ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ДИЛМУРОДОВ ЭЛЁР БАХТИЁРОВИЧ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАЛАРНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши - 2021

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ДИЛМУРОДОВ ЭЛЁР БАХТИЁРОВИЧ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАЛАРНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши-2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM327 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Бухоро давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (www.qarshidu.uz) ва «Ziyonet» ахборот таълим тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Расулов Тўлқин Ҳусенович** физика-математика фанлари номзоди, доцент
Расмий оппонентлар:	**Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович** физика-математика фанлари доктори (DSc)
	Хамраев Ахрор Юсупович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Қарши давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «20» май соат 14^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225-34-13, факс: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Қарши давлат университети, Физика-математика факультети (102-хона).

Диссертация билан Қарши давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (43 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225-34-13).

Диссертация автореферати 2021 йил «08» май куни тарқатилди.
(2021 йил «08» май даги 3 рақамли реестр баённомаси).

Б.А. Шоимкулов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.А. Имомов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д. (DSc), доцент

Ю.Х. Эшкабилов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда олиб борилаётган аксарият изланишлар элементлари Ҳилберт фазоларида таъсир қилувчи чизиқли операторлардан иборат бўлган операторли матрицаларнинг спектрал хоссаларини аниқлашга олиб келинади. Операторли матрицаларнинг муҳим ва дискрет спектрлари билан боғлиқ масалалар қаттиқ жисмлар физикаси, квант майдон назарияси, статистик физика, магнитогидродинамика, квант механикаси ва бошқа кўплаб соҳалардаги долзарб масалалардан ҳисобланади. Шунинг учун чизиқли операторлар спектрал назариясида учрайдиган панжарадаги сони сақланмайдиган чекли сондаги заррачалар системасига мос операторли матрицаларга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим аҳамият касб этади.

Дунёда операторли матрицалар хос қийматлари сонининг чексиз бўлиш шартларини аниқлаш бўйича кўплаб илмий изланишлар олиб борилмоқда. Бу борада, умумлашган Фридрихс модели учун сонли тасвир ва квадратик сонли тасвирларнинг тузилишини кўрсатиш, иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектри тузилишини аниқлаш, муҳим спектрдан ташқаридаги хос қийматлар сонининг чекли ёки чексиз бўлиш шартларини топишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда панжарадаги сони иккитадан ошмайдиган ва учтадан ошмайдиган заррачалар системаларига мос операторли матрицаларнинг хоссаларини очиб беришга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Операторли матрицаларнинг муҳим ва дискрет спектрлари, хос қийматлар сонини аниқлаш ва дискрет спектри асимптотикасини топишга оид салмоқли натижаларга эришилди. «Математика, физика, амалий математика фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари» этиб белгиланди[1]. Бу борада чизиқли операторларнинг спектрал назариясини ривожлантириш, иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектрининг тузилишини кўрсатиш ҳамда унинг дискрет спектри чекли ёки чексиз тўплам бўладиган шартларни топиш муҳим илмий аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида», 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сон қарори.

такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида», 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида» қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Операторли матрицалар спектрал назариясининг бошланғич тушунчаларига оид тадқиқотлар К. Треттер, Ҳ. Лангер, А. Жериби, Г. Шпон, Р. Менникен, Р. Нагель, А.С. Маркус, Р.А. Минлос, А.А. Шкаликов, С.Н. Лақаев, А.Ю. Константинов, А.К. Мотовилов ва бошқа кўплаб олимлар томонидан олиб борилган.

Ҳозирги вақтда операторли матрицалар дискрет спектрини тадқиқ қилиш масаласи чизиқли операторли матрицалар назариясининг чуқур ўрганилаётган объектларидан бири ҳисобланади. Бундай турдаги операторлар спектрал таҳлилидаги асосий масалалардан бири унинг муҳим спектридан чапда ва ўнгда жойлашган чексиз сондаги хос қийматлар мавжудлигини ўрганиш масаласидир. Бу ҳодиса муҳим спектрнинг чап чегарасига нисбатан Ефимов ҳодисаси деб аталади. Бу ҳодисанинг мавжудлиги дастлаб В.Н. Ефимов томонидан ўрганилган. Ефимов ҳодисаси мавжудлигининг қатъий математик исботи дастлаб Д.Р. Яфаев томонидан келтирилган. Кейинчалик Ю.Н. Овчинников, И.М. Сигал, Ҳ. Тамура, А.В. Соболев ва бошқа олимлар томонидан уч заррачали узлуксиз Шредингер оператори учун Ефимов ҳодисасининг мавжудлиги ўрганилган.

Қаттиқ жисмлар физикаси, шунингдек, панжаравий майдон назариясида узлуксиз фазодаги уч заррачали Шредингер операторининг панжаравий аналоги бўлган дискрет Шредингер оператори деб аталувчи операторлар пайдо бўлади. Дастлаб С.Н. Лақаев томонидан уч ўлчамли панжарадаги ўзаро жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи учта ихтиёрий ва учта бир хил заррачали системалар учун Ефимов ҳодисасининг мавжудлиги математик нуқтаи назардан қатъий исботланган.

С.Н. Лақаев, С. Альбеверио, Ж.И. Абдуллаев ва З.Э. Мўминовларнинг ишларида $H_\mu(0)$ уч заррачали дискрет Шредингер операторининг $z,\ z<0$ сонидан чапда ётувчи хос қийматлари сони $N(0,z)$ учун қуйидаги кўринишдаги асимптотика олинган

$$\lim_{z\nearrow 0} N\left(0,z\right)|\ln|z||^{-1} = U_0 \qquad (0<U_0<\infty), \tag{1}$$

бу ерда U_0 фақатгина учта заррача массаларига боғлиқ ва таъсирлашиш потенциалларига боғлиқ эмас. Бундан ташқари, $H_\mu(K)$ оператор манфий хос қийматлари сони $N(K,0)$ учун

$$\lim_{|K|\to 0} N\left(K,0\right)|\ln|K||^{-1} = 2U_0$$

кўринишидаги асимптотика олинган. Бу асимптотика фақат панжаравий ҳоллар учун ўринли бўлиб, узлуксиз ҳолда аналоги мавжуд эмас.

М.Э. Мўминовнинг ишида панжарадаги учта ихтиёрий заррачалар ситемасига мос гамильтониан муҳим спектрининг бўшлиғида чексиз сондаги хос қийматлар мавжудлиги исботланган.

Ю.Х. Эшқобиловнинг ишида Хаббард моделида вужудга келувчи, уч заррачали модель дискрет Шредингер оператори учун Ефимов ҳодисасининг мавжудлиги исботланган. Бунда ўз-ўзига қўшма чегараланган операторлар учун минимакс принципи усуллари ва мусбат интеграл операторлар хоссаларидан фойдаланилган.

Юқорида келтириб ўтилган ишларда сони сақланадиган чекли сондаги заррачалар системалари учун Ефимов ҳодисасининг мавжудлиги ўрганилган.

С.Н. Лақаев, С. Альбеверио, Т.Ҳ. Расуловларнинг ишларида эса мос умумлашган Фридрихс модели муҳим спектр чап чегарасида виртуал сатҳга эга бўлса, сони сақланмайдиган ва учтадан ошмайдиган заррачалар системасига мос операторли матрицалар учун Ефимов ҳодисасининг мавжуд бўлиши исботланган, ҳамда дискрет спектр асимптотикаси ўрганилган. М.Э. Мўминов ва Т.Ҳ. Расуловларнинг ишларида эса бу турдаги операторли матрицалар учун муҳим спектрнинг ичида (муҳим спектрнинг бўшлиғида, муҳим спектрдан чапда) чексиз сондаги хос қийматлар мавжуд бўлиш шартлари ўрганилган.

Ушбу диссертация иши операторли матрицалар учун олдин ўрганилмаган «икки ёқлама Ефимов ҳодисаси»ни ўрганишга бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Бухоро давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режасининг 2017-2021 йилларга мўлжалланган М.01.2017-рақамли «Чизиқли операторларнинг спектрал назарияси» илмий-тадқиқот йўналиши доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади бутун сонли панжарадаги сони учтадан ошмайдиган заррачалар системасига мос гамильтонианлар билан боғлиқ иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектрининг тузилишини аниқлаш ва муҳим спектрдан ташқарида жойлашган хос қийматлари сонининг чекли ёки чексиз бўлиш шартларини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

иккита Ҳилберт фазоларининг тўғри йиғиндисида таъсир қилувчи ўз-ўзига қўшма, умуман олганда чегараланмаган иккинчи тартибли операторли матрицалар синфининг хос қийматлари сони чекли ёки чексиз бўлиш шартларини аниқлаш, шу билан бир қаторда дискрет спектри учун асимптотика олиш;

умумлашган Фридрихс модели сонли тасвирининг тузилишини аниқлаш ҳамда унинг квадратик сонли тасвири компоненталари чегаралари учун баҳолашлар олиш;

иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектри ва унинг «икки заррачали» ва «уч заррачали» тармоқлари тузилишини аниқлаш;

таъсирлашиш параметрининг иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектрдан ташқарида ва бир вақтда муҳим спектрнинг чап ва ўнг чегараларига яқинлашувчи чексиз сондаги хос қийматларга эга бўладиган критик қийматини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти сифатида иккинчи тартибли ўз-ўзига қўшма чегараланмаган операторли матрицалар, панжарадаги сони учтадан ошмайдиган заррачалар системасига мос гамильтонианлар билан боғлиқ иккинчи тартибли операторли матрицалар ва умумлашган Фридрихс модели олинган.

Тадқиқотнинг предметини ўз-ўзига қўшма чегараланмаган иккинчи тартибли операторли матрицалар синфининг дискрет спектри, пайдо қилиш ва йўқотиш операторлари ёрдамида аниқланган сони n $(n = 2,3)$дан ошмайдиган заррачалар системасига мос иккинчи тартибли операторли матрицаларнинг спектрал хоссалари ташкил этган.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида математик анализ, функционал анализ, ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектрал назарияси ва математик физика усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат**:**

иккинчи тартибли операторли матрица кўринишидаги умумлашган Фридрихс модели сонли тасвирининг тузилиши ёрдамида унинг спектри ва сонли тасвири устма-уст тушиш шартлари топилган;

умумлашган Фридрихс моделининг квадратик сонли тасвири компоненталарининг чегаралари учун баҳолашлар олинган;

умумлашган Фридрихс моделлари оиласининг спектри ёрдамида сони сақланмайдиган ва учтадан ошмайдиган заррачалар системаси билан боғлиқ иккинчи тартибли операторли матрицанинг муҳим спектри аниқланган;

спектрал параметрнинг иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектридан ташқарида чекли ёки чексиз сондаги хос қийматларга эга бўладиган сиртлари ажратилган бўлиб, унинг қиймати 6 га тенг бўлганда бир вақтнинг ўзида муҳим спектрдан чапда ва ўнгда хос қийматлар сони чексиз бўлиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

бутун сонли панжарадаги сони учтадан ошмайдиган заррачалар системасига мос гамильтонианлар билан боғлиқ иккинчи тартибли операторли матрица учун «икки ёқлама Ефимов ҳодисаси»нинг мавжудлик шартлари топилган;

умумлашган Фридрихс моделининг сонли ва квадратик сонли тасвири учун олинган натижалардан қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасидаги панжаравий моделлар хос қийматларининг жойлашув ўрни аниқланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, функционал анализ, математик физика ва ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектрал назарияси методларидан фойдаланган ҳолда аниқ математик таҳлиллар ва исботлашлар билан изоҳланган.

Тадқиқотнинг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқотда олинган натижаларнинг илмий аҳамияти улардан ўз-ўзига қўшма операторлар назариясининг квант майдонлар назарияси, қаттиқ жисмлар физикаси, статистик физикада пайдо бўладиган, хусусан, иккинчи тартибли операторли матрицалар билан боғлиқ масалаларида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

диссертация натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, операторли матрицаларнинг хос қийматлари сони ёрдамида қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасининг панжарадаги сони сақланмайдиган ва учтадан ошмайдиган заррачалар системаларига мос моделларнинг қийматлари сонини аниқлаш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Иккинчи тартибли операторли матрицаларга доир олинган илмий натижалар асосида:

умумлашган Фридрихс моделининг квадратик сонли тасвири чегаралари учун олинган баҳолашлар ҳамда сонли тасвири учун олинган натижаларидан AP05131268 рақамли «Эллиптик тенгламалар ва уларнинг каср тартибли аналоги учун классик ва классик бўлмаган чегаравий масалаларни ечиш усулларини ишлаб чиқиш» мавзусидаги лойиҳада фойдаланилган (Хўжа Аҳмад Яссавий номли халқаро қозоқ-турк университетининг 2021 йил 1 февралдаги 04/148-сон маълумотномаси). Натижада умумлашган Фридрихс моделининг сонли тасвири ва квадратик сонли тасвирининг хоссалари эллиптик операторлар спектрининг чегараларини аниқлаш имконини берган;

иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектри учун олинган натижалар ва унинг муҳим спектридан ташқарида чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиш шартларидан ОТ-Ф4-69 рақамли «Гармоник анализ, даражали геометрия ва унинг математик физика масалаларига татбиқлари» мавзусидаги фундаментал лойиҳада фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 13 октябрдаги 89-03-3898-сон маълумотномаси). Натижада иккинчи тартибли операторли матрица муҳим спектрининг чап ва ўнг томонида жойлашган чексиз сондаги хос қийматлари мавжудлигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 6 та халқаро ва 4 та Республика илмий-амалий анжуманларида, жами 10 та илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 20 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та, жумладан, 5 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, 115 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертацияда танланган мавзунинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги ёритилган, мавзу бўйича хорижий ва маҳаллий илмий–тадқиқот ишлари шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган мақолалар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «**Чегараланмаган ўз-ўзига қўшма 2×2 операторли матрицалар синфининг дискрет спектрини тадқиқ қилиш**» деб аталади. Ушбу бобда 2×2 операторли матрица кўринишида бўлган ўз-ўзига қўшма, умуман олганда чегараланмаган операторлар синфининг дискрет спектри ўрганилган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида дастлабки тушунчалар ва маълум тасдиқлар келтирилган.

Айтайлик H_1 ва H_2 – Ҳилберт фазолари, $H = H_1 \oplus H_2$ ва $\mathcal{A} \in L(H)$ бўлсин, бу ерда, $L(H) - H$ фазода аниқланган чизиқли чегараланган операторлар фазоси. У ҳолда $\mathcal{A}$ оператор ҳамиша элементлари чизиқли чегараланган $A_{ij} : H_j \to H_i$, $i, j = 1,2$ операторлардан тузилган қуйидаги 2×2 операторли матрица кўринишида тасвирланади:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

H фазода аниқланган чизиқли чегараланмаган $\mathcal{A}$ оператор учун, унинг аниқланиш соҳаси $D(\mathcal{A})$ ушбу $D_1 \subset H_1$, $D_2 \subset H_2$ қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси $D_1 \oplus D_2$ кўринишида тасвирланиши шарт эмас, шу билан бир қаторда $\mathcal{A}$ операторнинг (2) кўринишда тасвирланиши қўшимча шарт ҳисобланади. Бу ҳолда $\mathcal{A}$ операторнинг аниқланиш соҳаси учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$D(\mathcal{A}) = (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22})).$$

Иккинчи параграфда иккита Ҳилберт фазолари тўғри йиғиндисида таъсир қилувчи ўз-ўзига қўшма, умуман олганда чегараланмаган $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{V}$ кўринишидаги 2×2 операторли матрицалар синфининг дискрет спектри тадқиқ қилинган.

H_1, H_2 – сепарабель Ҳилберт фазолари берилган бўлсин.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ва $H = H_1 \oplus H_2$ фазода таъсир қилувчи (2) кўринишидаги 2×2 операторли матрицалар синфи $\mathcal{A}$ ни қараймиз: $A_{11} : H_1 \to H_1$–чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор,

$A_{12}: H_2 \to H_1$ – чизиқли чегараланган оператор, $A_{21} = A_{12}^*$, ва $A_{22}: H_2 \supset D(A_{22}) \to H_2$ – чизиқли, ўз-ўзига қўшма, умуман олганда чегараланмаган оператор. У ҳолда $\mathcal{A}$ оператор H фазода аниқланиш соҳаси $D(\mathcal{A}) = H_1 \oplus D(A_{22})$ бўлган чизиқли ўз-ўзига қўшма оператор бўлади.

$\mathcal{A}$ операторни H фазода таъсир қилувчи қуйидаги $\mathcal{A}_0$ ва $\mathcal{V}$ операторли матрицаларнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаймиз:

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{V} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix},$$

бу ерда, $D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{A})$ ва $D(\mathcal{V}) = H$ бўлиб, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^*$ ва $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$ бўлади.

Бирор (умуман олганда барча) $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$ нуқтада $\mathcal{A}$ ва $\mathcal{A}_0$ операторлар резольвенталарининг фарқи чекли рангга эга бўладиган ҳолни қараймиз. Яъни

$$\mathcal{T}(z) := (\mathcal{A} - zI)^{-1} - (\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}, \ rank\, \mathcal{T}(z) = \dim R(\mathcal{T}(z)) = r < \infty, \qquad (3)$$

бу ерда I орқали H фазодаги бирлик оператор белгиланган. У ҳолда (ҳаттоки $\mathcal{T}(z)$ компакт бўлганда ҳам) Фредгольмнинг аналитик теоремасига кўра $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(\mathcal{A}_0)$ тенглик ўринли бўлади.

$N_{(a;b)}(\mathcal{A})$ орқали $\mathcal{A}$ операторнинг $(a;b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ интервалда ётувчи хос қийматлари сонини (карраликлари билан ҳисобга олганда) белгилаймиз.

1-теорема. *$\mathcal{A}$ ва $\mathcal{A}_0$ операторлар* (3) *шартни қаноатлантирсин, ҳамда $\mathcal{A}_0$ операторнинг муҳим спектри қуйидаги кўринишда бўлсин:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) \setminus \{\infty\} = \bigcup_{n=1}^{m} [a_{2n-1}; a_{2n}],$$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_{2m}$ ва $m < \infty$. $a_0 < a_1$ ва $a_{2m+1} > a_{2m}$ шартларни қаноатлантирувчи тайинланган a_0 ва a_{2m+1} ҳақиқий сонларни олайлик. У ҳолда ихтиёрий $n = 0, \ldots, m$ сони учун ушбу муносабат ўринли бўлади:

$$N_{(a_{2n}; a_{2n+1})}(\mathcal{A}) = \infty \Leftrightarrow N_{(a_{2n}; a_{2n+1})}(\mathcal{A}_0) = \infty.$$

Агар $N_{(a_{2n}; a_{2n+1})}(\mathcal{A}) = \infty$ бўлса, у ҳолда a_{2n}, a_{2n+1} нуқталардан ҳеч бўлмаганда биттаси (a_0 *ва* a_{2m+1} *нуқталардан ташқари*) *хос қийматларининг қуюқлашиш нуқтаси бўлади ва қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:*

$$\lim_{z \searrow a_{2n}} \frac{N_{(z; a_{2n+1} - \delta_n)}(\mathcal{A})}{N_{(z; a_{2n+1} - \delta_n)}(\mathcal{A}_0)} = 1 \text{ (агар } a_{2n} \text{ қуюқлашиш нуқтаси бўлса);}$$

$$\lim_{z \nearrow a_{2n+1}} \frac{N_{(a_{2n} + \delta_n; z)}(\mathcal{A})}{N_{(a_{2n} + \delta_n; z)}(\mathcal{A}_0)} = 1 \text{ (агар } a_{2n+1} \text{ қуюқлашиш нуқтаси бўлса);}$$

бу ерда, $0 < \delta_n < a_{2n+1} - a_{2n}$.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида муҳим спектри ўзаро кесишмайдиган иккита ярим ўқнинг бирлашмасидан тузилган ўз-ўзига қўшма чегараланмаган $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$ - 2×2 операторли матрицалар оиласи қаралган. $\mathcal{A}_0$ оператор ўзининг муҳим спектри бўшлиғида чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиши кўрсатилган. Ҳар бир тайинланган $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ сони учун $\mathcal{A}_{t_0}$ муҳим спектрининг бўшлиғида чекли сонда, муҳим спектрнинг ичида эса чексиз кўп хос қийматларга эга бўлиши кўрсатилган. Бундан ташқари, шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлиб, $|t| \ge \delta$ бўладиган барча t ларда $\mathcal{A}_t$ оператор муҳим спектрнинг бўшлиғида хос қийматларга эга бўлмаслиги исботланган.

Диссертация ишининг **«Умумлашган Фридрихс моделлари оиласининг хос қийматлари ва виртуал сатҳлари»** деб номланувчи иккинчи бобининг биринчи параграфида $\hat{H} := H_0 \oplus H_1$. ($H_0 := \mathbb{C}$, $H_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$) Ҳилберт фазосида таъсир қилувчи $\mathcal{A}_\mu(k), k \in \mathbb{T}^3$ умумлашган Фридрихс моделлари оиласи ушбу 2×2 операторли матрица

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix}$$

кўринишида қаралади, унинг $A_{ii}(k): H_i \to H_i, i = 0,1, k \in \mathbb{T}^3$ ва $A_{01}: H_1 \to H_0$ матрицавий элементлар қуйидаги формулалар билан аниқланган:

$$A_{00}(k) f_0 = w_0(k) f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt, \quad (A_{11}(k) f_1)(p) = w_1(k,p) f_1(p).$$

Бу ерда $f_i \in H_i, i = 0,1$; μ-мусбат ҳақиқий сон, $w_0(\cdot)$ ва $w_1(\cdot,\cdot)$ функциялар

$$w_0(k) := \varepsilon(k) + \gamma, \quad w_1(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(k+p)\right) + \varepsilon(p), \tag{4}$$

кўринишга эга, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varepsilon(\cdot)$ дисперсия функцияси эса

$$\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos k_i), \; k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{T}^3.$$

тенглик билан аниқланган.

$\mathcal{A}_0(k) = \mathcal{A}_\mu(k)\big|_{\mu=0}$ бўлсин. Маълумки, $\mathcal{A}_0(k)$ операторнинг $\mathcal{A}_\mu(k) - \mathcal{A}_0(k)$ қўзғалиш оператори ўз-ўзига қўшма оператор бўлиб, ранги 2 га тенг. Шу сабабли чекли рангга эга бўлган қўзғалишларда муҳим спектрнинг ўзгармаслиги ҳақидаги машҳур Г.Вейл теоремасига кўра $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = [m(k); M(k)]$, бу ерда $m(k)$ ва $M(k)$ сонлари қуйидагича аниқланган: $m(k) := \min\limits_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p)$, $\quad M(k) := \max\limits_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p)$.

$\mathcal{A}_\mu(k)$ операторнинг хос қийматларини ўрганиш мақсадида, ҳар бир тайинланган $k \in \mathbb{T}^3$ учун $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$ соҳада регуляр бўлган

$$I(k;z):=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_1(k,t)-z}$$

функцияни аниқлаймиз. Одатда

$$\Delta_\mu(k\,;z):=w_0(k)-z-\mu^2 I(k\,;z),\ \ z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$$

функцияга $\mathcal{A}_\mu(k)$ операторга мос Фредгольм детерминанти дейилади.

$w_1(\cdot,\cdot)$ функция $(\bar{0},\bar{0})\in(\mathbb{T}^3)^2$ нуқтада ягона айнимаган минимумга ва $(\bar{\pi},\bar{\pi})\in(\mathbb{T}^3)^2$ нуқтада ягона айнимаган максимумга эришади. Ҳамда,

$$\min_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p)=w_1(\bar{0},\bar{0})=0,\qquad \max_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p)=w_1(\bar{\pi},\bar{\pi})=18.$$

Аниқланишига кўра $w_0(\cdot)$ функция ҳам $\bar{0}\in\mathbb{T}^3$ нуқтада айнимаган минимумга ва $\bar{\pi}\in\mathbb{T}^3$ нуқтада айнимаган максимумга эришади. Кейинги натижаларни баён қилиш учун баъзи маълумотларни келтириб ўтамиз:

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(\bar{0}))=[0;9\frac{3}{8}],\ \ \sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(\bar{0}))=\{z\in\mathbb{C}\setminus[0;9\frac{3}{8}]:\Delta_\mu(\bar{0}\,;z)=0\};$$

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}))=[8\frac{5}{8};18],\ \sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}))=\{z\in\mathbb{C}\setminus[8\frac{5}{8};18]:\Delta_\mu(\bar{\pi}\,;z)=0\}.$$

Демак, $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))=0,\ \min\limits_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))=18.$

Ушбу бобнинг иккинчи параграфи $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ ва $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ операторлар учун хос қиймат ва виртуал сатҳ тушунчаларини ўрганишга бағишланган. $\gamma\in\mathbb{R}$ спектрал параметр ва $\mu>0$ таъсирлашиш параметри учун $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ ва $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ операторлар яккаланган хос қийматларга эга бўлиш шартлари топилган.

Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$\hat{\mu}_l^0(\gamma):=\sqrt{\gamma}(I(\bar{0};0))^{-1/2},\ \text{агар}\ \gamma>0\ \text{бўлса;}$$

$$\hat{\mu}_r^0(\gamma):=\sqrt{12-\gamma}(I(\bar{0};0))^{-1/2},\ \text{агар}\ \gamma<12\ \text{бўлса.}$$

$C(\mathbb{T}^3)$ ва $L_1(\mathbb{T}^3)$ орқали мос равишда $\mathbb{T}^3$ да аниқланган узлуксиз функциялар ва интегралланувчи функцияларнинг Банах фазоларини белгилаймиз.

1-таъриф. $\gamma\neq 0$ *бўлсин. Агар* $\lambda=1$ *сони*

$$(G_\mu\psi)(q)=\frac{\mu^2}{\gamma}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\psi(t)dt}{\varepsilon(t/2)+\varepsilon(t)},\qquad \psi\in C(\mathbb{T}^3)$$

интеграл оператори учун хос қиймат бўлса, $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *оператор* $z=0$ *нуқтада виртуал сатҳ* (*ёки нол энергияли резонанс*)*га эга бўлади дейилади.*

2-таъриф. $\gamma\neq 12$ *бўлсин. Агар* $\lambda=1$ *сони*

$$(G'_\mu\varphi)(q)=\frac{\mu^2}{\gamma-12}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi(t)dt}{\varepsilon((\bar{\pi}+t)/2)+\varepsilon(t)-12},\qquad \varphi\in C(\mathbb{T}^3)$$

интеграл оператори учун хос қиймат бўлса, $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *оператор* $z=18$ *нуқтада виртуал сатҳга эга бўлади дейилади.*

Қуйидаги теоремада $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ операторнинг манфий хос қийматга ва $z=0$ нуқтада виртуал сатҳга эга бўлиш шартлари топилган.

2-теорема. 1) *Агар* $\gamma \le 0$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $\mu > 0$ *сони учун* $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ *оператор ягона манфий хос қийматга эга бўлади*.

2) *Агар* $\gamma > 0$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади:*

2.1) *ихтиёрий* $\mu \in (0; \hat{\mu}_l^0(\gamma))$ *сони учун* $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ *оператор манфий хос қийматга эга эмас*;

2.2) *агар* $\mu = \hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ *оператор* $z=0$ *нуқтада виртуал сатҳга эга бўлади;*

2.3) *ихтиёрий* $\mu > \hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *сони учун* $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ *оператор ягона манфий хос қийматга эга бўлади.*

Худди шу каби γ ва μ параметрлар учун $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ оператор 18 дан катта яккаланган хос қийматга эга бўлиш, ҳамда $z=18$ нуқтада виртуал сатҳ мавжуд бўлиш шартларини топиш мумкин.

3-теорема. 1) *Агар* $\gamma \ge 12$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $\mu > 0$ *сони учун* $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ *оператор* $(18; +\infty)$ *интервалда ётувчи ягона хос қийматга эга бўлади*.

2) *Агар* $\gamma < 12$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади*:

2.1) *ихтиёрий* $\mu \in (0; \hat{\mu}_r^0(\gamma))$ *сони учун* $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ *оператор 18 дан катта хос қийматга эга эмас*;

2.2) *агар* $\mu = \hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ *оператор* $z=18$ *нуқтада виртуал сатҳга эга бўлади;*

2.3) *ихтиёрий* $\mu > \hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *учун* $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ *оператор* $(18; +\infty)$ *интервалда ётувчи ягона хос қийматга эга*.

Аниқланишига кўра $\hat{\mu}_l^0(6) = \hat{\mu}_r^0(6)$ бўлиб, $\hat{\mu}_0 := \hat{\mu}_l^0(6) = \hat{\mu}_r^0(6)$ деб олсак, 2- ва 3-теоремалардан қуйидаги натижани оламиз.

1-натижа. 1) *Агар* $\gamma \in (0;6)$ *бўлиб,* $\mu = \hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ *оператор* $z=0$ *нуқтада виртуал сатҳга эга бўлади ва* $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ *оператор* 18 *дан катта хос қийматга эга бўлмайди;*

2) *агар* $\gamma = 6$ *бўлса, у ҳолда* $\mu = \hat{\mu}_0$ *бўлиб,* $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ *ва* $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ *операторлар мос равишда* $z=0$ *ва* $z=18$ *нуқталарда виртуал сатҳга эга бўлади;*

3) *агар* $\gamma \in (6;12)$ *бўлиб,* $\mu = \hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ *оператор ягона манфий хос қийматга эга ва* $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ *оператор* $z=18$ *нуқтада виртуал сатҳга эга бўлади.*

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида $\mathcal{A}_\mu(k_0)$ умумлашган Фридрихс модели учун сонли тасвир тушунчаси ва унинг тузилиши ўрганилган. Бўсағавий ҳодисалар методидан фойдаланиб, умумлашган Фридрихс модели спектри ва сонли тасвири устма-уст тушиш шартлари топилган.

$H-$комплекс Ҳилберт фазоси ва $\mathcal{A}: H \to H$ чизиқли оператор бўлиб, $D(\mathcal{A}) \subset H$ унинг аниқланиш соҳаси бўлсин. $x \in D(\mathcal{A})$, $\|x\|=1$ элементлар ёрдамида ҳосил бўлган $(\mathcal{A}x, x)$ комплекс сонлар тўпламига $\mathcal{A}$ операторнинг *сонли тасвири* дейилади ва $W(\mathcal{A})$ каби белгиланади.

Операторнинг сонли тасвирига оид янада аниқроқ натижалар олиш учун $\hat{H} := H_0 \oplus H_1$ $(H_0 := \mathbb{C},\ H_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ Ҳилберт фазосида қуйидаги кўринишга эга бўлган 2×2 операторли матрицани қараймиз:

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu = \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

бу ерда $A_{ij}: H_j \to H_i$, $i \le j$, $i, j = 0,1$ матрицавий элементлари қуйидагича аниқланган: $A_{00} f_0 = w f_0$, $\quad A_{01} f_1 = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(s) f_1(s) ds$, $\quad (A_{11} f_1)(p) = u(p) f_1(p)$.

Бунда $f_i \in H_i$, $i = 0,1;$ $w, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ ва $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ лар $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$да аниқланган ҳақиқий қийматли аналитик функциялар.

Агар $v(t) \equiv 1$ ва $\mathrm{d} = 3$ бўлса, у ҳолда ҳар бир тайинланган $k_0 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ учун 2.1 ва 2.2 параграфларда қаралган $\mathcal{A}_\mu(k_0)$ оператор (5) кўринишга эга бўлади.

Диссертация ишида $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ оператор сонли тасвири ёпиғининг тузилиши матрицавий элементлар хоссаларидан фойдаланган ҳолда $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ торнинг барча ўлчамлари учун ўрганилган. $\mathrm{d} = 3$ ва $m = \min\limits_{p \in \mathbb{T}^3} u(p)$, $M = \max\limits_{p \in \mathbb{T}^3} u(p)$ бўлсин.

4-теорема. *Қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади:*

1) *агар m ва M сонлари $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ операторнинг «бўсағавий» хос қийматлари бўлса, у ҳолда $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M]$ тенглик ўринли бўлади;*

2) *агар m сони $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ операторнинг «бўсағавий» хос қиймати бўлиб, бу оператор $z = M$ нуқтада виртуал сатҳга эга бўлса, у ҳолда $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M)$ тенглик ўринли бўлади;*

3) *агар $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ оператор $z = m$ нуқтада виртуал сатҳга эга бўлиб, M сони бу оператор учун «бўсағавий» хос қиймат бўлса, у ҳолда $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = (m; M]$ тенглик ўринли бўлади;*

4) *агар $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ оператор $z = m$ ва $z = M$ нуқталарда виртуал сатҳга эга бўлса, у ҳолда $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = (m; M)$ тенглик ўринли бўлади.*

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ умумлашган Фридрихс моделининг квадратик сонли тасвирини ҳисоблаш учун формула келтирилган. Ҳамда, $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ оператор квадратик сонли тасвир компоненталари чегаралари учун баҳолашлар олинган ва бу баҳолашлардан $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ операторнинг хос қиймати жойлашган ўрни ҳақида аниқроқ маълумот олиш учун татбиқ қилинган.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$\Lambda_\mu^- := \bigcup_{\|f_1\|=1} \left\{ \min\{w, (uf_1, f_1)\} - \mu\,|(v, f_1)|\, tg\left(\frac{1}{2} arctg \frac{2\mu\,|(v, f_1)|}{|w-(uf_1, f_1)|}\right)\right\};$$

$$\Lambda_\mu^+ := \bigcup_{\|f_1\|=1} \left\{ \max\{w, (uf_1, f_1)\} + \mu\,|(v, f_1)|\, tg\left(\frac{1}{2} arctg \frac{2\mu\,|(v, f_1)|}{|w-(uf_1, f_1)|}\right)\right\};$$

$$\delta_{\mu,v}^- := \mu\,\|v\|\, tg\left(\frac{1}{2} arctg \frac{2\mu\,\|v\|}{|w-m|}\right), \quad \delta_{\mu,v}^+ := \mu\,\|v\|\, tg\left(\frac{1}{2} arctg \frac{2\mu\,\|v\|}{|M-w|}\right).$$

1-лемма. $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *операторнинг квадратик сонли тасвири учун* $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = \Lambda_\mu^- \cup \Lambda_\mu^+$ *тенглик ўринли.*

5-теорема. $\mu > 0 -$*ихтиёрий сон бўлсин.*

1) *Агар* $w > M$ *бўлса, у ҳолда* $\Lambda_\mu^- \cap \Lambda_\mu^+ = \varnothing$ *бўлади ва қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:* $\sup \Lambda_\mu^- \le M < w \le \inf \Lambda_\mu^+$;

2) *агар* $w < m$ *бўлса, у ҳолда* $\Lambda_\mu^- \cap \Lambda_\mu^+ = \varnothing$ *бўлиб, қуйидаги баҳолашлар ўринли бўлади:* $\sup \Lambda_\mu^- \le w < m \le \inf \Lambda_\mu^+$;

3) *агар* $m \le w \le M$ *бўлса, у ҳолда* $\Lambda_\mu^\pm$ *тўпламларнинг чегаралари учун қуйидаги баҳолашлар ўринли бўлади:*

$$m - \delta_{\mu,v}^- \le \inf \Lambda_\mu^- \le m, \quad \sup \Lambda_\mu^- \le w; \qquad \inf \Lambda_\mu^+ \ge m, \quad M \le \sup \Lambda_\mu^+ \le M + \delta_{\mu,v}^+.$$

Диссертациянинг учинчи боби «2×2 **операторли матрицанинг спектри. Дискрет спектр асимптотикаси**» деб номланган. Ушбу бобда $H := H_1 \oplus H_2$ ($H_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ ва $H_2 := L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$) фазода таъсир қилувчи қуйидаги $\mathcal{A}_\mu$ - 2×2 операторли матрица қаралади

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

унинг $A_{ij} : H_j \to H_i, i \le j, i, j = 1,2$ матрицавий элементлари қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланган:

$$(A_{11} f_1)(k) = w_0(k)\, f_1(k), \quad (A_{12} f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k,s)ds,$$

$$(A_{22} f_2)(k,p) = w_1(k,p)\, f_2(k,p), \quad f_i \in H_i, \quad i = 1,2.$$

Бу ерда $\mu > 0$ – таъсирлашиш параметри, $w_0(\cdot)$ ва $w_1(\cdot;\cdot)$ функциялар эса (4) кўринишга эга.

Қуйидаги тўпламларни аниқлаб оламиз

$$\Lambda_\mu := \bigcup_{k\in\mathbb{T}^3} \sigma_{disc}(\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)), \quad \Sigma_\mu := [0;18] \cup \Lambda_\mu.$$

Учинчи бобнинг биринчи параграфида $\mathcal{A}_\mu$ операторли матрица хос функциялари учун Фаддеев интеграл тенгламаси ва унинг симметрик варианти қурилган, ҳамда Бирман-Швингер принципи келтирилган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида $\mathcal{A}_\mu$ операторли матрица муҳим спектрининг жойлашув ўрни умумлашган Фридрихс моделлари оиласи спектри ёрдамида ўрганилган, яъни муҳим спектрнинг “икки заррачали” ва “уч заррачали” тармоқлари ажратилган. Бундан ташқари, $\mathcal{A}_\mu$ операторли матрица муҳим спектри тармоқларининг ўзаро жойлашуви тадқиқ қилинган.

6-теорема. *$\mathcal{A}_\mu$ операторли матрицанинг муҳим спектри учун $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = \Sigma_\mu$ тенглик ўринли. Шунингдек, Σ_μ тўплам учтадан кўп бўлмаган кесмалар бирлашмасидан иборат.*

$\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{2}\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ ва $\mu_r^0(\gamma) := \sqrt{2}\hat{\mu}_r^0(\gamma)$ бўлсин.

Кейинги натижаларни баён қилиш учун баъзи белгилашларни киритамиз:

$$E_\mu^{(1)} := \min\left\{\Lambda_\mu \cap (-\infty;0]\right\};\quad E_\mu^{(2)} := \max\left\{\Lambda_\mu \cap (-\infty;0]\right\};$$

$$E_\mu^{(3)} := \min\left\{\Lambda_\mu \cap [18;\infty)\right\};\quad E_\mu^{(4)} := \max\left\{\Lambda_\mu \cap [18;\infty)\right\}.$$

$\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;0)$ ва $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;18)$ функциялар $\mathbb{T}^3$ компакт тўпламда узлуксиз бўлганлиги учун, шундай $k_0, k_1 \in \mathbb{T}^3$ нуқталар мавжуд бўлиб, $\max\limits_{k\in\mathbb{T}^3} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;0) = \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_0;0)$ ва $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;18) = \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_1;18)$ бўлади.

Ушбу ўзгармас сонларни аниқлаб оламиз:

$$\gamma_0 := \left(12\frac{I(k_0;0)}{I(\bar{0};0)} - \varepsilon(k_0)\right)\left(1 + \frac{I(k_0;0)}{I(\bar{0};0)}\right)^{-1};\ \gamma_1 := \left(18 - \varepsilon(k_1)\right)\left(1 - \frac{I(k_1;18)}{I(\bar{0};0)}\right)^{-1}.$$

Қуйида келтириладиган теоремаларда $\mu > 0$ ва $\gamma \in \mathbb{R}$ параметрларга боғлиқ ҳолда $\mathcal{A}_\mu$ операторли матрица муҳим спектрининг тузилиши ҳақида тасдиқлар келтирилган.

7-теорема. *$\gamma < 12$ сони учун $\mu = \mu_r^0(\gamma)$ бўлсин. У ҳолда $\mathcal{A}_\mu$ операторли матрица муҳим спектри учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = \begin{cases} [E_\mu^{(1)}; E_\mu^{(2)}] \cup [0;18], & \textit{агар}\quad \gamma < \gamma_0 \quad \textit{бўлса};\\ [E_\mu^{(1)};18], & \textit{агар}\ \ \gamma_0 \le \gamma < 6\ \ \textit{бўлса};\\ [0;18], & \textit{агар}\ 6 \le \gamma < 12\ \ \textit{бўлса}. \end{cases}$$

8-теорема. $\gamma > 0$ *сони учун* $\mu = \mu_l^0(\gamma)$ *бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = \begin{cases} [0;18], & \text{агар } 0 < \gamma \le 6 \text{ бўлса}; \\ [0; E_\mu^{(4)}], & \text{агар } 6 < \gamma \le \gamma_1 \text{ бўлса}; \\ [0;18] \cup [E_\mu^{(3)}; E_\mu^{(4)}], & \text{агар } \gamma > \gamma_1 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Учинчи бобнинг учинчи параграфида μ таъсирлашиш параметрининг шундай μ_0 критик қиймати топилганки, бунда $\mathcal{A}_{\mu_0}$ операторли матрица муҳим спектрдан ташқарида ва бир вақтнинг ўзида муҳим спектрнинг ҳам қуйи (0 га тенг) чегарасига, ҳам юқори (18 га тенг) чегарасига яқинлашувчи чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиши исботланган. Шунингдек, $\mathcal{A}_{\mu_0}$ операторнинг дискрет спектри асимптотикалари топилган.

9-теорема. 1) *Ё* $\gamma \ge 12$ *ва* $\mu > 0$ *ёки ихтиёрий* $\gamma < 12$ *сони учун* $\mu \ne \mu_r^0(\gamma)$ *бўлсин. У ҳолда* $\mathcal{A}_\mu$ *операторли матрица* $E_\mu^{(4)}$ *дан ўнгда ётувчи чекли сондаги хос қийматларга эга бўлади.*

2) *Ё* $\gamma \le 0$ ва $\mu > 0$ *ёки ихтиёрий* $\gamma > 0$ *сони учун* $\mu \ne \mu_l^0(\gamma)$ *бўлсин. У ҳолда* $\mathcal{A}_\mu$ *операторли матрица* $E_\mu^{(1)}$ *сонидан чапда ётувчи чекли сондаги хос қийматларга эга бўлади.*

$\mathbb{S}^2$ - $\mathbb{R}^3$ фазодаги бирлик сфера бўлиб,

$$S_r : L_2((0,r),\sigma_0) \to L_2((0,r),\sigma_0), \quad r > 0, \quad \sigma_0 = L_2(\mathbb{S}^2)$$

ядроси қуйидаги

$$S(t;y) := \frac{25}{8\pi^2\sqrt{6}} \frac{1}{5ch(y)+t}, \; y = x - x', \quad x, x' \in (0,r), \quad t = (\xi,\eta), \quad \xi,\eta \in \mathbb{S}^2$$

кўринишда бўлган интеграл оператор бўлсин.

$\lambda > 0$ сони учун қуйидаги ўзгармасни аниқлаймиз:

$$U(\lambda) = \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} r^{-1} n(\lambda, S_r).$$

Бу лимитнинг мавжудлиги ва $U(1) > 0$ сонининг чекли бўлиши Соболев томонидан исботланган.

10-теорема. 1) *Агар* $\gamma < 12$ *сони учун* $\mu = \mu_r^{(0)}(\gamma)$ *бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}_\mu$ *операторли матрица* $(18;+\infty)$ *оралиқда чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиб, бу хос қийматлар* $E_\mu^{(4)} = 18$ *га яқинлашади. Бундан ташқари,*

$$\lim_{z\searrow 18} \frac{N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_r^0(\gamma)})}{|\ln|z-18||} = U(1)$$

муносабат ўринли бўлади

2) *Агар* $\gamma > 0$ *сони учун* $\mu = \mu_l^{(0)}(\gamma)$ *бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}_\mu$ *операторли матрица* $(-\infty;0)$ *оралиқда чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиб, бу хос*

қийматлар $E_\mu^{(1)}=0$ *га яқинлашади. Бундан ташқари,*

$$\lim_{z\nearrow 0}\frac{N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_{\mu_l^0(\gamma)})}{|\ln|z||}=U(1)$$

муносабат ўринли бўлади.

$\mu_l^0(\gamma)$, $\mu_r^0(\gamma)$ сонлари ва $E^{(1)}_{\mu_l^0(\gamma)}$, $E^{(4)}_{\mu_r^0(\gamma)}$ чегаравий нуқталарнинг таърифига кўра, $\mu_l^0(6)=\mu_r^0(6)=\mu_0$ ва $E^{(1)}_{\mu_0}=0$, $E^{(4)}_{\mu_0}=18$ муносабатлар ўринли бўлади. Бу ҳолда 10-теоремадан қуйидаги муҳим натижани оламиз.

2-натижа. *Қуйидагича муносабатлар ўринли бўлади*

1) $N_{(-\infty;0)}(\mathcal{A}_{\mu_0})=\infty$, $N_{(18;\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_0})=\infty$;

2) $\lim\limits_{z\nearrow 0}\dfrac{N_{(-\infty;\,z)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z||}=\lim\limits_{z\searrow 18}\dfrac{N_{(z;\,\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z-18||}=U(1).$

ХУЛОСА

Мазкур диссертация иши иккита ўз-ўзига қўшма чегараланмаган 2×2операторли матрицалар синфи, $\mathcal{A}_\mu(k)$ умумлашган Фридрихс моделлари оиласи ва уч ўлчамли $\mathbb{Z}^3$ панжарадаги сони учтадан ошмайдиган заррачалар системаси гамильтониани билан боғлиқ $\mathcal{A}_\mu-$ 2×2 операторли матрицанинг спектрал хоссаларини ўрганишга бағишланган.

Диссертация ишининг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1) $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{V}$ кўринишидаги ўз-ўзига қўшма чегараланмаган 2×2 операторли матрицалар синфи учун, $\mathcal{A}$ ва $\mathcal{A}_0$ операторлар резольвенталарининг фарқи чекли рангга эга бўлиб, $\mathcal{A}_0$ оператор муҳим спектри чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган кесмалар бирлашмасидан иборат бўлса, $\mathcal{A}$ оператор муҳим спектрининг бўшлиғида чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиши учун $\mathcal{A}_0$ оператор ҳам бу бўшлиқда чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланган;

2) $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})(\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi}))$ оператор учун муҳим спектрнинг қуйи (юқори) чегараси виртуал сатҳ бўлиши учун зарурий ва етарли шартлар топилган;

3) $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ оператор матрицавий элементларининг хоссаларидан фойдаланган ҳолда унинг $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ сонли тасвирининг ёпиғи, $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ торнинг барча ўлчамларида тўла таҳлил қилинган. $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ ёпиқ тўплам бўладиган ҳоллар ажратилган. Бундан ташқари, $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ операторнинг спектри $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ тўплам билан устма-уст тушиш шартлари топилган. $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ оператор квадратик сонли тасвири компоненталарининг чегаралари учун баҳолашлар олинган;

4) $\mathcal{A}_\mu(k)$ умумлашган Фридрихс моделлар оиласининг спектри ёрдамида $\mathcal{A}_\mu$ оператор муҳим спектрининг жойлашув ўрни ва тузилиши ўрганилган;

5) μ таъсирлашиш параметрининг шундай $\mu_l^0(\gamma)$ ва $\mu_r^0(\gamma)$ критик қийматлари топилганки, бунда $\mu \neq \mu_l^0(\gamma)$ ($\mu \neq \mu_r^0(\gamma)$) бўлганда $\mathcal{A}_\mu$ оператор муҳим спектрдан чапда (ўнгда) чекли сондаги хос қийматларга эга бўлиши кўрсатилган;

6) $\mu = \mu_l^0(\gamma)$ ($\mu = \mu_r^0(\gamma)$) бўлганда $\mathcal{A}_\mu$ операторнинг муҳим спектридан чапда (ўнгда) чексиз сондаги хос қийматлари мавжудлиги исботланган;

7) $\mu_0 := \mu_l^0(6) = \mu_r^0(6)$ бўлганда $\mathcal{A}_{\mu_0}$ оператор муҳим спектрдан ташқарида ва бир вақтнинг ўзида муҳим спектрнинг қуйи (0 га тенг), ҳамда юқори (18 га тенг) чегараларига яқинлашувчи чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлиши кўрсатилган. Бундан ташқари, $\mathcal{A}_{\mu_0}$ операторнинг $z, z \leq 0$ дан чапда ва $z, z \geq 18$ дан ўнгда ётувчи хос қийматлари сони учун мос равишда $z \nearrow 0$ ва $z \searrow 18$ да асимптотикалар олинган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИЛМУРОДОВ ЭЛЁР БАХТИЁРОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Карши-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2019.2.PhD/FM327.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.qarshidu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Расулов Тулкин Хусенович** кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович** доктор физико-математических наук (DSc)
	Хамраев Ахрор Юсупович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «20» 05 2021 года в 14^{00} на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13, факс: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Каршинский государственный университет, Физико-математический факультет (кабинет 102).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственного университета (зарегистрирована за №43). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225-34-13).

Автореферат диссертации разослан «08» 05 2021 года.
(протокол рассылки № 3 от «08» 05 2021 года).

Б.А. Шоимкулов
Председатель научного совета
по присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

А.А. Имомов
Ученый секретарь научного
совета по присуждению научных
степеней, д.ф.-м.н. (DSc), доцент

Ю.Х. Эшкабилов
Председатель научного
семинара при научном совете по
присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные проблемы, исследуемые в мире, приводятся к определению спектральных свойств операторных матриц, элементы которых являются линейными операторами в гильбертовых пространствах. В настоящее время задачи, связанные с существенным и дискретным спектрами операторных матриц, являются наиболее интенсивно изучаемыми в физике твердого тела, квантовой теории поля, статистической физике, магнитогидродинамике, квантовой механике и во многих других областях. Поэтому развитие исследований операторных матриц, соответствующих системе с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке, встречающееся в спектральной теории линейных ограниченных самосопряженных операторов, остается одной из актуальных проблем.

В настоящее время в мире проводится множество научных исследований по определению условий, при которых количество собственных значений операторных матриц бесконечно. В связи с этим особое внимание уделяется демонстрации структуры числовой области значений и квадратичной числовой области значений для обобщенной модели Фридрихса, определению структуры существенного спектра, нахождению условия конечности или бесконечности числа собственных значений вне существенного спектра операторной матрицы второго порядка.

В нашей стране большое внимание уделяется исследованиям по выявлению свойств операторных матриц, соответствующих к системам с не более чем двух и не более чем трех частиц. В результате исследований были достигнуты значимые результаты в определении существенного и дискретного спектров, количества собственных значений и нахождении асимптотики дискретного спектра операторных матриц. Постановлением Кабинета Министров обозначены «Основные задачи и направления деятельности научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математики, физики, прикладной математики»[2]. В связи с этим большое научное значение имеет развитие спектральной теории линейных операторов, позволяющей описать структуру существенного спектра а также определение условий конечности или бесконечности дискретного спектра операторной матрицы второго порядка.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, № УП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

17 февраля 2017 года, № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Фундаментальный вклад в спектральную теорию операторных матриц внесли исследования К. Треттера, Х. Лангера, А. Джериби, Г. Шпона, Р. Менникена, Р. Нагеля, А.С. Маркуса, Р.А. Минлоса, А.А. Шкаликова, С.Н. Лакаева, А.Ю. Константинова, А.К. Мотовилова и других ученых.

В настоящее время дискретный спектр операторных матриц относится к наиболее интенсивно изучаемым объектам в теории линейных операторов. Одним из важных вопросов в спектральном анализе таких операторов является изучение бесконечного числа собственных значений, лежащих левее нижнего края и правее верхнего края существенного спектра. Такой эффект, касающийся нижнего края, называется эффектом Ефимова. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе Д.Р. Яфаева. Затем Ю.Н. Овчинников, И.М. Сигал, Х. Тамура, А.В. Соболев и другие ученые изучали существование эффекта Ефимова для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера.

В моделях физики твердого тела и решетчатой теории поля возникают так называемые дискретные оператора Шредингера, являющиеся решетчатым аналогом обычного трехчастичного оператора Шредингера в непрерывном пространстве. В работах С.Н. Лакаева впервые доказано (на математическом уровне строгости) существование эффекта Ефимова для гамильтониана системы трех произвольных и одинаковых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Метод был основан на аналитических свойствах определителей Фредгольма и на свойствах интегральных уравнений Фаддеева.

В работах С.Н. Лакаева, С. Альбеверио, Ж.И. Абдуллаева и З.Э. Муминова для числа собственных значений $N(0,z)$ дискретного трехчастичного оператора Шредингера, лежащих левее $z,\ z<0$ получена асимптотика

$$\lim_{z\nearrow 0} N(0,z)\,|\ln|z||^{-1} = U_0 \qquad (0<U_0<\infty), \tag{1}$$

где U_0 не зависит от потенциалов взаимодействий, а зависит только от масс трех частиц. Установлена также асимптотика

$$\lim_{K\to 0} N(K,0)|\ln|K||^{-1} = 2U_0$$

для числа отрицательных собственных значений $N(K,0)$, что характерно только для решетчатых систем и не имеет аналога в непрерывном случае.

В работе М.Э. Муминова доказано существование бесконечного числа собственных значений на лакуне существенного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке.

В работе Ю.Х. Эшкабилова изучено существование эффекта Ефимова для одного модельного дискретного «трехчастичного» оператора Шрёдингера, возникающего в модели Хаббарда. При этом использованы инструменты принципа минимакса для ограниченных самосопряженных операторов и свойства положительных интегральных операторов.

Отметим, что в упомянутых работах изучено наличие эффекта Ефимова для системы с сохраняющимся ограниченным числом частиц.

В работах С.Н. Лакаева, С. Альбеверио, Т.Х. Расулова установлено существование эффекта Ефимова для операторных матриц, соответствующих с не более тремя несохраняющимся частицами, если соответствующая обобщенная модель Фридрихса имеет виртуальный уровень на дне существенного спектра. Получена аналогичная к (1) асимптотика дискретного спектра.

В работах М.Э. Муминова и Т.Х. Расулова для операторных матриц найдены условия, гарантирующие существование бесконечного числа собственных значений, лежащих внутри существенного спектра (на лакуне существенного спектра, ниже существенного спектра).

Настоящая диссертация посвящена исследованию ранее не изученного эффекта - так называемого *двустороннего эффекта Ефимова* для операторных матриц.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствие с планом научного исследования научного направления М.01.2017 «Спектральная теория линейных операторов» Бухарского государственного университета на 2017-2021 гг.

Целью исследования является определение местонахождения существенного спектра операторной матрицы второго порядка, связанной с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на целочисленной решетке, а также найти условие конечности или бесконечности дискретного спектра этого оператора.

Задачи исследования, решаемые в данной диссертации, следующие:

установление конечности или бесконечности числа собственных значений класса самосопряженных, вообще говоря неограниченных операторных матриц второго порядка, в прямой сумме двух произвольных сепарабельных гильбертовых пространств, а также получение асимптотики дискретного спектра;

определение структуры числовой области значений обобщенной модели Фридрихса, а также получит оценки для границ компонентов ее квадратичной числовой области значений;

описание местоположения и структуры двухчастичной и трехчастичной ветвей существенного спектра одной операторной матрицы второго порядка;

нахождение критического значения параметра взаимодействия, при котором операторная матрица второго порядка имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к нижней и верхней граням существенного спектра, одновременно.

Объект исследования – класс самосопряженных неограниченных операторных матриц второго порядка, а также операторная матрица второго порядка, связанная с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке и семейство обобщенных моделей Фридрихса.

Предмет исследования – анализ дискретного спектра одного класса самосопряженных неограниченных операторных матриц второго порядка. Спектральный анализ операторных матриц второго порядка, ассоциированных с системой, состоящей из не более чем n $(n=2,3)$ частиц, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, функционального анализа, спектральной теории самосопряженных операторов и математической физики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

определена структура числовой области значений обобщенной модели Фридрихса, имеющая вид операторных матриц второго порядка, а также найдены условия совпадения спектра и числовой области значений;

получены оценки для границы компонент квадратичной числовой области значений обобщенной модели Фридрихса;

с помощью спектра семейства обобщенных моделей Фридрихса определен существенный спектр операторной матрицы второго порядка, связанной с системы с несохраняющимся и не более чем тремя частицами;

выделены множества спектрального параметра, для которых операторная матрица второго порядка имеет конечное или бесконечное число собственных значений вне существенного спектра. Более того, доказана что, если спектральный параметр равно 6, то операторная матрица второго порядка имеет бесконечное число собственных значений как слева, так и справа существенного спектра.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

доказано существование «двустороннего эффекта Ефимова» для операторных матриц второго порядка, связанные с гамильтонианами систем с не более чем тремя частицами на целочисленной решетке;

результаты, полученные для числовой области значений и квадратичной числовой области значений обобщенной модели Фридрихса, могут быть использованы для определения местоположения собственных значений решетчатых моделей в физике твердого тела и квантовой механике.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов математического анализа, функционального анализа, математической физики, спектральной теории самосопряженных операторов и теории функций комплексного переменного.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость полученных результатов выражается в том, что они могут быть использованы для дальнейшего развития спектральной теории самосопряженных операторов, которые возникают в задачах квантовой теории поля, физики твердого тела, статистической физики, в частности, при решении задач, связанных со спектром операторных матриц второго порядка.

Практическая значимость полученных результатов выражается в том, что с помощью количества собственных значений операторных матриц можно определить число значений моделей, соответствующих системам с несохраняющимся и не более чем тремя частицами в физики твердого тела и квантовой механики.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

теоретические научные результаты, связанные с оценками, полученными для границы компонент квадратичной числовой области значений а также числовой области значений обобщенной модели Фридрихса использованы в исследованиях гранта № AP05131268 «Разработка методов решения классических и неклассических краевых задач для эллиптических уравнений и их дробных аналогов» (справка от 1 февраля 2021 года, Международный казахско-турецкий университет имена Ходжи Ахмеда Ясави). Свойства числовой области значений и квадратичной числовой области значений обобщенной модели Фридрихса позволило исследовать границы спектра эллиптических операторов;

результаты полученные для существенного спектра операторной матриц второго порядка, и условия существование бесконечное число собственных значений вне существенного спектра использованы в исследованиях гранта ОТ-Ф4-69 «Гармонический анализ, степенная геометрия и ее приложения к задачам математической физики» (Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, справка от 13 октября 2020 года №89-03-3898). Применение этих научных результатов дало возможность доказать существование бесконечного число собственных значений, лежащих как левее существенного спектра операторной матрицы второго порядка, так и правее.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на 10 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 4 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ из них 8-в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание степени доктора философии, в том числе 5 статей опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации 115 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется «**Исследование дискретного спектра одного класса самосопряженных неограниченных $2\times 2-$операторных матриц**». В этой главе изучается дискретный спектр одного класса неограниченных самосопряженных операторов, допускающие вида $2\times 2-$операторных матриц.

В первом параграфе первой главы даны предварительные сведения и известные факты.

Пусть дано разложение $H = H_1 \oplus H_2$ и $\mathcal{A} \in L(H)$, где H_1 и H_2-гильбертовы пространства, а $L(H)$ пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор $\mathcal{A}$ всегда записывается в виде $2\times 2-$операторной матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

с линейными ограниченными операторами $A_{ij} : H_j \to H_i$, $i, j = 1,2$. Для неограниченного линейного оператора $\mathcal{A}$ в H, его область определения $D(\mathcal{A})$ необязательно должна быть разложимой как прямая сумма $D_1 \oplus D_2$ подпространств $D_1 \subset H_1$, $D_2 \subset H_2$ и следовательно, утверждение о том, что оператор $\mathcal{A}$ имеет представление (2) является дополнительным предположением. В этом случае

$$D(\mathcal{A}) = (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22})).$$

Во втором параграфе исследован дискретный спектр одного класса самосопряженных неограниченных $2\times 2-$операторных матриц вида $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{V}$, действующих в прямой сумме двух гильбертовых пространств.

Пусть H_1, H_2 – два сепарабельных гильбертовых пространства.

Рассмотрим класс 2×2 – операторных матриц $\mathcal{A}$ вида (2) в прямой сумме $H = H_1 \oplus H_2$ со следующими условиями: $A_{11} : H_1 \to H_1$-линейный ограниченный самосопряженный оператор, $A_{12} : H_2 \to H_1$ – линейный ограниченный оператор, $A_{21} = A_{12}^*$, и $A_{22} : H_2 \supset D(A_{22}) \to H_2$ – линейный вообще говоря неограниченный самосопряженный оператор. Тогда оператор $\mathcal{A}$ является линейным самосопряженным оператором в пространстве H с областью определения $D(\mathcal{A}) = H_1 \oplus D(A_{22})$.

Введем в H операторные матрицы

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{V} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^*$ и $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$ такие, что $D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{A})$ и $D(\mathcal{V}) = H$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ записывается как $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{V}$.

Рассмотрим случай, когда разность резольвент в некоторой точке (следовательно, при всех) $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$ конечномерна:

$$\mathcal{T}(z) := (\mathcal{A} - zI)^{-1} - (\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}, \; rank\, \mathcal{T}(z) = \dim R(\mathcal{T}(z)) = r < \infty, \qquad (3)$$

где I – единичный оператор в H. Тогда (даже если $\mathcal{T}(z)$ только компактно) в силу аналитической теоремы Фредгольма имеет место равенство $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(\mathcal{A}_0)$. При этом оператор $\mathcal{A}$ также имеет ограниченный существенный спектр.

Обозначим через $N_{(a;b)}(\mathcal{A})$ число собственных значений оператора $\mathcal{A}$, с учетом кратности, лежащих в $(a;b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$.

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ удовлетворяют условию* (3) *и предположим, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ имеет следующий вид:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) \setminus \{\infty\} = \bigcup_{n=1}^{m} [a_{2n-1}; a_{2n}],$$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_{2m}$ *и* $m < \infty$. *Пусть a_0 и a_{2m+1} – фиксированные вещественные числа, для которых справедливы условия $a_0 < a_1$ и $a_{2m+1} > a_{2m}$. Тогда для любых $n = 0,\ldots,m$ имеем*

$$N_{(a_{2n};a_{2n+1})}(\mathcal{A}) = \infty \Leftrightarrow N_{(a_{2n};a_{2n+1})}(\mathcal{A}_0) = \infty.$$

Если $N_{(a_{2n};a_{2n+1})}(\mathcal{A}) = \infty$, то по крайней мере одна из точек a_{2n}, a_{2n+1} (*кроме точек a_0 и a_{2m+1}*) *является точкой накопления собственных значений и*

$$\lim_{z \searrow a_{2n}} \frac{N_{(z;a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A})}{N_{(z;a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}_0)} = 1 \ (\textit{если } a_{2n} \textit{ есть точка накопления})$$

$$\lim_{z \nearrow a_{2n+1}} \frac{N_{(a_{2n}+\delta_n;z)}(\mathcal{A})}{N_{(a_{2n}+\delta_n;z)}(\mathcal{A}_0)} = 1 \ (\textit{если } a_{2n+1} \textit{ есть точка накопления})$$

где $0 < \delta_n < a_{2n+1} - a_{2n}$.

В третьем параграфе первой главы построено одно семейство неограниченных $2\times 2-$операторных матриц $\mathcal{A}_t$, $t\in\mathbb{R}$ с существенным спектром состоящим из объединения двух непересекающихся полуоси. Показано, что оператор $\mathcal{A}_0$ имеет бесконечное число собственных значений на лакуне существенного спектра. А также для каждого фиксированного $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор $\mathcal{A}_{t_0}$ имеет конечное число собственных значений на лакуне существенного спектра и имеет бесконечное число собственных значений внутри существенного спектра. Кроме того, существует число $\delta > 0$ такое, что при всех $|t| \geq \delta$ оператор $\mathcal{A}_t$ не имеет собственных значений на лакуне существенного спектра.

Во второй главе диссертации, названной «**Собственные значения и виртуальные уровни семейства обобщенных моделей Фридрихса**», рассматривается семейство обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k), k\in\mathbb{T}^3$, действующих в $\hat{H} := H_0 \oplus H_1$ ($H_0 := \mathbb{C}$, $H_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$) как

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $A_{ii}(k): H_i \to H_i, i=0,1, k\in\mathbb{T}^3$ и $A_{01}: H_1 \to H_0$, определяются по формулам

$$A_{00}(k) f_0 = w_0(k) f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt, \ \ (A_{11}(k) f_1)(p) = w_1(k,p) f_1(p).$$

Здесь $f_i \in H_i, i=0,1$; μ-вещественное положительное число, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot,\cdot)$ имеют вид

$$w_0(k) := \varepsilon(k) + \gamma, \quad w_1(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon((k+p)/2) + \varepsilon(p), \tag{4}$$

где функция (дисперсии) $\varepsilon(\cdot)$ задается выражением

$$\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3} (1-\cos k_i), k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{T}^3.$$

Положим: $\mathcal{A}_0(k) = \mathcal{A}_\mu(k)\big|_{\mu=0}$. Очевидно, что оператор возмущения $\mathcal{A}_\mu(k) - \mathcal{A}_0(k)$ оператора $\mathcal{A}_0(k)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из теорема Вейля о существенном спектре вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ не зависит от μ и имеет место равенство $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = [m(k); M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом: $m(k) := \min\limits_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p), \quad M(k) := \max\limits_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p).$

С целью изучения собственных значений оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$, при каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}^3$ определим регулярную функцию

$$I(k;z) := \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(k,t)-z}.$$

в области $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$.

Следует отметить, что функция

$$\Delta_\mu(k\,;z) := w_0(k) - z - \mu^2 I(k\,;z), \; z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$$

обычно называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с оператором $\mathcal{A}_\mu(k)$.

Простые вычисления показывают, что функция $w_1(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(\overline{0},\overline{0}) \in (\mathbb{T}^3)^2$ и невырожденный максимум в точке $(\overline{\pi},\overline{\pi}) \in (\mathbb{T}^3)^2$.

Более того,

$$\min_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p) = w_1(\overline{0},\overline{0}) = 0, \; \max_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p) = w_1(\overline{\pi},\overline{\pi}) = 18.$$

Из определения функции $w_0(\cdot)$ видно, что она также имеет единственный невырожденный минимум в точке $\overline{0} \in \mathbb{T}^3$ и невырожденный максимум в точке $\overline{\pi} \in \mathbb{T}^3$. Очевидно, что

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(\overline{0})) = [0;9\tfrac{3}{8}]; \; \sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(\overline{0})) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [0;9\tfrac{3}{8}] : \Delta_\mu(\overline{0}\,;z) = 0\};$$

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})) = [8\tfrac{5}{8};18]; \; \sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [8\tfrac{5}{8};18] : \Delta_\mu(\overline{\pi}\,;z) = 0\}.$$

Следовательно,

$$\min_{k\in\mathbb{T}^3} \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = 0, \qquad \min_{k\in\mathbb{T}^3} \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = 18.$$

Второй параграф посвящен изучению собственных значений и виртуальных уровней операторов $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ и $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$. Изучены условия существования изолированных собственных значений операторов $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})$ и $\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi})$ относительно спектрального параметра $\gamma \in \mathbb{R}$ и параметра взаимодействия $\mu > 0$.

Введем обозначения

$$\hat{\mu}_l^0(\gamma) := \sqrt{\gamma}\,(I(\overline{0};0))^{-1/2} \text{ для } \gamma > 0;$$

$$\hat{\mu}_r^0(\gamma) := \sqrt{12-\gamma}\,(I(\overline{0};0))^{-1/2} \text{ для } \gamma < 12.$$

Через $C(\mathbb{T}^3)$ и $L_1(\mathbb{T}^3)$ обозначим банаховы пространства непрерывных и интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, соответственно.

Определение 1. *Пусть* $\gamma \neq 0$. *Говорят, что оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=0$ (*или резонанс с нулевой энергией*), *если число* $\lambda=1$ *является собственным значением интегрального оператора*

$$(G_\mu\psi)(q)=\frac{\mu^2}{\gamma}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\psi(t)dt}{\varepsilon(t/2)+\varepsilon(t)}, \qquad \psi\in C(\mathbb{T}^3).$$

Определение 2. *Пусть* $\gamma \neq 12$. *Говорят, что оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=18$, *если число* $\lambda=1$ *является собственным значением интегрального оператора*

$$(G'_\mu\varphi)(q)=\frac{\mu^2}{\gamma-12}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi(t)dt}{\varepsilon((\bar{\pi}+t)/2)+\varepsilon(t)-12}, \qquad \varphi\in C(\mathbb{T}^3).$$

Следующая теорема описывает условия существования отрицательного собственного значения и виртуального уровня для $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$.

Теорема 2. 1) *Если* $\gamma\le 0$, *то для любого* $\mu>0$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет единственное отрицательное собственное значение.*

2) *Если* $\gamma>0$, *справедливы следующие утверждения*:

2.1) *для любого* $\mu\in(0;\hat{\mu}_l^0(\gamma))$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *не имеет отрицательных собственных значений*;

2.2) *если* $\mu=\hat{\mu}_l^0(\gamma)$, *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=0$;

2.3) *для любого* $\mu>\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет единственное отрицательное собственное значение.*

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 3. 1) *Если* $\gamma\ge 12$, *то для любого* $\mu>0$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет единственное собственное значение, лежащее в* $(18;+\infty)$.

2) *Если* $\gamma<12$, *справедливы следующие утверждения*:

2.1) *для любого* $\mu\in(0;\hat{\mu}_r^0(\gamma))$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *не имеет собственных значений, больших* 18;

2.2) *если* $\mu=\hat{\mu}_r^0(\gamma)$, *то оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=18$;

2.3) *для любого* $\mu=\hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет единственное собственное значение, лежащее в* $(18;+\infty)$.

Так как $\hat{\mu}_l^0(6)=\hat{\mu}_r^0(6)$, полагая $\hat{\mu}_0:=\hat{\mu}_l^0(6)=\hat{\mu}_r^0(6)$, из теорем 2 и 3 получим

Следствие 1. 1) *Если* $\gamma\in(0;6)$, *то для* $\mu=\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=0$ *и оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *не имеет* *собственных значений, больших* 18;

2) *если* $\gamma = 6$, *то для* $\mu = \hat{\mu}_0$ *операторы* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *и* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеют виртуальные уровни в точках* $z = 0$ *и* $z = 18$, *соответственно;*

3) *если* $\gamma \in (6;12)$, *то для* $\mu = \hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет единственное отрицательное собственное значение и оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет виртуальный уровень в точке* 18.

В третьем параграфе главы 2 исследована числовая область значений обобщенной модели Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k_0)$ в случае совпадающих экстремумов. Описана структура числовой области значений оператора $\mathcal{A}_\mu(k_0)$. Найдены условия, гарантирующие совпадаемость спектра с числовой областью значений. При этом использован метод пороговых явлений.

Пусть $H-$комплексное гильбертово пространство и $\mathcal{A}: H \to H$, линейный оператор с областью определения $D(\mathcal{A}) \subset H$.

Числовая область значений $W(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ есть множество всех комплексных чисел $(\mathcal{A}x, x)$, где x пробегает все $D(\mathcal{A})$, $\|x\| = 1$.

Чтобы получить более наглядные результаты, в гильбертовом пространстве $\hat{H} := H_0 \oplus H_1$ ($H_0 := \mathbb{C}, H_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$) рассмотрим $2 \times 2-$ операторную матрицу $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ вида

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu = \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

и выберем матричные элементы $A_{ij}: H_j \to H_i$, $i \le j$, $i, j = 0,1$ следующим образом:

$$A_{00} f_0 = w f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(s) f_1(s) ds, \quad (A_{11} f_1)(p) = u(p) f_1(p).$$

Здесь $f_i \in H_i$, $i = 0,1$; $w, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ и $u(\cdot)$, $v(\cdot)-$вещественно-аналитические функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Следует отметить, что если положим $v(t) \equiv 1$ и $\mathrm{d} = 3$, то при каждом фиксированном $k_0 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $\mathcal{A}_\mu(k_0)$, изученный в параграфах 2.1-2.2, имеет форму (5). Пусть, $\mathrm{d} = 3$ и $m = \min_{p \in \mathbb{T}^3} u(p)$, $M = \max_{p \in \mathbb{T}^3} u(p)$.

Теорема 4. *Верны следующие утверждения:*

1) *если числа* m *и* M *являются «пороговыми» собственными значениями оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M]$;

2) *если число* $z = m$ *является «пороговым» собственным значением оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *и этот оператор также имеет виртуальный уровень в точке* $z = M$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M)$;

3) *если оператор* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=m$ *и число* $z=M$ *является «пороговым» собственным значением оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=(m;M]$;

4) *если оператор* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет виртуальные уровни в точках* $z=m$ *и* $z=M$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=(m;M)$.

В четвертом параграфе главы 2 приведена формула для вычисления квадратичной числовой области значений обобщенной модели Фридрихса $\hat{\mathcal{A}}_\mu$. А также получена оценка для границы квадратичной числовой области значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ и использована при определении более точного множества, в котором заведомо лежит собственное значение оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$.

Для формулировки основных результатов данного параграфа введем следующие обозначения:

$$\Lambda_\mu^- := \bigcup_{\|f_1\|=1}\left\{\min\{w,(uf_1,f_1)\}-\mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right)\right\};$$

$$\Lambda_\mu^+ := \bigcup_{\|f_1\|=1}\left\{\max\{w,(uf_1,f_1)\}+\mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|v,f_1|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right)\right\}.$$

Положим

$$\delta_{\mu,v}^- := \mu\|v\|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\|v\|}{|w-m|}\right),\quad \delta_{\mu,v}^+ := \mu\|v\|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\|v\|}{|M-w|}\right).$$

Лемма 1. *Для квадратичной числовой области значений оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет место равенство* $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=\Lambda_\mu^-\cup\Lambda_\mu^+$.

Теорема 5. *Пусть* $\mu>0-$ *произвольное число.*

1) *Если* $w>M$, *то* $\Lambda_\mu^-\cap\Lambda_\mu^+=\varnothing$ *и выполняется соотношение*

$$\sup\Lambda_\mu^-\le M<w\le\inf\Lambda_\mu^+;$$

2) *если* $w<m$, *то* $\Lambda_\mu^-\cap\Lambda_\mu^+=\varnothing$ *и выполняется соотношение*

$$\sup\Lambda_\mu^-\le w<m\le\inf\Lambda_\mu^+;$$

3) *если* $m\le w\le M$, *то для границы множества* $\Lambda_\mu^\pm$ *имеют место следующие оценки:*

$$m-\delta_{\mu,v}^-\le\inf\Lambda_\mu^-\le m,\ \sup\Lambda_\mu^-\le w;\ \ \inf\Lambda_\mu^+\ge m,\ M\le\sup\Lambda_\mu^+\le M+\delta_{\mu,v}^+.$$

Третья глава диссертации называется «**Спектр одной** $2\times2-$ **операторной матрицы. Асимптотика дискретного спектра**». В этой главе рассматривается $2\times2-$операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$, действующая в гильбертовом пространстве $H:=H_1\oplus H_2$ ($H_1:=L_2(\mathbb{T}^3)$ и $H_2:=L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$) вида

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $A_{ij}: H_j \to H_i, i \le j, i, j = 1,2$ определяются по формулам

$$(A_{11} f_1)(k) = w_0(k) f_1(k), \quad (A_{12} f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k,s) ds,$$

$$(A_{22} f_2)(k,p) = w_1(k,p) f_2(k,p), \quad f_i \in H_i, \quad i = 1,2.$$

Здесь $\mu > 0$ – параметр взаимодействия, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot;\cdot)$ имеют вид (4).

Во втором параграфе главы 3 описано местоположение существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ с помощью спектров семейства обобщенной модели Фридрихса, т.е. выделены двухчастичная и трехчастичная ветвей существенного спектра. Кроме того, определено месторасположение ветви существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Введем обозначения:

$$\Lambda_\mu := \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \sigma_{disc}(\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)), \quad \Sigma_\mu := [0;18] \cup \Lambda_\mu.$$

Теорема 6. *Для существенного спектра операторной матрицы* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет место равенство* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = \Sigma_\mu$. *Более того, множество* Σ_μ *представляет собой объединение не более трех отрезков.*

Пусть $\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{2}\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ и $\mu_r^0(\gamma) := \sqrt{2}\hat{\mu}_r^0(\gamma)$.

Введем следующие обозначения:

$$E_\mu^{(1)} := \min\left\{\Lambda_\mu \cap (-\infty;0]\right\}; \quad E_\mu^{(2)} := \max\left\{\Lambda_\mu \cap (-\infty;0]\right\};$$

$$E_\mu^{(3)} := \min\left\{\Lambda_\mu \cap [18;\infty)\right\}; \quad E_\mu^{(4)} := \max\left\{\Lambda_\mu \cap [18;\infty)\right\}.$$

Из непрерывности функций $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;0)$ и $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;18)$ на компактном множестве $\mathbb{T}^3$ следует, что существуют точки $k_0, k_1 \in \mathbb{T}^3$ такие, что верны следующие равенства:

$$\max_{k \in \mathbb{T}^3} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;0) = \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_0;0), \quad \min_{k \in \mathbb{T}^3} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;18) = \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_1;18).$$

Введем обозначения:

$$\gamma_0 := \left(12\frac{I(k_0;0)}{I(\bar{0};0)} - \varepsilon(k_0)\right)\left(1 + \frac{I(k_0;0)}{I(\bar{0};0)}\right)^{-1}, \quad \gamma_1 := \left(18 - \varepsilon(k_1)\right)\left(1 - \frac{I(k_1;18)}{I(\bar{0};0)}\right)^{-1}.$$

Приводимая ниже теорема описывает структуру существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, в зависимости от значения параметров $\mu > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Теорема 7. *Пусть* $\mu = \mu_r^0(\gamma)$ *при* $\gamma < 12$. *Тогда для существенного спектра операторной матрицы* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет место следующее соотношение:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)=\begin{cases}[E_\mu^{(1)};E_\mu^{(2)}]\cup[0;18], \textit{ если } \gamma<\gamma_0;\\ [E_\mu^{(1)};18], \qquad \textit{если } \gamma_0\le\gamma<6;\\ [0;18], \qquad \textit{если } 6\le\gamma<12.\end{cases}$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 7.

Теорема 8. *Пусть* $\mu=\mu_l^0(\gamma)$ *при* $\gamma>0$.

Имеет место следующее соотношение:

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)=\begin{cases}[0;18], \qquad \textit{если } 0<\gamma\le 6;\\ [0;E_\mu^{(4)}], \qquad \textit{если } 6<\gamma\le\gamma_1;\\ [0;18]\cup[E_\mu^{(3)};E_\mu^{(4)}], \textit{ если } \gamma>\gamma_1.\end{cases}$$

В третьем параграфе главы 3 найдено критическое значение μ_0 параметра взаимодействия μ, при котором оператор $\mathcal{A}_{\mu_0}$ одновременно имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к нижней (равной 0) и верхней (равной 18) граням существенного спектра. Более того, получена асимптотика дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$.

Теорема 9. 1) *Пусть либо* $\gamma\ge 12$ *и* $\mu>0$, *либо* $\mu\ne\mu_r^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma<12$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих правее* $E_\mu^{(4)}$.

2) *Пусть либо* $\gamma\le 0$ *и* $\mu>0$, *либо* $\mu\ne\mu_l^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma>0$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих левее* $E_\mu^{(1)}$.

Пусть $\mathbb{S}^2$ - единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ и

$$S_r: L_2((0,r),\sigma_0)\to L_2((0,r),\sigma_0), \quad r>0, \quad \sigma_0=L_2(\mathbb{S}^2)$$

интегральный оператор с ядром

$$S(t;y):=\frac{25}{8\pi^2\sqrt{6}}\frac{1}{5ch(y)+t}, \; y=x-x', \quad x,x'\in(0,r), \quad t=(\xi,\eta), \quad \xi,\eta\in\mathbb{S}^2.$$

Для $\lambda>0$, определим $U(\lambda)=\frac{1}{2}\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1}n(\lambda,S_r)$.

Существование последнего предела и доказательство факта $U(1)>0$ изложены в работе Соболева.

Теорема 10. 1) *При* $\mu=\mu_r^{(0)}(\gamma)$ *с условием* $\gamma<12$ *операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет бесконечное число собственных значений в промежутке* $(18;+\infty)$ *и накапливающихся к* $E_\mu^{(4)}=18$. *Кроме того,*

$$\lim_{z\searrow 18}\frac{N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_r^0(\gamma)})}{|\ln|z-18||}=U(1).$$

2) *При* $\mu = \mu_l^{(0)}(\gamma)$ *с условием* $\gamma > 0$ *операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет бесконечное число собственных значений в промежутке* $(-\infty;0)$ *и накапливающихся к* $E_\mu^{(1)} = 0$. *Кроме того,*

$$\lim_{z\nearrow 0} \frac{N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_{\mu_l^0(\gamma)})}{|\ln|z||} = U(1).$$

Из определения чисел $\mu_l^0(\gamma)$, $\mu_r^0(\gamma)$ и граничных точек $E^{(1)}_{\mu_l^0(\gamma)}$, $E^{(4)}_{\mu_r^0(\gamma)}$ следует, что $\mu_l^0(6) = \mu_r^0(6) = \mu_0$ и $E_{\mu_0}^{(1)} = 0$, $E_{\mu_0}^{(4)} = 18$. Учитывая эти факты получаем одно важное следствие теоремы 10.

Следствие 2. *Имеет место соотношения*

1) $N_{(-\infty;0)}(\mathcal{A}_{\mu_0}) = \infty$, $N_{(18;\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_0}) = \infty$;

2) $\lim\limits_{z\nearrow 0} \dfrac{N_{(-\infty;\,z)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z||} = \lim\limits_{z\searrow 18} \dfrac{N_{(z;\,\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z-18||} = U(1).$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению спектральных свойств двух классов самосопряженных неограниченных $2\times 2-$операторных матриц, семейства обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$ и $2\times 2-$операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, связанной с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$.

Основные результаты данной диссертации следующие:

1) Для класса самосопряженных неограниченных $2\times 2-$ операторных матриц вида $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{V}$ доказано, что если разность резольвент операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ имеет конечный ранг, и существенный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ состоит из объединения конечного числа отрезков, то оператор $\mathcal{A}$ имеет бесконечное число собственных значений на лакуне существенного спектра тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A}_0$ имеет бесконечное число собственных значений на этой лакуне;

2) Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы нижняя грань (верхняя грань) существенного спектра являлась виртуальным уровнем рассматриваемого оператора $\mathcal{A}_\mu(\overline{0})(\mathcal{A}_\mu(\overline{\pi}))$;

3) Подробно исследована структура замыкания числовой области значений $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ в терминах его матричных элементов при всех размерностях тора $\mathbb{T}^{\rm d}$. Выделены случаи, когда множество $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ замкнуто. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы спектр оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ совпадал с множеством $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$. Получены оценки для

границы компонент квадратичной числовой области значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$;

4) Описаны местоположение и структура существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ с помощью спектров обобщенной модели Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$;

5) Найдены критические значения $\mu_l^0(\gamma)$ и $\mu_r^0(\gamma)$ параметра взаимодействия μ, при которых оператор $\mathcal{A}_\mu$, $\mu \neq \mu_l^0(\gamma)$($\mu \neq \mu_r^0(\gamma)$) имеет конечное число собственных значений, лежащих левее (правее) существенного спектра;

6) При $\mu = \mu_l^0(\gamma)$ ($\mu = \mu_r^0(\gamma)$) доказана бесконечность числа собственных значений, лежащих левее (правее) существенного спектра;

7) В случае $\mu_0 := \mu_l^0(6) = \mu_r^0(6)$ показано, что оператор $\mathcal{A}_\mu$ одновременно имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к нижней (равной 0) и верхней (равной 18) граням существенного спектра. Более того, получена асимптотика для числа собственных значений, лежащих левее $z, z \leq 0$ и правее $z, z \geq 18$, оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$ по спектральному параметру $z \nearrow 0$ и $z \searrow 18$ соответственно.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 KARSHI STATE UNIVERSITY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

DILMURODOV ELYOR BAXTIYOROVICH

SPECTRAL PROPERTIES OF SECOND-ORDER OPERATOR MATRICES

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Karshi – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM327.

The dissertation was performed at the Bukhara State University.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website www.qarshidu.uz and the «ZiyoNet» Information and educational portal (http: www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Rasulov Tulkin Husenovich** Candidate of physical and mathematical sciences, docent
Official opponents:	**Rahmatullayev Muzaffar Muxammadjanovich** Doctor of physical and mathematical sciences (DSc)
	Khamrayev Akhror Yusupovich Candidate of physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «20» 05 2021 at 14^{00} at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225-34-13, fax: (+998 75) 221-00-56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Karshi State University, Faculty of Physics and Mathematics (room 102).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered № 43). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225-34-13).

Abstract of dissertation sent out on «08» 05 2021 year.
(Mailing report № 3 on «08» 05 2021 year).

B.A. Shoimkulov
Chairman of scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S., professor

A.A. Imomov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and mathematical sciences (DSc), docent

Yu.Kh. Eshkabilov
Chairman of Scientific seminar under scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the location of the essential spectrum and the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the $2\times 2-$operator matrix associated with the Hamiltonian of a system with at most three particles on an integer lattice, as well as to study the Efimov effect for this operator.

The object of the research work. The class of self-adjoint unbounded operator matrices of the second order, as well as the operator matrix of the second order associated with the Hamiltonian of a system with at most three particles on the lattice, and the family of generalized Friedrichs models.

The scientific novelty of the research work is as follows:

using the structure of the numerical range of the generalized Friedrichs model, which has the form of operator matrices of the second order, the conditions for the coincidence of the spectrum and the numerical range is determined;

estimates for the bounds of the components of the quadratic numerical range of the generalized Friedrichs model are obtained;

the essential spectrum of the second-order operator matrix associated with a system with non-conserved and at most three particles is determined by the spectrum of the family of generalized Friedrichs models;

sets of the spectral parameter for which the operator matrix of the second order has a finite or infinite number of eigenvalues outside the essential spectrum are distinguished. Moreover, it was proved that if the spectral parameter is equal to 6, then the operator matrix of the second order has an infinite number of eigenvalues both on the left and on the right of the essential spectrum.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research ere practiced in the following areas:

theoretical scientific results related to the estimates obtained for the boundaries of the components of the quadratic numerical range of values, as well as the numerical range of values of the generalized Friedrichs model, were used in the research of grant No. AR05131268 «Development of methods for solving classical and non-classical boundary value problems for elliptic equations and their fractional analogues» (Reference No. 04/148 from February 1, 2021, Khoja Ahmed Yasawi International Kazakh-Turkish University). The properties of the numerical range of values and the quadratically numerical range of values of the generalized Friedrichs model made it possible to study the boundaries of the spectrum of elliptic operators;

the results obtained for the essential spectrum of the second order operator matrix, and the existence conditions for an infinite number of eigenvalues outside the essential spectrum were used in the research of the grant OT-Ф4-69 «Harmonic analysis, power geometry and its applications to problems of mathematical physics» (Reference No. 89-03-3898 of the Ministry of Higher and Secondary Specialized education of the Republic of Uzbekistan dated October 13, 2020). The application of these scientific results made it possible to prove the existence of an infinite number of eigenvalues lying both to the left of the essential spectrum of the operator matrix and to the right;

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 115 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Бесконечность числа собственных значений $2\times 2-$операторных матриц. Асимптотика дискретного спектра // Теоретическая и математическая физика. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9898, 205:3 (2020). – С. 368-390. (Scopus, IF=1.3).

2. T.H.Rasulov, E.B.Dilmurodov. Eigenvalues and virtual levels of a family of 2×2 operator matrices // Methods of Functional Analysis and Topology. 25:3 (2019). – P. 273-281. (Scopus) (01.00.00; №04).

3. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Analysis of the spectrum of a 2×2 operator matrix // Discrete spectrum asymptotics. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. DOI: 10.17586/2220-8054-2020-11-2-138-144, 11:2 (2020). – P. 138-144. (Scopus) (01.00.00; №05).

4. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Threshold analysis for a family of 2×2 operator matrices // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. DOI: 10.17586/2220-8054-2019-10-6-616-622, 10:6 (2019). – P. 616-622. (Web of Science) (01.00.00; №05).

5. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Исследование числовой области значений одной операторной матрицы // Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. DOI: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1275, 35:2 (2014). – С. 50-63. (Web of Science).

6. E.B. Dilmurodov. New branches of the essential spectrum of a 2×2 operator matrix // Uzbek Mathematical Journal. 2 (2020), pp. 44-51 (01.00.00; №06).

7. Э.Б. Дилмуродов. О виртуальных уровнях одного семейства матричных операторов порядка 2 // Научный вестник БухГУ. 1 (2019). – С. 42-46 (01.00.00; №03).

8. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Оценки для квадратичной числовой области значений одной операторной матрицы // Узбекский математический журнал. 1 (2015). – С. 64-74 (01.00.00; №06).

II бўлим (Часть II; Part II)

9. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Estimates for the bounds of the essential spectrum of a 2×2 operator matrix // Contemporary Mathematics. 1:4 (2020). – P. 170-182.

10. E.B. Dilmurodov. Discrete eigenvalues of a 2×2 operator matrix // arXiv: 2011.0965v1, 19 Nov 2020, – 16 pages.

11. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. О мощности дискретного спектра одного семейства $2\times 2-$операторных матриц // Сборник тезисов Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2020». – Уфа, 11-14 ноября 2020 г. – С. 57-59.

12. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Пороговые эффекты в спектре одного семейства $2\times2-$операторных матриц // «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» тезисы докладов XV Международной научной конференции (Владикавказ, 15-20 июля 2019 г.). – С. 69-71.

13. Э.Б. Дилмуродов. Асимптотические разложения определителя Фредгольма для семейства $2\times2-$операторных матриц // «Комплексный анализ и теория аппроксимаций» сборник Международной конференции (г. Уфа, 29-31 мая 2019 г.). – С. 18-19.

14. E.B. Dilmurodov. Eigenvalues of a family of 2×2 operator matrices // Abstracts of Uzbek-Israel joint International conference «Science - Technology - Education - Mathematics – Medicine» (13-17 may 2019, Bukhara - Samarkand - Tashkent). – P. 39-40.

15. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Числовой образ и спектр обобщенной модели Фридрихса // Тезисы докладов Международной конференции «Прикладной и геометрической анализ». – Самарканд, 22-25 сентября, 2014 г. – С. 74.

16. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. The quadratic numerical range of a operator matrix // Abstracts of the International Conference on Problems of Modern Topology and Applications. – Tashkent, 2013. – P. 75-77.

17. E.B. Dilmurodov. Structure of the essential spectrum of a 2×2 operator matrix // Abstracts of the conference «Problems of Mathematics, physics and information technologies», Bukhara, 15 april, 2020 y. – P. 71-73.

18. Э.Б. Дилмуродов. Исследование существенного спектра одной $2\times2-$ операторной матрицы. Материалы республиканской научно-практической конференции «Проблемы фундаментальной математики и их приложения». – Навои, 25-мая, 2019 г. – С. 114-116.

19. Э.Б. Дилмуродов. Двумерная обобщенная модель Фридрихса и его числовая образ. Тезисы докладов конференции с участием зарубежных ученых «Жизнь и творчество академика Ташмухаммеда Ниязовича Кары-Ниязова». – Ташкент, 7-8 сентября 2017 г. – С. 57-59.

20. Э.Б. Дилмуродов. Числовой образ обобщенной модели Фридрихса: случай больших размерностей. Тезисы докладов конференции с участием зарубежных учёных «Проблемы современной топологии и её приложения». – Ташкент, 11-12 мая 2017 г. – С. 166-168.

Автореферат Қарши давлат университетининг “ҚарДУ хабарлари” илмий-назарий, услубий журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (04.05.2021 йил).

Гувоҳнома № 14-061

05.05.2021. Босишга рухсат этилди.
Офсет босма қоғози. Қоғоз бичими 60х84 1/16.
“Times New Roman” гарнитураси. Офсет босма усули.
Ҳисоб-нашриёт т. 3.2 Шартли б.т. 3,7.
Адади 80 нусха. Буюртма №.35.

Қарши давлат университети
кичик босмахонасида чоп этилди.