УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУДАЙБЕРГАНОВ ЯШИН КАМИЛОВИЧ

ИККИТА БУЗИЛИШ ЧИЗИҒИГА ЭГА БЎЛГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОКОРРЕКТ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

УДК: 519.6+517.95

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУДАЙБЕРГАНОВ ЯШИН КАМИЛОВИЧ

ИККИТА БУЗИЛИШ ЧИЗИҒИГА ЭГА БЎЛГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОКОРРЕКТ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.3.PhD/FM195 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-mat.urdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар — **Фаязов Кудратилло Садридинович**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар: — **Хасанов Акназар Бекдурдиевич**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович
физика-математика фанлари доктори

Етакчи ташкилот: — **Фарғона Давлат университети**

Диссертация ҳимояси Урганч давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 рақамли Илмий кенгашнинг «24» май 2021 йил соат 14^{00}даги онлайн мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00; e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

Диссертация билан Урганч Давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (D-237-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ. Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11; факс: (99862) 224-67-00).

Диссертация автореферати 2021 йил «7» май куни тарқатилди.
(2021 йил «7» май даги 1- рақамли реестр баённомаси).

Б.И. Абдуллаев
Илмий даража берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д.

Ю.А. Атамуратов
Илмий даража берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

С.А. Имомкулов
Илмий даража берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа докторы (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар хусусий ҳосилали ноклассик дифференциал тенгламалар учун нокоррект масалаларни ечиш, тақрибий ечимларини қуриш ҳамда аниқ ечим ҳамда тақрибий ечим орасидаги фарқ нормасини баҳолаш масалаларига келтирилади. Тескари ва нокоррект масалалар назариясинининг асосий объекти газ динамикаси соҳасидаги, акустик тўлқинларнинг тарқалиши ва геофизика соҳасидаги амалий тадқиқотларнинг моделларидир. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган дифференциал тенгламалар учун нокорррект қўйилган чегаравий масалаларни шартли қорректликка текшириш, корректлик тўпламида тақрибий ечимларни топиш ва компьютерда сонли ечиш дастурини яратиш математик физика соҳасида муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Жаҳонда аралаш турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокорррект қўйилган чегаравий масалаларнинг ечимини шартли корректликкка текшириш, тақрибий ечимларини қуриш, аниқ ечим ва тақрибий ечим орасидаги фарқни баҳолаш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Бу борада ечимнинг априор баҳосини топиш, корректлик тўпламини аниқлаш, ягоналик ва шартли турғунлик теоремаларини исботлаш, регулярлаштириш усули ёрдамида тақрибий ечимларни қуриш, бошланғич берилганларга мос аниқ ва тақрибий ечимларни ҳисоблаш алгоритмини тузиш ва ушбу алгоритм асосида дастур яратишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган геофизика, газ динамикаси ва акустик тўлқинларнинг тарқалиши соҳаларидаги аралаш типдаги тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалаларни ечиш, аниқ ечим ва тақрибий ечим орасидаги фарқнинг нормасини баҳолаш ва сонли ечиш усулларини ишлаб чиқиш каби долзарб йўналишларга катта эътибор қаратилмоқда. Хусусан, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тескари ва нокоррект чегаравий масалаларнинг тақрибий ечимларини қуриш, юқори тартибли аралаш ва аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект қўйилган чегаравий масалаларнинг корректлик тўпламини аниқлаш бўйича муҳим натижаларга эришилмоқда. “Математик физика, амалий математика ва физиканинг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди.[1] Бу борада иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш ва йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи параболик тенгламалар учун нокоррект қўйилган чегаравий масалаларни шартли корректлигини аниқлаш, регулярлашган ечимларни қуриш, регуляризация параметрларини ҳисоблаш формулаларини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сонли «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сонли «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Диссертацияда қаралаётган масалалар математик физиканинг аралаш турдаги тенгламалар синфига тегишлидир. Бундай турдаги тенгламалар учун коррект қўйилган чегаравий масалалар бир қатор олимлар томонидан ўрганилган. М. Жевре ўз ишларида йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи параболик тенглама учун чегаравий масалани қараган. Ҳар хил чегаравий ва бошланғич шартли бундай турдаги масалалар С.Д. Пагани, Г. Таленти, В.В. Врагов, В.К. Романко, С.А. Терсенов, А.М. Нахушев ва бошқалар томонидан ўрганилган. Хусусан, Ф. Трикоми ва С. Геллерстедтнинг ишлари аралаш типдаги тенгламаларга бағишланган эди. Буларга М.А. Лаврентьев, М.В. Келдыш, А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинов, Т.Д. Джураев, В.Н. Врагов, К.Б. Сабитов, А.И. Кожанов, С.П. Пулькин, А.П. Солдатов, Н.В. Кислов ва бошқаларнинг ишлари ҳам киради. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар билан А.М. Нахушев, М.М. Зайнулабидов, В.Ф. Волкодавов, В.В. Азовский, О.И. Маричев, А.М. Ежов, Н.И. Поливанов, Хе Кан Чер, С.И. Макаров, С.С. Исамухамедов, Ж. Орамов, М.С. Салахитдинов ва унинг ўқувчилари, К.Б. Сабитов, А.А. Гималтдинова, О.А. Репин ва бошқа муаллифлар шуғулланганлар.

А.Н. Тихонов, М. Ландис, С.Г. Крейн, С.П. Шишатский, Х.А. Левин ва бошқаларнинг ишларида тескари вақт йўналиши бўйича параболик тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар ўрганилган. Ушбу ишларда параболик типдаги тенгламалар учун тескари ва характеристик бўлмаган Коши масалалалари шартли турғунликка текширилди. С.Г. Крейн ва Х.А. Левин мазкур натижаларни ўз-ўзига қўшма оператор коэффициентли абстракт эволюцион тенгламалар учун умумлаштирди. Б.Д. Солеман, Р.Ж.

Дуффин, В.Ж. Мизел ишларида псевдо-дифференциал тенгламалар учун шунга ўхшаш тадқиқотлар олиб борилган.

Ш.А. Алимов тамонидан Гиперболик тенглама учун Дирихле масаласи қаралган. Ш. Ярмухамедов эллиптик тенглама учун Карлеман функцияси ёрдамида Коши масаласи учун тақрибий ечимларни қурди. Унинг ўқувчилари томонидан эса тенгламалар системаси учун Карлеман функцияси усули билан регулярлашган ечимлар қурилди. С.П. Шишатский, К.С.Фаязов ва М.Х. Аламиновнинг ишлари ҳам алоҳида эътиборга лойиқ, бунда бузилган параболик ва эллиптик тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар ўрганилган. А. Хайдаров ва Д.К. Дурдиевнинг тадқиқот предмети бўлиб, эллиптик ва гиперболик типдаги тенгламалар учун тескари ва нокоррект масалалар хизмат қилган, интеграл геометрия масалалари эса А. Бегматов томонидан ўрганилган. Йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи параболик типдаги тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар ва аралаш типдаги тенгламалар К.С. Фаязов ишларининг предмети бўлган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг илмий тадқиқот ишлари режасига мувофиқ “Дифференциал тенгламалар ва математик физика” дастури доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун шартли корректликни аниқлаш ҳамда корректлик тўпламида тақрибий ечимларни топиш ва уларни компьютерда сонли ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган, йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи параболик тенглама учун чегаравий масалани шартли корректлигини аниқлаш;

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги хусусий ҳосилали тенгламалар системаси учун нокоррект чегаравий масалаларни ечиш;

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган, йўналишини вақт бўйича ўзгартирадиган параболик тенгламалар системаси учун чегаравий масалаларнинг шартли корректлигини исботлаш;

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган параболик ва аралаш типдаги тенгламалар системаси учун чегаравий масалаларнинг А.Н.Тихонов бўйича корректликни исботлаш;

регулярлашган ечимларни қуриш, мос функционал фазоларда аниқ ва тақрибий ечим орасидаги фарқ нормаси баҳолаш;

регуляризация параметрларини ҳисоблаш формулаларини аниқлаш, сонли ечиш дастурларини ишлаб чиқиш, ҳисоблаш натижаларни график ҳамда жадвал кўринишида тасвирлаш.

Тадқиқотнинг объекти сифатида иккита бузилиш чизиғига эга бўлган параболик ва аралаш турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар олинган.

Тадқиқот предмети иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик таҳлил усуллари, спектрал ёйилмалар усули, логарифмик қавариқлик усули, интеграл энергия, регуляризация ҳамда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

йўналишини вақт бўйича ўзгартируви параболик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларни ечишнинг априор баҳолари олинган;

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган параболик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларнинг корректлик тўпламлари аниқланган, шунингдек, ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган;

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларга нисбатан корректлик тўпламлари аниқланди, шунингдек, ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган;

тақрибий ечимлар курилиб, мос фазоларда аниқ ва тақрибий ечимлар орасидаги фарқ нормалари баҳоланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларга нисбатан аниқ ва тақрибий ечимлар орасидаги фарқ нормалари баҳолари аниқланган ва регуляризация параметрларини ҳисоблаш формулалари келтириб чиқарилган;

ҳисоблаш алгоритмлари асосида аниқ ва тақрибий ечимнинг сонли ва график натижаларини чиқарувчи дастурлар Visual C# муҳитида ишлаб чиқилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, нокоррект масалалар назарияси, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясидаги усуллардан фойдаланилганлиги ҳамда олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар назариясининг ривожланиши учун фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган натижалар аралаш муҳит механикаси, газ динамикаси, геофизикада ва бошқа нокоррект қўйилган масалалар билан ифодаланувчи тегишли соҳалардаги моделларга қўлланишида амалий асос бўлиб хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган параболик ва аралаш турдаги нокоррект чегаравий масалаларнинг ечимлари учун шарли турғунлик баҳосини аниқлаш ва мос корректлик тўпламида тақрибий ечимларининг қурилиши асосида:

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш турдаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системаси учун чегаравий масалага мос спектрал масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари ҳамда иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масаланинг корректлик тўпламидаги тақрибий ечимидан №MRU-OT-1/2017 “Ноклассик дифференциал ва оператор-дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий ва тескари масалалар” мавзусидаги фундаментал лойиҳада тескари масалаларни ечишда фойдаланилган (Ўзбекистон республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 23 октябрдаги 89-03-4173-сонли маълумотномаси). Натижада ноклассик дифференциал ва оператор-дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий ва тескари масалаларнинг ечими мавжудлигини исботлаш имконини берган;

иккита бузилиш чизиғига эга бўлган параболик турдаги йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг корректлик тўпламидаги ечим кўриниши, иккита бузилиш чизиғига эга бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган аралаш турдаги тенглама учун нокоррект чегаравий масалаларнинг шартли турғунлигидан №ОТ-Ф4-(36+32) “Математик физика ва оптимал бошкарув масалаларини ечишнинг янги усулларини ишлаб чиқиш. Тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич ва спектрал масалалар ва уларнинг тадбиқлари” мавзусидаги фундаментал лойиҳада тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич ва спектрал масалалар ечимлари учун турғунлик баҳоларини олишда фойдаланилган (Ўзбекистон республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 23 октябрдаги 89-03-4173-сонли маълумотномаси). Натижада тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич ва спектрал масалалар ечимлари учун турғунлик баҳоларини олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган. Диссертация натижалари Ўзбекистон Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институтининг “Математик физиканинг замонавий муаммолари” дифференциал тенгламалар бўйича умумшаҳар семинарида ва Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида “Математик физиканинг замонавий муаммолари” шаҳар илмий семинарида ҳамда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Дифференциал тенгламалар ва математик физика кафедраси семинарида маъруза қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқотнинг асосий натижалари 15 та илмий ишларда эълон қилинган, улардан 8 таси Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссияси томонидан докторлик диссертацияларининг асосий илмий натижаларини эълон қилиш учун тавсия қилинган журналларда, 2 таси хорижий журналларда ва 6 таси республика журналларида нашр қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловадан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 115 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар ва спектрал масала**» деб номланувчи биринчи бобида диссертацияни баён қилиш учун аралаш ва аралаш-тузилмали турдаги тенгламалар назариясига оид керакли таърифлар келтирилган.

1.1-параграфда ноклассик типдаги тенгламалар назарияси тўғрисидаги натижаларнинг қисқача тавсифи ва унга мос масалалар келтирилади.

1.2-параграфда аралаш типдаги тенгламалар учун коррект ва шартли коррект масалаларнинг таърифлари ҳамда уларни ечиш усуллари келтирилган. Нокоррект масалага мисол сифатида битта бузилиш чизиғига эга аралаш типдаги тенглама учун қуйилган бошланғич-чегаравий масала келтирилган ва унинг шартли корректлиги исботланган.

1.3-параграфда аралаш типдаги тенгламаларда вужудга келадиган спектрал масалалар назариясини баён этишга бағишланган.

Спектрал масала. λ нинг шундай қийматларини топингки, натижада

$$sgn(x)\vartheta_{xx}(x,y)+sgn(y)\vartheta_{yy}(x,y)+\lambda\vartheta(x,y)=0,(x,y)\in\left(-1;1\right)^2,x,y\neq 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\vartheta(x,y)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ \ y\in[-1;1],\\
\vartheta(x,y)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ \ x\in[-1;1],\\
\left.\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ y\in[-1;1],\\
\left.\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ x\in[-1;1],\left(i=\overline{0,1}\right)
\end{gathered} \tag{2}$$

масала нотривиал ечимга эга бўлсин.

Шундай қилиб (1), (2) спектрал масаланинг хос қийматлари қуйидаги

$$\mu_k^2+\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(1)},\ \mu_k^2-\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(2)},\ -\mu_k^2+\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(3)},\ -\mu_k^2-\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(4)}$$

кўринишга эга, уларга мос хос функциялар эса

$$\vartheta_{k,l}^{(1)}(x,y)=X_k^{(1)}(x)\cdot Y_l^{(1)}(y),\ \vartheta_{k,l}^{(2)}(x,y)=X_k^{(1)}(x)\cdot Y_l^{(2)}(y),$$

$$\vartheta_{k,l}^{(3)}(x,y)=X_k^{(2)}(x)\cdot Y_l^{(1)}(y),\ \vartheta_{k,l}^{(4)}(x,y)=X_k^{(2)}(x)\cdot Y_l^{(2)}(y),\ k,l\in N$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда

$$X_k^{(1)}(x)=\begin{cases}\sin\mu_k(x-1)/\cos\mu_k \quad ,0\le x\le 1,\\ sh\mu_k(x+1)/ch\mu_k,-1\le x\le 0,\end{cases} k\in N,$$

$$Y_l^{(1)}(y)=\begin{cases}\sin\sigma_l(y-1)/\cos\sigma_l,0\le y\le 1,\\ sh\sigma_l(y+1)/ch\sigma_l,-1\le y\le 0,\end{cases} l\in N,$$

$$X_k^{(2)}(x)=\begin{cases}sh\mu_k(x-1)/ch\mu_k,0\le x\le 1,\\ \sin\mu_k(x+1)/\cos\mu_k,\ -1\le x\le 0,\end{cases} k\in N,$$

$$Y_l^{(2)}(y)=\begin{cases}sh\sigma_l(y-1)/ch\sigma_l\ ,0\le y\le 1,\\ \sin\sigma_l(y+1)/\cos\sigma_l\ ,-1\le y\le 0,\end{cases} l\in N.$$

Иккала ҳолда ҳам μ_k,σ_l- лар, $tg\alpha=-th\alpha$ трансцендент тенгламанинг мусбат илдизлари ҳисобланади.

Фараз қилайлик, $\|u\|^2=(u,u)$ бўлсин, бу ерда $(u,\upsilon)=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}u\upsilon dxdy$ скаляр кўпайтма. Бундан ташқари,

$$\left(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(p)}(x,y),\vartheta_{i,j}^{(q)}(x,y)\right)=0,\ p\ne q,\ (p,q=\overline{1,4}),\forall k,l,i,j,$$

$$\left(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(m)}(x,y),\vartheta_{i,j}^{(m)}(x,y)\right)=\begin{cases}1,\ k=i\wedge l=j\\ 0,\ k\ne i\wedge l\ne j\end{cases},(m=1,4),$$

$$\left(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(m)}(x,y),\vartheta_{i,j}^{(m)}(x,y)\right)=\begin{cases}-1,\ k=i\wedge l=j\\ 0,\ k\ne i\wedge l\ne j\end{cases},(m=2,3),$$

бу ерда $k,l,i,j\in N.$

Қуйидаги формула бўйича аниқланган норма

$$\|u(x,y,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(1)}(x,y)\right)\right|^2+\right.$$

$$+\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(2)}(x,y)\right)\right|^2+\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(3)}(x,y)\right)\right|^2+$$

$$\left.+\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(4)}(x,y)\right)\right|^2\right\}$$

H_0 фазодаги бошланғич нормага эквивалент.

(1)-(2) масаланинг $\left\{\vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)\right\},\left(j=\overline{1,4}\right)$ хос функциялари $L_2\left((-1;1)^2\right)$ да нормоллашган бўлиб, $L_2\left((-1;1)^2\right)$ да Рисс базисини ташкил қилади.

Диссертациянинг **«Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар»** деб номланган иккинчи боби математик физиканинг ноклассик тенгламалари учун чегаравий (нокоррект) масалалар бўйича натижаларни баён этишга бағишланган. Ечимнинг априор баҳоси олинди, ҳар бир масала учун ягоналик ва шартли турғунлик тўғрисидаги теоремалар исботланди. Бу масалаларнинг барчасида берилганларнинг ўзгаришига турғун регулярлашган ечимлар қурилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида йўналишини вақт бўйича ўзгартирадиган параболик типдаги бошланғич-чегаравий масаланинг шартли корректлиги ва унинг тақрибий ечими баён қилинади.

Берилган $\Omega = \Omega_0 \times Q$ соҳада

$$u_t(x,y,t) + sgn(x)u_{xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{yy}(x,y,t) = 0 \qquad (3)$$

тенгламани қараймиз, бу ерда $\Omega_0 = \left\{(x,y):(-1;1)^2,\, x\neq 0,\, y\neq 0\right\}, Q=\left\{0<t<T,\, T<\infty\right\}$.

Масала. Ω соҳада қуйидаги

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad (x,y)\in[-1;1]^2 \qquad (4)$$

бошланғич,

$$u(x,y,t)\big|_{x=\pm1} = 0, (y,t)\in[-1;1]\times\overline{Q},\ u(x,y,t)\big|_{y=\pm1} = 0, (x,t)\in[-1;1]\times\overline{Q} \qquad (5)$$

чегаравий,

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0}, (y,t)\in[-1;1]\times\overline{Q},$$
$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times\overline{Q} \qquad (6)$$

ҳамда тикиш шартларини қаноатлантирувчи (3) тенгламанинг ечимини топинг, бу ерда $(i=\overline{0,1}), \varphi(x,y)$ – берилган етарлича силлиқ функция, шу билан бирга, $\varphi(x,y)\big|_{\partial\Omega_0} = 0$.

(3)-(6) чегаравий масаланинг умумлашган ечими деганда $u(x,y,t)\in C(L_2(-1,1)^2,Q)$ ва ихтиёрий $V(x,y,t)\in W_2^{2,1}\left((-1;1),(-1;1),(0;T)\right)$ функция учун

$$\int_0^T\int_{-1}^1\int_{-1}^1 u(x,y,t)\Big(sgn(x)sgn(y)V_t(x,y,t) - sgn(y)V_{xx}(x,y,t) - sgn(x)V_{yy}(x,y,t)\Big)dxdydt =$$
$$-\int_{-1}^1\int_{-1}^1 sgn(x)sgn(y)V(x,y,0)\varphi(x,y)dxdy$$

тенгликни қаноатлантирувчи $u(x,y,t)$ функцияни тушунамиз, бунда $V(x,y,T)=0,\ \ V(-1,y,t)=0,\ \ V(1,y,t)=0, V(x,-1,t)=0,\ \ V(x,1,t)=0$ шартлар бажарилади.

1-теорема. *Фараз қилайлик, $u(x,y,t)$ функция (3) тенгламани ва (4)-(6) шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда ихтиёрий $u(x,y,t)\in C(L_2(-1,1)^2,Q)$ ечим учун*

$$\|u(x,y,t)\|_0 \le 2\|u(x,y,0)\|_0^{\frac{T-t}{T}} \cdot \|u(x,y,T)\|_0^{\frac{t}{T}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Фараз қилайлик,

$$M=\left\{u:\|u(x,y,T)\|_0 \le m, m<\infty\right\}.$$

бўлсин.

2-теорема. *Агар (3)-(6) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,y,t)\in M$ бўлса, у ҳолда (3)-(6) масаланинг ечими ягонадир.*

Фараз қилайлик $u(x,y,t)$ ечим (3)-(6) масаланинг аниқ берилганлар билан, $u_\varepsilon(x,y,t)$ эса (3)-(6) масаланинг тақрибий берилганлар билан ечими бўлсин.

3-теорема. *Қаралаётган масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,y,t), u_\varepsilon(x,y,t)\in M$, бундан ташқари, $\|\varphi(x,y)-\varphi_\varepsilon(x,y)\|_0 \le \varepsilon$ бўлсин. У ҳолда $U\left(x,y,t\right)$ функция учун $t\in\left(0;\ T\right)$ да қуйидаги*

$$\|U(x,y,t)\|_0 \le 2\left(\varepsilon\right)^{1-\frac{t}{T}} \cdot \left(2m\right)^{\frac{t}{T}}$$

тенгсизлик ўринли.

Фараз қиламиз, қаралаётган (3)-(6) масаланинг ечими мавжуд, M тўпламга тегишли ва $\|\varphi(x,y)-\varphi_\varepsilon(x,y)\|_0 \le \varepsilon$ бўлсин. У ҳолда аниқ ва тақрибий бошланғич берилганларга мос тақрибий ечим қурилиб, мос функционал фазода аниқ ва тақрибий ечимлар орасидаги фарқ нормаси ушбу

$$0.5\|u(x,y,t)-u_\varepsilon^N(x,y,t)\|_0^2 \le \varepsilon^2 e^{2\lambda_{N,N}^{(1)}t} + m^2\left(e^{2\lambda_{1,N+1}^{(1)}(t-T)} + e^{2\lambda_{N,N+1}^{(3)}(t-T)} + \right.$$

$$\left. + e^{2\lambda_{N+1,1}^{(1)}(t-T)} + e^{2\lambda_{N+1,N}^{(2)}(t-T)} + e^{2\lambda_{N+1,N+1}^{(3)}(t-T)}\right) + \alpha(N)$$

тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда $N\to\infty$ да $\alpha(N)\to 0$.

Мазкур бобнинг иккинчи параграфи иккита бузилиш чизиғига эга бўлган иккинчи тартибли аралаш типдаги дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масалани ўрганишга бағишланган.

Берилган $\Omega=\Omega_0\times Q$ соҳада

$$u_{tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{yy}(x,y,t)=0 \qquad (7)$$

тенгламани қаноатлантирувчи $u(x,y,t)$ функция топилсин, бу ерда $\Omega_0=\left\{(x,y)\in(-1;1)^2,\ x\ne 0,\ y\ne 0\right\}$, $Q=\left\{0<t<T, T<\infty\right\}$.

Масаланинг қўйилиши. Ω соҳада (7) тенгламанинг шундай ечимини топингки, натиажада қуйидаги:

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x,y),\ (x,y):\left[-1;1\right]^2 \qquad (8)$$

бошланғич,

$$u(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ (y,t)\in[-1;1]\times\bar{Q},\ u(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ \ (x,t)\in[-1;1]\times\bar{Q} \qquad (9)$$

чегаравий,

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},(y,t)\in[-1;1]\times\bar{Q},\\&\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times\bar{Q}\end{aligned} \qquad (10)$$

ва тикиш шартлари бажарилсин, бу ерда $\left(i=\overline{0,1}\right)$ ва $\varphi_i(x,y)-$ берилагн етарлича силлиқ функциялар, шу билан бирга, $\varphi_i(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0.$

Белгилашни киритамиз

$$M=\left\{u(x,y,t):\left\|u(x,y,T)\right\|_0\le m,\ m<\infty\right\}.$$

$$\left\|\varphi(x,y)\right\|_1^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\lambda_{k,l}^{(1)}\left(\varphi_{k,l}^{(1)}\right)^2+\left|\lambda_{k,l}^{(2)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(2)}\right)^2+\left|\lambda_{k,l}^{(3)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(3)}\right)^2+\left|\lambda_{k,l}^{(4)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(4)}\right)^2\right)$$

нормани киритамиз.

***4-теоерма**. Фараз қилайлик, $u(x,y,t)$ функция*

$$u_{tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{yy}(x,y,t)=0$$

тенгламанинг ечими бўлиб, (8)-(10) шартларни қаноатлантирсин, У ҳолда бу тенгламанинг ечими учун $t\in Q$ да

$$\left\|u(x,y,t)\right\|_0^2\le 4e^{2t(T-t)}\left(\left\|u(x,y,0)\right\|_0^2+\alpha\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\left\|u(x,y,T)\right\|_0^2+\alpha\right)^{\frac{t}{T}}-\alpha$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\varphi_0\right\|_1^2+\left\|\varphi_1\right\|_0^2\right).$

***5-теорема.** Агар (7)-(10) масаланинг ечими мавжуд бўлса ва M га тегишли бўлса, у ягона бўлади.*

Фараз қилайлик, $u(x,y,t)$ ечим (7)-(10) масаланинг аниқ берилганлар билан, $u_\varepsilon(x,y,t)$ эса (7)-(10) масаланинг тақрибий берилганлар билан ечими бўлсин.

***6-теоерма.** Фараз қилайлик, (7)-(10) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,y,t),u_\varepsilon(x,y,t)\in M$, бундан ташқари, $\left\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_1\le\varepsilon,$ $\left\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon$ бўлсин. У ҳолда $U(x,y,t)=u(x,y,t)-u_\varepsilon(x,y,t)$ функция учун $t\in Q$ да қуйидаги*

$$\left\|u(x,y,t)\right\|_0^2\le 4e^{2t(T-t)}\left(2\varepsilon^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(4m^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{t}{T}}-\varepsilon^2$$

тенгсизлик ўринли.

Фараз қилайлик, $\left\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon$ ва $u(x,y,t)\in M$ бўлсин. У ҳолда аниқ ва тақрибий ечимлар орасидаги фарқнинг нормаси учун

$$0.5\left\|u(x,y,t)-u_\varepsilon^N(x,y,t)\right\|_0^2 \le C_1 m^2\left(2e^{2\sqrt{\lambda_{1,N+1}^{(1)}}(t-T)}+2e^{2\sqrt{\lambda_{N+1,1}^{(2)}}(t-T)}+1\right)+$$
$$+C_0\varepsilon^2 e^{2\sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}}}+\gamma(N)$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда $C_0 -$ мусбат доимий,

$$C_1=\max\left(F\left(\lambda_{1,N+1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(2)}\right),F\left(\lambda_{1,N+1}^{(3)}\right),F\left(\lambda_{N+1,N+2}^{(3)}\right)\right),$$

ҳамда $N\to\infty$ да $\gamma(N)\to 0$.

2.3-параграф иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги хусусий ҳосилали бир жинсли бўлмаган тенглама учун чегаравий масалага бағишланган.

Фараз қилайлик, $u(x,y,t)$ функция $\Omega=\{(x,y,t)\,|\,(-1;1)^2\times(0;T),\,T<\infty,\,x\neq 0,\,y\neq 0\}$ соҳада

$$u_{tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{yy}(x,y,t)=f(x,y,t) \quad (11)$$

тенгламанинг ечими бўлсин.

Масала. (11) тенгламани ва қуйидаги:

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_i(x,y),(x,y)\in\left[-1;1\right]^2 \quad (12)$$

бошланғич,

$$u(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],\ u(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T] \quad (13)$$

чегаравий,

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},(y,t)\in[-1;1]\times[0;T],\\&\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T]\end{aligned} \quad (14)$$

ҳамда тикиш шартларини қаноатлантирувчи $u(x,y,t)$ функцияни топинг, бу ерда $\left(i=\overline{0,1}\right),\varphi_0(x,y),\varphi_1(x,y)$ ва $f(x,y,t)-$берилган етарли даражада силлиқ функциялар, шу билан бирга, $\varphi(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0, f(x,y,t)\big|_{\partial\Omega_0}=0.$

7-теорема. *(11)–(14) масаланинг ихтиёрий умумлашган ечими учун* $t\in\left(0,T\right)$ *да*

$$\int_0^t\left\|u(x,y,\tau)\right\|_0^2 d\tau\le 4q(t)\left(T\left\|u(x,y,0)\right\|_0^2+\alpha\right)^{1-p(t)}\left(\int_0^T\left\|u(x,y,t)\right\|_0^2 dt+\alpha\right)^{p(t)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда

$$\alpha=(2T^2+1)\int_0^T\left\|f(x,y,t)\right\|_0^2 dt+2T\left\|\varphi_0\right\|_1^2+\left\|\varphi_0\right\|_0^2+(2T+1)\left\|\varphi_1\right\|_0^2,$$

$$p(t)=\frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}},\; q(t)=\exp\left(\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}\right).$$

M корректлик тўпламини

$$M=\left\{u(x,y,t):\int_0^T\|u(x,y,t)\|^2\,dt\le m^2,m<\infty\right\}$$

шаклида киритамиз.

8-теорема. *Агар (11)-(14) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,y,t)\in M$ бўлса, у ҳолда (11)-(14) масаланинг ечими ягона бўлади.*

Фараз қилайлик, $u(x,y,t)$ ечим (11)-(14) масаланинг аниқ берилганлар билан, $u_\varepsilon(x,y,t)$ эса (11)-(14) масаланинг тақрибий берилганлар билан ечими бўлсин.

9-теорема. *Фараз қилайлик, $u(x,y,t), u_\varepsilon(x,y,t)\in M$ ва $\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\|_1\le\varepsilon$, $\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\|_0\le\varepsilon$, $\|f(x,y,t)-f_\varepsilon(x,y,t)\|_0\le\varepsilon$ бўлсин. У ҳолда $U(x,y,t)=u(x,y,t)-u_\varepsilon(x,y,t)$ функция учун барча $t\in(0;T)$ ларда*

$$\int_0^t\|U(x,y,\tau)\|_0^2d\tau\le 4q(t)\left\{T\varepsilon^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{1-p(t)}\left\{4m^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{p(t)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда $\alpha_\varepsilon=\varepsilon^2\left(2T^3+5T+2\right)$.

Фараз қилайлик, $\|f(x,y)-f_\varepsilon(x,y)\|_0\le\varepsilon$ ва $u(x,y,t),u_\varepsilon(x,y,t)\in M$ бўлсин. У ҳолда аниқ ва тақрибий ечимлар орасидаги фарқнинг нормаси учун

$$0.5\int_0^t\left\|u(x,y,\tau)-u_\varepsilon^N(x,y,\tau)\right\|_0^2d\tau\le C\varepsilon^2e^{2\sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}}t}+C_0m^2e^{2\sqrt{\lambda_{1,N+1}^{(1)}}(t-T)}+\gamma(N)$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда $C-$ мусбат доимий,

$$C_0=\max\left(F\left(\lambda_{1,N+1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(2)}\right),F\left(\lambda_{1,N+1}^{(3)}\right),F\left(\lambda_{N+1,N+2}^{(3)}\right)\right)=5\left(1-9e^{-\sqrt{\lambda_{N+1,1}^{(1)}}T}\right)^{-1},$$

шу билан бирга $N\to\infty$ да $\gamma(N)\to 0$.

Диссертациянинг **«Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенгламалар системаси учун чегаравий масалалар»** деб аталган учинчи боби иккита бузилиш чизиғига эга бўлган ноклассик типдаги тенгламалар системаси учун чегаравий масалаларни ўрганишга бағишланган. Ҳар бир масала учун Логарифмик қавариқлик усули ёрдамида ечимнинг априор баҳоси олинган, ечим ягоналиги тўғрисидаги теорема исботланган ва корректлик тўпламида ечимнинг шартли турғунлигини характерловчи баҳо олинган.

3.1-параграфда йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи параболик типдаги тенгламалар системаси учун нокоррект чегаравий масала ўрганилади.

Қуйидаги тенгламалар системасининг

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+sgn(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+sgn(y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v(x,y,t)=0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+sgn(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+sgn(y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y,t)=v(x,y,t) \end{cases} \tag{15}$$

$\Omega=\left\{(x,y,t)\,|\,(-1;1)^2\times(0<t<T), x\neq 0, y\neq 0\right\}$ соҳада ушбу

$$v(x,y,0)=\varphi(x,y),\ u(x,y,0)=f(x,y), \quad (x,y)\in[-1;1]^2 \tag{16}$$

бошланғич,

$$\begin{aligned} &u(-1,y,t)=u(+1,y,t)=0, v(-1,y,t)=v(+1,y,t)=0, \ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T], \\ &u(x,-1,t)=u(x,+1,t)=0, v(x,-1,t)=v(x,+1,t)=0, \ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T] \end{aligned} \tag{17}$$

чегаравий,

$$\begin{aligned} &u(-0,y,t)=u(+0,y,t), v(-0,y,t)=v(+0,y,t), \quad (y,t)\in[-1;1]\times[0;T], \\ &u_x(-0,y,t)=u_x(+0,y,t),\ v_x(-0,y,t)=v_x(+0,y,t), \ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T], \\ &u(x,-0,t)=u(x,+0,t), v(x,-0,t)=v(x,+0,t), \quad (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \\ &u_y(x,-0,t)=u_y(x,+0,t), v_y(x,-0,t)=v_y(x,+0,t), \ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T] \end{aligned} \tag{18}$$

ҳамда тикиш шартларини қаноатлантирувчи $(u(x,y,t),v(x,y,t))$ ечимини топиш масаласини қарайлик, бу ерда $f(x,y),\varphi(x,y)-$берилган етарли даражада силлиқ функциялар, шу билан бирга $\varphi(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0, f(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0.$

1-таъриф. *(15)-(18) масаланинг ечими деганда узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган, (15) тенгламалар системаси ва (16)-(18) шартларни қаноатлантирувчи, $\overline{\Omega}$ да аниқланган $(u(x,y,t),v(x,y,t))$ функциялар жуфтлигини тушунамиз.*

Фараз қилайлик,

$$M=\left\{(u(x,y,t),v(x,y,t)):\|u(x,y,T)\|_0+\|v(x,y,T)\|_0\leq m\right\}$$

бўлсин.

10-теорема. *Агар (15)-(18) масаланинг ечими мавжуд ва $(u(x,y,t),v(x,y,t))\in M$ бўлса, у ҳолда (15)-(18) масалнинг ечими ягонадир.*

Фараз қилайлик $U(x,y,t)=u(x,y,t)-u_\varepsilon(x,y,t)$, $V(x,y,t)=v(x,y,t)-v_\varepsilon(x,y,t)$ бўлсин, бу ерда $\left(u(x,y,t),v(x,y,t)\right)$ функциялар жуфтлиги (15)-(18) масаланинг аниқ берилганлар билан ечими, $\left(u_\varepsilon(x,y,t),v_\varepsilon(x,y,t)\right)$ функциялар жуфтлиги эса (15)-(18) масаланинг тақрибий берилганлар билан ечими бўлсин.

11-теорема. *Фараз қилайлик, $(u(x,y,t),v(x,y,t))\in M$, $\left(u_\varepsilon(x,y,t),v_\varepsilon(x,y,t)\right)\in M$ ва $\|\varphi(x,y)-\varphi_\varepsilon(x,y)\|_0\leq\varepsilon$, $\|f(x,y)-f_\varepsilon(x,y)\|_0\leq\varepsilon$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $t\in(0;T)$ бўйича $U(x,y,t), V(x,y,t)$ функциялар учун*

$$\|V(x,y,t)\|_0\leq 2(\varepsilon)^{1-\frac{t}{T}}(2m)^{\frac{t}{T}},$$

$$\left\|U(x,y,t)\right\|_0 \le 2\left(\varepsilon+\left\|\gamma_\varepsilon\right\|_0\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2m+\left\|\gamma_\varepsilon\right\|_0\right)^{\frac{t}{T}}+\left\|\gamma_\varepsilon\right\|_0$$

баҳолар ўринли бўлади, бу ерда $\left\|\gamma_\varepsilon\right\|_0=\left(\int\limits_0^T 4\left(\varepsilon^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(4m^2\right)^{\frac{t}{T}}dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Фараз қилайлик, $\left\|\varphi(x,y)-\varphi_\varepsilon(x,y)\right\|_0\le\varepsilon$ ва $(u(x,y,t),\,v(x,y,t))\in M$ бўлсин. Шуни инобатга олган ҳолда, Тихонов регуляризация усули ёрдамида тақрибий ечим қурилган ва аниқ ҳамда тақрибий ечимлар орасидаги ушбу

$$0.5\left\|v(x,y,t)-v_\varepsilon^N(x,y,t)\right\|_0^2\le\varepsilon^2e^{2\lambda_{N,N}^{(1)}t}+m^2\Big(e^{2\lambda_{1,N+1}^{(1)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N,N+1}^{(3)}(t-T)}+$$

$$+e^{2\lambda_{N+1,1}^{(1)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N+1,N}^{(2)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N+1,N+1}^{(3)}(t-T)}\Big)+\alpha(N),$$

$$0.5\left\|u(x,y,t)-u_\varepsilon^N(x,y,t)\right\|_0^2\le t^2e^{2\lambda_{N,N}^{(1)}t}\varepsilon^2+m^2\left(\frac{t}{T}\right)^2\Big(e^{2\lambda_{1,N+1}^{(1)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N,N+1}^{(3)}(t-T)}+$$

$$+e^{2\lambda_{N+1,1}^{(1)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N+1,N}^{(2)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N+1,N+1}^{(3)}(t-T)}\Big)+t^2\alpha(N)$$

фарқнинг баҳоси олинган, бу ерда $N\to\infty$ да $\alpha\left(N\right)\to 0.$

3.2-параграф иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги биринчи ва иккинчи тартибли тенгламалар системаси учун нокоррект чегаравий масалани ўрганишга бағишланган. Априор баҳо олинган ва ечимнинг ягоналиги ҳамда шартли турғунлиги ҳақидаги теоремалар исботланган.

Фараз қилайлик, $(u_1(x,y,t),u_2(x,y,t))$ функциялар жуфтлиги аралаш типдаги хусусий ҳосилали тенгламалар системасининг

$$\begin{cases}u_{1t}(x,y,t)+sgn(x)u_{1xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{1yy}(x,y,t)=f(x,y,t),\\ u_{2tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{2xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{2yy}(x,y,t)=u_1(x,y,t)\end{cases}\tag{19}$$

$\Omega=\Omega_0\times\left(0;T\right)$ соҳадаги ечими бўлсин, бу ерда $\Omega_0=\left\{x,y\,|\left(-1;1\right)^2,x\ne0,y\ne0\right\},T<\infty.$

Масаланинг қуйилиши. (19) тенгламалар системасини ва $\overline{\Omega}$ соҳада қуйидаги:

$$u_1(x,y,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y),\quad \left.\frac{\partial^iu_2(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_{i+1}(x,y),(x,y)\in\left[-1;1\right]^2\tag{20}$$

бошланғич,

$$\begin{aligned}&u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\,(y,t)\in[-1;1]\times[0;T],\\ &u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\,(x,t)\in[-1;1]\times[0;T]\end{aligned}\tag{21}$$

чегаравий,

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0}, \ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],\\
&\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0}, \ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T],
\end{aligned}
\tag{22}
$$

ҳамда тикиш шартларини қаноатлантирувчи $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ узлуксиз фукнциялар жуфтлигини топинг, бу ерда $\left(i=\overline{0,1},\ j=\overline{1,2}\right)$ ва $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \psi(x,y), \ f(x,y,t)-$берилган етарлича силлиқ функциялар, шу билан бирга, $\varphi_1(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,\ \varphi_2(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,\ \psi(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,\ f(x,y,t)\big|_{\partial\Omega_0}=0$.

M орқали қуйидаги

$$
M=\left\{\left(u_1(x,y,t),u_2(x,y,t)\right):\left\|u_1(x,y,T)\right\|_0^2+\int_0^T\left\|u_2(x,y,t)\right\|_0^2dt\le m^2, m<\infty\right\}
$$

тарзда аниқланган корректлик тўпламни белгилаймиз.

12-теорема. *Агар (19)-(22) масаланинг ечими мавжуд ва $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)\in M$ бўлса, у ҳолда (19)-(22) масаланинг ечими ягонадир.*

Фараз қилайлик, $U_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right)=u_1\left(x,y,t\right)-u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),\ U_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)=u_2\left(x,y,t\right)-u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)$ бўлсин, бу ерда $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)$ функциялар жуфтлиги (19)-(22) масаланинг аниқ берилганлар билан ечими, $\left(u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)$ функциялар жуфтлиги эса (19)-(22) масаланинг тақрибий берилганлар билан ечими бўлсин.

13-теорема. *Фараз қилайлик,* $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)\in M,\ \left(u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)\in M$ *ва* $\left\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_1\le\varepsilon,\quad \left\|\varphi_2(x,y)-\varphi_{2\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon,\quad \left\|\psi(x,y)-\psi_\varepsilon(x,y)\right\|_0\le\varepsilon,$ $\left\|f(x,y,t)-f_\varepsilon(x,y,t)\right\|_0\le\varepsilon$ *бўлсин. У ҳолда* $U_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right), U_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)$ *функциялар учун ихтиёрий* $t\in\left(0;T\right)$ *да*

$$
\left\|U_{1\varepsilon}(x,y,t)\right\|_0\le 2\left(\varepsilon+\varepsilon\sqrt{T}\right)^{1-\frac{t}{T}}\cdot\left(2m+\sqrt{T}\varepsilon\right)^{\frac{t}{T}}+\varepsilon\sqrt{T},
$$

$$
\int_0^t\left\|U_{2\varepsilon}(x,y,\tau)\right\|_0^2d\tau\le 4q(t)\left\{T\varepsilon^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{1-p(t)}\left\{4m^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{p(t)}
$$

баҳолаш ўринли, бу ерда

$$
\alpha_\varepsilon=(2T^2+1)\int_0^T\left(2\left(\varepsilon+\varepsilon\sqrt{T}\right)^{1-\frac{t}{T}}\cdot\left(2m+\sqrt{T}\varepsilon\right)^{\frac{t}{T}}+\varepsilon\sqrt{T}\right)^2dt+\left(4T+2\right)\varepsilon^2.
$$

3.3-параграф иккита бузилиш чизиғига эга бўлган иккинчи тартибли аралаш типдаги хусусий ҳосилали тенгламалар системаси учун бошланғич-чегаравий масалаларни ўрганишга бағишланган. Априор баҳо олинган ва ечимнинг ягоналги ҳамда шартли турғунлиги ҳақидаги теоремалар исботланган.

Фараз қилайлик, $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ функциялар жуфтлиги $\Omega = \Omega_0 \times (0;T)$ соҳада

$$\begin{cases} u_{1tt}(x,y,t) + sgn(x)u_{1xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{1yy}(x,y,t) = f(x,y,t), \\ u_{2tt}(x,y,t) + sgn(x)u_{2xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{2yy}(x,y,t) = u_1(x,y,t) \end{cases} \quad (23)$$

аралаш типдаги хусусий ҳосилали тенгламалар системасининг ечими бўлсин, бу ерда $\Omega_0 = \left\{x, y \,|\, (-1;1)^2, x \neq 0, y \neq 0\right\}, T < \infty.$

Масаланинг қўйилиши. (23) тенгламалар системасини ва $\overline{\Omega}$ соҳада қуйидаги

$$\left.\frac{\partial^i u_1(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x,y), \ \left.\frac{\partial^i u_2(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \psi_i(x,y), \ (x,y) \in [-1;1]^2 \quad (24)$$

бошланғич,

$$\begin{aligned} &u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}} = 0, \ (y,t) \in [-1;1]\times[0;T], \\ &u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}} = 0, \ (x,t) \in [-1;1]\times[0;T] \end{aligned} \quad (25)$$

чегаравий,

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0}, (y,t) \in [-1;1]\times[0;T], \\ &\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0}, (x,t) \in [-1;1]\times[0;T] \end{aligned} \quad (26)$$

ҳамда тикиш шартларини қаноатлантирувчи $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ узлуксиз фукнциялар жуфтлигини топинг, бу ерда $\left(i = \overline{0,1}, j = \overline{1,2}\right)$ ва $\varphi_i(x,y), \psi_i(x,y), f(x,y,t) -$ берилган етарли даражада силлиқ функциялар, шу билан бирга $\varphi_i(x,y)\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \ \psi_i(x,y)\big|_{\partial\Omega_0} = 0, f(x,y,t)\big|_{\partial\Omega_0} = 0.$

$$M = \left\{ \left(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t)\right) : \int_0^T \|u_1(x,y,t)\|_0^2 dt + \int_0^T \|u_2(x,y,t)\|_0^2 dt \le m^2, m < \infty \right\}$$

белгилашни киритамиз.

14-теорема. *Агар (23)-(26) масаланинг ечими мавжуд ва $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t)) \in M$ бўлса, у ҳолда (23-(26) масаланинг ечими ягона.*

Фараз қилайлик, $U_{i\varepsilon}(x,y,t) = u_i(x,y,t) - u_{i\varepsilon}(x,y,t), \ \left(i = \overline{1,\ 2}\right)$ бўлсин, бу ерда $\left(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t)\right)$ функциялар жуфтлиги (23)-(26) масаланинг аниқ берилганлар билан ечими, $\left(u_{1\varepsilon}(x,y,t), u_{2\varepsilon}(x,y,t)\right)$ функциялар жуфтлиги эса (23)-(26) масаланинг тақрибий берилганлар билан ечими бўлсин.

15-теорема. *Фараз қилайлик,* $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)\in M,$ $\left(u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)\in M$ *ва* $\left\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_1\le\varepsilon,$ $\left\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon,$ $\left\|\psi_0(x,y)-\psi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_1\le\varepsilon,$ $\left\|\psi_1(x,y)-\psi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon,$ $\left\|f(x,y,t)-f_\varepsilon(x,y,t)\right\|_0\le\varepsilon$ *бўлсин. У ҳолда* $U_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),$ $U_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)$ *функциялар учун ихтиёрий* $t\in\left(0;T\right)$ *да*

$$\int_0^t\left\|U_{i\varepsilon}(x,y,\tau)\right\|_0^2d\tau\le 4q(t)\left\{T\varepsilon^2+\alpha_{i\varepsilon}\right\}^{1-p(t)}\left\{4m^2+\alpha_{i\varepsilon}\right\}^{p(t)},\left(i=\overline{1,2}\right)$$

баҳолар ўринли, бу ерда

$$\alpha_{1\varepsilon}=(2T^3+5T+2)\varepsilon^2,$$

$$\alpha_{2\varepsilon}=4q(t)\left(2T^2+1\right)\left(T\varepsilon^2+\alpha_{1\varepsilon}\right)^{1-p(t)}\times\left(4m^2+\alpha_{1\varepsilon}\right)^{p(t)}+\left(4T+2\right)\varepsilon^2.$$

ХУЛОСА

Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган дифференциал тенгламалар учун нокоррект масалаларни ўрганиш математик физиканинг ноклассик тенгламалари учун ўзига хос масалаларни қамраб олади. Диссертацияда янги синфли иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги дифференциал тенгламалар қаралган. Охирги пайтларда тескари ва нокоррект масалаларни ўрганиш, мос тадқиқот масалалари бўйича изчил изланишлар олиб борилмоқда.

Диссертация ишида иккита бузилиш чизиғига эга бўлган дифференциал тенгламалар учун нокоррект масалалар қаралган, уларнинг шартли турғунлиги тадқиқ этилган ва қаралаётган фазо нормасида корректлик тўпламида аниқ ечимга яқин тақрибий ечим қурилган.

Тадқиқотнинг асосий натиажалари қуйидагилардан иборат:

1. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган дифференциал тенгламалар учун нокоррект масалаларнинг шартли корректликка текширилган ҳамда ечимларнинг априор баҳоси олинган.

2. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларнинг ечимлари учун шартли турғунлик ва ягоналик теоремалари исботланган.

3. Қаралаётган масалаларга мос спектрал масала ўрганилган, хос функция ва хос сонларни ҳисоблаш учун формулалар келтирилган.

4. Тақрибий ечимлар кетма-кетликлар кўринишида қурилган ва мос равишда иккита бузилиш чизиғига эга бўлган дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларнинг аниқ ва тақрибий ечимлари ўртасидаги яқинликни билдирувчи айирма нормаси аниқланган.

5. Ўрганилган нокоррект масалалар учун шартли турғунлик тўпламлари келтирилган.

6. Регуляризация параметрлари аниқланиб, тақрибий ечимни қуриш формулалари олинган.

7. Сонли ҳисоблаш алгоритми асосида бошланғич маълумотларга мос равишда аниқ ва тақрибий ечимларни сонли алгоритм асосида сонли ва график кўринишда ҳисобловчи дастурий таъминот яратилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ХУДАЙБЕРГАНОВ ЯШИН КАМИЛОВИЧ

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.3.PhD/FM195.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Фаязов Кудратилло Садридинович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Джамалов Сирожиддин Зухриддинович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ферганский государственный университет**

Защита диссертации состоится «24» мая 2021 года в 14^00 часов на онлайн заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за №D-257). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х.Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан «7» мая 2021 года.
(протокол рассылки № 1 от «7» 05 2021 года).

Б.И. Абдуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

А.А. Атамуратов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, к.ф.-м.н.

С.А. Имомкулов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Большинство научно-прикладных исследований, проводимых по всему миру, приводятся к решению некорректных задач для неклассических дифференциальных уравнений в частных производных, к построению приближенных решений и оценке нормы разности между точным и приближенным решениями. Основными объектами теории обратных и некорректных задач являются модели прикладных исследований в газовой динамике, в распространении акустических волн и в геофизике. Проверка на условную устойчивость некорректно поставленных задач для дифференциальных уравнений с двумя линиями вырождения и построение приближенных решений для такого рода задач являются актуальными задачами.

В наши дни в мире проводятся научные исследования по проверке на условную устойчивость некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений и по исследованию проблем по оценке разности между точным и приближенным решениями. В этой связи нахождение априорной оценки решения, определение множества корректности, доказательство теорем о единственности и условной устойчивости, построение приближенных решений методом регуляризации, построение алгоритма по численному нахождению точного и приближенного решений по начальным данными и создание программ на основе этих алгоритмов являются целевыми направлениями научных исследований.

В нашей стране особое внимание уделяется решению некорректно поставленных краевых задач для уравнений смешанного типа из области геофизики, газовой динамики и распространения акустических волн, а также оценке норм разности между точным и приближенным решениями и разработке методов численного решения. В частности, важные результаты были получены по построению приближенных решений для некорректно поставленных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, по определению множества корректности некорректно поставленных краевых задач для уравнений высоких порядков в частных производных смешанного и смешанно-составного типов. “Проведение научно-исследовательских работ на уровне международных стандартов по математической физике, прикладной математике и физике” было определено в качестве основной задачи и основным вектором развития фундаментальных наук[1]. В этой связи ряд задач, таких как, определение условной устойчивости некорректных краевых задач для параболических уравнений смешанного типа с меняюшимся направлением времени и с двумя линиями вырождения, построение регуляризованных решений, определение формул расчета параметров регуляризации имеют особое значение.

[1] Постановление №292 Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 207 года “Об организации деятельности научно-исследовательских заведений Академии наук”

Данная диссертация, в определенной степени, служит решению задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы Высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Рассматриваемые в диссертации задачи относятся к классу уравнений математической физики смешанного типа. Корректно поставленные краевые задачи для этих типов уравнений были рассмотрены рядом ученых. М. Жевре в своих работах рассмотрел краевую задачу для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Такого рода задачи с различными начальными и граничными условиями были исследованы С.Д. Пагани, Г. Таленти, В.В. Враговым, В.К. Романко, С.А. Терсеновым, А.М. Нахушевым и др. В частности, работы Ф. Трикоми и С. Геллерстедта былы посвящены уравнениям смешанного типа. Сюда можно отности и работы М.А. Лаврентьева, М.В. Келдыша, А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, В.Н. Врагова, К.Б. Сабитова, А.И. Кожанова, С.П. Пулькина, А.П. Солдатова, Н.В. Кислова и др. Краевыми задачами для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения занимались А.М. Нахушев, М.М. Зайнулабидов, В.Ф. Волкодавов, В.В. Азовский, О.И. Маричев, А.М. Ежов, Н.И. Поливанов, Хе Кан Чер, С.И. Макаров, С.С. Исамухамедов, Ж. Орамов, М.С. Салахитдинов с учениками, К.Б. Сабитов, А.А. Гималтдинова, О.А. Репин и другие авторы.

В работах А.Н. Тихонова, М. Ландиса, С.Г. Крейна, С.П. Шишатского, Х.А. Левина и других были изучены некорректные краевые задачи для параболического уравнения с обратным течением времени. В этих работах для уравнения параболического типа были рассмотрены обратная и не характеристическая задача Коши на условную корректность. С.Г. Крейн и Х. А. Левин обобщили эти результаты для абстрактных эволюционных уравнений с самосопряженными операторными коэффициентами. В работах Б.Д. Солеман, Р.Ж. Дуффин, В. Ж. Мизел аналогичные исследования были проведены для псевдо-дифференциальных уравнений.

Задача Дирихле для гиперболического уравнения рассмотрена А.Ш. Алимовым. Ш. Ярмухамедов для эллиптического уравнения с помощью функций Карлемана построил приближенные решения задачи Коши. А его учениками были построены регуляризованные решения для систем уравнений методом функции Карлемана. Особое внимание заслуживают также работы С.П. Шишатского, К.С.Фаязова и М.Х. Аламинова, в которых исследованы некорректные краевые задачи для вырождающихся параболических и эллиптических уравнений. Предметом исследований А. Хайдарова и Д.К. Дурдиева были обратные и некорректные задачи для задач уравнений эллиптического и гиперболического типа, а задачи интегральной геометрии исследовались А. Бегматовым. Предметом работ К.С. Фаязова были некорректные краевые задачи для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени и уравнения смешанного типа.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.

Диссертационное исследование было проведено согласно плану научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана в рамках программы «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Целью исследования являеются установление условной корректности и нахождение приближенных решений на множестве корректности для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа с двумя линиями вырождения и ее численное решение на компьютере.

Задачи исследования:

исследование краевых задач на условную корректность для параболического уравнения с меняющимся направлением по времени с двумя линиями вырождения;

исследование некорректных краевых задач для систем уравнений в частных производных смешанного типа с двумя линиями вырождения;

доказать условную корректность краевых задач для системы параболических уравнений с меняющимся направлением времени с двумя линиями вырождения;

доказать корректность по А.Н. Тихонову краевых задач для системы уравнений параболического и смешанного типов с двумя линиями вырождения;

построение регуляризованных решений, получение в соответствующих функциональных пространствах оценок норм разности между точными и приближенными решениями;

определение формул вычисления регуляризационных параметров, разработка программ численного решения и получение результатов в виде таблиц и графиков.

Объектом исследования являются дифференциальные уравнения параболического и смешанного типов с двумя линиями вырождения.

Предметом исследования являются некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа с двумя линиями вырождения.

Методы исследования. В исследовательской работе были использованы методы математического анализа, метод спектрального разложения, метод логарифмической выпуклости, интеграл энергии, метод регуляризации и методы решения дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получены априорные оценки решения некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с меняющимся направлением времени и уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения;

были определены множества корректности некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с двумя линиями вырождения, а также доказаны теоремы единственности и условной устойчивости;

определены множества корректности некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа с двумя линиями вырождения, а также доказаны теоремы единственности и условной устойчивости;

построены приближенные решения и оценены нормы разности между точным и приближенным решениями в соответствующих пространствах.

Практические результаты исследования состоит в следующем

относительно некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа с двумя линями вырождения определены оценки нормы разности между точным и приближенным решениями и выведены формулы вычисления параметра регуляризации;

на основе вычислительных алгоритмов было разработано программное обеспечение в среде Visual C# для отображения числовых и графических представлений точного и приближенного решений.

Достоверность результатов исследования основывается на использовании методов функционального анализа, теории некорректных задач и теории дифференциальных уравнений в частных производных и математической строгостью приводимых доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования основывается на их применении в развитии теории некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с двумя линиями вырождения.

Прикладная значимость результатов исследования основывается на применении полученных результатов к моделям из механики сплошных сред, газовой динамики, геофизики и из других областей, проблемы из которых можно выразить через некорректные задачи.

Внедрение результатов исследования:

На основе определения оценки условной устойчивости для решений некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений параболического и смешанного типов с двумя линиями вырождения и построения приближенных решений в соответствующих множествах корректности:

собственные функции и собственные значения спектральной задачи соответствующей краевой задаче для систем дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа второго порядка с двумя линиями вырождения, а также приближенное решение начально-краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения смешанного типа второго порядка с двумя линиями вырождения на множестве корректности использованы при доказательстве существования решения обратных задач рассмотренных в научном проекте MRU-OT-1/2017 «Нелокальные краевые и обратные задачи для неклассических дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений» (справка № 89-03-4173 от 23 октября 2020 года Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан). Благодаря применению научных результатов стало возможным доказательство существования решений нелокальных краевых и обратных задач для дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений;

представление решения граничных задач для однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя линиями вырождения параболического типа с меняющимся направлением времени на множестве корректности и условная устойчивость некорректной граничной задачи для однородных и неоднородных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения были использованы в научно-исследовательской работе ОТ-Ф4-(36+32) «Разработка новых методов решения задач математической физики и оптимального управления. Неклассические начальные и спектральные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных нечетного порядка и их приложения» (Справка с номером 89-03-4173 Министерства высшего и средне специального образования Республики Узбекистан от 23 октября 2020 года). Благодаря применению результатов научной работы были получены оценки устойчивости неклассических начальных и спектральных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с нечетной степенью.

Апробация результатов исследования. Основные теоретические и практические результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на 3 международных, 4 республиканских научно-практических конференциях. Результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по дифференциальным уравнениям «Современные проблемы математической физики» Института Математики им. В.И. Романовского АН РУз., на заседании городского научного семинара «Современные проблемы математической физики» при Национальном университете имени Мирзо Улугбека, на семинаре кафедры Дифференциальные уравнения и математическая физика Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Публикация результатов исследования. Основные результаты исследования опубликованы в 15 научных работах, из которых 8 опубликованы в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, в том числе 2 в зарубежных и 6 в республиканских журналах.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Объем диссертации составляет 115 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации **«Дифференциальные уравнения смешанного типа и спектральная задача»**, приведены необходимые для изложения диссертации определения и понятия из теории уравнений смешанного и смешанно-составного типа.

В параграфе 1.1 дается краткий обзор результатов о теории уравнений неклассического типа и соответствующие задачи.

В параграфе 1.2 приведены определения корректных и условно корректных задач для уравнений смешанного типа и обзор методов решения. В качестве примера приведена начально-краевая задача для уравнения смешанного типа с одной линией вырождения и доказана ее условная корректность.

Параграф 1.3 посвящен изложению теорий спектральных задач, возникающих в уравнениях смешанного типа.

Спектральная задача. Найти такие значения λ, при котором следующая задача

$$sgn(x)\vartheta_{xx}(x,y)+sgn(y)\vartheta_{yy}(x,y)+\lambda\vartheta(x,y)=0,(x,y)\in(-1;1)^2,\ x,y\neq 0, \qquad (1)$$

$$\vartheta(x,y)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ y\in[-1;1],\ \vartheta(x,y)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\quad x\in[-1;1],$$

$$\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial x^i}\bigg|_{x=-0}=\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial x^i}\bigg|_{x=+0},\ y\in[-1;1], \tag{2}$$

$$\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial y^i}\bigg|_{y=-0}=\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial y^i}\bigg|_{y=+0},\ x\in[-1;1],\ \left(i=\overline{0,1}\right),$$

имеет нетривиальные решения.

Таким образом, собственные значения спектральной задачи (1), (2) имеют вид

$$\mu_k^2+\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(1)},\ \mu_k^2-\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(2)},\ -\mu_k^2+\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(3)},\ -\mu_k^2-\sigma_l^2=\lambda_{k,l}^{(4)},$$

а соответствующие им собственные функции

$$\vartheta_{k,l}^{(1)}(x,y)=X_k^{(1)}(x)\cdot Y_l^{(1)}(y),\ \vartheta_{k,l}^{(2)}(x,y)=X_k^{(1)}(x)\cdot Y_l^{(2)}(y),$$

$$\vartheta_{k,l}^{(3)}(x,y)=X_k^{(2)}(x)\cdot Y_l^{(1)}(y),\ \vartheta_{k,l}^{(4)}(x,y)=X_k^{(2)}(x)\cdot Y_l^{(2)}(y),\ k,l\in N.$$

где

$$X_k^{(1)}(x)=\begin{cases}\sin\mu_k(x-1)/\cos\mu_k\quad,0\le x\le 1,\\ sh\mu_k(x+1)/ch\mu_k,-1\le x\le 0,\end{cases}\ k\in N,$$

$$Y_l^{(1)}(y)=\begin{cases}\sin\sigma_l(y-1)/\cos\sigma_l,0\le y\le 1,\\ sh\sigma_l(y+1)/ch\sigma_l,-1\le y\le 0,\end{cases}\ l\in N,$$

$$X_k^{(2)}(x)=\begin{cases}sh\mu_k(x-1)/ch\mu_k,0\le x\le 1,\\ \sin\mu_k(x+1)/\cos\mu_k,\ -1\le x\le 0,\end{cases}\ k\in N,$$

$$Y_l^{(2)}(y)=\begin{cases}sh\sigma_l(y-1)/ch\sigma_l\ ,0\le y\le 1,\\ \sin\sigma_l(y+1)/\cos\sigma_l\ ,-1\le y\le 0,\end{cases}\ l\in N.$$

В обоих случаях μ_k,σ_l-являются положительными корнями трансцендентного уравнения $tg\alpha=-th\alpha.$

Пусть $\|u\|^2=(u,u)$, где $(u,\upsilon)=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}u\upsilon dxdy$ скалярное произведение. Кроме того

$$\left(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(p)}(x,y),\vartheta_{i,j}^{(q)}(x,y)\right)=0,p\ne q,(p,q=\overline{1,4}),\forall k,l,i,j,$$

$$\left(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(m)}(x,y),\vartheta_{i,j}^{(m)}(x,y)\right)=\begin{cases}1,\ k=i\wedge l=j\\ 0,\ k\ne i\wedge l\ne j\end{cases},(m=1,4),$$

$$\left(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(m)}(x,y),\vartheta_{i,j}^{(m)}(x,y)\right)=\begin{cases}-1,\ k=i\wedge l=j\\ 0,\ k\ne i\wedge l\ne j\end{cases},(m=2,3),$$

где $k,l,i,j\in N.$

Определенная по следующей формуле норма

$$\|u(x,y,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(1)}(x,y)\right)\right|^2+\right.$$
$$+\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(2)}(x,y)\right)\right|^2+\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(3)}(x,y)\right)\right|^2+$$
$$\left.+\left|\left(sgn(x)sgn(y)u(x,y,t),\vartheta_{l,l}^{(4)}(x,y)\right)\right|^2\right\},$$
эквивалентна исходной норме в пространстве H_0.

Собственные функции $\left\{\vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)\right\},\left(j=\overline{1,4}\right)$ задачи (1)-(2) нормированные в $L_2\left((-1;1)^2\right)$, образуют базис Рисса в $L_2\left((-1;1)^2\right)$.

Вторая глава диссертации **«Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа с двумя линиями вырождения»,** посвящена изложению результатов по краевым (некорректным) задачам для неклассических уравнений математической физики. Для каждой задачи получены априорные оценки решения, доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости на множестве корректности. Во всех этих задачах строятся регуляризованные решения устойчивые к изменениям данных.

Во второй главе первого параграфа излагается условная корректность начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени и его приближенное решение.

Рассмотрим уравнение
$$u_t(x,y,t)+sgn(x)u_{xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{yy}(x,y,t)=0, \tag{3}$$
в области $\Omega=\Omega_0\times Q$ где $\Omega_0=\left\{(x,y):(-1;1)^2,\ x\neq 0,\ y\neq 0\right\},Q=\left\{0<t<T,\ T<\infty\right\}$.

Задача. Найти такое решение уравнения (3) в области Ω чтобы были выполнены следующие условия:
начальное
$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in[-1;1]^2, \tag{4}$$
граничные
$$u(x,y,t)\big|_{x=\pm1}=0,(y,t)\in[-1;1]\times\overline{Q},\ u(x,y,t)\big|_{y=\pm1}=0,(x,t)\in[-1;1]\times\overline{Q}, \tag{5}$$
и условия склеивания
$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},(y,t)\in[-1;1]\times\overline{Q},\\ &\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times\overline{Q},\end{aligned} \tag{6}$$
где $(i=\overline{0,1})$, $\varphi(x,y)$-заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0.$

Под обобщенным решением краевой задачи (3)-(6) понимаем функцию $u(x,y,t)$ такую, что $u(x,y,t)\in C(L_2(-1,1)^2,Q)$ и

$$\int_0^T\int_{-1}^1\int_{-1}^1 u(x,y,t)\Big(sgn(x)sgn(y)V_t(x,y,t)-sgn(y)V_{xx}(x,y,t)-sgn(x)V_{yy}(x,y,t)\Big)dxdydt=$$

$$-\int_{-1}^1\int_{-1}^1 sgn(x)sgn(y)V(x,y,0)\varphi(x,y)dxdy,$$

для любой функции $V(x,y,t)\in W_2^{2,1}\big((-1;1),(-1;1),(0;T)\big)$, удовлетворяющей условиям $V(x,y,T)=0,\ V(-1,y,t)=V(1,y,t)=0,\ V(x,-1,t)=V(x,1,t)=0.$

Теорема 1. *Пусть $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (3) и условиям (4)-(6). Тогда для любого решения $u(x,y,t)\in C(L_2(-1,1)^2,Q)$ имеет место неравенство*

$$\|u(x,y,t)\|_0\le 2\|u(x,y,0)\|_0^{\frac{T-t}{T}}\cdot\|u(x,y,T)\|_0^{\frac{t}{T}},$$

Пусть

$$M=\Big\{u:\|u(x,y,T)\|_0\le m, m<\infty\Big\}.$$

Теорема 2. *Если решение задачи (3)-(6) существует и $u(x,y,t)\in M$, тогда решение задачи (3) - (6) единственно.*

Пусть $u(x,y,t)$-решение задачи (3)-(6) с точными данными, а $u_\varepsilon(x,y,t)$-решение задачи (3)-(6) с приближенными данными.

Теорема 3. *Пусть решение исходной задачи существует и $u(x,y,t),u_\varepsilon(x,y,t)\in M$, кроме того $\|\varphi(x,y)-\varphi_\varepsilon(x,y)\|_0\le\varepsilon$. Тогда для функции $U\big(x,y,t\big)=u(x,y,t)-u_\varepsilon(x,y,t)$ при $t\in\big(0;\ T\big)$ верно следующее неравенство*

$$\|U(x,y,t)\|_0\le 2\big(\varepsilon\big)^{1-\frac{t}{T}}\cdot\big(2m\big)^{\frac{t}{T}}.$$

Пусть решение рассматриваемой задачи (3)-(6) существует и принадлежит M, а также $\|\varphi(x,y)-\varphi_\varepsilon(x,y)\|_0\le\varepsilon$. Тогда построеные приближенные решения по точным и приближенным начальным данным, и разность, в соответствующем функциональном пространстве, удовлетворяет следующему неравенству

$$0.5\left\|u(x,y,t)-u_\varepsilon^N(x,y,t)\right\|_0^2\le\varepsilon^2 e^{2\lambda_{N,N}^{(1)}t}+m^2\Big(e^{2\lambda_{1,N+1}^{(1)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N,N+1}^{(3)}(t-T)}+$$

$$+e^{2\lambda_{N+1,1}^{(1)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N+1,N}^{(2)}(t-T)}+e^{2\lambda_{N+1,N+1}^{(3)}(t-T)}\Big)+\alpha(N),$$

где $\alpha(N)\to 0$ при $N\to\infty.$

Второй параграф данной главы посвящен изучению начально-краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка смешанного типа с двумя линиями вырождения.

Найти функцию $u(x,y,t)$ удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{yy}(x,y,t)=0, \tag{7}$$

в области $\Omega=\Omega_0\times Q$ где $\Omega_0=\big\{(x,y)\in(-1;1)^2,\ x\ne 0,\ y\ne 0\big\},\ Q=\big\{0<t<T, T<\infty\big\}.$

Постановка задачи. Найти такое решение уравнения (7) в области Ω, которое удовлетворяет следующим условиям:
начальные

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x,y),\ (x,y)\in\left[-1;1\right]^2, \tag{8}$$

граничные

$$u(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}} = 0,\ (y,t)\in[-1;1]\times\bar{Q},\ u(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}} = 0,\ \ (x,t)\in[-1;1]\times\bar{Q}, \tag{9}$$

и условиям склеивания

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,t)\in[-1;1]\times\bar{Q},\\
&\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times\bar{Q},
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\left(i=\overline{0,1}\right)$ и $\varphi_i(x,y)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_i(x,y)\big|_{\partial\Omega_0} = 0.$

Введем обозначение

$$M = \left\{u(x,y,t) : \left\|u(x,y,T)\right\|_0 \le m,\ m<\infty\right\}.$$

Введем норму

$$\left\|\varphi(x,y)\right\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\lambda_{k,l}^{(1)}\left(\varphi_{k,l}^{(1)}\right)^2 + \left|\lambda_{k,l}^{(2)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(2)}\right)^2 + \left|\lambda_{k,l}^{(3)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(3)}\right)^2 + \left|\lambda_{k,l}^{(4)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(4)}\right)^2\right).$$

Теорема 4. *Пусть $u(x,y,t)$ является решением уравнения*

$$u_{tt}(x,y,t) + sgn(x)u_{xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{yy}(x,y,t) = 0$$

и удовлетворяет условиям (8) -(10). Тогда для решения данного уравнения при $t\in Q$ имеет место неравенство

$$\left\|u(x,y,t)\right\|_0^2 \le 4e^{2t(T-t)}\left(\left\|u(x,y,0)\right\|_0^2+\alpha\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\left\|u(x,y,T)\right\|_0^2+\alpha\right)^{\frac{t}{T}} - \alpha,$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\left(\left\|\varphi_0\right\|_1^2 + \left\|\varphi_1\right\|_0^2\right).$

Теорема 5. *Если решение задачи (7)-(10) существует и принадлежит в M, то оно единственно.*

Пусть $u(x,y,t)$-решение задачи (7)-(10) с точными данными, а $u_\varepsilon(x,y,t)$-решение задачи (7) - (10) с приближенными данными.

Теорема 6. *Пусть решение задачи (7)-(10) существует и $u(x,y,t), u_\varepsilon(x,y,t)\in M$,* кроме того $\left\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_1 \le \varepsilon,$ $\left\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_0 \le \varepsilon$. *Тогда для функции $U(x,y,t) = u(x,y,t) - u_\varepsilon(x,y,t)$ при $t\in Q$ верно следующее неравенство*

$$\|u(x,y,t)\|_0^2 \le 4e^{2t(T-t)}\left(2\varepsilon^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(4m^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{t}{T}}-\varepsilon^2.$$

Пуст $\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\|_0 \le \varepsilon$ и $u(x,y,t)\in M$. Тогда для нормы разности между точным и приближенным решением верно неравенство

$$0.5\|u(x,y,t)-u_\varepsilon^N(x,y,t)\|_0^2 \le C_1 m^2\left(2e^{2\sqrt{\lambda_{1,N+1}^{(1)}}(t-T)}+2e^{2\sqrt{\lambda_{N+1,1}^{(2)}}(t-T)}+1\right)+$$

$$+C_0\varepsilon^2 e^{2\sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}}}+\gamma(N),$$

где C_0 – положительная постоянная,

$C_1=\max\left(F\left(\lambda_{1,N+1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(2)}\right),F\left(\lambda_{1,N+1}^{(3)}\right),F\left(\lambda_{N+1,N+2}^{(3)}\right)\right)$, а причем $\gamma(N)\to 0$ при $N\to\infty$.

Параграф 2.3 посвящен краевой задаче для неоднородного уравнения в частных производных смешанного типа с двумя линиями вырождения.

Пусть $u(x,y,t)$ является решением уравнения

$$u_{tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{yy}(x,y,t)=f(x,y,t), \qquad (11)$$

в области $\Omega=\{(x,y,t)\,|\,(-1;1)^2\times(0;T),T<\infty,\ x\ne 0,\ y\ne 0\}$.

Задача. Найти функцию $u(x,y,t)$ удовлетворяющую уравнению (11) и следующим условиям:
начальным

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_i(x,y),(x,y)\in\left[-1;1\right]^2 \qquad (12)$$

граничным

$$\left.u(x,y,t)\right|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$

$$\left.u(x,y,t)\right|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ \ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \qquad (13)$$

и условиям склеивания

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},(y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \qquad (14)$$

где $\left(i=\overline{0,1}\right),\varphi_0(x,y),\varphi_1(x,y)$ и $f(x,y,t)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\left.\varphi_i(x,y)\right|_{\partial\Omega_0}=0,\left.f(x,y,t)\right|_{\partial\Omega_0}=0.$

Теорема 7. *Для любого обобшенного решения задачи (11)-(14) при* $t\in\left(0,T\right)$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^t \|u(x,y,\tau)\|_0^2 d\tau \le 4\,q(t)\left(T\|u(x,y,0)\|_0^2+\alpha\right)^{1-p(t)}\left(\int_0^T \|u(x,y,t)\|_0^2 dt+\alpha\right)^{p(t)},$$

где

$$\alpha=(2T^2+1)\int_0^T \left\|f(x,y,t)\right\|_0^2 dt+2T\left\|\varphi_0\right\|_1^2+\left\|\varphi_0\right\|_0^2+(2T+1)\left\|\varphi_1\right\|_0^2,$$

$$p(t)=\frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}},\ q(t)=\exp\left(\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}\right).$$

Введем множества корректности M следующим образом

$$M=\left\{u(x,y,t):\int_0^T \left\|u(x,y,t)\right\|^2 dt\le m^2, m<\infty\right\}.$$

Теорема 8. *Если решение задачи (11-(14) существует и $u(x,y,t)\in M$, тогда решение задачи (11)-(14) единственно.*

Пусть $u(x,y,t)$-решение задачи (2.3.1)-(2.3.4) с точными данными, а $u_\varepsilon(x,y,t)$-решение задачи (2.3.1)-(2.3.4) с приближенными данными.

Теорема 9. *Пусть $u(x,y,t),u_\varepsilon(x,y,t)\in M$ и $\left\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_1\le\varepsilon$, $\left\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon$, $\left\|f(x,y,t)-f_\varepsilon(x,y,t)\right\|_0\le\varepsilon$. Тогда для функции $U(x,y,t)=u(x,y,t)-u_\varepsilon(x,y,t)$ верно неравенство*

$$\int_0^t \|U(x,y,\tau)\|_0^2 d\tau\le 4q(t)\left\{T\varepsilon^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{1-p(t)}\left\{4m^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{p(t)},$$

для всех $t\in(0;T)$, где $\alpha_\varepsilon=\varepsilon^2\left(2T^3+5T+2\right)$.

Пусть $\left\|f(x,y)-f_\varepsilon(x,y)\right\|_0\le\varepsilon$ и $u(x,y,t),u_\varepsilon(x,y,t)\in M$. Тогда для нормы разности между точным и приближенным решениями верно неравенство

$$0.5\int_0^t \left\|u(x,y,\tau)-u_\varepsilon^N(x,y,\tau)\right\|_0^2 d\tau\le C\varepsilon^2 e^{2\sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}}\,t}+C_0 m^2 e^{2\sqrt{\lambda_{1,N+1}^{(1)}}\,(t-T)}+\gamma(N),$$

где $C-$положительная постоянная.

$$C_0=\max\left(F\left(\lambda_{1,N+1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(1)}\right),F\left(\lambda_{N+1,1}^{(2)}\right),F\left(\lambda_{1,N+1}^{(3)}\right),F\left(\lambda_{N+1,N+2}^{(3)}\right)\right)=5\left(1-9e^{-\sqrt{\lambda_{N+1,1}^{(1)}}\,T}\right)^{-1},$$

причем $\gamma(N)\to 0$ при $N\to\infty$.

Третья глава диссертации **«Краевые задачи для систем уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения»**, посвящена исследованию краевых задач для систем уравнений неклассического типа с двумя линиями вырождения. Для каждой задачи получена априорная оценка решения методом логарифмической выпуклости, доказана теорема о единственности решения и получена оценка, характеризирующая условную устойчивость решения на множестве корректности.

В параграфе 3.1 исследуется некорректная краевая задача для систем уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени.

Рассмотрим задачу, нахождения решения $(u(x,y,t), v(x,y,t))$ системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + sgn(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + sgn(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v(x,y,t) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + sgn(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + sgn(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y,t) = v(x,y,t), \end{cases} \tag{15}$$

в области $\Omega = \left\{(x,y,t) \mid (-1;1)^2 \times (0 < t < T), x \neq 0, y \neq 0\right\}$ удовлетворяющее условием:

начальным

$$v(x,y,0) = \varphi(x,y),\ u(x,y,0) = f(x,y), \quad (x,y) \in [-1;1]^2, \tag{16}$$

граничным

$$\begin{aligned} &u(-1,y,t) = u(+1,y,t) = 0, v(-1,y,t) = v(+1,y,t) = 0, \ (y,t) \in [-1;1] \times [0;T], \\ &u(x,-1,t) = u(x,+1,t) = 0, v(x,-1,t) = v(x,+1,t) = 0, \ (x,t) \in [-1;1] \times [0;T], \end{aligned} \tag{17}$$

и условиям склеивания

$$\begin{aligned} &u(-0,y,t) = u(+0,y,t), v(-0,y,t) = v(+0,y,t), \quad (y,t) \in [-1;1] \times [0;T], \\ &u_x(-0,y,t) = u_x(+0,y,t),\ v_x(-0,y,t) = v_x(+0,y,t), \ (y,t) \in [-1;1] \times [0;T], \\ &u(x,-0,t) = u(x,+0,t), v(x,-0,t) = v(x,+0,t), \quad (x,t) \in [-1;1] \times [0;T], \\ &u_y(x,-0,t) = u_y(x,+0,t), v_y(x,-0,t) = v_y(x,+0,t), \ (x,t) \in [-1;1] \times [0;T] \end{aligned} \tag{18}$$

где $f(x,y),\ \varphi(x,y) -$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(x,y)\big|_{\partial\Omega_0} = 0, f(x,y)\big|_{\partial\Omega_0} = 0.$

Определение 1. *Под решением задачи (15)-(18) понимаем пару непрерывных в* $\overline{\Omega}$ *функций* $(u(x,y,t), v(x,y,t))$ *имеющих непрерывные производные, входящие в уравнение, удовлетворяющих системе уравнений (15) и условиям (16)-(18).*

Пусть

$$M = \left\{(u(x,y,t), v(x,y,t)) : \|u(x,y,T)\|_0 + \|v(x,y,T)\|_0 \le m\right\}.$$

Теорема 10. *Если решение задачи (15)-(18) существует и* $(u(x,y,t), v(x,y,t)) \in M$ *, тогда решение задачи (15)-(18) единственно.*

Пусть $U(x,y,t) = u(x,y,t) - u_\varepsilon(x,y,t)$, $V(x,y,t) = v(x,y,t) - v_\varepsilon(x,y,t)$, где пара функций $\left(u(x,y,t),\ v(x,y,t)\right)$ является решением задачи (15)-(18) с точными данными, а $\left(u_\varepsilon(x,y,t), v_\varepsilon(x,y,t)\right)$ решением задачи (15)-(18) с приближенными данными.

Теорема 11. *Пусть* $(u(x,y,t),\, v(x,y,t))\in M, \left(u_{\varepsilon}\left(x,y,t\right),\, v_{\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)\in M$ *и* $\left\|\varphi(x,y)-\varphi_{\varepsilon}(x,y)\right\|_{0}\le\varepsilon, \left\|f(x,y)-f_{\varepsilon}(x,y)\right\|_{0}\le\varepsilon$. *Тогда при любых* $t\in\left(0;T\right)$ *для* $\left(U(x,y,t),V(x,y,t)\right)$ *имеет место оценки*

$$\left\|V(x,y,t)\right\|_{0}\le 2\left(\varepsilon\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2m\right)^{\frac{t}{T}},$$

$$\left\|U(x,y,t)\right\|_{0}\le 2\left(\varepsilon+\left\|\gamma_{\varepsilon}\right\|_{0}\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2m+\left\|\gamma_{\varepsilon}\right\|_{0}\right)^{\frac{t}{T}}+\left\|\gamma_{\varepsilon}\right\|_{0},$$

где $\left\|\gamma_{\varepsilon}\right\|_{0}=\left(\int\limits_{0}^{T}4\left(\varepsilon^{2}\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(4m^{2}\right)^{\frac{t}{T}}dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть $\left\|\varphi(x,y)-\varphi_{\varepsilon}(x,y)\right\|_{0}\le\varepsilon$ и $(u(x,y,t),\, v(x,y,t))\in M$. С учетом этого построено приближенное решение методом регуляризации Тихонова и получена следующая оценка разности между точным и приближенным решениями

$$0.5\left\|v(x,y,t)-v_{\varepsilon}^{N}(x,y,t)\right\|_{0}^{2}\le\varepsilon^{2}e^{2\lambda_{N,N}^{(1)}t}+m^{2}\left(e^{2\lambda_{1,N+1}^{(1)}\left(t-T\right)}+e^{2\lambda_{N,N+1}^{(3)}\left(t-T\right)}+\right.$$
$$\left.+e^{2\lambda_{N+1,1}^{(1)}\left(t-T\right)}+e^{2\lambda_{N+1,N}^{(2)}\left(t-T\right)}+e^{2\lambda_{N+1,N+1}^{(3)}\left(t-T\right)}\right)+\alpha(N),$$

$$0.5\left\|u(x,y,t)-u_{\varepsilon}^{N}(x,y,t)\right\|_{0}^{2}\le t^{2}e^{2\lambda_{N,N}^{(1)}t}\varepsilon^{2}+m^{2}\left(\frac{t}{T}\right)^{2}\left(e^{2\lambda_{1,N+1}^{(1)}\left(t-T\right)}+e^{2\lambda_{N,N+1}^{(3)}\left(t-T\right)}+\right.$$
$$\left.+e^{2\lambda_{N+1,1}^{(1)}\left(t-T\right)}+e^{2\lambda_{N+1,N}^{(2)}\left(t-T\right)}+e^{2\lambda_{N+1,N+1}^{(3)}\left(t-T\right)}\right)+t^{2}\alpha(N),$$

где, причем $\alpha\left(N\right)\to 0$ при $N\to\infty$.

Параграф 3.2 посвящен исследованию некорректной краевой задачи для системы уравнений первого и второго порядка смешанного типа с двумя линиями вырождения. Получена априорная оценка и доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости решения.

Пусть пара функций $(u_{1}(x,y,t),\, u_{2}(x,y,t))$ является решением системы уравнений в частных производных смешанного типа

$$\begin{cases}u_{1t}(x,y,t)+sgn(x)u_{1xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{1yy}(x,y,t)=f(x,y,t),\\ u_{2tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{2xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{2yy}(x,y,t)=u_{1}(x,y,t),\end{cases}\qquad(19)$$

в области $\Omega=\Omega_{0}\times\left(0;T\right)$ где $\Omega_{0}=\left\{x,y\,|\left(-1;1\right)^{2},x\ne 0,y\ne 0\right\},T<\infty.$

Постановка задачи. Найти пару непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций $(u_{1}(x,y,t),\, u_{2}(x,y,t))$ удовлетворяющую систему уравнений (19) и следующим условиям:

начальным

$$u_1(x,y,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y), \qquad (x,y)\in[-1;1]^2,$$
$$\left.\frac{\partial^i u_2(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_{i+1}(x,y),\ \ (x,y)\in[-1;1]^2, \tag{20}$$

граничным

$$u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$
$$u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \tag{21}$$

и условиям склеивания

$$\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$
$$\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \tag{22}$$

где $\left(i=\overline{0,1},\ j=\overline{1,2}\right)$ и $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \psi(x,y),$ $f(x,y,t)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_1(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,\ \varphi_2(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,$ $\psi(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,\ f(x,y,t)\big|_{\partial\Omega_0}=0,$

Через M обозначим множество корректности, определенное следующим образом

$$M=\left\{\left(u_1(x,y,t),u_2(x,y,t)\right):\|u_1(x,y,T)\|_0^2+\int_0^T\|u_2(x,y,t)\|_0^2dt\le m^2, m<\infty\right\}.$$

Теорема 12. *Если решение задачи (19)-(22) существует и* $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)\in M$, *тогда решение задачи (19-(22) единственно.*

Пусть $U_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right)=u_1\left(x,y,t\right)-u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),\ U_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)=u_2\left(x,y,t\right)-u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right),$ где пара функций $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)$ является решением задачи (19)-(22) с точными данными, а пара функций $\left(u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)$ решением задачи (19)-(22) с приближенными данными.

Теорема 13. *Пусть* $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)\in M,\ \left(u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)\in M$ *и* $\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\|_1\le\varepsilon,$ $\|\varphi_2(x,y)-\varphi_{2\varepsilon}(x,y)\|_0\le\varepsilon,$ $\|\psi(x,y)-\psi_{\varepsilon}(x,y)\|_0\le\varepsilon,$ $\|f(x,y,t)-f_{\varepsilon}(x,y,t)\|_0\le\varepsilon$. *Тогда для функций* $U_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right), U_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)$ *при любых* $t\in\left(0;\ T\right)$ *верна оценки*

$$\|U_{1\varepsilon}(x,y,t)\|_0\le 2\left(\varepsilon+\varepsilon\sqrt{T}\right)^{1-\frac{t}{T}}\cdot\left(2m+\sqrt{T}\varepsilon\right)^{\frac{t}{T}}+\varepsilon\sqrt{T},$$

$$\int_0^t \|U_{2\varepsilon}(x,y,\tau)\|_0^2 d\tau \le 4q(t)\left\{T\varepsilon^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{1-p(t)}\left\{4m^2+\alpha_\varepsilon\right\}^{p(t)},$$

где

$$\alpha_\varepsilon=(2T^2+1)\int_0^T\left(2\left(\varepsilon+\varepsilon\sqrt{T}\right)^{1-\frac{t}{T}}\cdot\left(2m+\sqrt{T}\varepsilon\right)^{\frac{t}{T}}+\varepsilon\sqrt{T}\right)^2 dt+\left(4T+2\right)\varepsilon^2.$$

Параграф 3.3 посвящен исследованию начально-граничной задачи для системы уравнений в частных производных смешанного типа второго порядка с двумя линиями вырождения. Получена априорная оценка и доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости решения.

Пусть пара функций $(u_1(x,y,t),u_2(x,y,t))$ является решением системы уравнений в частных производных смешанного типа

$$\begin{cases} u_{1tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{1xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{1yy}(x,y,t)=f(x,y,t),\\ u_{2tt}(x,y,t)+sgn(x)u_{2xx}(x,y,t)+sgn(y)u_{2yy}(x,y,t)=u_1(x,y,t), \end{cases} \tag{23}$$

в области $\Omega=\Omega_0\times\left(0;T\right)$ где $\Omega_0=\left\{x,y\,|\left(-1;1\right)^2,x\ne 0,y\ne 0\right\},T<\infty.$

Постановка задачи. Найти пару непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций $(u_1(x,y,t),u_2(x,y,t))$ которая удовлетворяет систему уравнений (23) и следующим условиям:

начальным

$$\left.\frac{\partial^i u_1(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_i(x,y),\ (x,y)\in\left[-1;1\right]^2,$$
$$\left.\frac{\partial^i u_2(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\psi_i(x,y),\ (x,y)\in\left[-1;1\right]^2, \tag{24}$$

граничным

$$\left.u_j(x,y,t)\right|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$
$$\left.u_j(x,y,t)\right|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \tag{25}$$

и условиям склеивания

$$\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$
$$\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \tag{26}$$

где $\left(i=\overline{0,1},\ j=\overline{1,2}\right)$ и $\varphi_i(x,y),\psi_i(x,y),f(x,y,t)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_i(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,\ \ \psi_i(x,y)\big|_{\partial\Omega_0}=0,\ f(x,y,t)\big|_{\partial\Omega_0}=0$.

Введем обозначение

$$M=\left\{\left(u_1(x,y,t),u_2(x,y,t)\right):\int_0^T\left\|u_1(x,y,t)\right\|_0^2dt+\int_0^T\left\|u_2(x,y,t)\right\|_0^2dt\le m^2,m<\infty\right\}.$$

Теорема 14. *Если решение задачи (23)-(26) существует и* $(u_1(x,y,t),u_2(x,y,t))\in M$*, тогда решение задачи (23)-(26) единственно.*

Пусть $U_{i\varepsilon}\left(x,y,t\right)=u_i\left(x,y,t\right)-u_{i\varepsilon}\left(x,y,t\right),\ \left(i=\overline{1,\ 2}\right)$ где пара функций $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)$ является решением задачи (23)-(26) с точными данными, а $\left(u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)$ решением задачи (23)-(26) с приближенными данными.

Теорема 15. *Пусть* $\left(u_1\left(x,y,t\right),u_2\left(x,y,t\right)\right)\in M,\ \left(u_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),u_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)\right)\in M$ *и* $\left\|\varphi_0(x,y)-\varphi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_1\le\varepsilon,\ \left\|\varphi_1(x,y)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon,\ \left\|\psi_0(x,y)-\psi_{0\varepsilon}(x,y)\right\|_1\le\varepsilon,$ $\left\|\psi_1(x,y)-\psi_{1\varepsilon}(x,y)\right\|_0\le\varepsilon,\ \left\|f(x,y,t)-f_\varepsilon(x,y,t)\right\|_0\le\varepsilon$. *Тогда для функций* $U_{1\varepsilon}\left(x,y,t\right),\ U_{2\varepsilon}\left(x,y,t\right)$ *при любых* $t\in\left(0;T\right)$ *верна оценки*

$$\int_0^t\left\|U_{i\varepsilon}(x,y,\tau)\right\|_0^2d\tau\le4q(t)\left\{T\varepsilon^2+\alpha_{i\varepsilon}\right\}^{1-p(t)}\left\{4m^2+\alpha_{i\varepsilon}\right\}^{p(t)},\left(i=\overline{1,2}\right),$$

где

$$\alpha_{1\varepsilon}=(2T^3+5T+2)\varepsilon^2,$$

$$\alpha_{2\varepsilon}=4q(t)\left(2T^2+1\right)\left(T\varepsilon^2+\alpha_{1\varepsilon}\right)^{1-p(t)}\times\left(4m^2+\alpha_{1\varepsilon}\right)^{p(t)}+\left(4T+2\right)\varepsilon^2.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования некорректных задач для дифференциалъных уравнений с двумя линиями вырождения обычно содержат в себе соответствующие задачи для неклассических уравнений математической физики. В диссертации рассмотрены дифференциальные уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения с новыми классами. В наши дни ведутся интенсивные работы по исследованию обратных и некорректных задач и соответствующих задач приложения.

В диссертационной работе рассматриваются некорректные задачи для дифференциальных уравнений с двумя линиями вырождения, исследуется их условная корректность и строится приближенное решение задач, близкое к точному решению в норме рассматриваемого пространства на множестве корректности.

Основными результатами исследования являются:

1. Априорные оценки решений и установление условной корректности некорректных задач для дифференциалъных уравнений с двумя линиями вырождения.

2. Доказаны теоремы единственности и условной устойчивости для решений некорректных краевых задач для дифференциалъных уравнений с двумя линиями вырождения.

3. Были изучены спектральная задача, которые соответствуют рассмотренным в работе задачам, получены формулы для вычисления собственных функций и собственных значений.

4. Построены приближенные решения в виде последовательностей и соответственно определена норма разности, которая означает близость между точным и приближенным решениями некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений с двумя линиями вырождения.

5. Приведены множества условной корректности для исследуемых некорректных задач.

6. Были определены параметры регуляризации и получены формулы для построения точного решения.

7. На основе численного алгоритма вычислений было разработано ПО для численного и графического отображения точных и приближенных решений, соответствующих исходным данным.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE
PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KHUDAYBERGANOV YASHIN KAMILOVICH

ILL-POSED PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO DEGENERATE LINES

01.01.02-Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.3.PhD/FM195

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Fayazov Kudratillo Sadridinovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Dzamalov Sirojiddin Zuxriddinovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Fergana State University**

Defense will take place « 24 » May 2021 at 14^{00} at the online meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.55.02 at Urgench State University. (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862)224-67-00, e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Urgench State University (is registered № D-257) (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862) 224-66-11, fax: (99862) 224-67-00), ursubox@gmail.com).

Abstract of dissertation sent out on « 7 » May 2021 year
(Mailing report № 1 on « 7» may 2021 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

B.I. Abdullaev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, Dr.ph.m.s.

A.A. Atamuratov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, C.ph.m.s.

S.A. Imomkulov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree, Dr.ph.m.s.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to establish conditional correctness of conditional correctness and finding approximate solutions on the correctness set for partial differential equations of mixed type with two degenerate lines and its numerical solution on a computer.

The object of the research work is differential equations of parabolic and mixed types with two degenerate lines.

Scientific novelty of the research work is as follows:

obtained a priori estimates are for the solution of ill-posed boundary value problems for partial differential equations of parabolic type with changing the direction of time and equations of mixed type with two lines degenerate;

the sets of the correctness of ill-posed boundary value problems for partial differential equations of parabolic type with two degenerate lines were determined, and theorems of uniqueness and conditional stability were also proved;

the sets of well-posedness of ill-posed boundary value problems for partial differential equations of mixed type with two degenerate lines are determined, and theorems of uniqueness and conditional stability are proved;

the approximate solutions are constructed and the norms of the difference between exact and approximate solutions in the corresponding spaces are estimated.

Implementation of the research results.

Based on the determination of the conditional stability estimate for solutions of ill-posed boundary value problems for differential equations of parabolic and mixed types with two degenerate lines and the construction of approximate solutions in the corresponding sets of correctness:

the eigenfunctions and eigenvalues of the spectral problem of the corresponding boundary value problem for systems of partial differential equations of mixed type of the second order with two degenerate lines, as well as an approximate solution of the initial-boundary value problem for an inhomogeneous differential equation of mixed type of the second order with two degenerate lines on the set of correctness are used in proving the existence of a solution to inverse problems considered in the scientific project MRU-OT-1/2017 “Nonlocal boundary value and inverse problems for nonclassical differential and operator-differential equations” (reference No. 89-03-4173 dated October 23, 2020 of the Ministry of Higher and Secondary Special education of the Republic of Uzbekistan). The application of the scientific result made it possible to prove the existence of solutions to nonlocal boundary value and inverse problems for differential and operator-differential equations;

the representation of the solution of boundary value problems for homogeneous and inhomogeneous differential equations of the second order with two degenerate lines of parabolic type with changing the direction of time on the set of correctness and the conditional stability of an ill-posed boundary value problem for homogeneous and inhomogeneous equations of mixed type with two degenerate lines were used in the research work “Development of new methods for solving problems of mathematical physics and optimal control. Non-classical initial and spectral problems for partial differential equations of odd order and their applications” with number OT-Ф4-(36+32) (Reference number 89-03-4173 of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan dated October 23, 2020). The application of the scientific result made it possible to obtain the stability of nonclassical initial and spectral problems for partial differential equations with an odd degree.

The structure and volume of the thesis: The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and applications. Volume of the dissertation is 115 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Фаязов К.С., Худайберганов Я.К., Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка в пространстве // ЎзМУ хабарлари. (2018), №1, стр. 89-95. (01.00.00; № 6).
2. Fayazov K.S. Khudayberganov Y.K. Ill-posed boundary value problem for a mixed type equation with two degenerate lines // Uzbek mathematical journal. 2018. № 2. pp. 32-42. (01.00.00; № 6).
3. Fayazov K.S. Khudayberganov Y.K. Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2019. Vol. 12. № 3. pp. 392–401. **(3. Scopus IF=0,27)**
4. Fayazov K.S. Khudayberganov Y.K. Boundary value problem for second order mixed type nonhomogeneous differential equation with two degenerate lines // Uzbek Mathematical Journal. 2019. № 2. pp. 49-61. (01.00.00; № 6).
5. Fayazov K.S. Khudayberganov Y.K. Boundary value problem for nonhomogeneous mixed-type equation with two degenerate lines. Acta of turin polytechnic university in Tashkent. (2019). vol. 9. Iss. 2, Article 1.
6. Фаязов К. С., Худайберганов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений в частных производных второго порядка с двумя линиями вырождения // Бюллетень Института математики. 2019. № 6. стр. 62-68.
7. Фаязов К. С., Худайберганов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Сибирские электронные математические известия. 2020. Том 17. стр. 647–660. **(3. Scopus IF=0,35)**
8. Khudayberganov Y.K., Approximate solution of an initial-boundary value problem for a nonhomogeneous second-order differential equation of mixed type with two degenerate lines // Central Asian problems of modern science and education: (2020). Vol. Iss. 3. Article 7. (01.00.00; № 10)

II бўлим (2 часть; part 2)

1. Fayazov K.S., Khudayberganov Y.K. Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines // Abstracts of the VI International scientific conference «Modern problems of the applied mathematics and information Technology-Al-Khorezmiy 2018». NUU, Tashkent, September 13-15, 2018 y. pp. 194-195.
2. Фаязов К.С., Худайберганов Я.К. Некорректная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка смешанного типа с двумя линиями вырождения // Научной конференции «Новые теоремы

молодых математиков–2018» Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан, 18 – 19 октября 2018 год. стр. 180-181.
3. Fayazov K.S., Khudayberganov Y.K. Boundary value problem for second order mixed type nonhomogeneous differential equation with two degenerate lines // STEMM: Science – Technology – Education – Mathematics – Medicine. Abstracts of the Joint International Conference May 16–17, 2019 y. Tashkent. pp. 50-51.
4. Фаязов К.С., Худайберганов Я.К. Краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Ферганский государственный университет академия наук республики Узбекистан институт математики имени В.И. Романовского «Современные проблемы математики и информатики», Материалы республиканской научно-практической конференции 22-23 мая 2019 года. стр. 72-73.
5. Фаязов К.С., Худайберганов Я.К. Приближённое решение начально-краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка смешанного типа с двумя линиями вырождения // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи» Самарканд, Узбекистан, 2-4 октября, 2019 года. стр. 131-132.
6. Фаязов К.С., Худайберганов Я.К. Некорректная краевая задача для системы уравнений в частных производных второго порядка с двумя линиями вырождения // Узбекско-Рассийская научная конференция. «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» Узбекско-Рассийская научная конференция. 24-26 октября, 2019 года. Ташкент, Узбекистан. стр.137-138.
7. Fayazov K., Khudayberganov Y. K., Ill-posed boundary value problem for a second-order differential equation of mixed type with two degenerate lines // Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 17-18 ноября, 2020. Том 1. стр. 444-447.

Автореферат Урганч Давлат университетиноширлик бўлимида таҳрирдан ўтказилди (26.04.2021 йил)

Босишга рухсат этилди: 28.04.2021.
Офсет қоғози. Қоғоз бичими 60х84 $^{1}/_{16}$.
«Times New Roman» гарнитураси.
Адади 100. Буюртма № 15.
Шартли босма табағи 2.

УрДУ матбаа бўлими матбаа фаолиятини бошлагани ҳақида ваколатли давлат органини хабардор қилиш тўғрисидаги Тасдиқнома асосида фаолият юритади (QR-kod 9704).

УрДУ босмахонасида чоп қилинди.
Манзил: 220110. Урганч шаҳри,
Ҳ. Олимжон кўчаси, 14-уй.
Телефон: (0-362)-224-66-01.