ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида
УДК: 517.927

Абдуманнопов Муҳаммадсодиқ
Муҳаммадюсуф ўғли

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛАЛАР

Ихтисослик: 5А130101-Математика (математик анализ)
Магистр академик даражасини олиш учун ёзилган

МАГИСТРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ

Илмий раҳбар: **физика-математика фанлари доктори, академик А. Азамов**

ФАРҒОНА-2020

МУНДАРИЖА

КИРИШ

Маълумки, мамлакатимиз ёш авлодини жисмонан соғлом, интеллектуал ривожланган, мустақил фикрлайдиган, қатъий ҳаётий позицияга эга, Ватанга содиқ қилиб тарбиялаш, демократик ислоҳотларни чуқурлаштириш ва фуқаролик жамиятини ривожлантириш жараёнида уларнинг ижтимоий фаоллигини ошириш 2017-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг бешта устувор йўналиши бўйича “харакатлар стратегияси”да муҳим вазифалар сифатида белгилаб берилган.

Бинобарин, ҳар бир давлат ва жамият равнақи ёш авлоднинг камолоти, интилиши, шижоати билан узвий боғлиқ. Шу маънода, юртимизда давлат бюджетидан ижтимоий соҳага, жумладан, таълим тизими ислоҳотларига йўналтирилаётган сармоялар мунтазам ошиб бораётгани, таълим соҳасидаги қонунлар ва давлат дастурлари доирасида юқори малакали кадрлар тайёрлаш, илм-фан ва ишлаб чиқаришнинг самарали интеграциялашувини таъминлаш, ёшларни миллий ва умуминсоний қадриятлар руҳида тарбиялашдек долзарб вазифалар муваффақиятли бажарилаётгани алоҳида эътирофга моликдир.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори узлуксиз таълим тизимини ривожлантириш, мамлакатимизнинг изчил ривожланиб бораётган иқтисодиётини юқори малакали кадрлар билан таъминлаш, барча ҳудудлар ва тармоқларни стратегик жиҳатдан комплекс ривожлантириш масалаларини ҳал қилиш борасида олий таълим тизими иштирокини кенгайтириш йўлидаги яна бир муҳим амалий қадам бўлди [1].

Ушбу қарорда кўра, қуйидагилар олий таълим тизимини ривожлантиришнинг энг муҳим вазифалари этиб белгиланди:

ҳар бир олий таълим муассасаси томонидан хориждаги етакчи турдош илмий-таълим муассасалари ҳамкорлик алоқаларини йўлга қўйиш, ўқув жараёнига халқаро таълим стандартларига асосланган энг замонавий педагогик технологиялар, таълим дастурлари ва ўқув-методик материалларни кенг жорий этиш, илмий-педагогик фаолиятга юқори малакали чет эл ўқитувчилари ва олимларини жалб этиш;

олий таълим муассасаларидаги ихтисослик йўналишлари ва мутахассисликларни ҳудудлар ва соҳалар бўйича жорий этилаётган дастурларнинг талаб ва эҳтиёжлари, иқтисодиёт тармоқлари ва ҳудудларни комплекс тараққий эттириш истиқболларини инобатга олган ҳолда оптималлаштириш;

янги авлод ўқув қўлланмаларини яратиш ва олий таълим тизимига кенг татбиқ этиш, энг янги хорижий адабиётларни сотиб олиш ва таржима қилиш;

педагог кадрларнинг касб малакаси ва маҳоратини мунтазам ошириб бориш, педагог ва илмий ходимларнинг стажировкадан ўтишини йўлга қўйиш, олий таълим муассасалари битирувчиларини PhD дастури ва хорижий магистратура дастурлари асосида ўқитиш;

олий таълим муассасаларининг илмий салоҳиятини мустаҳкамлаш, олий таълим тизимида илмий тадқиқотларни янада ривожлантириш, профессор-ўқитувчилар таркибининг илмий фаолияти самарадорлигини ошириш, иқтидорли талаба-ёшларни илмий фаолият билан шуғулланишга жалб этиш;

талаба-ёшларнинг қалби ва онгига миллий истиқлол ғоясини, халқимизнинг юксак маънавияти ва инсонпарварлик анъаналарига садоқат туйғусини чуқур сингдириш, ёт ва бегона бўлган ғояларга нисбатан уларда мустаҳкам иммунитет ва танқидий муносабатни шакллантириш;

олий таълим муассасалари моддий-техника базасини уларнинг ўқув ва илмий-лаборатория биноларини, спорт иншоотлари ва ижтимоий-муҳандислик инфратузилмаларини қуриш, капитал таъмирлаш ва реконструкция қилиш орқали янада мустаҳкамлаш, замонавий илм-фан соҳаларининг устувор йўналишлари бўйича ўқув-илмий лабораториялар базасини замонавий асбоб-ускуналар билан таъминлаш;

олий таълим муассасаларини замонавий ахборот-коммуникация технологиялари воситалари билан таъминлаш, талабалар, ўқитувчи ва ёш тадқиқотчиларнинг жаҳондаги илғор таълим ресурслари, илмий адабиётлар ва маълумотлар базаси бўйича электрон каталогларга кириш имкониятини кенгайтириш.

Қарорда белгиланган вазифаларнинг самарали ечимини тўлиқ таъминлаш мақсадида олий таълим даражасини сифат жиҳатидан ошириш ва тубдан такомиллаштириш, олий таълим муассасалари моддий-техника базасини мустаҳкамлаш ва модернизация қилиш, уларни замонавий ўқув-илмий лабораториялари, ахборот-коммуникация технологиялари билан жиҳозлаш мақсадида Олий таълим тизимини 2017-2021 йилларга мўлжалланган комплекс ривожлантириш дастури тасдиқланди.

Юқоридагиларга асосан хулоса қилиб айтиш мумкинки, мазкур магистрлик диссертацияси ҳам юқорида белгилаб берилган вазифаларни бажаришдаги бир уриниш бўлиб, унда каср тартибли дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий шартли масалалар бўйича олиб борилган илмий тадқиқотлар баён қилинган.

Мавзунинг долзарблиги. Маълумки, кейинги вақтларда дифференциал тенгламалар учун нолокал шартли масалалар қўйиш ва ўрганишга қизиқиш ортмоқда. Буни нолокал масалаларнинг физика, механика, математик биология, томография ва бошқа фанлар масалаларини тадқиқ қилишда фойдаланилиши [2] билан ҳам, дифференциал тенгламалар назарияси тараққиёти ички эҳтиёжининг натижаси сифатда ҳам изоҳлаш мумкин.

Шу пайтгача интегро-дифференциал тенгламалар учун асосан чегаравий масалалар ўрганилган. Бу магистрлик диссертациясида шундай тенгламалар учун чегаравий шартли масалалар билан бир қаторда интеграл шартли масалалар ҳам ўрганилган.

Тадқиқот объекти ва предметининг белгиланиши. Интегро-дифференциал тенгламалар ва уларга қўйилган масалалар.

Тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари. Интегро-дифференциал тенгламалар учун масалалар қўйиш ва қўйилган масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги. Ушбу магистрлик диссертациясида олинган илмий натижалар барчаси янги. Улар қатъий математик мулоҳазалар ёрдамида исботланган.

Тадқиқотнинг асосий масалалари ва фаразлари. Интегро-дифференциал тенгламалар учун локал ва нолокал масалалар қўйилишини ўрганиш, бундай масалаларни ечишнинг усулларини ишлаб чиқиш ва қўйилган масалаларнинг бир қийматли ечилишини исботлаш.

Мавзу бўйича қисқача адабиётлар таҳлили. Нолокал шартли масалаларнинг бир тури интеграл шартли масалалардир. Интеграл шартли масалалар дастлаб Дж.Каннон [3] томонидан иккинчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали параболик типдаги тенглама учун қўйилган ва ўрганилган бўлиб, кейинчалик бундай шартли масалалар, эллиптик, гиперболик ва аралаш типдаги тенгламалар учун (масалан, [4] га қаранг), ҳозирги пайтда эса оддий дифференциал тенгламалар учун ҳам баён қилинмоқда ва ўрганилмоқда [5]. Оддий дифференциал тенгламалар учун масала қўйишда интеграл шартлар биринчи ва иккинчи турда бўлади. Дастлаб қўйилган масала ечимининг ягоналигини экстремум принципи билан исботлашда 2-тур интеграл шартлар қулай, биринчи тур интеграл шартлар эса ноқулай деб ҳисобланар эди. Лекин [5] да биринчи тур интеграл шарт билан қўйилган масала ечимининг ягоналигини экстремум принципи билан исботлашнинг бир усули баён қилинди.

Тадқиқотда қўлланилган методиканинг қисқача тавсифи. Қўйилган масалаларни тадқиқ қилишда интегро-дифференциал тенгламалар учун локал ва нолокал масалалар, Бессел функциялар ва каср тартибли дифференциал ва интеграл оператолар назарияси, интеграл тенгламалар назариясидан кенг фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг назарий ва амалий аҳамияти. Ушбу магистрлик диссертациясида олинган илмий натижалар асосан назарий аҳамиятга эга. Лекин улардан диссертацияда ўрганилган дифференциал тенгламаларга келтириладиган биологик жараёнларни тадқиқ қилишда фойдаланилиши мумкин.

Диссертация таркибининг қисқача тавсифи. Ушбу магистрлик диссертацияси “Интегро-дифференциал тенгламалар учун интеграл шатрли масалалар” мавзусига бағишланган бўлиб, кириш қисми, учта боб, ўн учта параграф, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйҳатидан иборат.

Диссертациянинг **кириш қисми**да тадқиқот мавзусининг долзарблиги ва унинг ўрганилганлик даражаси батафсил баён қилиниб, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари кўрсатиб ўтилган.

Диссертациянинг **биринчи боби** “Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун икки нуқтали чегаравий масалалар” деб номланиб, у учта параграфдан иборатдир. Унда мавзуни ёритиш учун зарур бўлган асосий ва ёрдамчи тушунчалар келтирилган ҳамда мавҳум аргументли Бессел функциясини ўз ичига олувчи интеграл оператор қатнашган ўзгармас коэффициентли тенглама учун икки нуқтали чегаравий масала, интеграл операторлар йиғиндиси қатнашган иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли тенглама учун икки нуқтали чегаравий масалалар келтирилган ва ўрганилган.

Диссертациянинг **иккинчи боби** “Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун биринчи тур интеграл шартли масалалар” деб номланган бўлиб, еттита параграфдан иборат.

Биринчи параграфда биномиал йиғиндили интеграл оператор қатнашган

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x (a+xt)^n y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<x<1 \qquad (2.1)$$

тенглама учун қуйидаги биринчи тур интеграл шартли масала ўрганилган:

II_1 **масала.** (2.1) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$y(0)=k_1, \qquad \int_0^1 y(x)dx = k_2, \tag{2.2}$$

бу ерда k_1 ва k_2- берилган ҳақиқий сонлар.

Қўйилган масала бир қийматли ечилишини исботлашда қуйидаги икки леммадан фойдаланилди.

2.1-лемма. *Агар* $y(x)$ *функция* $[0,1]$ *сегментда узлуксиз бўлиб,*

$$\int_0^1 y(x)dx = 0 \tag{2.3}$$

тенгликни қаноатлантирса, $\left[0,1\right]$ *сегментда шундай* ξ *сон топиладики,* $y(\xi)=0$ *тенглик ўринли бўлади.*

2.2-лемма. *Агар* $a \geq 0$, $\alpha(x), \gamma(x) \in C^1[0,x_0]$, $\gamma(x_0) \leq 0$, $\gamma'(x) \geq 0$, $(1/2)\alpha'(x) - \beta(x) \geq 0,\ x \in \left[0, x_0\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x (a+xt)^n y(t)\,dt = 0, \quad x \in (0,x_0); \tag{2.4}$$

$$y(0)=0, \qquad y(x_0)=0 \tag{2.5}$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

II_1 масала бўйича олинган натижа теорема шаклида ифодаланган.

2.1-теорема. *Агар* $\alpha(x), \gamma(x) \in C^1[0,1]$ *бўлиб,* $a \geq 0$, $\gamma(x) \leq 0$, $\gamma'(x) \geq 0$, $(1/2)\alpha'(x) - \beta(x) \geq 0$, $x \in \left[0,1\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Иккинчи параграфда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt = f(x), \quad 0<x<1 \tag{2.16}$$

тенглама учун қуйидаги масала ўрганилган:

II_2 **масала.** (2.16) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

II_2 масала бўйича натижалар 2.1-лемма ва қуйидаги леммадан фойдаланиб олинган.

2.3-лемма. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,x_0]$*;* $\gamma(x_0)\le 0,$ $\gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ x\in\left[0,x_0\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt=0,\ \ x\in(0,x_0)\,;\quad \mathit{(2.17)}$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

II_2 масала бўйича қуйидаги теоремалар ўринли.

2.2-теорема. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,1]$ *бўлиб* $\gamma(x)\le 0,$ $\gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ \ x\in\left[0,1\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

2.3-теорема. *Агар 2.2-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_2 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Учинчи параграфда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)D_{0x}^{-a}y(t)=0,\quad x\in(0,1),\qquad (2.26)$$

тенглама учун қуйидаги биринчи тур интеграл шартли масала ўрганилган:

II_3 **масала.** (2.26) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

II_3 масала бўйича натижалар 2.1-лемма ва қуйидаги леммадан фойдаланиб олинган.

2.4-лемма. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,x_0]$*;* $\gamma(x_0)\le 0,$ $\gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ \ x\in\left[0,x_0\right]$ *шартлар бажарилса,*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)(x-t)^{-a}dt=0,\ \ x\in(0,x_0)\,;\quad \mathit{(2.27)}$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

II_3 масала бўйича қуйидаги теоремалар ўринли.

2.4-теорема. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,1]$*;* $\gamma(x)\le 0,$ $\gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,$ $x\in\left[0,1\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

2.5-теорема. *Агар 2.4-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_3 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Тўртинчи параграфда

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)\,I_0[\lambda(x-t)]dt=f(x),\qquad x\in(0,1),\qquad (2.36)$$

тенглама учун қуйидаги биринчи тур интеграл шартли масала ўрганилган, бу ерда α,β,γ - ўзгармас сонлар.

II_4 **масала.** (2.36) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

II_4 масалада қуйидаги леммадан фойдаланилган.

2.5-лемма. *Агар* $\beta\le 0,\ \gamma\le 0,\ 0\le|\lambda|\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ *бўлса,*

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)\,I_0[\lambda(x-t)]\,dt=0,\ \ x\in(0,x_0)\,;\qquad (2.37)$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

II_4 масала бўйича қуйидаги теоремалар ўринли эканлиги исботланган.

2.6-теорема. *Агар 2.5-лемманинг шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

2.7-теорема. *Агар 2.6-теорема шартлари ва* $f\left(x\right)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_4 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Бешинчи параграфда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\overline{J_s}\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=f\left(x\right),\ 0<x<1\qquad (2.47)$$

тенглама учун қуйидаги биринчи тур интеграл шартли масала ўрганилган:

II_5 **масала.** (2.47) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

II_5 масала бўйича қуйидаги натижалар олинган.

2.6-лемма. Агар $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1\left[0,x_0\right]$, $\beta\left(x\right)\in C[0,x_0],\gamma(x_0)\le 0$, $\gamma'(x)\ge 0$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0$, $x\in\left[0,x_0\right]$ шартлар бажарилса,

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\overline{J_s}\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0,\ 0<x<1, \qquad (2.48)$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

2.8-теорема. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1\left[0,1\right],\beta\left(x\right)\in C[0,1]$, $\gamma(x)\le 0$, $\gamma'(x)\ge 0$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0$, $x\in\left[0,1\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

2.9-теорема. *Агар 2.8-теорема шартлари ва* $f\left(x\right)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_5 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Олтинчи параграфда

$$y''\left(x\right)+a\left(x\right)y'\left(x\right)+b\left(x\right)y\left(x\right)+c\left(x\right)\int_0^x\left(x-t\right)^{-\alpha}\overline{I_m}\left[\lambda\left(x+t\right)\right]y\left(t\right)dt=f(x) \quad (2.57)$$

тенглама учун қуйидаги биринчи тур интеграл шартли масала ўрганилган:

II_6 **масала.** (2.57) тенгламанинг $\left[0,1\right]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

II_6 масала бўйича қуйидаги натижалар олинган.

2.10-теорема. *Агар* $a(x),c(x)\in C^1\left[0,1\right]$, $c\left(x\right)\in\left[0,1\right]$ $c(x)\le 0$, $c'(x)\ge 0$, $(1/2)a'(x)-b(x)\ge 0$, $x\in\left[0,1\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

2.11-теорема. *Агар 2.10-теорема шартлари ва* $f\left(x\right)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_6 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Еттинчи параграфда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int_0^x (x-t)^{-a}\, ch\big[\lambda(x-t)\big]y(t)dt = f(x),\ \ 0<x<1 \qquad (2.67)$$

тенглама учун қуйидаги биринчи тур интеграл шартли масала ўрганилган:

II_7 **масала.** (2.67) тенгламанинг $[0,1]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

II_7 масала бўйича қуйидаги натижалар олинган.

2.8-лемма. *Агар* $\alpha(x), \gamma(x), \in C^1[0,x_0]$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\geq 0$, $-e^{-2|\lambda_1|x}\leq\gamma(x)\leq 0,\ \ x\in[0,x_0]$ *бўлса,*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int_0^x (x-t)^{-a}\, ch\big[\lambda(x-t)\big]y(t)dt = 0,\ \ x\in(0,x_0) \qquad (2.68)$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

2.12-теорема. *Агар* $\alpha(x)$, $\gamma(x)\in C^1[0,1]$, $\gamma(x)\leq 0$, $\gamma'(x)\geq 0$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

2.13-теорема. *Агар 2.12-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_7 *масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Диссертациянинг **учинчи боби** “Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун иккинчи тур интеграл шартли масалалар” деб номланган бўлиб, боб уч параграфдан иборат.

Биринчи параграфда каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган

$$y''(x)+b(x)y'(x)+\omega(x)D_{0x}^{\delta}y(x)+v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)+c(x)y(x)=f(x),\ x\in(-1,1) \quad (3.1)$$

тенглама учун қуйидаги масала ўрганилган:

III_1 **масала.** (3.1) тенгламанинг $C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$ синфга тегишли шундай ечими топилсинки, у

$$y(-1)=\int_{-1}^{0}\alpha(t)y(t)dt+k_1,\quad y(1)=\int_{0}^{1}\beta(t)y(t)dt+k_2 \tag{3.2}$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\alpha(t)$ ва $\beta(t)$- берилган узлуксиз функциялар, k_1 ва k_2 эса берилган ҳақиқий сонлар.

III_1 масала учун қуйидаги теоремалар ўринли.

3.1-теорема. *Агар* $c(x)\le 0,\omega(x)\le 0,v(x)\le 0,\ c^2(x)+\omega^2(x)+v^2(x)\ne 0,$ $x\in(-1,1)$*;* $|\alpha(x)|\le 1, x\in[-1,0]$*;* $|\beta(x)|\le 1,\ x\in[0,1]$ *шартлар бажарилса,* III_1 *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

3.2-теорема. *Агар 3.1-теорема шартлари ва* $b(x),\,\omega(x),\,v(x)\in C^1[-1,1]$, $f(x)\in C[0,1]$ *шартлар бажарилган бўлса,* III_1 *масала ечимга эга бўлади.*

Иккинчи параграфда каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган

$$y''(x)+b(x)y'(x)+\omega(x)D_{-1x}^{\delta}y(x)+v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)+c(x)y(x)=f(x),\ x\in(-1,1) \tag{3.9}$$

дифференциал тенглама учун қуйидаги масала ўрганилган:

III_2 **масала.** (3.9) тенгламанинг $C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$ синфга тегишли шундай ечими топилсинки, у

$$y(-1)=\lambda y(\xi)+k_1,\quad y(1)=\int_{0}^{1}\beta(t)y(t)dt+k_2 \tag{3.10}$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\beta(t)$- берилган узлуксиз функция, ξ, k_1 ва k_2 эса берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\xi\in(-1,0)$.

III_2 масала учун қуйидаги теоремалар ўринли.

3.3-теорема. *Агар* $c(x)\le 0,\omega(x)\le 0,v(x)\le 0,\ c^2(x)+\omega^2(x)+v^2(x)\ne 0,$ $x\in(-1,1)$*;* $|\lambda|\le 1,\ |\beta(x)|\le 1,\ x\in[0,1]$ *шартлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

3.4-теорема. *Агар 3.3-теорема шартлари ва* $b(x),\omega(x),v(x)\in C^1[-1,1]$, $f(x)\in C[0,1]$ *шартлар бажарилса,* III_2 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Учинчи параграфда каср тартибли дифференциал операторлар йиғиндиси қатнашган

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=f(x),\qquad x\in(0,1) \tag{3.16}$$

тенглама учун қуйидаги масала ўрганилган:

III_3 **масала.** (3.16) тенгламанинг $C[0,1]\cap C^2(0,1)$ синфга тегишли ва

$$y(0)=\int_0^1\alpha(t)y(t)dt+k_1,\ \int_{\xi_0}^1 y(t)dt=k_2 \tag{3.17}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\alpha(t)$-берилган узлуксиз функция бўлиб, $\xi_0\in(0,1)$.

III_3 масала учун қуйидаги лемма ва теоремаларнинг ўринли эканлиги исботланган.

3.1-лемма. *Агар* $a(x), b(x), e_k(x),\delta_k(x),c_s(x),\omega_s(x)\in C[0,1]$ *бўлиб,* $b(x)\le 0,\quad e_k(x)\le 0,\quad c_s(x)\le 0,\quad \sum_{k=1}^{n}e_k^2(x)+\sum_{s=1}^{m}c_s^2(x)+b^2(x)\ne 0,\quad \forall x\in(0,1)$ *тенгсизликлар ўринли,* $\delta_k(x)$ *функция* α_k *дан катта тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи камаймайдиган мусбат функция,* $\omega_s(x)$ *эса* β_s *дан катта тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи ўсмайдиган мусбат функция бўлса, у ҳолда*

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=0 \tag{3.18}$$

интегро-дифференциал тенгламанинг ечими $\left(0,1\right)$ *оралиқда мусбат максимум ва манфий минимумга эришмайди.*

3.5-теорема. *Агар 3.1-лемма шартлари бажарилган ва* $\left|\alpha\right|<1$ *бўлса,* III_3 *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

3.6-теорема. *Агар 3.5-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* III_3 *масала ягона ечимга эга бўлади.*

I БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ИККИ НУҚТАЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

Маълумки, оддий дифференциал тенгламалар назарияси узоқ тариҳга эга бўлиб, улар учун бошланғич масала (Коши масаласи) билан биргаликда чегаравий масалалар ҳам ўрганилади. Ҳозирги кунгача оддий дифференциал тенгламалар учун локал чегаравий масалалар билан бир қаторда кўплаб нолокал шартли чегаравий масалалар ўрганилди. Ушбу бобда биз иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун локал шартли масалаларни кўриб ўтамиз.

1.1-§. Асосий ва ёрдамчи тушунчалар

Номаълум функция дифференциал (ҳосила) ва интеграл белгиси остида қатнашган тенглама интегро-дифференциал тенглама дейилади. 2– тартибли чизиқли интегро-дифференциал тенгламалар қуйидаги

$$p_0(x)y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)+P\left[y\right]=f\left(x\right),\quad x\in(a,b)$$

кўринишга эга бўлиб, бу ерда $a,b\in R$, $a<b$, $y=y(x)$ – номаълум функция, $f\left(x\right)$ ва $p_j\left(x\right)$ $\left(j=\overline{0,2}\right)$ лар эса (a,b) оралиқда берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $p_0\left(x\right)\neq 0$, $x\in\left[a,b\right]$; $P[y]$ эса қандайдир чизиқли интеграл ёки каср (2 дан кичик) тартибли дифференциал оператор.

Агар $P[y]$ Фредгольмнинг интеграл оператори бўлса,

$$p_0\left(x\right)y''(x)+p_1\left(x\right)y'(x)+p_2(x)y(x)+\int_a^b K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt=f\left(x\right)\qquad x\in\left(a,b\right)\qquad(1.1)$$

кўринишдаги *интегро-дифференциал тенгламага* эга бўламиз, бу ерда $K\left(x,t\right)$ - $\Delta=\left\{\left(x,t\right):a\leq x,t\leq b\right\}$ тўртбурчакда қаралувчи функция.

(1.1) тенгламада $K(x,t)\not\equiv 0,\ (x,t)\in\overline{\Delta}$ бўлиши шарт, акс ҳолда (1.1) - дифференциал тенглама бўлиб қолади.

Агар (1.1) тенгламада $K(x,t)\equiv 0,\ t\in[x,b]$ бўлса, Вольтерранинг интеграл оператори қатнашган

$$p_0(x)y''(x)+p_1(x)y'+p_2(x)y(x)+\int_a^x K(x,t)y(t)dt=f(x),\ x\in(a,b) \qquad (1.2)$$

кўринишдаги *интегро – дифференциал тенгламага* эга бўламиз.

Агар $P[y]$ – каср тартибли интеграл ёки дифференциал оператор бўлса,

$$p_0(x)y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)+\gamma(x)D_{ax}^{\alpha}\omega(x)y(x)=f(x),\ x\in(a,b) \quad (1.3)$$

ёки

$$p_0(x)y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)+\gamma(x)D_{xb}^{\alpha}\omega(x)y(x)=f(x),x\in(a,b)$$

кўринишдаги *интегро-дифференциал тенгламага* эга бўламиз, бу ерда $p_j(x),\ j=\overline{0,2},\quad f(x),\gamma(x)$ ва $\omega(x)$-(a,b) оралиқда берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\gamma(x)\neq 0,\ \omega(x)\neq 0,\ x\in[a,b]$; $\alpha\in(-\infty,2)$ – берилган сон бўлиб, $\alpha\neq 0$ ва $\alpha\neq 1$;

$$D_{ax}^{\alpha}y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_a^x(x-t)^{-\alpha-1}y(t)dt, & \text{агар } \alpha<0 \ \text{ бўлса,}\\[2ex] \dfrac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}}\dfrac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\displaystyle\int_a^x(x-t)^{-\{\alpha\}}y(t)dt, & \text{агар } 0<\alpha \ \text{ бўлса,}\end{cases}$$

$$D_{xb}^{\alpha}y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_x^b(t-x)^{-\alpha-1}y(t)dt, & \text{агар } \alpha<0 \ \text{ бўлса,}\\[2ex] \dfrac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}}\dfrac{(-1)^{[\alpha]}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\displaystyle\int_x^b(t-x)^{-\{\alpha\}}y(t)dt, & \text{агар } 0<\alpha \ \text{ бўлса,}\end{cases}$$

$\Gamma(z)$- Эйлернинг гамма функцияси, $[\alpha]$ ва $\{\alpha\}$- α соннинг мос равишда бутун ва каср қисми.

(1.1), (1.2) ва (1.3) интегро-дифференциал тенгламалар учун *чегаравий масала* қуйидагича баён қилинади: (1.1) [(1.2) ёки (1.3)] *тенгламанинг* $[a,b]$ *оралиқда аниқланган, узлуксиз ва*

$$a_1 y(a) + b_1 y'(a) = c_1,\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = c_2 \qquad (1.4)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $a_j, b_j, c_j\ (j = \overline{1,2})$ - берилган сонлар бўлиб, $a_j^2 + b_j^2 \neq 0,\ j = \overline{1,2}$.

Биз бу бобда (1.2) кўринишдаги интегро-дифференциал тенгламалар учун (1.4) кўринишдаги шартли масалаларни кўриб ўтамиз.

1.2-§. Мавҳум аргументли Бессел функциясини ўз ичига олувчи интеграл оператор қатнашган ўзгармас коэффициентли тенглама учун икки нуқтали чегаравий масала

Ушбу интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)]dt = f(x), \qquad x \in (0,1), \quad (1.5)$$

бу ерда $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$-берилган хақиқий сонлар, $I_0(x)$- мавхум аргументли Бессел функцияси [6], $f(x)$-берилган узлуксиз функция.

I_1 **масала.** (1.5) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва

$$y(0) = k_1, \qquad y(1) = k_2 \qquad (1.6)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_1, k_2 \in R$.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

1.1-лемма. *Агар* $\beta \le 0,\ \gamma \le 0,\ 0 \le |\lambda| \le (1/4)[\sqrt{\alpha^2 - 8\beta} - \alpha]$ *бўлса,*

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)]\, dt = 0,\ x \in (0,1); \qquad (1.7)$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0 \qquad (1.8)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. (1.7) тенгликни $e^{-2|\lambda|x} y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $[0,1]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (1.8) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^1 e^{-2|\lambda|x}\left[y'(x)\right]^2 dx-\int_0^1 e^{-2|\lambda|x}\left[2\lambda^2+\alpha|\lambda|+\beta\right]y^2(x)dx-$$

$$-\gamma\int_0^1 e^{-2|\lambda|x}y(x)dx\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0\ . \qquad (1.9)$$

(1.9) тенгликдаги учинчи интегрални l билан белгилайлик:

$$l=\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)I_0\left[\lambda(x-t)\right]dt\,.$$

Бу ерда $I_0\left[\lambda(x-t)\right]$ функцияни

$$I_0\left[\lambda(x-t)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [6]:

$$l=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]dt\,.$$

Бу тенгликни $2chx=e^x+e^{-x}$ формуладан фойдаланиб,

$$l=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\sum_{m=1}^2\int_0^1 e^{-2x\mu_m(\xi)}\frac{d}{dx}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx \qquad (1.10)$$

кўринишда ёзиш мумкин бу ерда

$$\mu_m(\xi)=\lambda\left[1+(-1)^m\xi\right], \qquad \Phi_m(x,\xi)=\int_0^x y(t)e^{(-1)^m\lambda\xi t}dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб ва $\mu_m(\xi)\geq 0$ тенгсизликни эътиборга олиб, (1.10) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\times$$

$$\times\sum_{m=1}^2\left\{e^{-2\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(1,\xi)+2\mu_m(\xi)\int_0^1 e^{-2x\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx\right\}.$$

Буни ва $\gamma\leq 0$ эканлигини эътиборга олсак, (1.9) тенгликдаги охирги ҳаднинг манфий эмаслиги келиб чиқади.

Энди (1.9) даги иккинчи ҳадни қарайлик

$$2\lambda^2+\alpha|\lambda|+\beta=2\left(\lambda^2+\frac{\alpha}{4}|\lambda|+\frac{\alpha^2}{16}-\frac{\alpha^2}{16}+\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$\left(|\lambda|+\frac{\alpha}{4}\right)^2-\frac{\alpha^2-8\beta}{16}=\left(|\lambda|-\frac{\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha}{4}\right)\left(|\lambda|+\frac{\sqrt{\alpha^2-8\beta}+\alpha}{4}\right).$$

Охирги тенгликдан лемманинг $\beta\le 0$ ва $0\le|\lambda|\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ шартларига асосан, келиб чиқадики, $2\lambda^2+\alpha|\lambda|+\beta\le 0$ тенгсизлик ўринли. Демак, (1.9) тенгликнинг иккинчи ҳади ҳам манфий эмас.

Юқорида исботланганларни эътиборга олсак, (1.9) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,$ $x\in[0,1]$ деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (1.8) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,$ $x\in\left[0,1\right]$. 1.1-лемма исботланди.

1.1-теорема. *Агар 1.1-лемма шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция (0,1) оралиқда (1.7) тенгламани ва (1.8) шартларни қаноатлантиради. 1.1-леммага асосан бундай функция айнан нолга тенг, яьни $y(x)\equiv 0,$ $x\in[0,1].$ Демак, $y_1(x)\equiv y_2(x)$ $x\in[0,1].$ 1.1-теорема исбот бўлди.

1.2-теорема. *Агар 1.1-лемма шартлари бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1.5) тенгламани

$$y''(x)=g(x),\ \ x\in(0,1) \tag{1.10}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$g(x)=f(x)-\alpha y'(x)-\beta y(x)-\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt.$$

Агар $g(x)$ функцияни маълум деб ҳисобласак, (1.10) тенгламанинг ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)g(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{1.11}$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда

$$G(x,t)=\begin{cases} x(t-1), & x\le t; \\ (x-1)t, & x\ge t. \end{cases} \qquad (1.12)$$

(1.11) тенгликда $y(0)$, $y(1)$ ва $g(x)$ ларнинг ўрнига уларнинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва γ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)-\int_0^1 M(x,t)y(t)dt=q(x),\ x\in[0,1] \qquad (1.13)$$

кўринишдаги интеграл тенглама эга бўламиз, бу ерда

$$q(x)=k_1(1-x)+k_2x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt,$$

$$M(x,t)=\alpha G_t(x,t)-\beta G(x,t)-\gamma G(x,t)\int_t^1 I_0[\lambda(\xi-t)]dt.$$

(1.13)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1.1- теоремадан келиб чиқади [7].

(1.13) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 1.2-теорема исботланди.

1.3-§. Интеграл операторлар йиғиндиси қатнашган иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли тенглама учун икки нуқтали чегаравий масала

Ушбу кўринишдаги интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^x y(t)\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]dt=f(x), \qquad x\in(0,1), \qquad (1.14)$$

бу ерда $\alpha,\beta,\gamma_j,\lambda_j,\delta_j\,(j=\overline{1,n})$-берилган ҳақиқий сонлар, $\overline{I}_\delta(x)=\Gamma(\delta+1)\left(x/2\right)^{-\delta}I_\delta(x),\ I_\delta(x)$ -мавҳум аргументли Бессел функцияси [6], $\delta_j>(-1/2),\ j=\overline{1,n}.$ $f(x)$-берилган узлуксиз функция.

(1.14) тенглама учун [0,1] сегментда қуйидаги масалани қараймиз:

I_2 **масала.** (1.14) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (1.6) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_1,k_2\in R$- берилган сонлар.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

1.2-лемма. *Агар* $\beta\le 0,\ 0\le\lambda\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha],\quad \gamma_j\le 0,\quad j=\overline{1,n}$ *тенгсизликлар бажарилса,*

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^x y(t)\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]dt=0,\ \ x\in(0,1);\qquad (1.15)$$

$$y(0)=0,\qquad y(1)=0$$

тенгламанинг (1.8) шартни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат, бу ерда $\lambda=\sup\left\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,....|\lambda_n|\right\}.$

Исбот. (1.15) тенгликни $e^{-2\lambda x}y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $\left[0,1\right]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (1.8) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^1 e^{-2\lambda x}\left[y'(x)\right]^2dx-\int_0^1 e^{-2\lambda x}\left(2\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\right)y^2(x)dx-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)dx\int_0^x y(t)\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]dt=0\ .\qquad (1.16)$$

Аниқки, (1.16) тенгликдаги биринчи интеграл манфий эмас. 1.2-§ да кўрсатилганидек, агар $\beta\le 0,\quad 0\le\lambda\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ тенгсизликлар бажарилса, $2\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\le 0$ тенгсизлик бажарилиб, (1.16) тенгликнинг иккинчи ҳади ҳам манфий бўлмайди.

(1.16) тенгликдаги учинчи ҳадни қарайлик ва

$$l_j=\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)\bar{I}_{\delta_j}\left[\lambda_j(x-t)\right]dt,\; j=\overline{1,n}$$

белгилашларни киритайлик. Бу ерда $\bar{I}_{\delta_j}\left[\lambda_j(x-t)\right]$ функцияни

$$\bar{I}_{\delta_j}\left[\lambda_j(x-t)\right]=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}ch\left[\lambda_j(x-t)\xi\right]d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [6]:

$$l_j=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}d\xi\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)ch\left[\lambda_j(x-t)\xi\right]dt\,.$$

Бу тенгликни $2chx=e^x+e^{-x}$ формуладан фойдаланиб,

$$l_j=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}d\xi\sum_{m=1}^2\int_0^1 e^{-2x\mu_m(\xi)}\frac{d}{dx}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx \qquad (1.17)$$

кўринишда ёзиш мумкин бу ерда

$$\mu_m(\xi)=\lambda+(-1)^m\lambda_j\xi, \qquad \Phi_m(x,\xi)=\int_0^x y(t)e^{(-1)^m\lambda_j\xi t}dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб, (1.17) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l_j=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}d\xi\times$$

$$\times\sum_{m=1}^2\left\{e^{-2\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(1,\xi)+2\mu_m(\xi)\int_0^1 e^{-2x\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx\right\}.$$

$|\xi|\le 1$ ва $\lambda=\sup\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,...|\lambda_n|\}$ бўлганлиги учун $\mu_m(\xi)\ge 0,\; m=\overline{1,2}$. Бу тенгсизликларни эътиборга олсак, $l_j\ge 0, j=\overline{1,n}$ деган хулосага келамиз. Буни ва $\gamma_j\le 0\,, j=\overline{1,n}$ тенсизликларни ҳисобга олсак, (1.16) тенгликдаги охирги ҳаднинг ҳам манфий эмаслиги келиб чиқади.

Юқорида исботланганларга асосан, (1.16) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,\ \ x\in[0,1]$ деган хулосага келамиз. Бундан эса (1.8) шартларга кўра $y(x)\equiv 0,\ x\in\left[0,1\right]$ эканлиги келиб чиқади. 1.2-лемма исботланди.

1.3-теорема. *Агар 1.2-лемма шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб, тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция (0,1) оралиқда (1.15) тенгламани ва унинг четларида эса (1.8) шартларни қаноатлантиради. 1.2- леммага асосан бундай функция айнан нолга тенг, яъни $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1].$ Демак, $y_1(x)\equiv y_2(x)\ \ x\in[0,1].$ 1.3-теорема исбот бўлди.

1.4-теорема. *Агар 1.2-лемма шартлари бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1.14) тенгламани $y''(x)=g(x),\ \ x\in(0,1)$ кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$g(x)=f(x)-\alpha y'(x)-\beta y(x)-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^x y(t)\,\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]dt.$$

Агар $g(x)$ функцияни маълум деб ҳисобласак, бу тенгламанинг ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)g(t)dt,\ x\in[0,1] \qquad (1.18)$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда $G(x,t)$ - (1.12) функция.

(1.18) тенгликда $y(0),\ \ y(1)$ ва $g(x)$ ларнинг ўрнига уларнинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва γ_j иштирок этган ҳадларда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)-\int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt=q_1(x),\ x\in[0,1] \qquad (1.19)$$

кўринишдаги интеграл тенглама эга бўламиз, бу ерда

$$q_1(x) = k_1(1-x) + k_2 x + \int_0^1 f(t)G(x,t)dt,$$

$$M_1(x,t) = \alpha G_t(x,t) - \beta G(x,t) - G(x,t)\int_t^1 \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \bar{I}_{\delta_j}[\lambda_j(\xi - t)]dt.$$

(1.19)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1.3- теоремадан келиб чиқади [7].

(1.19) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. 1.4-теорема исботланди.

II БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН БИРИНЧИ ТУР ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛАЛАР

Маълумки, кейинги вақтларда дифференциал тенгламалар учун интеграл шартли масалалар ўрганила бошланди. Бундай шартларда агар номаълум функция интеграл остида қатнашса, уни биринчи тур интеграл шарт деб, агар ҳам интеграл шарт остида ҳам интеграл ташқарисида қўшилувчи сифатида қатнашса, уни иккинчи тур интеграл шарт деб аталади. Ушбу боб ва кейинги бобда биз (1.2) ва (1.3) кўринишдаги интегро-дифференциал тенгламалар учун биринчи ва иккинчи тур интеграл шартли масалаларни ўрганамиз.

2.1-§. Биномиал йиғиндили интеграл оператор қатнашган тенглама учун биринчи тур интеграл шартли масала

Фараз қилайлик, берилган $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ ва $f(x)$ функциялар [0,1] сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x (a+xt)^n y(t)\,dt = f(x), \quad 0<x<1 \qquad (2.1)$$

интегро - дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда a - берилган ҳақиқий сон, n эса берилган натурал сон.

II_1 **масала.** (2.1) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$y(0)=k_1, \qquad \int_0^1 y(x)dx = k_2, \qquad (2.2)$$

бу ерда k_1 ва k_2- берилган ҳақиқий сонлар.

Қўйилган масала бир қийматли ечилишини текширамиз. Бунда қуйидаги икки леммадан фойдаланамиз.

2.1-лемма. *Агар* $y(x)$ *функция* $[0,1]$ *сегментда узлуксиз бўлиб,*

$$\int_0^1 y(x)dx=0 \tag{2.3}$$

тенгликни қаноатлантирса, $\left[0,1\right]$ *сегментда шундай* ξ *сон топиладики,* $y(\xi)=0$ *тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. Агар $y(x)\geq 0$ ёки $y(x)\leq 0$ деб фараз қилсак, (2.3) тенглик бажарилмайди. Шунинг учун (2.3) дан келиб чиқадики, ёки $y(x)\equiv 0, x\in\left[0,1\right]$, ёки $y(x)$ функция $\left(0,1\right)$ оралиқда ишорасини ўзгартиради. Биринчи ҳолда лемма исбот бўлади, бунда ξ сифатида $\left(0,1\right)$оралиқдаги ихтиёрий сонни олиш мумкин. Иккинчи ҳолда эса, $y(x)$ функциянинг $\left(0,1\right)$ да узлуксиз бўлганлиги учун, шундай $\xi\in\left(0,1\right)$ топиладики, $y(\xi)=0$ тенглик ўринли бўлади. 2.1-лемма исботланди.

2.2-лемма. *Агар* $a\geq 0$, $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,x_0]$, $\gamma(x_0)\leq 0$, $\gamma'(x)\geq 0$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\geq 0,\ x\in\left[0,x_0\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x (a+xt)^n y(t)\,dt=0,\ \ x\in(0,x_0)\,; \tag{2.4}$$

$$y(0)=0, \qquad y(x_0)=0 \tag{2.5}$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. (2.4) тенгликни $y(x)$га кўпайтириб, сўнгра x бўйича $\left[0,x_0\right]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (2.5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0}\left[y'(x)\right]^2 dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{2}\alpha'(x)-\beta(x)\right]y^2(x)dx-$$

$$-\int_0^{x_0} y(x)\gamma(x)dx\int_0^x (a+xt)^n y(t)\,dt=0\ . \tag{2.6}$$

Энди (2.6) даги учинчи интегрални қараймиз. Уни ℓ билан белгилаб Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб ва қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\ell = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \int_0^{x_0} \gamma(x) \frac{d}{dx}\left(\int_0^x t^{n-k} y(t)dt\right)^2 dx,$$

бу ерда C_n^k - биномиал коэффициент. Бу ердаги x бўйича интегрални бўлаклаб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\ell = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \left\{ \gamma(x_0)\left(\int_0^{x_0} t^{n-k} y(t)dt\right)^2 dx - \int_0^{x_0} \gamma'(x)\left(\int_0^x t^{n-k} y(t)dt\right)^2 dx \right\}.$$

$a \geq 0,\ n \in N,\ \gamma(x_0) \leq 0,\ \gamma'(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, x_0]$ тенгсизликларга асосан охирги тенгликдан $\ell \leq 0$ эканлиги келиб чиқади. Буни ва $(1/2)\alpha'(x) - \beta(x) \geq 0,\quad \forall x \in [0, x_0]$ тенгсизликни эътиборга олсак, (2.6) тенгликдан $y'(x) \equiv 0$, яъни $y(x) = const,\ x \in [0, x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (2.5) шартларга асосан $y(x) \equiv 0,\ x \in [0, x_0]$. 2.2-лемма исботланди.

2.1-теорема. *Агар* $\alpha(x), \gamma(x) \in C^1[0,1]$ *бўлиб,* $a \geq 0$, $\gamma(x) \leq 0$, $\gamma'(x) \geq 0$, $(1/2)\alpha'(x) - \beta(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Исбот. 1) Масала ечимининг ягоналиги. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция

$$y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x)\int_0^x (a + xt)^n y(t)\,dt = 0,\ x \in (0,1) \qquad (2.7)$$

тенгламани ва

$$y(0) = 0, \qquad \int_0^1 y(x)dx = 0 \qquad (2.8)$$

шартларни қаноатлантиради. (2.8) тенгликларнинг иккинчиси ва 2.1-леммага асосан, шундай $x_0 \in (0,1)$ мавжудки, $y(x_0) = 0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, $\{(2.4),(2.5)\}$ масалани қарасак, 2.2-леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак $\{(2.7),(2.8)\}$ масаладан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int\limits_0^x(a+xt)^n y(t)dt=0,\quad x\in(x_0,1); \qquad (2.9)$$

$$y(x_0)=0, \qquad \int\limits_{x_0}^1 y(x)dx=0 \qquad (2.10)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

$\{(2.9),(2.10)\}$ тенгликларга юқоридаги усул билан 2.1- ва 2.2-леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (2.9) ва (2.10) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int\limits_{x_1}^1(a+xt)^n y(t)dt=0,\quad x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0, \qquad \int\limits_{x_1}^1 y(x)dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Бу тенгликларга ҳам 2.1- ва 2.2-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирамиз, натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0$, деган ҳулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1]$.

2) Масала ечимининг мавжудлиги: (2.1) тенгламани

$$y''(x)=f_1(x),\ x\in(0,1) \qquad (2.11)$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x)=f(x)-\alpha(x)y'(x)-\gamma(x)y(x)-\beta(x)\int_0^x(a+xt)^n y(t)dt.$$

Агар $f_1(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (2.11) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)\,f_1(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.12}$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда $G(x,t)$ - (1.12) функция.

(2.12) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ва $f_1(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(t)$ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int_0^1 M(x,t)y(t)dt\,,\ x\in[0,1] \tag{2.13}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M(x,t)=[G(x,t)\alpha(t)]_t'-G(x,t)\left[\beta(t)+\int_t^1(a+xt)^n\gamma(\xi)dt\right].$$

(2.13) тенгликни x бўйича [0,1] оралиқда интеграллаб, (2.2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M(x,t)dx\right]dt-2\int_0^1 dx\int_0^1 f(t)G(x,t)dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (2.13) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt=F_1(x),\ x\in[0,1] \tag{2.14}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_1(x,t)=M(x,t)-2x\int_0^1 M(z,t)dz,$$

$$F_1(x)=k_1(1-2x)+2k_2x+\int_0^1 f(t)\left\{G(x,t)-2x\int_0^1 G(z,t)dz\right\}dt.$$

(2.14)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], у қўйилган II_1 масалага эквивалентдир. У ҳолда (2.14) га мос

$$y(x)-\int_0^1 K(x,t)y(t)dt=0\,, \quad x\in(0,1) \tag{2.15}$$

интеграл тенглама $\{(2.7),(2.8)\}$ масалага эквивалент бўлади. Оҳирги масала фақат тривиал ечимга эга бўлганлиги учун (2.15) интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга бўлади. У ҳолда Фредгольм альтернативасига [7] асосан (2.14) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона.

(2.14) интеграл тенгламанинг ечими $M_1(x,t)$ ядро резольвентаси $R(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F_1(x)+\int_0^1 R(x,t)F_1(t)dt\,,\ \ x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2.1-теорема тўлиқ исботланди.

1-изоҳ. (2.1) тенгламадаги $(a+xt)^n$ ифодада xt функция $K(x)K(t)$ кўринишидаги функция (бу ерда $K(x)$-берилган узлуксиз функция) билан алмаштирилганда ҳам масала юқоридагидек ўрганилади.

2-изоҳ. (2.1) тенгламада охирги ҳад ўрнига

$$\gamma(x)\int_x^1 (a+xt)^n y(t)dt \ \text{ ёки } \ \gamma(x)\int_x^1 \left[a+K(x)K(t)\right]^n y(t)dt$$

олинганда ҳам масала юқоридагидек ўрганилади.

2.2-§. Бессел функциясини ўз ичига олувчи Вольтерра оператори қатнашган тенглама учун биринчи тур интеграл шартли масала

Фараз қилайлик, берилган $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ ва $f(x)$ функциялар [0,1] сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt=f(x),\quad 0<x<1 \quad (2.16)$$

интегро - дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда λ - берилган ҳақиқий сон, $\bar{J}_s(x)=\Gamma(s+1)(x/2)^{-s}J_s(x)$-Бессел-Клиффорд функцияси, $J_s(x)$ эса Бессел функцияси [6], $s>(-1/2)$.

II_2 **масала.** (2.16) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз. Бунда бизга 2.1-лемма ва қуйидаги лемма керак бўлади.

2.3-лемма. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,x_0]$; $\gamma(x_0)\le 0$, $\gamma'(x)\ge 0$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ x\in[0,x_0]$ *тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt=0,\ x\in(0,x_0);\quad (2.17)$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

Исбот. (2.17) тенгликни $y(x)$га кўпайтириб, сўнгра xбўйича $[0,x_0]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (2.5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликга эга бўламиз.

$$\int_0^{x_0}[y'(x)]^2dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{2}\alpha'(x)-\beta(x)\right]y^2(x)dx-$$

$$-\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)dx\int_0^x y(t)\,\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt=0\ . \quad (2.18)$$

Энди (2.18) даги учинчи интегрални қараймиз. Уни ℓ билан белгилаб, $\bar{J}_s[\lambda(x-t)]$ функцияни

$$\bar{J}_s[\lambda(x-t)]=\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma[s+(1/2)]}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\cos[\lambda(x-t)\eta]d\eta$$

тенглик билан алмаштирамиз [6]:

$$\ell=\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[s+(1/2)]}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)dx\int_0^{x}y(t)\cos[\lambda(x-t)\eta]dt\right\}d\eta.$$

Бу ифодадаги $\cos[\lambda(x-t)\eta]$ функцияни

$$\cos[\lambda(x-t)\eta]=\cos\left(\lambda x\eta\right)\cos\left(\lambda t\eta\right)+\sin\left(\lambda x\eta\right)\sin\left(\lambda t\eta\right)$$

тенглик орқали алмаштирсак, ℓ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\ell=\frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma[s+(1/2)]}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^{x}y(t)\cos(\lambda t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x}y(t)\sin(\lambda t\eta)dt\right)^2\right]dx\right\}d\eta\,.$$

Бу ердаги x бўйича интегрални бўлакласак,

$$\ell=\frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma[s+(1/2)]}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\left\{\gamma(x_0)\left[\left(\int_0^{x_0}y(t)\cos(\lambda t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x_0}y(t)\sin(\lambda t\eta)\,dt\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\int_0^{x_0}\gamma'(x)\left[\left(\int_0^{x}y(t)\cos(\lambda t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x}y(t)\sin(\lambda t\eta)\,dt\right)^2\right]dx\right\}d\eta$$

тенгликка эга бўламиз.

$\lambda\in R$ ва $\gamma(x_0)\le 0,\ \gamma'(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликларга асосан охирги тенгликдан $\ell\le 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу ва $\left(1/2\right)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,$ $\forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликни эътиборга олсак, (2.18) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,$ $x\in[0,x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (2.5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in\left[0,x_0\right]$. 2.3-лемма исботланди.

2.2-теорема. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,1]$ *бўлиб* $\gamma(x)\le 0,$ $\gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,$ $x\in\left[0,1\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_{0}^{x}y(t)\bar{J}_{s}[\lambda(x-t)]dt=0,\quad x\in(0,1)\quad(2.19)$$

тенгламани ва (2.8) шартларни қаноатлантиради. (2.8) тенгликларнинг иккинчиси ва 2.1-леммага асосан, шундай $x_0\in(0,1)$ мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, $\{(2.19),(2.5)\}$ масалани қарасак, 2.3-леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак $\{(2.19),(2.8)\}$ масаладан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_{0}^{x}y(t)\bar{J}_{s}[\lambda(x-t)]dt=0,\quad x\in(x_0,1);\quad(2.20)$$

$$y(x_0)=0,\qquad \int_{x_0}^{1}y(x)\,dx=0\qquad(2.21)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

$\{(2.20),(2.21)\}$ тенгликларга юқоридаги усул билан 2.1- ва 2.3-леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (2.20) ва (2.21) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_{x_1}^{1}y(t)\bar{J}_{s}[\lambda(x-t)]dt=0,\quad x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0,\qquad \int_{x_1}^{1}y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 2.1- ва 2.3-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирсак, натижада [0,1] сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0$, деган хулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1]$. 2.2-теорема исботланди.

2.3-теорема. *Агар 2.2-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_2 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (2.16) тенгламани

$$y''(x)=f_2(x),\ x\in(0,1) \tag{2.22}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_2(x)=f(x)-\alpha(x)y'(x)-\beta(x)y(x)-\gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Агар $f_2(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (2.22) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)f_2(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.23}$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда $G(x,t)$-(1.12) функция.

(2.23) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_2(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(t)$ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int_0^1 M_2(x,t)y(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.24}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_2(x,t)=[G(x,t)\alpha(t)]'_t-\beta(t)G(x,t)-G(x,t)\int_t^1\gamma(\xi)\bar{J}_s[\lambda(\xi-t)]dt.$$

(2.24) тенгликни x бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаб, (2.2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 dx\int_0^1 f(t)G(x,t)dt-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M_2(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (2.24) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_3(x,t)y(t)dt = F_3(x),\ x\in[0,1] \qquad (2.25)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_3(x,t)=M_2(x,t)-2x\int_0^1 M_2(z,t)dz.$$

$$F_3(x)=k_1(1-2x)+2k_2x+\int_0^1 f(t)\left\{G(x,t)-2x\int_0^1 G(x,t)dz\right\}dt$$

(2.25)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], II_2 масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.2- теоремадан келиб чиқади [7].

(2.25) интеграл тенгламанинг ечими $M_3(x,t)$ ядро резольвентаси $R_1(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F_3(x)+\int_0^1 R_1(x,t)F_3(t)dt,\ \ x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2.3-теорема исботланди.

2.3-§. Каср тартибли интеграл оператор қатнашган тенглама учун биринчи тур интеграл шартли масала

Ушбу интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)D_{0x}^{-a}y(t)=0,\quad x\in(0,1), \qquad (2.26)$$

бу ерда $a=const\in(0,1)$, $\alpha(x), \beta(x)$ ва $\gamma(x)$ лар $[0,1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз берилган функциялар, $D_{0x}^{-a}y(t)$ эса каср тартибли интеграл оператор, яъни

$$D_{0x}^{-a}y(x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x (x-t)^{a-1}y(t)\,dt\,.$$

Π_3 **масала.** (2.26) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Қўйилган масала бир қийматли ечилишини текширамиз. Аввал қуйидаги леммани исботлаймиз.

2.4-лемма. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,x_0]$; $\gamma(x_0)\le 0,\ \gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ \ x\in\left[0,x_0\right]$ *шартлар бажарилса,*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)(x-t)^{-a}dt=0,\ \ x\in(0,x_0)\,; \qquad (2.27)$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

Исбот. (2.27) тенгликни $y(x)$га кўпайтириб, сўнгра xбўйича $\left[0,x_0\right]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (2.5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0}\left[y'(x)\right]^2dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{2}\alpha'(x)-\beta(x)\right]y^2(x)dx-$$
$$-\int_0^{x_0}y(x)\gamma(x)dx\int_0^x y(t)\,(x-t)^{-a}dt=0\ . \qquad (2.28)$$

Энди (2.28) даги учинчи интегрални қараймиз. Уни ℓ билан белгилаб, $(x-t)^{-a}$ ифодани

$$(x-t)^{-a}=\frac{1}{\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}\cos[(x-t)\eta]d\eta$$

тенглик билан алмаштирамиз:

$$\ell=\frac{1}{\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)dx\int_0^x y(t)\cos[(x-t)\eta]\right\}d\eta.$$

Бу ифодадаги $\cos[(x-t)\eta]$ функцияни

$$\cos[(x-t)\eta]=\cos\left(x\eta\right)\cos\left(t\eta\right)+\sin\left(x\eta\right)\sin\left(t\eta\right)$$

тенглик орқали алмаштирсак, ℓ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\ell=\frac{1}{2\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^{x}y(t)\cos(t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x}y(t)\sin(t\eta)\,dt\right)^2\right]dx\right\}d\eta.$$

Бу ердаги x бўйича интегрални бўлакласак,

$$\ell=\frac{1}{2\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}\left\{\gamma(x_0)\left[\left(\int_0^{x_0}y(t)\cos(t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x_0}y(t)\sin(t\eta)\,dt\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\int_0^{x_0}\gamma'(x)\left[\left(\int_0^{x}y(t)\cos(t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x}y(t)\sin(t\eta)\,dt\right)^2\right]dx\right\}d\eta$$

тенгликка эга бўламиз.

$\Gamma(a)>0,$ $\cos(a\pi/2)>0$ ва $\gamma(x_0)\le 0,$ $\gamma'(x)\ge 0,$ $\forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликларга асосан охирги тенгликдан $\ell\le 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу ва $\left(1/2\right)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,$ $\forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликни эътиборга олсак, (2.28) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,$ $x\in[0,x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. Бундан эса (2.5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,$ $x\in\left[0,x_0\right]$ эканлиги келиб чиқади. 2.4-лемма исботланди.

2.4-теорема. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,1]$*;* $\gamma(x)\le 0,$ $\gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,$ $x\in\left[0,1\right]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция (0,1) оралиқда (2.26) тенгламани ва (2.8) шартларни қаноатлантиради. (2.8) тengликларнинг иккинчиси ва 2.1-леммага асосан, шундай $x_0\in(0,1)$

мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, $\{(2.27),(2.5)\}$ масалани қарасак, 2.4-леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак, $\{(2.26),(2.8)\}$ масаладан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int\limits_0^x y(t)(x-t)^{-a}dt=0,\ \ x\in(x_0,1); \quad (2.29)$$

$$y(x_0)=0, \qquad \int\limits_{x_0}^1 y(x)\,dx=0 \quad (2.30)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

$\{(2.29),(2.30)\}$ тенгликларга юқоридаги усул билан 2.1- ва 2.4-леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (2.29) ва (2.30) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int\limits_{x_1}^1 y(t)(x-t)^{-a}dt=0,\ \ x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0, \qquad \int\limits_{x_1}^1 y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 2.1- ва 2.4-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Натижада [0,1] сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0,$ деган ҳулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1].$ 2.4-теорема исботланди.

2.5-теорема. *Агар 2.4-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_3 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (2.26) тенгламани

$$y''(x)=f_3(x),\ x\in(0,1) \tag{2.31}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_3(x)=-\alpha(x)y'(x)-\beta(x)y(x)-\gamma(x)\int_0^x y(t)(x-t)^{-a}dt.$$

Агар $f_3(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (2.31) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)\,f_3(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.32}$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда $G(x,t)$-(1.12) функция.

(2.32) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_3(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(t)$ функция иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 M_4(x,t)y(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.33}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_4(x,t)=[G(x,t)\alpha(t)]'_t-\beta(t)G(x,t)-G(x,t)\int_t^1 \gamma(\xi)(\xi-t)^{-a}dt.$$

(2.33) тенгликни x бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаб, (2.2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M_4(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (2.33) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_5(x,t)y(t)dt=F_4(x),\ x\in[0,1] \tag{2.34}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$F_4(x)=k_1(1-2x)+2k_2x,\quad M_5(x,t)=M_4(x,t)-2x\int_0^1 M_4(z,t)dz.$$

(2.34)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги II_3 масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.4- теоремадан келиб чиқади [7].

(2.34) интеграл тенгламанинг ечими $M_5(x,t)$ ядронинг резольвентаси $R_2(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F_4(x)+\int_0^1 R_2(x,t)F_4(t)dt\,,\quad x\in[0,1] \tag{2.35}$$

кўринишда ёзилади.

(2.35) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2.5-теорема исботланди.

2.4-§. Мавҳум аргументли Бессел функцияси қатнашган ўзгармас коэффициентли тенглама учун биринчи тур интеграл шартли масала

Ушбу интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=f(x),\quad x\in(0,1), \tag{2.36}$$

бу ерда $\alpha,\beta,\gamma,\lambda$-берилган хақиқий сонлар, $I_0(x)$- мавхум аргументли Бессел функцияси [6], $f(x)$-берилган функция.

II_4 **масала.** (2.36) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

2.5-лемма. *Агар* $\beta\le 0,\ \gamma\le 0,\ 0\le|\lambda|\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ *бўлса,*

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]\,dt=0,\ \ x\in(0,x_0)\,; \tag{2.37}$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

Исбот. (2.37) тенгликни $e^{-2|\lambda|x}y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $\left[0,x_0\right]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (2.5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int\limits_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}\left[y'(x)\right]^2 dx-\int\limits_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}\left[2\lambda^2+\alpha\,|\,\lambda\,|+\beta\right]y^2(x)dx-$$

$$-\gamma\int\limits_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)dx\int\limits_0^{x} y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0\ . \qquad (2.38)$$

(2.38) тенгликдаги учинчи интегрални l билан белгилайлик:

$$l=\int\limits_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)\,dx\int\limits_0^{x} y(t)I_0\left[\lambda(x-t)\right]dt\,.$$

Бу ерда $I_0\left[\lambda(x-t)\right]$ функцияни

$$I_0\left[\lambda(x-t)\right]=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [6]:

$$l=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\int\limits_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)\,dx\int\limits_0^{x} y(t)ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]dt\,.$$

Бу тенгликни $2chx=e^x+e^{-x}$ формуладан фойдаланиб,

$$l=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^{x_0} e^{-2x\,\mu_m(\xi)}\,\frac{d}{dx}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx \qquad (2.39)$$

кўринишда ёзиш мумкин бу ерда

$$\mu_m(\xi)=|\,\lambda\,|\left(1+(-1)^m\xi\right), \qquad \Phi_m(x,\xi)=\int\limits_0^{x} y(t)e^{(-1)^m|\lambda|\xi t}dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб ва $\mu_m(\xi)\geq 0$ тенгсизликни эътиборга олиб, (2.39) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{2}\left\{e^{-2x_0\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x_0,\xi)+2\mu_m(\xi)\int_0^{x_0}e^{-2x\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx\right\}\geq 0.$$

У ҳолда $\gamma\leq 0$ эканлигини эътиборга олсак, (2.38) тенгликдаги охирги ҳаднинг манфий эмаслиги келиб чиқади. $\beta\leq 0$ ва $0\leq|\lambda|\leq(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ шартларга асосан $2\lambda^2+\alpha|\lambda|+\beta$ квадрат учҳад мусбат эмас. Шунинг учун (2.38) тенгликдаги иккинчи қўшилувчи ҳам манфий эмас. Буни ва $l\geq 0$ тенгсизликни эътиборга олсак, (2.38) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,\ x\in[0,x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (2.5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in\left[0,x_0\right]$. 2.5-лемма исботланди.

2.6-теорема. *Агар 2.5-лемманинг шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)\,I_0[\lambda(x-t)]dt=0,\quad x\in(0,1) \tag{2.40}$$

тенгламани ва (2.8) шартларни қаноатлантиради. (2.8) тенгликларнинг иккинчиси ва 2.1-леммага асосан, шундай $x_0\in(0,1)$ мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(2.40),(2.5)} масалани қарасак, 2.5-леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак {(2.40),(2.8)} масаладан

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0,\ x\in(x_0,1); \tag{2.41}$$

$$y(x_0)=0,\qquad \int_{x_0}^{1}y(x)\,dx=0 \tag{2.42}$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(2.44),(2.45)} тенгликларга юқоридаги усул билан 2.1- ва 2.5-леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x_1)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (2.44) ва (2.45) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0,\ \ x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0, \qquad \int_{x_1}^1 y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 2.1- ва 2.5-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирсак, натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0,$ деган ҳулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\,x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\,x\in[0,1].$ 2.6-теорема исботланди.

2.7-теорема. *Агар 2.6-теорема шартлари ва* $f\left(x\right)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_4 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (2.36) тенгламани

$$y''(x)=f_4(x),\ \ x\in(0,1) \tag{2.43}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_4(x)=f(x)-\alpha y'(x)-\beta y(x)-\gamma\int_0^x y(t)I_0\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Агар $f_4(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (2.43) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)f_4(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.44}$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда $G(x,t)$-(1.12) функция

(2.44) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_4(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва γ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int_0^1 M_6(x,t)y(t)dt,\ x\in[0,1] \qquad (2.45)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_6(x,t)=\alpha[G(x,t)]_t'-G(x,t)\left[\beta+\gamma\int_t^1 I_0[\lambda(\xi-t)]dt\right].$$

(2.45) тенгликни x бўйича [0,1] оралиқда интеграллаб, (2.2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 dx\int_0^1 f(t)G(x,t)dt-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (2.45) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_7(x,t)y(t)dt=F_5(x),\ x\in[0,1] \qquad (2.46)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_7(x,t)=M_6(x,t)-2x\int_0^1 M_6(z,t)dz.$$

$$F_5(x)=k_1(1-2x)+2k_2x+\int_0^1 f(t)\left\{G(x,t)-2x\int_0^1 G(x,t)dz\right\}dt.$$

(2.46)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги II_4 масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.6- теоремадан келиб чиқади [7].

(2.46) интеграл тенгламанинг ечими $M_7(x,t)$ ядро резольвентаси $R_3(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F_5(x)+\int_0^1 R_3(x,t)F_5(t)dt,\ \ x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2.7-теорема исботланди.

2.5-§. Гиперболик косинус ва Бессел функциясини ўз ичига олувчи Вольтерра оператори қатнашган тенглама учун биринчи тур интеграл шартли масала

Ушбу интегро-дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\overline{J_s}\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=f\left(x\right),\ 0<x<1, \tag{2.47}$$

бу ерда s - берилган ҳақиқий сон бўлиб, $s>-(1/2)$; $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x),f(x)$ - берилган функциялар.

II_5 **масала.** (2.47) тенгламанинг [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

2.6-лемма. Агар $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1\left[0,x_0\right]$, $\beta\left(x\right)\in C[0,x_0],\gamma(x_0)\le 0$, $\gamma'(x)\ge 0$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0$, $x\in\left[0,x_0\right]$ шартлар бажарилса,

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\overline{J_s}\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0,\ 0<x<1, \tag{2.48}$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

Исбот. (2.48) ва (2.5) шартларни қаноатлантирувчи функцияни топиш мақсадида (2.48) тенгликни $y(x)$ га кўпайтирамиз ва x бўйича $\left[0,x_0\right]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (2.5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0}\left[y'(x)\right]^2 dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{2}\alpha'(x)-\beta(x)\right]y^2(x)dx-$$

$$-\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)dx\int_0^x ch(x+t)\overline{J_s}\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0. \qquad (2.49)$$

Энди (2.49) даги учинчи интегрални қараймиз. Уни l_1 билан белгилаб, $ch\left(x+t\right)$ ва $\overline{J_s}\left[\lambda(x-t)\right]$ функцияларни

$$ch(x+t)=\frac{1}{2}\left(e^{x+t}+e^{-x-t}\right),$$

$$\bar{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]=\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(s+1/2\right)}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-\frac{1}{2}}\cos\left[\lambda(x-t)\eta\right]d\eta$$

тенгликлар билан алмаштирамиз [6]:

$$l_1=\frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-\frac{1}{2}}d\eta\int_0^{x_0}\gamma(x)y\left(x\right)dx\int_0^x(e^{x+t}+e^{-x-t})\cos[\lambda(x-t)\eta]y(t)dt.$$

Бу тенгликдаги $(\mathrm{e}^{x+t}+\mathrm{e}^{-x-t})\cdot\cos[\lambda(x-t)\eta]$ кўпайтмани

$$\begin{gathered}(\mathrm{e}^{x+t}+\mathrm{e}^{-x-t})\cdot\cos[\lambda(x-t)\eta]=\\(\mathrm{e}^{x+t}+\mathrm{e}^{-x-t})\cdot[\cos(\lambda\eta x)\cos(\lambda\eta t)+\sin(\lambda\eta x)\sin(\lambda\eta t)]=\\=e^xe^t\cos(\lambda\eta x)\cos(\lambda\eta t)+e^xe^t\sin(\lambda\eta x)\sin(\lambda\eta t)+\\+e^{-x}e^{-t}\cos(\lambda\eta x)\cos(\lambda\eta t)+e^{-x}e^{-t}\sin(\lambda\eta x)\sin(\lambda\eta t)\end{gathered}$$

тенглик орқали алмаштирсак, l_1ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$l_1=\frac{\Gamma\left(s+1\right)}{4\sqrt{\pi}\Gamma\left(s+1/2\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-\eta^2\right)^{s-\frac{1}{2}}d\eta\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^x y\left(t\right)e^t\cos(\lambda\eta t)dt\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int_0^x y\left(t\right)e^t\sin(\lambda\eta t)dt\right)^2+\left(\int_0^x y\left(t\right)e^{-t}\cos(\lambda\eta t)dt\right)^2+\left(\int_0^x y\left(t\right)e^{-t}\sin(\lambda\eta t)dt\right)^2\right]dx\right\}.$$

Бу ердаги x бўйича интегрални бўлаклаймиз:

$$l_1=\frac{\Gamma\left(s+1\right)}{4\sqrt{\pi}\Gamma\left(s+1/2\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-\eta^2\right)^{s-\frac{1}{2}}d\eta\left\{\gamma\left(x_0\right)\left[\left(\int_0^{x_0} y\left(t\right)e^t\cos(\lambda\eta t)dt\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^{x_0} y\left(t\right)e^t\sin(\lambda\eta t)dt\right)^2+\left(\int_0^{x_0} y\left(t\right)e^{-t}\cos(\lambda\eta t)dt\right)^2+\left(\int_0^{x_0} y\left(t\right)e^{-t}\sin(\lambda\eta t)dt\right)^2\right]-$$

$$-\int_0^{x_0}\gamma'(x)\left[\left(\int_0^x y(t)e^{t}\cos(\lambda\eta t)dt\right)^2+\left(\int_0^x y(t)e^{t}\sin(\lambda\eta t)dt\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^x y(t)e^{-t}\cos(\lambda\eta t)dt\right)^2+\left(\int_0^x y(t)e^{-t}\sin(\lambda\eta t)dt\right)^2\right]dx\Bigg\}.$$

Охирги тенгликдан $\Gamma(s+1/2)>0,\ \Gamma(s+1)>0,\ \gamma(x_0)\le 0,$ ва $\gamma'(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликларга асосан $l_1\le 0$ эканлиги келиб чиқади. Буни ва $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликни эътиборга олсак, (2.49) тенгликдан $y'(x)\equiv 0$, яъни $y(x)=const, x\in[0,x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. Бундан эса (2.5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,\ \ x\in[0,x_0]$, яъни $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,x_0]$ эканлиги келиб чиқади. 2.6-лемма исботланди.

2.8-теорема. *Агар* $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,1],\beta(x)\in C[0,1],\ \gamma(x)\le 0,\ \gamma'(x)\ge 0,$ $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\quad x\in[0,1]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$
$$+\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\overline{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0,\qquad x\in(0,1)\qquad (2.50)$$

тенгламани ва (2.8) шартларни қаноатлантиради. (2.8) тенгликларнинг иккинчисидан 2.1-леммага асосан, шундай $x_0\in(0,1)$ мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, $\{(2.50),(2.8)\}$ масалани қарасак, 2.6-леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак, $\{(2.50),(2.8)\}$ масаладан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$
$$+\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\overline{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0,\qquad x\in(x_0,1);\qquad (2.51)$$

$$y(x_0)=0\,, \qquad \int_{x_0}^{1} y(x)\,dx=0 \tag{2.52}$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

$\{(2.51),(2.52)\}$ тенгликларга юқоридаги усул билан 2.1- ва 2.6-леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x_1)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (2.51) ва (2.52) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\overline{J_s}\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0,\ \ x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0\,, \qquad \int_{x_1}^{1} y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 2.1- ва 2.6-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирсак, натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0,$ деган ҳулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1].$ 2.8-теорема исботланди.

2.9-теорема. *Агар 2.8-теорема шартлари ва* $f\left(x\right)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_5 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (2.47) тенгламани

$$y''(x)=f_5(x),\ \ x\in(0,1) \tag{2.53}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_5(x)=f(x)-\alpha(x)y'(x)-\beta(x)y(x)-\gamma(x)\int_0^x ch(x+t)\,\bar{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt.$$

Агар $f_5(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (2.53) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)\,f_5(t)dt,\; x\in[0,1] \qquad (2.54)$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда бу ерда $G(x,t)$-(1.12) функция.

(2.54) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_5(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(x)$ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int_0^1 M_8(x,t)y(t)dt\,,\; x\in[0,1] \qquad (2.55)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_8(x,t)=\left[\alpha(x)G(x,t)\right]_t^{'}-G(x,t)\left[\beta(x)+\gamma(x)\int_t^1 \bar{J}_s[\lambda(\xi-t)]dt\right].$$

(2.55) тенгликни x бўйича [0,1] оралиқда интеграллаб, (2.2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 dx\int_0^1 f(t)G(x,t)dt-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M_8(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (2.55) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_9(x,t)y(t)dt=F_6(x),\; x\in[0,1] \qquad (2.56)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_9(x,t)=M_8(x,t)-2x\int_0^1 M_8(z,t)dz.$$

$$F_6(x)=k_1(1-2x)+2k_2x+\int_0^1 f(t)\left\{G(x,t)-2x\int_0^1 G(x,t)dz\right\}dt$$

(2.56)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], II_5 масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.8- теоремадан келиб чиқади [7].

(2.56) интеграл тенгламанинг ечими $M_9(x,t)$ ядро резольвентаси $R_4(x,t)$ ёрдамида

$$y(x) = F_6(x) + \int_0^1 R_4(x,t)F_6(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. 2.9-теорема исботланди.

2.6-§. Бессел-Клиффорд функцияси қатнашган тенглама учун биринчи тур интеграл шартли масала

Фараз қилайлик, берилган $a(x), b(x), c(x)$ ва $f(x)$ функциялар $[0,1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда қуйидаги

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x)\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\bar{I}_m[\lambda(x+t)]y(t)dt = f(x) \quad (2.57)$$

интеграл оператор қатнашган интегро-дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда $\alpha \in (0,1)$, $m > -(1/2)$, λ-берилган ҳақиқий сон, $\bar{I}_m(z) = \Gamma(m+1)(z/2)^{-m} I_m(z)$, $\Gamma(z)$ - Эйлернинг гамма-функцияси, $I_m(z)$ - мавҳум аргументли Бессел функцияси.

II_6 **масала.** (2.57) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

2.7-лемма. *Агар* $a(x)$, $c(x) \in C^1[0,x_0]$, $c(x_0) \le 0$, $c'(x) \ge 0$, $(1/2)a'(x) - b(x) \ge 0$, $x \in [0,x_0]$ *шартлар бажарилса,*

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+$$

$$+c(x)\int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha}\overline{I}_m\left[\lambda(x+t)\right]y(t)dt=0\,,\ x\in\left[0,x_0\right] \tag{2.58}$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

Исбот. (2.58) ва (2.5) шартларни қаноатлантирувчи функцияни топиш мақсадида (2.58) тенгликни $y(x)$ га кўпайтирамиз ва x бўйича $\left[0,x_0\right]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (2.5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int\limits_0^{x_0}\left[y'(x)\right]^2dx+\int\limits_0^{x_0}\left[\frac{a'(x)}{2}-b(x)\right]y^2(x)dx-$$

$$-\int\limits_0^{x_0}c(x)y(x)dx\int\limits_0^x(x-t)^{-\alpha}\overline{I}_m\left[\lambda(x+t)\right]y(t)dt=0\,. \tag{2.59}$$

Энди (2.59) ифодадаги учинчи интегрални l билан белгилаб, сўнгра

$$(x-t)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int\limits_0^{+\infty}\eta^{\alpha-1}\cos\left[(x-t)\eta\right]d\eta,$$

$$\overline{I}_m\left[\lambda(x+t)\right]=\frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+(1/2)\right)}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)^{m-1/2}ch\left[\lambda(x+t)z\right]dz$$

тенгликлардан фойдалансак [6], у

$$l=\frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)\,\Gamma\left(m+(1/2)\right)}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)^{m-1/2}dz\int\limits_0^{+\infty}\eta^{\alpha-1}d\eta\int\limits_0^{x_0}c(x)\times$$

$$\times\left\{y(x)\int\limits_0^x ch\left[\lambda(x+t)z\right]\cos\left[(x-t)\eta\right]y(t)dt\right\}dx$$

кўринишда ёзилади. Охирги ифодадаги $ch\left[\lambda(x+t)z\right]\cos\left[(x-t)\eta\right]$ кўпайтмани

$$ch\left[\lambda(x+t)z\right]\cos\left[(x-t)\eta\right]=$$

$$=\left(1/2\right)\left(e^{\lambda(x+t)z}+e^{-\lambda(x+t)z}\right)\left[\cos\left(x\eta\right)\cos\left(t\eta\right)+\sin\left(x\eta\right)\sin\left(t\eta\right)\right]$$

тенглик орқали алмаштирсак, l қуйидаги кўринишга келади:

$$l=\frac{\Gamma\left(m+1\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\pi/2\right)\Gamma\left(m+\left(1/2\right)\right)}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-z^{2}\right)^{m-1/2}dz\int\limits_{0}^{+\infty}\eta^{\alpha-1}d\eta\int\limits_{0}^{x_0}c\left(x\right)\times$$

$$\times\left\{e^{\lambda xz}\cos\left(x\eta\right)y\left(x\right)\int\limits_{0}^{x}e^{\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt+e^{\lambda xz}\sin\left(x\eta\right)y\left(x\right)\int\limits_{0}^{x}e^{\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt+\right.$$

$$\left.+e^{-\lambda xz}\cos\left(x\eta\right)y\left(x\right)\int\limits_{0}^{x}e^{-\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt+e^{-\lambda xz}\sin\left(x\eta\right)y\left(x\right)\int\limits_{0}^{x}e^{-\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right\}dx.$$

Бу тенгликни

$$l=\frac{\Gamma\left(m+1\right)}{4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\pi/2\right)\Gamma\left(m+\left(1/2\right)\right)}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-z^{2}\right)^{m-1/2}dz\int\limits_{0}^{+\infty}\eta^{\alpha-1}d\eta\int\limits_{0}^{x_0}c\left(x\right)\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\left[\left(\int\limits_{0}^{x}e^{\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\left(\int\limits_{0}^{x}e^{\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{0}^{x}e^{-\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\left(\int\limits_{0}^{x}e^{-\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}\right]dx$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Энди x бўйича интегрални бўлаклаб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$l=\frac{\Gamma\left(m+1\right)}{4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\pi/2\right)\Gamma\left(m+\left(1/2\right)\right)}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-z^{2}\right)^{m-1/2}dz\int\limits_{0}^{+\infty}\eta^{\alpha-1}d\eta\times$$

$$\times\left\{c\left(x_0\right)\left[\left(\int\limits_{0}^{x_0}e^{\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\left(\int\limits_{0}^{x_0}e^{\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\left(\int\limits_{0}^{x_0}e^{-\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{0}^{x_0}e^{-\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}\right]-\int\limits_{0}^{x_0}c'\left(x\right)\left[\left(\int\limits_{0}^{x}e^{\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\left(\int\limits_{0}^{x}e^{\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int\limits_{0}^{x}e^{-\lambda tz}\cos\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}+\left(\int\limits_{0}^{x}e^{-\lambda tz}\sin\left(t\eta\right)y\left(t\right)dt\right)^{2}\right]dx\right\}.$$

$$\Gamma\left(\alpha\right)>0,\ \cos\left(\alpha\pi/2\right)>0,\ \Gamma\left(m+1\right)>0,\ \Gamma\left(m+1/2\right)>0,\ c\left(x_0\right)\le 0,\ c'\left(x\right)\ge 0$$

тенгсизликларга асосан охирги ифодадан $l\le 0$ эканлиги келиб чиқади. $l\le 0$

ва $(1/2)a'(x)-b(x)\ge 0,\ x\in[0,1]$ тенгсизликларни эътиборга олсак, (2.58) тенгликдан $y'(x)\equiv 0$, яъни $y(x)=const,\ x\in[0,x_0]$ деган хулосага келамиз. Бундан эса (2.5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ эканлиги келиб чиқади. 2.7-лемма исботланди.

2.10-теорема. *Агар* $a(x),c(x)\in C^1[0,1],\ c(x)\in[0,1]\ \ c(x)\le 0,\ \ c'(x)\ge 0,$ $(1/2)a'(x)-b(x)\ge 0,\quad x\in[0,1]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+$$

$$+c(x)\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\overline{I}_m\left[\lambda(x+t)\right]y(t)dt=0,\quad x\in(0,1)\tag{2.60}$$

тенгламани ва (2.8) шартларни қаноатлантиради. (2.8) тенгликларнинг иккинчисидан 2.1-леммага асосан, шундай $x_0\in(0,1)$ мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, $\{(2.60),(2.8)\}$ масалани қарасак, 2.7-леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак, $\{(2.60),(2.8)\}$ масаладан

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+$$

$$+c(x)\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\overline{I}_m\left[\lambda(x+t)\right]y(t)dt=0\qquad x\in(x_0,1);\tag{2.61}$$

$$y(x_0)=0,\qquad \int_{x_0}^1 y(x)\,dx=0\tag{2.62}$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

$\{(2.61),(2.62)\}$ тенгликларга юқоридаги усул билан 2.1- ва 2.7-леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x_1)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (2.61) ва (2.62) тенгликлардан

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+c(x)\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\overline{I}_m\left[\lambda(x+t)\right]y(t)dt=0\ x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0, \qquad \int_{x_1}^{1} y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 2.1- ва 2.7-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирсак, натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0,$ деган хулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1].$ 2.10-теорема исботланди.

2.11-теорема. *Агар 2.10-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* II_6 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (2.57) тенгламани

$$y''(x)=f_6(x),\ x\in(0,1) \tag{2.63}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_6(x)=f(x)-a(x)y'(x)-b(x)y(x)-c(x)\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\overline{I}_m\left[\lambda(x+t)\right]y(t)dt.$$

Агар $f_6(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (2.63) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)\,f_6(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.64}$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда бу ерда $G(x,t)$-(1.12) функция.

(2.64) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_6(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $c(x)$ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int_0^1 M_{10}(x,t)y(t)dt,\ x\in[0,1] \qquad (2.65)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз.

(2.65) тенгликни x бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаб, (2.2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 dx\int_0^1 f(t)G(x,t)dt-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M_{10}(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (2.65) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_{11}(x,t)y(t)dt=F_7(x),\ x\in[0,1] \qquad (2.66)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_{11}(x,t)=M_{10}(x,t)-2x\int_0^1 M_{10}(z,t)dz.$$

$$F_7(x)=k_1(1-2x)+2k_2x+\int_0^1 f(t)\left\{G(x,t)-2x\int_0^1 G(x,t)dz\right\}dt$$

(2.66)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], II_6 масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.10- теоремадан келиб чиқади [7].

(2.66) интеграл тенгламанинг ечими $M_{11}(x,t)$ ядро резольвентаси $R_5(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F_7(x)+\int_0^1 R_5(x,t)F_7(t)dt,\ \ x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2.11-теорема исботланди.

2.7-§. Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламаларнинг бир синфи учун биринчи тур интеграл шартли масала

Ушбу интегро-дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int_0^x (x-t)^{-a}\, ch\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=f(x),\ \ 0<x<1 \qquad (2.67)$$

бу ерда $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x),f(x)$ - берилган функциялар, a,λ- берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $a\in(0,1)$.

II_7 **масала.** (2.67) тенгламанинг $[0,1]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ва (2.2) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

2.8-лемма. *Агар* $\alpha(x),\ \gamma(x),\in C^1[0,x_0],\ (1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,$ $-e^{-2|\lambda_1|x}\le\gamma(x)\le 0,\ \ x\in[0,x_0]$ *бўлса,*

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int_0^x (x-t)^{-a}\, ch\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0,\ \ x\in(0,x_0) \qquad (2.68)$$

тенгламанинг (2.5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими тривиал функциядан иборат.

Исбот. (2.68) тенгликни $y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $[0,x_0]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (2.5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0}\left[y'(x)\right]^2dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{2}\alpha'(x)-\beta(x)\right]y^2(x)dx-$$

$$-\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)dx\int_0^{x}(x-t)^{-a}ch\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0. \tag{2.69}$$

Энди (2.69) тенгликдаги учинчи интегрални қараймиз. Уни l билан белгилаб, $ch\left[\lambda_1(x-t)\right]$ ва $(x-t)^{-a}$ функцияларнинг

$$ch\left[\lambda(x-t)\right]=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda(x-t)}+e^{\lambda(t-x)}\right),$$

$$(x-t)^{-a}=\frac{1}{\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}\cos\left[(x-t)\eta\right]d\eta$$

кўринишларидан фойдаланиб, уларни алмаштирамиз:

$$l=\frac{1}{2\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}d\eta\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)\left\{\int_0^{x}\left(e^{\lambda(x-t)}+e^{\lambda(t-x)}\right)\cos\left[(x-t)\eta\right]y(t)dt\right\}dx.$$

Бу ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$l=\frac{1}{4\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}d\eta\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)e^{2\lambda x}\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^{x}e^{-\lambda t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^{x}e^{-\lambda t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\right]dx+\int_0^{x_0}\gamma(x)e^{-2\lambda x}\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^{x}e^{\lambda t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int_0^{x}e^{\lambda t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\right]dx\right\}.$$

Энди x бўйича интегрални бўлаклаб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$l=\frac{1}{4\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}d\eta\left\{\gamma(x_0)e^{2\lambda x_0}\left[\left(\int_0^{x_0}e^{-\lambda t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left(\int_0^{x_0}e^{-\lambda t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\right]-\int_0^{x_0}e^{2\lambda x}\left[\gamma'(x)+2\lambda\gamma(x)\right]\left[\left(\int_0^{x}e^{-\lambda t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.$$

$$+\left(\int_0^x e^{-\lambda t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\Bigg]dx+\gamma(x_0)e^{-2\lambda x_0}\Bigg[\left(\int_0^{x_0} e^{\lambda t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+$$

$$+\left(\int_0^{x_0} e^{\lambda t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\Bigg]-\int_0^{x_0} e^{-2\lambda x}\left[\gamma'(x)-2\lambda\gamma(x)\right]\Bigg[\left(\int_0^x e^{\lambda t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+$$

$$+\left(\int_0^x e^{\lambda t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\Bigg]dx\Bigg\}.$$

$\Gamma(a)>0, \cos(a\pi/2)>0, \gamma(x_0)\le 0, \gamma'(x)\pm 2\lambda\gamma(x)\ge 0$ тенгсизликларга асосан охирги ифодадан $l\le 0$ эканлиги келиб чиқади.

$l\le 0,$ ва $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0, \forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликларни эътиборга олсак, (2.69) тенгликдан $y'(x)\equiv 0$, яъни $y(x)=const, x\in[0,x_0]$ деган хулосага келамиз. Бундан эса (2.5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,x_0]$, яъни $y_1(x)\equiv y_2(x), x\in[0,x_0]$ эканлиги келиб чиқади. 2.8-лемма исботланди.

2.12-теорема. *Агар* $\alpha(x)$, $\gamma(x)\in C^1[0,1]$, $\gamma(x)\le 0$, $\gamma'(x)\ge 0$, $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0$, $x\in[0,1]$ *тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$
$$+\gamma(x)\int_0^x (x-t)^{-a}ch\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0, \quad x\in(0,1) \qquad (2.70)$$

тенгламани ва (2.8) шартларни қаноатлантиради. (2.8) тенгликларнинг иккинчисидан 2.1-леммага асосан, шундай $x_0\in(0,1)$ мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(2.70),(2.8)} масалани қарасак, 2.8-леммага асосан $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0$, $x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак, {(2.70),(2.8)} масаладан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int\limits_0^x (x-t)^{-a} ch\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0, \qquad x\in(x_0,1); \qquad (2.71)$$

$$y(x_0)=0, \qquad \int\limits_{x_0}^1 y(x)\,dx=0 \qquad (2.72)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(2.71),(2.72)} тенгликларга юқоридаги усул билан 2.1- ва 2.8-леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x_1)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (2.71) ва (2.72) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+$$

$$+\gamma(x)\int\limits_0^x (x-t)^{-a} ch\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt=0, \quad x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0, \qquad \int\limits_{x_1}^1 y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 2.1- ва 2.8-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирсак, натижада [0,1] сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0,$ деган ҳулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1]$. 2.12-теорема исботланди.

2.13-теорема. *Агар 2.12-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* Π_7 *масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Исбот. (2.67) тенгламани

$$y''(x)=f_7(x),\ x\in(0,1) \qquad (2.73)$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_7(x)= f(x)-\alpha(x)y'(x)-\beta(x)y(x)-\gamma(x)\int\limits_0^x (x-t)^{-a} ch\left[\lambda(x-t)\right]y(t)dt.$$

Агар $f_7(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (2.73) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int\limits_0^1 G(x,t)f_7(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.74}$$

тенглик ўринли бўлади [5], бу ерда $G(x,t)$ - (1.12) функция.

(2.74) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_7(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(x)$ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int\limits_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int\limits_0^1 M_{12}(x,t)y(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{2.75}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_{12}(x,t)=\left[\alpha(x)G(x,t)\right]_t' - G(x,t)\left[\beta(x)+\gamma(x)\int\limits_t^1 \bar{J}_s[\lambda(\xi-t)]dt\right].$$

(2.75) тенгликни x бўйича [0,1] оралиқда интеграллаб, (2.2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(t)G(x,t)dt-2\int\limits_0^1 y(t)\left[\int\limits_0^1 M_{12}(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (2.75) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int\limits_0^1 M_{13}(x,t)y(t)dt=F_8(x),\ x\in[0,1] \tag{2.76}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_{13}(x,t) = M_{12}(x,t) - 2x\int_0^1 M_{12}(z,t)dz.$$

$$F_8(x) = k_1(1-2x) + 2k_2x + \int_0^1 f(t)\left\{G(x,t) - 2x\int_0^1 G(x,t)dz\right\}dt$$

(2.76)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [7], II_7 масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.12- теоремадан келиб чиқади [7].

(2.76) интеграл тенгламанинг ечими $M_{13}(x,t)$ ядро резольвентаси $R_6(x,t)$ ёрдамида

$$y(x) = F_8(x) + \int_0^1 R_6(x,t)F_8(t)dt\,, \quad x \in [0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. 2.13-теорема исботланди.

III БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ИККИНЧИ ТУР ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛАЛАР

3.1-§. Каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган тенглама учун иккинчи тур интеграл шартли масала

Иккинчи тартибли чизиқли ушбу

$$y''(x)+b(x)y'(x)+\omega(x)D_{0x}^{\delta}y(x)+v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)+c(x)y(x)=f(x),\ x\in(-1,1)\quad(3.1)$$

дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда $b(x),c(x),f(x),\omega(x),v(x)$-берилган узлуксиз функциялар; $\gamma,\delta\in(0,1)$-берилган сонлар; $y(x)$-номаълум функция, D_{ox}^{δ} ва D_{x1}^{γ}-каср тартибли дифференциал операторлар:

$$D_{0x}^{\delta}y(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y(t)}{(x-t)^{\delta}}dt,\quad D_{x1}^{\gamma}y(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{y(t)}{(t-x)^{\gamma}}dt.$$

III_1 **масала.** (3.1) тенгламанинг $C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$ синфга тегишли шундай ечими топилсинки, у

$$y(-1)=\int_{-1}^{0}\alpha(t)y(t)dt+k_1,\qquad y(1)=\int_0^1\beta(t)y(t)dt+k_2\qquad(3.2)$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\alpha(t)$ ва $\beta(t)$- берилган узлуксиз функциялар, k_1 ва k_2 эса берилган ҳақиқий сонлар.

Бу масала $\alpha(x)\equiv 0$ ва $v(x)\equiv 0$ бўлган ҳолда [5] да ўрганилган.

3.1-теорема. *Агар* $c(x)\le 0,\omega(x)\le 0,v(x)\le 0,\ c^2(x)+\omega^2(x)+v^2(x)\ne 0,$ $x\in(-1,1)$*;* $|\alpha(x)|\le 1,x\in[-1,0]$*;* $|\beta(x)|\le 1,\ x\in[0,1]$ *шартлар бажарилса,* III_1 *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Фараз қилайлик, III_1 масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+b(x)y'(x)+\omega(x)D_{0x}^{\delta}y(x)+v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)+c(x)y(x)=0,\ x\in(-1,1),\quad(3.3)$$

$$y(-1)=\int_{-1}^{0}\alpha(t)y(t)dt, \qquad y(1)=\int_{0}^{1}\beta(t)y(t)dt, \tag{3.4}$$

шартларни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик, $\{(3.3),(3.4)\}$ масала $y(x)\not\equiv 0,\ x\in[-1,1]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда $\sup\limits_{[-1,1]}|\,y(x)\,|=|\,y(x_0)\,|=M>0,$ бўлиб, бу ерда $x_0-[-1,1]$ оралиқда ётувчи ўзгармас сон.

Аввал $x_0\in(-1,1)$ деб фараз қилайлик. У холда $y(x)$ функция x_0 нуқтада мусбат максимум (манфий минимум)га эга бўлади. У ҳолда функция ҳосилаларининг хоссаларига асосан, $y''(x_0)\le 0(\ge 0),$ $y'(x_0)=0$ тенгсизликлар, D_{0x}^{δ} ва D_{x1}^{γ}-каср тартибли дифференциал операторлар учун экстремум принципига [5,8] асосан $D_{0x}^{\delta}y(x)\,|_{x=x_o}>0(<0),$ $D_{x1}^{\gamma}y(x)\,|_{x=x_o}>0(<0)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Буларни ва теорема шартларини эътиборга олсак,

$$\left[y''(x)+by'(x)+\omega(x)D_{ox}^{\delta}y(x)+v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)+c(x)y(x)\right]\Big|_{x=x_0}<0(>0)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса (3.3) тенгликка зиддир. Демак, $x_0\notin(-1,1)$.

Агар $x_0=-1$ десак, $\forall x\in(-1,1]$ учун $|\,y(x)\,|<|\,y(-1)\,|=M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Буни ва $|\,\alpha(x)\,|\le 1,\ x\in[-1,0]$ тенгсизликни эътиборга олсак, (3.4) тенгликларнинг биринчисидан

$$M=|\,y(-1)\,|=\left|\int_{-1}^{0}\alpha(t)y(t)dt\right|\le\int_{-1}^{0}|\,\alpha(t)\,||y(t)\,|\,dt<M,$$

яъни $M<M$ кўринишдаги нотўғри тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $x_0\ne -1$.

Худди шу каби (3.4) тенгликларни иккинчиси ва $|\,\beta(x)\,|\le 1,x\in[0,1]$ тенгсизликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $x_0\ne 1$.

Юқоридаги олинган қарама-қаршиликлардан $x\notin[-1,1]$ деган ҳулоса келиб чиқади. Бу эса Вейерштрасс теоремасига [8] зиддир.

Демак, $y(x)\not\equiv 0,x\in[-1,1]$ деган фаразимиз нотўғри. Унда $y(x)\equiv 0$, яъни $y_1(x)=y_2(x),x\in[-1,1]$. 3.1-теорема исботланди.

3.2-теорема. *Агар 3.1-теорема шартлари ва* $b(x),\omega(x),v(x)\in C^1[-1,1]$, $f(x)\in C[0,1]$ *шартлар бажарилган бўлса,* III_1 *масала ечимга эга бўлади.*

Исбот. (3.1) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олайлик:

$$y''(x)=f_1(x),\ \ x\in(-1,1) \tag{3.5}$$

бу ерда $f_1(x)=f(x)-b(x)y'(x)-\omega(x)D_{0x}^{\delta}y(x)-v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)-c(x)y(x)$.

У ҳолда (3.5) тенглама учун $[-1,1]$ оралиқда қўйилган икки нуқтали чегаравий масала учун Гильберт теоремасига асосан [5]

$$y(x)=\frac{1}{2}y(-1)(1-x)+\frac{1}{2}y(1)(1+x)+\int_{-1}^{1}G(x,t)f_1(t)dt,\ x\in[-1,1] \tag{3.6}$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi+1)(x-1)/2, & \text{агар } x\geq\xi \text{ бўлса},\\ (\xi-1)(x+1)/2, & \text{агар } x\geq\xi \text{ бўлса}.\end{cases} \tag{3.7}$$

(3.6) тенгликка $f_1(x)$ функциянинг ифодасини қўйиб, сўнгра $y'(t)$, $D_{0t}^{\delta}y(t),D_{t1}^{\gamma}y(t)$ иштирок этган ҳадларни бўлаклаб ва $y(-1)$, $y(1)$ ларни (3.2) тенгликлар орқали алмаштириб, баъзи соддалаштиришлардан сўнг $y(x)$ функцияга нисбатан

$$y(x)+\int_{-1}^{1}K(x,t)y(t)\,dt=\varPhi(x),\quad x\in(-1,1) \tag{3.8}$$

кўринишдаги Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда $K(x,t)$ ва $\varPhi(x)$- маълум функциялар.

(3.8) интеграл тенглама III_1 масалага эквивалент бўлиб, унинг ечимининг бир қийматли ечилиши 3.1-теоремадан келиб чиқади. 3.2-теорема исботланди.

3.2-§. Каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган дифференциал тенглама учун нолокал шартли масала

Иккинчи тартибли чизиқли ушбу

$$y''(x)+b(x)y'(x)+\omega(x)D_{-1x}^{\delta}y(x)+v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)+c(x)y(x)=f(x),\ x\in(-1,1) \tag{3.9}$$

дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда $b(x), c(x), f(x), \omega(x), v(x)$- берилган узлуксиз функциялар; $\gamma, \delta \in (0,1)$ -берилган сонлар; $y = y(x)$- номаълум функция, D_{-1x}^{δ} ва D_{x1}^{γ}-каср тартибли дифференциал операторлар:

$$D_{-1x}^{\delta} y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \frac{d}{dx} \int_{-1}^{x} \frac{y(t)}{(x-t)^{\delta}} dt, \quad D_{x1}^{\gamma} y(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{1} \frac{y(t)}{(t-x)^{\gamma}} dt .$$

III_2 **масала.** (3.9) тенгламанинг $C[-1,1] \cap C^2(-1,1)$ синфга тегишли шундай ечими топилсинки, у

$$y(-1) = \lambda y(\xi) + k_1, \quad y(1) = \int_0^1 \beta(t) y(t) dt + k_2 \tag{3.10}$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\beta(t)$- берилган узлуксиз функция, ξ, k_1 ва k_2 эса берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\xi \in (-1,0)$.

3.3-теорема. *Агар* $c(x) \le 0, \omega(x) \le 0, v(x) \le 0,\ c^2(x) + \omega^2(x) + v^2(x) \ne 0,$ $x \in (-1,1)$*;* $|\lambda| \le 1,\ |\beta(x)| \le 1,\ x \in [0,1]$ *шартлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Фараз қилайлик, масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция

$$y''(x) + b(x) y'(x) + \omega(x) D_{-1x}^{\delta} y(x) + v(x) D_{x1}^{\gamma} y(x) + c(x) y(x) = 0,\ x \in (-1,1), \tag{3.11}$$

$$y(-1) = \lambda y(\xi),\ y(1) = \int_0^1 \beta(t) y(t) dt, \tag{3.12}$$

шартларни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик, $\{(3.11),(3.12)\}$ масала $y(x) \ne 0,\ x \in (-1,1)$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда $\sup\limits_{[-1,1]} |y(x)| = |y(x_0)| = M > 0$ бўлиб, бу ерда $x_0 - [-1,1]$ оралиқда ётувчи ўзгармас сон.

Аввал $x_0 \in (-1,1)$ деб фараз қилайлик. У холда $y(x)$ функция x_0 нуқтада мусбат максимумга (ёки манфий минимумга) эга бўлади. У ҳолда функция ҳосилаларининг хоссаларига асосан, $y''(x_0) \le 0 (\ge 0),\ y'(x_0) = 0$, тенгсизликлар, D_{-1x}^{δ} ва D_{x1}^{γ}-каср тартибли дифференциал операторлар учун экстремум принципига [5,8] асосан $D_{-1x}^{\delta}y(x)|_{x=x_o} > 0(<0)$, $D_{x1}^{\gamma}y(x)|_{x=x_o} > 0(<0)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Буларни ва теорема шартларини эътиборга олсак,

$$\left[y''(x)+by'(x)+\omega(x)D_{-1x}^{\delta}y(x)+v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x)+c(x)y(x)\right]\Big|_{x=x_0} < 0(>0)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса (3.11) тенгликка зиддир. Демак, $x_0 \notin (-1,1)$.

Агар $x_0 = -1$ десак, $\forall x \in (-1,1]$ учун $|y(x)| < |y(-1)| = M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Буни ва $|\lambda| \le 1$ тенгсизликни эътиборга олсак, (3.12) тенгликларнинг биринчисидан

$$M = |y(-1)| = |\lambda y(\xi)| \le |\lambda||y(\xi)| < M,$$

яъни $M < M$ кўринишдаги нотўғри тенгсизлик келиб чиқади.Демак, $x_0 \ne -1$.

Агар $x_0 = 1$ десак, $\forall x \in [-1,1)$ учун $|y(x)| < |y(1)| = M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Буни ва $|\beta(x)| \le 1$ тенгсизликни эътиборга олсак, (3.12) тенгликларнинг иккинчисидан

$$M = |y(1)| = \left|\int_0^1 \beta(t)y(t)dt\right| \le \int_0^1 |\beta(t)||y(t)|\,dt < M,$$

яъни $M < M$ кўринишдаги нотўғри тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $x_0 \ne 1$.

Юқоридаги олинган қарама-қаршиликлардан $x \notin [-1,1]$ деган ҳулоса келиб чиқади. Бу эса Вейерштрасс теоремасига [8] зиддир.

Демак, $y(x) \not\equiv 0, x \in [-1,1]$ деган фаразимиз нотўғри. Унда $y(x) \equiv 0$, яъни $y_1(x) = y_2(x), x \in [-1,1]$. 3.3-теорема исботланди.

3.4-теорема. *Агар 3.3-теорема шартлари ва* $b(x), \omega(x), v(x) \in C^1[-1,1]$, $f(x) \in C[0,1]$ *шартлар бажарилса,* III_2 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (3.9) тенгламани

$$y''(x) = f_2(x),\ x \in (-1,1) \tag{3.13}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_2(x) = f(x) - b(x)y'(x) - \omega(x)D_{-1x}^{\delta}y(x) - v(x)D_{x1}^{\gamma}y(x) - c(x)y(x).$$

У ҳолда (3.13) тенглама учун $[-1,1]$ ораликда қўйилган икки нуқтали чегаравий масала учун Гильберт теоремасига асосан [5]

$$y(x)=\frac{1}{2}y(-1)(1-x)+\frac{1}{2}y(1)(1+x)+\int\limits_{-1}^{1}G(x,t)\,f_1(t)dt,\ x\in[-1,1] \tag{3.14}$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда $G(x,t)$ - (3.12) функция.

(3.14) тенгликка $f_2(x)$ функциянинг ифодасини қўйиб, сўнгра $y'(t)$, $D_{-1t}^{\delta}y(t), D_{t1}^{\gamma}y(t)$ иштирок этган ҳадларни бўлаклаб ва $y(-1)$, $y(1)$ ларни (3.10) тенгликлар орқали алмаштириб, баъзи соддалаштиришлардан сўнг $y(x)$ функцияга нисбатан

$$y(x)+\int\limits_{-1}^{1}K_1(x,t)y(t)dt=\varPhi_1(x),\ \ x\in[-1,1] \tag{3.15}$$

кўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда $K_1(x,t)$ ва $\varPhi_1(x)$ - маълум функциялар.

(3.15) интеграл тенглама қўйилган масалага эквивалент бўлиб, унинг ечимининг бир қийматли ечилиши 3.3-теоремадан келиб чиқади. 3.4-теорема исботланди.

3.3-§. Каср тартибли дифференциал операторлар йиғиндиси қатнашган тенглама учун иккинчи тур интеграл шартли масала

Қуйидаги кўринишдаги

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=f(x),\qquad x\in(0,1) \tag{3.16}$$

чизиқли дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда α_k, β_s - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\alpha_k, \beta_s\in(0,1)$; $a(x)$, $b(x)$, $e_k(x)$, $\delta_k(x)$, $c_s(x)$, $\omega_s(x)$, $f(x)$лар эса $[0,1]$ ораликда аниқланган, берилган узлуксиз функциялар; D_{0x}^{α}, D_{x1}^{β} - каср тартибли дифференциал операторлар:

$$D_{0x}^{\alpha}g(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}(x-t)^{-\alpha}g(t)dt,\quad D_{x1}^{\beta}g(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{1}(t-x)^{-\beta}g(t)dt\,.$$

III_3 **масала.** (3.16) тенгламанинг $C[0,1]\cap C^2(0,1)$ синфга тегишли ва

$$y(0)=\int_{0}^{1}\alpha(t)y(t)dt+k_1,\quad \int_{\xi_0}^{1}y(t)dt=k_2 \tag{3.17}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\alpha(t)$-берилган узлуксиз функция бўлиб, $\xi_0\in(0,1)$.

Дастлаб қўйилган масала ечимининг ягоналигини текширамиз. Бунда D_{0x}^{α}, D_{x1}^{β} каср тартибли дифференциал операторлар учун экстремум принципидан [5.8] фойдаланилади.

3.1-лемма. *Агар* $a(x), b(x), e_k(x), \delta_k(x), c_s(x), \omega_s(x)\in C[0,1]$ *бўлиб,*

$$b(x)\le 0,\qquad e_k(x)\le 0,\qquad c_s(x)\le 0,\qquad \sum_{k=1}^{n}e_k^2(x)+\sum_{s=1}^{m}c_s^2(x)+b^2(x)\ne 0,\qquad \forall x\in(0,1)$$

тенгсизликлар ўринли, $\delta_k(x)$ *функция* α_k *дан катта тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи камаймайдиган мусбат функция,* $\omega_s(x)$ *эса* β_s *дан катта тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи ўсмайдиган мусбат функция бўлса, у ҳолда*

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=0 \tag{3.18}$$

интегро-дифференциал тенгламанинг ечими $(0,1)$ *оралиқда мусбат максимум ва манфий минимумга эришмайди.*

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, яъни (3.18) тенгламанинг ечими $x_0\in(0,1)$ нуқтада мусбат максимумга (ёки манфий минимумга) эга бўлсин дейлик. У ҳолда

$$y''(x_0)\le 0(\ge 0),\qquad y'(x_0)=0,\quad y(x_0)>0(<0),$$

$$\left[D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)\right]\Big|_{x=x_0}>0(<0),\ k=\overline{1,n};\quad \left[D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)\right]\Big|_{x=x_0}>0(<0),\ s=\overline{1,m}$$

муносабатлар ўринли бўлади. Буларни эътиборга олсак,

$$\left[y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=0\right]\Bigg|_{x=x_0}<0(>0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса (3.18) тенгликка зид. Демак, фаразимиз нотўғри. 3.1-лемма исботланди.

3.5-теорема. *Агар 3.1-лемма шартлари бажарилган ва* $|\alpha|<1$ *бўлса,* III_3 *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун (3.18) тенгламанинг

$$y(0)=\int_0^1\alpha(t)y(t)dt,\quad \int_{\xi_0}^{1}y(t)dt=0 \qquad (3.19)$$

бир жинсли шартларни қаноатлантирувчи ечими фақат $y(x)\equiv 0$ бўлишини исботлаш етарли.

(3.19) даги иккинчи интеграл шартдан келиб чиқадики, ёки $y(x)\equiv 0$, $x\in[\xi_0,1]$ ёки $(\xi_0,1)$ оралиқда ҳеч бўлмаса битта $\eta_1(>\xi_0)$ нуқта мавжудки, $y(\eta_1)=0$ бўлади. Охирги ҳолда $\{(3.18),(3.19)\}$ га асосан,

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=0,\qquad 0<x<\eta_1, \qquad (3.20)$$

$$y(0)=\int_0^1\alpha(t)y(t)dt,\quad y(\eta_1)=0 \qquad (3.21)$$

масалага эга бўламиз.

Бу масала фақат $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\eta_1]$ ечимга эга. Ҳақиқатан ҳам, агар $\{(3.20),(3.21)\}$ масаланинг $y(x)\not\equiv 0$ ечими мавжуд деб фараз қилсак, Вейерштрасс теоремасига асосан, $[0,\eta_1]$ оралиқда шундай x_0 сон мавжуд бўладики, $\sup\limits_{[0,\eta_1]}|y(x)|=|y(x_0)|>0$ муносабат ўринли бўлади. Агар $x_0=0$ десак, $\forall x\in(0,\eta_1]$ учун $|y(x)|<|y(0)|$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда (3.19) тенгликларнинг биринчисидан $|y(0)|=\left|\int\limits_0^1\alpha(t)y(t)dt\right|\leq\int\limits_0^1|\alpha(t)||y(t)|dt<|y(0)|$, яъни $|y(0)|<|y(0)|$ нотўғри тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $x_0\neq 0$. $y(\eta_1)=0$ бўлгани учун $x_0\neq\eta_1$. Унда $x_0\in(0,\eta_1)$ бўлади. Демак, x_0 нуқтада $y(x)$ функция мусбат максимумга ёки манфий минимумга эришади. Юқоридаги 3.1-леммага асосан эса буни бўлиши мумкин эмас. Бу қарама-қаршиликлар фаразимиз нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, $\{(3.20),(3.21)\}$ масаланинг ечими $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\eta_1]$.

Агар $\eta_1=1$ десак, $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ бўлиб, теорема исбот бўлади. Агар $\eta_1\in(\xi_0,1)$ бўлса, $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\eta_1]$ тенгликни эътиборга олсак, $\{(3.20),(3.21)\}$ масаладан

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=0,\qquad \eta_1<x<1, \tag{3.22}$$

$$y(\eta_1)=0,\quad \int\limits_{\eta_1}^{1}y(t)dt=0 \tag{3.23}$$

тенгликлар келиб чиқади. Худди $\{(3.20),(3.21)\}$ масала устида юритилган мулоҳазаларни такрорлаб, (3.22) ва (3.23) шартлардан фойдаланиб, шундай $\eta_2\in(\eta_1,1]$ нуқта мавжудки, $y(x)\equiv 0$, $x\in[\eta_1,\eta_2]$ деган хулосага келамиз.

Агар $\eta_2=1$ бўлса теорема исбот бўлади. Акс ҳолда $y(x)\equiv 0$, $x\in[\eta_1,\eta_2]$ тенгликка асосан $\{(3.22),(3.23)\}$ масаладан

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x)=0,\qquad \eta_2<x<1, \tag{3.24}$$

$$y(\eta_2)=0, \quad \int\limits_{\eta_2}^{1} y(t)\,dt=0 \tag{3.25}$$

муносабатлар келиб чиқади.

Юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаб, (3.24) ва (3.25) муносабатлардан фойдаланиб, шундай $\eta_3\in(\eta_2,1]$ нуқта топамизки, $y(x)\equiv 0$, $x\in[\eta_2,\eta_3]$ бўлади, акс ҳолда юқоридаги жараённи давом эттирамиз.

Натижада ёки чекли қадамлардан сўнг $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ эканлигини топамиз ёки $[0,1]$ ораликда ичма-ич ётувчи шундай $[0,\eta_1]\subset[0,\eta_2]\subset\ldots\subset[0,\eta_n]\subset\ldots$ кесмалар кетма-кетлигига эга бўламизки, улар учун $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\eta_n]$, $n\in N$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=1$ муносабатлар ўринли бўлади. $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, охирги муносабатлардан $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ тенглик келиб чиқади. Демак, $\{(3.18),(3.19)\}$ масала фақат тривиал ечимга эга. 3.5-теорема исботланди.

3.6-теорема. *Агар 3.5-теорема шартлари ва* $f(x)\in C[0,1]$ *шарт бажарилса,* $Ш_3$ *масала ягона ечимга эга бўлади.*

Исбот. (3.16) тенгламани

$$y''(x)=f_3(x), \quad x\in(0,1), \tag{3.26}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_3(x)=f(x)-a(x)y'(x)-b(x)y(x)-\sum_{k=1}^{n}e_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}\delta_k(x)y(x)-$$

$$-\sum_{s=1}^{m}c_s(x)D_{x1}^{\beta_s}\omega_s(x)y(x).$$

Агар $f_3(x)$ функцияни ва, $y(1)$ларни маълум деб ҳисобласак, (3.26) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int\limits_0^1 G(x,t)g(t)\,dt, \quad x\in[0,1] \tag{3.27}$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда $G(x,t)$ - (1.12) функция.

(3.27) тенгликда $y(0)$ ва $f_3(x)$ларнинг ўрнига уларнинг ифодасини қўямиз. Сўнгра $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ҳамда такрорий интегралда интеграллаш тартибини алмаштирамиз. Натижада

$$y(x) = k_1(1-x) + y(1)x + \int_0^1 M(x,t)\,y(t)\,dt \tag{3.28}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз.

(3.28) тенгликни x бўйича $[\xi_0,1]$ ораликда интеграллаб ва (3.17) шартларнинг иккинчисини эътиборга олиб $y(1)$ ни топамиз. Топилган $y(1)$ ни (3.28) тенгликка олиб бориб қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x) + \int_0^1 K_2(x,t)y(t)dt = \Phi_2(x),\ x \in [0,1] \tag{3.29}$$

кўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда $K_2(x,t)$ ва $\Phi_2(x)$ - маълум функциялар.

(3.29) интеграл тенглама қўйилган масалага эквивалент бўлиб, унинг ечимининг бир қийматли ечилиши 3.5-теоремадан келиб чиқади. 3.6-теорема исботланди.

ХУЛОСА

Маълумки, оддий дифференциал тенгламалар назарияси узоқ тарихга эга. Бу назарияда дастлаб бошланғич масалалар ўрганилган бўлса, кейинчалик чегаравий масалалар ўрганишга ўтилган. Аммо кейинги вақтларда чегаравий шартлар турлича йўналишларда умумлаштирилиб фанда нолокал чегаравий шартлар деган тушунча пайдо бўлди. Даврийлик шарти, Бицадзе-Самарский шарти, интеграл шартлар шулар жумласидандир.

Қолаверса, кейинги вақтларда каср тартибли интеграл ва дифференциал операторлар киритилиб, уларнинг хоссалари кенг ўрганилди. Шунинг учун оддий дифференциал тенгламалар билан бир қаторда каср тартибли интеграл ва дифференциал операторлар ҳамда уларга ўхшаш бошқа интеграл операторларни ўз ичига олувчи интегро-дифференциал тенгламалар ҳам ўрганила бошланди. Мазкур диссертация ишида бу йўналишга оид турли интегро-дифференциал тенгламалар учун локал ва нолокал шартли масалалар ўрганилди. Бунда асосан ўрганилаётган масала Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламасига келтирилган. Маълумки, бундай интеграл тенгламалар ҳар доим ҳам ечимга эга бўлавермайди. Ечимга эга бўлиши учун унга мос бир жинсли интеграл тенглама фақат нол ечимга эга бўлиши керак, бунинг учун эса ўрганилаётган масалага мос бир жинсли масала фақат нол ечимга эга бўлиши керак. Шунинг учун барча масалаларни ўрганишда аввал масала ечимининг ягоналиги, яьни бир жинсли масала фақат нол ечимга эгалиги исботлаб олинган. Натижалар теорема шаклда баён қилинган бўлиб, улардаги шартлар етарлидир. Балким бу шартларни камайтириш ҳам мумкин.

Диссертациянинг кириш қисмида мавзунинг долзарблиги, тадқиқот объекти ва предмети, мақсади ва вазифалари, ишнинг илмий янгилиги, тадқиқотнинг асосий масалалари ва фаразлари, тадқиқот мавзуси бўйича адабиётлар таҳлили, қўлланилган усулларнинг тавсифи, тадқиқот натижаларининг назарий ва амалий аҳамияти ҳамда диссертациянинг умумий мазмуни тўла баён қилинган.

Биринчи боб “Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун икки нуқтали чегаравий масалалар” деб номланган. Унда

$$p_0\left(x\right)y''(x)+p_1\left(x\right)y'+p_2\left(x\right)y(x)+\int_a^x K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt=f\left(x\right),\ x\in\left(a,b\right)$$

кўринишдаги интегро – дифференциал тенгламалар учун

$$a_1y(a)+b_1y'(a)=c_1,\ a_2y(b)+b_2y'(b)=c_2$$

чегаравий шартли масалалар ўрганилган.

Иккинчи боб еттита параграфдан иборат бўлиб, “Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун биринчи тур интеграл шартли масалалар” деб номланган. Унда иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун биринчи тур интеграл шартли масалалар қўйилган ва бир қийматли ечилиши исботланган.

Диссертациянинг учинчи боби “Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун иккинчи тур интеграл шартли масалалар” деб номланган бўлиб, боб уч параграфдан иборат. Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламалар учун иккинчи тур интеграл шартли масалалар қўйилган ва бир қийматли ечилиши исботланган.

Олинган илмий натижалар ФарДУ математик анализ ва дифференциал тенгламалар кафедраси қошидаги илмий семинарда ва вилоят, республика миқёсида ўтказилган турли илмий анжуманларда маъруза қилинган ва 5 та илмий мақола ва тезислар сифатида чоп этилган.

Ушбу диссертация ишида олинган натижалар назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлиб, ундан биологик жараёнларни тадқиқ қилишда ва дифференциал тенгламалар назариясини янада ривожлантиришда ҳамда университетларда танлов фанлари ташкил қилишда фойдаланилиши мумкин.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙҲАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президенти Ш.М.Мирзиёев асарлари

1. Президент Ш.М.Мирзиёевнинг 2017-йил 20-апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарори.

II. Асосий адабиётлар

2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. -М.: Высшая школа, 1995, 301 с.
3. Cannon J.R. The Solution of Heat Equation Subject to the Specification of Energy// Quart. Appl. Math. 1963, 21,№ 2. –P. 155-160.
4. Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений.-Нальчик, 2011,196 с.
5. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.-Тошкент: MUMTOZ SO’Z, 2014, 164 бет.
6. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар.-Фарғона: Фарғона нашриёти, 2012. 112 бет.
7. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 b.
8. Азларов Т., Мансуров Х.. Математик анализ.-Тошкент: Ўқитувчи, 1994, 416 бет.
9. Ўринов А.Қ. Телеграф тенгламаси учун чегаравий масалалар – Тошкент: Университет, 1996, 47 бет.
10. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. –М. : Высшая школа, 1985. – с. 304.

III. Даврий нашрлар, статистик тўпламлар ва ҳисоботлар

11. Абдуманнопов М.М. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли интегро-дифференциал тенглама учун чегаравий масала // “Фарғона водийси ёш олимлари” 1-ҳудудий илмий анжумани материаллари тўплами.-Наманган, 2017, 232-234 бетлар.

12. Ўринов А.Қ., Абдуманнопов М.М. Интеграл операторлар қатнашган иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама учун чегаравий масала // ФарДУ. Илмий хабарлар. 2017 №3, 103-105 бетлар.
13. Абдуманнопов М.М. Биномиал йиғиндили интеграл оператор қатнашган дифференциал тенглама учун нолокал масала // “Фаннинг долзарб масалалари” мавзусидаги Республика илмий-амалий интернет-конференция илмий мақолалар тўплами.-Фарғона, 2017, 71-75 бетлар.
14. Ўринов А.Қ., Абдуманнопов М.М. Интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун интеграл шартли бир масала ҳақида // АДУ илмий ахборотномаси. 2017 №2, 5-8 бетлар.
15. Ўринов А.Қ., Абдуманнопов М.М. Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли бир масала ҳақида // АДУ илмий ахборотномаси. 2017 №1, 31-36 бетлар.
16. Абдуманнопов М.М. Интеграл шартли бир нолокал масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида // “Фан ва таълим-тарбия-жамиятнинг интелектуал кўзгуси” мавзусидаги илмий-амалий анжуман материаллари.-Нукус, 2016, 107-109 бетлар.
17. Абдуманнопов М.М. Мавҳум аргументли Бессел функцияси қатнашган ўзгармас коэффициентли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала // ФарДУ. Илмий хабарлар. 2018 №6, 21-24 бетлар.
18. Абдуманнопов М.М. Интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала // “Таҳлилнинг долзарб муаммолари ва татбиқлари” мавзусидаги Республика илмий конференция материаллари.-Қарши, 2019, 121-122 бетлар.
19. Абдуманнопов М.М. Интегро-дифференциал тенгламаларнинг бир синфи учун интеграл шартли масала // “Математика ва

информатиканинг замонавий муаммолари” мавзусидаги Республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. Фарғона-2019, 131-132 бетлар.

20. Абдуманнопов М.М. Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала // НамДУ илмий ахборотномаси. 2018 №3, бетлар.

21. Абдуманнопов М.М. Каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган дифференциал тенглама учун нолокал шартли масала // “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики” халқаро илмий конференция материаллари.- Фарғона, 2020, 404-406 бетлар.

IV. Интернет сайтлари

22. https://elibrary.ru/item.asp?id=17961016

23. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=3600&option_lang=rus

24. www.edu.uz

25. www.gov.uz

26. www.ziyonet.uz

27. www.study.uz