади:

$$r^2 R''(r) + (1 + 2\beta) r R'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad (2.13)$$

$$0 < r < 1;$$

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi \Phi'(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad (2.14)$$

$$0 < \varphi < \pi/2.$$

Энди эса бу оддий дифференциал тенгламалар учун ёпиқ соҳада узлуксизлик шартидан ва (2.34) дан чегаравий шартларни аниқлаб оламиз.

Қидирилаётган функция соҳанинг ёпиғида узлуксизлигидан, $|R(0)| < \infty$ шартни ҳосил қилиш мумкин.

(2.35), (2.36) тенгликлардан эса $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[\Phi'(\varphi) (\sin \varphi)^{2\beta} \right] = 0$ ва $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ шартларга эга бўламиз.

Шундай қилиб, $R(r)$ ва $\Phi(\varphi)$ номаълум функцияларга нисбатан қуйидаги иккита оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалаларга келамиз.

$$r^2 R''(r) + (1 + 2\beta) r R'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad 0 < r < 1; \quad (2.37)$$

$$|R(0)| < \infty; \quad (2.38)$$

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi \Phi'(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi; \quad (2.39)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[\Phi'(\varphi) (\sin \varphi)^{2\beta} \right] = 0, \quad \Phi(\pi/2) = 0. \quad (2.40)$$

Аввал $\{(2.37), (2.38)\}$ масаланинг ечимини топамиз. (2.37) тенгламанинг умумий ечимини топишга ҳаракат қиламиз. Бунинг учун (2.37) тенгламада $R(r) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho)$ алмаштириш бажарамиз. $R(r)$ функциядан биринчи ва иккинчи ҳосилаларни ҳисоб

$$\begin{aligned} R'(r) &= \sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M'(\rho) - \beta \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta-1} M(\rho); \\ R''(r) &= \lambda \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M''(\rho) - 2\beta\sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta-1} M'(\rho) + \\ &\quad + \beta(1+\beta) \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta-2} M(\rho) \end{aligned}$$

уларни олиб бориб (2.37) га қўямиз

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{2-\beta} M''(\rho) - 2\beta\sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1-\beta} M'(\rho) + \\ &+ \beta(1+\beta) \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho) + (1+2\beta)\sqrt{\lambda} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1-\beta} M'(\rho) - \\ &- \beta(1+2\beta) \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho) - \lambda \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta} M(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Охирги тенгликнинг иккала томонини $\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\beta}$ га бўламиз ва соддалаштирамиз, натижада бизда қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\rho^2 M''(\rho) + \rho M'(\rho) - (\beta^2 + \lambda) M(\rho) = 0 \quad (2.41)$$

(2.41) тенглама Эйлер тенграмаси деб аталади. Буларга асосан ва киритилган алмаштиришимизни инобатга олиб, (2.41) тенгламанинг умумий ечимини ёзамиз:

$$M(\rho) = \rho^\omega, \quad \omega = \sqrt{\beta^2 + \lambda} \geq 0,$$

бу ердан, эски ўзгарувчиларга қайтиб, (2.37) тенгламанинг (2.38) шартни қаноатлантирадиган ечимини ҳосил қиламиз:

$$R(r) = r^{\omega}. \quad (2.42)$$

Энди иккинчи масала, яъни $\{(2.39), (2.40)\}$ масала ечимини топиш билан шуғулланамиз.

(2.39) тенгламада $z = \sin^2 \varphi$ алмаштириш бажарамиз. $\Phi(\varphi)$ функциядан биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаймиз.

$$\Phi'(\varphi) = \sin 2\varphi \Phi'(z);$$

$$\Phi''(\varphi) = \sin^2 2\varphi \Phi''(z) + 2 \cos 2\varphi \Phi'(z).$$

Бу ҳосилаларни (2.39) тенгламага олиб бориб қўямиз ва натижада бизда қуйидаги тенглама пайдо бўлади:

$$z(1-z)\Phi''(z) + \left[\left(\frac{1}{2} + \beta \right) - (1+\beta)z \right] \Phi'(z) + \frac{\lambda}{4} \Phi(z) = 0. \quad (2.43)$$

Бу тенглама I бобнинг иккинчи параграфида келтирилган Гаусснинг гипергеометрик тенгламасига ўхшаш тенгламадир. Бу тенгламанинг умумий ечимидан ва алмаштиришдан фойдаланиб, (2.43) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & A_2 F\left(\frac{\beta + \omega}{2}, \frac{\beta - \omega}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right) + \\ & + B_2 \left(\sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} - \beta} F\left(\frac{1 - \beta + \omega}{2}, \frac{1 - \beta - \omega}{2}, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \varphi\right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

бу ерда A_2 ва B_2 - ўзгармас сонлар бўлиб, $A^2 + B^2 \neq 0$ шартни қаноатлантиради.

(2.44) нинг ҳосиласини топишимиз учун

$$\frac{d}{d\xi} F(a, b, c; \xi) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; \xi)$$

ва

$$\frac{d}{d\xi} F(a, b, c; \xi) = (c-1)x^{c-2} F(a, b, c-1; \xi)$$

формулалардан фойдаланамиз. Натижада (2.44) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[(\sin \varphi)^{2\beta} \Phi'(\varphi) \right] = (1-2\beta) B_2 \cdot 1 = 0, \quad B_2 = 0,$$

$$\Phi(\pi/2) = A_2 \cdot F\left(\frac{\beta+\omega}{2}, \frac{\beta-\omega}{2}, \beta + \frac{1}{2}; 1\right) = 0.$$

$$\text{Бу ерда } A_2 \neq 0 \text{ бўлганлиги учун, } F\left(\frac{\beta+\omega}{2}, \frac{\beta-\omega}{2}, \beta + \frac{1}{2}; 1\right) = 0$$

дейишга мажбурмиз.

Бу ердан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\beta-\omega}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\beta+\omega}{2}\right)} = 0.$$

Махражида қатнашган Эйлернинг гамма функцияларининг аргументларини $-n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) га тенг деб оламиз, чунки касрнинг қиймати нолга тенг бўлади.

$$\begin{cases} \frac{1+\beta-\omega}{2} = -n, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{1+\beta+\omega}{2} = -n, & n = 0, 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Бу системадан ω ни топамиз ва $\omega \geq 0$ шартни қаноатлантирадиганларини ажратамиз.

У ҳолда у қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega_n = 2n + 1 + \beta, \quad n \in N. \quad (2.45)$$

Шундан сўнг, $\lambda_n = \omega_n^2 - \beta^2$, $n \in N$ эканлигини топамиз, бу эса $\{(2.39), (2.40)\}$ масаланинг хос қийматлари ҳисобланади, бу ерда ω_n — (2.45) тенглик билан аниқланади.

Сўнгра эса (2.44) га $\omega = \omega_n$, $A_2 = c_n$, $n \in N$ ($c_n \neq 0$ - ўзгармас сонлар) ларни қўйиб, λ_n хос қийматларга мос келувчи $\{(2.39), (2.40)\}$ масаланинг хос функцияларини топамиз:

$$\Phi_n(\varphi) = c_n F\left(\frac{\beta + \omega_n}{2}, \frac{\beta - \omega_n}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right), \quad n \in N. \quad (2.46)$$

(2.42) ва (2.46) ларга асосан, Ω соҳада (2.1) тенгламанинг (2.33), (2.34) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимини ҳосил қиламиз:

$$u_n(x, y) = c_n r^{\omega_n} F\left(\frac{\beta + \omega_n}{2}, \frac{\beta - \omega_n}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right), \quad n \in N. \quad (2.47)$$

бу ерда $c_n \neq 0$ -ўзгармас сон.

2.2.3. Масаланинг ечимини қуриш

Энди Ω соҳада N масаласининг ечимини қуйидаги қатор кўринишида кидирамиз:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{\omega_n} F\left(\frac{\beta + \omega_n}{2}, \frac{\beta - \omega_n}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right), \quad (2.48)$$

бу ерда c_n – ҳозирча номаълум функция.

(2.48) ни (2.2) чегаравий шартга бўйсундирамиз

$$\begin{aligned} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \Big|_{r=1} &= \tilde{f}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \times \\ &\times F\left(\frac{\beta + \omega_n}{2}, \frac{\beta - \omega_n}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.1 параграфда бажарилган ишларни такрорлаб, (2.49) дан номаълум бўлган c_n коэффициентларни топамиз.

Сўнгра берилган функцияга маълум шартларни қўйиб, (2.48) ни Ω соҳанинг ёпиғида узлуксизлиги ва иккинчи тартибли ҳосиласи шу соҳанинг

очиғида узлуксизлигини, яъни берилган қаторнинг текис яқинлашувчи эканлигини исботлаш мумкин. Демак, (2.48) формулани (2.1) тенглама учун қўйилган Дирихле масаланинг ечимини берувчи формула сифатида қабул қилсак бўлади.

Хулоса

Мазкур битирув малакавий иши сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама учун қўйилган масалаларнинг хос қийматлари ва уларга мос хос функцияларини топишга ҳамда спектрал усул ёрдамида чегаравий масалаларни, жумладан Дирихле ва Хольмгрен масалаларини ечишга бағишланган.

Биринчи бобда математик физиканинг махсус функцияларидан айримларини келтиришга қарор қилинди. Бу махсус функцияларнинг хоссалари ўрганилиб кейинги боблардаги масалаларга тадбиқ қилинди. Шу сабабли бу бобда Эйлернинг биринчи ва иккинчи тур интеграллари ёки Эйлернинг бета ва гамма функцияси деб аталувчи функциянинг хоссалари ўрганилди. Бундан кейинги параграфда Гаусснинг гипергеометрик тенгламасининг махсус нуқталар атрофидаги умумий ечими ва бу ечимни берувчи функциянинг хоссалари ўрганилиб чиқилди. Кейинги параграфда Бессел тенгламаси, унинг ечимлари, биринчи ва иккинчи тур Бессел функциялари ва уларнинг хоссалари, турли индексли Бессел функциялари орасидаги муносабатни келтириб чиқариш ва Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари кўриб чиқилган. Биринчи бобнинг охирги параграфида эса Лежандр тенгламаси, унинг ечимларини берувчи Лежандрнинг биринчи ва иккинчи тур функциялари ҳамда уларнинг хоссалари, интеграл кўринишлари ҳақида батафсил маълумот берилди.

Иккинчи бобда битта сингуляр коэффициентга эга бўлган эллиптик типдаги тенглама учун Дирихле масаласи спектрал анализ усули ёрдамида тадқиқ қилинди. Масала бир нечта босқичда ўрганилиб чиқилди. Масаланинг қўйилишида эллиптик соҳа, бу соҳанинг чегараларидаги шартлар, сингулярлик чизиқлари ҳақида маълумотлар келтирилган. Соҳа яримдоирадан иборат бўлганлиги учун уни ўзгарувчиларини ажратиш учун қулай соҳага акслантириш лозим бўлади. Шунинг учун соҳани, тенгламани ва чегаравий шартларни қутб координаталари системасига акслантириб,

масала тўлиғича қутб координаталари системасига ўтказилди. Бундан кейинги босқичда оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалалар ечилган ва охирги босқичда топилган хос функциялар системасидан фойдаланиб, Дирихле масаласи ечимини қурилган.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфи Хольмгрен масаласининг тадқиқоти деб номланган бўлиб, унда эллиптик типдаги тенгламалар учун қўйиладиган масалаларнинг қисқача баёни ҳақида тўхталиб ўтилган. Сўнгра биринчи параграфдагига ўхшаб, масаланинг қўйилиши, масаланинг хос қийматлари ва хос функцияларини топиш ҳамда масаланинг ечимини қуриш каби қисммавзулар билан масала ечими топилган.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Каримов И.А. Биз келажагимизни ўз қўлимиз билан курашимиз. Тошкент. Ўзбекистон. 1999. 370-403 бетлар.
2. Ўзбекистон Республикасининг Қонуни. “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси. 9-сон, 225-модда, Т.: 1997 й.
3. Ўзбекистон Республикасининг Қонуни. “Таълим тўғрисида”. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 9-сон, 225-модда, Т.: 1997 й.
4. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. - Тошкент: Ўзбекистон, 2002.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1977.
6. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. –М.:Физматлит, 2001.
7. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. –М.: Физматлит, 2000.
8. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент. «Mumtoz so'z», 2010. -354 с.
9. Панов Ю.Д., Егоров Р.Ф. Математическая физика. Методы решения задач. Екатеринбург. 2005. – 150 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. - М.: Наука, 1973.-296 с.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т.1.–М.: Изд. ИЛ, 1949. - 798 с.
12. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики.–М.: Наука, 1984.
13. Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов//Доклады АН СССР. –Москва. 1984. Т. 275. № 4. – С. 794-798.

14. <http://lex.uz> (Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси)/
15. <http://www.ziynet.uz> (Ўзбекистон Республикаси ахборот таълим портали).
16. <http://www.elsevier.com/locate/aml> (Applied Mathematics Letters илмий журнали сайти).
17. <http://www.exponenta.ru> (Математик ўқув сайти).
18. <http://www.elibrary.ru> (Электрон кутубхона).