ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

Математика ўқитиш методикаси йўналиши 15.01-гуруҳ
битирувчиси Жумаев Фаризнинг

**“Штурм-Лиувилль масаласи ва унинг ечимини компьютерда қайта ишлаш”**

мавзусидаги

# БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Илмий рахбар: физика-математика
фанлари номзоди К.Каримов

Фарғона – 2019

Битирув малакавий иши математика кафедрасининг 2019 йил ___ ______________даги _____йиғилишида муҳокама қилинган ва ҳимояга тавсия этилган.

Кафедра мудири __________________ Ш.Каримов

Тақризчилар: 1. К.Каримов

2. З.Мўминов

## М У Н Д А Р И Ж А

## КИРИШ

Математик моделлар ўрганилаётган жараённинг асосий хусусиятларини ўзида иложи борича тўлароқ, тўкисроқ мужассам қилиши керак. Бу эса уларнинг иложсиз мураккаблашувига сабаб бўлади. Бундай математик моделларни ишлатиш, улар асосида лойиҳа кўрсаткичларининг хусусиятларини тасвирловчи ечим олиш ҳам ўз навбатида мураккаблашади. Математик моделларни ташкил қилувчи дифференциал, интеграл, интегро-дифференциал ва бошқа тенгламаларни ва улар учун қўйилган бошланғич ва чегаравий масалаларни ечиш усуллари етарли даражада такомиллашмаган. Айрим махсус курсларда келтириладиган аниқ, аналитик усуллар фақат хусусий кўринишдаги, содда тенгламаларнинг ва унга қўйилган масалаларнинг ечимини топиш имконини беради, холос. Сонли усуллар эса умумийроқ, анча мураккаб тенгламаларнинг ечимларини сонли топишга имкон беради.

Электрон ҳисоблаш машиналарининг яратилиши сонли усуллар татбиқига кенг истиқбол яратди. Илгари аналитик усулларда ечилмаган тенгламаларни компьютерларда сонли усуллар билан ечиш имконияти пайдо бўлди. Бу кейинги йилларда лойиҳа ташкилотлари томонидан тузилаётган қурилиш объектларининг лойиҳаларида ҳам ўз аксини топмоқда.

Ушбу битирув малакавий ишида бир оддий дифференциал тенглама учун хос қиймат ҳақидаги масалалар аналитик ҳамда символли математика дастурларидан фойдаланган ҳолда ечиш усуллари келтирилган. Оддий дифференциал тенглама сифатида содда тенгламалар олинган. Улар учун хос қиймат ҳақидаги масала, яъни Штурм-Лиувилль масаласи аналитик ечилиши усуллари кенг ёритилиб берилган. Сўнгги йилларда шахсий компьютерларда жуда самарали жорий қилинаётган компьютер математикаси тизимлари муайян тизимларни тадқиқ этиш учун амалий дастурлар яратишда янгича технологияларни қўллаш имкониятларини очиб берди.

Бу воситалар амалий дастурий таъминот яратишдаги масаланинг математик моделини келтириб чиқариш, ҳисоблаш усулларини танлаш, ҳисоблаш экспериментларини ўтказиш ва натижаларни таҳлил қилиш жараёнини тўлиқ автоматизациялаш имконини беради. Бу эса, амалий дастурий таъминотни ташкил қилишнинг тамойилларини ва масалаларни компьютерда ечишнинг анъанавий технология доирасида қўлланилиб келган усулларини тубдан ўзгартиради.

Мазкур битирув малакавий ишда оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалаларини ҳозирги кун математикаси учун энг кўп қўлланиладиган ва қулай бўлган Maple дастуридан фойдаланган ҳолда аналитик усуллар ёрдамида ечишни мақсад қилиб қўйдик. Бундай тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалаларни ечишда Maple пакетининг имкониятларини ўрганиш ва уни амалий аҳамиятини кўрсатиш бизнинг асосий вазифамиз ҳисобланади.

# I боб. Maple пакет программаси асослари

## 1.1. Maple тизимининг қисқача характеристикаси

Maple — типик интеграллашган тизим бўлиб унинг таркибига қуйидаги воситалар киради:

кучли дастурлаш тили (у тизим билан интерактив мулоқот қилиш воситаси ҳамдир);

дастурлар ва хужжатларни таҳрир қилиш ва тайёрлаш учун таҳрирлагич;

диалог режимида ишлаш имкониятини берувчи замонавий кўп ойнали интерфейс;

минглаб намуналарга эга бўлган кучли маълумотлар тизими;

алгоритмлар ва математик ифодаларни ўзгартириш қоидаларини ўз таркибига олувчи тизимнинг ядроси;

сонли ва символли процессорлар;

диагностика тизими;

бириктирилган ва қўшимча функцияларнинг библиотекаси;

фойдаланувчилар функцияларини ва бошқа айрим дастурлаш тиллари ва дастурларни қўллаб қувватлаш пакетлари.

Юқорида келтирилган воситаларнинг барчасига Maple дастури орқали тўғридан-тўғри кириш мумкин.

**Maple тизимининг тиллари.** Maple тизими ўзининг учта хусусий: кириш, амалга ошириш ва дастурлаш тилларига эга. Унинг кириш тили ўта Юқори даражадаги тил бўлиб ҳар қандай мураккабликдаги математик масалаларни ечишга йўналтирилган. Бу тил тизимга тизимга савол , яьни қайта ишланувчи кириш маълумотларини бериш учун хизмат қилади ва ўзининг идеологияси бўйича эски Basic тилига ўхшаб кетади. Кириш тили катта миқдордаги олдиндан аниқланган математик ва график функцияларга, ҳамда зарур бўлганда қўшиладиган библиотекаларга эга.

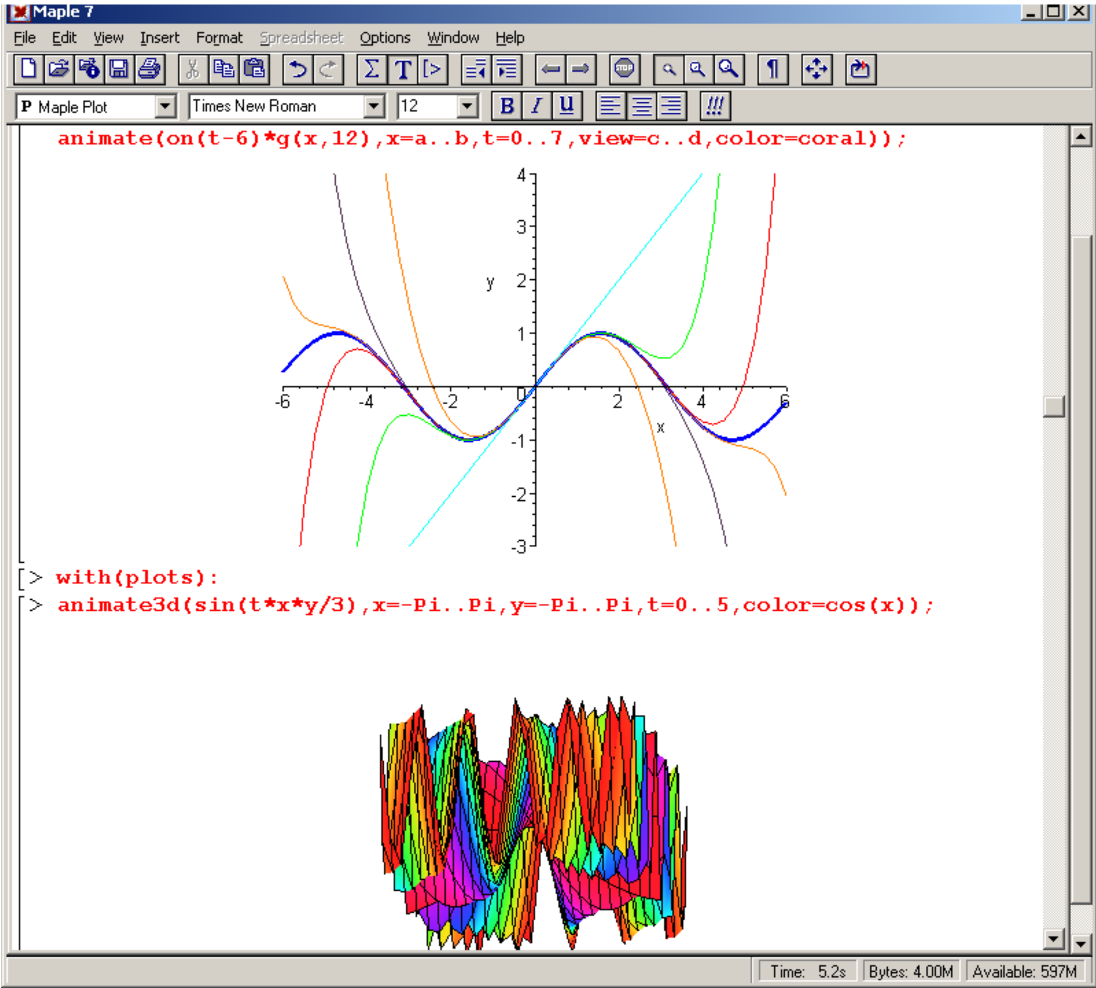
Maple тизими анъанавий таркибий дастурлаш воситаларини ҳамда кириш тилининг команда ва функцияларини ўз ичига олувчи процедуравий дастурлаш тили— Maple-тилига ҳам эга. Maple тизимини амалга ошириш тили бўлиб энг кучли ва универсал тиллардан бири бўлган Си дастурлаш тили хизмат қилган. Унинг ёрдамида тизим ядросининг дастури ёзилган. Умуман олганда Maple тизими воситаларининг тахминан 5 дан 10% гача қисми Си дастурлаш тилида, қолган 90-95% эса Maple-тилида ёзилган. Maple-тилидаги дастурларни бириктирилган тахрирлагичдан ташқари ташқи тахрирлагичларда (масалан Word да) ҳам тайёрлаш мумкин. Maple тизимининг бириктирилган тахрирлагичи File менюсидаги New ва Open командалари ёрдамида очилади.

Maple-тили таркибий операторларининг (цикл операторлари, шартли ва шартсиз операторлар ва ҳ.к.) синтаксиси Бейсик ва Паскал тиллари синтаксисларининг аралашмасига ўхшаб кетади. Тизим билан ишлашнинг диалог режимида математик ифодалар Бейсикдаги қоидаларга ўхшаш қоидаларга асосан киритилади.

**Maple тизимининг ядроси ва пакетлари.** Maple тизимининг ядроси символли ўзгартиришлар билан ишлаш учун асос бўлиб ҳисобланади. У символли ўзгартиришларнинг юзлаб таянч функция и алгоритмларига эга. Тизимнинг янги версияларида ядронинг ҳажми 6-7 Мбайтни ташкил қилади. Бундан ташқари операторлар, командалар ва функцияларнинг асосий библиотекаси ҳам мавжуд. Унга бириктирилган кўплаб функциялар ҳеч қандай эьлон қилишларсиз ишлатилиши мумкин, айримлари эса эьлон қилишни талаб қилади.

Тизимда бир қатор жалб қилинадиган пакетлар (packages) ҳам мавжуд. Бундай пакетлардаги қўшимча функциялар with(пакетнинг номи) командаси ёрдамида эьлон қилингандан кейин ишлатилиши мумкин. Maple тизимидаги функцияларнинг умумий сони, ядро ва пакетларга бириктирилганларини ҳам қўшиб ҳисоблаганда 3000дан ортиқ.

**Maple тизимининг интерфейси.** Windows таркибида ишловчи бошқа иловалар сингари Maple ҳам қатор элементларга эга (1-расм):




1-расм. Maple тизимининг интерфейси

сарлавҳа сатри (Юқорида);

бош меню сатри (иккинчи қатор);

асбобларнинг асосий панели (учинқи қатор);

кўриниши Maple тизимининг ишлаш режимига асосан ўзгариб турувчи асбобларнинг контекст панели (тўртинчи қатор);

киритиш ва хужжатларни таҳрирлаш ойнаси ;

ҳолат сатри ( энг пастдаги қатор).

Maple тизимининг интерфейси матнли изоҳлар, кириш тили командалари (улар одатдаги математик шаклга ўзгартирилиши ҳам мумкин), математик формулалар ва график маълумотлар кўринишидаги ҳисоблаш натижалари ва бошқаларни ўз ичига олувчи ҳужжатларни тайёрлаш имкониятини беради. Maple қулай тарзда ташкил қилинган маълумотлар тизимига эга. Унинг ёрдамида ҳар қандай оператор, функция ёки пакетлар тўғрисида батафсил маълумот олиш мумкин (лекин, фақат инглиз тилида).

**Maple тизимининг менюси.** Maple тизимида бошқаришнинг тўлиқроқ имкониятларини бош меню беради. У қуйидаги элементлардан ташкил топган:

File — файллар билан ишлаш ва ҳужжатларни чоп этиш;

Edit — ҳужжатларни таҳрирлаш командалари ва алмашиш буфери билан амаллар бажариш;

View — тизим интерфейсининг кўринишини бошқариш;

Insert — киритиш-қўйиш амаллари;

Format — форматларни белгилаш амаллари;

Spreadsheet — жадвалларни киритиш амаллари;

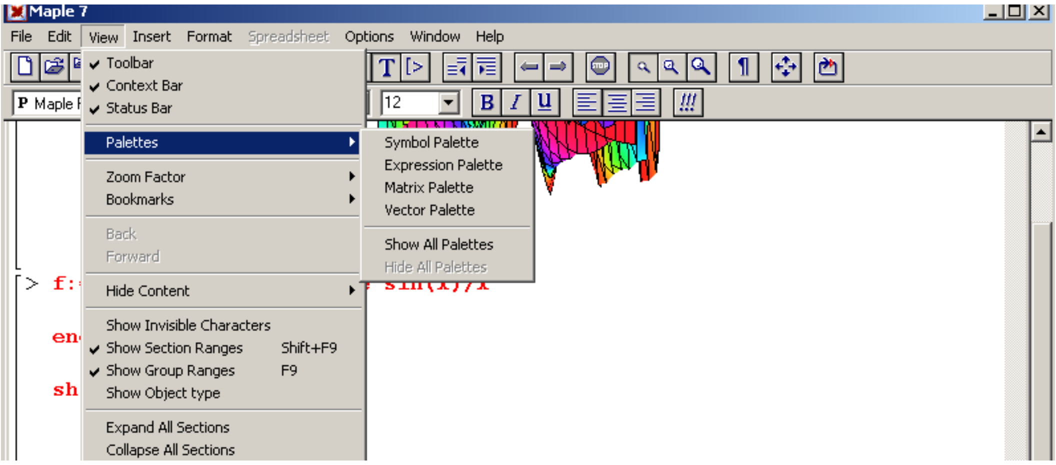
Options — параметрларни ўрнатиш;

Window — ойналарни бошқариш;

Help — маълумотлар тизими билан ишлаш.

Maple тизимининг бош менюси тизимнинг жорий ҳолатига боғлиқ ҳолда ўзгариб туради. Масалан ҳамма ҳужжатлар ёпилган бўлса бош меню фақат учта менюнинг сарлавҳасидан иборат бўлади: File, Options ва Help. Бундан ташқари бош менюнинг кўриниши ҳужжатдаги қандай элемент ажратилганлигига қараб ҳам ўзгариб туради.

Математик символларни киритишда тасвирлаш воситалари (палитралар) View менюсининг командалари,жумладан Palettes рўйҳатидан (2-расм) керакли палитрани танлаш йўли билан ўзгартирилади:




2-расм. Математик символларни киритишда палитрани танлаш

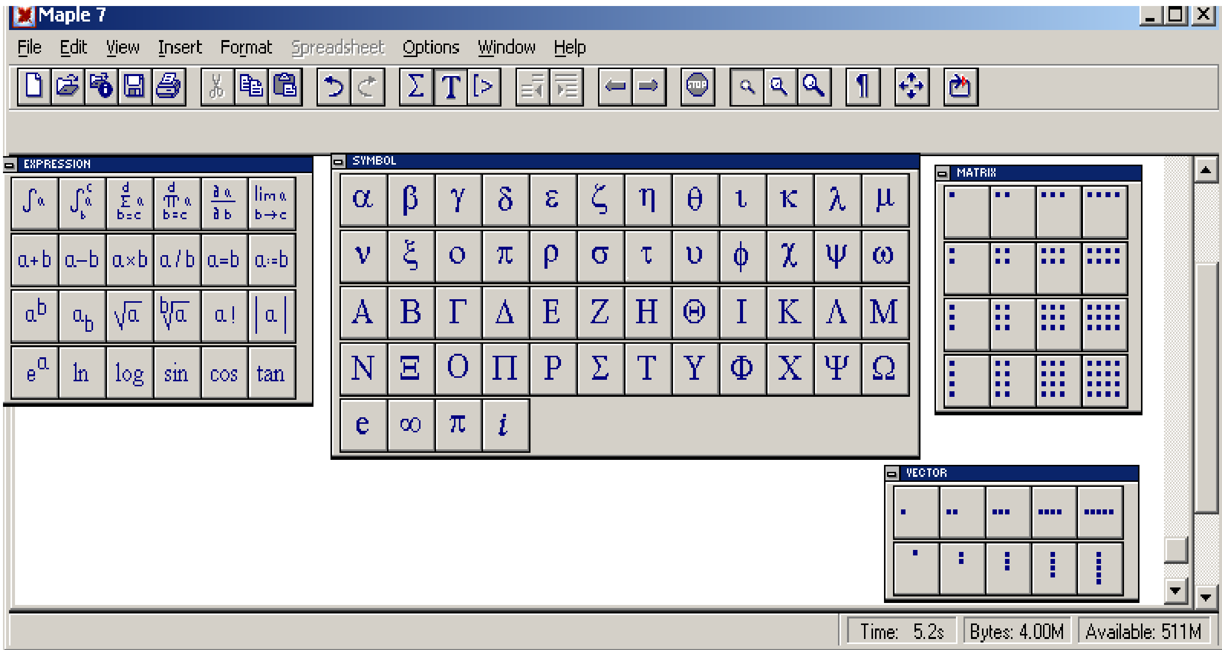
Symbol — айрим символларни киритиш (грек ҳарфлари ва айрим математик белгилар);

Expression — математик операторлар ва амаллар шаблонларини киритиш;

Matrix — ҳар хил ўлчамдаги матрицалар шаблонларини киритиш;

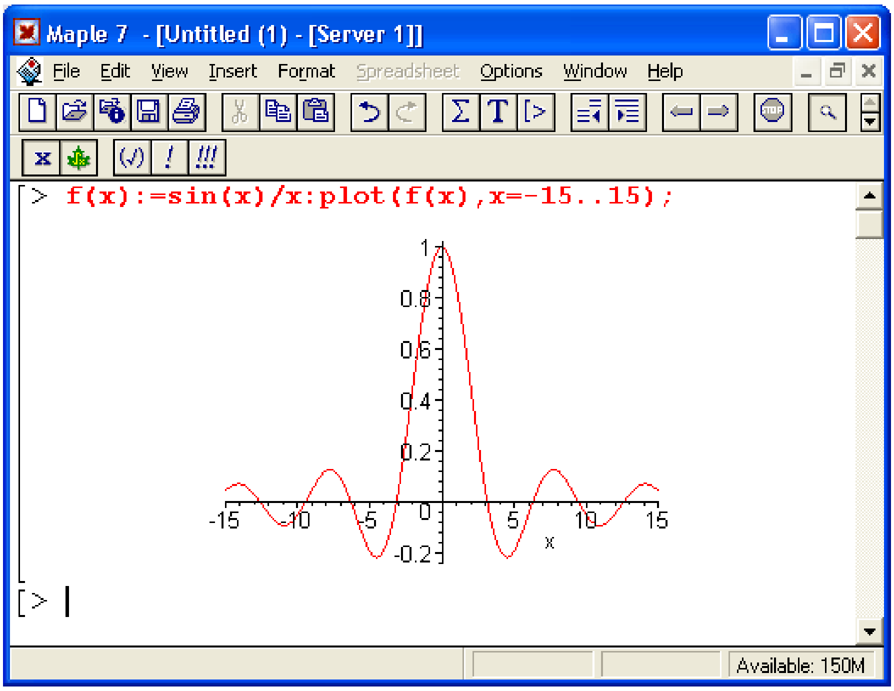
Vector — ҳар хил ўлчамдаги ва турдаги (вектор-устун ва вектор-сатр) векторларнинг шаблонларини киритиш;

Show All Palettes – экранга ҳамма шаблонларни чиқариш (3-расм).




3-расм. Экранга ҳамма шаблонларни чиқариш

Тизим ишга туширилгандан кейин математик ифодаларни ҳосил қилиш ва ҳисоблаш учун оператор ва функциялардан фойдаланиб диалог режимида ишлашни бошлаш мумкин. Масалан, 4-расмда sin(x)/x функциянинг графигини қуриш диалогининг экрандан олинган нусхаси кўрсатилган.




1.4. Диалог режимида ишлаш намунаси

Айрим ҳолларда юз бериши мумкин бўлган қўпол хатоларнинг олдини олиш учун кейинги мисолга ўтишдан олдин restart командаси бажарилиши керак. Бунда ўзгарувчиларнинг аввалги аниқланишлари олиб ташланади.

Maple тизимидаги диалог "савол берилди, жавоб олинди" кўринишида бўлади. Саволлар ва жавоблар алоҳида блокларга жойлашади. Блоклар бир биридан чап тамонларида жойлашган квадрат қавслар билан ажратилади. Қавсларнинг узунлиги математик ифодаларнинг (бошланғич (савол) ва ҳисоблаш натижалари (саволга жавоблар) ўлчамларига боғлиқ. Савол беришга таклиф бўлиб > белгиси ҳисобланади. Киритилган ифоданинг сўнгидаги; (нуқтали вергул) белгиси ҳисоблаш натижалари экранга чиқарилиши кераклигини кўрсатади, : (икки нуқта) белгиси эса экранга чиқаришни бекор қилади ва ундан бир қаторга ёзилган бир неча ифодани бир–бирида ажратиш учун фойдаланиш мумкин.

Математикада бўлгани сингари Maple тизимида ҳам функция тушунчаси асосий тушунчалардан бири бўлиб ҳисобланади. Функция бошланғич маълумотларни (функция параметрларини) ўзгартириш натижаларини қайтаради. Maple жуда кўп бириктирилган функцияларга эга. Ифодаларда функция номи ва қавс ичига олинган параметрлари билан кўрсатилади. Масалан sqrt(2) квадрат илдизни ҳисоблаш функциясидир. Унга мурожаат қилинганда қийматни қайтаради. Масалан:

```
> 4*sqrt(25.);
20.00000000
> 4*sqrt(25);
20
> sqrt(26.);
5.099019514
> sqrt(26);
```

$\sqrt{26}$

```
> sin(1);
sin( 1 )
> evalf(sin(1));
.8414709848

> sin(1.);
.8414709848
```

Ифодалардаги ўнли нуқтага эьтибор беринг. Нуқта ҳисоблаш учун кўрсатма вазифасини бажармоқда. Maple аргументи бутун сон бўлган функцияларни ҳисоблашда аниқроқ қийматлар билан иш кўришни афзал деб ҳисоблайди. Шунинг учун Юқоридаги мисолларда $\sqrt{26}$ ва $\sin(1)$ ни қабул қилган.

Математик ифодаларни ёзишда фунуциялардан ташқари операторлардан ҳам фойдаланилади. Мисол учун + (қўшиш), - (айриш), * (кўпайтириш), / (бўлиш) ва бошқа операторлар мавжуд. Операторлар одатда константа ёки ўзгарувчи кўринишидаги операндлар билан биргаликда ишлатилади. Энг кўп ишлатиладиган операторлардан бири := (ўзлаштириш оператори) ўзгарувчиларга конкрет қийматларни бериш учун қўлланилади. Мисол учун:

```
> x:=y;
  x := y
> y:=z;
  y := z
> z:=5;
  z := 5
> x;
  5
> y;
  5
```

Ушбу мисолда x, y ва z ўзгарувчилар ўзоро ўзлаштириш оператори ёрдамида боғланган. Шунинг учун z ўзгарувчига қиймат берилганда x ва y ўзгарувчилар ҳам ўша қийматни қабул қилади.

Кенг тарқалган операторлардан яна бири = (тенглик) операторидир. У тенгликни (масалан a=b), мантиқий шартларни, ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳаларини ва функция ҳамда командалардаги параметрларнинг қийматларини бериш учун ишлатилади.

Maple тизимида ишлаганда ифодаларни ва Maple-тилининг бошқа обектларини тилнинг синтаксиси қоидаларига асосан киритиш зарур. Лекин ҳар қандай тажрибали фойдаланувчи ҳам хатоликларга йўл қўйиши имумкин.

Синтаксиси тўғри бўлган хатоларни тизим аниқлай олмайди. Масалан, a*sin(x) ифодада x нинг ўрнига b қўйиб кетилган бўлса бундай хатоликни фақат фойдаланувчининг ўзи тўғрилаши мумкин. Чунки Maple учун a*sin(x) ҳам a*sin(b) ҳам тўғри ва у бундай хатоликни аниқлай олмайди.

Яна бир мисолни кўрайлик. Агар X ни Y ва Z ларнинг кўпайтмасига бўлиш зарур бўлиб ифодани X/Y*Z кўринишида ёзсак Maple аввал X ни Y га бўлади ва натижани Z га кўпайтиради ва хатолик юз беради. Буни аввалги ифодани ҳисоблаш оператори (%) ёрдамида текшириб олишимиз мумкин:

> **X/Y*Z:**

> **%;**

$$\frac{X\,Z}{Y}$$

Демак ифодани **X/(Y*Z)** кўринишида ёзишимиз керак:

> **X/(Y*Z):**

> **%;**

$$\frac{X}{Y\,Z}$$

Бундай хатолар семантик хатолар деб аталади. Агар биз аввалги ифодани ҳисоблаш оператори (%) ёрдамида текшириб олмаганимизда хатолик аниқланмасдан қолган бўлар эди. Шунинг учун ифоданинг сўнгига икки нуқтани фақат ифодада хато йўқлигига тўлиқ ишонч бўлсагина қўйиш керак. Акс ҳолда нуқта вергулдан фойдаланиш керак.

Maple синтаксис хатоларни унга бириктирилган синтаксис анализатор ёрдамида аниқлайди. Масалан, функциянинг номи нотўғри киритилган бўлса ҳисоблашлар бажарилмайди. Maple чиқариш сатрида киритилган ифодани қайта ёзади:

> **cas(1.0);**

cas( 1.0 )

Ушбу мисолда cos нинг ўрнига cas ёзилган. Maple фойдаланувчи томонидан янги функционал боғланиш киритилди деб ҳисоблайди ва уни чиқариш сатрида қайтадан ёзади. Бошқа бир ҳолни кўрайлик. Агар cos тўғри ёзилиб, 1.0 ҳақиқий сондаги нуқта ўрнига вергул ёзилса:

> **cos(1,0);**

Error, (in cos) expecting 1 argument, got 2

"Хатолик, (cos да) кутилди 1 аргумент, олинди 2" деган хотолик тўғрисида ахборот чиқади.

Бу ҳолда Maple иш бириктирилган функция cos билан олиб борилаётганини, у фақат битта аргументга эга бўлиши мумкинлигини, 1,0 ёзуви эса вергул билан ажратилган иккита бутун сон эканлигини билади ва хатолик тўғрисида ахборот беради. Хатоликлар тўғрилангандан кейин ҳисоблаш натижасини олишимиз мумкин:

> **cos(1.0);**

.5403023059

Кейинги мисолда операторлар орасидаги ажратувчи белги (икки нуқта ёки нуқта вергул) тушириб қолдирилган:

> **restart:x:=2:y:=3 |z:=4:a=x+y+z;**

Error, missing operator or `;` (Хатолик, оператор ёки `;` тушириб қолдирилган)

Бунда Maple хатони аниқлашдан ташқари нима тушириб қолдирилганлигини айтиб беришга ҳам ҳаракат қилган. Киритиш маркери эса хатолик бор жойга келади.

Кўп учрайдиган хатолардан яна бири – учта * белгисининг ёнма-ён келиши:

> **2** |*3*sin(1.);**

Error, `*` unexpected (Хатолик, `*` кутилмаганда)

Maple бу ерда учинчи * (кўпайтириш оператори) ортиқча эканлигини кўрсатмоқда.

Сичқончанинг ўнг тугмасини босганда ҳосил бўладиган контекст менюдан ячейкаларнинг ҳолатини бошқариш учун фойдаланиш мумкин. Агар киритиш ячейкасининг устида сичқончанинг ўнг тугмаси босилса ҳосил бўладиган контекст меню қуйидаги учта командани ўз ичига олади:

Standard Math — киритилган ифодаларни математик шаклда кўрсатиш режимини улайди ва узади;

Maple Input — киритиш ячейкаси математик ёки матнли шаклга ўтказади;

Execute — ячейкани бажарилиш режимига ўтказади.

Бундан ташқари контекст менюда алмашиниш буферининг ҳолатига боғлиқ ҳолда Cut, Copy ва Paste командалари ҳам бўлиши мумкин .

Сичқончанинг чап тугмаси бошқариш фокусини узатиш, киритиш маркерини силжитиш ва ҳужжатнинг айрим қисмларини ажратиш учун ишлатилади.

Maple символли (аналитик) ҳисоблашлар учун катта имкониятларни беради. Қуйидаги содда мисолни кўрайлик. Учта параллел уланган R1, R2 ва R3 резисторларнинг умумий қаршилиги R0 ни аниқлаш зарур бўлсин. Аввал R0 учун тенгламани киритамиз:

```
> eq:=1/R0=1/R1+1/R2+1/R3;
```

$$eq := \frac{1}{R0} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}$$

Кейин тенгламаларни ечиш функцияси solve ёрдамида R0 учун умумий ҳолдаги аналитик ифодани оламиз:

```
> R0:=solve(eq,R0);
```

$$R0 := \frac{R1\ R2\ R3}{R2\ R3 + R1\ R3 + R1\ R2}$$

Энди R1, R2 ва R3 нинг конкрет қийматлари, масалан R1:=1, R2=2 ва R3=3 учун R0 нинг қийматини ҳисоблашимиз мумкин:

```
> R1:=1:R2:=2:R3:=3:R0;
```

$$\frac{6}{11}$$

ёки

```
> evalf(%);
```

.5454545455

Тригонометрик ифодаларни соддалаштириш функцияси simplify ёрдамида ўзгартириш:

```
> eq1:=cos(x)^5+sin(x)^4;
```

$eq1 := \cos(x)^5 + \sin(x)^4$

```
> simplify(eq1);
```

$\cos(x)^5 + 1 - 2\cos(x)^2 + \cos(x)^4$

Ҳосилани символ кўринишда аниқлаш:

```
> y=cos(x)^5+sin(x)^4;
```

$y = \cos(x)^5 + \sin(x)^4$

```
> dy/dx=diff(cos(x)^5+sin(x)^4,x);
```

$$\frac{dy}{dx} = -5\cos(x)^4 \sin(x) + 4\sin(x)^3 \cos(x)$$

Интегрални символ кўринишда ҳисоблаш:

```
> Int(1/sqrt(1-x^2),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

```
> int(1/sqrt(1-x^2),x=0..1);
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

```
>Int(1/sqrt(1-x^2),x=0..1)=int(1/sqrt(1-
x^2),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\pi$$

Интегрални математик кўринишда чиқариш учун ишлатиладиган Int функциясига эьтибор беринг. У int функциясининг инерт шакли бўлиб ҳисобланади. Ҳамма инерт функциялар бош ҳарф билан бошланади, одатдаги функциялар эса кичик ҳарфлар билан ёзилади.

Тенгламаларни ечиш учун solve функциясидан фойдаланилади. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини ечишни кўрайлик:

x+y+2z=5

x-3y=3

y+7z=9

Тенгламалар системасини Maple қоидаларига асосан киритамиз ва Enter ни босиб тўғри ёзилганлигини текшириб оламиз

```
> eqs1:={x+y+2*z=5,x-3*y=3,y+7*z=9};
```

$$eqs1 := \{x+y+2\,z=5,\ x-3\,y=3,\ y+7\,z=9\}$$

Тенгламалар системасини ечиш учун solve функциясидан фойдаланамиз

```
> solve(eqs1,{x,y,z});
```

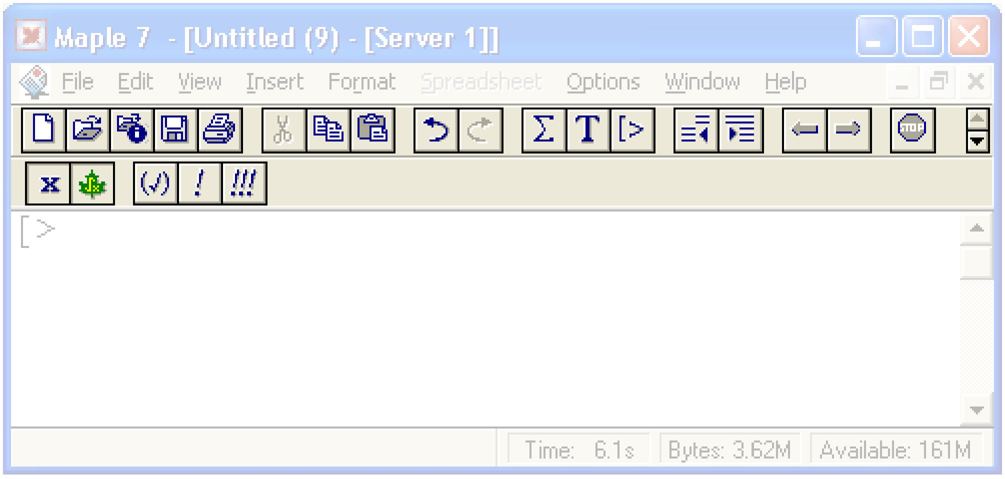
$$\{z=\frac{17}{13},\ y=\frac{-2}{13},\ x=\frac{33}{13}\}$$

Юқоридаги тенгламалар системасини бошқача йўл билан ҳам ечиш мумкин

```
> solve({x+y+2*z=5,x-3*y=3,y+7*z=9},{x,y,z});
```

$$\{z=\frac{17}{13},\ y=\frac{-2}{13},\ x=\frac{33}{13}\}$$

**Асбоблар панели контекст менюси билан ишлаш.** Асбоблар панели (Tool Bar) 5-расмда кўрсатилган. У Windows-иловалар учун типик бўлган белгиланишларга эга.




5-расм. Асбоблар панели

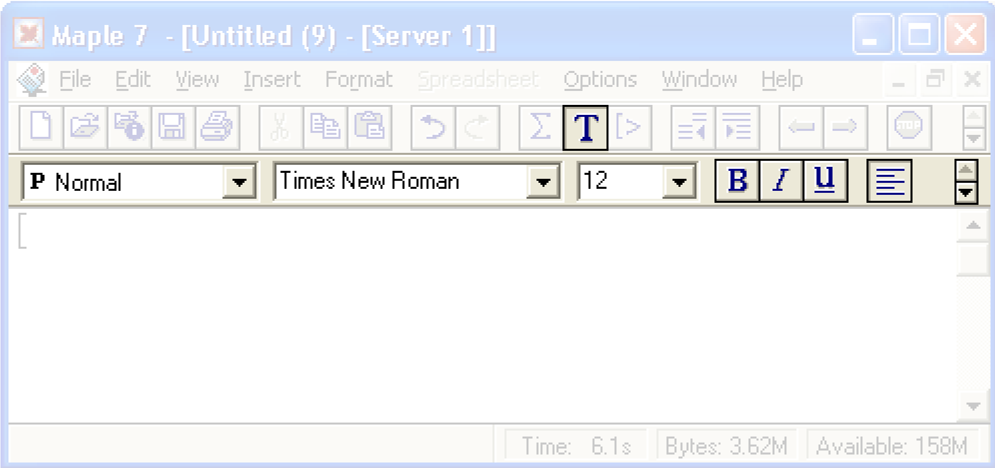
Контекст асбоблар Context Bar панели текстларни форматлаш, киритилаётган математик ифодаларнинг ва графикларнинг параметрларини ўрнатиш ишларини осонлаштириш учун хизмат қилади. Унинг таркиби контекст-боғлиқ бўлиб киритиш маркерининг жорий ҳолати ва ажратилган элементларга боғлиқ ҳолда ўзгариб туради.

Контекст панел изоҳ матни киритилаётганда қуйидаги элементларни ўз ичига олади (6-расм):

шрифтлар ва символларнинг ўлчамлари ва турларини белгилаш учун рўйҳатлар ва тугмалар;

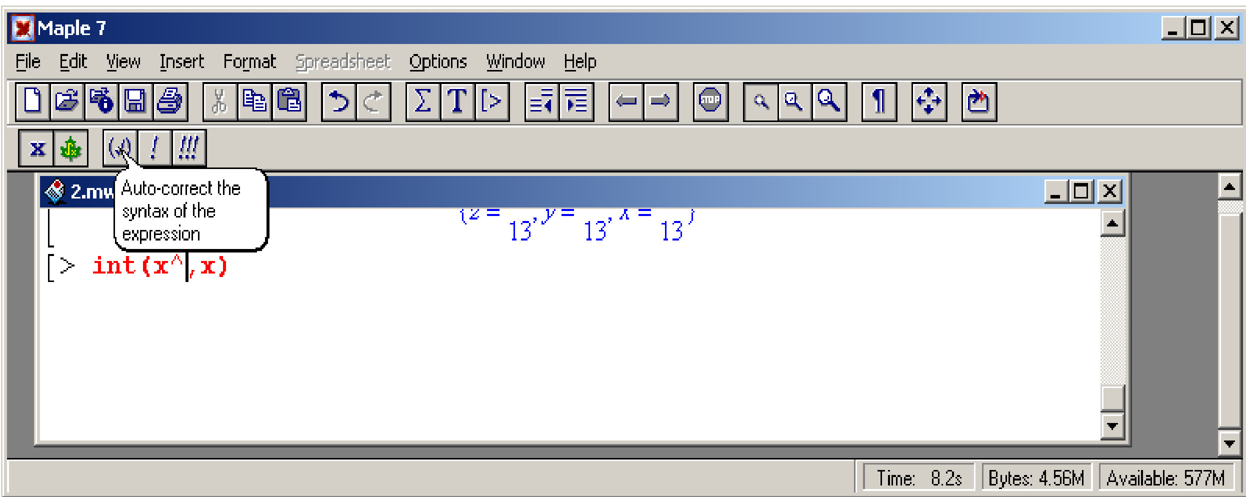
матнни текислаш учун тугмалар;

ҳужжатни тўлиғича ишлатиш командасининг тугмаси.




6-расм. Изоҳ матни учун контекст асбоблар панели

Киритиш маркери киритиш сатрининг устида бўлганда ва сичқончанинг кўрсаткичи синтаксисни текшириш (Auto-correct – автокоррекция) тугмасининг устига олиб келингандаги контекст панелнинг кўриниши 7-расмда кўрсатилган.




7-расм. Контекст панелнинг кўриниши

Айтайлик интеграл ҳисобланаётганда киритилаётган x^n ифодадаги даража кўрсаткичи n тушуриб қолдирилган:

> int(x^,x)

Агар автокоррекция тугмасини боссак киритилган ифода қуйидагича ўзгаради:

> int(x^ %? ,x)

Maple даража кўрсаткичини киритиш зарурлигини кўрсатаяпди. Даража кўрсаткичи n киритилгандан кейин тўғри жавобни оламиз:

```
> int(x^n  ,x);
```

$$\int x^n\,dx \qquad \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$$

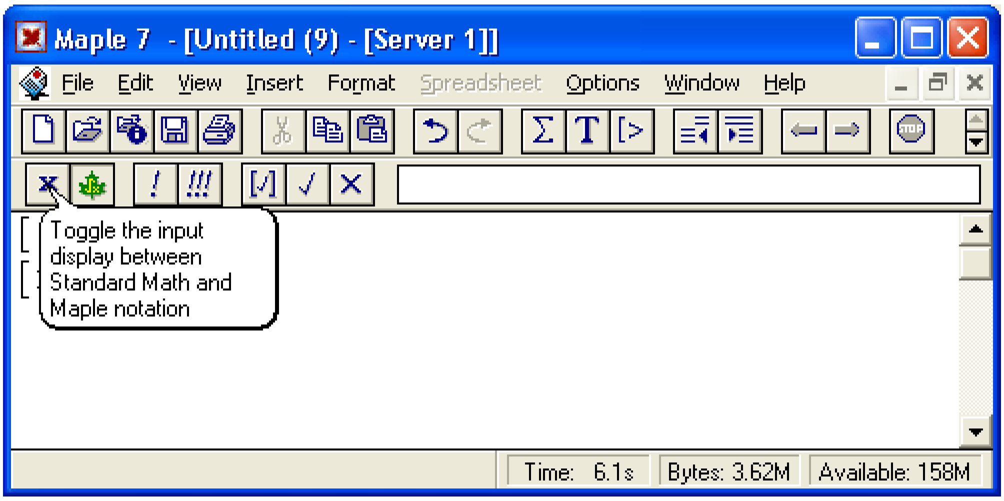
Яна бир мисолни кўрайлик. Бу сафар қавс тушуриб қолдирилган:

```
> int(x^ n  ,x;
```

Агар автокоррекция тугмасини боссак Maple автоматик тарзда хатони тўғрилайди, яьни тушуриб қолдирилган қавсни ёзиб қўяди:

```
> int(x^ n  ,x);
```

Шундай қилиб, автокоррекция тугмаси Maple Input форматида киритилаётган ифодаларни оператив назорат қилиш ва қўпол хатоларини тўғрилаш учун фойдали бўлиши мумкин.




8-расм. Ифодаларни стандарт математик шаклга ўтказиш тугмаси

Ифодаларни Maple шаклидан стандарт математик шаклга (ёки тескарисига) ўтказиш тугмаси 8-расмда кўрсатилган. Стандарт математик шаклга ўтилганда контекст менюнинг ўнг томонида киритиш майдони ҳам ҳосил бўлади. Унга киритилган ифодалар ҳамда ўзгартиришлар киритиш сатрида ҳам ўз аксини топади.

## 1.2. Файллар ва хужжатлар билан ишлаш

Maple тизимида ҳужжатлар билан notebooks («блокнотлар» ёки «ён дафтарчалар») услубида ишланади. Ҳужжатлар матнли ва формулали блоклар, ҳисоблаш натижалари, ҳар хил турдаги графиклар ва бошқа компаненталарни ўз ичига олиши мумкин. Ҳужжатлар файллар кўринишида ташқи хотира қурилмаларида (қаттиқ, юмшоқ ёки компакт-дискларда сақланади).

Maple тизимида турли форматдаги файллардан фойдаланилади (файлнинг номи шартли равишда * белги билан кўрсатилган):

*.ms — график интерфейсли тизимлар (Windows/ Macintosh) учун ҳужжатларнинг файллари;

*.msw — ҳужжатларнинг файллари (Worksheets);

*.txt — матнли файллар (шу жумладан Maple-матн формати);

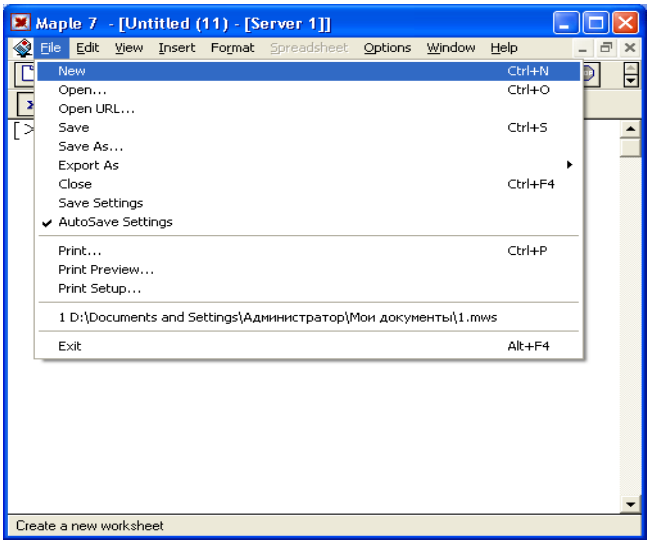
*.tex — LaTeX форматидаги файллар;

*.ind ва *.lib — библиотекалар файллари;

*.т — ички Maple-тилининг файллари.

File менюси

File менюси файллар билан ишлаш учун асосий амалларни ўз ичига олади (9-расм):




9-расм. File менюси

New (Ctrl+N) – янги ҳужжат яратиш;

Open (Ctrl+0) – мавжуд ҳужжатни очиш;

Open URL - URL-адресни очиш;

Save (Ctrl+S) – актив ҳужжатни сақлаш;

Save As — актив ҳужжатни янги ном билан сақлаш ;

Export As — файлни экспорт қилиш;

Close (Ctrl+F4) — актив ҳужжат ойнасини ёпиш;

Save Settings — Maple конфигурациясини (ўрнатмаларини) ёзиб олиш;

AutoSave Settings — Maple конфигурациясини автоматик тарзда ёзиб олиш.

Print Preview — чоп этишдан олдин ҳужжатнинг қандай чоп этилишини кўриш;

Print (Ctrl+P) — ҳужжатни чоп этиш;

Printer Setup — принтернинг параметрларини ўрнатиш;

Exit (Alt+F4) - Maple тизимидан чиқиш.

Print (Ctrl+P) командаси ҳужжатни тўлиғича чоп этиш имкониятини беради. Чоп этиш график режимда амалга оширилиши сабабли тезлиги катта бўлмайди. New командасидан янги ҳужжат очиш учун фойдаланилади. Очилган ҳужжатга автоматик тарзда Untitled (N) номи берилади (бу ерда N-бутун сон). Бу номни Save As командаси ёрдамида керакли номга алмаштириш мумкин.

Maple тизими файлларни қуйидаги форматларда сақлаш имкониятини беради:

Maple Worksheet (*.rnws/*.ms) — Maple форматида;

Maple Text (*.txt) — Maple матн форматида;

HTML Source (*.html) — HTML форматида;

Text (*.txt) — матнли форматда;

LaTeX Source (*.tex) — LaTeX форматида.

Export As командаси ёрдамида файлларни қуйидаги форматларга экспорт қилиш мумкин:

Maple Text (*.txt);

HTML (*.html);

HTML with MathML (*.html);

Plain Text (*.txt);

Rich Text Format (*.rtf);

LaTeX (*.tex).

Графикларни Maple DFX, EPS, GIF, JPEG, POV, WMF ёки BMP форматларда сақлаш имкониятини беради.

## Edit менюси

Edit менюси (10-расм) бир неча гуруҳга бўлинувчи таҳрирлаш амалларини ўз ичига олади. Биринчи гуруҳга қуйидаги амаллар киради:

Undo (Ctrl+Z) — сўнгги таҳрирлаш амалини бекор қилади;

Redo (Ctrl+Y) — сўнгги бекор қилинган амални тиклайди;

Cut (Ctrl+X) — ажратилган фрагментни қирқиб олиб алмашиниш буферига жойлайди;

Copy (Ctrl+C) — ажратилган фрагментнинг нусхасини алмашиниш буферига ўтказади;

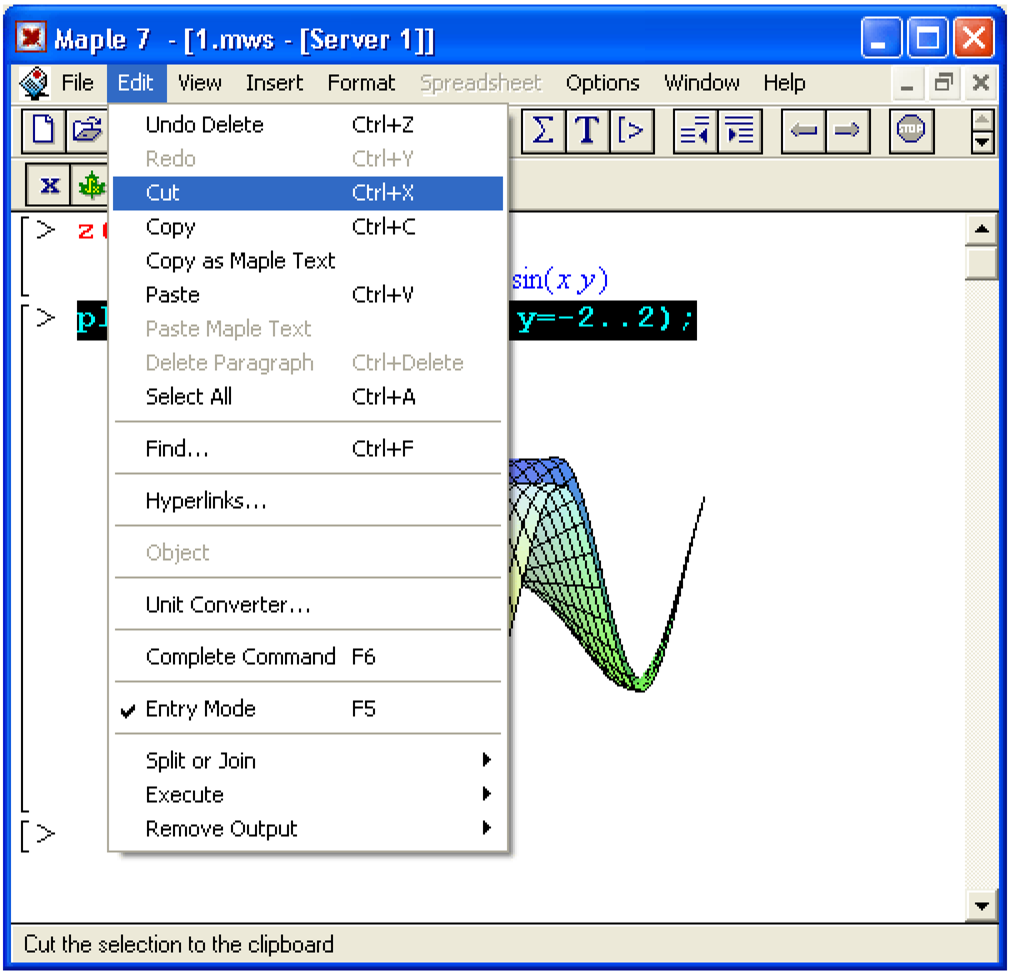
Copy As Maple Text — ажратилган фрагментнинг нусхасини Maple-матн форматида алмашиниш буферига ўтказади;

Paste (Ctrl+V) — алмашиниш буферидаги фрагментни хужжатга жойлаштиради;

Paste Maple Text — алмашиниш буферидаги фрагментни Maple-матн форматида хужжатга кўяди;

Delete Paragraph (Ctrl+Del) - параграфни (сатрни) олиб ташлайди;

Select All (Ctrl+A) — хужжатнинг хамма обектларини ажратади.




10-расм. Edit менюси

Кейинги гурухга куйидаги амаллар киради:

Find (Ctrl+F5) — кидириш ойнасини чикаради;

Hyperlinks — редактирование гиперссилкаларни тахрир килиш;

Object — обьектларни тахрир килиш;

Unit Converter — бир ўлчов бирлигидан иккинчисига ўтказиш;

Complete Command — тугалланмаган жорий Maple-тилдаги команданинг қандай тугаллаш кераклиги тўғрисида йўл-йўриқ бериш;

Entry Mode (F5) — киритиш режимини ўзгартириш (бажарилмайдиган матн режимидан математик ифода режимига ўтиш ёки аксинча).

Сўнгги гуруҳ командалари ҳужжатнинг ячейкалари ва секциялари билан ишлаш командаларини ўз ичига олувчи ост менюларни очади:

Split or Join — обьектларни ажратиш ёки бирлаштириш;

Execute — ҳужжатнинг ажратилган қисмини ёки ҳаммасини ишга тушуриш;

Remove Output — ҳужжатнинг ажратилган қисмини ёки ҳаммасини чиқаришни бекор қилиш.

Maple тизимида обьектларни бир ойнадан иккинчи ойнага суриб ўтказиш (Drag and Drop) имконияти ҳам мавжуд. Бунинг учун ажратилган обьектлар сичқончанинг чап тугмаси босилган ҳолда бошқа ойнага суриб ўтказилади. Агар ўтказиш вақтида Ctrl клавишаси босиб турилса обьектларнинг нусхалари ўтади, ўзлари эса эски жойларида қоладилар.

Split or Join командаси қуйидаги ост менюларни очади:

Split Execution Group (F3) — сатрни иккига бўлиш;

Join Execution Group (F4) — қўшни сатрларни бирлаштириш;

Split Section (Shift+F3) — секцияни иккига бўлиш;

Join Section (Shift+F4) — қўшни секцияларни бирлаштириш.

Execute командаси иккита командани ўз ичига олувчи ост менюга эга:

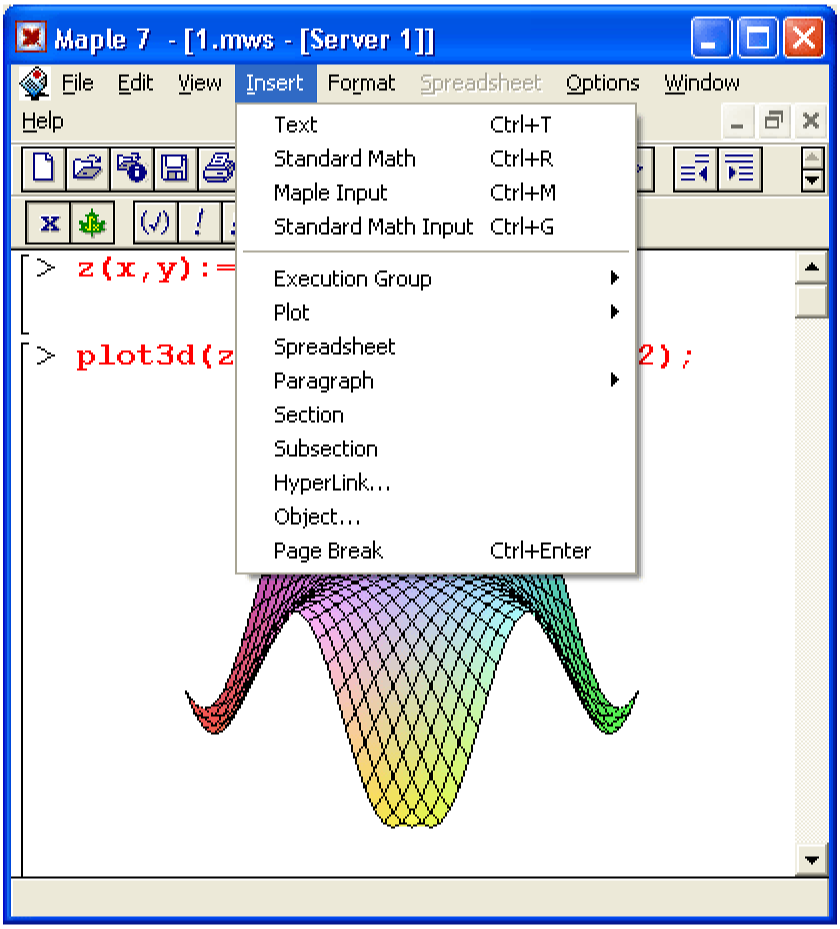
Selection — ҳужжатнинг ажратилган қисмини ишга тушуриш;

Worksheet — ҳужжатн тўлиғича ишга тушуриш;.

Ушбу командаларга алртернатив бўлган Enter клавишасини босиш йўли билан фақат битта сатрни ишга тушуриш мумкин. Ҳужжат катта бўлганда бундай йўл кўп вақтни олади.

## Insert менюси

Insert менюси (11-расм) таҳрир қилинаётган ҳужжатга ҳар хил обьектларни қўйиш командаларини ўз ичига олади:




11-расм. Insert менюси

Text (Ctrl+T) — матн киритиш;

Standard Math (Ctrl+R) — бажарилмайдиган математик ифодаларни киритиш;

Maple Input (Ctrl+M) — Maple-форматда бажариладиган ифодаларни киритиш;

Standard Math Input (Ctrl+G) — киритиш сатрига ифодаларни математик шаклда киритиш;

Execution Group — бажариладиган ячейкани киритиш маркеридан олдин ёки кейин қўйиш;

Plot — икки ёки уч ўлчамли графикнинг бўш шаблонини қўйиш;

Spreadsheet — электрон жадвални қўйиш;

Paragraph — матн майдонини (абзацни) қўйиш;

Section — секция кнопкасини қўйиш;

Subsection — ост секция кнопкасини қўйиш;

HyperLink — гиперссилка қўйиш;

Object — боғланган ёки ўзлаштирилган обьектни қўйиш;

Page Break — саҳифаларни ажратиш.

Text командасидан кейин фақат изоҳ матнини киритиш мумкин. Standard Math командасидан кейин савол белгиси чиқади ва бажарилмайдиган математик ифодаларни киритилади. Enter босилгандан кейин киритилган ифода киритиш сатрида кўринади.

Maple Input командаси жорий сатрни бажариладиган математик ифодалар киритиладиган сатрга айлантиради. Сатрнинг бошланишида киритишга таклиф белгиси > ҳосил бўлади ва бажариладиган ифодаларни киритишни бошлаш мумкин. Агар контекст панелдаги × белгили кнопка босилса киритилган ифода табиий математик кўринишга ўтади. Энди киритишни фақат контекст асбоблар панелидаги киритиш майдонида давом эттириш мумкин. Enter клавишаси босилгандан кейин киритилган ифода киритиш сатрида ҳосил бўлади.

Execution Group командаси иккита ост менюга эга:

Before Cursor (Ctrl+K)— бажариладиган ячейкани киритиш маркеридан олдин қўйиш;

After Cursor (Ctrl+J)— бажариладиган ячейкани киритиш маркеридан кейин қўйиш.

Ушбу командалар ёрдамида такомиллаштирилаётган ҳужжатнинг исталган жойига янги киритиш ячейкаларини жойлаштириш мумкин.

Insert Spreadsheet командаси ёрдамида ҳужжатга бўш электрон жадвални қўйиш мумкин. Электрон жадвал сатр ва устунлар бўйича адресларга эга бўлган икки ўлчамли ячейкалар массиви кўринишида бўлади. Юқори чап томондаги ячейка A1 адресга эга, бу ерда A-устун рақами ва 1-сатр рақами.

Insert Spreadsheet командаси бажарилганда ҳужжатдаги маълумот киритилмаган ҳамма ячейкаларга бўш электрон жадвални қўйилади. Электрон жадвални махсус командалар ёрдамида ёки қўлда тўлдириш мумкин. Бунинг учун тўлдириладиган ячейка сичқончанинг чап тугмаси ёрдамида белгиланади ва контекст менюда ҳосил бўлган киритиш майдонига зарур ифодалар ёзилади. кейин Enter клавишаси босилса ёзувлар ячейкада кўринади.

Агар киритиш маркери электрон жадвал ячейкаларидан бирида бўлса Spreadsheet менюсига кириш мумкин бўлади.

Spreadsheet менюси электрон жадвал билан ишлаш командаларига эга:

Evaluate Selection — ажратилган ячейкадаги ифодаларни ҳисоблаш;

Evaluate Spreadsheet — Жадвалнинг ҳамма ячейкаларидаги ифодаларни ҳисоблаш;

Row — сатрлар билан ишлаш (қўйиш, йўқотиш ва ҳ.к..);

Column — устунлар билан ишлаш (қўйиш, йўқотиш ва ҳ.к..);

Import data — маълумотларни бошқа дастурлардан олиш (масалан, MATLAB дан);

Export data — маолумотларни бошқа дастурларга экспорт қилиш;

Properties — ячейканинг хоссаларини кўриш;

Show Border — жадвалнинг ҳошиясини (рамкасини) кўриш;

Resize to Grid — жадвалнинг ўлчамларини ўзгартириш.

Агар жадвал актив (курсор жадвалнинг ичида) бўлганда сичқончанинг ўнг тугмаси босилса Юқорида кўриб ўтилган Spreadsheet менюси чиқади.

Maple жадвалларида матнли ва сонли маьлумолардан ташқари символли маълумотлар (формулалар) билан ҳам ишлаш мумкин.

Жадвал актив бўлганда контекст меню (асбоблар панелининг пастида ўнг томонда тўртта кнопкага эга бўлади. Улар қуйидагилар (чапдан ўнгга):

Fill a range of cells — жадвал ячейкаларини автоматик равишда тўлдириш;

Evaluate all stale cells in the spreadsheet — жадвалнинг ҳамма ячейкаларини ишга тушуриш;

Accept the input and evaluate it — киритиш майдонига ёзилган маълумотларни киритиш ва бажариш;

Restore input to the previous value — ячейканинг аввалги қийматини тиклаш.

### 1.3. Maple тизимида маълумотлар турлари

Maple-тили бир вақтнинг ўзида ҳам тизим билан мулоқот қилиш (кириш) тили ҳам дастурлаш тили бўлиб ҳисобланади. Математик масалаларни дастурлаш бўйича Maple-тили энг кучли дастурлаш тилларидан биридир.

Maple-тилининг алфабити 26 лотин ҳарфлари 10 араб рақамлари ва 32 махсус символлардан иборат. Махсус символларга арифметик операторлар +,-,*,/, даражага кўтариш белгиси * ва бошқалар киради. Махсус символларга қуйидаги тилнинг синтаксиси элементлари ҳам киради:

% — аввалги амалнинг натижасини сақловчи тизим ўзгарувчиси;

: — ҳисоблаш натижасини чиқаришни тўхтатиб турадиган ифода фиксатори;

; — — ҳисоблаш натижасини чиқаришни таьминлайдиган ифода фиксатори; ;

# — дастурий изоҳнинг кўрсаткичи;

'' — сатр чеклагичи (масалан, 'string');

:= — ўзлаштириш оператори (масалан, x:=5);

: ; — бўш оператор;

:: — ўзгарувчи турининг кўрсаткичи (масалан, n::integer ёки z::complex);

\ — тескари бўлиш белгиси, контекстга боғлиқ ҳолда вазифаси ўзгариб туради.

Заҳирага олинган сўзлардан шартли ифодалар, цикллар, процедуралар, ва бошқарувчи командаларни ҳосил қилиш учун фойдаланилади. Maple тизимида 42 та заҳирага олинган сўз бор (3.1-жадвал).

3-1-жадвал

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| and | break | By | catch | description |
| do | done | el if | else | End |
| error | export | fi | finally | For |
| from | global | if | in | intersect |
| local | minus | mod | module | Next |
| not | od | option | options | Or |
| proc | quit | read | return | Save |
| stop | then | to | try | Union |
| use | while | | | |

Maple умуман олганда математик ифодалар билан иш кўрувчи тизимдир. Математик ифодалар математик қонунлар ва ўзгартириш қоидаларига асосан баҳоланиши ва ўзгартирилиши мумкин. Масалан ифодаларни соддалаштириш функцияси simplify кўплаб математик ифодаларни соддалаштириши мумкин:

```
> restart:simplify(sin(x)^2+cos(x)^2);
```

1

```
> simplify((x^2-2*x*a+a^2)/(x-a));
```

$x - a$

ёки математик нотацияда

> $restart;\ \mathrm{simplify}\left(\sin(x)^2 + \cos(x)^2\right)$

1

> $\mathrm{simplify}\left(\frac{x^2 - 2\,x\,a + a^2}{x - a}\right)$

$x - a$

Ифодаларни киритиш Enter клавишасини босиш билан тугалланади. Бунда киритиш маркери сатрнинг ҳар қандай позициясида бўлиши мумкин, сўнггида туриши шарт эмас. Агар киритишни янги сатрга ўтказиш керак бўлса Shift ва Enter клавишалари биргаликда босилади. Сессиянинг сўнггидан ҳисоблаганда биринчи, иккинчи ёки учинчи ифодани чақириш учун битта, иккита ёки учта % белгиси ишлатилади:

```
> a:b:c:
> %;
c
> a:b:c:
> %%;
b
> a:b:c:
> %%%;
a
> 3+6:
> %;
9
> %%+5;
14
```

Жорий ҳужжат билан ишлашни тугаллаш учун киритиш сатрига киритилган quit, done ёки stop командалардан бирини бажариш етарли.

```
> stop;
```

Maple ифодани учратганда уни баҳолайди, яьни ҳисоблаш имкониятларини ўрнатади. Агар ифода скаляр ўзгарувчи бўлса унинг қиймати чиқариш ячейкасида кўрсатилади. Мураккаброқ турдаги ёки аниқланмаган ўзгарувчиларнинг қийматлари эмас, фақат номлари қайтарилади.

Ҳар хил турдаги ифодаларни баҳолаш учун кўплаб функциялар мавжуд. Уларнинг асосийлари қуйидигилар:

eval (array) — array массивнинг ҳисобланган қийматларини қайтаради;

evalf(expr, n) — expr ифодани ҳисоблайди ва натижани ўнли нуқтадан кейин n та рақам бўлган сирғалувчи нуқтали сон кўринишида қайтаради;

eval hf(expr) — expr ифодани ҳисоблайди ва натижани ишлатилаётган компютерга тегишли аниқликда қайтаради;

evalf(int(f, x=a..b)) — аниқ интегрални (f,x=a. .b) баҳолайди ва қийматини қайтаради;

evalf(Int(f, x=a..b)) — инерт функция билан берилган Int(f,x=a. .b) аниқ интегрални баҳолайди ва қийматини қайтаради;

evalf(Int(f. x=a..b, digits, flag)) — Юқоридагига ўхшаш, лекин аниқ интегралнинг қийматини ўнли нуқтадан кейинги рақамлар сони digits ва ҳисоблаш усулининг спецификацияси flag билан биргаликда қайтаради;

evalm(mexpr) — mexpr матрицавий ифоданинг қийматини ҳисоблайди ва қайтаради;

evalb(bexpr) — мантиқий ифоданинг қийматини ҳисоблайди ва қайтаради;

evalc(cexpr) — комплекс ифоданинг қийматини ҳисоблайди;

evalr (expr, ampl) — интервалли ифодаларнинг қийматини баҳолайди ва ҳисоблайди (функция библиотекадан чақирилиши керак);

shake(expr, ampl) — интервалли ифодани ҳисоблайди.

Агар evalf функциянинг n параметри берилмаган бўлса у n=10 деб ҳисобланади. Ифодаларда константалар (масалан Pi, exp(1)) ва функциялар (масалан, exp, ln, arctan) ишлатилиши мумкин. Комплекс ифодаларда (mexpr) комплекс операндалардан (a + I*b) ташқари одатдаги математик функциялар (3.1-жадвал) ҳам ишлатилиши мумкин:

3.1-жадвал

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | Cos | tan | CSC | sec | cot |
| sinh | Cosh | tanh | csch | sech | coth |
| arcsin | Arccos | arctan | arccsc | arcsec | arccot |
| arcsinh | Arccosh | arctanh | arccsch | arcsech | arccoth |
| exp | In | •sqrt | * | abs | conjugate |
| polar | argument | signura | csgn | Re | Im |
| Ei | LambertW | dilog | surd | | |

Ифодаларни баҳолаш ва ҳисоблашга мисоллар:

```
> eval(sin(1));
```

sin(1)

```
> evalf(sin(1));
```

.8414709848

```
> evalf(sin(1),2);
```

.84

```
> evalhf(sin(1));
```

.841470984807896505

```
> A:=[[2,5],[7,3]];
```

A := [[2, 5], [7, 3]]

```
> eval(A);
```

[[2, 5], [7, 3]]

```
> evalm(10*A+3);
```

$$\begin{bmatrix} 23 & 50 \\ 70 & 33 \end{bmatrix}$$

```
> B:=[[1,2],[3,4]]:
> evalm(A&*B);
```

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 16 & 26 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(A/B);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-19}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

```
> 4<7;
```

4 < 7

```
> evalb(4<7);
```

true

```
> readlib(shake):evalr(min(2,sqrt(3)));
```

$\sqrt{3}$

Maple якка ифодалардан ташқари уларнинг кетма-кетлиги билан ҳам ишлаши мумкин. Ифодаларнинг кетма-кетлиги деб бир-биридан вергул билан ажратилган ва фиксатор (: ёки ;) билан тугалланган ифодаларнинг қаторига айтилади, масалан:

```
> x,y,z,x-y,24.8,sin(Pi/6);
```

x, y, z, x-y, 24.8, 1/2

Кетма-кет ифодаларни автоматик равишда форматлаш учун махсус оператор $ қўлланилади. Ушбу оператордан кейин ифодалар сони ёки уларни форматлаш чегаралари берилади:

```
> x,y,z,x-y,24.8,sin(Pi/6);
```

x, y, z, x-y, 24.8, 1/2

```
> x+y$3;
```

x+y, x+y, x+y

```
> $1..7;
```

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

```
> (n**3)$n=0..6;
```

0, 1, 8, 27, 64, 125, 216

```
> Y2[i]$i=1..7;
```

$Y2_1, Y2_2, Y2_3, Y2_4, Y2_5, Y2_6, Y2_7$

Ифодалар кетма-кетлигини ҳосил қилиш учун seq функциясидан ҳам фойдаланиш мумкин:

> `seq(cos(a),a=1..6);`

cos(1), cos(2), cos(3), cos(4), cos(5), cos(6)

> `evalf(seq(cos(a),a=1..6));`

.5403023059, -.4161468365, -.9899924966, -.6536436209, .2836621855, .9601702867

> `seq(cos(a*2.),a=1..6);`

-.4161468365, -.6536436209, .9601702867, -.1455000338, -.8390715291, .8438539587

> `evalf(seq(f(2.*180/Pi),f=[sin,cos,tan,loq,exp]));`

.9970697311, .7649804839e-1, 13.03392377, loq(360./Pi), .5840926569e50

> `evalf(seq(f(30.*Pi/180),f=[sin,cos,tan,loq,exp]));`

.5000000002, .8660254037, .5773502695, loq(.1666666667*Pi), 1.688091795

Maple оддий (0,1,284,-67 ), рационал (3/46-56/789 ), мантиссаси ва тартибига эга бўлган ҳақиқий (1.23E5, 123.4567E-10) сонлар билан ишлайди. Ўнлик нуқтанинг мавжудлиги ҳақиқий соннинг белгиси бўлиб ҳисобланади. Сонлар билан амалларга мисоллар қуйида келтирилган:

> `-98+(-734/47);`

-5340/47

> `-98.+(-734)/47;`

-113.6170213

> `1/5;`

1/5

> `1./5;`

.2000000000

> `1/5.;`

.2000000000

> `52./3E18;`

.1733333333e-16

```
> sqrt(-2.7)+3;
```

3.+1.643167673*I

Келтирилган мисоллардан сонларни киритиш ва чиқариш қуйидаги хусусиятларга эга эканлиги кўриниб турибди:

мантиссанинг бутун қисмини каср қисмидан ажратиш учун нуқтадан фойдаланилади;

нол мантисса кўрсатилмайди (сон ажратувчи нуқтадан бошланади);

комплекс сонларнинг мавҳум қисми мавҳум бирнинг символи I га кўпайтирилган ҳолда кўрсатилади (I = $\sqrt{-1}$) .

Ҳақиқий сондаги ўнли нуқтадан кейин чиқариладиган рақамлар сонини тизим ўзгарувчиси Digits ёрдамида бошқариш мумкин:

```
> Digits:=2:5./9;
```

.56

```
> Digits:=25:5./9;
```

.5555555555555555555555556

Сатр константалари тескари апострфнинг ичига олинган ихтиёрий символлардан иборат бўлади:

```
> z[1,2]=solve(a*z^2-8,z),`Тенгламани ечиш. Бу сатр константаси`;
```

$$z_{1,\,2} = \left(2\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}},\,-2\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\right),\ \textit{Тенгламани ечиш. Бу сатр константаси}$$

Maple тизимининг ядросига қуйидаги константалар бириктирилган:

false — мантиқий қиймат "ёлғон";

gamma — Эйлер константаси, 0.5772156649...;

infinity — мусбат чексизлик (манфий чексизлик -infinity кўринишида берилади);

true — мантиқий қиймат "рост";

Catalan — Каталана константаси, 0.915965594...;

I — мавҳум бир(-1 дан квадрат илдиз);

Pi = 3.141...

Ушбу рўйҳатда натурал логарифмнинг асоси e кирмаган. Унинг ўрнида exp(1.) ишлатилади:

```
> exp(1),exp(1.);
```

exp(1), 2.718281828

Maple тизимида ўзгарувчилар бутун сонли ( (integer), рационал (rational), ҳақиқий (real), комплекс (complex), сатр (string), символ (математик ифода), рўйҳат ва ҳ.к. турларда бўлиши мумкин. Ўзгарувчиларнинг турини яққол кўрсатиш учун қуйидаги конструкция ишлатилади:

name::type

бу ерда name — ўзгарувчининг номи (идентификатор) , type — ўзгарувчининг тури.

Ўзгарувчиларнинг номлари (идентификаторлари) ҳарф билан бошланиши ва ягона бўлиши керак. Идентификаторнинг узунлигига амалда чеклашлар йўқ (аникроқ айтганда у 524 275 символдан ортмаслиги керак. Номлар тескари апострофнинг ичида ҳам берилиши мумкин:

```
> f1:=45;f2:=88.9;f3:=`O'zgaruvchi`;
```

$f1 := 45$

$f2 := 88.9$

$f3 := O'zgaruvchi$

```
> `f1`;`f2`;`f3`;
```

45

88.9

*O'zgaruvchi*

Идентификаторларда бош ва кичик ҳарфлар бир биридан фарқ қилади, масалан f1 ва F1 ҳар хил ўзгарувчилардир. Номларни ягоналикка текшириб кўриш учун name (бу ерда name — танланган ном) командаси бажарилади.

Агар бунда маълумотлар ойнаси очилса демак бу ном қаердадир ишлатилган ва ундан фойдаланиш мақсадга мувофиқ эмас.

Ўзгарувчиларга конкрет қийматларни бериш учун ўзлаштириш символи ":=" дан фойдаланилади, масалан:

```
n:=1;
x:=123.456 ;
y:=17/19 ;
name:='Piter' ;
expr:=2*Pi/3 ;
```

V:=[1.2,3] – v ўзгарувчига сонлар рўйҳати [1,2,3] берилади;

M:=[[1,2.3].[4,5.6]] - M ўзгарувчи икки ўлчамли массивни ўзлаштиради;

f :=x->x^2 – f ўзгарувчига f(x)=x^2 функциянинг қиймати берилади.

Ифодаларнинг ўнг томони ўзгарувчиларнинг турини белгилайди.

Айрим ҳолларда ўзлаштиришни бекор қилиш зарур бўлади, масалан:

```
> x:=10;
```

$x := 10$

```
> int(x^2,x);
```

Error, (in int) wrong number (or type) of arguments

Бу ерда x ўзгарувчи олдиндан қиймати 10 га тенг бўлган бутун сонли ўзгарувчи сифатида аниқланганлиги сабабли интегрални ҳисоблаб бўлмади. Ўзгарувчидан аниқланишни олиб ташлаш учун қуйидаги ифодадан фойдаланамиз:

```
> x:='x';
```

$x := x$

Демак ўзгарувчининг номини апострфнинг ичига олиш ундан аниқланишни олиб ташлар экан. Энди интегрални ҳисоблаш мумкин:

```
> int(x^2,x);
```

$$\frac{1}{3}x^3$$

Ўзгарувчидан аниқланишни олиб ташлаш учун x:=evaln(x) ифодадан ҳам фойдаланиш мумкин:

```
> x:=345;
```

$x := 345$

```
> x:=evaln(x);
```

$x := x$

> $\int x^n \, dx$

$$\frac{x^{(n+1)}}{n+1}$$

Бир йўла ҳамма ўзгарувчиларнинг қабул қилган қийматларини бекор қилиш учун restart командасидан фойдаланилади.

## II боб. Штурм-Лиувилл масаласи ва уни Maple дастурида ечиш технологияси

### 2.1. Спектрал масалалар ҳақида умумий тушунча

Қуйидаги чегаравий масалани қарайлик:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad 0 < x < 1; \;\; y(0) = 0\, , y(0) = 0\, , \qquad (2.1)$$

бу ерда $\lambda$ параметр.

Аниқки, (2.1) масала $\lambda$ параметрнинг ихтиёрий қийматида тривиал $y_0(x) \equiv 0,\, x \in [0,1]$ ечимга эга. Лекин $\lambda$ параметрнинг баъзи қийматларида (2.1) масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши ҳам мумкин. Масалан, $\lambda = \pi^2$ бўлганда (2.1) масала $y_0(x) \equiv 0,\, x \in [0,1]$ тривиал ечимдан ташқари тривиал бўлмаган $y_1(x) = \sin(\pi x)$ ечимга ҳам эгадир. Шунинг учун $\lambda$ параметрнинг қандай қийматларида (2.1) масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади? деган савол туғилади. Буни текшириб кўрайлик. Бунда учта ҳолни алоҳида қараймиз.

1) $\lambda < 0$ бўлсин. Бу холда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$y(x) = c_1\, e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\, , \qquad (2.2)$$

бу ерда $c_1$ ва $c_2$ иҳтиёрий ўзгармаслар.

Бу функцияни $y(0) = 0$ ва $y(1) = 0$ чегаравий шартларга бўйсундирсак, $c_1$ ва $c_2$ номаълумларга нисбатан

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. $\lambda < 0$ бўлгани учун бу система фақат $c_1 = c_2 = 0$ ечимга эга. У ҳолда (2.2) га асосан (2.1) масала ҳам фақат $y(x) \equiv 0,\, x \in [0,1]$ ечимга эга бўлади.

2) $\lambda = 0$ бўлсин. Бунда қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y(x) = c_1 + c_2 x$ кўринишга эга бўлади. Бу ечимни чегаравий шартларга қўйсак $c_1 = 0, c_1 + c_2 = 0$, яьни $c_1 = c_2 = 0$ келиб чиқади. Демак, (2.1) масаланинг ечими $y(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1]$.

3) $\lambda > 0$ бўлсин. Бунда ўрганилаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x) \tag{2.3}$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $c_1$ ва $c_2$ ихтиёрий ўзгармаслар. (2.3) ни $y(0) = 0$ шартга қўйсак, $c_1 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $y(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Бу функцияни $y(1) = 0$ шартга бўйсундирсак,

$$c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0 \tag{2.4}$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$, яъни $\lambda \neq n^2\pi^2, n \in N$ бўлса, (2.4) тенгликдан $c_2 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\lambda \neq n^2\pi^2, n \in N$ бўлганда (2.1) масала фақат $y(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$ ечимга эга бўлади.

Агар $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, яъни $\lambda = n^2\pi^2, n \in N$ бўлса, (2.4) тенглик $c_2 \neq 0$ бўлганда ҳам бажарилаверади. Шунинг учун, бу ҳолда $c_2 \neq 0$ ва $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in N$ десак, (2.1) масаланинг $y_n(x) \mathrm{c}_2 = \sin(n\pi x)$, $n \in N$ кўринишдаги тривалмас ечимларига эга бўламиз, бу ердаги $c_2$ ўзгармас сон ҳар бир $n \in N$ учун ҳар хил тенгланиши мумкин.

Шундай қилиб, (2.1) масала $\lambda$ параметрнинг фақатгина $\lambda_n = (n\pi)^2, n \in N$ қийматларида $y_n(x) = a_n \sin(n\pi x), n \in N$ кўринишдаги тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлар экан, бу ерда $a_n = const \neq 0$.

Энди бизга аниқланиш соҳаси $[a,b]$ сегмент бўлган $y(x)$ функция ёрдамида тузилган

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x) y'(x) + p_n(x) y(x)$$

дифференциал ифода ва $y(x)$ функциянинг ҳамда унинг $(n-1)-$ тартибгача ҳосилаларининг $x=a$ ва $x=b$ нуқталардаги қийматлари ёрдамида тузилган.

$$E_m\left[y\right]=\alpha_0^{(m)}y(a)+\alpha_1^{(m)}y'(a)+...+\alpha_{n-1}^{(m)}y^{(n-1)}(a)+$$
$$\beta_0^{(m)}y(b)+\beta_1^{(m)}y'(b)+...+\beta_{n-1}^{(m)}y^{(n-1)}(b),\ m=\overline{1,n}$$

кўринишдаги $n-$та чизиқли боғлиқ бўлмаган алгебраик ифода берилган бўлсин, бу ерда $p_j(x)$, $j=\overline{0,n}-$ берилган функциялар, $\alpha_k^{(m)}$, $\beta_k^{(m)}$, $k=\overline{0,n-1}$, $m=\overline{1,n}-$ берилган сонлар. $\rho(x)$ ҳам $[a,b]$ кесмада аниқланган функция, $\lambda$ эса қандайдир сонли параметр бўлсин.

У ҳолда худди (2.1) масалага ўхшаб, қуйидагича масалани ҳам қараш мумкин бўлади: $\lambda$ *параметрнинг шундай қийматлари топилсинки бу қийматларда*

$$L\left[y\right]=-\lambda\rho(x)y(x),\quad x\in(a,b) \tag{A}$$

*дифференциал тенгламанинг* $[a,b]$ *сегментда аниқланган, узлуксиз ва*

$$E_m\left[y\right]=0,\ m=\overline{1,n} \tag{B}$$

*чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.*

Одатда бундай тарзда қўйилган масалалар *спектрал масалалар* деб аталади. $\{(A)(B)\}$ масаланинг тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлган $\lambda$ нинг қийматлари, бу масаланинг *хос қийматлари (сонлари)* деб, бу қийматларга мос тривиалмас ечимлар эса *хос функциялари* деб аталади.

Маълумки, (A) кўринишдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганишда чегаравий шартлар нафақат (B) кўринишида, балки бошқа кўринишларда ҳам берилиши мумкин. Шунга мос равишда спектрал масалаларда ҳам чегаравий шартлар (B) дан бошқачароқ берилиши мумкин.

Бу бобда турли кўринишдаги чегаравий шартлар ёрдамида қўйилган спектрал масалалар билан танишиб чиқамиз. Бунда юқорида киритилган тушунчаларимизни сақлаб қоламиз.

## 2.2. Штурм-Лиувилль масаласи

2.1. параграфда ўрганилган (2.1) масаланинг тривиалмас ечимларини берувчи $\lambda$ параметрнинг қийматларини топиш ҳақидаги масала қуйида баён қилинадиган спектрал масаланинг содда бир хусусий ҳолидир.

***Штурм-Лиувилль масаласи****. $\lambda$ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'(x)\right]+\left[\lambda\rho(x)+q(x)\right]y(x)=0\,,0<x<l \qquad (2.5)$$

*дифференциал тенгламанинг*

$$\alpha y(0)+\beta y'(0)=0,\quad \gamma y(l)+\delta y'(l)=0 \qquad (2.6)$$

*чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин,* бу ерда $p(x), q(x), \rho(x)-$ берилган функциялар, $l,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ эса берилган сонлар бўлиб, $p(x)\geq p_0=const>0$, $\rho(x)\neq 0$, $x\in\left[0,l\right]$; $p(x)\in C^1\left[0,l\right]$ $\rho(x), q(x)\in C\left[0,l\right]$; $l>0$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0, \gamma^2+\delta^2\neq 0.$

Бу масала $\lambda$ нинг ҳар қандай қийматида ҳам айнан нолдан фарқли, яьни тривиалмас ечимга эга бўлавермайди. {(2.5), (2.6)} масаланинг тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлган $\lambda$ нинг қийматлари, худди 2.1. парагрфда номланганидек, масаланинг *хос қийматлари (сонлари)* деб, бу қийматларга мос ечимлар эса, *хос функциялар деб аталади.*

{(2.5), (2.6)} масала хос функциялари ва хос қийматларининг асосий хоссаларини кўриб ўтамиз.

1) *Ҳар бир хос* $\lambda_k$ *қийматга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида* $y_k(x)$ *хос функция мос келади*, яъни $\lambda_k$ га иккита $y_k(x)$ ва $y_k(x)$ хос функциялар мос келса, у ҳолда $y_k(x) = c\, y_k(x)$ бўлади, бунда $c$ – ўзгармас сон.

Ҳақиқатан ҳам $y_k(x)$ ва $y_k(x)$ функциялар фаразимизга асосан

$$\alpha y_k(0) + \beta y_k'(0) = 0,$$
$$\alpha y_k(0) + \beta y_k'(0) = 0$$

ва $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ шартларни қаноатлантиради. У ҳолда (2.5) тенглама $y_k(x)$ ва $y_k(x)$ ечимларининг Вронский детерминанти

$$\begin{vmatrix} y_k & y_k \\ y_k' & y_k \end{vmatrix}$$

$x = 0$ нуқтада нолга тенг бўлади. Демак, $y_k(x)$ ва $y_k(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ.

Юқорида айтиб ўтилган кўпайтувчини шундай танлаш мумкинки,

$$\int_0^1 \rho(x) y_k^2(x) dx = 1$$

тенглик ўринли бўлади. Одатда бу шартни қаноатлантирувчи хос функциялар *нормаланган* функция дейилади.

2) *Турли хос қийматларга мос келадиган хос функциялар* $[0,l]$ *кесмада* $\rho(x)$ *вазн билан ортогонал бўлади.* Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y_k'(x)\right] + \left[\lambda_k \rho(x) + q(x)\right] y_k(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y_m'(x)\right] + \left[\lambda_m \rho(x) + q(x)\right] y_m(x) = 0.$$

Бу тенгламаларнинг биринчисини $y_m(x)$ га, иккинчисини эса $y_k(x)$ га кўпайтириб, ҳадлаб айирамиз;

$$y_m \frac{d}{dx}\left[p(x)y_k'(x)\right] - y_k(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)y_m'(x)\right] +$$

$$+(\lambda_k-\lambda_m)\rho(x)y_k(x)y_m(x)=0,$$

ёки

$$(\lambda_k-\lambda_m)\rho(x)y_k(x)y_m(x)=$$

$$=\frac{d}{dx}\{p(x)\left[y_m(x)y_k'(x)-y_k(x)y_m'(x)\right]\}=0\,.$$

Бу тенгликни $x$ бўйича 0 дан $l$ гача интеграллаймиз:

$$(\lambda_m-\lambda_k)\int_0^l\rho(x)y_k(x)y_m(x)dx=$$

$$=p(x)\left[y_m(x)y_k'(x)-y_k(x)y_m'(x)\ \right|_{x=0}^{x=l}.$$

(2.6) чегаравий шартларга биноан, ўнг томондаги ифода нолга тенг, у ҳолда

$$(\lambda_m-\lambda_k)\int_0^l\rho(x)y_k(x)y_m(x)dx=0.$$

Бундан $\lambda_m\neq\lambda_k$ бўлгани учун

$$\int_0^l\rho(x)y_k(x)y_m(x)dx=0.$$

3) $q\le 0$ *бўлганда барча* $\lambda_k$ *га мос қийматлар ҳақиқий ва мусбат бўлади*.

Бу хоссани исботлаш учун $\lambda_k$ га мос $y_k(x)$ хос функцияни нормаланган деб ҳисоблаймиз. $y_k(x)$ - хос функция бўлгани сабабли

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y_k'(x)\right]+q(x)y_k(x)=-\lambda_k p(x)y_k(x).$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $y_k(x)$ га кўпайтириб, 0 да $l$ гача интеграллаймиз ва олдинги тенгликни эътиборга олиб, қуйидагини хосил қиламиз:

$$\lambda_k=-\int_0^l\left\{\frac{d}{dx}[p(x)y_k'(x)]+q(x)y_k(x)\right\}y_k(x)dx\,.$$

Бундан, бириничи қўшилувчини бўлаклаб интеграллаб, ушбу

$$\lambda_k = \int_0^l [p(x)y_k'^2(x) - q(x)y_k'^2(x)]dx - [p(x)y_k(x)y_k'(x)]\Big|_{x=0}^{x=l} \qquad (2.7)$$

тенликка эга бўламиз.

Интеграл ташқарисидаги ифода мусбат бўлмасин, яъни

$$[p(x)y_k(x)y_k'(x)]\Big|_{x=0}^{x=l} \le 0 \qquad (2.8)$$

деб фараз қиламиз. Шарт бўйича $p(x) \ge p_0 > 0$, $q(x) \le 0$ бўлгани учун (2.7) тенгликдан дарҳол {(2.5), (2.6)} масала хос қийматларининг мусбат эканлиги келиб чиқади.

(2.8) шарт татбиқда энг кўп учрайдиган

1) $y(0)=0, y(l)=0$; 2) $y'(0)=0, y'(l)=0$; 3) $y'(0)-h_1 y(0)=0$, $y'(l)+h_2 y(l)=0$, $h_1 \ge 0, h_2 \ge 0$ чегаравий шартларда бажарилади.

Юқорида келтирилган таърифларга асосан, $\lambda=(n\pi)^2, n \in N$ лар (2.1) масаланинг хос сонлари, $y_n = a_n \sin(n\pi x), n \in N$ лар эса унинг хос функциялари бўлади.

Бу хос сонлар ва хос функциялар ҳақиқатан ҳам юқорида санаб ўтилган 1)- 3) хоссаларга эга эканлигини текшириб чиқиш қийин эмас.

Ҳақиқатан ҳам 1) ва 4) хоссаларнинг бажарилиши аниқ. 2) хоссани текширайлик. $\rho(x) \equiv 1$ бўлгани учун $\lambda_m = (m\pi)^2$, $\lambda_n = (n\pi)^2$ хос сонларга мос келувчи хос функциялар ортоганаллиги

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = 0, n,m \in N, n \ne m \qquad (2.9)$$

тенгликдан келиб чиқади.

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \frac{1}{2}, n \in N$$

тенгликдан эса $a_n = \sqrt{2}$ деб олинган $y_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n \in N$ хос функциялар системаси ортонормал бўлиши келиб чиқади.

## 2.3. Штурм-Лиувилль масаласини ечишга доир мисоллар

Бу параграфда бир неча Штурм-Лиувилль масалаларининг хос сонлари ва хос функцияларини топамиз. Бунда ўрганиладиган масала шартини тўла баён қилиш ўрнига қисқалик учун масалада қаралаётган дифференциал тенглама ва тегишли чегаравий шартларни келтирамиз холос.

**1-масала.** $y''+\lambda y=0,\ 0<x<l;\qquad y'(0)=0,\ y'(l)=0,\qquad l>0.$

Маълумки, қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y(x)=\begin{cases} c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \text{агар } \lambda<0 \text{ бўлса}, \\ c_1+c_2x, & \text{агар } \lambda=0 \text{ бўлса}, \\ c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x, & \text{агар } \lambda>0 \text{ бўлса}. \end{cases} \tag{2.10}$$

(2.10) дан хосила олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y'(x)=\begin{cases} \sqrt{-\lambda}c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \text{агар } \lambda<0 \text{ бўлса}, \\ c_2, & \text{агар } \lambda=0 \text{ бўлса}, \\ -\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}x, & \text{агар } \lambda>0 \text{ бўлса}. \end{cases} \tag{2.11}$$

(2.11) функцияни $y'(0)=0,\ y'(l)=0$ чегаравий шартларга қўямиз. Натижада

1) $\lambda<0$ бўлганда $c_1-c_2=0$, $c_1e^{\sqrt{-\lambda}e}-c_2e^{-\sqrt{-\lambda}e}=0$ алгебрик тенгламалар келиб чиқади. Бу тенгламалардан эса $c_1=c_2=0$ келиб чиқади. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,l]$.

2) $\lambda=0$ бўлганда $c_2=0$ тенглик келиб чиқиб, $c_1$- ихтиёрилигича қолади. Буни эътиборга олсак, қаралаётган масала $y=c_1$ ечимга эга эканлиги келиб чиқади. Агар $c_1\neq 0$ бўлса, бу ечим тривиалмас бўлади . Демак, $\lambda=0$ қаралаётган масала учун хос сон экан.

3) $\lambda>0$ бўлганда $c_2=0$, $-\sqrt{\lambda}c_1\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$ тенгликларга эга бўламиз. $c_1=0$ бўлса, масаланинг тривиал ечимига эга бўламиз. $c_1\neq 0$ десак, охирги тенгликдан $\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$ тенгликка келамиз. Бундан $\sqrt{\lambda}l=n\pi$, $n\in N$ ёки

$\lambda = (n\pi / l)^2$, $n \in N$ ни топамиз. Демак, $\lambda = (n\pi / l)^2$, $n \in N$ сонлар қаралаётган масаланинг хос сонлари экан. Бунда $c_2 = 0$ эканлигини эътиборга олиб ва хар бир $n$ учун $c_2 = a_n$ деб олсак, (2.10)га асосан $y_n(x) = a_n \cos(\pi n x / l)$, $n \in N$ хос функцияларга эга бўламиз. Топилган хос сонлар ва хос функциялар формулаларида $n$ нол қийматни ҳам олади десак, улар $\lambda = 0$ ҳолдаги хос сон ва хос функцияни ҳам ўз ичига олади.

**2-масала.** $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < l$; $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$, $l > 0$.

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими (2.10) кўринишда, унинг хосиласи эса (2.11) кўринишга эга. $\lambda < 0$ бўлганда (2.10) ва (2.11) формулалардан чегаравий шартларга асосан $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0$ алгебрик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу система фақат $c_1 = c_2 = 0$ ечимга эга бўлиб, ўрганаётган масала $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$ ечимга эга бўлади. Агар $\lambda = 0$ бўлса, $y(0) = 0$ шартга асосан, (2.10) дан $c_1 = 0$ келиб чиқиб, (2.11) дан, $y'(l) = 0$ шартга асосан, $c_2 = 0$ га эга бўламиз. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$. $\lambda > 0$ бўлганда (2.10) ва (2.11) формулалардан, чегаравий шартларга асосан, $c_1 = 0$, $\sqrt{\lambda} c_2 \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$ келиб чиқади. $c_2 \neq 0$ десак, $\cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$ бўлади. Бундан $\sqrt{\lambda} l = \pm(\pi / 2) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ келиб чиқади. $\sqrt{\lambda} l$ мусбат эканлигини эътиборга олсак, $\sqrt{\lambda} l = (2n-1)\pi / 2$, $n \in N$ бўлади. Демак. $\lambda_n = \left[(2n-1)\pi / 2l\right]^2$, $n \in N$ сонлар ўрганилаётган масаланинг хос сонлари экан. Уларга мос хос функциялар эса, $c_1 = 0$ тенглик ва (2.10) формулага асосан, $y_n(x) = a_n \sin\left[(2n-1)\pi x / 2l\right]^2$, $n \in N$ лардан иборат.

## 2.4. Штурм-Лиувилль масаласининг хос қийматлари ва уларга мос келувчи хос функцияларини Maple датури ёрдамида топиш

**Масала.** Қуйидаги Штурм-Лиувилль масаласининг хос қийматлари ва уларга мос келувчи хос функцияларини Maple датуридан фойдаланиб топилсин:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(a) = 0, \quad y'(b) = 0, \quad x \in [a,b].$$

Бу масалани ечишга ўтамиз. Maple датурини ишга тушурамиз. Дастур ойнасида тенгламанинг кўринишини тасвирлаб оламиз. Бунинг қуйидаги ёзувни ёзишга тўғри келади:

```
> restart:eq:=diff(y(x),x,x)+lambda*y(x)=0;
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \lambda\, y(x) = 0 .$$

Тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бунинг учун dsolve буйруғидан фойдаланамиз.

```
> dsolve(eq,y(x));y:=unapply(rhs(%),x);
```

$$y(x) = \_C1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + \_C2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) ,$$

$$y := x \to \_C1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + \_C2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) .$$

Бу ечимни чегаравий шартларга бўйсундирамиз.

```
> assume(b>a):
> eq1:=y(a)=0;eq2:=D[1](y)(b)=0;
```

$$eq1 := \_C1 \sin(\sqrt{\lambda}\, a\sim) + \_C2 \cos(\sqrt{\lambda}\, a\sim) = 0 ,$$

$$eq2 := \_C1 \cos(\sqrt{\lambda}\, b\sim)\sqrt{\lambda} - \_C2 \sin(\sqrt{\lambda}\, b\sim)\sqrt{\lambda} = 0 .$$

Бу тенгламалар системасидан матрица тузиб олиб, унинг детерминантини ҳисоблаймиз. Ҳосил бўлган матрицани А орқали белгилаб оламиз.

```
>
with(linalg):genmatrix({eq1,eq2},{_C1,_C2});A:=matrix(%
);
```

$$\begin{bmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}\, a\sim) & \cos(\sqrt{\lambda}\, a\sim) \\ \cos(\sqrt{\lambda}\, b\sim)\sqrt{\lambda} & -\sin(\sqrt{\lambda}\, b\sim)\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}\, a\sim) & \cos(\sqrt{\lambda}\, a\sim) \\ \cos(\sqrt{\lambda}\, b\sim)\sqrt{\lambda} & -\sin(\sqrt{\lambda}\, b\sim)\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}.$$

А матрицанинг детерминантини $\Delta$ орқали белгилаб, уни ҳисоблаймиз.

```
> Delta:=combine(%);
```

$$\Delta := -\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, a\sim - \sqrt{\lambda}\, b\sim).$$

Ҳосил бўлган детерминантни нолга тенглаб, пайдо бўлган характеристик тенгламани ечамиз.

```
> Delta:=select(has,Delta,[cos]);
```

$$\Delta := \cos(\sqrt{\lambda}\, a\sim - \sqrt{\lambda}\, b\sim)$$

```
> _EnvAllSolutions:=true:lambda:=solve(Delta,lambda);
```

$$\lambda := \frac{1}{4}\frac{\pi^2 (1 + 2\,\_Z1\sim)^2}{(-b\sim + a\sim)^2}$$

```
> lambda:=subs(_Z1='k',lambda);
```

$$\lambda := \frac{1}{4}\frac{\pi^2 (1 + 2\,k)^2}{(-b\sim + a\sim)^2}$$

Энди хос функцияларни топамиз.

```
> assume(k,posint):y(x);
```

$$\_C1 \sin\left(\frac{1}{4}\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2 (1 + 2\,k\sim)^2}{(-b\sim + a\sim)^2}}\, x\right) + \_C2 \cos\left(\frac{1}{4}\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2 (1 + 2\,k\sim)^2}{(-b\sim + a\sim)^2}}\, x\right)$$

```
> C1:=solve(eq1,_C1);
```

$$C1 := \frac{\_C2 \cos\left(\frac{1}{2}\frac{\pi (1 + 2\,k\sim)\, a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi (1 + 2\,k\sim)\, a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}$$

```
> simplify(subs(_C1=C1,y(x))):combine(%);
```

$$\frac{\_C2 \sin\left(\frac{\pi\, a\sim - \pi\, x + 2\,\pi\, a\sim\, k\sim - 2\,\pi\, x\, k\sim}{-2\, b\sim + 2\, a\sim}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\, a\sim + 2\,\pi\, a\sim\, k\sim}{-2\, b\sim + 2\, a\sim}\right)}$$

```
> Yn:=unapply(select(has,%,[x]),x,k);
```

$$Yn := (x, k\sim) \to \sin\left(\frac{\pi\, a\sim - \pi\, x + 2\,\pi\, a\sim\, k\sim - 2\,\pi\, x\, k\sim}{-2\, b\sim + 2\, a\sim}\right)$$

Дифференциал тенгламани текширамиз:

```
> y:='y':Yn(x,k):simplify(subs(y(x)=%,eq));
```

$$0=0$$

Чегаравий шартларни қаноатлантиришини кўриб чиқамиз:

```
> Yn(a,k)=0;simplify(D[1](Yn)(b,k))=0;
```

$$0=0$$

$$0=0$$

$[a,b]$ кесмада хос функцияларнинг ортогоналлигини текширамиз.

```
> assume(n,posint):assume(m,posint):
> Int(Yn(x,n)*Yn(x,m),x=a..b);simplify(value(%));
```

$$\int_{a\sim}^{b\sim} \sin\left(\frac{\pi\, a\sim - \pi\, x + 2\,\pi\, a\sim n\sim - 2\,\pi\, x\, n\sim}{-2\, b\sim + 2\, a\sim}\right) \sin\left(\frac{\pi\, a\sim - \pi\, x + 2\,\pi\, a\sim m\sim - 2\,\pi\, x\, m\sim}{-2\, b\sim + 2\, a\sim}\right) dx$$

$$0$$

Хос функцияларнинг нормасини ҳисоблаймиз.

```
> Norma:=Int(Yn(x,n)^2,x=a..b):simplify(value(%));
```

$$\frac{1}{2}\, b\sim - \frac{1}{2}\, a\sim$$

Хос функцияларнинг агрументини қулай ҳолда ёзишимиз ҳам мумкин:

```
> simplify(collect((Pi*a-Pi*x+2*Pi*a*k-2*Pi*x*k)/(-
2*b+2*a),x));
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{(1+2\,k\sim)\,\pi\,(a\sim - x)}{-b\sim + a\sim}$$

Шундай қилиб, масаланинг хос қийматлари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4(b-a)^2},\ k=1,2,3,...,$$

буларга мос келувчи хос функциялари эса

$$y_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{2(b-a)}\right),\quad k=1,2,3,\ldots\ .$$

Энди масалада $\lambda = 0$ бўлсин.

```
> lambda:=0;eq;
```

$$\lambda := 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) = 0$$

```
> dsolve(eq,y(x));assign(%):y0:=unapply(y(x),x);
```

$$y(x) = \_C1\ x + \_C2$$

$$y0 := x \to \_C1\ x + \_C2$$

```
> eq0_1:=y0(a)=0;eq0_2:=D(y0)(b)=0;
```

$$eq0\_1 := \_C1\ a\sim + \_C2 = 0$$

$$eq0\_2 := \_C1 = 0$$

```
> genmatrix({eq0_1,eq0_2},{_C1,_C2});
```

$$\begin{bmatrix} a\sim & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(%);
```

$$-1$$

Демак, детерминант 0 дан фарқли чиқди, бу дегани фақат тривиал ечим мавжуд. Шундай қилиб $\lambda = 0$ сон масаланинг хос қиймати бўла олмас экан.

## Хулоса

Маълумки, дифференциал ва интеграл ҳисобнинг тадбиқи кўп предметларга боғлиқ. Шунинг учун бу тушунчаларни мукаммал англаш ва тушиниб этиш ўқувчи ва талабалар учун муҳимдир. Мактаб, лицей ва касб-ҳунар коллежларида ўтиладиган олий математика ва геометрия фанларида дифференциал ва ҳосила ҳақидаги мавзулардан мисол ва масалалар ечишда Maple амалий дастуридан фойдалансак ишимиз анча енгил ва осон кечади. Maple амалий дастурида дифференциал тенгламани ва у учун қўйилган масалани аналитик ечиш, дифференциал тенгламанинг умумий ечими, Коши масаласининг ечими ёки чегаравий масалалар ечими, дифференциал тенгламани сонли ечиш, odeplot буйруғи ёрдамида дифференциал тенгламанинг графигини ясаш, дифференциал тенглама ечимининг графигини Detools пакети ёрдамида намойиш қилиш ва дифференциал тенгламалар системасининг фазодаги расмини чизиш каби амалларни ўзида сақлайди. Maple амалий дастури мана шу мисолларни ечишда юксак имконият даражалари билан ажралиб туради. Maple амалий дастуридан фойдаланишнинг энг катта ютуқларидан бири дифференциал тенглама ечимини графикли ҳолатда кўрсатишидир. Яъни бунда биз Maple амалий дастурининг стандарт кутубхонаси кўмагидан фойдаланамиз. Дифференциал тенглама ечимининг графигини Detools пакети ёрдамида намойиш қилиш мумкин. Бунда мисолнинг ечимини ёрқин далил билан кўрсатиб берган бўламиз.

Ишнинг асосий натижаси. Maple дастури ҳақида маълумот тўликроқ келтирилди. Унинг структураси, файллар ва ҳужжатлар билан ишлаши, менюлари ва уларнинг тавсифлари келтирилди. Оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалалар баён қилинди. Хос қиймат ҳақидаги масалалар, яъни Штурм-Лиувилль масалаларини Maple дастуридан фойдаланган ҳолда ечилиши кўрсатиб ўтилди.

Ушбу битирув малакавий ишни бажариш давомида оддий дифференциал тенгламалар учун қўйилган хос қиймат ҳақидаги масалаларнинг ечилишини, хос қийматлар ва уларга мос келувчи хос функцияларни топиш муаммосини мустақил ҳал қилиш тўлиқ ўрганилди ва таҳлил қилинди. Бундан ташқари замонавий дастурлаш тизимларидан бири бўлган Maple пакетининг дифференциал тенгламалар билан ишлаш қоидаларини мукаммал ҳолда ўрганиб чиқилди ва бунинг натижаси сифатида мустақил равишда турли мураккабликдаги масалалар Maple пакетида ечиб кўрсатилди ва таҳлил қилинди.

## Фойдаланилган адабиётлар рўйхати


1. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. - Тошкент: Ўзбекистон, 2002.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1977.

3. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент. «Mumtoz so'z», 2010. -354 с.

4. А.Матросов. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. БХВ-Петербург. 2001. http://www.biblio-globus.ru/, http://www.books.ru/

5. B. Monagan, K. O. Geddes, K. M. Heal, G. Labahn, S. M. Vorkoetter. Maple V Realise 5. Programming Guide. Springer.- 1998.- 380 p.

6. В.Аладьев, М.Богдявичюс. Maple 6: Решение математических, статистических и инженерно-физических задач. Лаборатория Базовых Знаний. 2001. http://www.books.ru/

7. В.Говорухин, В.Цибулин. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX. Питер. 2001. http://www.piter.com/

8. В.Дьяконов. Maple 6. Учебный курс. Питер. 2001. http://www.books.ru/

9. В.Дьяконов. Maple 7. Учебный курс. Питер. 2001. http://www.books.ru/

10. В.Дьяконов. Компьютерная математика. Теория и практика. Нолидж. 2000. http://www.books.ru/, http://www.knowledge.ru/

11. В.П.Дьяконов Maple 7. Учебный курс. С.Пб.: "Питер", 2001. - 672 с.

12. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple V. Математический пакет для всех. М.: Мир.-1997.-208 с.

13. Клиначёв Н. В. Основы моделирования систем. –, Челябинск, 2003. Website: http://vissim.nm.ru/sml_01.html

14. http://lex.uz (Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси)/

15. http://www.ziyonet.uz (Ўзбекистон Республикаси ахборот таълим портали).

16. http://www.exponenta.ru (Математик ўқув сайти).

17. http://www.elibrary.ru (Электрон кутубхона).