

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

**NAWAYÍ MÁMLEKETLIK KANSHILIK INSTITUTI
NÓKIS FILIALI**

«JOQARÍ MATEMATIKA» páninen

LEKTSIYA TEKSTLERI

Dúziwshi:

NavKI NF, «Tábiyy hám ulíwma
kásiplik pánler » kafedrası docenti;

Tleumuratov S.J.

NO`KIS 2021

MAZMUNI

	Kirisiw	3
1	Tiykarg`i tu`sinikler. Ko`plikler	4
2	Ekinshi ha`m u`shinshi ta`rtipli matritsalar, determinantlar	6
3	Joqari ta`rtipli matritsalar, determinantlar	8
4	Matritsalar u`stinde a`meller, keri matritsa	10
5	Siziqli ten`lemeler sistemasi	12
6	Siziqli ten`lemeler sistemasin sheshiw din` usillari: Matritsaliq, Gauss, Kramer	14
7	Joqari ta`rtipli ten`lemeler. Kardano formulasi. Ten`lemelerdi juwiq sheshiw	15
8	Tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasi	17
9	Vektor. Vektorlar u`stinde a`meller	20
10	Vektorlar sistemasi. Bazis	22
11	Vektorlardin` skalyar, vektorliq ha`m aralas ko`beymesi	23
12	Tegisliktegi tuwrilar	25
13	Tegisliktegi ekinshi ta`rtipli siziqlar	28
14	Ken`isliktegi noqat, tuwri ha`m tegislik	32
15	Ken`isliktegi ekinshi ta`rtipli betler	34
16	Bir o`zgeriwshinin` funktsiyasi	36
17	Sanli izbe-izlikler	39
18	Funktsiyanin` shegi haqqindag`i teoremlar	42
19	A`jayip shekler	44
20	Funktsiyalardin` u`ziliksizligi	45
21	Bir o`zgeriwshili funktsiyanin` differentsial esabi	47
22	Funktsiya differentsiali	50
23	Joqari ta`rtipli tuwindilar	52
24	Differentsiallaniwshi funktsiyalardin` qa`siyetleri	53
25	Teylor ha`m Makloren formulalari	56
26	Funktsiyalardi tuwindini paydalanip izertlew	58
	A`debiyatlar	61

Kirisiw

Joqari matematika pa`ni boyinsha bul lektsiyalar joqarg`i oqiw orinlarinin` studentlerine arnalg`an. Teoriyalıq materiallar Ózbekstan Respublikası Joqarı hám orta arnawlı bilimlendiriw ministrliginiń 2020 jıl 14-avgusttaǵı 418-sanlı buyırǵında tastıyqlanǵan “Joqarı matematika” p`anı baǵdarlaması tiykarında tayarlanǵan.

Lektsiyalar kursında 1-semestr boyinsha matematikanin` tiykarg`i bo`limlerinen mag`liwmatlar berilgen:

- Siziqli algebra elementleri.
- Analitikaliq geometriyanin` tiykarlari.
- Matematikaliq analizdin` tiykarg`i tu`sinikleri:
- bir argumenttin` funktsiyasi, izbe-izlik,
- shek ha`m differentsialliq esap,
- bir o`zgeriwshili funktsiyanin` integrallıq esabi,
- ko`p o`zgeriwshili funktsiyalar qarastirilg`an.

Lektsiya tekstlerinde tiykarg`i materiallar qisqartilip keltirilgen. Ha`r bir temadan keyin jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar keltirilgen.

1-lektsiya

Tiykarg`i tu`sinikler. Ko`plikler

Tiykarg`i tu`sinikler. Ko`plikler teoriyasi elementleri. Ko`plikler u`stinde a`meller. Sanaqli, sanaqsiz, shekli, sheksiz ko`plikler. Sanli ko`plikler: haqiqiy, kompleks sanlar. Kompleks sanlar u`stinde a`meller. Muavr, Eyler formulalari.

Haqiqiy sanlar

San matematikanin` tiykarg`i tu`siniklerinin` biri. Ol da`slepki tu`sinik bolip, uzaq tariyxiy rawajlaniw jolin basip o`tti. Zatlardin` sanaw za`ru`rliginen natural sanlar toplami payda boldi: $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Natural sanlar toplanima olarg`a qarama-qarsi sanlardi ha`m nol` sanin qosqannan keyin pu`kin sanlar ko`pligi alindi:

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Matematikanin` odan a`ri rawajlaniw barisinda ratsional sanlar $Q = \{p/q\}$, $p, q \in Z, q \neq 0$ ha`m irratsional (yag`niy ratsional bolmag`an) sanlar tu`sinigi kiritiledi. Ha`rqanday ratsional san shekli yamasa sheksiz periodli onliq bo`lshek tu`rinde, al irratsional sanlardi sheksiz periodli emes onliq bo`lshek tu`rinde jaziliwi mu`mkin.

Ratsional sanlar ha`m irratsional sanlar ko`pliklerinin` birikpesi haqiqiy sanlar dep ataladi ha`m ol ko`bine R ha`ribi menen belgilenedi.

Haqiqiy sanlardin` tiykarg`i qa`siyetleri:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \leq |x| + |y|, \quad |x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|, \quad |x/y| \leq |x|/|y|$$

Kompleks sanlar

$z = x + iy$ tu`rindegisi san kompleks san dep ataladi, bunda  $x$  ha`m u - haqiqiy sanlar, i - jorimal birlik dep ataladi ha`m  $i = \sqrt{-1}$  yamasa  $i^2 = -1$  ten`likleri menen aniqlanadi. Kompleks sanlar ko`pligi ko`bine S ha`ribi menen belgilenedi.  $x$  ha`m u sanlari z kompleks saninin` sa`ykes haqiqiy ha`m jorimal bo`lekleri dep ataladi: $\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y$. Eger $y = 0$ bolsa, onda z haqiqiy sang`a aynaladi. Demek, haqiqiy sanlar ko`pligi kompleks sanlar ko`pliginin` u`les ko`pligi ekenligi kelip shig`adi: $R \subset C$.

$z = x + iy$ ha`m  $\bar{z} = x - iy$  tu`rindegisi sanlar tu`yinles kompleks sanlar dep ataladi.

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sanlari ten`  $z_1 = z_2$  dep ataladi, eger  $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ ,  $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$  ten`likleri orinlansa. $z_1 = x + iy$, $z_2 = -x - iy$ kompleks sanlari qarama-qarsi sanlar dep ataladi.

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sani kompleks sannin` moduli (polyar radiusi);

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sannin` trigonometriyalik ko`rinishi dep ataladi, bunda φ mu`yeshi  $z$  kompleks sannin` argumenti $\varphi = \text{Arg}z$ dep ataladi. $\varphi = \arg z (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ argumentti bas ma`nisi delinedi.

$$z = x + iy = r[\cos\varphi + i\sin\varphi], \quad z_1 = x_1 + iy_1 = r_1[\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1], \quad z_2 = x_2 + iy_2 = r_2[\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2]$$

kompleks sanlari berilgen bolsin.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

Muavr formulasi: $z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Eyler formulasi: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Budan

$$\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/(2i), \quad \cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2.$$

Kompleks san logarifmi: $\ln z = \ln r + i\varphi_0 + 2k\pi i$: ,eulf φ_0 arqali φ argumenttin`  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$  ten`sizligin qanaatlandiratug`in ma`nisi alinadi. $\ln r + i\varphi_0$ an`latpasi logarifmnin` bas ma`nisi dep ataladi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ sanlarinin` qaysilari irratsional sanlar boladi ha`m ne ushin? Da`lillen`.
2. $i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}$ sanlari nege ten`?
3. $\sqrt{-16}, \sqrt[4]{-16}$ korenlerin esaplan`.
4. N, Z, Q, R, C sanli ko`plikleri arasindag`i baylanislardi atan`.
5. Barliq haqiqiy sanlar ko`pligi ha`m $(0; 1)$ intervalindag`i haqiqiy sanlar arasinda bir ma`nisli sa`ykeslik ornatin`: analitikaliq, grafikaliq.

2-lektsiya

Ekinshi ha`m u`shinshi ta`rtipli matritsalar, determinantlar

Algebra pa`ni. Matritsalar: ekinshi, u`shinshi, n-ta`rtipli, tuwri mu`yeshli, kvadrat, u`shmu`yeshli, bag`ana tu`rindegı matritsalar. Ekinshi, u`shinshi, n-ta`rtipli determinantlar (aniqlawshilar). Tiykarg`i qa`siyetleri.

k-qatar ha`m n bag`ana tu`rinde jaylastirilg`an kxn sannan ibarat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

tablitsa $k \times n$ o'lsheqli tuwri mu'yeshli matritsa dep ataladi. Bul tablitsadagi $a_{ij}, (i=1, \dots, k; j=1, \dots, n)$ sanlari (i -qatar ha'm j -bag'anada ornatilgan) elementlari dep ataladi. Bazibir jag'daylarda a'piwayiliq ushin matritsalar $A = (a_{ij}), (i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n})$ yamasa $A = \|a_{ij}\|, (i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n})$ belgilerinen de paydalanip jaziw mu'mkin. Eger $n=1$ bolsa, onda bag'ana matritsaga ha'm $k=1$ bolsa, onda sa'ykes qatar matritsaga iye bolamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} \text{ ha'm } A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}).$$

Qatarlar sani bag'analar sanina teng, yag'niy $k=n$ bolsa, onda ol matritsa n -ta'rtpili kvadrat matritsa dep ataladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

To'rt sannan ibarat tablitsa $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ekinshi ta'rtpili kvadrat matritsa dep ataladi;

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ sani ekinshi ta'rtpili determinant dep ataladi, bunda $a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12}$ -sanlari matritsanin' (determinantnin') elementlari dep ataladi; a_{ij} -elementi i -qatar menen j -bag'anada joylasqan element.

U'shinshi ta'rtpili kvadrat matritsa ha'm onin' determinanti 3×3 elementten turadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ ha'm } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$ sani u'shinshi ta'rtpili determinantnin' ma'nisi. Bunin' sxemaliq ko'rinishi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(+)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(-)

Determinantlardin` qa`siyetleri:

1. Determinanttin` qatarlarindag`i elementler menen bag`analarindag`i elementlerinin` orinlarin almastirg`anda onin` ma`nisi o`zgermeydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Determinanttin` eki parallel qatarlarindag`i elementlerdin` orinlarin almastirg`anda onin` belgisi qarama-qarsi belgige o`zgeredi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Determinanttin` eki qatarlarindag`i elementler birdey bolsa, onda onin` mna`isi nol`ge ten` boladi.

4. Determinanttin` bir qatarindag`i (bag`anasindag`i) elementlerdi qa`legen  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ) sang`a ko`beytiw, sol determinantti usi sang`a ko`beytkenge ten`:

$$\begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Determinant nollerden ibarat bag`anag`a (yamasa qatarg`a) iye bolsa, onda onin` ma`nisi nol`ge ten`. Bul 4-qa`siyetten $\lambda = 0$ bolg`anda kelip shig`adi.

6. Determinanttin` parallel eki qatari elementleri sa`ykes proporsional bolsa, onda determinant ma`nisi nolge ten`.

7. Determinanttin` bir bag`anasinin` (yamasa qatarinin`) ha`r bir elementi eki qosiliwshinin` qosindisinin ibarat bolsa, onda demerminant usi bag`anasi (yamasa qatari) boyinsha pariqlanatug`in eki determinant qosindisinin ibarat boladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Determinanttin` bir bag`anasinin` (yamasa qatarinin`) ha`r bir elementi basqa parallel bag`ananin` (yamasa qatardin`) elementlerine qa`legen uliwma ko`beytiwshige ko`beytilip qosilg`anda determinanttin` ma`nisi o`zgermeydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Barliq elementleri birdey san a - g`a ten` bolg`an determinant ( $n=1; 2; k$ ) ma`nisin esaplan`.
2. U`shinshi ta`rtipli determinantlardi esaplawdin` sxemaliq ko`rinishin jazin`.

3-lektsiya

Joqari ta`rtipli matritsalar, determinantlar

Minor. Determinant elementinin` algebraliq toliqtiriwshisi. N-ta`rtipli determinantti esaplaw usillari

Determinanttin` bazibir elementinin` minori dep determinanttan usi element turg`an qatar menen bag`anasinin` ushirasiwinan (olar alinip taslang`annan keyin) payda bolg`an determinantqa aytiladi. Determinanttin` a_{ik} elementinin` minori M_{ik} , ($i, k = 1, 2, 3$) arqali belgilenedi.

Misali, u`shinshi ta`rtipli determinanttin`  $a_{11}$  elementinin` minori $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ sani, a_{32} elementinin` minori  $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$  sani, ha`m t.b.

Determinanttin`  $a_{ik}$ -elementi indeksleri qosindisinin` $i+k$ jup yamasa taq san boliwina qarata sa`ykes bul element jup yamasa taq orinda jaylasqan delinedi. Misali,  $a_{11}$  ushin  $1+1=2$ , demek ol jup orinda jaylasqan, al  $a_{32}$  ushin  $3+2=5$  bolg`anliqtan taq orinda jaylasqan dep ataladi.

Determinanttin` bazibir elementinin` algebraliq toliqtiriwshisi dep onin` bul determinantta jup yamasa taq orinda jaylasqanina baylanisli on` yamasa teris belgi menen

aling`an minorg`a aytiladi. a_{ik} elementinin` algebraliq toliqtiriwshisi  $A_{ik}$  tu`rinde belgilenedi ha`m $A_{ik} = (-1)^{i+k} \times M_{ik}$ formulasi menen esaplanadi.

Algebraliq toliqtiriwshi qa`siyetleri:

1. Determinanttın` bazibir qatari (yamasa bag`anasi) elementleri menen olardin` algebraliq toliqtiriwshilarinin` ko`beymelerinin` qosindilari ten`.

Misali, u`shinshi ta`rtipli determinantlar ushin,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Determinanttın` bul formula boyinsha jaziliwi onin` qatarlar yamasa bag`analar boyinsha jayilmasi dep ataladi.

2. Determinanttın` bazibir qatari (yamasa bag`anasi) elementleri menen parallel` qatari (yamasa bag`ana) elementlerinin` algebraliq toliqtiriwshilarinin` ko`beymelerinin` qosindilari nol`ge ten`.

Misali, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$. Haqiqatinda da

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

n-ta`rtipli (kvadrat) matritsa dep nxn sannan ibarat to`mendegi tablitsag`a aytiladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sa`ykes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sani sol matritsanin` n-ta`rtipli determinanti dep ataladi.

n-ta`rtipli determinanti ushin joqarida determinantlar qa`siyetlerinin` barlig`i orinli. Ko`bineze n-ta`rtipli determinantlardi esaplaw ushin determinantti bazibir qatar boyinsha jayiw formulasi paydalaniladi:

Misali, bazibir to`rtinshi ta`rtipli determinantti onin` ekinshi qatari boyinsha jayip  $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$  tu`rinde esaplaw mu`mkın.

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. Minor ha'm algebraliq toliqtiriwshinin` arasindag`i baylanis.
2. U`shinshi ta`rtipli determinantti ekinshi qatari elementleri menen olardin` algebraliq toliqtiriwshilari arqali esaplaw formulasin jazin`.

4-lektsiya

Matritsalar u`stinde a`meller, keri matritsa

Matritsalar u`stinde a`meller. Diagonal, birlik, nollik matritsalar. Keri matritsa ha'm oni tabiw usillari. Matritsanin` rangi.

Ha`r bir  $n$ -ta`rtipli A kvadrat matritsa ushin usi matritsanin` elementlerinen du`zilgen n -ta`rtipli determinantti esaplaw mu`mkin. Bul determinantti $\det A$ yamasa $|A|$ arqali belgileydi.

Eger $\Delta = \det A \neq 0$ bolsa, onda A kvadrat matritsasi menshiksiz yamasa ayiriqsha emes matritsa dep ataladi. Eger $\Delta = \det A = 0$ bolsa, onda A kvadrat matritsasi menshikli yamasa ayiriqsha matritsa dep ataladi.

Kvadrat matritsanin`  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  elementleri jaylasqan diagonal bas diagonal dep, al  $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$  elementleri jaylasqan diagonal ja`rdemshi diagonal dep ataladi. Bas diagonalda turmag`an barliq elementleri o`ge ten` bolg`an kvadrat matritsa diagonal matritsa dep ataladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bunda $\Delta = \det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Eger bas diagonaldin` barliq elementleri  $a \neq 0$  sanina ten` bolsa, onda ol skalyar matritsa dep ataladi ha'm $\Delta = \det A = a^n$ boladi. Bas diagonaldin` barliq elementleri 1 ge ten` bolsa, onda ol birlik matritsa dep, al barliq elementleri nol`ge ten` bolg`an matritsa nollik matritsa dep ataladi:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ha'm $\Delta = \det E = 1$, $\Delta = \det Q = 0$ boladi.

A matritsasinin` barliq qatarlarin sa`ykes bag`analari menen almastirg`anda payda bolg`an  $A^*$  matritsasi  $A$  matritsasina qarata transponirlengen matritsa dep ataladi. Dara jag`dayda, qatar-matritsani transponirlew na`tiyjesinde bag`ana-matritsa kelip shig`adi. Eger A

kvadrat matritsa bolsa, onda $\det A = \det A^*$ ten`ligi orinli. Eger  $A = A^*$  sha`rti orinlansa, onda A kvadrat matritsasi simmetriyali matritsa dep ataladi.

Meyli eki $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ birdey o`lshemdegi matritsalar berilgen bolsin. Eger barliq  $i$  ha`m j indeksleri ushin $a_{ij} = b_{ij}$ ten`ligi orinlansa, onda ol matritsalar ten` matritsalar dep ataladi. Matritsalar qosiw, sang`a ko`beytiw ha`m olardi bir-birine ko`beytiw mu`mkin:

$$1. S = A + B \text{ qosindisi elementleri } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, n}).$$

$$2. C = \lambda A (\lambda \neq 0) \text{ matritsanin` sang`a ko`beymesi elementleri } c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

3. $m \times k$ o`lshemli A matritsasi menen  $k \times n$  o`lshemli V matritsasinin` ko`beymesi $S = AV$ elementleri $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$ formulasi boyinsha tabiladi. Bunda birinshi matritsanin` bag`analar sani ekinshi matritsanin` qatarlar sanina ten` boliwi za`ru`r. Sonliqtan ba`rqulla AV nin` mag`anag`a iye boliwinan VA nin` da mag`anag`a iye bolatug`inlig`i kelip shiqpaydi. Uliwma jag`dayda $AB \neq BA$.

Matritsalar qosiw ha`m ko`beytiw qa`siyetleri:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A; & (A + B) + C &= A + (B + C); & A + Q &= Q + A = A; & \mu(\lambda A) &= \lambda(\mu A); \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B; & (\lambda + \mu)A &= \lambda A + \mu A; & AB &= BA; & (A + B)C &= AC + BC; & (\lambda A)B &= \lambda(AB); \\ AE &= EA = A; & AQ &= QA = Q; & (AB)^* &= B^* A^*; & \det(AB) &= \det A \cdot \det B; \end{aligned}$$

$AB = BA = E$ ten`ligin qanaatlandiratug`in V matritsasi A matritsasi ushin keru matritsa dep ataladi ha`m A^{-1} belgisi menen belgilenedi. Keru matritsani tabiw izbe-izligi:

$$1) \Delta = \det A \text{ esaplanadi};$$

2) Eger $\Delta \neq 0$, onda $\det A$ nin` barliq elementleri ushin algebralik toliqtiriwshilar esaplanadi ha`m onin` qatarlari menen sa`ykes bag`analarinin` orini almastirilip A^T matritsasi du`ziledi;

$$3) A^T \text{ matritsasinin` barliq elementleri } \Delta = \det A \text{ sanina bo`linedi}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^T.$$

Keru matritsanin` qa`siyetleri:

$$1) \det A^{-1} = \frac{1}{\det A};$$

$$2) (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Matritsanin` k qatari menen k dana bag`anasinin` kesilispesi arqali payda etilgen kvadrat matritsa onin` k-ta`rtipli minori dep ataladi. Nolden parqli minorlardin` en` u`lken r ta`rtibi sol matritsanin` rangi dep ataladi: $\text{rang} A = r$. Nollik emes matritsanin` rangi 1 den kishi bolmaydi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Elementleri -1 ge ten` bolg`an to`rtinshi ta`rtipli matritsanin` rangin tabin`.
2. Ekinshi ta`rtipli kvadrat matritsalar qosiw formulasi keltirip shig`arin`.

5-lektsiya

Siziqli ten`lemeler sistemasi

Uliwma ko`rinistegi sizaqli ten`lemeler sistemasi ha`m onin` qa`siyetleri. O`zgeriwshiler sani ten`lemeler sanina ten` bolmag`an bazibir sistemalar. Kroneker-Kapelli teoremasi. Birtekli sistemalardin` nollik emes sheshimge iye boliw sha`rti.

Uliwma ko`rinistegi  $n$  belgisizli  $m$  ten`lemeler sistemasin qarastiramiz, bunda uliwma alg`anda  $n \neq m$ . Sistemanin` jaziliwi:

[illegible]

bunda a_{ij} - koeffitsientler, x_i - belgisizler, b_i - saltan' ag'zalar ($i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$).

(1) sistema ko`binese matritsaliq ko`riniste jaziladi:

$$AX = B,$$

bunda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{-koeffitsientleri matritsasi,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ xm \end{pmatrix} \text{-belgisizler matritsasi, } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{-saltan`ag`zalar matritsasi.}$$

Uliwma

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matritsasi sistemanin` ken`eytirilgen matritsasi dep ataladi.

Sistemanin` barliq ten`lemelerin birdeylikke aylandiratug`in  $x_i = \alpha_i$ , ( $i=1,2,...,m$ ) sanlari sistemanin` sheshimi dep ataladi.

Teorema (Kroneker-Kapelli). (1) siziqli ten'lemeler sistemasi sheshimga iye boliwi ushin A sistema matritsasi menen B sistemanin' ken'eytirilgen matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

ranglari ten`boliwi  $r_A = r_B$  za`ru`rli ha`m jetkilikli.

Teorema. (1) siziqli ten`lemeler sistemasinda  $b_i = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) bolsa, onda onin` nollik emes sheshimge iye boliwi ushin A matritsasinin` rangi  $r_A$  belgisizler sani  $n$  nen kishi boliwi  $r_A < n$  za`ru`rli ha`m jetkilikli.

U`sh belgisizli birtekli siziqli eki ten`lemeler sisteması

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

sheshimleri semeystvosin $x = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $y = -k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ tu`rinde jaziw

mu`mkin, bunda k-parametr.

Eki belgisizli u`sh siziqli ten`lemeler sisteması

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

jup-juptan qarama-qarsi ten`lemelerge iye bolmasa ha`m

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ten`ligi orinlang`anda, tek sonda g`ana sheshimge iye boladi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Kroneker-Kapelli teoremasin u`sh belgisizli eki ten`lemeler sisteması ushin jazin` ha`m sistemani izertlen`.
2. Bir belgisizli u`sh ten`lemeler sistemasinin` sheshimge iye boliwi sha`rtin jazin`.

6-lektsiya

Siziqli ten`lemeler sistemasin sheshiw din` usillari:

Matritsaliq, Gauss, Kramer

Misali, 1) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ten'lemeler sistemasi $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bolsa, onda

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ tu'rindagi sheshimlarga iye boladi, bunda

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ ten'lemeler sistemasi $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ bolsa, onda

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ tu'rindagi sheshimlarga iye boladi, bunda

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. Berilgen u'shinshi o'zgeriwshili siziqli u'sh ten'lemeler sistemasinin` matritsasina kerii matritsani tabiw arqali onin` sheshimin tabin`.

2. Ekinshi ta'rtpili siziqli ten'lemeler sistemasin kerii matritsa tabiw arqali, Gauss, Kramer usillaridan paydalanip sheshin`.

3. Ten'lemeler sistemasin EEM nen paydalanip sheshin` ha'm programmasin tallan`.

7-lektsiya

Joqari ta'rtpili ten'lemeler.

Kardano formulasi. Ten'lemelerdi juwiq sheshiw

Joqarg'i ta'rtpili siziqli algebraliq ten'lemeler ($n=2; 3; 4$) ha'm olardin` sheshimlerin tabiw usillari: kub, bikvadrat ten'lemeler. Tiykarg'i teoremlar: algebranin` tiykarg'i teoremasi, Bezu, Viet teoremasi ($n=2; 3; \dots; k$). Gruppalar teoriyasinin` a`hmiyeti. Kardano formulasi. Ten'lemelerdi juwiq sheshiw usillari ha'm olardin` EEM degi qollanbali programmalari.

n - ta'rtpili ko'pag`zalini yamasa polinomdi qarastiramiz:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

bunda $n \geq 0$ - pu'tin san, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ haqiqiy yamasa kompleks sanlari ko'pag'zalinin' ag'zalari dep ataladi.

Teorema (BEZU). $P_n(x)$ ko'pag'zalini $x - \alpha$ eki ag'zalig'ina bo'lgende shiqqan qaldir $P_n(x)$ ko'pag'zalinin' $x = \alpha$ degi ma'nisine ten'.

Algebranin' tiykarg'i teoremasi. Ha'r qanday n -da'rejeli ko'pag'zali keminde bir korengi iye.

n -da'rejeli $P_n(x)$ ko'pag'zali $x - \alpha$ tu'rindagi n dana siziqli ko'beytiwshige ajiraladi, yag'niy

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Eger haqiqiy qoeffitsientli $P_n(x)$ ko'pag'zali $\alpha = \gamma + i\delta$ kompleks korenine iye bolsa, onda ol $\bar{\alpha} = \gamma - i\delta$ tu'yinles korenine de iye boladi.

Eger $P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m}$ bolsa, onda $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Ha'r qanday n -da'rejeli $P_n(x) = 0$ ten'lemesi keminde bir korengi iye ha'm n danadan artiq korengi iye bola almaydi.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

tu'rindagi ten'leme kub ten'leme dep ataladi, bunda a, b, c - berilgen turaqli sanlar.

(1) ten'lemede $x = z - \frac{a}{3}$ tu'rinde o'zgeriwshilerdi almastirip

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (2)$$

ten'lemesine alip kelinesi. (2) ten'lemenin' korenlerin Kardano formulasinan paydalanip tabiw mu'mkin:

$$z = u + v; \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

Eger $\Delta > 0$ bolsa, onda $z_1 = u_1 + v_1, z_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2}i\sqrt{3}$, bunda u_1, v_1 arqali u, v korenlerinin' haqiqiy bo'lekleri belgilengen;

Eger $\Delta = 0$ bolsa, onda $z_1 = \frac{3p}{q}, z_2 = z_3 = -\frac{z_1}{2}$

Eger $\Delta < 0$ bolsa, onda

$$z_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad z_{2,3} = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} \pm 120^\circ \right), \quad \text{bunda } \cos \varphi = -\frac{q}{2} / \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}.$$

Viet teoremasi. Eger x_1, x_2, x_3 sanlari (1) ten'lemenin' korenleri bolsa, onda $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ ha'm $a = -(x_1 + x_2 + x_3), b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; c = -x_1x_2x_3$.

Joqari ta'rtpili ten'lemelerdi sanli juwiq sheshiw ko'plegen usillari ha'm olardin' elektronli esaplaw mashinalarinan paydalanip tabatug'in programmaları bar. En' ko'p qollanilatug'in usillar: kesindini ten' ortadan bo'liw, urinbalar (N'yuton), xordalar usili ha'm t.b.

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. $n=1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$ - ta'rtpi ten'lemelerdin' sheshimlerin ten'leme qoeffitsientleri arqali an'latiw mu'mkin be?
2. $n=2$ ha'm $n=4$ ta'rtpi ten'lemeler ushin Viet teoremasin jazin'.
3. Arnawli tu'rdegi (simmetriyali, kososimmetriyali) joqari ta'rtpi ten'lemeler ha'm olardi sheshiw usillari

8-lektsiya

Tuwri mu'yeshli Dekart koordinatalar sistemasi

Analitikaliq geometriya pa'ni. Tuwri mu'yeshli Dekart koordinatalar sistemasi tuwridag'i, tegisliktegi, ken'isliktegi. Polyar koordinatalar sistemasi. Eki noqat arasindag'i araliq. Kesindini berilgen qatnasta bo'liw. U'shmu'yeshlik ha'm ko'pmu'yeshliklerdin' maydanlari.

Matematikanin' geometriyalik ma'selelerdi algebraliq usillardi paydalanip sheshetug'in bo'limi analitikaliq geometriya dep ataladi. Analitikaliq geometriyanin' tiykarinda koordinatalar usili bolip, oni XVII a'sirde frantsuz matematigi ha'm filosofi Rene DEKART kirgizdi ha'm bul usildi ko'plegen ma'selelerge qollandi. Koordinatalar usili noqatinin' halin koordinatalar sistemasin payda etiwshi bazibir siziqlarg'a salistirmali qarawg'a tiykarlang'an.

Tuwridag'i Dekart koordinatalar sistemasi ($n=1$ o'lsheмли ken'islik E^1). Qa'legen tuwri siziqta baslang'ish O naqati, « $\rightarrow$ » belgisi menen on' bag'it ha'm uzunliq birligi (masshtab) tan'lap alinadi. Payda etilgen bir o'lsheмли koordinatalar sistemasi menen haqiqiy sanlar ko'pligi arasinda bir ma'nisli sa'ykeslik ornatiw mu'mkin. Qa'legen bir M noqatsinin' tuwridag'i orinina sa'ykes keliwshi x sani (1-su'wret) onin' koordinatasi dep ataladi ha'm $M(x)$ tu'rinde belgilenedi.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad M \quad} x \\ O \quad 1 \quad x \end{array}$$

1-su'wret.

Eki $A(x_1)$ ha'm $B(x_2)$ noqatlari arasindag'i d araliq

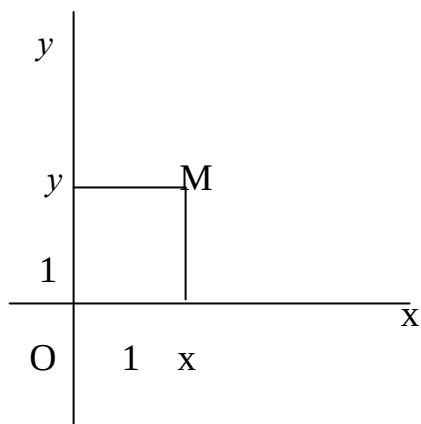
$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Ko'o'sherdegi (algebraliq) bag'itlang'an kesindinin' shamasi $AB = x_2 - x_1$, bunda $A(x_1)$ ha'm $B(x_2)$.

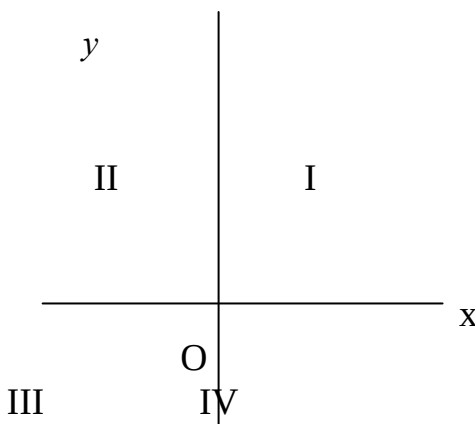
Tegisliktegi Dekart koordinatalar sistemasi ($n=2$ o'lsheмли ken'islik E^2). Tegisliktegi qa'legen O noqati (bul noqat koordinata basi dep ataladi) arqali o'z-ara perpendikulyar eki ko'sher Ox (abstsissa) ha'm Oy (ordinata) o'tkiziledi ha'm bul ko'sherlerde ten'dey masshtab

birligi tan`lap alinadi. Ox ha`m Oy ko`sherleri joylasqan tegislik Oxu koordinatalar tegisligi dep ataladi.

Tegisliktegi noqatinin` koordinatalari dep noqatinin` usi tegisliktegi orinin aniqlaytug`in sanlar jubina (2 su`wret) aytiladi: $M(x; u)$.



2-su`wret



3-su`wret

Tegislikni koordinata ko`sherleri to`rt sherekke (3-su`wret) bo`ledi.

Noqatinin` shereklerdegi koordinatalarinin` belgileri:

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

Tegisliktegi eki $A(x_1; y_1)$ ha`m  $B(x_2; y_2)$  noqatlarinin` arasindag`i d araliq

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ushlari $A(x_1; y_1)$ ha`m  $B(x_2; y_2)$  noqatlarinda bolg`an kesindini berilgen λ qatnasta bo`liw, yag`niy $AN : NB = \lambda$ ten`ligin qanaatlandiraytug`in AV kesindisinin` $N(x, y)$ noqatsi koordinatalarin

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

formulasi boyinsha tabiw mu`mkin. Dara jag`dayda, AV kesindisinin` ortasinin` koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

To`beleri  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_n(x_n, y_n)$  noqatlarinda bolg`an du`n`ki

$$\text{ko`pmu`yeshliktin` maydani } S = \frac{1}{2} \left[\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right| + \dots + \left| \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right| \right].$$

To`beleri  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$  noqatlarida bolg`an u`shmu`yeshliktin` maydani $S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ formulasi boyinsha tabiladi.

U`sh  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$  noqatlarinin` bir tuwrig`a tiyisli boliw sha`rti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ken`isliktegi Dekart koordinatalar sistemasi ( $n=3$  o`lshemli ken`islik  $E^3$ ). Bir O noqatsinda kesilisetug`in ha`m birdey masshtab birligine iye bolg`an u`sh o`z-ara perpendikulyar Ox, Oy ha`m Oz ko`sherleri ken`islikte tuwri mu`yeshli Oxuz Dekart koordinatalar sistemasin aniqlaydi. Bunda Ox - abstsissa, Oy - ordinata ha`m Oz - applikata ko`sheri dep ataladi. Koordinatalari menen ken`isliktegi noqat  $M(x; y; z)$  tu`rinde jaziladi.

Ken`islikti Oxu, Oxy, Oyz koordinata tegislikleri segiz oktantqa bo`ledi. Noqatinin` oktantlardag`i koordinatalarinin` belgileri:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

n -o`lshemli Dekart koordinatalar sistemasi ( $E^n$ ). Qa`legen M noqatsin koordinatalari menen $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tu`rinde jaziw mu`mkin. Eki $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ha`m  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  noqatlarinin` arasindag`i d araliq

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

formulasi boyinsha esaplanadi.

Polyar koordinatalar sistemasi. Meyli tegislikte O noqati - polyus ha`m OR nuri - polyar` ko`sher berilgen bolsin. Onda tegisliktegi noqattin` hali polyar mu`yesh  $\varphi = \angle MOP$  ha`m radius-vektor $r = OM$ arqali bir ma`nisli aniqlanadi.

Eger O polyusti Dekart koordinatalar sistemasinin` basi menen, al OR polyar ko`sherdi Ox ko`sherinin` on` bag`iti menen betlesetug`inday etip tan`lap alsaq, onda tegisliktegi qa`legen noqattin` (x, y) Dekart koordinatalari menen (φ, r) koordinatalari arasinda baylanis ornatiw mu`mkin:

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. U'sh o'lsheмли ken'isliktegi qa'legen koordinatalari menen berilgen noqattan koordinatalar basina shekemgi araliqti esaplaw formulasin jazin'.
2. Ken'isliktin' Oyz tegisligindegi noqatlardin' koordinatalari qanday tu'rde boladi.

9-lektsiya

Vektor. Vektorlar u'stinde a'meller

Vektorlar algebrasi. Vektor: aniqlaması, koordinatalari, qa'siyetleri. Vektorlar u'stinde a'meller. Kollinear ha'm komplanar vektorlar.

Fizika, texnika, ximiya ha'm t.b. pa'nlerde u'yreniletug'in shamalar eki klassqa bo'linedi: skalyar ha'm vektorliq (yamasa bag'itlang'an). Skalyar shamalardi xarakterlew ushin olardin' san ma'nisin ko'rsetiw jetkilikli. Misali, ko'lem, massa, tig'izliq, temperaturi ha'm t.b. Vektorliq shamalardi xarakterlew ushin tek g'ana san ma'nisin ko'rsetip qoymay, sonin' menen birge olardin' bag'itin da ko'rsetiw za'ru'r. Misali, denege ta'sir etiwshi ku'sh, ha'reket tezligi, magnit yamasa elektr maydaninin' kwshleniwi ha'm t.b.

Aniqlama. Bag'itlang'an kesindi vektor dep ataladi.

Vektor $\overline{AB}$ (A noqatısi vektordin' basi, V noqati vektordin' aqiri delinedi) yamasa $\vec{a}$ tu'rinde belgilenedi. Vektor uzinlig'i $|\overline{AB}|, |\vec{a}|$ tu'rinde belgilenedi.

Basi ha'm aqiri betlesetug'in vektor nollik vektor dep ataladi ha'm $\vec{0}$ tu'rinde belgilenedi, $|\vec{0}| = 0$. Uzinlig'i 1 ge ten' bolg'an vektorlar birlik vektorlar dep ataladi.

Aniqlama. Bir tuwri siziqta yamasa parallel tuwri siziqlarda jatiwshi vektorlar kollinear vektorlar dep ataladi.

Kollinear vektorlar birdey bag'itlang'an yamasa qarama-qarsi bag'itlang'an boliwi mu'mkin.

Aniqlama. Kollinear, birdey bag'itlang'an ha'm uzinliqlari ten' bolg'an vektorlar ten' vektorlar dep ataladi.

Aniqlama. Bir tegislikte yamasa parallel tegisliklerde jatiwshi vektorlar komplanar vektorlar dep ataladi.

Eger komplanar vektorlardin' baslari uliwma noqatqa iye bolsa, onda olardin' bir tegislikke tiyisli bolatug'inlig'in ko'rsetiw mu'mkin.

$\overline{AB}$ ha'm $\overline{BA}$ vektorlari qarama-qarsi vektorlar dep ataladi. Eger $\overline{AB} = \vec{a}$ tu'rinde belgilense, onda $\overline{BA} = -\vec{a}$ tu'rinde jaziladi.

Vektorlar u'stinde siziqli a'meller dep vektorlardi qosiw, aliw ha'm vektorlardi sang'a ko'beytiwge aytiladi.

Vektorlardi qosiwdin` u`shmu`yeshlik qa`desi. Nolden pariqli eki $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ha`m  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$  vektorlari berilgen bolsin.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$  vektorlarin tabiw ushin birinshi qosiliwshi vektordin` basin ekinshi qosiliwshi vektordin` aqiri menen tutastiratug`in vektorg`a aytiladi.

Vektorlardi qosiwdin` parallelogram qa`desi. Bunda ta`repleri berilgen vektorlar bolatug`in parallelogramm du`ziledi, bunda vektorlar bazi bir noqatta jaylastiriladi. Sonda parallelogrammnin` ko`rsetilgen noqattan shig`iwshi diagonal berilgen eki vektor qosindisin beredi.

Vektorlardi qosiwdin` qa`siyetleri:

1. Orin almastiriw qa`siyeti $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. Gruppaw qa`siyeti $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Vektorlardi aliw a`meli qosiwg`a kerisinshe orinlanadi.

Vektorlardi sang`a ko`beytiw. $\vec{a} \neq 0$ vektorinin`  $\lambda \neq 0$  sanina ko`beymesi dep, $\vec{a}$ vektorina kollinear, uzunlig`i  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  g`a ten` bolg`an, $\lambda > 0$ bolg`anda  $\vec{a}$  vektori menen birdey bag`itlang`an, al  $\lambda < 0$  bolg`anda $\vec{a}$ vektorina qarama-qarsi bag`itlang`an $\lambda \vec{a}$ vektorina aytiladi. $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{b}$ bolsa, onda $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$. Tiykarg`i qa`siyetleri:

1. $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$
2. $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$, $(\lambda, \mu - const)$
3. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$
4. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Eki perpendikuyar birlik vektorlardin` ayirmasin tabin`.
2. Jol, tezlik, tezleniw qanday shamalar.
3. Vektorlardi qosiwdin` u`shmu`yeshlik qa`desi menen parallelogramm qa`desinin` ayirmashilig`i qanday. Eki perpendikulyar birlik vektorlardin` qosindisin tabin`.

10-lektsiya

Vektorlar sistemasi. Bazis

Vektorlardin` siziqli kombinatsiyasi. Siziqli g`a`rezli ha`m g`a`rezsiz sistemalar. Vektordin` tuwrig`a proektsiyasi. Ken`islik bazisi, ort. Vektor koordinatalari.

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlari ha'm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sanlari berilgen bolsin. Bul sanlardin' sa'ykes vektorlarga ko'beymesinin' qosindisi $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n}$ vektorlardin' siziqli kombinatsiyasi dep ataladi.

Aniqlama. $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sistemasi ushin keminde birewi nolden o'zgeshe sonday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sanlari bar bolip, vektorlardin' siziqli kombinatsiyasi nolge ten', yag'niy

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = 0 \quad (1)$$

bolsa, onda $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sistemasi siziqli g'a'rezli sistema dep ataladi. Keri jag'dayda $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sistemasi siziqli g'a'rezsiz sistema dep ataladi, ha'm olar ushin (1) ten'lik tek g'ana $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bolg'anda orinlanadi.

Eger n dana $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlari siziqli g'a'rezli bolsa, onda bul vektorlardin' keminde birewi qalg'anlarinin' siziqli kombinatsiyasi menen an'latiw mu'mkin. Bug'an keri tastiyoqlaw ha'm orinli, eger vektorlardin' birewi qalg'an vektorlardin' siziqli kombinatsiyasi arqali an'latilsa, onda bul vektorlar siziqli g'a'rezli. Keri jag'dayda bul vektorlar siziqli g'a'rezsiz boladi.

Aniqlama. Qa'legen $\overline{a}$ vektorin n dana $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ vektorlarinin' siziqli kombinatsiyasi arqali an'latiw mu'mkin bolsa, onda bul vektorlar ken'isliktin' bazisi dep ataladi.

Bazisti du'zetug'in vektorlar sani ken'isliktin' o'lsheimi dep ataladi. Tuwridang'i (E^1) qa'legen birlik $\overline{e}$ (yamasa $\overline{e_1}$) vektori, tegislikte (E^2) og'an tiyisli qa'legen kollinear emes birlik $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ vektorlari, u'sh o'lsheimli ken'islikte (E^3) qa'legen komplanar emes birlik $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ vektorlari bazis du'zedi. Oxuz ken'isligindagi tuwri mu'yeshli koordinatalar sistemasinda bazis retinde ko'sherlerdin' ha'r birinde bag'iti ko'sherdin' on' bag'iti menen betlesiwshi birlik $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ vektorlari alinadi ha'm olar ortlar dep ataladi.

Bazis vektorlari arqali sol ken'isliktegi qa'legen vektordi siziqli an'latiw mu'mkin. Misali, $\overline{a} \in E^3$ bolsa, onda $\overline{a} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + a_3 \overline{e_3}$ tu'rinde an'latiw mu'mkin, bunda $a_1, a_2, a_3 \in R$ haqiyqiy sanlar.

Ken'islikte bazibir L tuwrisi ha'm $\overline{AB}$ vektori berilgen bolsin. A ha'm V noqatlarinan tuwrig'a perpendikulyarlar tu'siremiz, olardin' L tuwrisi menen kesilisiw noqatlarin sa'ykes A_1 ha'm B_1 arqali belgileymiz. $\overline{A_1B_1}$ vektori $\overline{AB}$ nin' L tuwrisindagi du'ziwshisi yamasa komponentasi dep ataladi. $\overline{AB}$ nin' L tuwrisina proektsiyasi: $\text{Pr}_L \overline{AB} = \pm |\overline{A_1B_1}|$. Qa'siyetleri:

$\text{Pr}_L \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi$; $\text{Pr}_L (\overline{a} + \overline{b}) = \text{Pr}_L \overline{a} + \text{Pr}_L \overline{b}$; $\text{Pr}_L \lambda \overline{a} = \lambda \text{Pr}_L \overline{a}$, bunda φ -berilgen L tuwrisi menen $\overline{a}$ vektorinin' arasindagi mu'yesh, λ -qa'legen san.

$\overline{a} = \overline{OA}$ vektorinin' Oxuz ken'isliginin' ko'sherlerine proektsiyalarin a_x, a_y, a_z (bul sanlar $\overline{a}$ nin' Oxuz tegi koordinatalari delinedi) arqali belgilesek, onda

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ tu`rinde koordinata ortlari boyinsha jayip jaziw mu`mkin: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Bul jag`dayda  $\vec{OA}$  vektori  $\vec{r}$  arqali belgilenedi ha`m A noqatisinin` radius-vektori dep ataladi.

Eger $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ koordinatalari menen berilse, onda $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Vektordin` bag`itlawshi kosinuslarinin` kvadratlarinin` qosindisi birge ten`:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Orlardin` koordinatalarin ko`rsetin`.
2. Ox ko`sheri ortinin` Ou ko`sherindegi proektsiyasin tabin`.

11-lektsiya

Vektorlardin` skalyar, vektorliq ha`m aralas ko`beymesi

Ken`isliktegi vektorlardin` skalyar, vektorliq ha`m aralas ko`beymeleri. Vektorlardin` arasindag`i mu`yesh. Vektorlardin` komplanarliq sha`rti.

Aniqlama. Eki $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ha`m  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$  vektordin` skalyar ko`beymesi dep, bul vektorlar uzinliqlari ha`m olardin` arasindag`i φ mu`yesh kosinusinin` ko`beymesine ten` bolg`an skalyarg`a (sang`a) aytiladi ha`m $\vec{a} \cdot \vec{b}$ tu`rinde belgilenedi.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\text{Qa`siyetleri: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}); \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a^2}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}};$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

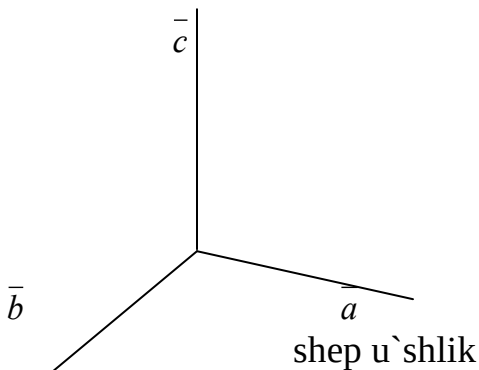
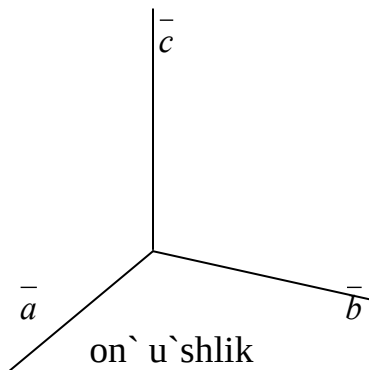
U`sh vektordan turatug`in sistema belgili bir ta`rtipte berilgen, yag`niy olardin` qaysisi birinshi, qaysisi ekinshi ha`m qaysisi u`shinshi ekenligi ko`rsetilgen bolsa, onda bul vektorlar sistemasi ta`rtiplengen dep ataladi. Ta`rtiplengen vektorlar u`shligin bir uliwma baslaniw noqatına keltiremiz. Komplanar bolmag`an ta`rtiplengen vektorlar u`shliginde u`shinshi vektor ushinan qarag`anda birinshi vektor ekinshi vektorg`a en` qisqa bolg`an aralig`i saat tilinin` aynaliw bag`itina qarama-qarsi bag`it bolsa, onda olar on u`shlik dep ataladi. Keri jag`dayda vektorlar u`shligi shep u`shlik dep ataladi.

Aniqlama. $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ vektorlarining vektorliq ko'beymesi dep to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlandiratug'in $\vec{c}$ vektorina aytiladi ($\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ tu'rinde belgilenedi):

a) $\vec{c}$ vektori $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlarina perpendikulyar;

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlari on' u'shlik du'zedi;

v) $\vec{c}$ vektorining uzunlig'i $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ sanina ten' (φ - bunda $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlarining arasindag'i mu'yesh), yag'niy $\vec{c}$ vektorining moduli $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlaridan jasalg'an parallelogrammnin maydanina ten'.



Qa'siyetleri:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; \quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}); \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Aniqlama. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ko'beyme vektorlardin' aralas ko'beymesi dep ataladi ($\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ tu'rinde belgilenedi) ha'm ol moduli boyinsha o'lshemleri sol vektorlar bolg'an parallelipedtin ko'lemine ten' boladi: $V = \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Qa'siyetleri:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}); \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}; \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c};$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}; \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ ha'm } \vec{c} \text{ vektorlarining komplanarliq sha'rti } \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0.$$

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. Orlardin' skalyar ko'beymelerin tabin'.

2. Eki vektor arasindag'i mu'yeshlin' sinusi, tangensi formulalarin jazin'.
3. Vektorlari on' ha'm shep u'shliklerinin' ayirmashilig'in ko'rsetin', sizilmasin du'zin'.

12-lektsiya

Tegisliktegi tuwrilar

Tegisliktegi birinshi ta'rtipli siziqlar - tuwrilardin' Dekart koordinatalar sistemasindag'i ten'lemeleri: uliwma, mu'yeshlik koeffitsientli, normal, kesindilerdegi. Tegisliktegi noqatlar menen tuwrilar, noqattan tuwrig'a shekemgi araliq. Tuwrilardin' o'z-ara jaylasiwlari.

Tegislikte Oxu tuwri mu'yeshli Dekart koordinatalar sistemasi aniqlang'an bolsin. Tegisliktegi figuralardi uliwma $F(x,y)=0$ tu'rindegi ten'leme menen analitikaliq an'latiw mu'mkin, bunda G'-berilgen funktsiya.

Tuwri tu'sinigi aniqlanbaytug'in matematikanin' da'slepki tu'siniklerinin' biri, sonliqtan og'an aniqlama joq.

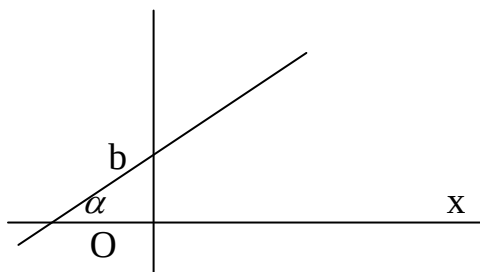
1. Tuwrinin' uliwma ten'lemesi birinshi ta'rtipli eki o'zgeriwshili siziqli ten'leme:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

bunda A, B, C - turaqlilar. Dara jag'daylari:

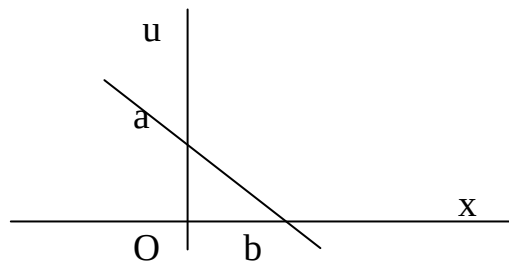
- a) $A = 0, B \neq 0; By + C = 0, y = -C/B$ - bul Ox ko'sherine parallel tuwri ten'lemesi;
- b) $A = 0, B \neq 0; C = 0; By = 0, y = 0$ - bul Ox ko'sherinin' ten'lemesi;
- v) $A \neq 0, B = 0; Ax + C = 0, x = -C/A$ - bul Ou ko'sherine parallel tuwri ten'lemesi;
- g) $A \neq 0, B = 0; C = 0; Ax = 0, x = 0$ - bul Ou ko'sherinin' ten'lemesi;
- d) $C = 0; Ax + By = 0, y = -Ax/B$ - bul koordinata basi $O(0,0)$ noqatisi arqali o'tetug'in tuwri ten'lemesi.

2. Tuwrinin' mu'yeshlik koeffitsientli ten'lemesi. $y=kx+b$, bunda $k = \operatorname{tg} \alpha$ -tuwrinin' mu'yeshlik koeffitsienti, α - tuwrinin' Ox ko'sherinin' on' bag'iti menen payda etetug'in mu'yeshi, b-parametri da'slepki



ordinata dep ataladi.

3. Tuwrinin` kesindilerdegi ten`lemesi. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, bunda a ha`m  $b$  parametrleri tuwrinin` sa`ykes  $Ox$  ha`m Oy ko`sherlerinen kesip etetug`in kesindilerinin` uzunliqlari.



4. Tuwrinin` normal` ten`lemesi.  $x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$ , bunda  $r$ -koordinata basinan tuwrig`a tu`sirilgen perpendikulyar (normaldin`) uzunlig`i,  $\beta$ -usi perpendikulyardin` Ox ko`sheri menen payda etetug`in mu`yeshi.

$Ax + By + C = 0$ tu`rindegi ten`lemeni normal tu`rdegi tuwri ten`lemesine alip keliw ushin ol ten`lemenin` eki jag`in da normallastiriwshi ko`beytiwshi $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ shamasina ko`beytiw za`ru`r, bunda  $\pm$  belgisinen  $S$  saltan` ag`za bbelgisine qarama qarsi tan`lap alinadi.

5. Tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi.

$A_1(x_1, y_1)$ noqati arqali o`tetug`in tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tuwrinin` kesilisiw noqati arqali o`tetug`in tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi: $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$.

Eger $\alpha = 1$ bolsa, onda da`stede ekinshi tuwri bolmaydi.

6. Berilgen noqatlar arqali o`tetug`in tuwrilar.

$A_1(x_1, y_1)$ noqati arqali o`tetug`in tuwrilar da`stesin  $y - y_1 = k(x - x_1)$  ten`lemesi menen an`latiladi, bunda  $k$  - qa`legen parametr.

$A_1(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noqatlari arqali tek bir g`ana tuwri o`tkeriw mu`mkin:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Berilgen $A_1(x_1, y_1)$ noqatinan tuwrig`a shekemgi d araliq:

$$d = |x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

7. Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tuwrinin` o`z-ara jaylasiwi.

7.1. Eger $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ bolsa, onda bul tuwrilar parallel boladi ha`m

a) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - betlesedi,

b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ - kesilispeydi.

7.2. Eger $\Delta \neq 0$ bolsa, onda bul tuwrilar bir (x, u) noqatda kesilisedi

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

8. Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (yamasa $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$) tuwrilarinin` arasindag`i mu`yesh

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Bul formuladan eki tuwrinin`:

8.1. $A_1 / A_2 = B_1 / B_2$; $k_1 = k_2$ -parallellik sha`rtin,

8.2. $A_1A_2 = B_1B_2$; $k_1 = -1/k_2$ -perpendikulyarlik sha`rtin alamiz.

Onda $y = kx + b$ tuwrisina perpendikulyar (normal) tuwrilar $y = -\frac{x}{k} + b_0$ tu`rinde jaziladi, bunda  $b$  ha`m b_0 - qa`legen turaqlilar.

8.3. Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tuwrilarinin` arasindag`i mu`yesh bissektrisasinin` ten`lemesi

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Tuwrinin` vektorliq ten`lemesi
2. U`sh tuwrinin` bir noqatta kesilisiw sha`rti

13-lektsiya

Tegisliktegi ekinshi ta`rtipli siziqlar

Tegisliktegi ekinshi ta`rtipli siziqlar ha`m olardin` kanonikaliq tu`rleri: Shen`ber. Ellips. Giperbola. Parabola. Olardin` ten`lemesi, qa`siyetleri, elementleri, direktrisalari, diametrleri ha`m urinbalari. U`shinshi ha`m joqari ta`rtipli algebraliq, transtsent iymeklikler.

x ha'm u koordinatalarg'a qarata ekinshi ta'rtpi ten'leme menen aniqlang'an siziq ekinshi ta'rtpi siziq dep ataladi. Eger iymek siziqtin' noqatlari bazibir noqatg'a qarata simmetriyali bolsa, bul iymek siziq orayliq siziq dep, noqat - iymek siziqtin' orayi dep ataladi.

Ekinshi ta'rtpi iymek siziqlardan' kanonikaliq ten'lemelerin, yag'niy bul iymek siziqtin' orayi yamasa ushin koordinatalar basinda, simmetriya ko'sherleri koordinata menen betlesetug'in jag'daydi qarastiramiz.

Birneshe o'zgeriwshinin' birtekli ekinshi ta'rtpi ko'pag'zalisi bul o'zgeriwshilerdin' kvadratliq formasi dep ataladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

(1) ten'leme kooffitsientlerinen eki aniqlawshini δ - u'lken ag'zalarinin' diskriminanti ha'm Δ - ten'leme diskriminantin du'zemiz:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

δ ha'm Δ ma'nislerine qarata (1) ten'leme aniqlaytug'in geometriyaliq obrazdi biliw mu'mkin:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips	Noqat
$\delta < 0$	Giperbola	Kesilisiwshi tuwrilar
$\delta = 0$	Parabola	Parallel tuwrilar

1. Shen'ber.

Orayi $C(a; b)$ noqatisinan R ($R > 0$) qashikliqta joylasqan tegisliktin' barliq noqatlarinin' geometriyaliq orini shen'ber dep ataladi ha'm ol $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ten'lemesi menen analitikaliq an'latiladi. Orayi koordinata basi $O(0,0)$ noqatinda joylasqan, radiusi R -ge ten' bolg'an shen'ber $x^2 + y^2 = R^2$ ten'lemesine iye boladi. Shen'ber to'mende aniqlanatin ellipstin' dara jag'dayi bolip tabiladi.

2. Ellips.

Aniqlama. Ellips dep tegisliktegi sonday noqatlardan' ko'pligine aytiladi, bul noqatlardan' ha'r birinen usi tegisliktin' fokuslari dep ataliwshi eki F_1, F_2 noqatlarina shekemgi bolg'an qashikliqlardan' qosindisi turaqli shama bolsa. $M(x, u)$ ellipstin' qa'legen bir noqati bolsa, onda $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, bunda a -qa'legen turaqli san.

Ellipstin' kanonikaliq ten'lemesi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

bunda a ha'm b - belgili turaqlilar. Ellips noqatlari koordinata basina qarata simmetriyali. Koordinatalar basi (2) ellipstin' simmetriya orayi, koordinata ko'sherleri onin' simmetriya ko'sherleri boladi. Ellips ordinata ko'sherin $B_1(0; b)$ ha'm $B_2(0; -b)$ noqatlarida, abstsissa ko'sherin $A_1(a; 0)$ ha'm $A_2(-a; 0)$ noqatlarida kesip o'tedi. Ellipstin' simmetriya ko'sherleri menen kesilisiw noqatlari ushlari dep ataladi. Ellipstin' ushlarinin' arasindag'i araliq $|A_1A_2|=2a, |B_1B_2|=2b$ ellips ko'sherleri delinedi. Ko'sherlerden u'lkeni - ellipstin' u'lken ko'sheri dep, ekinshisi - ellipstin' kishi ko'sheri dep, a ha'm b parametrleri yarim ko'sherler dep ataladi.

x ha'm y koordinatalarinin' o'zgeriw oblasti: $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$. Ellips simmetriyali bolg'anliqtan oni tek g'ana birinshi sherekte tekseriw jetkilikli. Birinshi sherektegi ellipstin' ten'lemesi:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$a > b$ bolsin. $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ dep belgileymiz. $F_1(c; 0)$ ha'm $F_2(-c; 0)$ noqatlari ellipstin' fokuslari dep ataladi. $|F_1F_2|=2c$ - ellipstin' fokus aralig'i delinedi. Ellipstin' fokuslari jaylasqan u'lken ko'sher fokal ko'sher dep, $r_1 = |MF_1|$ ha'm $r_2 = |MF_2|$ shamalari fokal radiuslar dep, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($0 < \varepsilon < 1$) shamasi ellipstin' ekstsentrismetri deb ataladi.

$x = a/\varepsilon$ ha'm $x = -a/\varepsilon$ tuwri siziqlari ellipstin' direktrisalari delinedi.

Ellipstin' qa'legen M noqatidan F_1 (yamasa F_2) fokusina shekemgi bolg'an araliq penen direktrisa g'a shekemgi d_1 (yamasa d_2) araliq qatnasi turaqli shama ε g'a ten' boladi:

$$\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}.$$

3. Giperbola.

Aniqlama. Giperbola dep tegisliktegi sonday noqatlardin' ko'pligine aytiladi, bul noqatlardin' ha'r birinen usi tegisliktin' fokuslari dep ataliwshi eki F_1, F_2 noqatlarina shekemgi bolg'an qashiqliqlardin' ayirmasinin' absolyut shamasi turaqli shama $2a$ g'a ten' bolsa. $M(x, y)$ ellipstin' qa'legen bir noqati bolsa, onda

$$|F_1M| - |F_2M| = 2a$$

bunda a - qa'legen turaqli san.

Giperbolanin' kanonikaliq ten'lemesi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

Koordinata ko'sherleri giperbolanin' simmetriya ko'sherleri, koordinatalar basi simmetriya orayi boladi.

Giperbola Ox ordinatalar ko'sheri menen kesilispeydi. $B_1(0;b)$ ha'm $B_2(0;-b)$ noqatlari giperbolanin' jormal ushlari dep, $|B_1B_2|=2b$ kesindisi jormal ko'sheri dep, b - jormal yarim ko'sheri dep ataladi.

Giperbola Ox abstsissalar ko'sheri menen $A_1(a;0)$ ha'm $A_2(-a;0)$ noqatlarida kesilisedi. Bul noqatlar giperbolanin' haqiqiy ushlari dep, $|A_1A_2|=2a$ kesindisi haqiqiy ko'sheri dep, a - haqiqiy yarim ko'sheri dep ataladi.

Giperbolani

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$$

ten'lemesi menen de jaziw mu'mkin. Giperbola shegaralanbag'an siziq bolip, ol $x=a$ ha'm $x=-a$ tuwri siziqalar menen shegaralanbag'an oblasttin' sirtinda joylasqan ja'ne eki tarmaqqa iye.

Giperbolanin' haqiqiy ko'sherinde $F_1(c;0)$ ha'm $F_2(-c;0)$ fokuslari joylasqan, bunda $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. $|F_1F_2|=2c$ - giperbolanin' fokus aralig'i delinedi. Giperbolanin' fokuslari joylasqan u'lken ko'sher fokal ko'sher dep, $r_1 = |MF_1|$ ha'm $r_2 = |MF_2|$ shamalari fokal radiuslar dep, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($1 < \varepsilon$) shamasi giperbolanin' ekstsentrisseti dep ataladi.

$x = a/\varepsilon$ ha'm $x = -a/\varepsilon$ tuwri siziqalari giperbolanin' direktrisalari delinedi.

Giperbolanin' qa'legen M noqatinan F_1 (yamasa F_2) fokusina shekemgi bolg'an araliq penen direktrisag'a shekemgi d_1 (yamasa d_2) araliq qatnasi turaqli shama ε g'a ten' boladi:

$$\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}.$$

$y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ tuwirlari giperbolanin' asymptotalari dep ataladi.

4. Parabola.

Aniqlama. Parabola dep tegisliktin' fokus dep ataliwshi berilgen G noqattan ha'm direktrissa dep ataliwshi berilgen tuwri siziqtan ten'dey uzaqliqta joylasqan barliq noqatlardin' ko'pligine (geometriyalik orinina) aytiladi.

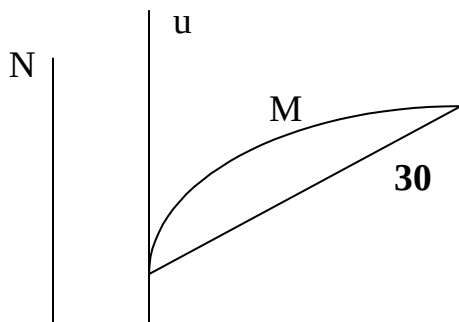
Parabolanin' kanonikaliq ten'lemesi:

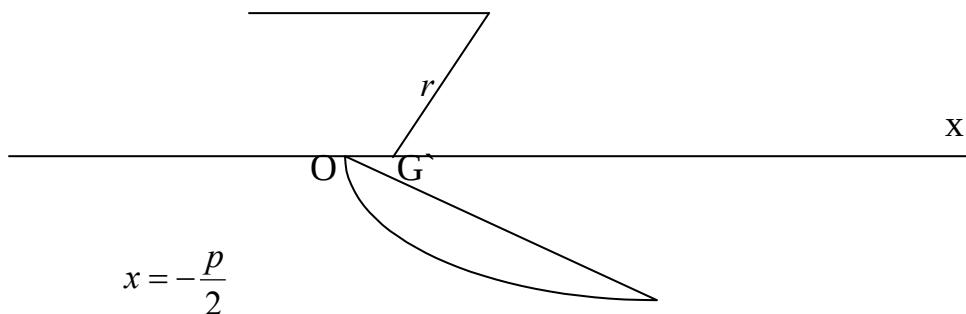
$$y^2 = 2px \quad (4)$$

bunda p -berilgen turaqli haqiqiy parametr. Ko'binese $p > 0$, $x > 0$ dep uyg'ariladi.

Parabolani $y = \pm \sqrt{2px}$ ten'lemesi menen de jazip ko'rsetiw mu'mkin.

Ox ko'sheri parabolanin' simmetriya ko'sheri dep, $O(0, 0)$ noqati parabolanin' to'besi dep ataladi. Parabola shegaralanbag'an siziq, ol asimptotalarg'a iye emes.





$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ noqati parabolaning fokusi dep, $x = -\frac{p}{2}$ tuwri sizig'i direktrisasi dep, $r = |MF|$ ha'm $d = |MN|$ sanlari parabolaning qa'legen M noqatidan sa'ykes fokusqa ha'm direktrissag'a shekemgi araqashiliq dep ataladi, bunda $r = d$. Parabola ekstsentsiteti: $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Eger parabolaning fokal ko'sheri sipatida Ou ko'sheri alinsa, onda parabolaning ten'lemesi $x^2 = 2py$ tu'rinde jaziw mu'mkin.

Eger ellips, giperbola ha'm parabolaning fokusin polyar koordinatalar sistemasinin polyusi retinde, fokal simmetriya ko'sherin polyar ko'sher retinde alsaq, onda bul u'sh iymek siziqli bir ten'leme menen jaziw mu'mkin:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

bunda ε -ekstsentsitet, r-parametr. Ellips ha'm giperbola ushin $p = \frac{b^2}{a}$.

U'shinshi ha'm joqarg'i ta'rtipli algebralik iymeklikler: Astroida, Dekart japirag'i ha'm t.b.

Transtsendent iymeklikler: Tsikloida, Do'n'gelek jayilmasi, epitsikloida ha'm t.b.

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. Giperbola menen parabolaning ayirmashiliqlari.
2. Fokus noqatinin qa'siyetleri.
3. Aniqlamalari boyinsha ellips, giperbola ha'm parabolaning kanonikaliq ten'lemelerin keltirip shig'arin'.

14-lektsiya

Ken'isliktegi noqat, tuwri ha'm tegislik

Ken`isliktegi analitik geometriya. Ken`isliktegi noqat, tuwri ha`m tegislik tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasindag`i tuwri menen tegisliktin` ten`lemeleri, olardin` o`z-ara jaylasiwi. Noqattan tuwrig`a ha`m tegislikke shekemgi qashqliq.

Ken`islikte Oxuz tuwri mu`yeshli Dekart koordinatalar sistemasi aniqlang`an bolsin. Ken`isliktegi figuralardi uliwma $F(x, y, z) = 0$ tu`rindegi ten`leme menen analitikaliq an`latiw mu`mkin, bunda F berilgen funktsiya.

Birinshi ta`rtipli u`sh o`zgeriwshili siziqli algebraliq ten`leme u`sh o`lshemli ken`islikte tegislikti an`latpaydi. Tegisliktin` uliwma ten`lemesi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

bunda A, B, C, D koefitsientlerdin` keminde birewi nolden o`zgeshe qa`legen sanlar dep uyg`ariladi.

$M(x_0; y_0; z_0)$ noqatsi arqali o`tetug`in ha`m  $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$  vektorina perpendikulyar tegislikti  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  ten`lemesi menen aniqlaw mu`mkin.

Kesindilerdegi tegisliktin` ten`lemesi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

bunda a, b, c - tegisliktin` sa`ykes Ox, Oy, Oz ko`sherlerinen kesip alg`an kesindilerinin` uzunliqlari.

Meyli α_1 ha`m  $\alpha_2$  tegislikleri  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  ten`lemeleri menen berilgen bolsin. Bul tegisliklerdin` arasindag`i φ mu`yesh olarg`a normal $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ ha`m  $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$  vektorlarinin` arasindag`i mu`yesh retinde aniqlanadi, yag`niy

$$\cos \varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Eger normal vektorlari kollinear bolsa, onda olarg`a sa`ykes keliwshi tegislikler parallel boladi $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ha`m eger normal vektorlari perpendikulyar bolsa, onda sa`ykes tegislikler de perpendikulyar boladi $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ noqatsinan $Ax + By + Cz + D = 0$ tegisligine shekemgi qashqliq

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Berilgen eki tegisliktin` kesilisiw sizig`i arqili o`tetug`in barliq tegislikler da`stesinin` ten`lemesi:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

bunda $\alpha = 1$ dep alip da`steden ekinshi tegislikti shig`arip taslaw mu`mkin.

Ken'isliktegi tuwrini birinshi ta'rtpili u'sh o'zgeriwshili siziqli algebraliq ten'lemelerdin` sistemasi menen, yag`niy eki tegisliktin` kesilisiw sizig'i sipatinda an`latiw mu`mkin:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Bul tuwrinin` bag`itlawshi vektorin (yag`niy tuwrig`a yamasa og`an parallel tuwrig`a tiyisli vektor) tegisliklerdin` normal vektorlarinin` vektorliq ko`beymesi tu`rinde aniqlanadi.

Meyli tuwri $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noqatsi ha`m  $\bar{s} = (l; m; p)$  bag`itlawshi vektorini menen berilgen bolsin. $M(x; y; z)$ - usi tuwrinin` qa`legen bir noqatsi dep uyg`aramiz. Onda, tuwrinin`

vektorliq ten`lemesi $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s}$;

parametrlilik ten`lemesi $x = x_0 + nt, y = y_0 + mt, z = z_0 + pt$;

kanonikaliq ten`lemesi $\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$.

Eki tuwrinin` bir tegislikte jaylasiw sha`rti:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ n & m & p \\ n_1 & m_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tuwri ha`m tegislik arasindag`i mu`yesh:

$$\sin \varphi = \frac{|An + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{n^2 + m^2 + p^2}},$$

parallellilik sha`rti: $An + Bm + Cp = 0$;

perpendikulyarliq sha`rti: $\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar.

1. Tuwri ha`m tegislik arasindag`i mu`yesh.
2. U'sh tegisliktin` kesilisiwi jag`daylari: bir tuwrıda, bir noqatta.
3. Analitikaliq tu`rde berilgen tuwri ha`m tegisliktin` kesilisiw noqatsin tabiw.

15-lektsiya

Ken'isliktegi ekinshi ta'rtpili betler

Ken'isliktegi ekinshi ta'rtipli ten'lemeler. Kvadratliq forma. Ekinshi ta'rtipli betlerdin' kanonikaliq ten'lemeleri sfera, tsilindrlar, aynaliw betleri (ellipsoid, giperboloid, paraboloid). Konusliq betler.

Ken'isliktegi bet u'sh o'zgeriwshini x , u ha'm z lerdi baylanistiratug'in ten'leme menen aniqlanadi. x , u ha'm z lerge qarata ekinshi ta'rtipli algebraliq ten'leme menen aniqlang'an bet ekinshi ta'rtipli bet dep ataladi. Uliwma ten'lemesi:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

bunda A, B, C, D, E, G ko'effitsientlerdin' keminde birewi nolden o'zgeshe dep uyg'ariladi. $A, B, C, D, E, G, a, b, c, d$ ko'effitsientlerdin' baylanisli bul ten'lemeler tu'rli betlerdi aniqlawi mu'mkin.

Sfera. (1) ten'lemede $A = B = C = 1, D = E = F = a = b = c = 0, d = -R^2$ tu'rinde alinsa, onda orayi koordinata basinda bolg'an R radiusli sferanin' $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ten'lemesine iye bolamiz.

Aniqlama. Orayi $C(x_0; y_0; z_0)$ noqatisinan $R (R > 0)$ qashikliqta joylasqan ken'isliktin' barliq noqatlarinin' geometriyaliq orini sfera dep ataladi ha'm ol $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ ten'lemesi menen analitikaliq an'latiladi.

Bul ten'leme (1) ten'lemeden

$$A = B = C = 1, D = E = F = 0; a = -2x_0; b = -2y_0; c = -2z_0; d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$$

tu'rinde alinsa kelip shig'adi.

Sfera to'mende aniqlanatug'in ellipsoidtin' dara jag'dayi bolip tabiladi.

1. Jasawshilari koordinata ko'sherlerinin' birine parallel bolg'an betler. Bazi bir siziqti kesip o'tiwshi siziqtin' usi siziqti boylap ha'm berilgen bag'itqa parallel ha'reketinen payda bolg'an bet tsilindrlik bet delinedi. Ha'reketleniwshi tuwri siziq jasawshi dep, berilgen siziq bag'itlawshi dep ataladi.

z koordinatani o'z ishine almaytug'in ha'm ken'islikte qarastirilaturug'in $F(x; y) = 0$ ten'leme menen jasawshilari Oz ko'sherine parallel ha'm bag'itlawshisi Oxu tegisliginde berilgen ten'leme menen sipatlanaturug'in tsilindrlik betti aniqlaydi. Usig'an uqsas

$$F(x; z) = 0 \text{ ha'm } F(y; z) = 0$$

ten'lemeleri jasawshilari sa'ykes Oy ha'm Ox ko'sherlerine parallel bolg'an tsilindrlik betlerdi aniqlaydi.

Misali,

1) Do'n'gelek tsilindr. $x^2 + z^2 = R^2$ ten'lemesi menen an'latiladi. Onin' simmetriya ko'sheri Oy , al Oxz tegisligidagi bag'itlawshisi shen'ber boladi;

2) Ellipslik tsilindr $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jasawshilari Oz ko'sherine parallel, Oxu tegisligidagi bag'itlawshisi - ellips;

3) Giperbolaliq tsilindr $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jasawshilari Oz ko'sherine parallel, Oxu tegisligindagi bag'itlawshisi - giperbola;

4) Parabolaliq tsilindr $y^2 = 2z$. Jasawshilari Ox ko'sherine parallel, Oxz tegisligindagi bag'itlawshisi - parabola.

2. Aynaliw betleri: a) Ouz tegisliginde $F(y, z) = 0$ ten'lemesi menen berilgen L sizig'in Ou ko'sher do'geresinde aynaldirilg'anda payda bolg'an bet ten'lemesin aliw ushin bul sizig ten'lemesindegi z o'zgeriwshisin $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$ qa o'zgartip, u ti o'zgerissiz qaldiramiz.

b) Oxz tegisligindagi siziqti Ox ko'sheri do'geresinde aynaldiriwdan payda bolg'an bet ten'lemesin aliw ushin z ti $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$ qa o'zgartip, x ti o'zgerissiz qaldiramiz.

v) Oxz tegisligindagi siziqti Oz ko'sheri do'geresinde aynaldiriwdan payda bolg'an bet ten'lemesin aliw ushin $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$ qa o'zgartip, z ti o'zgerissiz qaldiramiz.

g) Ouz tegisligindagi siziqti Oz ko'sheri do'geresinde aynaldiriwdan payda bolg'an bet ten'lemesi aliw ushin u ti $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ qa o'zgartip, z ti o'zgerissiz qaldiramiz.

Bulardi uliwmalastirip tablitsada ko'rsetiw mu'mkin:

Iymekliktin` ten'lemesi	Aylaniw ko'sheri	Aynaliw betinin` ten'lemesi
$F(x; y) = 0$	Ox	$F\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
$z = 0$	Ou	$F\left(\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$
$F(x; z) = 0$	Ox	$F\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
$y = 0$	Oz	$F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$
$F(y; z) = 0$	Ou	$F\left(y, \sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$
$x = 0$	Oz	$F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$

Misali,

1) Aynaliw ellipsoidi. Oz do'geresinde Oxz tegisligindagi ellipsti aynaldirsaq kelip shig'adi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

Uliwma ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2) Giperboloid. Ouz tegisligindagi $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ giperbolani:

Oz ko'sheri do'geresinde aynaldirsaq, bir pa'lleli $\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ giperboloidi kelip

shig'adi. Uliwma tu'ri $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ou ko`sheri do`gereginde aynaldirsaq eki pa`lleli  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$  giperboloidi kelip shig`adi. Uliwma tu`ri $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

3) Paraboloid. Ouz tegisligindegi $y^2 = 2pz$ parabolani Oz ko`sheri do`gereginde aynaldirip aynaliw $x^2 + y^2 = 2pz$ paraboloidin aliw mu`mkin.

Elliptik paraboloid: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, (pz > 0)$.

Giperbolik paraboloid: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.

3. Konusliq betler.

4. Siziqli betler. Tuwri siziqtin` ha`reketleniwinen payda bolg`an bet siziqli bet dep, onda jatatug`in tuwri siziqlar jasawshilar dep ataladi.

Ekinshi ta`rtipli tsilindrlik ha`m konusliq betler, giperboloidlar siziqli betlerdin` misali bolip tabiladi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Giperboloidtin` tu`rleri.
2. Paraboloidtin` tu`rleri.

16-lektsiya

Bir o`zgeriwshinin` funktsiyasi

Matematikaliq analiz pa`ni ha`m onin` a`hmiyeti. Bir o`zgeriwshinin` funktsiyasina aniqlamalar. Funktsiya beriliw usillari. Funktsiyanin` o`siwi-kemiwi, jup-taqlig`i, peridlilig`i. A`piwayi funktsiyalar: qa`siyetleri, grafikleri. Quramali funktsiya aniqlaması.

Eki x ha`m u o`zgermeli shamaların qarastiramiz.

Aniqlama. Eger x shamanin` D oblastag`i ha`r bir ma`nisine bazi bir usil yamasa nizam boyinsha u shamasinin` bazi bir E oblastindag`i aniq bir ma`nisi sa`ykeslikke qoyilsa, onda u o`zgeriwshi shama x o`zgeriwshi shamanin` funktsiyasi dep ataladi.

O`zgeriwshi x shama g`a`rezsiz o`zgeriwshi yamasa argument dep, al u shaması g`a`rezli o`zgeriwshi yamasa funktsiya dep ataladi. Funktsiyanin` belgileniwleri: $y = f(x)$, $y = y(x)$, $y = \varphi(x)$ ha`m t.b.

Eger $x = x_0$ bolg`anda  $y = f(x)$  funktsiyanin` ma`nisi y_0 bolsa, onda ol fakt

$$y_0 = f(x_0) \text{ yamasa } y|_{x_0} = y_0$$

tu`rinde belgilenedi.

Aniqlama. O'zgeriwshi x tin' $f(x)$ funktsiya mag'inag'a iye bolatug'in ma'nislerinin ko'pligi funktsiyanin' aniqlaniw oblasti dep ataladi ha'm $D(f)$ tu'rinde belgilenedi. Funktsiyanin' qabil etetug'in ma'nislerinin ko'pligi o'zgeriw oblasti delinedi ha'm $E(f)$ belgisi menen belgilenedi.

Funktsiyanı berıwdın' bir neshe usılı bar: analitikalıq, tablitsa tu'rında, grafiklik formada ko'rsetiw mu'mkin.

Funktsiya analitikalıq usıl menen berilgende x ha'm u shamalar arasındag'i baylanis formula arqılı an'latiladi.

Funktsiya tablitsalıq usıl menen berilgende x ha'm u shamalar arasındag'i baylanis tablitsa ko'rınisinde jaziladi:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Misali, trigonometriyalıq, logarifmlik funktsiyalardıń tablitsaları belgili.

Aniqlama. $y = f(x)$ funktsiyanin' grafigi dep Oxu tegisligindegi koordinatalari $y = f(x)$ qatnasi menen baylanisqan $R(x, u)$ noqatlarinin' ko'pligine aytiladi.

Funktsiya tegislikte grafik ko'rınisinde su'wretlenedi. Bunda onin' grafigi boyınsha argumenttin' tu'rli ma'nislerine sa'ykes keliwshi funktsiya ma'nisleri tikkeley grafik arqalı tabiladi.

Aniqlama. $D(f) = [a, b]$ kesindisinde aniqlang'an $y = f(x)$ funktsiyasi qa'legen $x_1, x_2 \in [a, b]$ noqatlari ushin $x_1 < x_2$ sha'rti orinlang'anda $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) sha'rtin qanaatlandirsa, onda ol $D(f) = [a, b]$ oblastında o'siwshi (kemiwshi) funktsiya dep ataladi.

Aniqlama. $D(f) = [a, b]$ kesindisinde aniqlang'an $y = f(x)$ funktsiyasi qa'legen $x_1, x_2 \in [a, b]$ noqatlari ushin $x_1 < x_2$ sha'rti orinlang'anda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) sha'rtin qanaatlandirsa, onda ol $D(f) = [a, b]$ oblastında kemimeytug'in (o'speytug'in) funktsiya dep ataladi.

Aniqlama. Simmetriyalı D ko'pliginde aniqlang'an $y = f(x)$ funktsiyasi qa'legen $x_1, x_2 \in D$ noqatlari ushin $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) sha'rtin qanaatlandirsa, onda ol D ko'pliginde juq (taq) funktsiya dep ataladi.

Aniqlama. $D(f) = [a, b]$ kesindisinde aniqlang'an $y = f(x)$ funktsiyasi qa'legen $x_1, x_2 \pm T \in D(f)$ noqatlari ushin, bunda $T \neq 0$, $f(x \pm T) = f(x)$ sha'rtin qanaatlandirsa, onda ol $D(f) = [a, b]$ oblastında periodli funktsiya dep ataladi.

Tiykarg'i a'piwayi (elementar) funktsiyalar:

1. Turaqli funktsiya $u=S$, bunda S - turaqli haqiqiy san

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty); E(y) = C.$$

2. Da'rejeli funktsiya $y = x^\alpha$, bunda α nol'ge ten' bolmag'an turaqli haqiqiy san. Onin' aniqlaniw oblasti ha'm ma'nisleri ko'pligi α nin' ma'nisine baylanisli o'zgeredi.

Misali, eger α jup natural san bolsa, onda

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty); E(y) = [0; +\infty)$$

eger α taq natural san bolsa, onda

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty); E(y) = (-\infty; +\infty).$$

3. Ko`rsetkishli funktsiya  $y = a^x$ , bunda  $a$  - on`, birge ten` bolmag`an turaqli haqiqiy san $a > 0, a \neq 1$.

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty); E(y) = (0; +\infty).$$

4. Logarifmlik funktsiya $y = \log_a x$, bunda a - on`, birge ten` bolmag`an turaqli haqiqiy san $a > 0, a \neq 1$.

$$D(y) = R = (0; +\infty); E(y) = (-\infty; +\infty).$$

5. Trigonometriyalik funktsiyalar:

5.1. $y = \sin x$. Taq ha`m $T = 2\pi$ periodli funktsiya

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty); E(y) = [-1; +1].$$

5.2. $y = \cos x$. Jup ha`m $T = 2\pi$ periodli funktsiya

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty); E(y) = [-1; +1].$$

5.3. $y = \operatorname{tg} x$. Taq ha`m $T = \pi$ periodli funktsiya

$$D(y) = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right\}; E(y) = (-\infty; +\infty).$$

5.4. $y = \operatorname{ctg} x$. Taq ha`m $T = \pi$ periodli funktsiya

$$D(y) = R \setminus \{ \pi + \pi n, n \in Z \}; E(y) = (-\infty; +\infty).$$

6. Trigonometriyalik funktsiyalar:

6.1. $y = \arcsin x$. Taq funktsiya $D(y) = [-1; +1]; E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$.

6.2. $y = \arccos x$. Jup ta taq ta emes funktsiya $D(y) = [-1; +1]; E(y) = [0; \pi]$.

6.3. $y = \operatorname{arctg} x$. Taq funktsiya $D(y) = (-\infty; +\infty); E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$.

6.4. $y = \operatorname{arcctg} x$. Jup ta taq ta emes funktsiya $D(y) = (-\infty; +\infty); E(y) = [0; \pi]$.

Aniqlama. $u = \varphi(x)$ funktsiyasi $D = D(\varphi)$ ko`pliginde aniqlang`an, ma`nisleri ko`pligi $E = E(\varphi)$ ha`m  $y = f(u)$  funktsiyasi ushin  $E$  aniqlaniw oblasti bolsa, onda  $y = f(\varphi(x))$  funktsiyasi  $x$  tin` quramali funktsiyasi dep ataladi.

Quramali funktsiya ekiden artiq sandag`i funktsiyalardan da du`ziliwi mu`mkin.

Aniqlama. A`piwayi (elementar) funktsiya dep tiykarg`i a`piwayi (elementar) funktsiyalardan shekli sandag`i arifmetikaliq a`meller ha`m olardan aling`an quramali funktsiyalardan du`zilgen funktsiyag`a aytiladi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. A`piwayi funktsiyalardin` grafikleri.

2. Periodli funktsiyalardin` qa`siyetleri ha`m grafikleri.

3. Jup ta emes taq ta emes funktsiyalar.

17-lektsiya

Sanli izbe-izlikler

Monotonli, shegaralang`an izbe-izlikler. Izbe-izliktin` shegi. Ko`pliktin` joqarg`i ha`m to`mengi shegaralari. Bol`tsano-Veyershtrass teoremlari. Bir ta`repleme shekler. Funktsiya shegi: noqatdag`i, sheksizliktegi, bir ta`repleme, qa`siyetleri. Shekler haqqinda tiykarg`i teoremlar.

Aniqlama 1. Natural sanlar ko`pliginde aniqlang`an funktsiya, yag`niy $x = f(n), n \in N$ funktsiya sanli izbe-izlik dep ataladi.

Eger n ge 1, 2, 3, ... ha`m t.b. ma`nislerin bersek, onda bul funktsiyanin`  $x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3), \dots$  dara ma`nislerin alamiz, olar izbe-izliktin` ag`zalari yamasa elementleri dep ataladi.

Sanli izbe-izlik $\{x_n\}$ ha`m  $\{f(n)\}$  yamasa  $(x_n)$  tu`rinde belgilenedi. Izbe-izliktin` n-ag`zasi onin` uliwma ag`zasi dep ataladi. Izbe-izliktin` uliwma ag`zasi belgili bolsa, onda izbe-izlik toliq aniqlang`an yamasa berilgen delinedi. Barliq ag`zalari birdey ma`nisti qabil etetug`in izbe-izlik dep ataladi.

Aniqlama 2. Sonday M sani bar bolip, barliq $n \in N$ ushin $x_n < M$ ten`sizligi orinlansa, onda  $\{x_n\}$  izbe-izligi joqaridan shegaralang`an delinedi.

Aniqlama 3. Sonday $M > 0$ sani bar bolip, barliq $n \in N$ ushin $x_n > M$ ten`sizligi orinlansa, onda  $\{x_n\}$  izbe-izligi to`mennan shegaralang`an delinedi.

To`mennan ha`m joqaridan shegaralang`an izbe-izlik shegaralang`an izbe-izlik dep ataladi. Onda sonday $M > 0$ sani bar bolip, barliq $n \in N$ ushin $x_n < M$ ten`sizligi orinlanadi.

Aniqlama 4. Eger qa`legen  $n \in N$  ushin  $x_n < x_{n+1}$  ( $x_n > x_{n+1}$ ) ten`sizligi orinlansa, onda $\{x_n\}$ monotonli o`siwshi (kemiwshi) izbe-izlik dep ataladi.

Aniqlama 5. Eger qa`legen  $n \in N$  ushin  $x_n \geq x_{n+1}$  ( $x_n \leq x_{n+1}$ ) ten`sizligi orinlansa, onda $\{x_n\}$ monotonli o`speytug`in (kemimeytug`in) izbe-izlik dep ataladi.

Aniqlama 6. Eger qa`legen  $\varepsilon > 0$  sani ushin sonday  $N = N(\varepsilon) > 0$  sani bar bolip, barliq  $n \geq N$  ler ushin  $|x_n - a| < \varepsilon$  ten`sizligi orinlansa, onda turaqli a sani $\{x_n\}$ izbe-izliginin` shegi dep ataladi ha`m $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yamasa $x_n \rightarrow a$ tu`rinde belgilenedi.

Eger $\{x_n\}$ izbe-izligi shekke iye bolsa, onda ol jiynaliwshi izbe-izlik dep, keri jag`dayda uzaqlasiwshi izbe-izlik delinedi.

Izbe-izlik shegi tu`siniginin` geometriyalik mag`inasi: Eger qa`legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $N = N(\varepsilon) > 0$ sani bar bolip, $\{x_n\}$ izbe-izliginin`  $n \geq N$  nen baslap barliq ag`zalari a noqatinin`  $\varepsilon$ -do`geregine $\{x_n\}$ izbe-izliginin` shekli sandag`i ag`zalarinan baslap barliq ag`zalari tu`sse, onda turaqli  $a$  sani  $\{x_n\}$  izbe-izliginin` shegi boladi.

Teorema. Eger $\{x_n\}$ izbe-izligi monotonli o'siwshi (kemeyiwshi) ha'm joqaridan (to'mennen) shegaralang'an bolsa, onda ol shekke iye.

Aniqlama 7. M shekli sani ushin to'mendegi eki sha'rt orinlansa, onda ol E ko'pliginin' aniq joqari shegarasi dep ataladi:

1) qa'legen $x \in E$ ushin $x \leq M$ ten'sizligi orinli;

2) qa'legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $x_1 \in E$ noqati bar bolip, onin' ushin

$$M - \varepsilon < x \leq M$$

ten'sizligi orinlanadi. E ko'pliginin' aniq joqari shegarasi

$$\sup E = M \text{ yamasa } \sup\{x\} = M$$

tu'rinde belgilenedi. (Latinsha en' joqarg'i).

Aniqlama 8. M shekli sani ushin to'mendegi eki sha'rt orinlansa, onda ol E ko'pliginin' aniq to'mengi shegarasi dep ataladi:

1) qa'legen $x \in E$ ushin $x \leq m$ ten'sizligi orinli;

2) qa'legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $x_1 \in E$ noqati bar bolip, onin' ushin

$$m \leq x < m + \varepsilon$$

ten'sizligi orinlanadi. E ko'pliginin' aniq to'mengi shegarasi

$$\inf E = m \text{ yamasa } \inf\{x\} = m$$

tu'rinde belgilenedi. (Latinsha en' to'mengi).

Eger E ko'pligi to'mennen yamasa joqaridan shegaralanbag'an bolsa, onin' aniq joqarg'i shegarasi dep $+\infty$ ti, aniq to'mengi shegarasi dep $-\infty$ ti aytadi.

Haqiqiy sanlardin' $\{x_n\}$ izbe-izliginen sheksiz sandag'i elementler toplamin ajiratsaq, oni $\{x_n\}$ izbe-izliginin' u'les izbe-izligi dep ataydi. Eger $\{x_n\}$ izbe-izligi jiynaliwshi bolsa, onda onin' qa'legen u'les izbe-izligi de jiynaliwshi boladi. Eger $\{x_n\}$ izbe-izligi shegaralanbag'an bolsa, onda $+\infty$ ke yamasa $-\infty$ ke jiynalatug'in u'les izbe-izlikti o'z ishine aladi.

Teorema (Boltsano-Veyershtrass). Eger $\{x_n\}$ izbe-izligi shegaralang'an bolsa, onda odan shekli sang'a jiynalatug'in u'les izbe-izlikti ajiratiw mu'mkin.

Aniqlama 9. (Funktsiyanin' noqattag'i shegi). Eger $y = f(x)$ funktsiya $x=a$ noqatinin' bazi bir do'gereginde aniqlang'an bolip ($x=a$ noqatinin' o'zinde aniqlanbag'an boliwi mu'mkin) qa'legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $\delta > 0$ sani bar bolip, $|x-a| < \delta$ ten'sizligin qanaatlandiratug'in barliq $x \neq a$ noqatlar ushin $|f(x) - A| < \varepsilon$ ten'sizligi orinlansa, onda shekli A sani $y = f(x)$ funktsiyanin' $x=a$ noqatindag'i (yamasa $x \rightarrow a$ dag'i) shegi dep ataladi.

Eger A sani $y = f(x)$ funktsiyanin' $x=a$ noqatindag'i shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ yamasa } x \rightarrow a \text{ da } f(x) \rightarrow A$$

tu'rinde belgilenedi.

Aniqlama 10. (Funktsiyanin' sheksizliktegi shegi). Eger $y = f(x)$ funktsiya x tin' jetkilikli u'lken ma'nislerinde aniqlang'an bolip, qa'legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $N > 0$ sani bar bolip, $|x| > N$ ten'sizliin qanaatlandiratug'in barliq x lar ushin $|f(x) - A| < \varepsilon$ ten'sizligi orinlansa, onda turaqli A sani $y = f(x)$ funktsiyanin' $x \rightarrow \infty$ dag'i shegi dep ataladi.

Eger A sani $y = f(x)$ funktsiyanin $x \rightarrow \infty$ dag'i shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ yamasa } x \rightarrow a \text{ da } f(x) \rightarrow A$$

tu`rinde belgilenedi.

Teorema (Shekke iye funktsiyanin` shegaralang`anlig`i). Eger  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  - shekli san bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x=a$  noqattin` bazi-bir do`gereginde shegaralang`an.

Aniqlama 11. (Bir ta`repleme shekler).

1) Eger $y = f(x)$ funktsiya $x=a$ noqattin` bazi-bir  $x < a$  sha`rtin qanaatlandiratug`in bazi bir do`gereginde aniqlang`an bolip ( $x=a$  noqatinin` o`zinde aniqlanbag`an boliwi mu`mkin) qa`legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $\delta > 0$ sani bar bolip, $|x - a| < \delta$ ten`sizligin qanaatlandiratug`in barliq $x \neq a$ noqatlar ushin $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ ten`sizligi orinlansa, onda  $A_1$  sani  $y = f(x)$  funktsiyanin` $x=a$ noqatindag`i (yamasa  $x \rightarrow a - 0$  dag`i) shep ta`repleme shegi dep ataladi.

Eger A sani $y = f(x)$ funktsiyanin`  $x=a$  noqatindag`i shep ta`repleme shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = A_1 \text{ yamasa } \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x) = A_1 \text{ yamasa } f(a - 0) = A_1$$

tu`rinde belgilenedi. Eger $a=0$ bolsa, onda

$$A_1 = f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x).$$

2) Eger $y = f(x)$ funktsiya $x=a$ noqatinin` bazibir  $x > a$  sha`rtin qanaatlandiratug`in bazibir do`gereginde aniqlang`an bolip ( $x=a$  noqatinin` o`zinde aniqlanbag`an boliwi mu`mkin) qa`legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $\delta > 0$ sani bar bolip, $|x - a| < \delta$ ten`sizligin qanaatlandiratug`in barliq $x \neq a$ noqatlar ushin $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ ten`sizligi orinlansa, onda shekli  $A_1$  sani  $y = f(x)$  funktsiyanin` $x=a$ noqatindag`i (yamasa  $x \rightarrow a + 0$  dag`i) on` ta`repleme shegi dep ataladi.

Eger A sani $y = f(x)$ funktsiyanin`  $x=a$  noqatindag`i on` ta`repleme shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A_2 \text{ yamasa } \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x) = A_2 \text{ yamasa } f(a + 0) = A_2$$

tu`rinde belgilenedi. Eger $a=0$ bolsa, onda

$$A_2 = f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x).$$

$f(x)$ funktsiyanin` shep ha`m on` ta`repleme sheklari bir ta`repleme sheklari dep ataladi.

Eger $A_1 = A_2$ bolsa, onda $f(x)$ funktsiyasi $x=a$ noqatinda shekke iye. Bug`an keri uyg`arim da orinli. Demek, $f(x)$ funktsiyanin` a noqatindag`i bir ta`repleme sheklari bar ha`m olar o`z-ara ten` bolsa, yag`niy  $f(a - 0) = f(a + 0)$  bolg`anda ha`m tek sonda g`ana bul funktsiya a noqatinda shekke iye boladi.

Shekler haqqindag`i tiykarg`i teoremlar:

1. Shekli sandag`i funktsiyalardin` algebraliq qosindisinin` shegi qosiliwshi funktsiyalar sheklerinin` algebraliq qosindisina ten`.

2. Shekli sandag'i funktsiyalardin ko'beymesinin shegi sol funktsiyalardin sheklerinin ko'beymesine ten'.

2.1. (Saldari). Turaqli ko'beyiwshini shek belgisinin aldina shig'ariw mu'mkin.

3. Eki funktsiyanin bo'lindisinin shegi, eger bo'limindegi funktsiyanin shegi nolden o'zgeshe bolsa, onda sol funktsiyalardin sheklerinin bo'lindisine ten'.

4. Eger a noqatinin bazibir do'geregine tiyisli barliq x lar ushin $y = f(x) \geq 0$ ha'm $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (A -shekli san) bolsa, onda $A \geq 0$ boladi.

5. Eger a noqatinin bazibir do'geregine tiyisli barliq x lar ushin $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$ ten'sizligi orinlansa, onda $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ boladi.

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. Monotonli izbe-izliklerdin qa'siyetleri.

2. Funktsiya u'zliksizliginin aniqlamalari.

18-lektsiya

Funktsiyanin shegi haqqindag'i teoremlar

Sheksiz kishi ha'm sheksiz u'lken shamalar, qa'siyetleri. Shekler haqqindag'i teoremlar. Sheksiz u'lken ha'm sheksiz kishi funktsiyalar: olardin arasindag'i baylanis, qa'siyetleri. Sheksiz kishi shamalardi salistiriw: «o» ha'm «O» belgileri.

Aniqlama. Eger $f(x)$ funktsiya a noqatinin bazibir do'gereginde aniqlang'an ha'm qa'legen $M > 0$ sani ushin sonday $\delta > 0$ sani bar bolip

$$|x - a| < \delta$$

ten'sizligin qanaatlandiratug'in barliq $x \neq a$ noqatlar ushin $|f(x)| > M$ ten'sizligi orinlansa, onda $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiya sheksizlikke umtiladi (yamasa sheksiz u'lken funktsiya) dep aytiladi ha'm $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ tu'rinde belgilenedi.

Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ bolsa, onda $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiya sheksiz kishi funktsiya dep ataladi.

Teorema. Eger $f(x)$ funktsiya $x \rightarrow a$ da (yamasa $x \rightarrow \infty$ da) sheksiz kishi (u'lken) funktsiya bolsa, onda $\frac{1}{f(x)}$ funktsiyasi sheksiz u'lken (kishi) funktsiya boladi.

Sheksiz kishi funktsiya boladi:

1) Shekli sandag'i sheksiz kishi funktsiyalardin algebraliq qosindisi.

2) Sheksiz kishi funktsiyanin shegaralang'an funktsiyag'a ko'beymesi.

- 3) Sheksiz kishi funktsiyalardin` ko`beymesi.
- 4) Sheksiz kishi funktsiyanin` nolden o`zgeshe shekke iye bolg`an funktsiyag`a qatnasi (bo`lindisi).

Sheksiz kishi shamalardi salistiriw.

1) Eger $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ bolsa, onda α funktsiya β funktsiyag`a qarata joqari ta`rtipli sheksiz kishi funktsiya dep ataladi.

2) Eger $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ bolsa, onda α funktsiya β funktsiyag`a qarata to`mengi ta`rtipli sheksiz kishi funktsiya dep ataladi.

3) Eger $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$, bunda $A \neq 0$ ha`m  $A$  - shekli san bolsa, onda  $\alpha$  funktsiya  $\beta$  funktsiyalari birdey ta`rtipli sheksiz kishi funktsiya dep ataladi.

4) Eger $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ bolsa, onda α funktsiya β funktsiyalari ekvivalentli sheksiz kishi funktsiyalar dep ataladi ja`ne  $\alpha \sim \beta$  tu`rinde belgilenedi.

Sheksiz kishi funktsiyalardi salistiriwda «o» ha`m «O» belgilerinen paydalaniladi: a) Eger  $\alpha$  sheksiz kishi funktsiyasi  $\beta$  sheksiz kishi funktsiyasina salistirg`anda joqariraq ta`rtipli bolsa, onda bul fakt  $\alpha = o(\beta)$  tu`rinde belgilenedi. Misali, $x \rightarrow 0$ da $x^3 = o(x)$.

b) Eger α sheksiz kishi funktsiyasi β sheksiz kishi funktsiyasi menen birdey ta`rtiptegi bolsa, onda bul fakt  $\alpha = O(\beta)$  tu`rinde belgilenedi. Misali $x \rightarrow 0$ da $\sin 3x = O(x)$.

Teorema (Ekvivalentlilik sha`rti).  $\alpha$  ha`m β funktsiyalari ekvivalentli sheksiz kishi funktsiyalar boliwi ushin bul funktsiyalar bir-birinen ta`rtibi olardin` ha`r birinin` ta`rtibinen joqariraq bolg`an sheksiz kishi funktsiyalarg`a pariqlaniwi za`ru`r ha`m jetkilikli.

Teorema (Ekvivalentlilik sheksiz kishi funktsiyalar qatnasi). Eki sheksiz kishi funktsiya qatnasinin` shegi olarg`a ekvivalentli sheksiz kishi funktsiyalardin` qatnasinin` shegine ten`.

Ekvivalentli sheksiz kishi funktsiyalardin` misallari: $x \rightarrow 0$ da

$$\sin x \sim x; \quad \lg x \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad 1 - \cos x \sim x^2 / 2.$$

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Argument x sheksizlikke umtilg`andag`i funktsiya sheginin` geometriyalıq mag`inasi.
2. Sheksiz kishi ha`m sheksiz u`lken funktsiyalardin` qosindisi ha`m ayirmasi qanday qa`siyetke iye funktsiya boladi.

19-lektsiya

A`jayip shekler

Birinshi ha`m ekinshi a`jayip shekler ha`m olardin` a`hmiyeti.  $e$  (Neper) sani, oni juwiq esaplaw. Natural logarifm. A`jayip sheklerdin` qollaniliwlari, ekvivalent sheksiz kishi funktsiyalardin` qollaniliwlari. Aniq emesliklerdi sheshiw: $0/0$; ∞/∞ ; $0 \cdot \infty$ ha`m t.b.

Matematikada ko`plegen qolaniwlarg`a iye bolg`an a`jayip shekler:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \text{ (yamasa } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e).$$

$e=2,71822818\dots$ irratsional sani. Neper sani dep ataladi.

Tiykari e ge ten` bolg`an logarifm natural logarifm dep ataladi:

$$\ln x = \log_e x.$$

Ekvivalent sheksiz kishi funktsiyalardin` sheklerdi esaplawda jiyi qollanilatug`in bazi bir tu`rleri:

$$x \rightarrow 0 \text{ de } \sin x \sim x$$

$$x \rightarrow 0 \text{ de } \operatorname{tg} x \sim x$$

$$x \rightarrow 0 \text{ de } 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$0/0$ tu`rindegi aniq emesliklerdi ten`be-ten` tu`rlendire otirip ∞/∞ tu`rine ha`m kerisinshe alip keliw mu`mkin.  $0 \cdot \infty$  tu`rindegi aniq emeslikler $0/0$ yamasa ∞/∞ tu`rine keltiriledi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

$$1. \text{ Ekinshi a`jayip shektin` } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \text{ tu`rinen } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ tu`rine o`tiw usilin}$$

ko`rsetin`.

2. Birinshi a`jayip shekte sinus funktsiyasinin` orinina tangens funktsiyasin paydalaniw mu`mkin be? Basqa trigonometriyalik funktsiyalardin` qaysisi menen almastiriw mu`mkin?

20-lektsiya

Funktsiyalardin` u`ziliksizligi

Bir argument funktsiyasining u`ziliksizligi: aniqlamalari, bir ta`repleme u`ziliksizlik, funktsiyalarning noqatdag`i ha`m kesindidegi u`ziliksizligi. U`zliksez funktsiyalarning qa`siyetleri. Tiykarg`i elementar funktsiyalarning u`ziliksizligi. U`zilis noqatlari ha`m olarning qa`siyetleri.

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; b)$ intervalida aniqlang`an bolsin. Qa`legen $x_0 \in (a; b)$ noqatsin alamiz, $y_0 = f(x_0)$. Qa`legen  $x \in (a; b)$  noqatin alamiz.  $\Delta x = x - x_0$  ma`nisi argumenttin`  $x_0$  noqatdag`i o`simi dep,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ma`nisi funktsiyaning`  $x_0$  noqatdag`i o`simi dep ataladi.  $\Delta x$  ha`m Δy o`simleri iymek siziqti boylap ha`reketleniwshi noqat koordinatalarining` o`zgeriwi dep ataladi.

U`ziliksiz funktsiyaning` aniqlamalari:

1. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an ha`m  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ten`ligi orinlansa, onda $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatta u`zliksez dep ataladi.

2. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an bolip, qa`legen  $\varepsilon > 0$  ushin sonday  $\delta > 0$  bar bolip,  $|x - x_0| < \delta$  sha`rtin qanaatlandiratug`in qa`legen x ushin

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ten`sizligi orinlansa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`ziliksiz dep ataladi.

3. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an ha`m argumenttin` sheksiz kishi o`simine funktsiyaning` sheksiz kishi o`simi sa`ykes kelse, yag`niy  $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`ziliksiz dep ataladi.

3. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an ha`m argumenttin` sheksiz kishi o`simine funktsiyaning` sheksiz kishi o`simi sa`ykes kelse, yag`niy  $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`ziliksiz dep ataladi.

4. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta shep ha`m on` jaq shekleri bar ja`ne olar o`z-ara ten` bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`ziliksiz dep ataladi.

5. (Bir ta`repleme u`zliksezlik).

a) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; x_0]$ aralig`inda aniqlang`an ha`m  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta shepten u`ziliksiz dep ataladi.

b) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $[x_0; b)$ aralig`inda aniqlang`an ha`m  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta on`nan u`ziliksiz dep ataladi.

6. (Kesindide u`ziliksizlik).

a) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; b)$ araliqtin` ha`r bir noqatta u`zliksez bolsa, onda ol usi araliqta u`ziliksiz funktsiya dep ataladi.

b) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $[a; b]$ kesindisinin barliq ishki noqatlarida u`zliksiz ha`m onin` shetki noqatlarida bir ta`repleme u`ziliqsiz bolsa, onda ol usi kesindide u`ziliqsiz funktsiya dep ataladi.

Noqatta u`ziliqsiz funktsiyalardin` tiykarg`i qa`siyetleri:

1. Eger $y = f(x)$ ha`m  $y = \varphi(x)$  funktsiyalari  $x_0$  noqatsinda u`ziliqsiz bolsa, onda $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x) \cdot \varphi(x)$; $\varphi(x_0) \neq 0$ bolg`anda  $f(x)/\varphi(x)$  funktsiyalari da  $x_0$  noqatinda u`ziliqsiz boladi.

2. $y = \varphi(x)$ funktsiyalari x_0 noqatsinda u`ziliqsiz,  $y_0 = \varphi(x_0)$  ha`m $f(y)$ funktsiyasi y_0 noqatinda u`ziliqsiz bolsa, onda  $f[\varphi(x)]$  quramali funktsiyasi  $x_0$  noqatinda u`ziliqsiz boladi.

3. A`piwayi elementar funktsiyalar o`zleri aniqlang`an noqatlarda u`zliksiz boladi.

4. Elementar funktsiyalar o`zleri aniqlang`an noqatlarda u`zliksiz boladi.

5. (Belginin` turaqlilig`i).

Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta u`ziliqsiz bolsa, onda usi noqattin` sonday $\delta > 0$ do`geregini bar bolip, onda funktsiya  $x_0$  noqattag`i belgisin saqlaydi.

Kesindide u`zliksiz funktsiyalardin` tiykarg`i qa`siyetleri:

1. (Funktsiya shegaralang`anlig`i) Eger $y = f(x)$ funktsiyalari $[a; b]$ kesindisinde u`zliksiz bolsa, onda ol usi kesindide shegaralang`an funktsiya boladi, yag`niy sonday turaqli  $m, M$  sanlari bar bolip, barliq  $x \in [a; b]$  ma`nisleri ushin $m \leq f(x) \leq M$ ten`sizliklari orinlanadi.

2. (Funktsiyanin` en` kishi ha`m en` u`lken ma`nisinin` bar boliwi). Eger  $y = f(x)$  funktsiyalari  $[a; b]$  kesindisinde u`zliksiz bolsa, onda ol usi kesindide o`zinin` en` kishi ha`m en` u`lken ma`nisine erisedi, yag`niy sonday $x_1, x_2 \in [a; b]$ noqatlari bar bolip, barliq $x \in [a; b]$ ma`nisleri ushin  $f(x_1) \leq f(x)$  ha`m $f(x) \leq f(x_2)$ ten`sizliklari orinlanadi.

3. (Funktsiyanin` araliq ma`nisi). Eger $y = f(x)$ funktsiyalari $[a; b]$ kesindisinde u`zliksiz ha`m m ja`ne  $M$  sanlari funktsiyanin` usi kesindidegi sa`ykes en` kishi ja`ne en` u`lken ma`nisleri bolsa, onda funktsiya usi kesindide m ja`ne  $M$  sanlarinin` arasindag`i barliq ma`nislerdi qabillaydi, yag`niy  $m < \mu < M$  sha`rtin qanaatlandiratug`in qa`legen μ sani ushin keminde bir $x = c \in [a; b]$ noqati bar bolip, onin` ushin  $f(c) = \mu$  ten`ligi orinlanadi.

4. (Funktsiyanin` nolge aynaliwi). Eger  $y = f(x)$  funktsiyalari  $[a; b]$  kesindisinde u`zliksiz ha`m kesindinin` ushlarinda tu`rli belgidegi ma`nislerdi qabillasa, onda funktsiya usi kesindide keminde bir $x = c \in [a; b]$ noqati bar bolip, onin` ushin  $f(c) = 0$  ten`ligi orinlanadi.

U`zilis noqatlari aniqlamalari:

1. Eger x_0 noqatta $y = f(x)$ funktsiyasi ushin to`mendegi sha`rtlerdin` keminde birewi orinlansa, onda  $y = f(x)$  funktsiyasi  $x_0$  noqatta u`ziliske iye dep ataladi:

1) funktsiya x_0 noqatinda aniqlanbag`an;

2) funktsiya x_0 noqatinda aniqlang`an, biraq  $f(x_0 - 0)$  ha`m $f(x_0 + 0)$ bir ta`repleme sheklerden keminde birewi bar bolmaydi (aniqlanbag`an);

3) funksiya x_0 noqatida aniqlang'an, bir ta'repleme shekleri bar, biraq olar ten' emes $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$;

4) funksiya x_0 noqatida aniqlang'an, bir ta'repleme shekleri bar ha'm olar o'z-ara ten', biraq funksiyanin' bul noqattag'i ma'nisine ten' emes

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

2. Eger x_0 noqatta $y = f(x)$ funktsiyasi aniqlang'an, bir ta'repleme shekleri bar ha'm olar o'z-ara ten' $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ bolsa, onda x_0 noqati joq etiletug'in u'zilis noqati dep ataladi.

3. Eger x_0 noqatta $y = f(x)$ funktsiyasi aniqlang'an yamasa aniqlanbag'an, bir ta'repleme shekleri bar ha'm olar o'z-ara ten' bolmasa $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, onda x_0 birinshi tu'r u'zilis noqati dep ataladi.

4. Eger x_0 noqatta $y = f(x)$ funktsiyasinin' bir ta'repleme sheklerinin' keminde birewi bar bolmasa yamasa sheksizlikke ten' bolsa, onda x_0 ekinshi tu'r u'zilis noqati dep ataladi.

Jeke tapsirmalar ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. Funktsiya u'zliksizliginin' « $\varepsilon - \delta$ » tu'rindagi (Koshi) aniqlamasin keltirin' ha'm oni naqli misalda keltirin'.

2. Tiykarg'i elementar funktsiyalardin' u'zliksizligi.

3. U'zilis noqatlarinin' funksiya grafigindagi ko'rinisleri. Misallar keltirin'.

21-lektsiya

Bir o'zgeriwshili funktsiyanin' differentsial esabi

Bir o'zgeriwshi funktsiyasinin' tuwindisi ha'm onin' geometriyaliq, mexanikaliq mag'inalari. Tuwindig'a iye bolg'an funktsiyalardin' qa'siyetleri: Tuwindag'a iye emes funktsiyalar: $\sin x, x = k\pi; k \in \mathbb{Z}; |x|, x = 0$. Tuwinlar tablitsasi. Aniq emes funktsiyani differentsiallaw.

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; b)$ intervalinda aniqlang'an bolsin. Qa'legen $x_0, x_0 + \Delta x \in (a; b)$ noqatlarin alamiz. $y = f(x)$ funktsiyasinin' $f(x_0)$ ha'm $f(x_0 + \Delta x)$ o'simlerin du'zemiz, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ qatnasi argument Δx qa o'zgergendegi funktsiyanin' ortasha o'zgeriwi dep ataladi.

Aniqlama. Funktsiya o'simi Δy tin Δx qa qatnasinin Δx nolge umtilg'andag'i shegi $y = f(x)$ funktsiyanin x_0 noqatdag'i tuwindisi dep ataladi ha'm $y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y'|_{x=x_0}$ belgilerinin biri menen jaziladi.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Aniqlama. Eger $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda sheksiz tuwindig'a iye dep ataladi.

Aniqlama. Eger $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shegi bar bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda on' jaq tuwindig'a iye dep ataladi.

Aniqlama. Eger $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shegi bar bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda shep jaq tuwindig'a iye dep ataladi.

Tuwindinin geometriyalik mag'inasi: $y = f(x)$ funktsiyanin x_0 noqatdag'i tuwindisi iymek siziqqa x_0 abstsissali noqatta ju'rgizilgen urinbanin Ox ko'sherinin on' bag'iti menen payda etken mu'yeshinin tangensine ten'.

Tuwindinin mexanikalik mag'inasi. Materialliq noqattin tezligi onin qozg'alis nizaminan (joldan) aling'an tuwindig'a ten'.

Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatinda shekli tuwindig'a iye, yag'niy $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shekli san bolsa, onda bul funktsiya usi noqatta tuwindig'a iye delinedi.

Eger $y = f(x)$ funktsiya (a, b) intervaldin ha'r bir noqatinda tuwindig'a iye bolsa, onda bul funktsiya usi intervalda tuwindig'a iye delinedi.

Eger $y = f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesindinin ha'r bir ishki noqatinda differentsiallaniwshi ha'm shekli bir ta'repleme $f'_+(a)$ ha'm $f'_-(b)$ tuwindilari bar bolsa, onda bul funktsiya usi kesindide tuwindig'a iye delinedi.

Tuwindig'a iye bolg'an funktsiyalardin qa'siyetleri:

1. Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatinda differentsiallaniwshi bolsa, onda ol usi noqatta u'zliksiz dep ataladi.

Keri uyg'arim uliwma alg'anda duris emes: bazi bir noqatta u'zliksiz biraq sol noqatta tuwindig'a iye bolmag'an funktsiyalar bar.

Misali, $|\sin x|$ funktsiyasi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ noqatlarinda; $|x|$ funktsiyasi $x=0$ noqatinda u'zliksiz, biraq tuwindig'a iye emes. Haqiyqatinda da,

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

funktsiyasi $x=0$ noqatida uʻzliksiz, al $x=0$ noqatindagʻi shep jaq haʻm onʻ jaq tuwindilari tenʻ emes: $f'_-(0)=tg135^0=-1$, $f'_+(0)=tg45^0=1$, $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, yagʻniy bul funktsiya $x=0$ noqatida tuwindigʻa iye emes.

2. Turaqlininʻ tuwindisi nolge tenʻ: $C'=0$.

3. Eger $u=u(x)$ haʻm $v=v(x)$ funktsiyalari x_0 noqatida differentsiallaniwshi bolsa, onda olardinʻ algebralik qosindisi, koʻbeymesi haʻm boʻlindisi (boʻlimi nolge tenʻ bolmagʻan jagʻdayda) usi noqatta differentsiallaniwshi boladi:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; (u \cdot v)' = u'v + uv'; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

3.1. (Saldari). Turaqli koʻbeytiwshini tuwindi belgisininʻ aldina shigʻariw muʻmkin.

4. (Quramali funktsiya tuwindisi). Eger $y=f(u)$ haʻm $u=\varphi(x)$ differentsiallaniwshi funktsiyalar bolsin. Quramali $y=f(u)$ funktsiyaninʻ gʻaʻrezsiz oʻzgeriwshi x boyinsha tuwindisi usi funktsiyaninʻ araliq argument boyinsha tuwindisininʻ araliq argumenttinʻ gʻaʻrezsiz oʻzgeriwshi x boyinsha tuwindisina koʻbeymesine tenʻ, yagʻniy $y'_x = y'_u(u)u'_x(x)$.

5. (Keri funktsiya tuwindisi). Eger $y=f(x)$ funktsiya x_0 noqattinʻ bazi bir doʻgereginde monotonli, uʻzliksiz, differentsiallaniwshi haʻm $f(x_0)\neq 0$ bolsa, onda ogʻan keri $x=\varphi(y)$ funktsiya $y_0=f(x_0)$ noqatta differentsiallaniwshi, yagʻniy $\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ tuwindigʻa iye boladi.

6. (Parametrlik koʻriniste berilgen funktsiya tuwindisi). Eger funktsiya $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

parametrlik koʻrinishinde berilgen bolsa, onda oninʻ tuwindisi $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ formulasi menen tabiladi.

Tuwindilar tablitsasi. Meyli $u=u(x)$ haʻm $v=v(x)$ funktsiyalari differentsiallaniwshi funktsiyalar bolsin.

1. $C'=0$, $C=const$

2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$, $\alpha=const$

2.1. $x'=1$, x -argument

2.2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u'$

2.3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$

3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a=const$, $a>0$, $a\neq 0$ 3.1. $(e^u)' = e^u \cdot u'$, $(e^x)' = e^x$

4. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$

5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}u'$, $a=const$, $a>0$ ($a\neq 0$) 5.1. $(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

8. $(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u}u'$

9. $(ctg u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}u'$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$11. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$12. (\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$$

$$13. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$$

$$14. (shu)' = chu \cdot u'; shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$15. (chu)' = shu \cdot u'; chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$16. (thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'; thu = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

$$17. (cthu)' = \frac{1}{sh^2 u} \cdot u'; cthu = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

Aniq emes $F(x, y) = 0$ tu`rindegi funktsiyani differentsiallaw (tuwindisin tabiw) ushin u tin` x funktsiyasi ekenligin esapqa ala otirip berilgen ten`leme x boyinsha differentsiallanadi wa`m aling`an ten`lik y' qa qarata sheshiledi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Aniqlaniw oblastinin` barliq noqatlarinda tuwindig`a iye emes funktsiyani jazin`.
2. Giperbolaliq funktsiyalardin` tuwindilari.
3. Trigonometriyalik ha`m keri trigonometriyalik funktsiyalardin` tuwindilari.
4. Iymek siziqqa ju`rgizilgen urinbanin` aniqlaması.

22-lektsiya

Funktsiya differentsiali

Bir o`zgeriwshili funktsiyasinin` differentsiali. Tuwindi ha`m differentsial arasindag`i baylanis. Quramali funktsiyanin` differentsiali ha`m differentsialdin` invariantlilig`i. Funktsiya differentsialinin` geometriyalik mag`inasi. Juwıq esaplawlarda differentsialdin` qollaniliwlari. Funktsiyani sızıqlandiriw: geometriyalik ha`m mexanikalik mag`inasi.

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $[a, b]$ kesindisinde differentsiallanıwshi bolsın. Bul ha`r qanday $x \in [a, b]$ ushin

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

shekli tuwindisinin` bar ekenligin bildiredi. Tuwindi nolge ten` bolmasa, onda (1) ten`likten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

ten`ligin jazıw mu`mkin, bunda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0$.

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

yamasa

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta.$$

$\beta = \alpha\Delta x$ shamasi Δx qa salistirg`anda joqari ta`rtipli sheksiz kishi shama. Tiykarg`i  $f'(x)\Delta x$  shamasi funktsiyanin` differentsiali dep ataladi.

$y = f(x)$ funktsiyanin` differentsiali du yamasa  $df(x)$  tu`rinde belgilenedi:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

$u=x$ funktsiyanin` differentsialin tabamiz.  $u'=1$  bolg`anliqtan

$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x \text{ yamasa } dx = \Delta x.$$

Demek,

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(cu) = cd(u); \quad d(u \cdot v) = vdu + u dv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Meyli $y = f(x)$ funktsiya x g`a`rezsiz argumentlerinin` differentsiallaniwshi funktsiyasi bolsa, onda $dy = f'(x)\Delta x$.

Endi $y = f(u); u = \varphi(x)$ quramali funktsiyasi argumentlerinin` differentsiallaniwshi funktsiyalari bolsin. Onda

$$dy = f'(u)du = f'_u(u)\varphi'(x)dx.$$

Differentsialdin` eki an`latpasin salistirip, onin` tu`rinin` o`zgermeytug`inlig`in (invariantlilig`in) ko`remiz. Demek, funktsiya argumentinin` basqa argumenttin` araliq funktsiyasi boliwi yamasa g`a`rezsiz o`zgeriwshi boliwina baylanissiz bir tu`rdi qabil etedi.

Differentsialinin` geometriyalıq mag`inasi: $y = f(x)$ funktsiyanin`  $x$  ha`m Δx berilgen ma`nislerine sa`ykes keliwshi differentsiali $y = f(x)$ iymek siziqqa x noqatında ju`rgizilgen urınbanin` ordinatasinin` o`simine ten` boladi.

Juwiq esaplawlarda differentsialdin` qollaniliwlari

$$\Delta y = dy; \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Funktsiyanı sizıqlandırıw: $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatinin` bazi bir do`gereginde differentsiallaniwshi bolsa, onda

$$y \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

juwiq ten`ligin jazıw mu`mkin. Bul geometriyalıq jaqtan berilgen $y = f(x)$ funktsiyanın x_0 noqatinin` bazi bir do`gereginde $(x_0; y_0)$ noqatındag`i urınba menen almasıırıw`a ten` ku`shli ekenligin bildiredi. Bunday almasıırıw funktsiyanı sizıqlandırıw dep ataladı.

Funktsiyanı sizıqlandırıw usilinin` mexanikalıq mag`inasi: materiallıq noqattin` bir tegis bolmag`an ha`reketi bazi bir kishkene waqıt aralıg`ında tegis ha`reket penen almasıırıladı.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Giperbolalıq funktsiyalardin` differentsialların tabın`.
2. $\sqrt{17}$ saninin` juwiq ma`nisi tabın`.

Joqari ta`rtipli tuwindilar

Bir o`zgeriwshi funktsiyasining joqari ta`rtipli tuwindilari. Aniq, parametrlik ha`m aniq emes tu`rde berilgen funktsiyalardin` tuwindilari. Leybnits formulasi. Joqari ta`rtipli differentsiallar ha`m invariantliqtin` buziliwi. Joqari ta`rtipli tuwindilardin` ($n=2; 3$) geometriyalik ha`m fizikaliq mag`inalari.

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $[a, b]$ kesindisinde differentsiallaniwshi bolsin. $f(x) = \varphi(x)$ funktsiyasining` tuwindisin qarastiramiz.

Aniqlama. Berilgen funktsiya tuwindisidan aling`an tuwindi usi funktsiyaning` ekinshi ta`rtipli tuwindisi yamasa ekinshi tuwindisi dep ataladi ha`m y'' yamasa $f''(x)$ tu`rinde belgilenedi: $y'' = (y')' = f''(x)$.

Ekinshi ta`rtipli tuwindidan aling`an tuwindi usi funktsiyaning` u`shinshi ta`rtipli tuwindisi yamasa u`shinshi tuwindisi dep ataladi ha`m  $y'''$  yamasa  $f'''(x)$  tu`rinde belgilenedi.

($n-1$) ta`rtipli tuwindidan aling`an tuwindi usi funktsiyaning`  $n$ -ta`rtipli tuwindisi yamasa n -tuwindisi dep ataladi ha`m  $y^{(n)}$  yamasa  $f^{(n)}(x)$  tu`rinde belgilenedi:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

Leybnits formulasi:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Joqari ta`rtipli differentsiallar: Funktsiya differentsialinan aling`an differentsial ekinshi ta`rtipli differentsial yamasa ekinshi differentsial dep ataladi ha`m d^2y tu`rinde belgilenedi.

($n-1$)-ta`rtipli differentsialdan aling`an differentsial usi funktsiyaning`  $n$ -ta`rtipli differentsiali yamasa n -differentsiali dep ataladi ha`m  $d^n y = y^{(n)}dx^n$  tu`rinde belgilenedi:

Eger $z = F(x, y)$ tu`rindegisi funktsiya bolsa, onda

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z.$$

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. $\cos x$ funktsiyasining` barliq tuwindilarin (yag`niy n -ta`rtipli tuwindisin) tabin`.
2. x -tin` natural logarifmnin` barliq differentsiallarin tabin`.

24-lektsiya

Differentsiallaniwshi funktsiyalardin` qa`siyetleri

Bir o'zgeriwshinin differentsiallaniwshi funktsiyalari haqqinda tiykarg'i tastiyiqlawlar: Roll, Lagranj, Koshi, Ferma teoremlari, olardin geometriyalıq mag'inalari. Anıq emesliklerdi sheshiwdin Lopital qag'iydasi. $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 tu'rindegi anıq emeslikler.

Ferma teoremasi (Tuwindinin noli). Eger $y = f(x)$ funktsiyasi bazi-bir $[a, b]$ kesindisinde anıqlang'an, u'zliksiz, differentsiallaniwshi ha'm intervaldin ishki $x=s$ noqatında en' u'lken (en' kishi) ma'nisine iye bolsa, onda $f'(c) = 0$.

Roll teoremasi (Tuwindinin nolleri haqqında i teorema). Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $[a, b]$ kesindisinde anıqlang'an ha'm u'zliksiz, (a, b) intervalında differentsiallaniwshi, kesindinin shetki noqatlarında ten' $f(a) = f(b)$ ma'nislerdi qabillasa, onda kesindinin ishinde keminde bir $x = c \in (a, b)$ noqatı bar boladı ha'm onda tuwindinin ma'nisi nolge ten' $f'(x) = 0$ boladı.

Geometriyalıq mag'inasi: Teorema sha'rtleri orınlang'anda $[a, b]$ kesindisinen keminde bir $x=s$ noqati tabilip, funktsiya grafigine $x=s$ noqatında ju'rgizilgen urınba Ox ko'sherine parallel boladı.

Lagranj teoremasi (Shekli o'simler haqqında i teorema). Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $[a, b]$ kesindisinde anıqlang'an ha'm u'zliksiz, (a, b) intervalında differentsiallaniwshi bolsa, onda $[a, b]$ kesindisinin ishinen keminde bir $x = c \in (a, b)$ noqati bar boladı ha'm bul noqatda

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

ten'ligi orınlanadı.

Bul formula Lagranj formulasi dep ataladı.

Geometriyalıq mag'inasi: Teorema sha'rtleri orınlang'anda $[a, b]$ kesindisinen keminde bir $x=s$ noqati tabilip, funktsiya grafigine $x=s$ noqatında ju'rgizilgen urınba $(a; f(a))$ ha'm $(b; f(b))$ noqatlarında bolg'an xordag'a parallel boladı.

Ko'binese Lagranj formulasin

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1$$

tu'rinde jazip, oni shekli ayirmalar formulasi dep ataydı.

Eger $f(x)$ ha'm $\varphi(x)$ funktsiyalari $[a, b]$ kesindisinde anıqlang'an ha'm u'zliksiz, (a, b) intervalında differentsiallaniwshi barlıq $x \in (a, b)$ noqatlari ushin $\varphi'(x) \neq 0$ bolsa, onda $[a, b]$ kesindisinin ishinen keminde bir $x = c \in (a, b)$ noqati bar boladı ha'm bul noqatda

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

ten'ligi orınlanadı, bunda $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Lagranj teoremasi Koshi teoremasinin dara jag'dayı.

Lopital qag'iydasi. 1. Eger $f(x)$ ha'm $\varphi(x)$ funktsiyalari $x=a$ noqattin bazibir do'gereginde u'zliksiz, a noqattin o'zinen tisqari usi do'gerekte differentsiallaniwshi bolip, usi

do`gerekte  $f(a)=0$ ;  $\varphi(a)=0$ ,  $\varphi'(x) \neq 0$  ha`m shekli yamasa sheksiz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ shegi bar bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ shegi de bar boladi ha`m  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$  ( $\varphi'(x) \neq 0$ ) ten`ligi orinli boladi.

2. $f'(a)=0$; $\varphi'(a)=0$ ha`m  $f'(x)$  ja`ne $\varphi'(x)$ tuwindilari joqaridag`i (Lopital` qag`iydasi) sha`rtlerin qanaatlandirsa, onda ol usildi ekinshi ma`rtebe de qollaniw mu`mkin:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Usilay dawam ete beriw mu`mkin.

3. Lopital` qag`iydasi $x \rightarrow \infty$ da $F(x) \rightarrow 0$, $\varphi(x) \rightarrow 0$ bolg`anda ha`m orinli boladi, yag`niy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

4. Eger $f(x)$ ha`m  $\varphi(x)$  funksiylari  $x=a$  noqatinin` bazi bir do`gereginde u`zliksiz, a noqattin` o`zinen tisqari usi do`gerekte differentsiallaniwshi bolip, usi do`gerekte

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0$$

ha`m shekli yamasa sheksiz  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$  shegi bar bolsa, onda  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  shegi de bar boladi ha`m $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ ten`ligi orinli boladi.

Bul tastiyoqlaw $x \rightarrow \infty$ da ha`m o`z ku`shin aqlaydi.

Aqirg`i an`latpanin` on` ta`repindegi (shekli yamasa sheksiz) shek bar bolsa, onda Lopital` qag`iydasi orinli boladi. Shep ta`reptegi shek bar bolg`an bir waqitta on` ta`reptegi shek bar bolmawi mu`mkin. Bunday jag`daylardi Lopital` qag`iydasin paydalanbay, an`latpani ten`be-ten` tu`rlendiriw, a`jayip sheklerge alip keliw, yamasa basqasha usillardan paydalaniwg`a tuwra keledi. Sheklerdi esaplaw barisinda payda bolg`an aniq emesliklerdi sheshiw ushin Lopital` qag`iydasi universalli usil emes.

5. $0 \cdot \infty$ tu`rindegi aniq emeslikler. Bunday tu`rdegi aniq emesliklerdi ashiw degende $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ bolg`anda  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \varphi(x)$  shegin tabiw tu`siniledi. Izlenip atirg`an shekti tu`rlendirip jazamiz:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \text{ yamasa } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ha`m  $0 \cdot \infty$  tu`rindegi aniq emeslikti joqarida qarastirilg`an  $\frac{0}{0}$  yamasa  $\frac{\infty}{\infty}$  tu`rindegi aniq emesliklerdin` birine alip kelemiz.

6. $\infty - \infty$ tu`rindegi aniq emeslikler. Bunday tu`rdegi aniq emesliklerdi ashiw degende $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ bolg`anda  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \varphi(x)]$  shegin tabiw tu`siniledi. Izlenip atirg`an shekti tu`rlendire otirip $\frac{0}{0}$ yamasa $\frac{\infty}{\infty}$ tu`rindegi aniq emesliklerdin` birine alip kelemiz.

7. 1^∞ , 0^0 , ∞^0 tu`rindegi aniq emeslikler. Bunday tu`rdegi aniq emesliklerdi ashiw degende

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ bolg`anda 1^∞ ,

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ bolg`anda 0^0 ,

v) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ bolg`anda ∞^0 ,

tu`rindegi aniq emeslik bolatug`in $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ shegin tabiw tu`siniledi.

Bul u`sh jag`dayda da funktsiya aldin ala logarifmlenedi ha`m  $0 \cdot \infty$  tu`rindegi aniq emeslik alinadi ha`m ol tu`rlendire otirip $\frac{0}{0}$ yamasa $\frac{\infty}{\infty}$ tu`rindegi aniq emesliklerdin` birine alip klinedi. Odan keyin logarifmnin` shegi boyinsha berilgen funktsiya shegi tabiladi. Aling`an na`tiyje potentsirlenedi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Birinshi ha`m ekinshi a`jayip sheklerdi Lopital` qag`iydasin paydalanip tekserin`.
2. Ferma teoremasi ha`m onin` da`lilleniwi.
3. Lagranj teoremasinin` qollaniliwlari.

25-lektsiya

Teylor ha`m Makloren formulalari

Tuwindi menen baylanisli ma`seleler matematiklerdi erte da`wirden-aq qiziqtirip kelgen. Berilgen funktsiyanin` tuwindisin ha`m kerisinshe berilgen tuwindi ma`nisleri boyinsha funktsiyani tabiw ushin olardi sheksiz qatarlarg`a jayiw za`ru`rligi kelip shiqqan. Bunin` ushin Nyuton funktsiyani to`mendegi ko`rinistegi ag`zalari sheklenbegen sanda o`siwshi, sheksiz da`rejeli qatar menen almastirdi.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ koeffitsientleri, ag`zalar sani qanshelli o`sken sayin (1) an`latpanin` ma`nisin sonshelli da`l beretug`inday etip aling`an.

Solay etip $\frac{1}{1+x}$ funktsiyasin to`mendegi qatar menen almastirdi.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (2)$$

Eger $|x| < 1$ bolsa, onda $1, -x, x^2, \dots$ agzalari kemeyiwshi geometriyaliq progresiyani du`zedi ha`m qosindisi $\frac{1}{1+x}$ ge ten`.

Eger $|x| \geq 1$ bolsa, onda (2) qatar qosindisi $n \rightarrow \infty$ da $\frac{1}{1+x}$ ge umtilmaydi.

Sonin` ushin da Nyuton x tin` jeterli da`rejede kishi ma`nisleri menen sheklengen.

Nyuton funktsiyalardi sheksiz qatarlarga jayiw ushin bunnan da basqa medodlardan da paydalang`an. Ol on` pu`tin m ler ushin erterekte Paskal ta`repinen ornalastirilg`an formulani m nin` teris ha`m bo`lshek ma`nisleri ushin qollandi. Bul formulani da`slepki formasi to`mendegishe edi:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad (3)$$

m=-1 bolg`anda biz (2) ge iye bolamiz:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

eriwshili funktsiyalardi Teylor formulasi boyinsha jayiw sha`rtleri. Qaldir ag`zalardi (Lagranj formasindag`i) bahalaw usillari. Tiykarg`i a`piwayi funktsiyalardin` Makloren formulasi boyinsha jayilmalari. Teylor ha`m Makloren formulalarinin` juwiq esaplawlarda qollaniliwlari. Funktsiyalardin` ma`nislerin EEM de esaplaw.

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $x=a$ noqatisinin` bazi bir do`gereginde $(n+1)$ ta`rtipke shekemgi tuwindig`a (bunda $(n+1)$ - tuwindi da kiredi) iye bolsin.

Teylor ko`pag`zalisi:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Teylor formulasi:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

bunda $R_n(x)$ -qaldir ag`za dep ataladi. Lagranj formulasindag`i qaldir ag`zasi:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x)$$

$x=0$ dep uyg`arsaq, Teylor formulasinin` dara jag`dayi bolg`an Makloren formulasina iye bolamiz:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

bunda

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \in (a, x).$$

A`piwayi funktsiyalar jayilmalari:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\exp(\xi x) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^n \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \text{ bunda: } \xi \in (0,1)$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(\xi x + n\pi) \cdot x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x), \text{ bunda: } \xi \in (0,1). \end{aligned}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x), \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^n (-1)^n \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x),$$

$$(1+x)^n = \sum_{n=0}^n (-1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^n (-1)^n x^n + R_n(x).$$

Taylor formulasi funktsiyalardin` ma`nislerin EEM de esaplaw ushin algoritmlerdi aliwdin` tiykarg`i deregi bolip tabiladi. Bunin` ushin qaldiq ag`za berilgen da`llikten kishi bolg`ang`a shekemgi qosiliwshi alinadi.

Argumenttin` jetkilikli kishi ma`nisleri ushin to`mendegi juwiq formulalar paydalaniladi:

$$1. \sin x \approx x \qquad 1.1. \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

$$2. \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad 2.1. \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$3. e^x \approx 1 + x \qquad 3.1. e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$3.2. e \approx 2 + \frac{1}{2!} \qquad 3.3. e^x \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$4. \ln x \approx x \qquad 4.1. \ln x \approx x - \frac{x^2}{2}$$

$$4.2. \ln x \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$5. (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

$$5.1. \frac{1}{1+x} \approx 1-x$$

$$5.2. \frac{1}{(1+x)^2} \approx 1-2x$$

$$5.3. \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$$

$$5.4. \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$$

$$5.5. \sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{x}{3}$$

$$5.6. \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1-\frac{x}{3}$$

Jeke jumis tapsirmalari ha'm tekseriw ushin sorawlar

1. $\cos(2x)$, ctgx funktsiyalarin Makloren formulasi boyinsha jayin`.
2. $\sin 2$ ma`nisi 0.001 da`lligi menen esaplan`.

26-lektsiya

Funktsiyalardi tuwindini paydalanip izertlew

Bir o`zgeriwshinin` funktsiyalarin tuwindini paydalanip izertlew. Funktsiyanin` o`siw ha'm kemiw sha`rtleri, ekstremum noqatlari. Ekstreminin` za`ru`rli ha'm jetkilikli sha`rtleri. Funktsiyanin` izertlewde joqari ta`rtipli tuwindilardin` qollaniliwlari.

Aniqlama. Eger argumenttin`  $(a,b)$  araliqqa tiyisli u`lken ma`nisine  $y=f(x)$  funktsiyanin` u`lken ma`nisi sa`ykes kelse, onda berilgen funktsiya  $(a,b)$  aralig`inda o`siwshi funktsiya dep ataladi.

Aniqlama. Eger argumenttin`  $(a,b)$  araliqqa tiyisli u`lken ma`nisine  $y=f(x)$  funktsiyanin` kishi ma`nisi sa`ykes kelse, onda berilgen funktsiya (a,b) aralig`inda kemiwshi funktsiya dep ataladi.

Bul aniqlamalardi qisqasha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ - o`siwshi funktsiya}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ - kemiwshi funktsiya}$$

tu`rinde jazip ko`rsetiw mu`mkin.

Teorema (Funktsiyanin` o`siwshi boliwinin` za`ru`rli sha`rti). Eger (a,b) intervalinda differentsiallanish $y=f(x)$ funktsiya o`siwshi bolsa, onda bul funktsiyanin` tuwindisi intervaldin` barliq noqatlarinda teris bolmawi za`ru`r, yag`niy barliq $x \in (a,b)$ ushin $f'(x) \geq 0$.

Teorema (Funktsiyanin` kemiwshi boliwinin` za`ru`rli sha`rti). Eger  $(a,b)$  intervalinda differentsiallanish  $y=f(x)$  funktsiya kemiwshi bolsa, onda bul funktsiyanin` tuwindisi intervaldin` barliq noqatlarinda on` bolmawi za`ru`r, yag`niy barliq $x \in (a,b)$ ushin $f'(x) \leq 0$.

Teorema (*Funktsiyanin` o`siwshi (kemiwshi) boliwinin` jetkilikli sha`rti*). Eger $[a, b]$ kesindisinde u`zliksiz bolg`an $y = f(x)$ funktsiyasi ha`r bir ishki noqatta on` tuwindig`a iye bolsa, onda bul funktsiya  $[a, b]$  kesindisinde o`siwshi (kemiwshi) boladi.

Aniqlama. Eger $y = f(x)$ funktsiyanin`  $x_0$  noqatdag`i ma`nisi usi funktsiyanin` usi noqattin` jetkilikli kishi do`geregindegi qalg`an ma`nislerinen u`lken (kishi) bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatda maksimumg`a (minimumg`a) iye delinedi.

Eger funktsiya $[a, b]$ kesindide aniqlang`an ha`m u`zliksiz bolsa, onda bul funktsiya o`zinin` maksimum ha`m minimumlarina x tin` usi kesindinin` ishindeg`i ma`nislerinde erisedi.

Funktsiyanin` maksimumlari ha`m minimumlari funktsiyanin` ekstremumlari yamasa ekstremal ma`nisleri dep ataladi.

Teorema (*Ekstremumnin` za`ru`rli sha`rti*). Eger differentsiallaniwshi $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatda ekstremumg`a iye bolsa, onda onin` usi noqatdag`i tuwindisi nolge ten` boliwi za`ru`r, yag`niy $f'(x_0) = 0$.

Teoremanin` geometriyalıq mag`inasi: differentsiallanıwshi funktsiya ushin ekstremum noqatında ju`rgizilgen urınba  $Ox$  ko`sherine parallel boladi.

Eger funktsiya noqatda ekstremumg`a iye bolsa, onda tuwindi bul noqatda nolge ten`, sheksizlikke ten` yamasa bar bolmaydi. Bunday noqatlar kritik (statsionar) noqatlar dep ataladi. Ekstremumlardi kritik (statsionar) noqatlardan izlew kerek.

Funktsiyanin`  $[a, b]$  kesindidegi maksimum ha`m minimumlari ba`rqulla onin` usi kesindidegi en` u`lken ha`m en` kishi ma`nisleri bola bermeydi.

Teorema (*Ekstremumnin` jetkilikli sha`rti*). Eger x_0 kritikaliq noqatti o`z ishine aliwshi intervalda  $y = f(x)$  funktsiyanin` $f'(x)$ tuwindisi x_0 noqatdan o`tkende belgisin o`zgertse, onda belgi «+» ten «-» ke o`zgergende  $x_0$  noqat maksimum noqatsi, belgi «-» ten «+» ke o`zgergende x_0 noqat minimum noqatsi boladi.

Funktsiyanin` ekstremumg`a iye boliwi ushin kritik (statsionar) noqatlar do`gereginde onin` tuwindisinin` ha`r qiyli belgilerge iye boliwi jetkilikli.

Teorema. $f'(x_0) = 0$ bolip, funktsiyanin` ekinshi ta`rtipli tuwindi bar ha`m  $f''(x_0) \neq 0$  bolsa, onda  $x = x_0$  noqatda ekstremum bar boladi:  $f''(x_0) < 0$  bolg`anda maksimumg`a,  $f''(x_0) > 0$  bolg`anda minimumg`a erisedi.

Eger x_0 kritik noqatda $f''(x_0) = 0$ bolsa, onda funktsiyanı izertlew basqa usil menen alıp bariladi ha`m bul noqatda to`mendegi hallardin` birewi boliwi mu`mkin:

a) minimum, b) maksimum, v) maksimum da minimum da joq.

Eger $f'(x_0) = 0$ ha`m  $f''(x_0) = 0$  bolsa, onda funktsiyanı izertlew ushin Teylor formulasinan paydalanamiz:  $y = f(x)$  funktsiya  $x = x_0$  noqat do`gereginde u`zliksiz  $n$ -ta`rtipli tuwindig`a iye ha`m $x = x_0$ noqatda $(n-1)$ -ta`rtipke shekemgi bolg`an tuwindilarinin` ha`mmesi nolge ten` dep uyg`arayıq. Onda Teylor formulasi boyınsha

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \xi \in [x_0; x]$$

yamasa

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$$

Bunda birneshe dara jag`daylar boliwi mu`mkin:

1. n-jup san.

a) $f^{(n)}(x_0) < 0$ bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiya $x=x_0$ noqatinda maksimumg`a iye boladi.

b) $f^{(n)}(x_0) > 0$ bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiya $x=x_0$ noqatinda minimumg`a iye boladi.

2. n-taq san.

a) $f^{(n)}(x_0) < 0$ bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiya $x=x_0$ noqatinda maksimumg`a da minimumg`a da iye bolmaydi (ekstremum joq), funktsiya kemeyiwshi boladi.

b) $f^{(n)}(x_0) > 0$ bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiya $x=x_0$ noqatinda maksimumg`a da minimumg`a da iye bolmaydi (ekstremum joq), funktsiya o`siwshi boladi.

Jeke jumis tapsirmalari ha`m tekseriw ushin sorawlar

1. Kritikaliq noqatlari ha`m ekstremum noqatlari tu`siniklari, ayirmashiliqlari.

2. $y = 2x^2 + 1$ funktsiyasinin` o`siw aralig`in ko`rsetin`.

Ádebiyatlar

1. John James Stewart. Calculus. Seventh editions. Metric version. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.
2. Д. Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. -М.: Айрис Пресс, 2008.

3. Ю.Ф. Сенчук. Математический анализ для инженеров. 1,2 часть-Харьков: НТУ «ХПИ», 2003.-408 с.
4. Axmedov A.B., Shamsiyev R.B., Shamsiyev D.N., Pirmatov Sh.T. Oliy matematika. Darslik, 1 qism. Toshkent, “Fan va texnologiyalar” nashriyoti 2018. -366 б.
5. Shamsiyev R.N., Shamsiyev D.N., Pirmatov Sh.T. Oliy matematika. Darslik, 2 qism. Toshkent, “Fan va texnologiyalar” nashriyoti 2020. -324 б (нашрда).
6. Xurramov SH. R. Oliy matematika. 1,2-qism. – Toshkent: “Tafakkur” nashriyoti, 2018.
7. Axmedov A.B., SHodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., Shamsiyev D.N. Oliy matematikadan individual topshriqlar. 1 qism. –Toshkent: O’zbekiston ensiklopediyasi, 2014.
8. Xudayarov B.A. MATEMATIKA. Chiziqli algebra va analitik geometriya. Darslik. I qism. Toshkent, “Fan va texnologiyalar” nashriyoti 2018. -284b.
9. Axmedov A.B., SHodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., SHamsiyev D.N. Oliy matematikadan individual topshriqlar. 2 qism.–Toshkent: “SANO STANDART” nashriyoti, 2018.
10. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие.-22-е изд., перераб.-СПб., Издательство «Профессия», 2001.-432 с.