ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2018, том 54, № 1, с. 136–144

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:532/534+517.968.72

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

© 2018 г. Ж. Ш. Сафаров, Д. К. Дурдиев

Рассматривается гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение акустики. Прямую задачу представляет задача о нахождении акустического давления из начально-краевой задачи для этого уравнения сосредоточенным источником возбуждения, расположенным на границе пространственной области. Для прямой задачи изучается обратная задача, состоящая в определении одномерного ядра интегрального члена по известному решению прямой задачи в точке $x = 0$ для $t > 0$. Эта задача сводится к решению системы интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К последней в пространстве непрерывных функций применяется принцип сжатых отображений. Доказана локальная однозначная разрешимость поставленной задачи.

DOI: 10.1134/S0374064118010119

Рассмотрим начально-краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{1}{c^2(z)}v_{tt} = \varrho_z - \frac{\partial \ln \rho(z)}{\partial z}\varrho, \quad z > 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$v|_{t\leq 0} \equiv 0, \quad \varrho(+0,t) = \delta'(t), \tag{2}$$

где $c(z) > 0$ – скорость волны, $\rho(z)$ – плотность среды, $v(z,t)$ – акустическое давление; $\varrho(z,t)$ – напряжение; $\delta'(t)$ – производная дельта-функции $\delta(t)$ Дирака; функции $\varrho(z,t)$ и $v(z,t)$ связаны равенством

$$\varrho(z,t) = v_z(z,t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)v_z(z,\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Обратная задача ставится следующим образом: определить ядро $k(t)$, $t > 0$, входящее в уравнение (1) посредством равенства (3), если относительно решения задачи известно, что

$$v(+0,t) = g(t), \quad t > 0. \tag{4}$$

Уравнение (1), учитывающее с помощью равенства (3) процесс поглощения неидеально-упругой среды, возникает в геофизике, когда свойства среды исследуются с помощью сейсмических волн. Фактически система уравнений Больцмана (одна из наиболее общих для линейной неупругой среды) при соответствующих предположениях о гладкости в одномерном случае сводится к уравнению (1).

Изучение обратных задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений является предметом исследования многих работ, из которых отметим работы [1–5] как наиболее близкие к теме настоящей работы. В работе [1] исследовалась обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным членом типа свёртки по временно́й переменной одномерной функции памяти среды и решения прямой задачи. Методом Фурье эта задача сведена к системе интегральных уравнений типа Вольтерры относительно неизвестных функций, зависящих от временно́й переменной. В работах [2, 3] (см. также приведённую в них библиографию) исследовались задачи об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости. В работах [4, 5] изучались задачи восстановления одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной и в неограниченной областях соответственно. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости этих задач в классе непрерывных функций с весовой нормой. Отличительной чертой работ [2–5], как и настоящей работы, является использование в них в качестве локализованного на границе рассматриваемой пространственной области источника, инициирующего физический процесс распространения волн. Это существенно повышает прикладную значимость изучаемых задач.

Введём в рассмотрение, как и в работе [5], новую переменную x равенством

$$x = \psi(z) = \int\limits_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)},$$

а также примем обозначения

$$\widetilde{v}(x,t) := v(\psi^{-1}(x),t) \quad \text{и} \quad \lambda(x) := c(\psi^{-1}(x))\rho(\psi^{-1}(x)),$$

где через $\psi^{-1}(x)$ обозначена функция, обратная к функции $\psi(z)$. Далее предполагается, что $c(z) > 0$ и $\rho(z) > 0$. Основным результатом работы является следующая теорема о локальной однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Пусть функция $g(t)$ представима в виде $g(t) = -c(+0)\delta(t) + \theta(t)g_0(t)$, где функция g_0 принадлежит пространству $C^2[0,T]$, $\theta(t)$ – функция Хевисайда, а функции $c(z)$ и $\rho(z)$ принадлежат пространству $C^3[0,\psi^{-1}(T)]$. Тогда для достаточно малых $T_0 \in \in (0,T)$ решение обратной задачи (1)–(4) в классе ядер $k(t)$, принадлежащих пространству $C^2[0,T_0]$, существует и единственно.*

Равенства (1)–(4) относительно новых функций $\widetilde{v}$, λ и переменной x запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\widetilde{v}(x,t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)\widetilde{v}(x,\tau)\,d\tau\right], \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$\widetilde{v}\,|_{t\le 0} \equiv 0, \quad \widetilde{v}_x(+0,t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)\widetilde{v}_x(+0,\tau)\,d\tau = c(+0)\delta'(t), \tag{6}$$

$$\widetilde{v}(+0,t) = g(t), \quad t > 0. \tag{7}$$

Далее под $c(0)$, $h(0)$, $\lambda(0)$ и т.д. понимаются соответствующие значения этих функций при x, стремящиеся к нулю справа.

Преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (5) так, что, во-первых, под знаком интеграла не будут присутствовать производные от функции $\widetilde{v}$ по x, и, во-вторых, коэффициенты во внеинтегральных членах при $\widetilde{v}_x$ будут равны нулю. Этим требованиям можно удовлетворить, вводя новую функцию u по формуле

$$\left[\widetilde{v}(x,t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)\widetilde{v}(x,\tau)\,d\tau\right] \exp\left(-\frac{k(0)t}{2}\right)\sqrt{\frac{\lambda(0)}{\lambda(x)}} = u(x,t).$$

Тогда, как нетрудно убедиться прямым вычислением, функция $\widetilde{v}$ выражается через функцию u посредством равенства

$$\widetilde{v}(x,t) = \left[\exp(k(0)t/2)u(x,t) + \int\limits_0^t h(t-\tau)\exp(k(0)\tau/2)u(x,\tau)\,d\tau\right]\sqrt{\frac{\lambda(x)}{\lambda(0)}},$$

где

$$h(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau)h(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Введём обозначения:

$$\Lambda(x) := \frac{h^2(0)}{4} - h'(0) + \frac{2\lambda(x)\lambda''(x) - 3(\lambda'(x))^2}{4\lambda^2(x)}, \quad c_0 := \frac{c(0)}{2}, \quad \lambda_0 := \frac{\lambda'(0)}{2\lambda(0)},$$

$$\tilde{k}(t) := h''(t)\exp\left(\frac{h(0)t}{2}\right), \quad \tilde{g}_0(t) := g(t)\exp\left(\frac{h(0)t}{2}\right), \quad h_0(t) := k(t)\exp\left(\frac{h(0)t}{2}\right).$$

Тогда относительно новых функций $u(x,t)$ и $h(t)$ уравнения (5)–(7) записываются в виде

$$u_{tt} = u_{xx} + \Lambda(x)u + \int_0^t \tilde{k}(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau, \quad x>0, \quad t>0, \tag{9}$$

$$u|_{t\le 0} \equiv 0, \tag{10}$$

$$u_x|_{x=+0} = 2c_0\delta'(t) + c_0 k(0)\delta(t) - \lambda_0 u(0,t), \tag{11}$$

$$u|_{x=+0} = \tilde{g}_0(t) + \int_0^t h_0(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Из теории гиперболических уравнений следует, что функция $u(x,t)$ как решение прямой задачи (9)–(12) обладает свойством: $u\equiv 0$ при $t<x$, $x>0$ и в окрестности характеристической прямой $t=x$ имеет следующую структуру:

$$u(x,t) = \alpha(x)\delta(t-x) + \theta(t-x)\tilde{u}(x,t), \tag{13}$$

где $\tilde{u}(x,t)$ – регулярная функция.

Обозначим $\beta(x) := \tilde{u}(x, x+0)$. Подставляя функцию (13) в уравнения (9)–(12) и используя метод выделения особенностей [7, с. 611–629], находим

$$\alpha'(x) = 0, \quad \alpha(0) = -2c_0, \quad 2\beta'(x) - \Lambda(x)\alpha(x) = 0, \quad \alpha'(0) - \beta(0) + \alpha(0)\lambda_0 = c_0 k(0).$$

Решая эти обыкновенные дифференциальные уравнения, получаем

$$\alpha(x) = -2c_0, \quad \beta(x) = -c_0\left(k(0) + 2\lambda_0 + \int_0^x \Lambda(\xi)\,d\xi\right).$$

Из сказанного выше следует, что функция $\tilde{u}(x,t)$ в области $D := \{(x,t) : t > x > 0\}$ удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} + \Lambda(x)\tilde{u} - 2c_0\tilde{k}(t-x) + \int_x^t \tilde{k}(t-\tau)\tilde{u}(x,\tau)\,d\tau, \quad x>0, \quad t>0, \tag{14}$$

$$\tilde{u}|_{t=x+0} = \beta(x), \tag{15}$$

$$[\tilde{u}_x + \lambda_0\tilde{u}(x,t)]_{x=0} = 0, \tag{16}$$

$$\tilde u|_{x=0} = \tilde g_0(t) - 2c_0 h_0(t) + \int\limits_0^t h_0(\tau)\tilde g_0(t-\tau)\,d\tau, \quad t>0. \tag{17}$$

Требуя непрерывности функций $\tilde u(x,t)$, $(\partial\tilde u/\partial x)(x,t)$ при $x=t=0$, из соотношений (15)–(17) получаем выражения для значений $h(0)$, $h'(0)$ через известные значения:

$$h(0) = -c_0^{-1}\tilde g_0(0) - 2\lambda_0, \quad h'(0) = 2^{-1}(2h^2(0) - \Lambda(0)) - 2c_0^{-1}(\tilde g_0'(0) + \tilde g_0(0)h(0)).$$

При выводе последнего равенства использованы следующие соотношения, вытекающие из равенства (8):

$$h'(t) = -k'(t) - k(0)h(t) - \int\limits_0^t k'(t-\tau)h(\tau)\,d\tau, \quad h'(0) = -k'(0) + k^2(0).$$

В дальнейшем считаем, что в соотношениях для $\Lambda(x)$ вместо $h(0)$, $h'(0)$ подставлены найденные их значения. Обозначим также

$$h_0 := h^2(0)/4 - h'(0) \quad \text{и} \quad h_1 := h^2(0)/2 - h'(0).$$

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма. *При выполнении условий теоремы задача (14)–(17) для* $(x,t)\in D_T$, $D_T = ((x,t) : 0\le x\le t\le T-x)$ *равносильна задаче нахождения функций* $\tilde u(x,t)$, $(\partial\tilde u/\partial t)(x,t)$, $\tilde k(t)$, $h_0(t)$, $h_0'(t)$, $h_0''(t)$ *из следующей системы уравнений:*

$$\tilde u(x,t) = \beta(x) + \int\limits_x^t \frac{\partial\tilde u}{\partial\tau}(x,\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde u}{\partial t}(x,t) &= \frac12(\tilde g_0'(t-x) - 2c_0h_0'(t-x) - h(0)\tilde g_0(t-x) - 2c_0\tilde k(t-x)x + \\ &+ \lambda_0\tilde u(0,t-x)) - \frac{c_0}{2}\Lambda\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac12\int\limits_0^{t-x} h_0'(t-x-\tau)\tilde g_0(\tau)\,d\tau + \\ &+ \frac12\int\limits_0^x\left[\Lambda(\xi)\tilde u(\xi,t-x+\xi) - \int\limits_0^{t-x}\tilde k(\tau)\tilde u(\xi,t-x+\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi + \\ &+ \frac12\int\limits_x^{(t+x)/2}\left[\Lambda(\xi)\tilde u(\xi,t+x-\xi) - 2c_0\tilde k(t+x-2\xi) - \int\limits_0^{t+x-2\xi}\tilde k(\tau)\tilde u(\xi,t+x-\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\tilde k(t) &= -\frac12\Lambda'\left(\frac t2\right) - c_0^{-1}\left[\tilde g_0''(t) - 2c_0h_0''(t) + \tilde g_0(0)h_0'(t) - \lambda_0\frac{\partial\tilde u}{\partial t}(0,t) - \frac12\Lambda\left(\frac t2\right)\beta\left(\frac t2\right)\right] - \\ &- c_0^{-1}\int\limits_0^t \tilde g_0''(t-\tau)h_0(\tau)\,d\tau - c_0^{-1}\int\limits_0^t\tilde k(\tau)\beta\left(\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau + \\ &+ c_0^{-1}\int\limits_0^{t/2}\left[\Lambda(\xi)\frac{\partial\tilde u}{\partial t}(\xi,t-\xi) + \int\limits_0^{t-2\xi}\tilde k(\tau)\frac{\partial\tilde u}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi,\end{aligned} \tag{20}$$

$$h_0(t) = -h(0) + h_1 t + \int\limits_0^t (t-\tau) h_0''(\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

$$h_0'(t) = h_1 + \int\limits_0^t h_0''(\tau)\, d\tau, \tag{22}$$

$$h_0''(t) = -\tilde{k}(t) + h_0 h_0(t) - \int\limits_0^t \tilde{k}(t-\tau) h_0(\tau)\, d\tau. \tag{23}$$

Доказательство. Заметим, что справедливы факторизационные тождества

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u},$$

с учётом которых проинтегрируем уравнение (14) вдоль соответствующих характеристик дифференциальных операторов первого порядка в области D_T. Интегрирование вдоль характеристики оператора $\partial/\partial t - \partial/\partial x$ проведём от точки (x,t) до точки $((x+t)/2, (x+t)/2)$ в плоскости переменных (ξ, τ). Используя равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) = -c_0 \Lambda\left(\frac{x+t}{2}\right),$$

вытекающее из условия (15) после дифференцирования по x, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(x,t) = -c_0 \Lambda\left(\frac{x+t}{2}\right) + \int\limits_x^{(x+t)/2} \Bigg[\Lambda(\xi)\tilde{u}(\xi, t+x-\xi) -$$

$$- 2c_0 \tilde{k}(t+x-2\xi) - \int\limits_0^{t+x-2\xi} \tilde{k}(\tau)\tilde{u}(\xi, t+x-\xi-\tau)\, d\tau\Bigg] d\xi. \tag{24}$$

Интегрирование вдоль характеристики оператора $\partial/\partial t + \partial/\partial x$ проведём от точки $(0, t-x)$ до точки (x,t). Используя равенства (16), (17), находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(x,t) = \tilde{g}_0'(t-x) - h(0)\tilde{g}_0(t-x) - 2c_0 \tilde{k}(t-x)x - 2c_0 h_0'(t-x) +$$

$$+ \lambda_0 \tilde{u}(0, t-x) + \int\limits_0^{t-x} h_0'(t-x-\tau)\tilde{g}_0(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^x \Bigg[\Lambda(\xi)\tilde{u}(\xi, t-x+\xi) - \int\limits_0^{t-x} \tilde{k}(\tau)\tilde{u}(\xi, t-x+\xi-\tau)\, d\tau\Bigg] d\xi. \tag{25}$$

Складывая равенства (24) и (25), получаем уравнение (19). Полагая $x = 0$ в уравнении (24) и используя условия (16), (17), будем иметь

$$\tilde{g}_0'(t) + \tilde{g}_0(0) h_0(t) - 2c_0 h_0'(t) - \lambda_0 \tilde{u}(0,t) + \int\limits_0^t \tilde{g}_0'(t-\tau) h_0(\tau)\, d\tau = -c_0 \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) +$$

$$+\int\limits_0^{t/2}\left[\Lambda(\xi)\tilde u(\xi,t-\xi)-2c_0\tilde k(t-2\xi)-\int\limits_0^{t-2\xi}\tilde k(\tau)\tilde u(\xi,t-\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi.$$

Дифференцируя это равенство по t, после несложных преобразований приходим к уравнению (20).

Для полноты системы интегральных уравнений (18)–(20), как и в [5], используются равенства (21)–(23), вытекающие из определения функции $h_0(t)$ и равенства (8). При выполнении условий теоремы эквивалентность системы интегральных уравнений (18)–(23) и обратной задачи (14)–(17) устанавливается обычным образом [6]. Лемма доказана.

Введём следующие обозначения:

$$\frac{2}{3}h_0=:r_0,\quad \frac{1}{3}(c_0^{-1}\tilde g_0(0)+2\lambda_0)=:L_0,\quad \frac{1}{3}c_0^{-1}\lambda_0\tilde g_0(0)=:M_0.$$

Представим систему уравнений (18)–(23) в виде операторного уравнения

$$\varphi=A\varphi, \tag{26}$$

где $\varphi=(\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t),\varphi_3(t),\varphi_4(t),\varphi_5(t),\varphi_6(t))^{\text{т}}$ – вектор-функция, первые две компоненты которой принадлежат пространству $C(D_T)$ и остальные – пространству $C[0,T]$ (линейное пространство таких вектор-функций обозначим через C_6), а оператор A действует в пространстве C_6 и имеет вид $A\varphi=(A_1\varphi,A_2\varphi,A_3\varphi,A_4\varphi,A_5\varphi,A_6\varphi)^{\text{т}}$. Если обозначить

$$\varphi_1(x,t)=\tilde u(x,t),\quad \varphi_2(x,t)=\frac{\partial\tilde u}{\partial t}(x,t)+c_0(\tilde k(t-x)x+h_0'(t-x)+\lambda_0h_0(t-x)),$$

$$\varphi_3(t)=\tilde k(t)-2h_0''(t)+3L_0h_0'(t)-3M_0h_0(t),\quad \varphi_4(t)=h_0(t),$$

$$\varphi_5(t)=h_0'(t),\quad \varphi_6(t)=h_0''(t)+\tilde k(t)-h_0h_0(t)$$

и ввести вектор-функцию

$$\varphi_0(x,t)=(\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03},\varphi_{04},\varphi_{05},\varphi_{06})^{\text{т}}:=$$

$$:=\biggl(\beta(x),\frac{1}{2}(\tilde g_0'(t-x)+(\lambda_0-h(0))\tilde g_0(t-x))-\frac{c_0}{2}\Lambda\biggl(\frac{x+t}{2}\biggr),$$

$$-\frac{1}{2}\Lambda'\biggl(\frac{t}{2}\biggr)-\frac{1}{c_0}\biggl[\tilde g_0''(t)-\lambda_0\tilde g_0'(t)-\frac{1}{2}\Lambda\biggl(\frac{t}{2}\biggr)\beta\biggl(\frac{t}{2}\biggr)\biggr],-h(0)+h_1t,h_1,0\biggr)^{\text{т}},$$

то в соответствии с равенствами (18)–(23) компоненты оператора A уравнения (26) будут иметь вид:

$$A_1\varphi=\varphi_{01}+\int\limits_x^t\biggl[\varphi_2(x,\tau)-c_0\varphi_5(\tau-x)-c_0x\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(\tau-x)+\varphi_3(\tau-x))-$$

$$-L_0\varphi_5(\tau-x)+(M_0+r_0)\varphi_4(\tau-x)\biggr)-\lambda_0c_0\varphi_4(\tau-x)\biggr]\,d\tau,$$

$$A_2\varphi=\varphi_{02}+\frac{\lambda_0}{2}\int\limits_0^{t-x}\varphi_4(\tau)\tilde g_0(t-x-\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-x}\varphi_5(t-x-\tau)\tilde g_0(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^x\biggl[\Lambda(\xi)\varphi_1(\xi,t-x+\xi)-\int\limits_0^{t-x}\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(\tau)+\varphi_3(\tau))-L_0\varphi_5(\tau)+(M_0+r_0)\varphi_4(\tau)\biggr)\times$$

$$\times\,\varphi_1(\xi,t-x+\xi-\tau)\,d\tau\Bigr]\,d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{(t+x)/2}\Bigl[\Lambda(\xi)\varphi_1(\xi,t+x-\xi)-$$

$$-\,2c_0\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(t+x-2\xi)+\varphi_3(t+x-2\xi))-L_0\varphi_5(t+x-2\xi)+(M_0+r_0)\varphi_4(t+x-2\xi)\biggr)-$$

$$-\int\limits_0^{t+x-2\xi}\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(\tau)+\varphi_3(\tau))-L_0\varphi_5(\tau)+(M_0+r_0)\varphi_4(\tau)\biggr)\varphi_1(\xi,t+x-\xi-\tau)\,d\tau\biggr]\,d\xi,$$

$$A_3\varphi=\varphi_{03}+\frac{\lambda_0}{c_0}\int\limits_0^t\varphi_4(\tau)\tilde g_0'(t-\tau)\,d\tau-\frac{1}{c_0}\int\limits_0^t\varphi_4(\tau)\tilde g_0''(t-\tau)\,d\tau-$$

$$-\,\frac{1}{c_0}\int\limits_0^t\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(\tau)+\varphi_3(\tau))-L_0\varphi_5(\tau)+(M_0+r_0)\varphi_4(\tau)\biggr)\beta\biggl(\frac{t-\tau}{2}\biggr)\,d\tau+$$

$$+\,\frac{1}{c_0}\int\limits_0^{t/2}\biggl[\Lambda(\xi)\biggl(\varphi_2(\xi,t-\xi)-c_0\xi\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(t-2\xi)+\varphi_3(t-2\xi))-$$

$$-\,L_0\varphi_5(t-2\xi)+(M_0+r_0)\varphi_4(t-2\xi)\biggr)-c_0\varphi_5(t-2\xi)-c_0\lambda_0\varphi_4(t-2\xi)\biggr)+$$

$$+\int\limits_0^{t-2\xi}\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(\tau)+\varphi_3(\tau))-L_0\varphi_5(\tau)+(M_0+r_0)\varphi_4(\tau)\biggr)\times$$

$$\times\biggl(\varphi_2(\xi,t-\xi-\tau)-c_0\xi\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(t-2\xi-\tau)+\varphi_3(t-2\xi-\tau))-$$

$$-\,L_0\varphi_5(t-2\xi-\tau)+(M_0+r_0)\varphi_4(t-2\xi-\tau)\biggr)-c_0\varphi_5(t-2\xi-\tau)-c_0\lambda_0\varphi_4(t-2\xi-\tau)\biggr)\,d\tau\biggr]\,d\xi,$$

$$A_4\varphi=\varphi_{04}+\int\limits_0^t(t-\tau)\biggl(\frac{1}{3}(\varphi_6(\tau)-\varphi_3(\tau))+L_0\varphi_5(\tau)-\biggl(M_0-\frac{r_0}{2}\biggr)\varphi_4(\tau)\biggr)\,d\tau,$$

$$A_5\varphi=\varphi_{05}+\int\limits_0^t\biggl(\frac{1}{3}(\varphi_6(\tau)-\varphi_3(\tau))+L_0\varphi_5(\tau)-\biggl(M_0-\frac{r_0}{2}\biggr)\varphi_4(\tau)\biggr)\,d\tau,$$

$$A_6\varphi=\varphi_{06}-\int\limits_0^t\biggl(\frac{1}{3}(2\varphi_6(t-\tau)+\varphi_3(t-\tau))-L_0\varphi_5(t-\tau)+(M_0+r_0)\varphi_4(t-\tau)\biggr)\varphi_4(\tau)\,d\tau.$$

Рассмотрим введённое выше линейное пространство C_6 вектор-функций φ. Определим в этом пространстве норму равенством

$$\|\varphi\|=\max_{1\le i\le 6}\|\varphi_i\|,$$

где $\|\varphi_i\|=\max\limits_{(x,t)\in D_T}|\varphi_i(x,t)|,\ \ i=1,2;\ \ \|\varphi_i\|=\max\limits_{t\in[0,T]}|\varphi_i(t)|,\ \ i=\overline{3,6}.$

Обозначим через $B(\varphi_0)$ множество вектор-функций $\varphi(x,t)$, для которых справедливо неравенство $\|\varphi-\varphi_0\|\le\|\varphi_0\|$.

Очевидно, что $\|\varphi\|\le 2\|\varphi_0\|$ для $\varphi(x,t)\in B(\varphi_0)$. Докажем, что оператор A является сжимающим в метрическом пространстве $B(\varphi_0)$, если число T достаточно мало. Оператор A будет сжимающим, если выполнены следующие два условия:

1) если $\varphi\in B(\varphi_0)$, то $A\varphi\in B(\varphi_0)$;

2) если φ^1,φ^2 – произвольные элементы из $B(\varphi_0)$, то справедливо неравенство

$$\|A\varphi^1-A\varphi^2\|\le\rho\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

где $\rho=\text{fix}\in(0,1)$.

Проверим выполнение условия 1). Для упрощения записи обозначим

$$P_0:=1+L_0+M_0+r_0,\quad \Lambda_0:=\max_{x\in[0,T]}|\Lambda(x)|,\quad B_0:=\max_{x\in[0,T/2]}|\beta(x)|,$$

$$G_0:=\max_{t\in[0,T]}|\tilde g_0(t)|,\quad G_1:=\max_{t\in[0,T]}|\tilde g_0'(t)|,\quad G_2:=\max_{t\in[0,T]}|\tilde g_0''(t)|.$$

Пусть $\varphi\in B(\varphi_0)$. Тогда для $(x,t)\in D_T$ имеют место оценки

$$|A_1\varphi-\varphi_{01}|\le\int\limits_x^t\Bigg|\Bigg[\varphi_2(x,\tau)-c_0\varphi_5(\tau-x)-c_0x\Bigg(\frac13(2\varphi_6(\tau-x)+\varphi_3(\tau-x))-L_0\varphi_5(\tau-x)+$$

$$+(M_0+r_0)\varphi_4(\tau-x)\Bigg)-\lambda_0c_0\varphi_4(\tau-x)\Bigg]d\tau\Bigg|\le 2T\|\varphi_0\|(1+c_0(P_0T+1+\lambda_0))=:\alpha_1\|\varphi_0\|,$$

$$|A_2\varphi-\varphi_{02}|\le\|\varphi_0\|T\left[(\lambda_0+1)G_0+\frac32\Lambda_0+P_0(c_0+3T\|\varphi_0\|)\right]=:\alpha_2\|\varphi_0\|,$$

$$|A_3\varphi-\varphi_{03}|\le\|\varphi_0\|T\left[2c_0^{-1}(\lambda_0G_1+G_2+P_0B_0)+\left(c_0^{-1}+\frac{TP_0}{2}+\Lambda_0+1\right)(\Lambda_0+TP_0\|\varphi_0\|)\right]=:\alpha_3\|\varphi_0\|,$$

$$|A_4\varphi-\varphi_{04}|\le\|\varphi_0\|T^2\left[\frac23+L_0+M_0+\frac{r_0}{2}\right]=:\alpha_4\|\varphi_0\|,$$

$$|A_5\varphi-\varphi_{05}|\le\|\varphi_0\|T\left[\frac43+2L_0+2M_0+r_0\right]=:\alpha_5\|\varphi_0\|,$$

$$|A_6\varphi-\varphi_{06}|\le 4\|\varphi_0\|^2TP_0=:\alpha_6\|\varphi_0\|.$$

Из полученных оценок следует, что оператор A осуществляет отображение множества $B(\varphi_0)$ на себя, если для числа T выполнено условие

$$\max_{1\le i\le 6}\alpha_i<1. \tag{27}$$

Теперь проверим выполнение условия 2). Пусть $\varphi^k:=(\varphi_1^k,\varphi_2^k,\varphi_3^k,\varphi_4^k,\varphi_5^k,\varphi_6^k)^{\text{т}}$ и $\varphi^k\in B(\varphi_0)$, $k=1,2$. Используя очевидные неравенства

$$|\varphi_k^1\varphi_s^1-\varphi_k^2\varphi_s^2|\le|\varphi_k^1-\varphi_k^2\|\varphi_s^1|+|\varphi_k^2\|\varphi_s^1-\varphi_s^2|\le 4\|\varphi_0\|\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

получаем

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_1\|=\int\limits_x^t\Big[\|\varphi_2^1(x,\tau)-\varphi_2^2(x,\tau)\|-c_0\|\varphi_5^1(\tau-x)-\varphi_5^2(\tau-x)\|-$$

$$- c_0 x\Bigg(\frac{1}{3}(2\|\varphi_6^1(\tau-x)-\varphi_6^2(\tau-x)\|+\|\varphi_3^1(\tau-x)-\varphi_3^2(\tau-x)\|)-L_0\|\varphi_5^1(\tau-x)-\varphi_5^2(\tau-x)\|+$$

$$+(M_0+r_0)\|\varphi_4^1(\tau-x)-\varphi_4^2(\tau-x)\|\Bigg)+\lambda_0 c_0\|\varphi_4^1(\tau-x)-\varphi_4^2(\tau-x)\|\Bigg]\,d\tau\le$$

$$\le\|\varphi^1-\varphi^2\|T[1+c_0(P_0T+1+\lambda_0)]=\frac{\alpha_1}{2}\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_2\|\le\|\varphi^1-\varphi^2\|T\left[\frac{1}{2}(\lambda_0+1)G_0+\frac{3}{4}\Lambda_0+P_0\left(\frac{c_0}{2}+3T\|\varphi_0\|\right)\right]\le\alpha_2\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_3\|\le\|\varphi^1-\varphi^2\|T\Bigg[c_0^{-1}(\lambda_0G_1+G_2+P_0B_0)+$$

$$+\left(\frac{\Lambda_0}{2}+TP_0\|\varphi_0\|\right)\left(c_0^{-1}+\frac{TP_0}{2}+\lambda_0+1\right)\Bigg]\le\alpha_3\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_4\|\le\|\varphi^1-\varphi^2\|T^2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(L_0+M_0)+\frac{r_0}{4}\right]=\frac{\alpha_4}{2}\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_5\|\le\|\varphi^1-\varphi^2\|T\left[\frac{2}{3}+L_0+M_0+\frac{r_0}{2}\right]=\frac{\alpha_5}{2}\|\varphi^1-\varphi^2\|,$$

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_6\|\le 4\|\varphi^1-\varphi^2\|TP_0\|\varphi_0\|=\alpha_6\|\varphi^1-\varphi^2\|.$$

Следовательно, $\|A\varphi^1-A\varphi^2\|\le\rho\|\varphi^1-\varphi^2\|$, где $\rho<1$, если $T>0$ удовлетворяет условию (27). Таким образом, если число T настолько мало, что выполняется условие (27), то оператор A является сжимающим в метрическом пространстве $B(\varphi_0)$. Тогда, согласно принципу Банаха, существует единственное решение уравнения (26) в пространстве $B(\varphi_0)$ [8, с. 87–97].

Так как $h_0(t)=k(t)\exp(h(0)t/2)$, то по найденной функции $h_0(t)$ функция $k(t)$ находится по формуле $k(t)=h_0(t)\exp(-h(0)t/2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Janno J., von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. methods in Appl. Sciences. 1997. V. 20. № 4. P. 291–314.
2. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15. № 1. С. 86–98.
3. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17. № 4. С. 18–43.
4. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97. Вып. 6. С. 855–867.
5. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 72–82.
6. *Дурдиев Д.К.* Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения электродинамики // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 867–873.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Институт математики АН Республики Узбекистан, г. Ташкент,
Бухарский государственный университет

Поступила в редакцию
05.07.2016 г.