

VARIATION HISOB VA OPTIMAL BOSHQARUV

I. ISRAILOV, S. OTAKULOV

Samarqand 2012

Mundarija

1- ma'ruza:	Variatsion hisobning predmeti. Funksionalning ekstremumi
1.	Variatsion hisobning klassik masalalari. Variatsion hisob predmeti
2.	Asosiy funksional fazolar
3.	Chiziqli va kvadratik funksionallar. Funksionalning variatsiyalari
4.	Funksionalning ekstremumi. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari
2- ma'ruza:	Variatsion hisobning asosiy masalasi (birinchi variatsiyani tekshirish)
1.	Masalaning qo'yilishi. Kuchli va kuchsiz lokal ekstremumlar
2.	Asosiy lemmalar (Lagranj, Dyubua-Reymon lemmalari)
3.	Eyler tenglamasi, uning xususiy hollari
4.	Gilbert teoremasi
5.	Bo'lakli – silliq joyiz funksiyalar. Eylerning integro-differensial tenglamasi, natijalar
3- ma'ruza:	Variatsion hisobning asosiy masalasi (ikkinchi variatsiyani tekshirish, ekstremumning yetarli shartlari)
1.	Ikkinchi variatsiyani hisoblash. Lejandr sharti
2.	Yakobi tenglamasi. Yakobi sharti
3.	Kuchsiz ekstremumning yetarli shartlari
4.	Kuchli ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari
5.	Kvadratik funksional uchun natija

4- ma'ruza: Variatsion hisob asosiy masalasining ba'zi umumlashmalari	
1.	Bir necha funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionalning ekstremumi
2.	Yuqori tartibli hosilalarga bog'liq funksionalning ekstremumi
3.	Bir necha o'zgaruvchili funksiyalarga bog'liq funksionallarning ekstremumi
5- ma'ruza: Chegaralari qo'zg'oluvchan variatsion masalalar	
1.	Masalaning qo'yilishi
2.	Eyler tenglamasi, transversallik shartlari
3.	Transversallik shartlarining xususiy xollari
6- ma'ruza: Shartli ekstremumga qo'yilgan variatsion masalalar	
1.	Bog'lanishlari chekli bo'lgan variatsion masalalar
2.	Differentsial bog'lanishlari bo'lgan shartli ekstremum masalalari
7- ma'ruza: Izoperimetrik masalalar	
1.	Lagranj funksiyasi. Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi
2.	Ikkinchi tartibli zaruriy shartlar va yetarli shartlar
8- ma'ruza: Optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi. Pontryaginning maksimum prinsipi	
1.	Optimal boshqaruv masalasining umumiy qo'yilishi
2.	Pontryaginning maksimum prinsipi
3.	Maksimum prinsipining chegaraviy masalasi
9- ma'ruza: Terminal boshqaruv masalasi uchun maksimum prinsipi	
1.	Terminal boshqaruv masalasining qo'yilishi. Maksimum prinsipi

2. Funktsional orttirmasi uchun formula
3. “Ignasimon” variasiya. Trayektoriya bahosini aniqlash
4. Maksimum prinsipining isboti
5. Ekstremal boshqarishlar
6. Chiziqli terminal boshqaruv masalasi
10- ma’ruza: Chiziqli boshqaruv sistemalari. Tezkor masala
1. Chiziqli boshqaruv sistemasi va uning erishish to’plami. Ekstremal prinsip
2. Chiziqli sistemaning regulyarligi va normalligi
3. Chiziqli tezkor masala. Optimallikning zaruriy va yetarli shartlari
4. Pontryaginning maksimum prinsipi
5. Chiziqli stasionar tezkor masala. Optimal boshqarishning sintezi
11- ma’ruza: Dinamik programmashtirish usuli va uning tadbiqlari
1. Dinamik programmashtirish usuli (resurslarni taqsimlash masalasi)
2. Terminal boshqarish masalasini dinamik programmashtirish usuli yordamida yechish
12- ma’ruza: Differensial o’yinlar nazariyasi elementlari
1. Differensial o`yinlar haqida tushuncha
2. Chiziqli differensial oyinlar. Masalaning qo`yilishi
3. Qavariq to`plamlar nazariyasidan ba’zi ma’lumotlar
4. Differensial o`yinni yechish
Adabiyotlar

1-ma'ruza

Variatsion hisobning predmeti. Funktsionalning ekstremumi

Reja:

1. Variatsion hisobning klassik masalalari. Variatsion hisob predmeti.
2. Asosiy funktsional fazolar.
3. Chiziqli va kvadratik funktsionallar. Funktsionalning variatsiyalari.
4. Funktsionalning ekstremumi. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari.

Tayanch iboralar: *Braxistoxrona, geodezik chiziq, izoperimetrik shart, funktsional, uzluksizlik, differensiallanuvchanlik, funktsional fazo, norma, metrika, yaqinlik tartibi, ε -atrof, chiziqli va kvadratik funktsionallar, variatsiya, variatsion masala, global va lokal ekstremumlar, ekstremumning zaruriy sharti, yetarli shart.*

Matematikada, tabiiy va texnik fanlarda, iqtisodiyotda va boshqa sohalarida uchraydigan ko'pgina amaliy masalalar cheksiz o'lchovli funktsional fazolardagi ekstremal masalalarga olib keladi. Bunday masalalar bilan klassik variatsion hisob va optimal boshqaruv masalalari bo'limlarida tanishamiz.

Ushbu va bundan keyingi bir necha ma'ruzalarimiz variatsion hisob masalalariga bag'ishlanadi.

1. Variatsion hisobning klassik masalalari. Variatsion hisob predmeti.

Dastlab variatsion hisob predmetini yaxshiroq anglab olishga imkon beruvchi hamda matematikada bu yo`nalishning paydo bo`lishi va rivojlanishida muhim ahamiyatga ega bo`lgan masalalardan quyidagilarni keltiramiz.

Braxistoxrona haqidagi masala. 1696 yilda I. Bernulli tomonidan qo`yilgan bu masalada bir vertikal to`g`ri chiziqda yotmagan ikkita  $A$  va  $B$  nuqtalarni tutashtiruvchi shunday chiziqni topish talab qilinadiki, material nuqta o`z og`irlik kuchi ta`siri ostida shu chiziq bo`ylab harakat qilib, A nuqtadan B nuqtaga eng qisqa vaqtda yetib kelsin (1-chizma).

Masalaning nomi grekcha “braxistos” –eng qisqa, “xronos” –vaqt so`zlaridan kelib chiqqan.

Braxistoxrona haqidagi masalani hozirgi zamon matematikasi tilida ifodalash uchun to`g`ri burchakli Oxy kooordinatalar sistemasini 1-chizmada ko`rsatilganidek, ya`ni Oy o`qni pastga yo`naltirib, qaraymiz. A nuqtani koordinatalar boshiga joylashtiramiz. B nuqtaning koordinatalari (x_1, y_1) bo`lsin.

$A(0,0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarni ixtiyoriy $y = y(x)$ silliq chiziq bilan tutashtiramiz.

Shu chiziq bo`ylab og`irlik kuchi ta`sirida harakatlanuvchi material

nuqtaning massasi m ga, t vaqt momentidagi tezligi v ga teng bo'lsin. U holda, t vaqtda harakatdagi nuqtaning kinetik energiyasi $K = \frac{mv^2}{2}$, potensial energiyasi $P = -mgy$ bo'ladi, bu yerda $g \approx 9.8 \text{ m/c}^2$ -erkin tushish tezlanishi o'zgarmasi. Fizikadan yaxshi ma'lum bo'lgan energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra,

$$-mgy + \frac{mv^2}{2} = 0$$

tenglikni olamiz. Bu yerdan $v = \sqrt{2gy}$. Endi

$$v = \frac{ds}{dt}, ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, dy = y'dx$$

ekanligini hisobga olsak, $dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$ bo'ladi.

Demak, $y(x)$ chiziq bo'ylab A nuqtadan B nuqtaga ko'chish uchun sarflangan $T = T[y]$ vaqt uchun

$$T[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx \quad (1.1)$$

ifodaga ega bo'lamiz. (1.1) ko'rinishdagi $T = T[y]$ miqdor $y = y(x)$, $x \in [0, x_1]$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosida aniqlangan bo'lib, braxistoxrona haqidagi masala esa, $T[y]$ funksionalning $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$ shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi

funksiyalar to'plamida minimumini topish masalasidan iboratdir. Bu masala I.Bernulli, I.Nyuton, G.Leybnislar tomonidan yechilgan bo'lib, *eng tez o'tish (sirpanish) chizig'i sikloida* deb ataluvchi chiziqdan iborat bo'lar ekan (bunga biz keyinroq ishonch hosil qilamiz).

Geodezik chiziqlar haqidagi masala. Masala quyidagicha qo'yiladi: Berilgan S sirtida yotuvchi va sirtning A_0 va A_1 nuqtalarini tutashtiruvchi eng qisqa uzunlikka ega bo'lgan chiziq topilsin (2-chizma).

Bunday eng qisqa uzunlikka ega chiziqlar *geodezik chiziqlar* deb ataladi. Masalaning matematik modelini tuzish uchun, S sirt $\varphi(x, y, z) = 0$ tenglama bilan berilgan, A_0 va A_1 nuqtalarning koordinatalari, mos ravishda, (x_0, y_0, z_0) va (x_1, y_1, z_1) bo'lsin, deb faraz qilamiz. Qaralayotgan nuqtalarni tutashtiruvchi ixtiyoriy $y = y(x), z = z(x), x_0 \leq x \leq x_1$, silliq chiziqni qaraymiz. Matematik analiz kursidan yaxshi ma'lumki, bu chiziqning uzunligi

$$L = L[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (1.2)$$

formula orqali topiladi. Masalaning qo'yilishiga ko'ra,

$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0, y(x_1) = y_1, z(x_1) = z_1, \varphi(x, y(x), z(x)) = 0, x_0 \leq x \leq x_1$, (1.3) munosabatlarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, geodezik chiziqlar haqidagi masala (1.2) ko'rinishdagi $L[y, z]$ o'zgaruvchi miqdorni (1.3) shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi, $y = y(x), z = z(x), x_0 \leq x \leq x_1$

funksiyalar to'plamida minimallashtirish masalasidan iborat. Bu masala, 1698 yilda Ya.Bernulli tomonidan yechilgan.

Klassik izoperimetrik masala. Bu masalada berilgan l uzunlikka ega bo'lgan barcha yopiq chiziqlar ichida maksimal S yuzani chegaralovchi chiziqni topish talab qilinadi.

Bunday chiziqning aylanadan iborat ekanligi qadimgi Yunonistonda ma'lum edi. Izoperimetrik masala deb ataluvchi bu masalani hozirgi zamon matematikasi tilida ifodalash uchun, yopiq chiziq $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ parametrik tenglamalar bilan berilgan, deb faraz qilamiz.

U holda, shu yopiq chiziq bilan chegaralangan yuza,

$$S[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} xy'_t dt \quad (1.4)$$

formula orqali topiladi. Chiziq uzunligi l ga tengligi va chiziqning yopiqligini hisobga olsak,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = l \quad (1.5)$$

izoperimetrik shartga va

$$x(t_0) = x(t_1), \quad y(t_0) = y(t_1) \quad (1.6)$$

chegaraviy shartlarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, qaralayotgan masala (1.4) ko'rinishdagi o'zgaruvchi miqdorning, (1.5), (1.6) shartlarni qanoatlantiruvchi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ uzluksiz differensiallanuvchi

funksiyalar to'plamida, minimumini topishdan iboratdir.

Yuqorida keltirilgan masalalarda (1.1), (1.2) va (1.4) ko'rinishdagi o'zgaruvchi miqdorlarga ega bo'ldik. Ular funksional tipidagi o'zgaruvchi miqdorlarga misol bo'la oladi. Funksionallar esa funksional analiz kursining asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, berilgan W funksional fazo V to'plamining har bir u elementiga biror $J(u)$ haqiqiy sonni mos qo'yuvchi akslantirishni bildiradi. Funksionallar odatda cheksiz o'lchovli funksional fazolarda berilgan bo'ladi. Ularning eng katta (maksimal) va eng kichik (minimal) qiymatlarini topish haqidagi masalalar cheksiz o'lchovli ekstremal masalalar bo'lib, bunday masalalarni o'rganish variatsion hisob predmetini tashkil etadi.

XVII asrning oxiridan XX asr o'rtalarigacha bo'lgan davr klassik variatsion hisobning paydo bo'lishi va rivojlanishini o'z ichiga oladi. Bu davrda dastlabki fundamental tadqiqotlar L.Eyler va J.Lagranj tomonidan bajarildi. XVIII asrning oxirlarida Eyler, Lagranj va Lejandrlarning ilmiy tadqiqotlari natijasida variatsion hisob birinchi variatsiyani tekshirish qismi bo'yicha tugallangan shaklga ega bo'ldi.

XIX asrda esa, avval ma'lum bo'lgan variatsion masalalarni umumlashtirish boshlandi va variatsion hisobning tadbirlari bo'yicha natijalar olindi (M.I.Ostrogradskiy tomonidan 1834 yilda karrali integralli variatsion masalalar uchun zaruriy shartlar olindi, variatsion hisobning mexanikaga tadbirga qaraldi).

XIX asrning ikkinchi yarmida funkcionallar ekstremumlarining yetarli shartlari olindi (K.Veyershtass tomonidan, 1879 yilda).

XX asrda variatsion hisobning to'g'ri usullari yuzaga keldi. Ular variatsion masalalarni taqribiy yechish uchun, hamda ularda yechimning mavjudligini isbotlash uchun juda muhimdir.

XX asrning boshlarida matematikada yangi yo'nalish – funksional analiz yuzaga keldi va aniq tabiatshunoslikning turli sohalarida, jumladan, kvant mexanikasida keng qo'llanila boshladi. Variatsion hisob «chiziqli bo'lmagan» funksional analizning tarkibiy qismiga aylandi.

XX asrning ikkinchi yarmiga kelib optimal boshqaruvning matematik nazariyasiga asos solinishi va uning jadal rivojlanishi variatsion hisob taraqqiyotida yangi davrni boshlab berdi. Bu yangi yo'nalishda Sobiq Ittifoq akademiki L.S.Pontryaginning «maksimum prinsipi», amerikalik R.Bellmanning *dinamik pogrammalashtirish usuli* asosiy natijalar hisoblanadi.

2. Asosiy funksional fazolar.

Bizga funksional analiz kursidan yaxshi ma'lum bo'lgan va variatsion hisob masalalarini o'rganishda keng foydalaniladigan eng muhim funksional fazolarni eslatib o'tamiz.

a) $C[a,b]$ fazo. Bu fazo chiziqli normalangan fazo bo'lib, u $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalardan tashkil topgan. $C[a,b]$ fazo

$f = f(x)$ elementining normasi

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (1.7)$$

formula bo'yicha aniqlangan.

1.1-ta'rif: $C[a,b]$ fazodan olingan ikkita $y_1 = y_1(x)$ va $y_2 = y_2(x)$ funksiyalar orasidagi *nolinchi tartibli masofa* deb,

$$\rho_0(y_1, y_2) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| \quad (1.8)$$

tenglik bilan aniqlanadigan ρ_0 songa aytiladi. Demak, ikkita funksiya orasidagi nolinchi tartibli masofa – ular ayirmasining normasiga tengdir. (1.8) tenglik bilan aniqlangan ρ_0 ga, $C[a,b]$ fazodagi metrika ham deyiladi. $C[a,b]$ – metrik fazodir.

Nolinchi tartibli metrikaga asoslangan holda,

$$V_0(y_0, \varepsilon) = \{y \in C[a,b] : \rho_0(y_0, y) < \varepsilon\} \quad (1.9)$$

tenglik orqali markazi $y_0 \in C[a,b]$ elementda bo'lgan nolinchi tartibli ε -atrofni qarash mumkin.

Markazi y_0 da bo'lgan nolinchi tartibli ε -atrof, geometrik nuqtai nazardan, shunday $y = y(x)$ funksiyalar to'plamidan iboratki, ularning grafiklari $y_0 = y_0(x)$ ni o'zida saqlovchi 2ε kenglikdagi (vertikal bo'yicha) yo'lakning ichida to'la yotadi (3-chizma).

b) $C^1[a,b]$ fazo. Bu fazo $[a,b]$ kesmada o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz funksiyalaridan iborat. Bu holda metrikani

ikki xil yo'l bilan aniqlash mumkin.

1.2-ta'rif: Ikkita $y_1 = y_1(x)$ va $y_2 = y_2(x)$ funksiyalar orasidagi *birinchi tartibli masofa* deb, quyidagi

$$\rho_1(y_1, y_2) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y_1'(x) - y_2'(x)| \quad (1.10)$$

tenglik bilan aniqlanadigan ρ_1 songa aytiladi.

Birinchi tartibli masofa tushunchasi orqali birinchi tartibli ε - atrof ushbu

$$V_1(y_0, \varepsilon) = \{y \in C[a, b]: \rho_1(y_0, y) < \varepsilon\} \quad (1.11)$$

tenglik yordamida kiritiladi, bunda y_0 – atrofning markazi. Birinchi tartibli atrofning ta'rifiga ko'ra, bir vaqtning o'zida

$$|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon \text{ va } |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b$$

tengsizliklar bajarilishi shart. Bu yerdan, nolinchi tartibli ε – atrofning birinchi tartibli ε – atrofdan kengroq ekanligi, ya'ni

$$V_1(y_0, \varepsilon) \subset V_0(y_0, \varepsilon) \quad (1.12)$$

mansublik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

$C^1[a, b]$ ham chiziqli normalangan fazodir. Unda norma funksiya va uning hosilasi modullari maksimumlarining yig'indisi kabi aniqlanadi:

$$\|f\|_{C^{(1)}[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \quad (1.13)$$

c) $C^{(n)}[a, b]$ fazo. Bu fazo $[a, b]$ kesmada aniqlangan va o'zining n -tartibgacha hosilalari bilan uzluksiz funksiyalaridan iborat ($n \geq 1$).

$C^{(n)}[a,b]$ fazodagi $f = f(x)$ elementning normasi

$$\|f\|_{C^{(n)}[a,b]} = \sum_{i=0}^n \max_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x)| \quad (1.14)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu fazoning ikki elementi orasidagi masofa deganda ular ayirmalarining normasini tushunamiz. Bu masofani n -tartibli masofa deb ataymiz va $\rho_n(y_1, y_2)$ deb belgilaymiz:

$$\rho_n(y_1, y_2) = \sum_{i=0}^n \max_{a \leq x \leq b} |y_2^{(i)}(x) - y_1^{(i)}(x)| \quad (1.15)$$

$C^{(n)}[a,b]$ metrik fazo, ρ_n - undagi metrikadir.

3. Chiziqli va kvadratik funksionallar. Funksionalning variatsiyalari.

Funksionalning variatsiyasi ta'rifini berishdan oldin chiziqli va kvadratik funksionallar tushunchalarini eslatib o'tamiz.

Agar biror chiziqli normalangan W fazoda aniqlangan $J[u]$ funksional bir jinsli va additiv bo'lsa, ya'ni:

1) $J[cu] = cJ[u]$, $\forall u \in W$, c - ixtiyoriy o'zgarmas.

2) $J[u_1 + u_2] = J[u_1] + J[u_2]$, $\forall u_1, u_2 \in W$;

shartlar bajarilsa, $J[u]$ -chiziqli funksional deyiladi. Masalan, agar $p(x)$ va $q(x)$ lar $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y(x) + q(x)y'(x)] dx$$

tenglik orqali aniqlangan $J[y]$ funksional $W = C^1[x_0, x_1]$ da chiziqli funksional bo`ladi.

W – chiziqli normalangan fazo, $J = J[u, v]$ funksional har bir o`zgaruvchisi bo`yicha chiziqli bo`lsin. Agar  $u = v$  deb olsak, hosil bo`lgan $J[u, u]$ funksionalga *kvadratik funksional* deyiladi. Masalan, agar $a(x) - [x_0, x_1]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz funksiya bo`lsa,

$$J[u, v] = \int_{x_0}^1 a(x) u(x) v(x) dx$$

funksional $W = C[x_0, x_1]$ fazoda har bir $u = u(x)$ va $v = v(x)$ elementlar bo`yicha chiziqli funksionaldir. Bu yerda $u = v$ deb olib, $C[x_0, x_1]$ da aniqlangan

$$J[u, u] = \int_{x_0}^{x_1} a(x) u^2(x) dx$$

kvadratik funksionalga ega bo`lamiz.

**1.3-ta`rif:** Agar  $J[y]$  funksional  $W$  chiziqli normalangan fazoda berilgan bo`lsa,

$$\Delta J = J[y + h] - J[y], \quad h \in W$$

ayirmaga $J[y]$ *funksionalning orttirmasi* deyiladi.

1.4-ta'rif: Agar w chiziqli normalangan fazoda berilgan $J[y]$ funksionalning ΔJ orttirmasi uchun,

$$J[y+h]-J[y]=L[y,h]+\beta[y,h] \quad (1.16)$$

yoyilma o`rinli bo`lib, bunda $L[y,h]-b$ ga nisbatan chiziqli funksional, $\beta[y,h]$ esa, $\|h\| \rightarrow 0$ da $\beta[y,h]/\|h\| \rightarrow 0$ munosabatni qanoatlantirsa, $J[y]$ funksional $y \in W$ nuqtada *differensiallanuvchi* yoki *birinchi variatsiyasiga ega* deyiladi.

(1.16) yoyilmaning bosh qismidan iborat $L[y,h]$ ga esa, $J[y]$ funksionalning *birinchi variatsiyasi* deyiladi va u $\delta J = \delta J[y,h]$ kabi belgilanadi: $\delta J = L[y, \delta y]$.

Keltirilgan ta'rif bo'yicha variatsiyaga ega funksionallarga adabiyotlarda *Freshe ma'nosida* (yoki *kuchli ma'noda*) differensiallanuvchi funksionallar ham deyiladi.

1.6-ta'rif: w chiziqli normalangan fazoning y elementi va uning ixtiyoriy $h \in W$ elementi uchun, funksionalning ΔJ orttirmasi,

$$J[y+h]-J[y]=L_1[y,h]+\frac{1}{2}L_2[y,h]+\beta_1(y,h) \quad (1.17)$$

ko'rinishdagi yoyilmaga ega bo'lsin, bu yerda $L_1[y,h]-h$ ga nisbatan chiziqli funksional, $L_2[y,h]$ esa, δy ga nisbatan kvadratik funksional,

$$\beta_1(y,h)/\|h\|^2 \rightarrow 0, \|h\| \rightarrow 0.$$

U holda, $J[y]$ funksional $y \in W$ nuqtada *ikkinchi variatsiyaga ega* deyiladi. h ga nisbatan kvadratik funksional $L_2[y, h]$ esa, $J[y]$ funksionalning *ikkinchi variatsiyasi* deyiladi hamda bu variatsiya $\delta^2 = \delta^2 J[y, h]$ kabi belgilanadi: $\delta^2 = L_2[y, h]$.

Misol: $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(x) dx$ bo'lsin.

Bu funksional uchun (1.17) yoyilma

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} 2y(x)h dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} 2h^2 dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, yuqorida keltirilgan ta'riflarga ko'ra,

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} 2y(x)h dx, \quad \delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2h^2 dx$$

Funksionalning Freshe bo'yicha kuchli ma'noda differensiallanuvchiligi bilan bar qatorda *Lagranj bo'yicha kuchsiz ma'noda differensiallanuvchiligi* tushunchasi ham mavjud.

W chiziqli normalangan fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin. V to'plam yoki $M(y) = \{h \in W : y + h \in V\}$ to'plam W ning chiziqli qism fazosi bo'lsin.

1.7-ta'rif: $J[y]$ funksionalning $y \in W$ nuqtadagi *Lagranj bo'yicha birinchi variatsiyasi* deb, $\varphi(\alpha) = J[y + \alpha h]$ funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtadagi

hosilasiga aytiladi:

$$\varphi J = \varphi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha h] \Big|_{\alpha=0}$$

$\varphi(\alpha)$ funksiyaning $\alpha=0$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilasiga esa, $J[y]$ funksionalning *Lagranj bo'yicha ikkinchi variatsiyasi* deyiladi:

$$\delta^2 J = \varphi''(0) = \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y + \alpha h] \Big|_{\alpha=0}$$

Misol:
$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [y^2(x) + y'^2(x)] dx$$

Bu funksional $W = C^1[x_0, x_1]$ da aniqlangan. Uning Lagranj bo'yicha birinchi va ikkinchi variatsiyalarini hisoblaymiz.

$$\varphi(\alpha) = J[y + \alpha h] = \int_{x_0}^{x_1} [(y + \alpha h)^2 + (y' + \alpha h')^2] dx$$

Demak, ta'rifga ko'ra,

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha h] \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (2y(x)h - 2y'h') dx,$$

$$\delta^2 J = \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y + \alpha h] \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (2h^2 - 2h'^2) dx$$

funksionalning Freshe bo'yicha differensiallanuvchiligidan Lagranj bo'yicha ham differensiallanuvchiligi kelib chiqadi va bunda mos

variatsiyalar o'zaro tengdir.

4. Funksionalning ekstremumi. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari.

Yuqorida ta'kidlaganidek, funksionallarning eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topishga keltiriluvchi amaliy masalalar juda ko'p uchraydi va matematikaning bunday masalalarni o'rganadigan bo'limi – variatsion hisobdir.

Endi funksionalning ekstremumi tushunchasining aniq matematik ta'rifini keltiramiz va funksional variatsiyasidan foydalanib ekstremumning umumiy ko'rinishidagi zaruriy hamda yetarli shartlarini bayon qilamiz.

Cheksiz o'lchovli W fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin.

1.8-ta'rif: Agar ixtiyoriy $y \in V$ uchun $J[y^*] \leq J[y]$ ($J[y^*] \geq J[y]$) tengsizlik bajarilsa, $y^* \in V$ nuqta $J[y]$ funksionalning V to'plamidagi global minimum (maksimum) nuqtasi, $J[y^*]$ esa funksionalning minimal (maksimal) qiymati deyiladi:

$$J[y^*] = \min_{y \in V} J[y] \quad (J[y^*] = \max_{y \in V} J[y])$$

Funksionalning minimum va maksimum nuqtalarini, umumiy nom bilan, ekstremum nuqtalari deb ataymiz.

Masalan, $W = C[0,1]$ da aniqlangan

$$J[y] = \int_{x_2}^{x_1} [1 - y(x)]^2 dx$$

$$J[y] \geq 0 = J[y^*], \quad \forall y \in C[0,1].$$

Endi W –chiziqli normalangan fazo, $J[y]$ funksional $V \subset W$ to'plamda aniqlangan bo'lsin deb faraz qilamiz.

1.9-ta'rif: Agar biror $\varepsilon > 0$ son topilib, $\|y - y^*\|_W < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $y \in V$ nuqtaga $J[y^*] \leq J[y]$, $J[y^*] \geq J[y]$ tengsizlik bajarilsa, $y^* \in V$ nuqtaga $J[y]$ funksionalning V to'plamdagi lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan funksionalning global ekstremumi uning lokal ekstremumi ham bo'lishi kelib chiqadi. Bu tasdiqning aksinchasi esa to'g'ri emas.

Misol: $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 (y^2 - 1) dx$, funksionalni qaraymiz. U $W = C^1[0,1]$

da aniqlangan.

Shu funksional $V = \{y \in C^1[0,1] : y(x) = 0\}$ to'plamda global maksimumga ega emas: $\sup J[y] = +\infty$. Haqiqatan ham, agar $y_n = nx$, $n = 0, 1, \dots$ ($y_n \in V$) funksiyalarni qarasak,

$$J[y_n] = \int_{x_0}^{x_1} n^2 (n^2 x^2 - 1) dx = \frac{1}{3} n^4 - n^2 \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ammo, $y^* = 0$ funksiya, $J[y]$ funksional uchun lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

Haqiqatan ham: $J[y^*] = 0$, $\|y - y^*\|_{C[0,1]} < \varepsilon$, ($0 < \varepsilon < 1$) bo'lganda, $y^2 - 1 \leq 0$, shuning uchun,

$$J[y] = \int_0^1 (y^2 - 1) dx \leq 0 = J[y^*]. \quad \forall y \in V.$$

$J[y]$ funksionalning cheksiz o'lchovli W fazoning V qism to'plamidagi minimumini (yoki maksimumini) topish haqidagi masala, cheksiz o'lchovli ekstremal masaladir. Bu masalani *variatsion masala* deb ataymiz va

$$J[y] \rightarrow \min (\max), \quad y \in V \quad (1.18)$$

yoki

$$J[y] \rightarrow \text{extr}, \quad y \in V$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Keyingi ma'ruzalarda qaraladigan variatsion masalalarda $J[y]$ funksional, W fazo va uning V to'plami aniqlashtiriladi. Odatda, V to'plam funksiyalar (yoki ularning geometrik talqini sifatida chiziqlar, sirtlar) to'plamidan iborat bo'ladi.

Shuning uchun, (1.18) ekstremal masalada V to'plam elementlariga *joyiz funksiyalar* (chiziqlar, sirtlar) deb ataymiz.

Chiziqli normalangan W fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin ($V = W$ bo'lishi ham mumkin). V – chiziqli

qism fazo yoki biror $y_0 \in V$ uchun qurilgan $M(y_0) = \{h \in W : y + h \in V\}$ to'plam chiziqli qism fazodan iborat bo'lsin.

Shu farazlarda, (1.18) masalalarda ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari quyidagi teoremlarda ifodalangan.

1.1-teorema: Agar $y_0 \in V$ nuqta $J[y]$ funksionalning lokal minimum (maksimum) nuqtasi bo'lsa va shu nuqtada δJ birinchi variatsiya hamda $\delta^2 J$ ikkinchi variatsiya mavjud bo'lsa,

$$\delta J = 0 \quad \delta^2 J \geq 0 (\delta^2 J \leq 0) \quad (1.19)$$

shartlar bajariladi.

Isboti: Isbotni minimum uchun keltiramiz. Maksimum uchun ham shunga o'xshash isbotlanadi.

$J[y]$ funksionalning $y_0 \in V$ nuqtada δJ variatsiyaga ega ekanligidan,

$$J[y_0 + th] - J[y_0] = t \delta J[y_0, h] + O(t), \quad t \in R \quad (1.20)$$

tenglik bajariladi, bu yerda $O(t)h \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$. y_0 - lokal minimum nuqtasi bo'lganligidan, yetarli kichik $t > 0$ uchun, (1.20) dan,

$$\delta J + \frac{O(t)}{t} \geq 0$$

yoki $t \rightarrow +0$ da limitga o'tib, $\delta J \geq 0$ munosabatni olamiz. Xuddi shuningdek, (1.20) yoyilmadan yetarli kichik $t < 0$ uchun foydalanib, $\delta J \leq 0$ munosabatni olamiz. Demak, $\delta J = 0$.

Endi $J[y]$ funksionalning y_0 nuqtada $\delta^2 J$ ikkinchi variatsiyasining

mavjudligini va birinchi variatsiya $\delta J = 0$ ekanligini hisobga olib,

$$J[y_0 + th] - J[y_0] = \frac{t^2}{2} \delta^2 J[y_0, h] + O(t^3), \quad t \in R \quad (1.21)$$

yoyilmaga ega bo'lamiz, bu yerda $O(t^2)h^2 \rightarrow 0, t \rightarrow 0$, y_0 - lokal minimum nuqtasi bo'lganligi uchun, (1.21) dan,

$$\frac{1}{2} \delta^2 J + \frac{O(t^2)}{t^2} \geq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda $t \rightarrow 0$ da limitga o'tib, $\delta^2 J \geq 0$ munosabatni olamiz. 1.1-teorema isbotlandi.

1.2-teorema: Agar $J[y]$ funksional $y_0 \in V$ nuqtada birinchi va ikkinchi variatsiyalarga ega bo'lib, ular

$$\delta J, \delta^2 J \geq \alpha h^2 \quad (\delta^2 J \leq -\alpha h^2), \quad \forall h \in W \quad (1.22)$$

(bu yerda $\alpha > 0$ – biror o'zgarmas) shartlarni qanoatlantirsa, y_0 – lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Isboti: (1.22) munosabatlardan va ikkinchi variatsiya ta'rifidan foydalanib,

$$\begin{aligned} J[y_0 + h] - J[y_0] &= \frac{1}{2} \delta^2 J + o(\|h\|^2) \geq \frac{\alpha}{2} \|h\|^2 + \\ &+ o(\|h\|^2) \geq \|h\|^2 \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

munosabatni olamiz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$$

bo'lgani uchun, $\alpha > 0$ ni hisobga olib, (1.23) dan, yetarli kichik $\|h\|$ larda,

$$J[y_0 + h] - J[y_0] > 0$$

munosabatga ega bo'lamiz. Demak, y_0 – lokal minimum nuqtasidir.

1.2-teorema isbotlandi.

1-ma'ruza bo'yicha savollar

1. Funksional deb nimaga aytiladi?
2. Funksional aniqlangan funksiyalarning yaqinlik tartiblari haqida bilganlarinigizni yozing.
3. Funksionalning uzluksizligi ta'rifini keltiring.
4. Funksionalning orttirmasi ta'rifini keltiring.
5. Funksionalning variatsiyasi (Lagranj bo'yicha) ta'rifini bering.
6. Chiziqli funksionalning ta'rifini bering va misollar keltiring.
7. Kvadratik funksionalning ta'rifini bering va misollar keltiring.
8. Differensiallanuvchi funksional ta'rifini keltiring.
9. Funksionalning global maximumi (minimumi) ta'rifini bering.
10. Funksionalning lokal maximumi (minimumi) ta'rifini bering.

11. Funksionalning ekstremumini zaruriy sharti nimadan iborat (teoremani keltiring).

12. Variatsion masalaning qo'yilishini keltiring.

Masalalar

1. Quyidagi $y_1(x) = x^2$ va $y_2(x) = x^3$ funksiyalar orasidagi masofani:

- a) $C[0,1]$ fazo normasida
- b) $C^1[0,1]$ fazo normasida hisoblang.
- c) $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J(y) = \int_0^1 (y - y^1) dx$$

funksionalning $C^1[0,1]$ fazo normasida $y_0(x) = x^3$ funksiyada uzluksizligini ko'rsating.

2. Ushbu

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

funksional $C^1[0,1]$ da aniqlangan bo'lsin. Uning $y_0(x) \equiv 0$ funksiyada: a) $C[0,1]$ normasi bo'yicha uzluksizlikka tekshiring.

2-ma'ruza

Variatsion hisobning asosiy masalasi (birinchi variatsiyani tekshirish)

Reja:

1. Masalaning qo'yilishi. Kuchli va kuchsiz lokal ekstremumlar.
2. Asosiy lemmalar (Lagranj, Dyubua-Reymon lemmalari).
3. Eyler tenglamasi, uning xususiy hollari.
4. Gilbert teoremasi.
5. Bo'lakli – silliq joyiz funksiyalar. Eylerning integro-differensial tenglamasi, natijalar.

Tayanch iboralar: joyiz funksiyalar (chiziqlar), chegaralari qo'zg'olmas masala, kuchli va kuchsiz ekstremallar, Lagranj lemmasi, Dyubua-Reymon lemmasi, nolga teng variatsiya, Eyler tenglamasi, stasionar joyiz funksiya, birinchi integral, Gilbert teoremasi, Eylerning integro-differensial tenglamasi, bo'lakli-silliq joyiz funksiyalar, Veyershtass-Erdman shartlari.

1. Masalaning qo'yilishi.

Quyidagilar berilgan bo'lsin:

- a) $Q - R^3$ dagi biror ochiq to'plam (soha);

- b) $S = \{(x, y) \in R^2 : (x, y, z) \in Q\} - Q$ to'plamning R^2 ga proyeksiyasi;
 v) $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1) - S$ to'plamning belgilangan nuqtalari, $x_0 < x_1$;
 g) $F(x, y, z): Q \rightarrow R^1$ - uzluksiz funksiya.

$C^1[x_0, x_1]$ fazoning

$$V = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, (x, y(x), y'(x)) \in Q, x \in [x_0, x_1]\} \quad (2.1)$$

to'plamida aniqlangan,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (2.2)$$

funksionalning ekstremumini topish masalasini qaraymiz. Bu masalaga *variatsion hisobning asosiy masalasi* deyiladi va u

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \rightarrow \min(\max), y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y(x) \in C^1[x_0, x_1] \quad (2.3)$$

ko'rinishda belgilanadi. (2.1) ko'rinishdagi to'plamga (2.3) masalaning *joyiz funksiyalari* (chiziqlari) to'plami deyiladi. (2.3) masalada joyiz chiziqlarning uchlari berilgan P_0 va P_1 nuqtalarda mahkamlangan, ya'ni qo'zg'almasdir.

Variatsion hisobning asosiy masalasi - chegaralari qo'zg'olmas eng sodd variatsion masaladir.

Qaralayotgan (2.3) masalaning yechimi – (2.2) funksionalning (2.1) to'plamdagi global ekstremum nuqtasidan iborat. Yechimni aniqlashda esa, lokal ekstremum tushunchasi ham muhim rol o'ynaydi, chunki ular uchun

funksional variatsiyasidan foydalaniladigan zaruriy va yetarli shartlar mavjud (1-ma'ruzaga qarang).

(2.2) funksional qaralayotgan $C^1[x_0, x_1]$ fazoda funksiyaning nolinch va birinchi tartibli atroflari tushunchalaridan foydalanib, lokal ekstremum nuqtalarini ham, shularga mos holda aniqlash mumkin.

2.1-ta'rif: $y^0 = y^0(x)$ – joyiz funksiya bo'lsin ($y^0 \in V$). Agar y^0 ning shunday $V_0(y^0, \varepsilon)$ nolinch tartibli ε – atrofi mavjud bo'lib, shu atrofga tegishli barcha $y = y(x)$ joyiz funksiyalar uchun,

$$J[y^0] \leq J[y] \quad (J[y^0] \geq J[y])$$

munosabat bajarilsa, $y^0(x)$ funksiya - (2.2) funksionalning *kuchli lokal minimum (maksimum) nuqtasi* deyiladi.

2.2-ta'rif: Agar $y^0 = y^0(x)$ joyiz funksiyaning shunday $V_1(y^0, \varepsilon)$ birinchi tartibli ε - atrofi mavjud bo'lsaki, $J[y^0] \leq J[y]$ ($J[y^0] \geq J[y]$) $\forall y \in V_1(y^0, \varepsilon) \cap V$ munosabat bajarilsa, $y^0(x)$ funksiya (2.2) funksionalning *kuchsiz lokal minimum (maksimum) nuqtasi* deyiladi.

(2.2) funksionalning kuchli (kuchsiz) lokal ekstremum nuqtalariga variatsion hisob asosiy masalasida *kuchli (kuchsiz) ekstremallar* ham deyiladi.

Demak, agar $y^0(x)$ - kuchli ekstremal bo'lsa, bu funksiya, unga faqat qiymatlari bo'yicha yaqin bo'lgan barcha joyiz funksiyalar ichida, funksionalga minimal (yoki maksimal) qiymat beradi. $y^0(x)$ - kuchsiz

ekstremal bo'lganda esa, bu funksiya, unga nafaqat qiymatlari, balki hosilasining qiymatlari bo'yicha ham yaqin bo'lgan joyiz funksiyalar ichida, funksionalga ekstremal qiymat beradi.

Nolinchi tartibli atrofning birinchi tartibli atrofdan kengroqligini, ya'ni $V_1(y^0, \varepsilon) \subset V_0(y^0, \varepsilon)$ ekanligini hisobga olsak yuqoridagi ta'riflardan har bir kuchli ekstremalning kuchsiz ekstremal ham bo'lishi kelib chiqadi. Bu tasdiqning aksi esa to'g'ri emas.

$$\textbf{Misol:} \quad \left. \begin{aligned} J[y] &= \int_0^{\pi} y^2 (1 - y'^2) dx \rightarrow \min \\ y(0) &= y(\pi) = 0, \quad y(x) \in C^1[0, \pi] \end{aligned} \right\}$$

Ravshanki, $y^0 = y^0(x) \equiv 0$ funksiya bu masalada kuchsiz minimal bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\|y - y^0\| = \|y\|_{C^1[0, \pi]} < \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

shartni qanoatlantiruvchi har bir $y = y(x) \in C^1[0, \pi]$ funksiya uchun $|y'(x)| < 1, x \in [0, \pi]$ bo'lganligidan,

$$J[y] = \int_0^{\pi} y^2 (1 - y'^2) dx \geq 0 = J[y^0,]$$

$$\|y - y^0\|_{C^1[0, \pi]} < \varepsilon, \quad y(x) = y(\pi) = 0$$

munosabat bajariladi. Ammo $y^0(x)$ - kuchli minimal bo'la olmaydi. Haqiqatan ham, $\varepsilon < 0$ istalgancha kichik bo'lganda ham,

$y_n = y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$ joyiz funksiya yetarli katta n lar uchun,

$\|y_n - y^0\|_{C^1[0,\pi]} < \varepsilon$ shartni qanoatlantiradi, ammo

$$J(y_n) = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx (1 - n \cos^2 nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx dx -$$

$$- \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 2nx dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8} < 0 = J[y^0], \quad n > 4.$$

Variatsion hisob asosiy masalasida yechimning mavjudligini tekshirishda quyidagi yetarli shartdan foydalanish mumkin. Biz bu tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

Faraz qilaylik: 1) $F(x, y, z) \in C^1$; 2) $F(x, y, z)$ funksiya z bo'yicha qavariq (botiq); 3) $F(x, y, z) \geq \Phi(z)$ ($F(x, y, z) \leq \Phi(z)$), $\Phi(z)/z \rightarrow +\infty$, $z \rightarrow \infty$ bo'lsin. U vaqtda, shunday $y^0(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ absolyut uzluksiz funksiya mavjudki, u $y^0(x_0) = y_0$, $y^0(x_1) = y_1$ shartlarni qanoatlantiradi va bu funksiyada (2.2) funksional kuchli minimum (maksimum) ga erishadi.

2 Asosiy lemmalar.

Avvalgi ma'ruzamizda funksional ekstemumining zaruriy sharti – birinchi variatsiyaning ekstremum nuqtasida nolga teng bo'lishi ekanligi ko'rsatildi. Ushbu ma'ruzada shu natija asosida variatsion hisob asosiy masalasida

eksremumning birinchi tartibli zaruriy sharti aniqlashtiriladi.

Dastlab, variatsion hisobning asosiy lemmalari deb ataluvchi ba'zi yordamchi tasdiqlarni keltiramiz.

2.1-lemma (Lagranj): Agar $a(x)$ funksiya $[x_0, x_1]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu $[x_0, x_1]$ da uzluksiz differensiallanuvchi hamda $h(x_0)=h(x_1)=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $h(x)$ funksiyalar uchun

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x) h(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

tenglik bajarilsa, $[x_0, x_1]$ kesmada $a(x)=0$.

Isboti: Lemmaning tasdig'i o'rinli bo'lmasin, deb faraz qilamiz, ya'ni qandaydir $x^* \in [x_0, x_1]$ nuqtada $a(x^*) \neq 0$ bo'lsin. $a(x)$ funksiyaning uzluksizligidan foydalangan holda x^* nuqtani kesmaning ichki nuqtasi deb hisoblash mumkin. Aniqlik uchun $a(x^*) > 0$ deb olamiz. $a(x)$ funksiyaning uzluksizlik xossasiga ko'ra x^* nuqtaning shunday $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) atrofi topiladiki, unda $a(x)$ funksiya o'z ishorasini saqlaydi, ya'ni musbat bo'lib qolaveradi. Endi $h(x)$ funksiyaning quyidagicha aniqlaymiz:

$$h(x) = \begin{cases} (\varepsilon + x^* - x)(\varepsilon - x^* + x), & x \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \\ 0, & x \notin [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \end{cases} \quad (2.5)$$

(2.5) funksiya uchun

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x)h(x)dx = \int_{x^*-\varepsilon}^{x^*+\varepsilon} a(x)(\varepsilon - x^* + x)dx > 0,$$

ya'ni (2.4) ga zid munosabat bajariladi. Olingan qarama-qarshilik 2.1-lemmani isbotlaydi.

2.2-lemma (Dyubua-Reymon): Faraz qilaylik, $a_0(x)$ va $a_1(x)$ funksiyalar $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Agar $h(x_0) = h(x_1) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $h(x) \in C^1[x_0, x_1]$ funksiyalar uchun

$$\int_{x_0}^{x_1} [a_0(x)h(x) + a_1(x)h'(x)]dx = 0 \quad (2.6)$$

tenglik bajarilsa, $a_1(x)$ -uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi va barcha $x \in [x_0, x_1]$ nuqtalarda

$$a_0(x) - \frac{d}{dx} a_1(x) = 0 \quad (2.7)$$

munosabat o'rinli.

Isboti: Quyidagi

$$p(x) = \int_{x_0}^x a_0(t)dt + c, \quad c = \text{const},$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchidir. O'zgarmas c sonni shunday tanlaymizki,

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} a_1(x)dx \quad (2.8)$$

tenglik bajarilsin. Endi $dp(x) = a_0(x)dx$ ekanligini va $h(x_0) = h(x_1) = 0$ shartni hisobga olib, (2.6) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} [a_1(x)h'(x) + a_0(x)h(x)]dx &= \int_{x_0}^{x_1} a_1(x)h'(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} h(x)dp(x) = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [a_1(x) - p'(x)]h'(x)dx + h(x)p(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} [a_1(x) - p(x)]h'(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi

$$h(x) = \int_{x_0}^{x_1} [a_1(t) - p(t)]dt \quad (2.10)$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning aniqlanishidan, $h(x_0) = 0$ ekanligi ravshan. (2.8) ni hisobga olsak, $h(x_1) = 0$ ekanligini ko`ramiz. Demak, (2.10) funksiya 2.2-lemmaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu funksiya uchun (2.9) shart

$$\int_{x_0}^{x_1} [a_1(x) - p(x)]^2 dx = 0$$

ko`rinishni oladi. Bu yerdan, $a_1(x) \equiv p(x)$, ya'ni $a_1(x) \in C^1[x_0, x_1]$ ekanligi hamda

$$a_0(x) - \frac{d}{dx} a_1(x) = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

tenglik kelib chiqadi. 2.2-lemma isbotlandi.

Isbotlangan 2.2-lemmadan $a_0(x) \equiv 0$ bo'lganda quyidagi natijaga ega bo'lamiz.

2.3-lemma: Agar $a(x)$ funksiya $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz bo'lib, $h(x_0) = h(x_1) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $h(x) \in C^1[x_0, x_1]$ funksiya uchun

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x) h'(x) dx = 0$$

bo'lsa, $a(x) \equiv \text{const}$, $x \in [x_0, x_1]$ bo'ladi.

Bu tasdiq ham, ba'zi adabiyotlarda, Dyubua-Reymon lemmasi deb yuritiladi.

3. Eyler tenglamasi, uning xususiy hollari

Ushbu va bundan keyingi ma'ruzalarimizda, $F(x, y, y')$ funksiyaning xususiy hosilalari uchun, quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'},$$

$$F_{xy'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}, \quad F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad F_{yy'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}, \quad F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$$

Avvalo, $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$, $y^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$, deb faraz qilamiz va $y^0 = y^0(x) \in V$ nuqtada (2.2) funksionalning birinchi variatsiyasini hisoblaymiz. Buning uchun

$$M(y^0) = \{h \in C^{(1)}[x_0, x_1] : y^0 + h \in V\} =$$

$$= \{h \in C^{(1)}[x_0, x_1] : h(x_0) = h(x_1) = 0\}$$

to'plamni qaraymiz. Bu to'plam, $C^{(2)}[x_0, x_1]$ fazoning chiziqli qism fazosi bo'lgani uchun variatsiyaning ta'rifiga ko'ra,

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[y^0 + \alpha h]_{\alpha=0}, \quad h \in M(y^0).$$

$Q \subset R^3$ – ochiq to'plam, $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lgani uchun, $F(x, y^0(x) + \alpha h(x), y^{0'}(x) + \alpha h'(x))$ funksiya $\{(x, \alpha) : x \in [x_0, x_1], |\alpha| < \varepsilon\}$ to'plamda (bu yerda $\varepsilon > 0$) etarlicha kichik α bo'yicha uzluksiz xususiy hosilaga ega, shuning uchun

$$\varphi(\alpha) = J[y^0 + \alpha h] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^0(x) + \alpha h(x), y^{0'}(x) + \alpha h'(x)) dx$$

funksiya $\alpha = 0$ nuqta atrofida uzluksiz differensiallanuvchidir. Shunday qilib,

$$\delta J = \varphi'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, y^0(x) + \alpha h(x), y^0(x) + \alpha h'(x)) dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h(x) + F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h'(x)] dx.$$

$F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$, $y^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$ bo`lgani uchun $F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))$ funksiya $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi va

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) &= F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) y^{0''}(x) + \\ &+ F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) y^{0'}(x) + F_{xy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

tenglik o`rinli. Endi (2.11) dagi ikkinchi qo`shiluvchini bo`laklab integrallab va $h(x_0) = h(x_1) = 0$ shartni hisobga olib,

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \right] h(x) dx \quad (2.13)$$

formulaga ega bo`lamiz.

Faraz qilaylik, $y^0 = y^0(x)$ - (2.3) masalada kuchsiz ekstremal bo`lsin. U vaqtda ekstremumning zaruriy shartiga ko`ra, shu nuqtada hisoblangan birinchi variatsiya nolga teng, ya'ni (2.13) ga asosan,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \right] h(x) dx = 0 \quad (2.14)$$

bo`ladi. Hosil qilingan (2.14) munosabatga Lagranj lemmasini qo`llaymiz va (2.12) ni hisobga olib, $y^0(x)$ funksiya uchun,

$$F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) + y^{0''}(x) + F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))y^{0'}(x) + F_{xy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) - F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) = 0$$

tenglik, barcha $x \in [x_0, x_1]$ nuqtalarda bajarilishini ko`ramiz. Shunday qilib, quyidagi tasdiqqa ega bo`ldik.

2.1-teorema: $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo`lsin. Agar  $y^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$  (2.3) masalada kuchsiz ekstremal bo`lsa, u

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_{y'} = 0 \quad (2.15)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Hosil qilingan (2.15) differensial tenglamaga *Eyler tenglamasi* deyiladi.

Shunday qilib, ekstremumning zaruriy sharti bo`lgan (2.15) Eyler tenglamasi odatdagidan kuchliroq talabda, ya'ni  $F(x, y, y')$  funksiya va  $y^0(x)$  ekstremalga ikki marta uzluksiz differensiallanuvchilik sharti qo`yilganda keltirib chiqarildi. Ammo variatsion hisob asosiy masalasining qo`yilishida  $y(x)$  joyiz funksiyalarni  $C^{(1)}[x_0, x_1]$  sinfdan deb va  $F(x, y, y')$  funksiyani esa faqatgina uzluksiz deb hisoblaganmiz, xolos. Shuning uchun ekstremumning zaruriy sharti bo`lgan Eyler tenglamasini $F(x, y, y')$ integrantga va $y^0(x)$ ekstremalga kuchsizroq talab qo`yilgan hol uchun

umumlashtirish muhimdir.

2.2-teorema: $F(x, y, y') \in C^{(1)}(Q)$ bo'lsin. Agar $y^0(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$ joyiz funksiya (2.3) masalada kuchsiz ekstremal bo'lsa, u

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0 \quad (2.16)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Isboti: Funksionalning variatsiyasi uchun yuqorida hosil qilingan (2.11) formuladan foydalanib, ekstremumning zaruriy sharti $\delta J = 0$ ni yozamiz:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x))h(x) + F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))h'(x)] dx = 0, \quad (2.17)$$

bu yerda $h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$, $h(x_0) = h(x_1) = 0$.

Endi

$$a_0(x) = F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x)), \quad a_1(x) = F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)),$$

deb olsak, (2.17) dan Dyubua–Reymon lemmasiga ko'ra

$$F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

munosabatni olamiz, ya'ni $y^0(x)$ ekstremal (2.16) tenglamani qanoatlantiradi. 2.2-teorema isbotlandi.

$F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lganda (2.16) differensial tenglama (2.15) ko'rinishni oladi. Ekstremumning zaruriy sharti sifatida olingan (2.16)

tenglama ham *Eyler tenglamasi* deb ataladi.

2.3-ta'rif: Eyler tenglamasini qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ joyiz funksiyalarga (2.2) *funksionalning joyiz stasionar funksiyalari* deyiladi.

Yuqorida isbotlangan teoremlarga ko'ra, (2.2) funksionalning joyiz stasionar funksiyalari ekstremumga shubhali funksiyalardir.

Misol:

$$1) \left. \begin{aligned} J[y] &= \int_1^2 (y'^2 + 4xy) dx \rightarrow \text{extr} \\ y(1) &= 0, \quad y(2) = -1 \end{aligned} \right\}$$

masalani qaraymiz. Uning uchun Eyler tenglamasini tuzamiz:

$$F = y'^2 + 4xy, \quad F_y = 4x, \quad F_{y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y''$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 4x - 2y'' = 0.$$

Demak, Eyler tenglamasi $y'' - 2x = 0$ tenglamadan iborat. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y = y(x) = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

ko'rinishda bo'ladi. $y(1) = 0$, $y(2) = -1$ chegaraviy shartlarga ko'ra,

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{3}, \quad 2c_1 - c_2 = -\frac{11}{3}.$$

Bu yerdan, $c_1 = -\frac{10}{3}$, $c_2 = 3$. Shunday qilib, $y = \frac{x^3}{3} - \frac{10}{3}x + 3$ funksiya – yagona joyiz stasionar funksiya.

$$2) \left. \begin{aligned} J[y] &= \int_1^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx \rightarrow \text{extr} \\ y(0) &= 1, \quad y(2\pi) = 1 \end{aligned} \right\}$$

masalani qaraymiz. Unda $F = y'^2 - y^2$, $F_y = 2y$, $F_{y'} = 2y'$. Demak, (2.16) tenglama $y'' + y = 0$ ko'rinishda bo'ladi. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ funksiya hosil qilingan Eyler tenglamasining umumiy yechimidir. $y(0) = y(2\pi) = 1$ chegaraviy shartlarga asosan, $y = \cos x + c \sin x$ funksiya ega bo'lamiz, bu yerda c – ixtiyoriy o'zgarmas. Demak, qarayotgan masalada cheksiz ko'p joyiz stasionar funksiyalar mavjud.

$$3) \left. \begin{aligned} J[y] &= \int_1^3 (3x - y)y dx \rightarrow \text{extr} \\ y(1) &= 1, \quad y(3) = 4. \end{aligned} \right\}$$

Bu masalada $F = (3x - y)y$, $F_y = 3x - 2y$, $F_y = 0$. Eyler tenglamasi, $F_y = 0$ tenglamadan iborat. Bu yerdan $y = \frac{3x}{2}$. Bu funksiya, $y(1) = 1$, $y(3) = 4$ chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi. Qarayotgan funksional joyiz stasionar funksiyalarga va demak ekstremumga ham ega emas.

Eyler tenglamasining xususiy hollari. $F(x, y, y')$ integrant o'z argumentlarining «to'liq» funksiyasi bo'lmagan hollarda Eyler tenglamasini soddalashtirish yoki uning birinchi integralini aniqlash mumkin.

a) F funksiya faqat y' ga bog'liq, ya'ni $F = F(y')$ bo'lsin. Bu holda Eyler tenglamasi $\frac{d}{dx} F_{y'}(y') = 0$ yoki $F_{y''} = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $y'' = 0$ yoki $F_{y''} = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $y'' = 0$ bo'lsa, $y = C_1 x + C_2$ ikki parametrlilik to'g'ri chiziqlar oilasiga ega bo'lamiz. Agar $F_{y'y'}(y') = 0$ tenglama bir yoki bir necha $y' = k_i$ ildizga ega bo'lsa, $y = k_i x + C$ bir parametrlilik to'g'ri chiziqlar oilasiga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $F = F(y')$ bo'lganda Eyler tenglamasining yechimlari $y = C_1 x + C_2$ chiziqli funksiyalardan iboratdir.

b) $F = F(x, y')$, ya'ni F funksiya faqat x va y' larga bog'liq bo'lsin. Bu holda $F_y = 0$ bo'ladi va Eyler tenglamasi $\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ ko'rinishni oladi. Bu yerda uning $F_{y''}(x, y') = C$ birinchi integraliga ega bo'lamiz. Bu olingan tenglama Eyler tenglamasiga teng kuchlidir. Uni y' ga nisbatan yechish yoki biror parametr kiritish yo'li bilan integrallash mumkin.

c) F faqat y va y' ga bog'liq bo'lsin: $F = F(y, y')$. Bu holda $F \in C^{(2)}$ deb faraz qilib, (2.15) Eyler tenglamasini yozamiz: $F_{y'y'}y'' + F_{y'y'}y' - F_y = 0$ ($F_{xy'} = 0$). Agar bu tenglamaning ikkala tomonini y' ga ko'paytirsak, uni $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$ ko'rinishda yozish mumkin. Natijada Eyler tenglamasi

$$F - y'F_{y'} = C \quad (2.18)$$

ko'rinishdagi birinchi integralga ega bo'ladi. Eyler tenglamasining har qanday yechimi (2.18) tenglamani qanoatlantirishi ravshan. Aksincha, agar (2.18) tenglama faqat chekli sondagi nuqtalarda hosilasi nolga teng bo'lgan $y = y[x] \in C^{(2)}[x_0, x_1]$ yechimga ega bo'lsa, bu yechim Eyler tenglamasini ham qanoatlantiradi. (2.18) tenglamani y' ga nisbatan yechish, yoki parametr kiritish yo'li bilan integrallash mumkin.

Misol sifatida, braxistoxrona haqidagi masalada hosil qilingan

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$$

funksionalni qaraymiz. Bu yerda $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$ faqat y va y' ga bog'liq.

Demak, Eyler tenglamasining birinchi integralini ((2.18) tenglama) yozamiz:

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}; \quad \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C; \quad \frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C$$

Bu yerdan, $y(1+y'^2) = C_1$, $C_1 = \frac{1}{2gc^2}$, yoki $y' = \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}}$ tenglamani olamiz.

Endi $y = C_1 \sin^2 \frac{t}{2}$ almashtirish olsak,

$$dx = C_1 \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{C_1}{2} (1 - \cos t) dx$$

bo`ladi. Natijada:

$$x = C_2 + \frac{C_1}{2} (t - \sin t), \quad y = \frac{C_1}{2} (t - \cos t).$$

Agar $y(x)$ joyiz chiziqning uchlari $A(0,0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarda ekanligidan foydalansak, $C_2 = 0$ bo`lishini olamiz.

$$x = \frac{C_1}{2} (t - \sin t), \quad y = \frac{C_1}{2} (t - \cos t) \quad \text{tenglamalar sistemasi sikloida deb}$$

ataluvchi chiziqning parametrik shakldagi tenglamalaridan iborat. Demak, braxistoxrona haqidagi masalaning yechimi faqat sikloida yoyidan iborat bo`la olar ekan.

4. Gilbert teoremasi.

Yuqorida ko`rsatildiki, agar  $F(x, y, z) \in C^{(2)}$  bo`lsa Eyler tenglamasi

$y = y(x) \in C^{(2)}$ funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli differensial tenglamadan iborat. Ammo (2.3) masalada ekstremal $C^{(1)}[x_0, x_1]$ dan izlanadi. Shuning uchun, ekstremalning $C^{(2)}[x_0, x_1]$ ga tegishli bo'lishini ta'minlovchi quyidagi tasdiqning ahamiyati kattadir.

2.3-teorema (Gilbert): $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsin. Agar (2.3) masalaning $y^0(x)$ kuchsiz lokal ekstremali uchun $F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \neq 0$, $x \in [x_0, x_1]$ bo'lsa, $y^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$ bo'ladi.

Isboti: Quyidagi,

$$\Phi(x, z) = F_{y'}(x, y^0(x), t) - \int_{x_0}^{x_1} F_y(t, y^0(t), y^{0'}(t)) dt - C$$

funksiyani qaraymiz, bunda $C = \text{const}$. 2.2-teoremaga ko'ra

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) = F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x)), \quad \forall x \in [x_0, x_1],$$

ya'ni $F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))$ funksiya $F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x))$ funksiya uchun boshlang'ich funksiyaadir. Shuning uchun,

$$F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(t, y^0(t), y^{0'}(t)) dt + c, \quad c = \text{const}.$$

Demak, $z^0 = y^{0'}(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ funksiya uchun $\Phi(x, z^0) = 0$.

2.3-teoremaning shartiga ko'ra

$$\Phi_z(x, z^0) \Big|_{z^0=y^0} = F_{y', y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \neq 0, \quad x \in [x_0, x_1].$$

U vaqtda oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teoreмага asosan, $\Phi(x, z) = 0$ tenglamaning $z^0 = y^{0'}(x)$ yechimi, $\Phi(x, z)$ funksiya o'z argumentlari bo'yicha nechanchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, shunday tartibli hosilaga egadir. $F(x, y, z) \in C^{(2)}$ bo'lgani uchun $\Phi(x, z) \in C^{(1)}$. Demak, $z^{0'} = y^{y''} \in C[x_0, x_1]$, ya'ni $y^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$.

2.3-teorema isbotlandi.

5. Bo'lakli – silliq joyiz funksiyalar. Eylarning integro-differensial tenglamasi.

Variatsion hisobning asosiy masalasi silliq joyiz funksiyalar sinfida yechimga ega bo'lmashligi mumkin. Shuning uchun, V joyiz funksiyalar to'plamini kengaytirib, uni quyidagicha aniqlaymiz:

$$V = \{y = y(x) \in D^{(1)}[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} \quad (2.19)$$

Bu yerda $D^1[x_0, x_1] - [x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz, hosilalari esa faqat chekli sonidagi uzilish nuqtalariga ega $y = y(x)$ funksiyalar to'plamidan iborat. Har bir joyiz funksiya uchun $y'(\xi_i + 0) \neq y'(\xi_i - 0)$ shartni qanoatlantiruvchi bir necha $\xi_i, i = \overline{1, k}$ nuqtalar mavjud. Bunday ξ_i nuqtalarga bo'lakli – silliq joyiz funksiyaning *egilish nuqtalari* deyiladi.

Endi joyiz funksiyalari bo'lakli-silliq funksiyalar sinfidan olingan

variatsion hisob asosiy masalasini qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} J[y] &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \rightarrow \min (\max) \\ y(x_0) &= y_0, y(x_1) = y_1, y = y(x) \in D^{(1)}[x_0, x_1] \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$D^{(1)}[x_0, x_1]$ dan olingan $y = y(x)$ va $y^0 = y^0(x)$ funksiyalar orasidagi birinchi tartibli masofani ham $C^1[x_0, x_1]$ dagi metrika kabi aniqlash mumkin:

$$\rho_1(y, y^0) = \max_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - y^0(x)| + \sup_{x \in A} |y'(x) - y^{0'}(x)|,$$

bu yerda $A \subset [x_0, x_1]$ to'plam — $y'(x)$ va $y^{0'}(x)$ hosilalar mavjud bo'lgan $x \in [x_0, x_1]$ nuqtalar to'plamidir.

$D^{(1)}[x_0, x_1]$ dagi $y^0 = y^0(x)$ funksiyaning birinchi tartibli ε –atrofini

$$V_1(y^0, \varepsilon) = \{y \in D^{(1)}[x_0, x_1] : \rho_1(y, y^0) < \varepsilon\} \quad (2.21)$$

kabi aniqlab, (2.2) funksionalning (2.19) to'plamidagi kuchsiz lokal ekstremumi ta'rifini berish mumkin. Buning uchun, 2.2-ta'rifdagi $V(y^0, \varepsilon)$ ni (2.21) dagi $V_1(y^0, \varepsilon)$ bilan almashtirish kifoya. Shunday aniqlangan kuchsiz ekstremal uchun quyidagi 2.4-teorema o'rinalidir.

2.4-teorema: $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsin. Agar $y^0(x)$ – (2.20) masalada kuchsiz ekstremal bo'lsa, u quyidagi

$$F_{y'}(x, y, y') = \int_{x_0}^{x_1} F_y(t, y, y') dt + c, \quad c = \text{const} \quad (2.22)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Isboti: 2.1-teorema isbotidagiga o'xshash mulohaza yuritib, funksional variatsiyasining (2.11) ko'rinishdagi ifodasiga ega bo'lamiz:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x))h(x) + F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))h'(x)] dx,$$

bu yerda $h(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $h(x_0) = h(x_1) = 0$. Integral ostidagi birinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x))h(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} F_y(t, y^0(t), y^{0'}(t))dx \cdot h(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} F_y(t, y^0(t), y^{0'}(t))dx \cdot h'(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} F_y(t, y^0(t), y^{0'}(t))dx \cdot h'(x)dx. \end{aligned}$$

U vaqtda, $\delta J = 0$ shart,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y^0(x), y^{0'}(x)) - \int_{x_0}^{x_1} F_y(t, y^0(t), y^{0'}(t))dt \right] h'(x)dx = 0$$

ko'rinishini oladi. Endi 2.3-lemmani qo'llab,

$$F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) = \int_{x_0}^x F_{y'}(t, y^0(t), y^{0'}(t))dt + c \quad (2.23)$$

tenglikni olamiz, bu yerda $x \in [x_0, x_1]$ nuqta $y^{0'}(x)$ hosila mavjud bo'lgan nuqtadir. Shunday qilib, $y^0(x)$ funksiyaning (2.22) tenglamani qanoatlantirishi ko'rsatildi. 2.4-teorema isbotlandi.

(2.22) ga Eylerning integro-differensial tenglamasi deyiladi.

Isbotlangan teoremdan ko`rinadiki, agar  $y^0(x)$  ekstremal  $\xi_i, i = \overline{1, k}$  bukilish nuqtalariga ega bo`lsa, (2.23) ning o`ng tomoni (ξ_i, ξ_{i+1}) oraliqlarda uzluksiz differensiallanuvchi, demak, $y^0(x)$ funksiya shu oraliqlarda (2.16) Eyler tenglamasini qanoatlantiradi. Joyiz funksiyalari silliq funksiyalar sinfidan olingan (2.3) masala uchun esa (2.22) tenglama (2.16) tenglamaga teng kuchlidir.

(2.23) tenglikning o`ng tomoni barcha  $x \in [x_0, x_1]$  nuqtalarda uzluksiz. Demak, bu tenglikning  $F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))$  chap tomoni ham uzluksiz funksiyadir. Natijada, agar  $\xi - y^0(x)$  ekstremalning egilish nuqtasi bo`lsa,

$$F_{y'}(y^0(\xi), y^{0'}(\xi + 0)) = F_{y'}(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi - 0)) \quad (2.24)$$

tenglik o`rinlidir. (2.24) ga Veyershtrass – Erdman sharti deyiladi. Bunday tipdagi shartlardan yana biri

$$H^0 = F(x, y^0(x), y^{0'}(x)) - y^{0'}(x) F_{y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))$$

funksiyaning $x = \xi$ egilish nuqtasida uzluksizligidir, ya'ni

$$H^0(\xi + 0) = H^0(\xi - 0) \quad (2.25)$$

Ko`rinishdagi Veyershtrass – Erdman shartining isboti optimal boshqaruv nazariyasi natijalaridan kelib chiqadi.

Ma'ruzamiz oxirida yechimi bo'lakli-silliq funksiyalar sinfida bo'lgan variatsion masalaga misol sifatida quyidagini keltiramiz.

Misol.

$$J[y] = \int_{-1}^1 y^2 (1 - y')^2 dx \rightarrow \min, y(-1) = 0, y(1) = 1.$$

Bu masalada joyiz funksiyalarni $C^1[-1,1]$ sinfidan olsak, $\inf_{y \in U} J[y] = 0$ bo`ladi, silliq yechim mavjud emas. Haqiqatan ham, agar

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-1, \frac{1}{n}\right], \\ \frac{n}{V_2(1+V_2)} \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 & x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right), \end{cases}$$

$$x, \quad x \in [-1]$$

funksiyalar ketma-ketligini qarasak bu funksiyalar joyiz funksiyalar bo`ladi, ya'ni $y_n(-1) = 0, y_n(1) = 1$. Bu $y_n(x)$ ketma-ketlikda

$|y_n(x)| \leq 1, |y'_n(x)| \leq 1$ bo`lgani uchun,

$$0 \leq J[y_n] = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{2n}}} y_n^2(x) (1 - y'_n(x))^2 dx < \frac{2}{n},$$

va $\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n] = 0$. Demak, $J[y_n] \geq 0, \forall y \in C^1[-1,1]$ ekanligini hisobga olsak

$J[y] = 0$. Ammo, $J[\bar{y}] = 0, \bar{y} \in C^1[-1,1]$ bo`lishi uchun $\bar{y}(x)$ funksiya $[-1,1]$

kesmada yoki aynan nolga teng, yoki $\bar{y} = const$ bo'lishi kerak. Biroq bu funksiyalar $y(-1)=0$, $y(1)=1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi.

Bundan ko'rinadiki, qaralayotgan masala silliq joyiz funksiyalar sinfida yechimga ega emas. Masalaning bo'lakli-silliq funksiyalar sinfida yechimi mavjud. Shunday yechim sifatida,

$$y^0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ x, & x \in (0, 1] \end{cases},$$

funksiyani olish mumkin ($y \in D^1[-1, 1]$, $J[y^0] = 0$). Bu funksiya uchun $\xi = 0$ – burchak nuqta (egilish nuqtasi) bo'ladi. Ushbu burchak nuqtada Veyershtrass – Erdman shartlari bajariladi.

2-ma'ruza bo'yicha savollar

1. Variasion hisob asosiy masalasi qanday qo'yiladi?
2. Funksionalning kuchli lokal minimumi (maksimumi) deb qanday nuqta (chiziq, sirt va h.k) ga aytiladi?
3. Funksionalning kuchli lokal minimumi (maksimumi) deb qanday nuqta (chiziq, sirt va h.k.) ga aytiladi.
4. Variasion hisob asosiy masalasida yechim mavjud bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
5. Variasion hisobning asosiy lemmalari: Lagranj lemmasini keltiring.
6. Variasion hisobning asosiy Lemmalari Dyuba-Riman lemmasini

keltiring.

7. Variasion hisobning asosiy masalasida ekstremumning zaruriy sharti – Eyler tenglamasi qanday ko`rinishga ega?
8. Eyler tenglamasining xususiy hollarini keltiring.
9. Gilbert teoremasini keltiring.
10. Eylerning integro-differensial tenglamasini yozing.

Masalalar

1. $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y') dx$ funksional uchun Eyler tenglamasining yechimini

yozing.

2. $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y') dx$ funksional uchun Eyler tenglamasining birinchi

integralini yozing.

3. $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y') dx$ funksional uchun Eyler tenglamasining birinchi

integralin yozing.

3-ma'ruza

Variatsion hisobning asosiy masalasi (ikkinchi variatsiyani tekshirish, ekstremumning yetarli shartlari).

Reja.

1. Ikkinchi variatsiyani hisoblash. Lejandr sharti.
2. Yakobi tenglamasi. Yakobi sharti.
3. Kuchsiz ekstremumning yetarli shartlari.
4. Kuchli ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari.
5. Kvadratik funksional uchun natija.

Tayanch iboralar: ikkinchi variatsiya, Lejandr sharti, qo'shib olingan variatsion masala, Yakobi sharti, kuchaytirilgan Yakobi va Lejandr shartlari, Veyershtrass funksiyasi, Veyershtrass sharti, kuchli ekstremumning yetarli sharti, Veyershtrass-Erdman shartlari, kvadratik funksionalning ekstremumi.

Avvalgi ma'ruzamizda variatsion hisob asosiy masalasi uchun ekstremumning birinchi tartibli zaruriy shartlari bayon qilingan edi.

Bu yerda esa, shu masala uchun ekstremumning ikkinchi tartibli zaruriy shartlari va yetarli shartlari qaraladi.

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (3.1)$$

funksionalning

$$V = \{y = y(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} \quad (3.2)$$

to'plamdagi ekstremumini topish masalasi, ya'ni variatsion hisob asosiy masalasi berilgan bo'lsin. Bu yerda $F(x, y, y')$ funksiyani R^3 ning biror ochiq Q to'plamida aniqlangan, $P_0(x_0, y_0)$ va $P_1(x_1, y_1)$ nuqtalarni esa $S = \{(x, y) : (x, y, z) \in Q\}$ to'plamga tegishli, deb hisoblaymiz.

1. Ikkinchi variatsiyani hisoblash. Lejandr sharti.

$y^0 = y^0(x)$ joyiz funksiya bo'lsin ($y^0 \in V$). Shu nuqtada (3.1) funksionalning ikkinchi variatsiyasini hisoblaymiz. Ta'rifga ko'ra, bu variatsiya

$$\delta^2 J[y^0, h] = \frac{d^2 J[y^0 + \alpha h]}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=0}$$

formula bo'yicha hisoblanadi, bu yerda

$$h = h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1], h(x_0) = h(x_1) = 0.$$

Agar $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ deb faraz qilsak, $\varphi(\alpha) = J[y^0 + \alpha h]$ funksiya $\alpha=0$ nuqta atrofida uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega. Demak,

$$\delta^2 J[y^0, h] = \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^0(x) + \alpha h(x), y^{0'}(x) + \alpha h'(x)) dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} F(x, y^0(x) + \alpha h(x), y^{0'}(x) + \alpha h'(x)) dx \Big|_{\alpha=0} =$$

=

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F_{yy}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h^2(x) + 2F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h(x) h'(x) +$$

$$+ F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h'^2(x)] dx, \quad h = h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1], \quad h(x_0) = h(x_1) = 0$$

3.1-teorema (Lejandr): $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsin. Agar $y^0(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$ — (3.1) funksionalning (3.2) to'plamdagi kuchsiz minimali (maksimali) bo'lsa

$$F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall x \in [x_0, x_1] \quad (3.4)$$

tengsizlik bajariladi. (3.4) munosabatga *Lejandr sharti* deyiladi.

Isboti: Faraz qilaylik, (3.4) bajarilmasin, ya'ni biror $\xi \in [x_0, x_1]$ uchun

$$F_{y'y'}(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi)) < 0 \quad (3.5)$$

bo'lsin. $F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))$ funksiyaning uzluksizligiga asosan $\xi \in (x_0, x_1)$ deb olish mumkin. Bundan tashqari, bu funksiyaning uzluksizligidan va (3.5) tengsizlikdan shunday $\varepsilon > 0$ sonning mavjudligi kelib chiqadiki,

$$\sup F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) = \beta < 0 \quad x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \quad (3.6)$$

bo'ladi. Quyidagi

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi(x - \xi + \varepsilon)}{2\varepsilon}, & x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \\ 0, & x \notin (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz, bu funksiya $C^{(1)}[x_0, x_1]$ ga tegishli va

$$h'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\varepsilon} \sin \frac{\pi(x - \xi + \varepsilon)}{\varepsilon}, & x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \\ 0, & x \notin (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \end{cases}$$

Endi (3.3) formulada $h = h_\varepsilon(x)$, $h' = h'_\varepsilon(x)$ deb olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \delta^2 J[y^0, h_\varepsilon] &= \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} [F_{yy}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \sin^4 \frac{\pi(x - \xi + \varepsilon)}{2\varepsilon} + \\ &+ F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \frac{\pi}{\varepsilon} \sin^2 \frac{\pi(x - \xi + \varepsilon)}{2\varepsilon} \sin \frac{\pi(x - \xi + \varepsilon)}{\varepsilon} + \\ &+ F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\pi(x - \xi + \varepsilon)}{2\varepsilon}] dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \left[\beta \frac{\pi^2}{4} \sin^2 \frac{\pi(x-\xi+\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \sin^2 \frac{\pi(x-\xi+\varepsilon)}{2\varepsilon} \sin \frac{\pi(x-\xi+\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 F_{yy}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \sin^4 \frac{\pi(x-\xi+\varepsilon)}{2\varepsilon} \right] dx$$

Bu yerdan (3.6) ni e'tiborga olib, yetarli kichik $\varepsilon > 0$ uchun $\delta^2 J[y^0, h_\varepsilon] < 0$ tengsizlikni olamiz. Ammo, lokal minimumning zaruriy shartiga ko'ra, $\delta^2 J[y^0, h_\varepsilon] \geq 0$ munosabat bajarilishi kerak. Bu qarama-qarshilik teoremani minimum uchun isbotlaydi. U maksimum uchun ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2. Yakobi tenglamasi. Yakobi sharti.

Yuqorida isbotlangan Lejandr sharti, lokal minimum (maksimum)ning, funksional ikkinchi variatsiyasi yordamida ifodalanadigan $\delta^2 J[y^0, h] \geq 0$ (≤ 0) shartidan foydalanib keltirib chiqariladi. Funksional ikkinchi variatsiyasining ekstremum nuqtasida ishorasini saqlashini ifodalovchi bu shartdan yana bitta ikkinchi tartibli zaruriy shart-Yakobi shartini keltirib chiqarish mumkin.

$F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ deb hisoblab, $y^0(x)$ joyiz funksiya uchun

$$\omega(x, h, h') = F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))h'^2 + \\ + 2F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))hh' + F_{yy}(x, y^0(x), y^{0'}(x))h^2$$

funksiyani qaraymiz. U vaqtda (3.3) formulaga ko'ra

$$\delta^2 J[y^0, h] = \int_{x_2}^{x_1} \omega(x, h, h') dx \quad (3.7)$$

bo'ladi. Agar $y^0(x)$ kuchsiz minimal (maksimal) bo'lsa, $\delta^2 J[y^0, h] \geq 0$ (≤ 0) shart barcha $h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$, $h(x_0) = h(x_1) = 0$ funksiyalar uchun bajariladi. $h^0(x) = 0$ uchun esa $\delta^2 J[y^0, h^0] = 0$ bo'lishi ravshan. Demak, qarayotgan variatsion hisob masalasiga *qo'shib olingan ekstremal masala* deb ataluvchi

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 J[y^0, h] &= \int_{x_0}^{x_1} \omega(x, h, h') dx \rightarrow \min(\max) \\ h(x_0) &= h(x_1) = 0, \quad h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Masala, $h^0(x) = 0$ yechimga ega.

Faraz qilaylik, $F(x, y, y') \in C^{(3)}(Q)$, $y^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$ - joyiz stasionar funksiya $F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \neq 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1]$ bo'lsin. U vaqtda, (3.8) masala uchun tuzilgan

$$\omega_h(x, h, h') - \frac{d}{dx} \omega_{h'}(x, h, h') = 0$$

Eyler tenglamasiga variatsion hisob asosiy masalasi uchun *Yakobi tenglamasi* deyiladi. $\omega(x, h, h')$ funksiyaning ko'rinishini hisobga olib Yakobi tenglamasini

$$A(x)h'' + B(x)h' + C(x)h = 0 \quad (3.9)$$

ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglama ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda

$$A(x) = F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)), \quad B(x) = \frac{d}{dx} F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)),$$

$$C(x) = \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) - F_{yy}(x, y^0(x), y^{0'}(x))$$

Differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, (3.9) tenglama $h(x_0) = 0, h'(x_0) = 1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (aynan noldan farqli) yagona yechimga ega. Shu yechimning x_0 dan farqli nollariga, x_0 nuqtaga *qo'shma nuqta* deyiladi. Qo'shma nuqtaga yana quyidagi ekvivalent ta'rifni ham berish mumkin.

3.1-ta'rif: Agar (3.9) Yakobi tenglamasi $h(x_0) = 0, h(x^*) = 0 \quad x^* \neq x_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi trivial (aynan nol) bo'lmagan $h(x), x \in [x_0, x_1]$ yechimga ega bo'lsa, x^* nuqtaga $y^0(x)$ joyiz chiziq bo'ylab x_0 nuqtaga qo'shma nuqta deyiladi.

3.2-teorema (Yakobi): Faraz qilaylik,

a) $F(x, y, y') \in C^{(3)}(Q)$, $\bar{y}^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$ - kuchsiz minimal (maksimal)

$F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) > 0$ (< 0) $\forall x \in [x_0, x_1]$ bo'lsin. U holda, $y^0(x)$ funksiya Yakobi shartini qanoatlantiradi: (x_0, x_1) intervalda $y^0(x)$ chiziq bo'ylab x_0 nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqta mavjud emas.

Isboti: Teskarisini faraz qilamiz. $y^0(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ joyiz chiziq bo'ylab x_0 ga qo'shma bo'lgan $x^* \rightarrow x \in [x_0, x_1]$ nuqta mavjud bo'lsin. $h^*(x) \neq 0$, $x \in [x_0, x_1]$ esa, Yakobi tenglamasining unga mos yechimi bo'lsin, ya'ni

$$\omega_h(x, h^*(x), h^{*'}(x)) - \frac{d}{dx} \omega_{h'}(x, h^*(x), h^{*'}(x)) \equiv 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1] \quad (3.10)$$

$$h^*(x_0) = h^*(x^*) = 0$$

shartlar bajarilsin. Qo'shma nuqta ta'rifiga ko'ra, $h^{*'}(x^* - 0) \neq 0$ shart bajariladi. Quyidagi

$$h(x) = \begin{cases} h^*(x), & x \in [x_0, x^*], \\ 0, & x \in (x^*, x_1]. \end{cases} \quad (3.11)$$

funksiyani tuzamiz.

Endi $2\omega(x, h, h') = h\omega_h + h'\omega_{h'}$ formulani, hamda (3.10), (3.11) larni hisobga olib, (3.8) dan quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned}
\delta^2 J[y^0, h] &= \int_{x_0}^{x_1} \omega(x, h, h') dx = \int_{x_0}^{x^*} \omega(x, h, h') dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x^*} (h^* \omega_h + h^{*'} \omega_{h'}) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x^*} (h^* \frac{d}{dx} \omega_h + h^{*'} \omega_{h'}) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x^*} \frac{d}{dx} (h^* \omega_{h'}) dx = \\
&= \frac{1}{2} h^*(x) \omega_h(x, h^*(x), h^{*'}(x)) \Big|_{x_0}^{x^*} = 0.
\end{aligned}$$

Shunday qilib, (3.11) funksiya - (3.8) masalaning yechimidir. teng munosabatlar ko'rsatadiki, $h(x)$ funksiya uchun x^* - bukilish nuqtasidir. Natijida $x = x^*$ nuqtada

$$\omega_h(x, h, h') \Big|_{x=x^*-0} = \omega_{h'}(x, h, h') \Big|_{x=x^*+0} \quad (3.12)$$

Veyershtass - Erdman sharti bajariladi. $\omega(x, h, h')$ funksiyaning ko'rinishini hisobga olib, (3.12) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned}
&[h(x)F_{yy}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) + h'(x)F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))] \Big|_{x=x^*-0} = \\
&= [h(x)F_{yy}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) + h'(x)F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))] \Big|_{x=x^*+0}
\end{aligned} \quad (3.13)$$

$h(x^*-0) = h(x^*+0) = 0$ va $F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x))$ uzluksiz bo'lgani uchun (3.13) tenglik

$$[h'(x^*-0) - h'(x^*+0)]F_{y'y'}(x^*, y^0(x^*), y^{0'}(x^*)) = 0 \quad (3.14)$$

ko'rinishga keladi. 3.2-teoremaning shartiga ko'ra

$F_{y'y'}(x^*, y^0(x^*), y^{0'}(x^*)) \neq 0$. U vaqtda (3.14) dan $h'(x^* - 0) = h'(x^* + 0) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa x^* ning bukilish nuqtasi ekanligiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik 3.2-teoremani isbotlaydi.

3. Kuchsiz ekstremumning yetarli shartlari.

Shunday qilib, variatsion hisob asosiy masalasida ekstremumning birinchi tartibli zaruriy sharti - joyiz funksiyaning stasionarligi (Eyler tenglamasining bajarilishi) bo'lsa, Lejandr va Yakobi shartlari –ikkinchi tartibli zaruriy shartlardir.

Sodda misollar ko'rsatadiki, bu uchala shartning birortasi ham alohida olganda ekstremumning yetarli sharti bo'la olmaydi. Ammo ular birgalikda kuchsiz ekstremumning yetarli shartiga yaqinroqdir.

Quyida Lejandr va Yakobi shartlarini kuchaytirish natijasida kelib chiqadigan yetarli shartlarni keltiramiz.

3.3-teorema: Faraz qilaylik,

- a) $F(x, y, y') \in C^{(3)}(Q), y^0(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$ -joyiz stasionar funksiya bo'lsin;
- b) kuchaytirilgan Lejandr sharti bajarilsin:

$$F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) > 0 \quad (< 0) \quad \forall x \in [x_0, x_1];$$

- c) kuchaytirilgan Yakobi sharti o'rinli bo'lsin: $y^0(x)$ joyiz chiziq bo'ylab

$(x_0, x_1]$ da x_0 nuqtaga qo'shma bo'lgan x_1 nuqta mavjud emas.

U holda, $y^0(x)$ - variatsion hisobning asosiy masalasida kuchsiz lokal minimal (maksimal) bo'ladi.

Isboti: Funksionalning ikkinchi variatsiyasi uchun hosil qilingan (3.3) formuladagi ikkinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^{x_1} 2hh'F_{yy'}dx = \int_{x_0}^{x_1} F_{yy'} \frac{d}{dx} h^2 dx = F_{yy'} h^2(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} h^2 \frac{d}{dx} F_{yy'} dx = - \int_{x_0}^{x_1} h^2 \frac{d}{dx} F_{yy'} dx \quad (3.15)$$

$$u(x) \in C^{(2)}, \quad u(x) > 0, \quad x \in [x_0, x_1] \quad (3.16)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $u(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{u'}{u} F_{y'y'} h^2 \right) dx = \frac{u'}{u} F_{y'y'} h^2 \Big|_{x_0}^{x_1} = 0 \quad (3.17)$$

munosabat bajariladi. Endi (3.15) ni hisobga olib, (3.3) va (3.17) dan,

$$\delta^0 J[y^0, h] = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ [F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{u'}{u} F_{y'y'} \right)] h^2 dx - 2 \left[\frac{u'}{u} F_{y'y'} \right] h h' + [F_{y'y'}] h'^2 \right\} dx \quad (3.18)$$

tenglikni olamiz. $u(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ funksiyani shunday tanlaymizki, (3.18) dagi integral ostidagi ifoda h va h' ga nisbatan to'la kvadrat bo'lsin. Buning uchun quyidagi:

$$\left[\frac{u'}{u} F_{y'y'} \right]^2 = [F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{u'}{u} F_{y'y'} \right)] F_{y'y'} \quad (3.19)$$

ayniyatning bajarilishi zarur va yetarli.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u'}{u} F_{y'y'} \right) = \left(\frac{u''u - u'^2}{u^2} \right) F_{y'y} + \frac{u'}{u} \frac{d}{dx} F_{y'y'}$$

bo'lgani uchun, (3.19) ayniyatni,

$$F_{y'y'} \left\{ -u'' F_{y'y'} - u' \frac{d}{dx} F_{y'y'} + (F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{y'y'}) u \right\} / u = 0 \quad (3.20)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Teoremaning shartiga ko'ra,

$F_{y'y'} = F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \neq 0, x \in [x_0, x_1]$. Demak, (3.20) dan ko'rinadiki, $u(x)$ funksiya

$$(A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u) / u = 0$$

tenglamani qanoatlantirishi kerak, bu yerda $A(x), B(x), C(x)$ – (3.9) Yakobi tenglamasidagi kabi aniqlanadi. 3.3-teoremaning c) shartiga ko'ra,

$$A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u = 0 \quad (3.21)$$

Yakobi tenglamasi, $u(x_0) = 0, u(x^*) = 0, x \in [x_0, x_1]$ shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimga ega emas. $[x_0, x_1]$ ning kompaktligi va differensial tenglama yechimining boshlang'ich shartlaridan uzluksiz bog'liqligi haqidagi teoremadan, shunday yetarli kichik $\varepsilon > 0$ sonning mavjudligi kelib chiqadiki, (3.21) tenglamaning $u(x_0 - \varepsilon) = 0, u'(x_0 - \varepsilon) = 1$ boshlang'ich shartlardagi yechimi $[x_0, x_1]$ da musbat bo'ladi. Shunday qilib (3.16), (3.19) shartlarni qanoatlantiruvchi

$u(x)$ funksiya mavjud. Shu funksiya yordamida (3.18) ifodani

$$\delta^0 J[y^0, h] = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ [F_{y'y'}]^{\frac{1}{2}} h' - [F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} - \frac{d}{dx} (\frac{u'}{u} F_{y'y'})] h^2 \right\} dx \quad (3.22)$$

ko'rinishda yozamiz:

(3.22) dan ko'rinadiki barcha $h(x) \in C^{(1)} x \in [x_0, x_1], h(x_0) = h(x_1) = 0$, funksiyalar uchun $\delta^2 J[y^0, h^*] \geq 0$ bajariladi. Agar biror $h^*(x) \neq 0, x \in [x_0, x_1]$ funksiya uchun $\delta^2 J[y^0, h^*] = 0$ deb faraz qilsak, (3.22) dan

$$[F_{y'y'}]^{\frac{1}{2}} h^{*'}(x) = [F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} - \frac{d}{dx} (\frac{u'}{u} F_{y'y'})] h^*(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu yerdan $h^*(x_0) = 0, F_{y'y'}|_{x=x_0} > 0$ shartlarni hisobga olib, $h^*(x_0) = 0$ ga ega bo'lamiz. Ammo $h^*(x)$ funksiya (3.8) minimallashtirish masalaning yechimi bo'lgani uchun $\delta^2 J[y^0, h^*] = 0$, (3.9)

Yakobi tenglamasini qanoatlantiradi va $h^*(x_0) = h^{*'}(x_0) = 0$ boshlang'ich shartlardan $h^*(0) = 0, x \in [x_0, x_1]$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu olingan qarama-qarshilik ko'rsatadiki, barcha $h^*(0) \neq 0, x \in [x_0, x_1], h(x_0) = h(x_1) = 0$ funksiyalar uchun $\delta^2 J[y, h] > 0$ bajariladi.

Endi quyidagi funksionalni qaraymiz:

$$\Phi(y^0, h) = \delta^2 J[y^0, h] - \frac{q}{2} \int_{x_0}^{x_1} h^2(x) dx, \quad q > 0. \quad (3.23)$$

Bu funksional uchun Eyler tenglamasi,

$$(A(x) - q)h'' + B(x)h' + C(x)h = 0 \quad (3.24)$$

ko'rinishda bo'ladi. $A(x) = F_{yy'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) > 0, x \in [x_0, x_1]$ bo'lgani uchun shunday $q > 0$ topiladiki, $A(x)q > 0, x \in [x_0, x_1]$ bajariladi. Farazga ko'ra, (3.9) Yakobi tenglamasining

$$h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = 1 \quad (3.25)$$

boshlang'ich shartlardagi yechimi (x_0, x_1) intervalda nolga aylanmaydi.

Differensial tenglamalar yechimining parametrdan uzluksiz bog'liqligi haqidagi teorema ko'ra, (3.24) tenglamaning (3.25) shartlardagi yechimi ham shunday xossaga ega bo'ladi. (3.23) funksional uchun yuqoridagi kabi mulohaza yuritib,

$$\Phi(y^0, h) \geq 0, \forall h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1], \quad h(x_0) = h(x_1) = 0$$

munosabatni olamiz. Bu esa (3.23) ga ko'ra

$$\delta J[y^0, h] \geq \frac{q}{2} \int_{x_0}^{x_1} h^2(x) dx \quad (3.26)$$

tengsizlik bajarilishini bildiradi.

$$h(x) = \int_{x_0}^x h'(t) dt \quad \text{bo'lgani uchun, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini}$$

qo'llab, quyidagini olamiz:

$$h^2(x) = \left(\int_{x_0}^x h'(t) dt \right)^2 \leq (x - x_0) \int_{x_0}^{x_1} h'^2(t) dt \leq (x_1 - x_0) \int_{x_0}^{x_1} h'^2(t) dt. \quad x \in [\lambda_0, \lambda_1];$$

$$\int_{x_0}^{x_1} h^2(t) dt \leq (x_1 - x_0)^2 \int_{x_0}^{x_1} h'^2(t) dt.$$

Natijada, (3.26) tengsizlikdan

$$\delta^2 J[y^0, h] \geq \frac{q}{2(x_1 - x_0)^2} \int_{x_0}^{x_1} h^2(x) dx \quad (3.27)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Ikkinchi variatsiya ta'rifiga ko'ra

$$\Delta J[y^0] = J[y^0 + \varepsilon h] - J[y^0] = \varepsilon \delta J[y^0, h] + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta^2 J[y^0, h] + O(y^0, \varepsilon^2 // h //^2) \quad (3.28)$$

tenglik bajariladi, bu yerda

$$\frac{O(y^0, \varepsilon^2 // h //^2)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

$y^0(x)$ – Eyler tenglamasini qanoatlantirgani uchun, $\delta J[y^0, h] = 0$ bo'ladi.

U vaqtda, (3.28) dan

$$\Delta J[y^0] = \frac{\varepsilon^2}{2} [\delta^2 J[y^0, h] + \frac{O(y^0, \varepsilon^2 // h //^2)}{\varepsilon^2}] \quad (3.30)$$

kelib chiqadi.

Endi (3.27) va (3.29) ni hisobga olgan holda (3.30) munosabatdan shunday $\varepsilon > 0$ sonning mavjudligi kelib chiqadiki, barcha $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ va

$h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1], \int_{x_0}^{x_1} h^2(x) dx \leq \alpha < +\infty$ uchun $\Delta J[y^0] \geq 0$ bo'ladi, ya'ni $y^0(x)$

kuchsiz lokal minimaldir. 3.3-teorema isbotlandi.

4. Kuchli ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari.

Bu yerda kuchli ekstremumning zaruriy va yetarli shartlarini isbotsiz keltirish bilan cheklanamiz (isbotlarini ,masalan [2] dan qarash mumkin).

$Q = S \times R^2, S \subset R^2$ berilgan ochiq to'plam, $F(x, y, y') \in C'(Q)$ bo'lsin.

Quyidagi

$E(x, y, y', u) = F(x, y, u) - F(x, y, y') - (u - y')F_{y'}(x, y, y'), (x, y, y', u) \in Q \times R^1$ (3.31) funksiyani qaraymiz. $E(x, y, y', u)$ funksiyaga Veyershtass funksiyasi deyiladi.

3.4-teorema: Agar $y^0(x) = D^1[x_0, x_1]$ - (3.1) funksionalning

$$\tilde{V} = \{y(x) \in D^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$$

to'plamdagi kuchli lokal minimum (maksimum) nuqtasi bo'lsa, $y^0(x)$ mavjud bo'lgan barcha $x \in [x_0, x_1]$ nuqtalarda

$$E(x, y^0(x), y^{0'}(x), u) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \forall u \in R^1 \quad (3.32)$$

Veyershtass sharti bajariladi. $y^0(x)$ ning ξ burchak nuqtalarida esa, (3.32) shart

$$E(\xi, y^0(\xi), y^0(\xi \pm 0), u) \geq 0 (\leq 0) \quad \forall u \in R \quad (3.33)$$

ko'rinishda bo'ladi.

3.5-teorema: Quyidagi shartlar bajarilsin:

- 1). $F(x, y, y') \in C^{(4)}(Q), Q = S \times R^1$,
- 2). $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall (x, y, y') \in Q$;
- 3). $y^0(x) \in C^{(3)}[x_0, x_1]$ – (3.1) funksionalning joyiz stasionar funksiyasi;
- 4). $y^0(x)$ funksiya uchun kuchaytirilgan Lejandr va Yakobi shartlari o'rinli.

U holda, $y^0(x)$ – (3.1) funksionalning (3.2) to'plamdagi kuchli lokal minimum (maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Bu yerda shuni ta'kidlash joyizki, yuqorida keltirilgan Veyershtress shartidan muhim natijalar olish mumkin. Shulardan biri avvalgi ma'ruzamizda aytib o'tilgan, Veyershtress-Erdman shartlarining ikkinchisidir. Haqiqatan ham, Veyershtress-Erdman shartlarining birinchisiga ko'ra, $y^0(x)$ kuchli ekstremalning ξ burchak nuqtasida

$$F_{y'}(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi - 0)) = F_{y'}(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi + 0)) \quad (3.34)$$

bajariladi. (3.33) Veyershtress shartida $u = y^{0'}(\xi \mp 0)$ deb olsak,

$$E(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi \pm 0), y^{0'}(\xi \mp 0)) \geq 0 \quad (3.35)$$

tengsizlik bajariladi. Endi Veyershtress funksiyasining (3.31) ko'rinishini hisobga olib, (3.35) ni qayta yozsak, va bunda (3.34) dan foydalansak,

$$\begin{aligned} & F(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi - 0)) - y^{0'}(\xi - 0)F_{y'}(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi - 0)) = \\ & = F(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi + 0)) - y^{0'}(\xi + 0)F_{y'}(\xi, y^0(\xi), y^{0'}(\xi + 0)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

munosabatni olamiz. Bu esa, Veyershtrass-Erdman shartlarining ikkinchisidir.

Veyershtrass-Erdman shartlarini qisqacha

$$F_y \Big|_{x=\xi-0} = F_{y'} \Big|_{x=\xi+0}, (F - y' F_{y'}) \Big|_{x=\xi-0} = (F - y' F_{y'}) \Big|_{x=\xi+0},$$

ko'rinishda yozish mumkin.

5. Kvadratik funksional uchun natija.

Faraz qilaylik, (3.1) funksional quyidagi

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)y'^2] dx \quad (3.37)$$

ko'rinishdagi kvadratik funksionaldan iborat bo'lsin. Bunday funksional ekstremumining zaruriy va yetarli shartlari quyidagi teoremdan aniqlashtiriladi.

3.6-teorema:

$$p(x) \in C[x_0, x_1], q(x) \in C^1[x_0, x_1], r(x) \in C^1[x_0, x_1], r(x) > 0 (< 0) \forall x \in [x_0, x_1]$$

bo'lsin. Agar Yakobi sharti bajarilmasa, u holda,

$$\inf_{y \in V} J[y] = -\infty (\sup_{u \in V} J[u] = +\infty),$$

ya'ni (3.37) funksionalning (3.2) to'plamda global ekstremumi mavjud

emas. Agar kuchaytirilgan Yakobi sharti bajarilsa (3.37) funksionalning yagona joyiz stasionar funksiyasi mavjud va bu stasionar funksiya funksionalning global minimum (maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Misollar.

1)

$$\int_0^b (y'^2 - y^2 + 2y \sin x) dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(b) = 1 \quad (3.38)$$

$$F(x, y, y') = y'^2 - y^2 + 2y \sin x, \quad F_y = -2y + 2 \sin x, \quad F_{y'} = 2y'$$

Eyler tenglamasini yozamiz:

$$y'' + y - \sin x = 0$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi $y = -\frac{1}{2}x \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

ko'rinishda bo'ladi.

$$y(0) = 0, \quad y(b) = 1$$

shartlardan foydalanib c_1 va c_2 o'zgarmaslarni topamiz:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1 + \frac{b}{2} \cos b}{\sin b}, \quad b \neq \pi k, k = 1, 2, \dots$$

Demak, $b \neq \pi k, k = 1, 2, \dots$ bo'lganda

$$y^0(x) = -\frac{1}{2}x \cos x - \frac{2 + b \cos b}{2 \sin b} \sin x, \quad x \in [0, b] \quad (3.39)$$

Funksiya (3.38) masalada yagona joyiz stasionar funksiyadir. Agar $b = \pi k$, $k = 1, 2, \dots$ bo'lsa, masalada stasionar funksiyalar yo'q. Demak, bu holda ekstremum mavjud emas.

$F_{y'y'} = 2 > 0$, demak, kuchaytirilgan Lejandr sharti bajariladi.

Yakobi tenglamasini tuzamiz: $A(x) = F_{y'y'} = 2 > 0$,

$$B(x) \frac{d}{dx} F_{y'y'} = 0, C(x) \frac{d}{dx} F_{y'y'} - F_{yy} = 2.$$

$h^* + h = 0$ - Yakobi tenglamasi $h(x) = \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \sin x$ - uning umumiy yechimi. Demak, $x^* = \pi$ nuqta $x_0 = 0$ nuqtaga qo'shma nuqtadir. $(0, \pi)$ oraliqda $x_0 = 0$ ga qo'shma nuqta yo'q. Shunday qilib, $b \leq \pi$ bo'lganda Yakobi sharti, $b < \pi$ bo'lganda esa kuchaytirilgan Yakobi sharti bajariladi. $b > \pi$ bo'lganda esa Yakobi sharti bajarilmaydi. 3.5-teoremaga ko'ra $0 < b < \pi$ bo'lganda (3.39) formula bilan aniqlanuvchi $y^0(x)$ funksiya (3.38) masalada kuchli minimal bo'ladi.

2)

$$F = F(y') = y'^3 - 3y'^2 \quad (3.40)$$

bo'lgani uchun Eyler tenglamasi $(y' - 1)y'' = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdan $y = x + c$ va $y = c_1 x + c_2$ ko'rinishdagi yechimlarga ega bo'lamiz. $y = x + c$ funksiya chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi. $y = c_1 x + c_2$ funksiya uchun $y(0) = y(2) = 0$ chegaraviy shartlardan $c_1 = c_2 = 0$ bo'lishi

kelib chiqadi. Demak, $y^0(x)=0$, $x \in [0,2]$ qaralayotgan masalada yagona silliq joyiz stasionar fnksiyadir.

$F_{y'y'}(y^0(x)) = 6(y^{0'}(x) - 1) = -6$, ya'ni kuchaytirilgan Lejandr sharti bajariladi. Endi Yakobi tenglamasini tuzamiz:

$$A(x) = F_{y'y'}|_{y=y^0} = -6, \quad B(x) = \frac{d}{dx} F_{y'y'}|_{y=y^0} = 0, \quad C(x) = \frac{d}{dx} F_{y'y'} - F_{yy} = 0.$$

$h'' = 0$ - Yakobi tenglamasi, $h(x) = \gamma_1 x + \gamma_2$ - uning umumiy yechimidir. $h(0) = 0, h(x^*) = 0, x^* > 0$ shartlardan $h(x) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $[0,2]$ da $x_0 = 0$ nuqtaga qo'shma nuqta mavjud emas, ya'ni kuchaytirilgan Yakobi sharti bajariladi. Demak, 3.3-teoremaga ko'ra, $y^0(x) \equiv 0$ kuchsiz lokal maksimal bo'ladi.

Ammo $y^0(x) \equiv 0$ uchun Veyershtrass sharti bajarilmaydi, ya'ni

$$E(x, y^0, y^{0'}, u) = F(x, y^0, u) - F(x, y^0, y^{0'}) - (u - y^{0'}) F_{y'}(x, y^0, y^{0'}) = u^3 - 3u^2$$

funksiya ishorasini o'zgartiradi. 3.4-teoremaga asosan, $y^0(x) \equiv 0$ - kuchli lokal maksimal bo'la olmaydi.

3-ma'ruza bo'yicha savollar.

1. Variatsion hisobning asosiy masalasida ikkinchi variatsiyani hisoblash. Lejandr sharti.
2. Yakobi tenglamasini keltirib chiqarish. Yakobi sharti.

3. Kuchsiz ekstremumning yetarli shartlari haqidagi teorema.
4. Kuchli ekstremumning zaruriy sharti (Veyershtrass sharti) va yetarli shartlari.
5. Kvadratik funksionalli variatsion hisob masalasi. Ekstremum shartlari.

4-ma'ruza

Variatsion hisob asosiy masalasining ba'zi umumlashmalari

Reja:

1. Bir necha funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionalning ekstremumi.
 - a) Masalaning qo'yilishi. Kuchli va kuchsiz ekstremallar.
 - b) Eyler tenglamalari sistemasi. Stasionar funksiya.
 - c) Lejandr va Yakobi shartlari. Yetarli shartlar. Misol.
2. Yuqori tartibli hosilalarga bog'liq funksionalning ekstremumi.
 - a) Kuchli va kuchsiz ekstremumlar. Eyler-Puasson tenglamasi.
 - b) Ikkinchi tartibli zaruriy shartlar.
 - c) Ekstremumning yetarli shartlari. Misol.
3. Bir necha o'zgaruvchili funksiyalarga bog'liq funksionallarning ekstremumi.

Tayanch iboralar. Vektor funksiya, $C_n^1[x_0, x_1]$ fazo, Eyler tenglamalari sistemasi, kvadratik forma, Lejandr sharti, Yakobi tenglamasi, qo'shma nuqtalar, Eyler –Puasson tenglamasi, kvadratik funksional, Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi.

4.1. Bir necha funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionalning ekstremumi.

Variatsion hisob asosiy masalasining umumlashmasi sifatida, dastlab, bir necha, $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ funksiyalarga bog'liq funksionalning ekstremumi haqidagi masalani qaraymiz.

Faraz qilaylik, $Q \in R^{2n+1}$ – biror ochiq to'plam (soha), $F(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) - Q$ da aniqlangan uzluksiz funksiya, $P(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n})$ va $P(x_1, y_{11}, \dots, y_{1n})$ lar, $S = \{(x, y_1, \dots, y_n) : (x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) \in Q\}$ to'plamning belgilangan nuqtalari, $x_0 < x_1$ bo'lsin.

Qabul qilingan belgilashlar asosida, quyidagi

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx \rightarrow \min(\max) \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{01}, y_2(x_0) = y_{02}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n}, \\ y_1(x_1) &= y_{11}, y_2(x_1) = y_{12}, \dots, y_n(x_1) = y_{2n}, \\ (x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) &\in Q, x \in [x_0, x_1] \\ y_i(x) &\in C^1[x_0, x_1], i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ekstremal masalani qaraymiz.

Qaralayotgan masalani ixchamroq shaklda yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y' = (y_1', \dots, y_n')$, $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})$, $C_n^{(1)}[x_0, x_1] - [x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)) - n$ vektor funksiyalar fazosi. U holda (4.1), (4.2) masalani

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \rightarrow \min(\max), \quad (4.1')$$

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y(x) \in C_n^{(1)}[x_0, x_1] \quad (4.2')$$

ko'rinishda yozish mumkin. (4.2') munosabatlarni qanoatlantiruvchi $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ funksiyalarga (4.1)-(4.2) masalaning joyiz funksiyalari (chiziqlari) deyiladi. Qaralayotgan masalada joyiz chiziqlarning uchlari R^{n+1} fazoning $P_0(x_0, y_0)$ va $P_1(x_1, y_1)$ nuqtalarida mahkamlangan.

Biz $C_n^{(1)}[x_0, x_1]$ bilan bir qatorda, $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz $y(x) - n$ -vektor funksiyalar fazosi $C_n[x_0, x_1]$ dan ham foydalanamiz. Ma'lumki, $C_n[x_0, x_1]$ va $C_n^1[x_0, x_1]$ fazolar chiziqli normalangan fazolar bo'lib, ularda normalar mos ravishda

$$\|y\|_{C_n[x_0, x_1]} = \max'_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in [x_0, x_1]} |y_i(x)|,$$

$$\|y\|_{C_n[x_0, x_1]} = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |y_i(x)| + \max_{x \in [x_0, x_1]} |y_i'(x)| \right]$$

kabi aniqlanadi. Shuning uchun, $y^0(x) = (y_1^0(x), \dots, y_n^0(x))$ joiz chiziqning nolinch va birinchi tartibli ε -atroflarini mos ravishda quyidagicha aniqlaymiz:

$$V_0(y^0, \varepsilon) = \left\{ y(x) \in C_n[x_0, x_1] : \|y - y^0\|_{C_n[x_0, x_1]} < \varepsilon \right\} = \left\{ (y_1(x), \dots, y_n(x)) : \|y_i - y_i^0\|_{C_n[x_0, x_1]} < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n \right\};$$

$$V_1(y^0, \varepsilon) = \left\{ y(x) \in C_n^{-1}[x_0, x_1] : \|y - y^0\|_{C_n^{-1}[x_0, x_1]} < \varepsilon \right\} = \left\{ (y_1(x), \dots, y_n(x)) : \|y_i - y_i^0\|_{C_n^{-1}[x_0, x_1]} < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n \right\};$$

4.1-ta'rif: Agar $y^0(x)$ joiz funksiyaning shunday $V_0(y^0, \varepsilon)$ nolinci tartibli ε – atrofiga tegishli barcha $y = y(x)$ joiz funksiyalar uchun

$$J[y^0] \leq J[y] \quad (J[y^0] \geq J[y]) \quad (4.3)$$

munosabat bajarilsa, $y^0(x)$ funksiya (4.1) funksionalning kuchli lokal minimum (maksimum) nuqtasi deyiladi.

4.2-ta'rif: Agar (4.3) munosabat $y^0(x)$ joiz funksiyaning biror birinchi tartibli ε - atrofiga tegishli $y = y(x)$ joiz funksiyalar uchun bajarilsa, $y^0(x)$ – (4.1) funksionalning *kuchsiz lokal minimum (maksimum)* nuqtasi deyiladi.

Demak, (4.1), (4.2) masala uchun kuchli va kuchsiz ekstremumlar variatsion hisobning asosiy masalasidagiga o'xshash aniqlanadi.

Keltirilgan ta'riflardan ravshanki, kuchli ekstremum nuqtasi kuchsiz ekstremum nuqtasi ham bo'ladi. Buning teskarisi esa to'g'ri emas. Shuning uchun, avvalo kuchsiz ekstremumning zaruriy shartlarini keltiramiz.

4.1-teorema: $F(x, y, y') \in C^1(Q)$ bo'lsin. Agar (4.1) funksional $y^0(x) = (y_1^0(x), \dots, y_n^0(x)) \in C_n^{(1)}[x_0, x_1]$ joyiz funksiyada kuchsiz lokal ekstremumga erishsa, $[x_0, x_1]$ kesmada

$$F_{y_i} \left(x, y^0(x), y^{0'}(x) \right) - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \left(x, y^0(x), y^{0'}(x) \right) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.4)$$

tengliklar bajariladi.

Isboti: (4.1') funksionalning $y^0 = y^0(x)$ nuqtadagi birinchi variatsiyasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\delta J[y^0, h] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y^0 + \alpha h]_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^{0'} + \alpha h, y^{0'} + \alpha h') dx \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, y_1^0(x) + \alpha h_1(x), \dots, y_n^0(x) + \alpha h_n(x), y_1^{0'}(x) + \alpha h_1'(x), \dots, y_n^{0'}(x) + \alpha h_n'(x)) dx \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y_i}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h(x) + F_{y_i'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h_i'(x)] dx,\end{aligned}$$

bu yerda $h_i(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $h_i(x_0) = h_i(x_1) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Funksional ekstremumining zaruriy shartiga ko'ra, $\delta J[y^0, h] = 0$, $\forall h \in C_n^1[x_0, x_1]$, $h(x_0) = h(x_1) = 0$, ya'ni

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y_i}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h(x) + F_{y_i'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h_i'(x)] dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.5)$$

$h_1(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $i = \overline{1, m}$, funksiyalar sistemasining o'zaro bog'lanmaganligini hisobga olib (4.5) dan

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_{y_i}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h(x) + F_{y_i'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) h_i'(x)] dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.6)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Endi Dyubua-Reymon lemmasini qo'llab, (4.6) tengliklardan talab qilingan (4.4) tengliklar sistemasini olamiz. 4.1-eorema

isbotlandi.

Isbotlangan 4.1-teorema ko'rsatadiki, (4.1), (4.2) masalada $y^0(x) = (y_1^0(x), \dots, y_n^0(x))$ kuchsiz ekstremallar

$$F_{y_i}(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y_i'}(x, y, y') = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.7)$$

Eyler tenglamalari sistemasini qanoatlantirar ekan.

Bu yerda, hususiy holda, $n=1$ bo'lganda variatsion hisobning asosiy masalasi uchun olingan natija, ya'ni Eyler tenglamasiga ega bo'lamiz.

Agar $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsa (4.7) dan

$$\sum_{j=1}^n F_{y_i y_j'}(x, y, y') y_j'' + \sum_{j=1}^n F_{y_i y_j}(x, y, y') y_j' + F_{xy_i}(x, y, y') - F_{y_i}(x, y, y') = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.8)$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu esa, n noma'lumli ikkinchi tartibli n ta differensial tenglamalar sistemasidir.

Bundan buyon quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$F_{y_i y_j}^0 = F_{y_i y_j} \left(x, y_1^0(x), \dots, y_n^0(x), y_1^{0'}(x), \dots, y_n^{0'}(x) \right),$$

$$F_{y_i y_j'}^0 = F_{y_i y_j'} \left(x, y_1^0(x), \dots, y_n^0(x), y_1^{0'}(x), \dots, y_n^{0'}(x) \right),$$

$$F_{y_i y_j'}^0 = F_{y_i' y_j'} \left(x, y_1^0(x), \dots, y_n^0(x), y_1^{0'}(x), \dots, y_n^{0'}(x) \right), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Elementlari $F_{y_i' y_j'}^0(x)$ lardan tuzilgan $n \times n$ matrisani $F_{y' y'}^0(x)$ deb belgilaymiz. Faraz qilaylik, $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsin. Agar

$y^0(x) = (y_1^0(x), \dots, y_n^0(x))$ kuchsiz lokal ekstremal uchun $\det F_{y'y'}^0(x) \neq 0, \forall x \in [x_0, x_1]$ bo'lsa, $y^0(x)$ funksiya $[x_0, x_1]$ kesmada (4.8) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

4.3-ta'rif: Eyler tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ joyiz funksiylarga (4.1) funksionalning *stasionar funksiylari* deyiladi.

Stasionar funksiylar ekstremumga shubhali funksiylardir.

Endi (4.1), (4.2) masala uchun ekstremumning ikkinchi tartibli zaruriy shartlari va yetarli shartlarini keltiramiz. Bu natijalarni isbosiz keltirish bilan kifoyalanamiz (isbotlarni adabiyotlardan qarash mumkin).

Agar $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsa, (4.1) funksional har bir $y^0(x) = (y_1^0(x), \dots, y_n^0(x)) \in C_n^1[x_0, x_1]$ nuqtada ikkinchi variatsiyaga ega va quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\delta^2 J[y^0, h] = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i,j=1}^n \left[F_{y_i y_j}^0 h_i(x) h_j(x) + 2 \sum_{i,j=1}^n F_{y_i y_j'}^0 h_i(x) h_j'(x) + \sum_{i,j=1}^n F_{y_i' y_j'}^0 h_i'(x) h_j'(x) \right] dx, \quad (4.9)$$

bu yerda $h = h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$, $h_i(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $h_i(x_0) = h_i(x_1) = 0$.

4.2-teorema: $F(x, y, y') \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsin. Agar (4.1) funksional $y^0(x) \in C_n^1[x_0, x_1]$ joyiz funksiyada kuchsiz lokal minimum (maksimum)ga erishsa, quyidagi:

$$F_{y'y'}^0(x) \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall x \in [x_0, x_1] \quad (4.10)$$

Lejandr sharti bajariladi.

Eslatamizki, $n \times n$ - o'lchamli $F_{y'y'}^0(x) = (F_{y_i y_j}^0(x))$ matrisa uchun yozilgan (4.10) shart shu matrisaga mos keluvchi kvadratik formaning nomanfiy (nomusbat) ishorali ekanligini, ya'ni

$$\sum_{i,j=1}^n F_{y_i y_j}^0(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n.$$

munosabat o'rinli bo'lishini anglatadi.

Agar bu munosabatda tenglik faqat $\xi = 0$ bo'lganda bajarilsa, $F_{y'y'}^0(x) > 0$ (< 0) deb yoziladi.

(4.9) formula bo'yicha hisoblanadigan $\delta^2 J[y^0, h]$ ikkinchi variatsiya $h(x) \in C_n^1[x_0, x_1]$ ga nisbatan kvadratik funksionaldir. Endi $F(x, y, y') \in C^{(3)}(Q)$, $y^0(x) \in C_n^2[x_0, x_1]$ deb hisoblab, shu kvadratik funksional uchun Eyler tenglamalari sistemasini yozamiz:

$$\sum_{i,j=1}^n F_{y_i y_j}^0(x) h_j + \sum_{j=1}^n F_{y_i y_j'}^0(x) h_j' - \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^n F_{y_i' y_j}^0(x) h_j' + \sum_{j=1}^n F_{y_i y_j}^0(x) h_j \right] = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.11)$$

(4.11) – (4.1), (4.2) masala uchun *Yakobi tenglamalari sistemasi* deyiladi.

4.4-ta'rif: Agar (4.11) sistema $h_i(x_0) = h_i(x_*) = 0$, $i = \overline{1, n}$, shartlarni qanoatlantiruvchi trivial (aynan nol) bo'lmagan yechimga ega bo'lsa, x_* nuqtaga $y^0(x)$ joyiz chiziq bo'ylab x_0 nuqtaga qo'shma nuqta deyiladi.

4.3-teorema: Faraz qilaylik, $F(x, y, y') \in C^{(3)}(Q)$, $y^0(x) \in C_n^2[x_0, x_1]$ – (4.1) funksionalga kuchsiz lokal minimum (maksimum) beruvchi joyiz funksiya bo'lsin. U holda Yakobi sharti bajariladi, ya'ni (x_0, x_1) intervalda $y^0(x)$ chiziq bo'ylab x_0 nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqta mavjud emas.

4.4-teorema: Quyidagi shartlar bajarilsin:

- 1) $F(x, y, y') \in C^{(3)}(Q)$;
- 2) $y^0(x) \in C_n^2[x_0, x_1]$ – joyiz stasionar funksiya;
- 3) Kuchaytirilgan Lejandr sharti: $F_{y'y'}^0(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in [x_0, x_1]$;
- 4) Kuchaytirilgan Yakobi sharti: $(x_0, x_1]$ intervalda x_0 nuqta bilan qo'shma bo'lgan x_* nuqta mavjud emas. U holda (4.1) funksional $y^0(x)$ da kuchsiz lokal minimum (maksimum)ga erishadi.

Agar $F(x, y, y') \in C^{(4)}(Q)$, ($Q = S \times R^n$, $S \subset R^{n+1}$ – ochiq to'plam) $F_{y'y'}^0(x) \geq 0$ (≤ 0), $\forall (x, y, y') \in Q$ bo'lsa va 2), 3), 4) shartlar bajarilsa, $y^0(x)$ funksiya (4.1), (4.2) masalada kuchli lokal minimal (maksimal) bo'ladi.

Keltirilgan bu teoremani (4.1) funksional

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{i,j=1}^n p_{ij}(x) y_i y_j + 2 \sum_{j=1}^n q_{ij}(x) y_i y_j' + \sum_{i,j=1}^n r_{ij}(x) y_i' y_j' \right] dx. \quad (4.12)$$

ko'rinishidagi kvadratik funksional bo'lgan holda quyidagi tasdiq bilan to'ldirish mumkin.

4.5-teorema:

$$p_{ij}(x) \in C[x_0, x_1], \quad q_{ij}(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1], \quad r_{ij}(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1], \quad j, i = \overline{1, n}$$

$$r(x) = (r_{ij}(x), i, j = \overline{1, n}) > 0 \quad (< 0) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

bo'lsin. Agar Yakobi sharti bajarilmasa, $\inf J(x) = -\infty$ ($\sup J(x) = +\infty$), ya'ni masala yechimga ega emas. Agar kuchaytirilgan Yakobi sharti bajarilsa yagona stasionar funksiya mavjud va bu funksiya (4.12) funksional uchun global minimal (maksimal) bo'ladi.

Misol:
$$J[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2] dx \rightarrow \min(\max),$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Bu masalada $F = y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2$, $F_{y_1} = 2y_2$, $F_{y_2} = 2y_1$, $F_{y_1'} = 2y_1'$, $F_{y_2'} = 2y_2'$ va Eyler tenglamalar sistemasi ikkita tenglamadan iborat bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} &= 0 \Leftrightarrow y_1' - y_2 = 0, \\ F_{y_2} - \frac{d}{dx} F_{y_2'} &= 0 \Leftrightarrow y_2' - y_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

bu yerdan

$$y_2 = y_1'', \quad y_1^{IV} - y_1 = 0$$

sistemaga kelamiz. Hosil qilingan sistemaning umumiy yechimi

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x,$$

$$y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

ko'rinishda bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanib, $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 1$ ekanligini topamiz. Demak, qaralayotgan masalada joyiz stasionar funksiya

$$y_1^0(x) = \sin x, \quad y_2^0(x) = -\sin x$$

bo'ladi. Lejandr sharti kuchaytirilgan shaklda bajariladi:

$$F_{y'y'} = \begin{pmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

Yakobe tenglamalar sistemasi esa Eyler tenglamalar sistemasi kabi bo'ladi:

$$h_1'' - h_2 = 0, \quad h_2'' - h_1 = 0.$$

Uning umumiy yechimini yozamiz:

$$h_1 = \gamma_1 e^x + \gamma_2 e^{-x} + \gamma_3 \cos x + \gamma_4 \sin x,$$

$$h_2 = \gamma_1 e^x + \gamma_2 e^{-x} - \gamma_3 \cos x - \gamma_4 \sin x$$

$h_1(0) = 0, h_2(x_*) = 0, 0 < x_* \leq \frac{\pi}{2}$ chegaraviy shartlardan $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$,

ya'ni $h_1(x) = 0, h_2(0) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, Yakobi sharti kuchaytirilgan shaklda bajariladi. Shunday qilib, kuchsiz lokal minimumning yetarli shartlari bajariladi. Bundan tashqari, (4.13) shart $F_{y'y'}^0(x, y, y') > 0 \quad \forall (x, y, y') \in R^5$ ekanligini bildirganligidan, 4.4-teoremaga

ko'ra $y^0(x) = (\sin x, -\sin x)$ joyiz funksiya kuchli minimal ham bo'ladi.

2. Yuqori tartibli hosilalarga bog'liq funksionalning ekstremumi.

Faraz qilaylik, $Q \subset R^{n+2}$ berilgan ochiq to'plam (soha),

$$S = \{(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}) : (x, y, z, \dots, z_n) \in Q\}, \quad F(x, y, z_1, \dots, z_n) - Q$$

sohada uzluksiz funksiya, $P_0 = (x_0, y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0,n-1})$, $P_1(x_1, y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1,n-1}) - S$

to'plamning belgilangan nuqtalari, $x_0 < x_1$ bo'lsin.

Quyidagi

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \rightarrow \min(\max), \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) &= y_{00}, \quad y'(x_0) = y_{01}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \\ y(x_1) &= y_{10}, \quad y'(x_1) = y_{11}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_{1,n-1}, \\ y(x) &\in C^{(n)}[x_0, x_1], \quad (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in Q, \quad x \in [x_0, x_1] \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

ekstremal masalani qaraymiz.

Yuqori tartibli hosilalar qatnashgan (4.14), (4.15) masala ham chegaralari qo'zg'olmas variatsion masaladir. Bu masalada joyiz funksiyalar (chiziqlar) (4.15) shartlar bilan aniqlanadi, ya'ni ularning uchlari berilgan P_0 va P_1 nuqtalarda mahkamlangan.

4.5-ta'rif: Agar biror $\varepsilon > 0$ son topilib, $\|y - y^0\|_{C^{(n)}[x_0, x_1]} < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $y = y(x)$ joyiz chiziqlar uchun

$J[y^0] \leq J[y]$ ($J[y^0] \geq J[y]$) tengsizlik bajarilsa, (4.14) funksional $y^0 = y^0(x)$ joyiz chiziqda kuchsiz lokal minimumga (maksimumga) erishadi, deyiladi. Bunda $y^0(x)$ - (4.15) masalaning kuchsiz minimali (maksimali) deyiladi.

Keltirilgan 4.5-ta'rifda $C^{(n)}[x_0, x_1]$ fazodagi norma o'rniga $C^{(n-1)}[x_0, x_1]$ fazodagi normadan foydalansak, kuchli ekstremal ta'rifga ega bo'lamiz. Avvalgi qaralgan variatsion masaladagi kabi bu yerda ham har bir kuchli ekstremalning kuchsiz ekstremal bo'lishi ravshan.

Kuchsiz ekstremumning birinchi tartibli zaruriy sharti quyidagi teoremda berilgan.

4.6-teorema: $F(x, y, z_1, \dots, z_n) \in C^{(n+1)}(Q)$ bo'lsin. Agar $y^0(x)$ - (4.14), (4.15) masalada kuchsiz ekstremal bo'lsa, barcha $x \in [x_0, x_1]$ uchun

$$F_y^0(x) - \frac{d}{dx} F_{y'}^0(x) + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}^0(x) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}^0(x) = 0 \quad (4.16)$$

tenglik bajariladi, bu yerda

$$F_{y^{(i)}}(x) = F_{y^{(i)}}(x, y^0(x), y^{0'}(x), \dots, y^{0^{(n)}}(x)), \quad i = \overline{0, n}. \quad (4.17)$$

Isboti: (4.14) funksionalning $y^0 = y^0(x)$ nuqtadaga birinchi variatsiyasini hisoblaymiz:

$$\delta J[y^0, h] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y^0 + \alpha h]_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y^0 + \alpha h, y^{0'} + \alpha h', \dots, y^{0(n)} + \alpha h^{(n)}\right) dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y^{(i)}}(x, y^0(x), y^{0'}(x)), \dots, y^{0(n)}(x) h^{(i)}(x)] dx$$

bu yerda $h = h(x) \in C^{(n)}[x_0, x_1]$, $h^{(i)}(x_0) = h^{(i)}(x_1) = 0$, $i = \overline{0, n-1}$

(4.18) dagi qo'shiluvchilarning ikkinchisini ($i=1$) bir marta, uchinchisini ($i=2$) marta, va h.k, oxirgisini ($i=n+1$) marta bo'laklab integrallaymiz.

$h^{(i)}(x_0) = h^{(i)}(x_1) = 0$, $i = \overline{0, n-1}$ shartlarni hisobga olib,

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} F_{y^{0'}}(x, y^{0'}(x), \dots, y^{0(n)}(x)) h^{(i)}(x) dx = \\ & = (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^i}{dx^i} F_{y^{(i)}}(x, y^{0'}(x), \dots, y^{0(n)}(x)) h(x) dx, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (4.19)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Endi (4.18) formulada (4.19) tengliklarni va (4.17) belgilashlarni e'tiborga olib, ekstremumning zaruriy sharti bo'lgan, $\delta J[y^0, h] = 0$ munosabatni

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y^0(x) - \frac{d}{dx} F_{y'}^0(x) + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}^0(x) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}^0(x) \right] h(x) dx = 0$$

ko'rinishda yozamiz, bu yerda $h(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya,

$h(x_0) = h(x_1) = 0$. Bu oxirgi tenglikka Lagranj lemmasini (2-ma'ruzaga qarang.) qo'llaymiz va natijada (4.17) ni hosil qilamiz. 4.6-teorema isbotlandi.

Noma'lum $y = y(x) \in C^{(n)}[x_0, x_1]$ funksiyaga nisbatan

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n-1)}} = 0 \quad (4.20)$$

tenglamaga *Eyler–Puasson tenglamasi* deyiladi. $F(x, y, z_1, \dots, z_n) \in C^{(n+1)}(Q)$, bo'lganda Eyler-Puasson tenglamasi $2n$ – tartibli oddiy differensial tenglamadan iborat.

4.6-ta'rif: Eyler-Puasson tenglamasini qanoatlantiruvchi $y^0(x)$ joyiz funksiyaga (4.14), (4.15) masalaning *stasionar funksiyasi* deyiladi.

Endi qaralayotgan masala uchun ekstremumning ikkinchi tartibli zaruriy shartlari va yetarli shartlarini qisqacha bayon qilamiz. Ular to'g'risida to'liq ma'lumotni [2], [3] lardan olish mumkin.

Agar $F(x, y, z_1, \dots, z_n) \in C^{(2)}(Q)$ bo'lsa, (4.14) funksional har bir $y^0 = y^0(x) \in C^{(n)}[x_0, x_1]$ nuqtada ikkinchi variatsiyaga ega va bu variatsiya

$$\delta^2 J[y^0, h] = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i,j=1}^n F_{y^{(i)}y^{(j)}}(x) h^{(i)}(x) h^{(j)}(x) dx, \quad (4.21)$$

$$h = h(x) \in C^{(n)}[x_0, x_1], \quad h^{(i)}(x_0) = h^{(i)}(x_1) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

formula bo'yicha hisoblanadi, bu yerda

$$F_{y^{(i)}y^{(j)}}^0(x) = F_{y^{(i)}y^{(j)}}^0\left(x, y^0(x), y^{0'}(x), \dots, y^{0^{(n)}}(x)\right).$$

$h = h(x)$ ga bog'liq (4.21) funksional uchun tuzilgan Eyler-Puasson tenglamasiga (4.14), (4.15) masala uchun *Yakobi tenglamasi* deyiladi.

4.7-ta'rif: Agar Yakobi tenglamasi $h^{(i)}(x_0) = h^{(i)}(x_*) = 0$, $i = \overline{0, n-1}$, shartlarni qanoatlantiruvchi trivial (aynan nol) bo'lmagan yechimga ega bo'lsa, x_* nuqta- $y^0(x)$ joyiz chiziq bo'ylab x_0 nuqtaga *qo'shma nuqta* deyiladi.

4.7-teorema: $F(x, y, z_1, \dots, z_n) \in C^{(n+2)}(Q)$ bo'lsin. Agar $y^0(x) \in C^{(2n)}[x_0, x_1]$ (4.14), (4.15) masalada kuchsiz minimal (maksimal) bo'lsa, quyidagi shartlar bajariladi:

- a) Lejandr sharti: $F_{y^{(n)}y^{(n)}}^0(x) \geq 0$ (≤ 0), $\forall x \in [x_0, x_1]$
- b) Yakobi sharti: (x_0, x_1) intervalda $y^0(x)$ chiziq bo'ylab x_0 nuqtaga qo'shma nuqta mavjud emas.

4.8-teorema: Agar:

- a) $F(x, y, z_1, \dots, z_n) \in C^{(n+2)}(Q)$, $Q = S \times R$, $S \subset R^{n+1}$ —ochiq to'plam;
- b) $F_{y^{(n)}y^{(n)}}^0(x, y, z_1, \dots, z_n) \geq 0$ (≤ 0), $\forall (x, y, z_1, \dots, z_n) \in Q$;
- c) $y^0(x) \in C^{(2n)}[x_0, x_1]$ joyiz stasionar funksiya;

d) kuchaytirilgan Lejandr sharti bajarilsa:

$$F_{y^{(n)}y^{(n)}}^0(x) > 0 \quad (< 0), \quad \forall x \in [x_0, x_1];$$

e) kuchaytirilgan Yakobi sharti bajarilsa: $[x_0, x_1]$ oraliqda $y^0(x)$ chiziq bo'ylab x_0 nuqtaga qo'shma nuqta mavjud emas. U holda, $y^0(x) - (4.14)$, (4.15) masalada kuchli lokal minimal (maksimal) bo'ladi.

Endi (4.14) funksional

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^n P_i(x) [y^{(i)}(x)]^2 dx \quad (4.22)$$

ko'rinishdagi kvadratik funksionaldan iborat bo'lsin. U holda, Yakobi tenglamasi

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{(i)} \frac{d^i}{dx^i} (P_i(x) h^{(i)}) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi.

4.9-teorema: Faraz qilaylik, $P_i(x) \in C^{(i)}[x_0, x_1]$,

$P_n(x) > 0 \quad (< 0), \quad \forall x \in [x_0, x_1]$ bo'lsin. Agar Yakobi sharti bajarilmasa, (4.22) funksional uchun $\inf J[y] = -\infty \quad (\sup J[y] = +\infty)$ bo'ladi. Agar kuchaytirilgan Yakobi sharti bajarilsa, (4.22) funksional uchun yagona joyiz stasionar funksiya mavjud, bu funksiya funksionalga global minimum (maksimum) beradi.

Misol:

$$\left. \begin{aligned} J[y] &= \int_0^{\pi} (y''^2 - 16y^2) dx \rightarrow \min, \\ y(0) &= 0, y'(0) = 0, y(\pi) = 0, y'(\pi) = 1. \end{aligned} \right\}$$

Bu masalada qatnashayotgan hosilalarning yuqori tartibi $n=2$ bo'lgani uchun (4.20) tenglama

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

ko'rinishda yoziladi. $F = y''^2 - 16y^2$, $F = -32y$, $F_{y'} = 0$, $F_{y''} = 2y''$ bo'lgani uchun Eyler-Puasson tenglamasi

$$-32y + \frac{d^2}{dx^2} (2y'') = 0 \Leftrightarrow y^{IV} - 16 = 0$$

ko'rinishida bo'ladi. Uning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x.$$

Chegaraviy shartlardan

$$c_1 = \frac{1}{2(e^{2n} - 1)}, \quad c_2 = \frac{1}{2(1 - e^{-2n})}, \quad c_3 = \frac{1 + e^{2n}}{2(e^{2n} - 1)}, \quad c_4 = \frac{1}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Qaralayotgan masaladagi funksional (4.22) ko'rinishdagi kvadratik funksionaldir: $n=2$, $P_0(x) = -16$, $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 1$. Uning uchun Yakobi tenglamasi $h^{IV} - 16h = 0$ bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$h = \gamma_1 e^{2x} + \gamma_2 e^{-2x} + \gamma_3 \cos 2x + \gamma_4 \sin 2x.$$

uchun $h(0)=0$, $h(x_*)=0$, $h'(x)=0$, $h'(x_*)=0$, $x_* > 0$ shartlardan $h(x)=0$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni kuchaytirilgan Yakobi sharti bajariladi. $F_{y''y'} = 2 > 0$ – kuchaytirilgan Lejandr sharti ham bajariladi. 4.9-teoremaga asosan

$$y^0(x) = \frac{e^{2x}}{2(e^{2n}-1)} + \frac{e^{-2x}}{2(1-e^{-2n})} - \frac{1+e^{2n}}{2(e^{2n}-1)} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

funksiya masalaning global yechimidir.

3. Bir necha o'zgaruvchili funksiyalarga bog'liq funksionallarning ekstremumi.

3.1.Masalaning qo'yilishi. Soddalik uchun , ikki o'zgaruvchili funksiyaga bog'liq funksional uchun qo'yilgan,

$$J[z(x, y)] = \iint_D F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy \quad (4.23)$$

funksionalning ekstremumini, $C^1(D)$ sohada aniqlangan (uzluksiz va o'zining har bir argumenti bo'yicha uzluksiz birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan) va

$$z(x, y)|_{\partial D} = f(x, y) \quad (4.24)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $z(x, y)$ joiz funksiyalar sinfida, topish haqidagi variatsion masalani qaraymiz, buyerda $\partial D - D$ sohaning

chegarasi, $f(x, y)$ - berilgan funksiya.

Integral tagidagi $F(x, y, z, p, q)$ funksiya(integrand) o'zining z, p, q argumentlari bo'iyicha ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin, deb faraz qilamiz.

3.2.Funksionalning birinchi variatsiyasini topish. Bu yerda ham yuqoridagi shartlarda (4.23) funksionalning birinchi variatsiyasi uchun formula keltirib chiqamiz. Buning uchun variatsion hisob asosiy masalasidagiga o'xshash

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z(x, y), 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.25)$$

bir parametirli sirtlar oilasini qaraymiz va unda aniqlangan

$$J[z(x, y, \alpha)] = \iint F\left(x, y, z + \alpha \delta z, \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \delta z, \frac{\partial z}{\partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \delta z\right) \quad (4.26)$$

funksionalni qaraymiz.

$z = z(x, y)$ – (4.23) funksionalga kuchsiz ekstremum beruvchi sirt bo'lsin. Quyidagi,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q, \delta z = h(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \delta z = \frac{\partial h}{\partial x} = h_x, \frac{\partial}{\partial y} \delta z = \frac{\partial h}{\partial y} = h_y \quad (4.27)$$

belgilashlarni kiritamiz va

$$\delta J[z(x, y)] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[z(x, y, \alpha)]_{\alpha=0} \quad (4.28)$$

ifodani hisoblaymiz. Farazimizga ko'ra, (4.4) funksionalda integrallash va α parametr bo'iyicha diferensiallash amallarining o'rnini almashtirish

mumkin bo'lganligidan birinchi variatsiya formulasi

$$\delta J[z(x, y)] = \iint_D [F_z \cdot h + F_p \cdot h_x + F_q \cdot h_y] dx dy \quad (4.29)$$

ko'rinishni oladi, $h = h(x, y) - z(x, y)$ funksiyaning variatsiyasidir.

3.3. Ekstremumining zaruriy sharti. Eyler-Ostrogradskiy teglamasi.

Ma'lumki, agar $z(x, y)$ funksiya ekstremal bo'lsa, ixtoriy $h = h(x, y)$ variatsiya uchun,

$$\delta J[z(x, y)] \equiv 0 \Leftrightarrow \iint [F_z \cdot h + F_p \cdot h_x + F_q \cdot h_y] dx dy \equiv 0 \quad (4.30)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Oxirga munosabatning chap tomonidagi ikkinchi va uchunchi qo'shiluvchilarning shaklini o'zgartiramiz. Buning uchun

$$\frac{\partial}{\partial x} [F_p \cdot h] = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \cdot h + F_p \cdot h_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [F_q \cdot h] = \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \cdot h + F_q \cdot h_y$$

ifodalardan

$$F_p \cdot h_x = \frac{\partial}{\partial x} [F_p \cdot h] - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \cdot h$$

$$F_q \cdot h_y = \frac{\partial}{\partial y} [F_q \cdot h] - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \cdot h$$

ifodalarni olamiz va (4.30) munosabatga keltirib qo'yamiz:

$$\iint \left[F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \cdot h dx dy + \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [F_p \cdot h] + \frac{\partial}{\partial y} [F_q \cdot h] \right\} dx dy = 0$$

Oxirgi munosabatdagi ikkinchi integralda ikki karrali integralni egri chiziqli integral orqali ifodalash formulasi - Grin formulasi

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} P x + Q dy \quad (4.31)$$

dan foydalanib va (4.24) chegaraviy shartlardan $h[(x, y)]_{\partial D} = 0$ ekanligini hisobga olib, (4.30) shartni

$$\iint_D \left[F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] h(x, y) dx dy \equiv 0 \quad (4.32)$$

ko'rinishda yozamiz. Bunda $h(x, y)$ variatsiyaning ixtiyoriyligidan Lagranj lemmasining ikki karrali integral uchun umumlashmasi barcha shartlari o'rinli bo'lganligidan, (4.32) ifodaning chap tamonidagi o'rta qavs ichidagi ifodaning D to'plamning barcha nuqtalarida aynan nolga teng bo'lishini olamiz. Demak (4.23) funksional ekstremumga erishadigan $z = z(x, y)$ funksiya quyidagi

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0 \quad (4.33)$$

tenglamani qanoatlantirishi zarur. (4.33) tenglama *Eyler – Ostrogradskiy tenglamasi* deyiladi va u ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamadan iborat, bunda

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ F_p(x, y, z, p, q) \right\} = F_{xp} + F_{zp} \cdot p + F_{pp} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + F_{qp} \frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ F_q(x, y, z, p, q) \right\} = F_{yq} + F_{zq} \cdot q + F_{pq} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Matematik fizika tenglamalari kursida (4.33) tenglamaning (4.24) chegaraviy shartlarni qanoatlantruvchi echimini topish masalasi –*Dirixle masalasi* deb ataladi.

Funksional uch yoki undan ko'p o'zgaruvchili funksiyaga bogliq bo'lganda ham Eyler- Ostrogradskiy teglomasini keltirib chiqarish mumkin.

3.4. misol

Ushbu

$$J[z] = \iint_D (z_x^2 + z_y^2) dx dy$$

funksional uchun Eyler-Ostrogradskiy tenglomasini yozing.

Echilishi: Berilgan funksional ikki o'zgaruvchili funksiyaga bogliq bo'lib, unda $F = F(p, q) = p^2 + p^2$ bo'lganligidan

$F_z = 0, F_p = 2p, F_q = 2q$ va Eyler-Ostrogradskiy tenglamasi

$$\frac{\partial}{\partial u} \{2p\} + \frac{\partial}{\partial D} \{2q\} = 0,$$

yoki, $z^2_{xx} + z^2_{yy} = 0 \Leftrightarrow \Delta z = 0$ Laplas teglamasidan iborat. Ma'lumki, uning echimlari *garmonik funksiyalar* deb ataladi.

Mustaqil ishlash uchun savollar.

1. Bir necha funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionalning kuchli va kuchsiz ekstremallari. Eyler tenglamalar sistemasi. Statsionar funksiyalar.
2. Lejandr va Yakobi shartlari. Yetarli shartlar.
3. Yuqori tartibli hosilalarga bog'liq funksional ekstremumi. Kuchsiz ekstremumning birinchi tartibli zaruriy sharti. Eyler-Puasson tenglamasi.
4. Ikkinchi tartibli zaruriy shartlar.

5-ma'ruza

Chegaralari qo'zg'oluvchan variatsion masalalar

Reja:

1. Masalaning qo'yilishi.
2. Eyler tenglamasi, transversallik shartlari.
3. Transversallik shartlarining xususiy xollari.

Tayanch iboralar: joiz chiziq, qo'zg'oluvchan chegaralar, funksionalning birinchi variatsiyasi, Eyler tenglamasi, transversallik shartlari.

5.1. Masalaning qo'yilishi.

Quyidagilar berilgan bo'lsin:

- a) $Q - R^3$ dagi biror aniq to'plam (soha);
- b) $S = \{(x, y) \in R^2; (x, y, z) \in Q\} - Q$ to'plamning R^2 da proektsiyasi;
- c) $(x_0, y(x_0)), (x_1, y(x_1)) \in S'$; bu erda x_0, x_1 lar oldindan berilmagan;
- d) $y(x)$ funktsiyalar uzluksiz differentsiallanuvchi, ya'ni $y \in C^1[a, b]$, bo'lib, $x_0, x_1 \in (a, b)$;
- e) $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ - uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiyalar;
- f) $F(x, y, z); Q \rightarrow R^1$ - uzluksiz funktsiya.

$C^{(1)}[x_0, x_1]$ fazoning

$V = \{y(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]: \varphi(x_0, y(x_0)) = 0, \psi(x_0, y(x_0)) = 0, (x, y(x), y'(x)) \in Q, x \in [x_0, x_1]\}$
to'plamida aniqlangan

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

funksionalning ekstremumini topish masalasini qaraymiz.

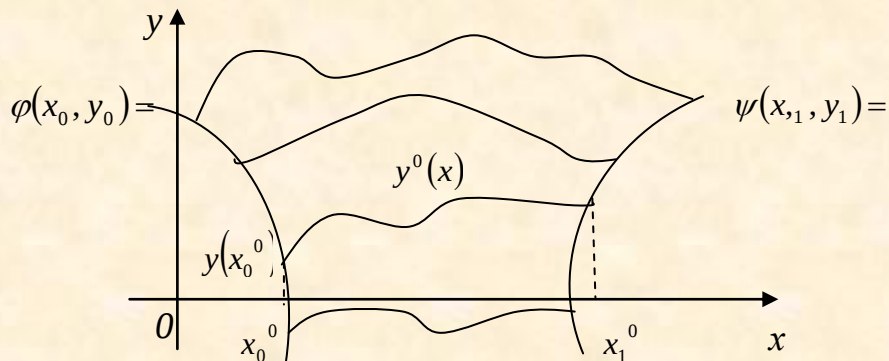
Bu masala *chegaralari qo'zg'oluvchan variatsion masala* deyiladi va u

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \rightarrow \min(\max), \quad (5.1)$$

$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \psi(x_1, y_1) = 0, y \in C^{(1)}[a, b] \quad (5.2)$$

ko'rinishda belgilanadi, bu erda $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1)$.

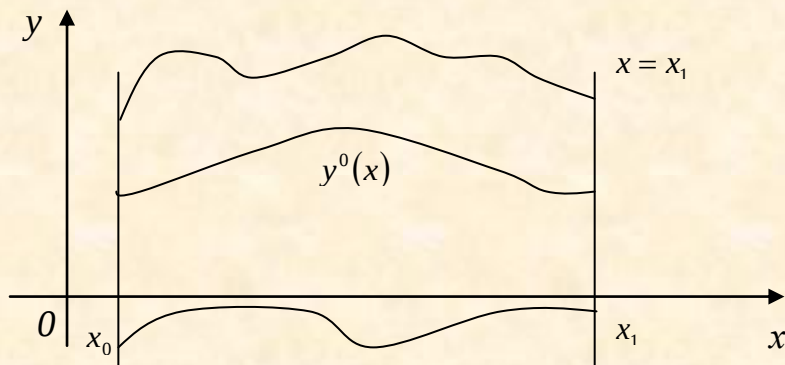
5.1-izoh: (5.2) shartlar qo'zg'oluvchan chegaralarni aniqlaydi (5.1-chizma). Shunday qilib, qo'yilgan masalada ekstremum, uchlari $\varphi(x_0, y_0) = 0$ (chap uchi uchun), $\psi(x_1, y_1) = 0$ (o'ng uchi uchun) tenglamalar bilan aniqlanadigan berilgan chiziqlar bo'ylab siljiydigan silliq chiziqlar sinfida izlanadi.



5.1-chizma

Qo'yilgan masalaning quyidagi xususiy hollarini ajratish mumkin.

1) Joiz chiziqlarning uchlari $x = x_0$, $x = x_1$ tenglamalar bilan aniqlanadigan ikkita berilgan vertikal to'g'ri chiziqlar bo'yicha siljiydi (5.2-chizma):

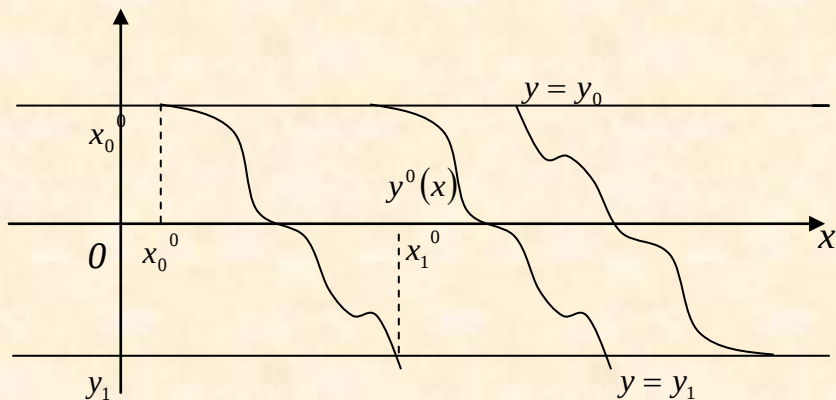


5.2-chizma

2) Joiz chiziqlarning uchlari

$$y = \varphi(x), \quad y = \phi(x) \quad (5.3)$$

tenglamalar bilan ifodalanadigan ikkita berilgan chiziqlar bo'ylab siljiydi. Bu holda chizma 5.1-chizma kabi bo'ladi. Qaralayotgan holda berilgan chiziqlar abstsissalar o'qiga parallel $y = y_0$, $y = y_1$ to'g'ri chiziqlardan iborat masalani alohida ajratish mumkin (5.3-chizma):



5.3-chizma

5.2-izoh. Qo'yilgan masalada $y^0(x)$ chiziqni izlash bilan birga x_0^0 va x_1^0 qiymatlar ham tanlanadi ((5.1), (5.2)-chizmalarga qarang), ya'ni $(y^0(x), x_0^0, x_1^0)$ uchlik izlanadi. Bunda uning birinchi tartibli ε - atrofi ($\varepsilon > 0$)

$$\|y - y^0\|_{C^{(1)}[a,b]} < \varepsilon, |x_0 - x_0^0| < \varepsilon, |x_1 - x_1^0| < \varepsilon$$

shartlarni qanoatlantiradigan $(y(x), x_0, x_1)$ uchliklar orkali hosil qilinadi.

(5.1) funksional aniqroq ko'rinishda

$$J(y, x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

kabi yoziladi.

Agar (5.1) funksional uchun $(y^0(x), x_0^0, x_1^0)$ uchlikning birinchi tartibli ε - atrofida

$$J(y^0(x), x_0^0, x_1^0) \leq J(y, x_0, x_1)$$

tengsizlik bajarilsa, funksional $(y^0(x), x_0^0, x_1^0)$ uchlikda kuchsiz minimumga erishadi, deyiladi.

5.2. Eyler tenglamasi.

(5.1), (5.2) masalaning echimini izlash uchun funksional ekstremumining birinchi tartibli zaruriy sharti $\delta J = 0$ dan foydalanamiz.

Faraz qilaylik, $(y^0(x), x_0^0, x_1^0)$ uchlikda (5.1) funksional ekstremumga erishsin. U holda joiz chiziqlar

$$y(x) = y^0(x) + \alpha h(x), \quad y'(x) = y^{0'}(x) + \alpha h'(x)$$

munosabatlar bilan aniqlanadi, bu erda $\alpha \in R$ – parametr, $h(x)$ – tanlangan variatsiya; integrallash chegaralarining joiz qiymatlari esa

$$x_0 = x_0^0 + \alpha \delta x_0, \quad x_1 = x_1^0 + \alpha \delta x_1$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Funksionalning birinchi variatsiyasini topamiz. Ta'rifga ko'ra,

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_0^0 + \alpha \delta x_0}^{x_1^0 + \alpha \delta x_1} F(x, y^0 + \alpha h, y^{0'} + \alpha h') dx \Big|_{\alpha=0}$$

ni topish uchun ushbu

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(t, \alpha) dt = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt + \\ + f(v(\alpha), \alpha) \frac{dv}{d\alpha} - f(u(\alpha), \alpha) \frac{du}{d\alpha}$$

integralni parametr bo'yicha differentsiallash formulasidan foydalanamiz.

U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\delta J = \left\{ \int_{x_0^0 + \alpha \delta x_0}^{x_1^0 + \alpha \delta x_1} \left[\frac{\partial F(x, y^0 + \alpha h, y^{0'} + \alpha h')}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y^0 + \alpha h, y^{0'} + \alpha h')}{\partial y'} h'(x) \right] dx + \right. \\ \left. + F(x, y^0 + \alpha h, y^{0'} + \alpha h') \Big|_{x=x_1^0 + \alpha \delta x_1} \delta x_1 - F(x, y^0 + \alpha h, y^{0'} + \alpha h') \Big|_{x=x_0^0 + \alpha \delta x_0} \delta x_0 \right\}_{\alpha=0} = \\ \int_{x_0^0}^{x_1^0} [F_y h(x) + F_{y'} h'(x)] dx + F(x_1^0, y^0(x_1^0), y^{0'}(x_1^0)) \delta x_1 - F(x_0^0, y^0(x_0^0), y^{0'}(x_0^0)) \delta x_0$$

Integralda ikkinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallab (2-ma'ruzaga qarang), ekstremumning zaruriy shartini

$$\delta J = \int_{x_0^0}^{x_1^0} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx + F_{y'} h(x) \Big|_{x_0^0}^{x_1^0} + F \Big|_{x=x_1^0} \delta x_1 - F \Big|_{x=x_0^0} \delta x_0 = 0 \quad (5.4)$$

ko'rinishda yozamiz.

(5.4) shartdan ko'rinadiki, funksionalning birinchi variatsiyasi δJ tanlangan x_0^0 va x_1^0 qiymatlarda $h(x)$ joiz chiziq variatsiyasi bilan aniqlanadigan integral qismdan hamda integrallash intervali uchlarining δx_0 , δx_1 variatsiyalari va ekstremal uchlarining $x = x_0^0$, $x = x_1^0$ dagi $h(x)$ variatsiyalariga bog'liq uchta qo'shiluvchidan iborat (5.4-chizma).

$\delta J = 0$ shartdan ikkita tenglik kelib chiqadi:

$$1. \int_{x_0^0}^{x_1^0} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx = 0$$

ya'ni (5.1), (5.2) masalaning $y^0(x)$ ekstremali

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Eyler tenglamasining echimi bo'lishi zarur (2-ma'ruzaga qarang).

$$2. F_{y'} h(x) \Big|_{x_0^0}^{x_1^0} + F \Big|_{x=x_1^0} \delta x_1 - F \Big|_{x=x_0^0} \delta x_0 = 0 \quad (5.5)$$

Bunda $h(x) \Big|_{x=x_1^0} \neq h(x_1)$, $h(x) \Big|_{x=x_0^0} \neq h(x_0)$ ekanligini ta'kidlash lozim (5.4-chizma).

$$F_y \Big|_{h(x_1)} + [F - y' F_{y'}]_{x=x_1^0} \delta x_1 - F_{y'} \Big|_{x=x_0^0} h(x_0) - [F - y' F_{y'}]_{x=x_0^0} \delta x_0 = 0 \quad (5.7)$$

ko`rinishda yozish mumkin.

(5.5) ni (5.7) ga almashtirishni hisobga olsak, funksionalning variatsiyasi va (5.4) ekstremumning zaruriy sharti

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{x_0^0}^{x_1^0} [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}] h(x) dx + F_{y'} \Big|_{x=x_1^0} h(x_1) + \\ + [F - y' F_{y'}]_{x=x_1^0} \delta x_1 - F_{y'} \Big|_{x=x_0^0} h(x_0) - [F - y' F_{y'}]_{x=x_0^0} \delta x_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

ko`rinishda yoziladi.

(5.2) chegaraviy shartlarga asosan, $h(x_1)$ va $\delta(x_1)$, hamda $h(x_0)$ va $\delta(x_0)$ variatsiyalar bog'langan:

$$\begin{aligned} \delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x_0^0, y^0(x_0^0)} \delta x_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{x_0^0, y^0(x_0^0)} h(x_0) = 0, \\ \delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_1^0, y^0(x_1^0)} \delta x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x_1^0, y^0(x_1^0)} h(x_1) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

lekin $h(x_1)$ va $\delta(x_1)$ variatsiyalar, $h(x_0)$ va $\delta(x_0)$ variatsiyalar bilan bog'lanmagan. Shuning uchun (5.7) tenglikni

$$\begin{aligned} F_{y'} \Big|_{x=x_1^0} h(x_1) + [F - y' F_{y'}]_{x=x_1^0} \delta x_1 = 0 \\ F_{y'} \Big|_{x=x_0^0} h(x_0) + [F - y' F_{y'}]_{x=x_0^0} \delta x_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

ko`rinishda yozish mumkin.

(5.9) va (5.10) shartlar *transversallik shartlari* deyiladi.
Keltirilgan natijalarni quyidagi tasdiq ko`rinishida ifodalaymiz.

5.1-teorema (ekstremumning zaruriy sharti): (5.1) funksionalning (5.2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $y^0(x) \in C^{(1)}[a, b]$ kuchsiz ekstremali:

a) $F_y = \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ Eyler tenglamasini;

b) (5.9), (5.10) transversallik shartlarini qanoatlantiradi.

5.3. Transversallik shartlarining xususiy hollari.

1. Agar joiz chiziqlarning bir uchi mahkamlangan bo`lsa, bu uch uchun transversallik shartlari yozilmaydi, variatsiyalar nolga teng.

2. Agar joiz chiziqlarning uchlari ikkita ikkita berilgan $x = x_0$, $x = x_1$ vertikal to`g`ri chiziqlar bo`ylab siljiydigan masalalar berilgan bulsa, uning uchun  $\delta x_0 = 0$ ,  $\delta x_1 = 0$  bo`ladi.

Demak, (5.10) transversallik shartlari

$$F_{y'} \big|_{x=x_1^0} = 0 \quad F_{y'} \big|_{x=x_0^0} = 0 \quad (5.11)$$

ko`rinishga ega bo`ladi.

(5.9) shartlar bajariladi, chunki berilgan to`g`ri chiziqlar tenglamalarini

$$\varphi(x_0) = x_0 - x_0^0 = 0, \quad \psi(x_1) = x_1 - x_1^0 = 0$$

ko`rinishda yozish mumkin.

3. Agar joiz chiziqlarning uchlari berilgan ikkita $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ chiziqlar bo'ylab siljisa, (5.2) shartlarni

$$\varphi(x_0, y_0) = y_0 - \varphi(x_0) = 0, \quad \psi(x_1, y_1) = y_1 - \psi(x_1) = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu holda (5.9) dan

$$-\varphi'(x_0)\delta x_0 + 1 \cdot h(x_0) = 0,$$

$$-\psi'(x_1)\delta x_1 + 1 \cdot h(x_1) = 0$$

tengliklarga ega bo'lamiz yoki:

$$h(x_0) = \varphi'(x_0)\delta x_0, \quad h(x_1) = \psi'(x_1)\delta x_1$$

U holda (5.10) dan

$$F + [(\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_1^0} \delta x_1 = 0$$

$$F + [(\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_0^0} \delta x_0 = 0$$

tengliklar kelib chiqadi. δx_1 va δx_0 variatsiyalarning ixtiyoriyligidan bu hol uchun

$$\begin{aligned} [F + (\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_1^0} &= 0 \\ [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_0^0} &= 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

transversallik shartlariga ega bo'lamiz.

Agar

$$y = y_0 = \varphi(x) = \text{const}, \quad y = y_0 = \psi(x) = \text{const}$$

ko'rinishdagi chiziqlar qaralsa, $y'(x) = 0$, $\psi'(x) = 0$ bo'ladi va (5.12) shartlar

soddalashadi:

$$[F + y' F_{y'}]_{x=x_1^0} = 0, \quad [F + y' F_{y'}]_{x=x_0^0} = 0. \quad (5.13)$$

4. Agar (5.2) shartlar qatnashmasa, $h(x_1)$, δx_1 , $h(x_0)$, δx_0 variatsiyalar ixtiyoriy bo`ladi. U holda (5.10) dan

$$\begin{aligned} F_{y'}|_{x=x_1^0} = 0, \quad [F - y' F_{y'}]_{x=x_1^0} &= 0 \\ F_{y'}|_{x=x_0^0} = 0, \quad [F - y' F_{y'}]_{x=x_0^0} &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

kelib chiqadi.

5. Agar (5.2) shartlar $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ ko`rinishda yozilgan bo`lsa, ya'ni chegaralari qo`zg'olmas masala qaralsa,  $\delta x_0 = \delta x_1 = h(x_0) = h(x_1) = 0$  bo`lgani uchun (5.10) transversallik shartlari bajariladi, Eyler tenglamasining umumiy echimidagi ixtiyoriy o`zgarmaslar esa, chegaraviy shartlardan aniqlanadi.

5.1-misol. Chap uchi $A(0;0)$ nuqtada mahkamlangan, o`ng uchi esa  $x = x_1 = 2$  to`g'ri chiziqda yotuvchi silliq chiziqlar ichida (5.5-chizma)

$$J(y) = \int_0^2 [2xy + yy' + y'^2] dx$$

funksionalga ekstremum beruvchi chiziq topilsin.

Echilishi: Eyler tenglamasini tuzamiz:

$$F = 2xy + yy' + y'^2, \quad F_y = 2x + y', \quad F_{y'} = y + 2y', \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = y' + 2y''$$

bo'lgani uchun, Eyler tenglamasi

$$2x + y' - y' - 2y'' = 0 \quad \text{yoki} \quad y'' = x$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Uni ketma-ket ikki marta integrallab, umumiy echimini topamiz:

$$y' = \frac{x^2}{2} + c,$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2.$$

Joiz chiziqlarning chap uchi maxkamlangan, o'ng uchi esa $x = 2$ vertikal chiziq bo'ylab siljigani uchun, chap uch uchun chagaraviy shart va o'ng uchi uchun (5.11) transversallik shartini yozamiz.

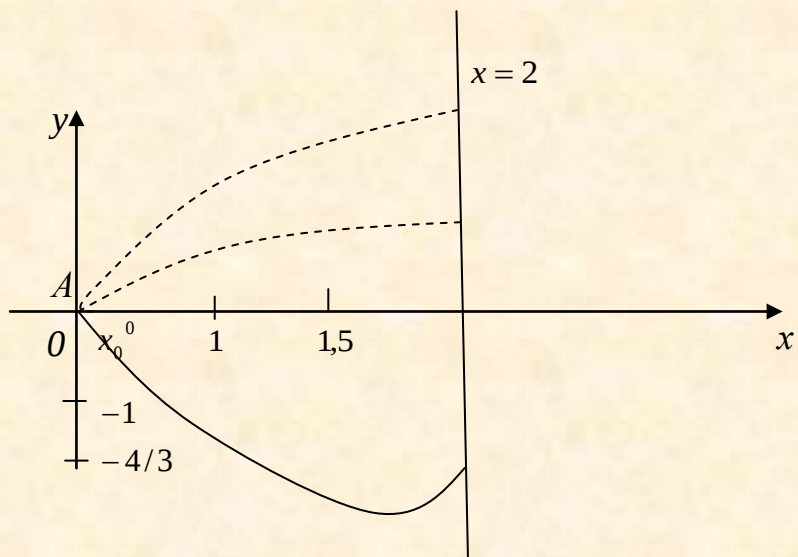
$$y(0) = 0$$

$$F_{y'}|_{x_1=2} = (y + 2y')|_{x_1=2} = y(2) + 2y'(2) = 0$$

Endi C_1 va C_2 o'zgarmaslarni topamiz.

$$y(0) = C_2 = 0, y(2) + 2y'(2) = \frac{8}{6} + 2C_1 + C_2 + 4 + 2C_1 = 0.$$

Bu erdan $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{4}{3}$. Natijada, $y^0(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{4x}{3}$ ekstremalga ega bo'lamiz (5.5-chizmaga qarang).



5.5-chizma

6-ma'ruza

Shartli ekstremumga qo'yilgan variatsion masalalar

Reja:

1. Bog'lanishlari chekli bo'lgan variatsion masalalar
 - 1.1 Masalaning qo'yilishi.
 - 1.2 Masala yechimini izlash tartibi (sxemasi).
 - 1.3 Masalada shartli ekstremumning zaruriy shartini qo'llash algoritmi.
2. Differentsial bog'lanishlari bo'lgan shartli ekstremum masalalari
 - 2.1 Masalaning qo'yilishi
 - 2.2 Masala yechimini izlash tartibi (sxemasi).
 - 2.3 Masalada ekstremumning zaruriy shartini qo'llash algoritmi.

Tayanch iboralar: Vektor funksiya, $C^1[x_0, x_1]$ fazo, masala yechimini izlash tartibi, Lagranj funksiyasi, Lagranj ko'paytuvchilari, Eyler tenglamalari sistemasi, umumiy yechim, chegaraviy shartlar, bog'lanishlar tenglamalari.

6.1. Bog'lanishlari chekli bo'lgan variatsion masala.

6.1.1. Masalaning qo'yilishi. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi joiz $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ vektor funksiyalar to'plami M ni qaraymiz:

a) $y_i(x)$ funksiyalar $[x_0, x_1]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin, ya'ni $y_i(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $i = \overline{1, n}$, x_0, x_1 - berilgan;

b) $y_i(x)$ funksiyalar

$$y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1}, i = \overline{1, n} \quad (6.1)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin, ya'ni $y_i(x)$ egri chiziqlarning har biri mahkamlangan (qo'zg'olmas) chegara nuqtalardan o'tadi, y_{i0}, y_{i1} , $i = \overline{1, n}$, berilgan sonlar;

c) $y_i(x)$ funksiyalar barcha $x \in [x_0, x_1]$ lar uchun

$$\varphi_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = 0, j = \overline{1, m}, m < n, \quad (6.2)$$

chekli bog'lanishlarni qanoatlantiradi., bunda $y_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $j = \overline{1, m}$ funksiyalar barcha o'zgaruvchilari bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchidir.

(6.2) tenglamalar o'zaro bog'lanmagan, ya'ni

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \end{pmatrix} = m,$$

hamda (6.2) bog'lanishlar (6.1) chegaraviy shartlarga muvofiqlashtirilgan.

Oxirgi jumlaning ma'nosi shundan iboratki, chegaraviy nuqtalar (6.2)

tenglamalarni $x = x_0$ va $x = x_1$ bo'lganda qanoatlantirishi shart.

M to'plamda

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx \quad (6.3)$$

funksional berilgan, bu yerda $F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')$ funksiya o'zining barcha argumentlari bo'yicha ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega, deb faraz qilinadi.

M to'plamga tegishli joiz $y(x)$ vektor funksiyalar ichida shunday $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ vektor funksiyani topish kerakki, unda (6.3) funksional ekstremumga erishsin, ya'ni

$$J[y_1^*(x), y_2^*(x), \dots, y_n^*(x)] = \underset{y(x) \in M}{extr} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx \quad (6.4)$$

bo'lsin.

Qo'yilgan masala, funksionallarning shartli ekstremumini topish haqidagi masalalar sirasiga kiradi.

6.1.2. Masala yechimini izlash tartibi (sxemasi). Sxema ekstremumning zaruriy sharti, birinchi variatsiyaning ekstremum beruvchi funksiyada nolga tengligiga, ya'ni $\delta J = 0$ shartga tayanadi.

Ma'lumki, (6.4) masala, bir o'zgaruvchili bir necha funksiyalarga

bogʻliq funksionalning ekstremumi haqidagi masaladan (4-maʼruzaga qarang) faqat (6.2) chekli bogʻlanishlar mavjudligi bilan farq qiladi. Shuning uchun, funksionalning birinchi variatsiyasi uchun

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i}] \delta y_i(x) dx \quad (6.5)$$

ifodadan foydalanamiz.

Modomiki, $y_i(x)$ funksiyalar (6.2) chekli bogʻlanishlarni qanoatlantirishlari shart ekan.

$$\delta \varphi_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right]_{y^*(x)} \delta y_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6.6)$$

bu yerda $y^*(x)$ - funksional ekstremumga erishadigan egri chiziq boʻlib, δy_j variatsiya x ning $[x_0, x_1]$ oraliqda tanlangan qiymatida hisoblangan.

Shunday qilib, $\delta y_i(x)$ variatsiyalarning faqat $n - m$ tasini ixtiyoriy deb hisoblash mumkin (masalan, $\delta y_{m+1}(x), \dots, \delta y_n(x)$ larni), qolganlari esa, (6.6) shartlardan aniqlanadi.

Endi (6.6) tenglamalarning har birini qandaydir $\lambda_j(x)$ funksiyaga hadma-had koʻpaytirib va x_0 dan x_1 gacha boʻlgan chegaralarda integrallab,

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_j(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \delta y_i(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (6.7)$$

munosabatlarni olamiz.

(6.5) va (6.7) munosabatlarni hadma-had qo'shsak,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i}] \delta y_i(x) dx = 0 \quad (6.8)$$

hosil bo'ladi.

Agar

$$F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y) \quad (6.9)$$

belgilashni kiritsak, bunda $F^*(x, y, y')$ - *Lagranj funksiyasi*, $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ - *Lagranj ko'paytuvchilari* deb ataladi, oxirgi tenglamani,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i}'] \delta y_i(x) dx = 0 \quad (6.10)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

m ta $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ ko'paytuvchilarni shunday tanlaylikki, ular $y^*(x)$ egri chiziq bilan birga m ta

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i}' = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (6.11)$$

Eyler tenglamalari sistemasini qanoatlantirsin.

Bunday qilishning imkoniyati bor, chunki (6.11) sistema, (6.9) belgilashni hisobga olganda,

$$F_{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i}' = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

ko'rinishni oladi.

Ravshanki, (6.11) sistema $\lambda_j(x)$ larga nisbatan chiziqli va uning determinanti noldan farqli (masalaning qo'yilishidagi c) bandga ko'ra), demak u

$$\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$$

yechimga ega.

$\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ ko'paytuvchilar yuqoridagidek tanlanganda (6.10) shart quyidagi

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=m+1}^n [F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i}'] \delta y_i(x) dx = 0 \quad (6.12)$$

ko'rinishni oladi, bunda $\delta y_{m+1}(x), \dots, \delta y_n(x)$ variatsiyalar o'zaro bog'lanmagan. U holda, variatsion hisobning asosiy masalasiga asosan (uni qo'llash uchun variatsiyalarning navbat bilan bittasini ixtiyoriy deb, qolganlarini nolga teng deb olish mumkin)

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i}' = 0, \quad i = m+1, \dots, n \quad (6.13)$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

Nihoyat, (6.11) va (6.13) larni hisobga olib, $y^*(x)$ egri chiziq va Lagranj ko'paytuvchilari

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i}' = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (6.14)$$

Eyler tenglamalari sistemasini qanoatlantirishi zarur, degan xulosa qilish mumkin.

Shunday qilib, $2n$ ta (6.1) chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda, $n+m$ ta (6.14) va (6.2) tenglamalardan $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ vektor funksiya va $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ Lagranj ko'paytuvchilari topiladi.

Bayon qilingan natijani quyidagicha ifodalaymiz.

6.1-teorema ((6.4) masalada ekstremumning zaruriy sharti): Agar (6.1) chegaraviy shartlarni va (6.2) chekli bog'lanishlarni qanoatlantiruvchi $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ vektor funksiya, bunda $y_i(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $i = \overline{1, n}$, (6.3) funksional ekstremumga erishsa, $y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)$ funksiyalar

$$J^*[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F^*(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y_1, \dots, y_n)] dx$$

funksional uchun tuzilgan

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Eyler tenglamalari sistemasini qanoatlantiradi.

Izohlar.

1. 6.1-teorema asosan, shartli ekstremumga qo'yilgan (6.4) masalani yechish bog'lanishlar qatnashmaganda $J^*[y_1, \dots, y_n]$ funksionalning

ekstremumini tekshirishga keltiriladi.

2. Bog`lanishlardan qutilishning keltirilgan usuli funksiyalarning shartli ekstremumini topishdagi Lagranj ko`paytuvchilari usuliga o`xshashdir.

3. (6.2) bog`lanishlar mexanikada *golonom* bog`lanishlar deyiladi.

4. Umumiy holda

$$\overline{F}^*(x, y, y) = F(x, y, y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y)$$

umumlashgan Lagranj funksiyasidan foydalaniladi. Bunda $\lambda_0(x) \equiv 0$ va $\lambda_0(x) \neq 0$ hollar alohida qaraladi.

6.1.3. (6.4) masalada shartli ekstremumning zaruriy shartini qo`llash algoritmi.

$$1. \quad F^{**}(x, y, y) = F(x, y, y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y)$$

Lagranj funksiyasini tuzish, $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ - Lagranj ko`paytuvchilari.

2. (6.14) Eyler tenglamalari sistemasi va (6.2) bog`lanishlar shartlarini yozish:

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i}^{\cdot *} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$
$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

3. Eyler tenglamalari sistemasining

$$y_i(x) = y_i(x, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad i = \overline{1, n}$$

umumiy yechimini va $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ Lagranj ko'paytuvchilari uchun ifodalarni topish.

4. $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ o'zgarmaslarni

$$y_{i0} = y_i(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad i = \overline{1, n}$$

$$y_{i1} = y_i(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad i = \overline{1, n}$$

chegaraviy shartlardan topish va $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ ekstremal uchun ifoda yozish (ekstremalni yozish).

1-misol. Ushbu

$$J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} [y_1'^2 + y_2'^2 - y_1'^2 - y_2'^2] dx$$

funksionalning

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

chegaraviy shartlarni va

$$y_1 - y_2 - 2 \cos x = 0$$

bog'lanishlarni qanoatlantiradigan ekstremalini toping.

Yechilishi:

1. Lagranj funksiyasini tuzamiz. Modomiki,

$$F = y_1'^2 + y_2'^2 - y_1'^2 - y_2'^2, y_1(x, y) = y_1 - y_2 - 2 \cos x, \quad m = 1$$

ekan,

$$F^* = F + \lambda_1(x)y_1(x,y) = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \lambda_1(x)[y_1 - y_2 - 2\cos x]$$

bo`ladi.

2.Eyler tenglamalari sistemasi va bog`lanishlar tenglamasini yozamiz.

Buning uchun

$$F_{y_1}^* = 2y_1 + \lambda_1(x), F_{y_1'}^* = -2y_1', \frac{d}{dx}F_{y_1'}^* = -2y_1'',$$

$$F_{y_2}^* = 2y_2 - \lambda_1(x), F_{y_2'}^* = -2y_2', \frac{d}{dx}F_{y_2'}^* = -2y_2'',$$

ifodalardan foydalansak, quyidagi

$$F_{y_1}^* - \frac{d}{dx}F_{y_1'}^* = 2y_1 + \lambda_1(x) + 2y_1'' = 0$$

$$F_{y_2}^* - \frac{d}{dx}F_{y_2'}^* = 2y_2 - \lambda_1(x) + 2y_2'' = 0$$

$$y_1 - y_2 - 2\cos x = 0$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

3. Sistemaning umumiy yechimini topamiz. Sistemaning birinchi ikkita tenglamasini hadma- had qo`shib,

$$2(y_1'' + y_2'') + 2(y_1 + y_2) = 0$$

ekanligini olamiz. Yangi, $z = y_1 + y_2$ belgilash kiritib,

$$z'' + z = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Uning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 + 1 = 0$$

bo`lib, u $k_{1,2} = \pm i$ ildizlarga ega ekanligini hisobga olsak,

$$z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x = y_1 + y_2$$

bo`ladi.

Ikkinchidan, hosil qilingan sistemaning uchinchi tenglamasidan

$$2 \cos x = y_1 - y_2$$

bo`lishi kelib chiqadi. Oxirgi tenglamalarni qo`shib,

$$2y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2 \cos x \text{ yoki } y_1(x) = \frac{c_1}{2} \cos x + \frac{c_2}{2} \sin x + \cos x$$

ekanligini olamiz. U holda

$$y_2(x) = y_1(x) - 2 \cos x,$$

$$\lambda_1(x) = 2y_2(x) + 2y_2''(x)$$

bo`lishi kelib chiqadi.

4. c_1 va c_2 ixtiyoriy o`zgarmaslarni chegaraviy shartlardan topamiz:

$$y_1(0) = \frac{c_1}{2} + 1 = 1,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{c_2}{2} = 1$$

$$y_2^*(x) = y_1^*(x) - 2 \cos t = \sin x - \cos x,$$

$$\lambda_1(x) = 2 \sin x - 2 \cos x - 2 \sin x + 2 \cos x = 0$$

bu yerdan $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ va $y_1^*(x) = \sin x + \cos x$,

Shuni e'tirof etish kerakki, masalada chegaraviy shartlar va bog'lanishlar tenglamalari muvofiqlashtirilgan, chunki

$$y_1(0) - y_2(0) - 2\cos 0 = 0,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Bu fakti masalani yechishdan oldin tekshirish lozim. Shunday qilib, masalada

$$y_1^*(x) = \sin x + \cos x, y_2^*(x) = \sin x - \cos x$$

ekstremal topildi.

6.2. Differensial bog'lanishli variatsion masalalar.

6.2.1. Masalaning qo'yilishi. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi joiz $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))'$ vektor-funksiyalar to'plami m ni qaraymiz:

a) $y_i(x)$ funksiyalar $[x_0, x_1]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin, ya'ni $y_i(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $i = \overline{1, n}$, x_0, x_1 lar berilgan;

b) $y_i(x)$ funksiyalar

$$y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1}, i = \overline{1, n} \quad (6.15)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi, bunda y_{i0}, y_{i1} , $i = \overline{1, n}$ sonlar berilgan, ya'ni egri chiziqlarning har biri ikkita mahkamlangan (qo'zg'olmas) chegara nuqtalardan o'tadi;

c) $y_i(x)$ funksiyalar barcha $x \in [x_0, x_1]$ lar uchun

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad m < n \quad (6.16)$$

differential bog'lanishlarni qanoatlantiradi, bunda, $\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$ funksiyalar barcha o'zgaruvchilari bo'yicha uzluksiz differentsiullanuvchidir.

Bundan tashqari, (6.16) tenglamalar o'zaro bog'lanmagan, ya'ni

$$\text{rang} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \end{array} \right\} = m$$

M to'plamda

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx \quad (6.17)$$

funksional berilgan, bu yerda $F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')$ funksiya o'zining barcha argumentlari bo'yicha ikkinchi tartibigacha (birinchi va ikkinchi tartibli) uzluksiz xususiy hosilalarga ega deb faraz qilinadi.

M to'plamga tegishli joiz $y(x)$ vektor funksiyalar ichida shunday $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ vektor funksiyanı topish kerakki, unda (6.17) funksional ekstremumga erishsin, ya'ni

$$J[y_1^*(x), y_2^*(x), \dots, y_n^*(x)] = \text{extr}_{y(x) \in M} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx \quad (6.18)$$

bo'lsin.

Bu masala - *Lagranj masalasi* deb ataladi.

6.2.2. Masala yechimini izlash tartibi (sxemasi). Sxema ekstremumning zaruriy sharti, birinchi variatsiyaning ekstremum beruvchi funksiyada nolga tengligiga, ya'ni $\delta J = 0$ shartga tayanadi. (6.18) masalaning (6.4) masaladan asosiy farqi shundaki, undagi (6.16) bog'lanishlar tenglamalarida hosilalar qatnashmoqda.

Bu yerda ham, xuddi (6.4) masaladagi kabi, funksionalning birinchi variatsiyasi ifodasi

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'}] \delta y_i(x) dx \quad (6.19)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda (6.16) differensial bog'lanishlar qatnashganligidan, $\delta y_i(x)$ variatsiyalar ixtiyoriy bo'la olmaydi. Shu sababli, bu bosqichda variatsion hisobning asosiy lemmasini qo'llash mumkin emas.

$\delta y_i(x)$ variatsiyalar orasidagi t

$$\delta \varphi_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right] \Big|_{y^*(x)} \delta y_i(x) + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i'} \right] \Big|_{y^*(x)} \delta y_i'(x) = 0, j = \overline{1, m} \quad (6.20)$$

Bu yerda xususiy hosilalar (6.17) funksional ekstremumga erishadigan $y^*(x)$ egri chiziqda hisoblanadi.

(6.20) tenglamalarning har birini hadma-had hozircha noma'lum bo'lgan $\lambda_j(x)$ ko'paytuvchiga ko'paytiramiz va x_0 dan x_1 gacha bo'lgan oraliqda integrallab,

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_j(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \delta y_i(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_j(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i'} \delta y_i'(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (6.21)$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

(6.21) munosabatlardagi ikkinchi integralning har bir qo'shiluvchisini bo'laklab integrallab va $\delta y_i(0) = \delta y_i(x_1) = 0, \quad i = \overline{1, m}$ ekanligini hisobga olib (chunki chegaralar qo'zg'almas),

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left[\lambda_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i'} \right] \right\} \delta y_i(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (6.22)$$

bo'lishini ko'ramiz.

Endi (6.22) va δJ ning (6.19) ifodasidagi $\delta J = 0$ shartlarni qo'shib,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left\{ F_{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left[F_{y_i'} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i'} \right] \right\} \delta y_i(x) dx = 0, \quad (6.23)$$

tenglamani hosil qilamiz. Agar

$$F^{**}(x, y, y') = F(x, y, y') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y, y') \quad (6.24)$$

belgilashni kiritsak, bunda $F^*(x, y, y')$ - Lagranj funksiyasi deyiladi, (6.23) tenglama

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n [F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i}'] \delta y_i(x) dx = 0, \quad (6.25)$$

ko'rinishda yoziladi.

m ta $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ ko'paytuvchilarni shunday tanlaymizki, ular $y^*(x)$ egri chiziq bilan birga m ta

$$F_{y_i}'' - \frac{d}{dx} F_{y_i}' = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (6.26)$$

Eyler tenglamasini qanoatlantirsin.

Agar tenglamalarni kengaytirilgan holda yozsak, ular $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ larga nisbatan chiziqli differensial tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi va masalaning qo'yilishidagi c) bandga asosan, yechimga ega.

Lagranj ko'paytuvchilari yuqoridagi usul bilan tanlanganda (6.25) shart

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=m+1}^n [F_{y_i}'' - \frac{d}{dx} F_{y_i}'] \delta y_i(x) dx = 0 \quad (6.27)$$

ko'rinishni oladi, bunda $\delta y_{m+1}(x), \dots, \delta y_n(x)$ variatsiyalar (o'zaro) bog'lanmagan.

Oxirgi tenglikda $\delta y_{m+1}(x), \dots, \delta y_n(x)$ variatsiyalardan bittasini ixtiyoriy, qolganlarini nolga teng deb olib, hamda variatsion hisobning asosiy lemmasini tadbqiq qilib,

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0, \quad i = \overline{m+1, n} \quad (6.28)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

(6.26) va (6.28) larni hisobga olib, $y^*(x)$ egri chiziq va Lagranj ko'paytuvchilari

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (6.29)$$

Eyler tenglamalari sistemasini qanoatlantirishi zarur degan hulosa qilishimiz mumkin.

Shunday qilib, $n+m$ ta (6.29) va (6.16) tenglamalar va (6.15) chegaraviy shartlardan $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ vektor- funksiya va $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ Lagranj ko'paytuvchilari topiladi.

6.2-teorema ((6.18) masalada ekstremumning zaruriy shartlari): Agar (6.15) chegaraviy shartlar va (6.16) differensial bog'lanishlarni qanoatlantiruvchi $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ vektor funksiyada (6.17) funksional ekstremumga erishsa, $y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)$ funksiyalar

$$J^*[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F^*(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx = \\ = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) y_j(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')] dx$$

funksional uchun tuzilgan

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Eyler tenglamalari sistemasini qanoatlantiradi.

Izohlar:

1. 6.2-teoreмага asosan, shartli ekstremumga qo'yilgan (6.18) masalani yechish - bog'lanishlar qatnashmaganda $J^*[y_1, \dots, y_n]$ funksionalning ekstremumini tekshirishga keltiriladi.
2. Mexanikada (6.16) ko'rinishdagi bog'lanishlar *golonom bo'lmagan* bog'lanishlar deyiladi.
3. Umumiy holda umumlashgan Lagranj funksiyasidan foydalaniladi.

6.2.3. (6.18) masalada ekstremumning zaruriy shartini qo'llash algoritmi.

$$1. F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) y_j(x, y, y')$$

Lagranj funksiyasini tuzish, bunda $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ - Lagranj ko'paytuvchilari.

2. (6.29) Eyler tenglamalari sistemasi va (6.16) bog'lanishlar tenglamalarini yozish:

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \quad j = \overline{1, m}$$

3. Eyler tenglamalari sistemasining $y_i(x) = y_i(x, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad i = \overline{1, n}$, umumiy yechimini hamda $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ Lagranj ko'paytuvchilari uchun ifodalarni topish.

4. $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ o'zgarmaslarni

$$y_{i0} = y_i(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_{i1} = y_i(x_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad i = \overline{1, n}$$

chegaraviy shartlardan topish va $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^1$ ekstremal uchun ifoda (ekstremalni) yozish.

2-misol: Ushbu

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 [y_1'^2 + y_2'^2 - y_1' - y_2'^2] dx$$

funksionalning

$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_1(1) = 2ch1, y_2(1) = 2sh1$$

chegaraviy shartlarni va

$$y_1' - y_2 = 0$$

differensial boglanishni qanoatlantruvchi ekstremalini toping.

Yechilishi:

1. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x, y, y') = y_1'^2 + y_2'^2, \quad Y_1(x, y, y') = y_1' - y_2, \quad m = 1$$

bo'lganligidan

$$F^*(x, y, y') = y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda_1(x)[y_1' - y_2']$$

2. Eyler tenglamalari sistemasini va boglanishlar tenglamasini yozamiz;

$$F_{y_1}^* = 0, F_{y_1'}^* = 2y_1'' + \lambda_1(x), \frac{d}{dx} F_{y_1'}^* = 2y_1''' + \lambda_1'(x)$$

$$F_{y_2}^* = -\lambda_1(x), F_{y_2'}^* = 2y_2'', \frac{d}{dx} F_{y_2'}^* = 2y_2'''$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\begin{cases} F_{y_1}^* - \frac{d}{dx} F_{y_1'}^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2y_1''' - \lambda_1'(x) = 0 \\ -\lambda_1(x) - 2y_2'' = 0 \end{cases} \\ F_{y_2}^* - \frac{d}{dx} F_{y_2'}^* = 0 \Rightarrow \\ y_1' - y_2 = 0 \end{cases}$$

bo'ladi.

3. Hosil qilingan sistemaning umumiy echimini topamiz. Sistemaning daslabki ikkita tenglamalaridan

$$\lambda_1(x) = -2y_2'', \lambda_1'(x) = -2y_2''', 2y_2''' = -\lambda_1'(x) = 2y_2''''$$

ekanligini olamiz, uchinchi tenglamadan esa,

$$y_1' = y_2, y_1'' = y_2'$$

bo'lishi kelib chiqadi. U holda, $2y_1''' = 2y_2''' = 2y_2''''$ yoki $y_2'''' - y_2' = 0$ bo'ladi.

Oxirgi tenglamaning $\lambda^3 - \lambda = 0, \lambda(x^2 - 1) = 0$ xarakteristik tenglamasi

$\lambda_1 = 1, x_2 = -1, \lambda_3 = 0$ ildizlarga ega, shuning uchun

$$y_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3,$$

$$y_1(x) = \int y_2(x) dx = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 x + c_4,$$

$$\lambda_1(x) = -2y_2''(x).$$

4. c_1, c_2, c_3, c_4 , o'zgarmaslarni chegaraviy shartlardan topamiz;

$$\begin{cases} y_1(0) = c_1 - c_2 + c_4 = 2 \\ y_2(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ y_1(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} + c_3 + c_4 = ch1, ch1 = \frac{e + e^{-1}}{2}. \\ y_2(1) = c_1 e + c_2 e^{-2} + c_3 = 2sh1, sh1 = \frac{e - e^{-1}}{2} \end{cases}$$

Bu erdan $c_1 = 1, c_2 = -1; c_3 = c_4 = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Natijada, $y^*(x) = (y_1^*(x), y_2^*(x))^T$ ekstremal, $y_1^*(x) = e^x + e^{-x}; y_2^*(x) = e^x - e^{-x}$ ko'rinishda bo'ladi va $\lambda_1(x) = -2y_2''(x) = -2e^x + 2e^{-x}$.

7– ma'ruza

Izoperimetrik masalalar

Reja:

1. Lagranj funksiyasi. Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi.
2. Ikkinchi tartibli zaruriy shartlar va yetarli shartlar.

Tayanch iboralar. Izoperimetrik masala, izoperimetrik shart, funksiya, $C^1[x_0, x_1]$ fazo, kuchsiz va kuchli ekstremumlar, Lagranj funksiyasi, Lagranj ko'paytuvchilari, Eyler tenglamasi, Lejandr va Yakobi shartlari.

7.1. Lagranj funksiyasi. Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi.

$Q \subset R^3$ – ochiq to'plam, $S = \{(x, y): (x, y, z) \in Q\}$, $F_i(x, y, z)$, $i = \overline{0, m}$, funksiyalar Q da uzluksiz, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1) \in S$ to'plamning belgilangan nuqtalari, $x_0 < x_1$ bo'lsin.

Quyidagi:

$$J_0[y] = \int_{x_0}^{x_1} F_0(x, y, y') dx \rightarrow \min(\max), \quad (7.1)$$

$$J_i[y] = \int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y, y') dx = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (a_i = \text{const}), \quad (7.2)$$

$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (x, y(x), y'(x)) \in Q, \quad x \in [x_0, x_1], \quad y(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$ (7.3)
ekstremal masalani qaraymiz.

Bu masalaga izoperimetrik masala deyiladi. (7.2) shartlarga esa izoperimetrik shartlar (bog'lanishlar) deyiladi. (7.2), (7.3) shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x) \in C^1[x_0, x_1]$ funksiyalar izoperimetrik masalada joyiz funksiyalar (chiziqlar)dan iborat.

Kuchsiz va kuchli ekstremumlar ta'rifi variatsion hisobning asosiy masalasidagiga o'xshash beriladi: agar $y^* = y^*(x)$ joyiz funksiyaning biror $V_0(y^*, \varepsilon)$ nolinchii tartibli atrofida tegishli barcha joyiz funksiyalar uchun

$$J_0[y^*] \leq J_0[y] \quad (J_0[y^*] \geq J_0[y]) \quad (7.4)$$

bajarilsa, $y_0(x)$ - izoperimetrik masalada kuchli lokal minimal (maksimal)dir; kuchsiz minimal (maksimal) uchun esa (7.4) munosabat $y^* = y^*(x)$ joyiz chiziqning biror $V_1(y^*, \varepsilon)$ birinchi tartibli atrofida yotuvchi barcha $y = y(x)$ joyiz chiziqlar uchun bajariladi.

Izoperimetrik masala shartli ekstremum uchun qo'yilgan variatsion masaladir. Bu masala uchun ekstremum zaruriy shartlarini bayon qilishda,

$$L(x, y, y', \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i F_i(x, y, y'), \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (7.5)$$

Lagranj funksiyasidan foydalanamiz. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ sonlarga Lagranj ko'paytuvchilari deyiladi.

7.1-teorema: Faraz qilaylik, $F_i(x, y, y') \in C^{(1)}(Q)$, $i = \overline{0, m}$, bo'lsin. Agar $y^* = y^*(x) \in C[x_0, x_1]$ – (7.1) - (7.3) masalada kuchsiz ekstremal bo'lsa, bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ sonlar topiladiki, $y^*(x)$ funksiya, $L(x, y, y', \lambda^*)$ ($\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$) Lagranj funksiyasi uchun tuzilgan

$$L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 0 \quad (7.6)$$

Eyler tenglamasini qanoatlantiradi. Agar

$$G_i^*(x) = F_{iy}(x, y^*(x), y^{*'}(x)) - \frac{d}{dx} F_{iy'}(x, y^*(x), y^{*'}(x)), \quad i = \overline{1, m}, \quad (7.7)$$

funksiyalar chiziqli bog'langan bo'lsalar, $y^* = y^*(x)$ bo'ladi.

Isboti: Berilgan

$$J_i[y] = \int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y, y') dx, \quad i = \overline{0, m},$$

funksionallarning $y^* = y^*(x)$ nuqtadagi variatsiyalarini hisoblaymiz.

Ta'rifga ko'ra,

$$\delta J_i[y^*, h] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J_i[y^* + \alpha h]_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} [F_{iy}^*(x)h(x) + F_{iy'}^*(x)h'(x)]dx, \quad (7.8)$$

$$i = 0, 1, \dots, m,$$

bu yerda $F_{iy}^*(x) = F_{iy}(x, y^*(x), y^{*'}(x))$, $F_{iy'}^*(x) = F_{iy'}(x, y^*(x), y^{*'}(x))$.

$C^{(1)}[x_0, x_1]$ fazoning $C^{(1)}[x_0, x_1] = \{h(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1] : h(x_0) = h(x_1) = 0\}$ qism fazosini R^{m+1} fazoga akslantiruvchi

$$Ah = (\delta J_0[y^*, h], \delta J_1[y^*, h], \dots, \delta J_m[y^*, h])$$

chiziqli akslantirishni qaraymiz.

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

- A akslantirish $C_0^{(1)}[x_0, x_1]$ ni R^{m+1} ga to'la akslantiradi, ya'ni A akslantirishning obrazi $\text{Im } A = R^{m+1}$ (regulyar hol).
- A akslantirish $C_0^{(1)}[x_0, x_1]$ ni R^{m+1} ning qismiga akslantiradi (aynan bo'lgan hol).

Dastlab 7.1-teorema tasdig'ining aynan bo'lgan holda to'g'riligini ko'rsatamiz.

Ma'lumki, chiziqli akslantirishda chiziqli fazoning obrazi chiziqli qism

fazodan iborat bo'ladi. Demak, aynan bo'lgan holda, A akslantirishning obrazi $\text{Im } A = R^{m+1}$ fazoning hos qism fazosi bo'ladi. U holda funksional analizdan ma'lum faktlarga ko'ra $[a, b]$, bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ sonlar topiladiki,

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* z_i = 0, \quad \forall z = (z_0, z_1, \dots, z_m) \in \text{Im } A$$

tenglik bajariladi. Endi A operatorning aniqlanishi va $\delta J_1[y^*, h]$ variatsiya uchun (7.8) ifodalarni hisobga olib,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i^* (F_{iy}^*(x)h(x) + F_{iy'}^*(x)h'(x)) \right) dx = 0, \quad \forall h(x) \in C^1[x_0, x_1]$$

tenglikka ega bo'lamiz. Dyubua-Reymon lemmasiga ko'ra, bu yerdan

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* F_{iy}^*(x) - \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i^* F_{iy'}^*(x) \right) = 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1] \quad (7.9)$$

munosabatni olamiz, ya'ni $y^*(x)$ kuchsiz ekstremal (7.6) tenglamani qanoatlantiradi.

Hosil qilingan (7.9) munosabatni (7.7) belgilashlarda

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* G_i^*(x) = 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerdan esa, $G_i^0(x)$ funksiyalar chiziqli bog'lanmagan holda, $\lambda_0^* \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi regulyar holni qaraymiz va bunday hol bo'lishi mumkin emasligini ko'rsatamiz.

Shunday $h_j(x) \in C_0^{(1)}[x_0, x_1]$, $j = \overline{0, m}$ funksiyalarni olamizki, $Ah_j = e_j$ bo'lsin, bu yerda $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $e_m = (0, 0, \dots, 1)$ — R^{m+1} dagi kanonik bazis. R^{m+1} dagi nol nuqtaning atrofini yana R^{m+1} ga F akslantirishni qaraymiz:

$$\Phi(\beta) = (\varphi_0(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m), \varphi_1(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m), \dots, \varphi_m(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)),$$

bu yerda

$$\varphi_i(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) = J_i \left[y^* + \sum_{j=0}^m \beta_j h_j \right], \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Bu φ_i funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi va bunda

$$\frac{\partial \varphi_i(0)}{\partial \beta_j} = \delta J_i[y^*, h] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad 0 \leq i, j \leq m,$$

$$\Phi(0) = (a_0, a_1, \dots, a_m) = z^*, \quad a_0 = J_0[y^*]$$

Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema ko'ra $[a, b]$, shunday Φ^1 silliq akslantirish va $k > 0$ o'zgarmas mavjud bo'ladiki, yetarli kichik $z - z^*$ uchun

$$|\Phi^1(z)| \leq k |z - z^*|$$

tengsizlik bajariladi. Husbisiy holda, modul bo'yicha yetarli kichik ε son uchun shunday $\beta(\varepsilon) = (\beta_0(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \dots, \beta_m(\varepsilon))$ vektor topiladiki, $\beta(\varepsilon) = \Phi^1(a_0 + \varepsilon, a_1, \dots, a_m)$ tenglik bajariladi, ya'ni

$$\varphi_0(\beta(\varepsilon)) = a_0 + \varepsilon \Leftrightarrow J_0 \left[y^* + \sum_{j=0}^m \beta_j(\varepsilon) h_j \right] = J_0[y^*] + \varepsilon,$$

$$\varphi_i(\beta(\varepsilon)) = a_i \Leftrightarrow J_i \left[y^* + \sum_{j=0}^m \beta_j(\varepsilon) h_j \right] = a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

va bunda

$$|\beta(\varepsilon)| = \Phi^1(a_0 + \varepsilon, a_1, \dots, a_m) \leq k|\varepsilon|.$$

Shunday qilib, $y^*(x)$ joyiz funksiyaning ixtiyoriy $V_1(y^*, \varepsilon)$ birinchi tartibli atrofida shunday $y(x) = y^*(x) + \sum_{j=0}^m \beta_j(\varepsilon) h_j(x)$ joyiz funksiya mavjudki, uning uchun

$$J_0[y] - J_0[y^*] = \varepsilon$$

bajariladi. Bu yerda ε ning moduli bo'yicha yetarki kichik har xil ishorali qiymat qabul qilishini hisobga olsak, y^* ning lokal ekstremal ekanligiga zid hulosaga kelamiz. Olingan qarama-qarshilik A akslantirish uchun regular hol bo'lmasligini ko'rsatadi. 7.1-teorema isbotlandi.

Isbotlangan 7.1-teoremaga, izoperimetrik masala uchun Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi deyiladi. Agar $y^*(x)$ ekstremalga $\lambda_0^* \neq 0$ Lagranj

ko'paytuvchisi mos kelsa, $\lambda_0 = 1$ deb olish mumkin.

7.1-ta'rif: $L(x, y, y', \lambda^*)$ ($\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \neq 0$) Lagranj funksiyasi uchun tuzilgan (7.6) Eyler tenglamasini qanoatlantiruvchi $y^*(x)$ joyiz funksiyaga (7.1)-(7.3) masalaning shartli- stasionar funksiyasi deyiladi.

2. Ikkinchi tartibli zaruriy shartlar va yetarli shartlar.

Ma'ruzamiz so'ngida izoperimetrik masala uchun ikkinchi tartibli zaruriy va yetarli shartlar haqida qisqagina to'xtalib o'tamiz. (to'liqroq ma'lumot uchun adabiyotlarga, masalan [6] ga qarang).

Faraz qilaylik, $F_i(x, y, y') \in C^2(Q)$, $i = \overline{0, m}$, $y^*(x) \in C^2[x_0, x_1]$ joyiz stasionar funksiya, $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ unga mos Lagranj vektori, $\lambda_0^* \neq 0$ bo'lsin. U vaqtda

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', \lambda^*) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* F_i \right) dx$$

funksional y^* nuqtada

$$\delta^2 J[y^*, h] = \int_{x_0}^{x_1} [A^*(x)h'^2 + C^*(x)hh' + B^*(x)h^2] dx$$

ko'rinishdagi ikkinchi variatsiyaga ega, bu yerda

$$\begin{aligned} A^*(x) &= L_{y'y'}(x, y^*(x), y^{*'}(x), \lambda^*), & C^*(x) &= L_{y'y}(x, y^*(x), y^{*'}(x), \lambda^*), \\ B^*(x) &= L_{yy}(x, y^*(x), y^{*'}(x), \lambda^*) \end{aligned}$$

Quyidagi

$$\delta^2 J[y^*, h] = \int_{x_0}^{x_1} [A^*(x)h'^2 + 2C^*(x)hh' + B^*(x)h^2] dx \rightarrow \min(\max),$$

$$\delta J_i[y^*, h] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_{iy'}(x, y^*(x), y^{*'}(x)) - \frac{d}{dx} F_{iy}(x, y^*(x), y^{*'}(x)) \right] h(x) dx = 0, i = \overline{1, m}$$

$$h(x_0) = 0, \quad h(x_1) = 0$$

izoperimetrik masalani qaraymiz. $h(x) = 0$ funksiya bu masalaning yechimidir. Shu masala uchun Lagranj ko'paytuvchilari qoidasini qo'llab,

$$-\frac{d}{dx}(A^*(x)h' + C^*(x)h) + C^*(x)h' + B^*(x)h + \sum_{i=1}^m \mu_i G_i^*(x) = 0 \quad (7.10)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bu yerda $G_i^*(x)$ funksiya (7.7) tenglik bilan aniqlanadi. (7.10) tenglamaga $y^*(x)$ stasioanar funksiya mos keluvchi *Yakobi tenglamasi* deyiladi.

7.2-ta'rif: Agar (7.10) Yakobi tenglamasi

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i^*(x)h(x)dx = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad h(x_0) = h(x_1) = 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi trivial (aynan nol) bo'lmagan yechimga ega

bo'lsa, ξ nuqta x_0 nuqtaga qo'shma nuqta deyiladi.

Agar $G_i^*(x)$, $i = \overline{1, m}$ funksiya $[x_0, \xi_1]$, $x_0 \leq \xi_0 \leq \xi_1 \leq x_1$, kesmalarda chiziqli bog'lanmagan bo'lsalar, qo'shma nuqtalarni quyidagicha aniqlash mumkin: faraz qilaylik, $h_0(x)$ bir jinsli (ya'ni $\mu_i = 0$, $i = \overline{1, m}$) Yakobi tenglamasining $h_0(x_0) = 0$, $h_0'(x_0) = 1$ shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin; $h_j(x)$ — bir jinsli bo'lmagan ($\mu_j = 1$, $\mu_i = 0$, $i \neq j$) Yakobi tenglamasining $h_i(x_0) = 0$, $h_j'(x_0) = 0$, $j = \overline{1, m}$ shartlarini qanoatlantruvchi yechimi bo'lsin; u vaqtda ξ nuqta faqat va faqat

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} h_0(\xi) & \dots & h_m(\xi) \\ \int_{x_0}^{\xi} h_0 G_1^* dx & \dots & \int_{x_0}^{\xi} h_m G_1^* dx \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_0}^{\xi} h_0 G_m^* dx & \dots & \int_{x_0}^{\xi} h_m G_m^* dx \end{pmatrix}$$

matrisa maxsus bo'lgan holdagina ($\det H(\xi) = 0$) x_0 nuqtaga qo'shma nuqta bo'ladi.

7.2-teorema: Faraz qilaylik, $F_i(x, y, y') \in C^{(3)}(Q)$, $i = \overline{0, m}$, $y^*(x) \in C^2[x_0, x_1]$ kuchsiz minimal (maksimal), $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ — unga mos Lagranj vektori bo'lsin va $G_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ funksiyalar ihtiyoriy

$\xi \in (x_0, x_1)$ uchun $[x_0, \xi]$, $[\xi, x_1]$ kesmalarda chiziqli bog'lanmagan bo'lsin.
U holda quyidagilar bajariladi:

- a) Lejandr sharti: $L_{y'y'}(x, y^*(x), y^{**}(x)) \geq 0$ (≤ 0)
- b) Yakobi sharti: (x_0, x_1) intervalda x_0 nuqtaga qo'shma nuqta mavjud emas.

7.3-teorema. Faraz qilaylik, quyidagilar bajarilsin:

- 1) $Q = S \times R$, $S \subset R^2$ – ochiq to'plam;
 - 2) $L = F_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i$, $L \in C^{(4)}(Q)$;
 - 3) $L_{y'y'}(x, y(x), y'(x), \lambda) \geq 0$ (≤ 0), $\forall (x, y, y') \in S \times R$;
 - 4) $y^*(x) \in C^2[x_0, x_1]$ shartli stasionar funksiya;
 - 5) kuchaytirilgan Lejandr sharti: $L_{y'y'}(x, y^*(x), y^{**}(x), \lambda^*) > 0$ (< 0),
 - 6) kuchaytirilgan Yakobi sharti: $(x_0, x_1]$ oraliqda x_0 nuqtaga qo'shma nuqta mavjud emas.
- U vaqtda $y^*(x)$ - izoperimetrik masalada kuchli lokal minimal (maksimal) bo'ladi.

7.4-teorema. Faraz qilaylik, (7.1)-(7.3) masalada J_0 – kvadratik funksioanal, ya'ni

$$J_i[y] = \int_{x_0}^{x_1} (a_i(x)y' + b_i(x)y) dx, \quad i = \overline{1, m}$$

bo'lsin, bu yerda $A_0(x), a(x), \dots, a_m(x)$ funksiyalar $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi, $B_0(x), b_1(x), \dots, b_m(x)$ funksiyalar esa uzluksiz. Bundan tashqari $A_0(x) > 0 (< 0)$, $\forall x \in [x_0, x_1]$ shart bajarilsin. U holda, agar Yakobi sharti bajarilmasa izoperimetrik masalada $\inf J_0[y] = -\infty$, $(\sup J_0[y] = +\infty)$ bo'ladi. Agar kuchaytirilgan Yakobi sharti bajarilsa, shartli stasionar funksiya mavjud, yagona va unda J_0 funksional global minimum (maksimum)ga yerishadi.

Misol:

$$\int_0^1 (y'^2 - y^2) dx \rightarrow \min, \quad \int_0^1 y dx = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Lagranj ko'paytuvchilari qoidasini qo'llaymiz.

$$F_0 = y'^2 - y^2, \quad F_1 = y, \quad C^*_1 = F_{1y} - \frac{d}{dx} F_{1y'} = 1.$$

Demak, $L = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1$ Lagranj funksiyasida $\lambda_0 = 1$ deb olish mumkin. Qulaylik uchun $\lambda = \lambda_1$ deb belgilab, $L = F_0 + \lambda F_1 = y'^2 - y^2 + \lambda y$ Lagranj funksiyasi uchun Eyler tenglamasini yozamiz:

$$L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 0 \Leftrightarrow -2y + \lambda - \frac{d}{dx} (2y') = 0 \Rightarrow y'' + y - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Tuzilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{\lambda}{2}.$$

bo'ladi. Chegaraviy va izoperimetrik shartlardan foydalanib, c_1, c_2, λ

o'zgarmaslarni topamiz. $y(0) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = -c_2 \Rightarrow y(x) = c_1 \sin x + c_2 (\cos x - 1).$

$$\left. \begin{array}{l} y(1) = 0 \\ \int_{10} y dx = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 \sin 1 + c_2 (\cos 1 - 1) = 0 \\ c_1 (1 - \cos 1) + c_2 (\sin 1 - 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{array}$$

Demak, $y(x)^* = 0$ yagona shartli - stasionar funksiyadir.

Kuchaytirilgan Lejandr sharti bajariladi, ya'ni $L_{y'y'} = 2 > 0$. Yakobi tenglamasini tuzamiz.

$$A^* = L_{y'y} = 2, \quad B^* = L_{yy'} = -2, \quad C^* = L_{yy'} = 0, \quad G^* = G^*_{11} = 1,$$

$$-\frac{d}{dx}(A^* h' + C^* h) + C^* h' + B^* h + \mu_1 G^* = 0 \Rightarrow -2h - \frac{d}{dx}(2h') + \mu = 0 \Rightarrow h'' + h - \frac{\mu}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'' + h - \bar{\mu} = 0, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{2}.$$

Tuzilgan Yakobi tenglamasiga mos $h'' + h = 0$ bir jinsli tenglama $h(0) = 0, h'(0) = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $h_0(x) = \sin x$ yechimga ega. Bir jinsli bo'lmagan $h'' + h + 1 = 0$ tenglama esa, $h(0) = h'(0) = 0$ shartlarni

qanoatlantiruvchi $h_1(x) = \cos x - 1$ yechimga ega. $H(\xi)$ matrisani tuzamiz.

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} h(\xi) & h_1(\xi) \\ \int_0^\xi h_0 dx & \int_0^\xi h_1 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \xi & \cos \xi - 1 \\ 1 - \cos \xi & \sin \xi - \xi \end{pmatrix}$$

Demak, $x_0 = 0$ nuqtaga qo'shma nuqtalar quyidagi tenglamaning yechimidir:

$$\det H(\xi) = \begin{vmatrix} \sin \xi & \cos \xi - 1 \\ 1 - \cos \xi & \sin \xi - \xi \end{vmatrix} = 2 - 2 \cos \xi - \xi \sin \xi = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos \xi) - \xi \sin \xi = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - \xi \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\xi}{2} \left(2 \sin \frac{\xi}{2} - 2 \cos \frac{\xi}{2} \right) = 0 \Rightarrow \sin \frac{\xi}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{\xi}{2}.$$

$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{\xi}{2}$ tenglamaning ildizi $\bar{\xi} > 1$ bo'ladi, chunki agar $\bar{\xi} < 1$ bo'lganida edi,

$\operatorname{tg} \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ bo'lar edi. Ammo $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ oraliqda $\operatorname{tg} x < x$, demak $\operatorname{tg} \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$; $\bar{\xi} \neq 1$

ekanligi ham ravshan. $\sin \frac{\xi}{2} = 0$ tenglamaning eng kichik musbat ildizi esa,

$\xi^* = 2\pi$ bo'ladi. Shunday qilib, $[0, 1]$ da $x_0 = 0$ nuqtaga qo'shma nuqta mavjud emas, ya'ni kuchaytirilgan Yakobi sharti bajariladi. 7.4-teoremaga ko'ra, $y^*(x) = 0$ – berilgan masalaning global yechimidir.

7-ma'ruza bo'yicha savollar

1. Izoperimetrik masala. Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi.
2. Izoperimetrik masalada Lejandr va Yakobi shartlari.
3. Ekstremumning yetarli shartlari.

8-ma'ruza

Optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi. Pontryaginning maksimum prinsipi.

Reja:

1. Optimal boshqaruv masalasining umumiy qo'yilishi.
2. Pontryaginning maksimum prinsipi.
3. Maksimum prinsipining chegaraviy masalasi.

Tayanch iboralar: Boshqariluvchi obyekt, boshqaruv, tezkor harakat bo'yicha boshqarish, joyiz boshqarish, joyiz trayektoriya, optimal boshqarish, optimal trayektoriya, terminal boshqaruv masalasi, qo'shma sistema, Gamilton-Pontryagin funksiyasi, maksimum sharti, maksimum prinsipi va uning chegaraviy masalasi.

XX asrning ikkinchi yarmiga kelib hozirgi zamon fan va texnikasi masalalari bilan bog'liq holda variasion hisobning yangi tarmog'i - optimal boshqaruv nazariyasi vujudga kelib intensiv rivojlanmoqda [1], [2], [3].

8.1. Optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi.

Avvalo optimal boshqaruv amaliy masalalaridan birini keltiramiz:

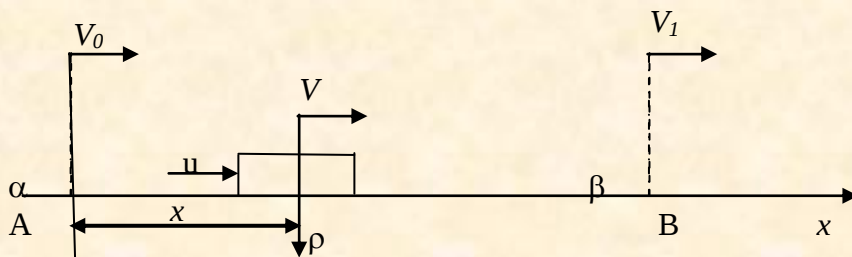
v_0 boshlang'ich tezlikka ega bo'lgan birlik massali material nuqtani

modul bo'yicha birdan oshmaydigan kuch ta'sirida gorizontal to'g'ri chiziq bo'ylab A nuqtadan B nuqtaga shunday ko'chirish talab qilinadiki, bunda material nuqta B nuqtaga v_1 tezlik bilan eng qisqa vaqtda yetib kelsin.

Qo'yilgan masala tezkor harakat bo'yicha optimal boshqaruv masalasidan iborat. Uning matematik modelini tuzamiz.

Ox o'qda $A(\alpha)$ va $B(\beta)$ nuqtalarni olaylik. Material nuqta $t = t_0$ boshlang'ich vaqtda A nuqtada, $t = t_1, (t_1 > t_0)$ vaqtda esa B nuqtada bo'lsin.

$T = t_1 - t_0$ material nuqtaning ko'chish vaqtidan iborat.



$x = x(t)$ -material nuqtaning t vaqtda bosib o'tgan yo'li, $u = u(t)$ material nuqtaga t vaqt momentida ta'sir etayotgan kuch miqdori bo'lsin.

U vaqtda $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v$ - material nuqtaning tezligi, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a$ material nuqtaning tezlanishi bo'ladi.

Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra $ma = u$ tenglik o'rinli, bu yerda m –material nuqtaning massasi, $m = 1, a = \ddot{x}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\ddot{x} = u \quad (8.1)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Masalaning qo'yilishiga ko'ra,

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= \alpha, & \dot{x}(t_0) &= v_0 \\ x(t_1) &= \beta, & \dot{x}(t_1) &= v_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

shartlar kelib chiqadi. Bundan tashqari, $u(t)$ kuchga

$$|u(t)| \leq t, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (8.3)$$

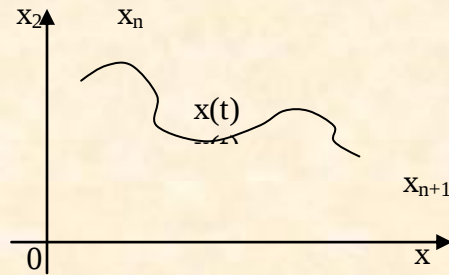
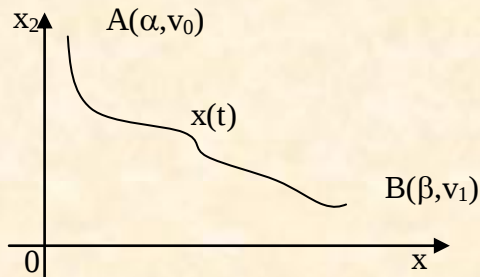
boshqarish funksiyasi (qisqacha, boshqarish) deyiladi. Odatda u bo'lakli-uzluksiz funksiyalar sinfidan deb qaraladi. Bunday funksiyalar joyiz boshqarishlar sinfini tashkil etadi.

Shunday qilib, qo'yilgan masalaning matematik modeli quyidagicha: shunday $|u^*(t), t \in [t_0, t_1^*]|$ joyiz boshqarishni topish talab qilinadiki, (8.1) tenglamaning unga mos keluvchi $x^*(t)$ yechimi (8.2) shartlarni qanoatlantirsin va bunda ko'chish vaqti $T = t_1^* - t_0$ minimal bo'lsin.

$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ o'zgaruvchilarni kiritib, bu masalani

$$\left. \begin{aligned} T(u) &= t_1 - t_0 \rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = u, \\ x_1(t_0) &= \alpha, x_1(t_1) = \beta, \\ x_2(t_0) &= v_0, x_2(t_1) = v_1, \\ |u| &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.



(8.4) masala geometrik tilda $\{x_1, x_2\}$ tekislikda shunday $x^*(t) = \{x_1^*(t), x_2^*(t)\}$ trayektoriyani qurishni bildiradiki, u eng qisqa $T^* = t_1^* - t_0$ vaqtda $A = \{\alpha, v_0\}$ nuqtadan $B = \{\beta, v_1\}$ nuqtaga ko'chib o'tadi.

Endi optimal boshqaruv masalasining umumiy qo'yilishiga o'tamiz

([3], [5], [6]).

Biror boshqariluvchi obyekt (jarayon)

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = \overline{1, n} \quad (8.5)$$

differensial tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo'lsin, bu yerda t -vaqt, $x_1, \dots, x_n$ - obyektning faza koordinatalari, $u_1, \dots, u_m$ - boshqarish parametrlari. Obyektning holati vektori $x = (x_1, \dots, x_n)$, boshqarish vektori $u = (u_1, \dots, u_m)$ va $f = (f_1, \dots, f_n)$ vektor yordamida (8.5) sistemani

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (8.6)$$

vektorli differensial tenglama ko'rinishida yozamiz.

(8.6) boshqariluvchi obyektning faza koordinatalari $x = x(t)$ ko'rinishdagi t vaqtning biror $[t_0, t_1]$ oraliqdagi funksiyasi sifatida aniqlanishi uchun boshlang'ich t_0 vaqtda boshlang'ich $x(t_0) = x^0$ shartni va boshqarish parametrlarini t vaqtning $u = u(t)$ funksiyasi ko'rinishida aniqlash kerak.

U vaqtda $x = x(t)$ faza koordinatalari

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\{x(t), u(t), t\}, t_0 \leq t \leq t_1 \\ x(t_0) &= x^0 \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Koshi masalasining yechimi sifatida aniqlanadi. $u(t)$ boshqarish ma'lum uzluksizlik shartlarini qanoatlantirishi zarur. Ko'pgina amaliy masalalarda boshqarishlar sifatida bo'lakli-uzluksiz funksiyalar olinadi. Ba'zi amaliy

masalalarda $u(t)$ ning uzluksizligi, ba'zan esa $u(t)$ ning bo'lakli-silliqligi talab qilinadi. Nazariy tadqiqotlarda boshqarishlarning kengroq sinflari, masalan chegaralangan o'lchovli funksiyalar fazosi yoki $L_p^m[t_0, t_1]$ fazolar qaraladi.

Biz quyida, asosan, bo'lakli-uzluksiz boshqarishlar sinfidan foydalanamiz.

Shunday qilib, biror $x^0 \in R^n$ nuqta va $u = u(t)$ bo'lakli - uzluksiz boshqarish berilgan bo'lsin. U vaqtda (8.7) Koshi masalasining yechimi $x = x(t)$ deb,

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x^0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (8.8)$$

tenglamaning uzluksiz yechimini tushunamiz.

Bu yechimni $x(t, x^0, u)$ deb belgilaymiz. $x(t_0, x^0, u)$ - obyekt trayektoriyasining chap uchi, $x(t_1, x^0, u)$ - trayektoriyaning o'ng uchi deyiladi.

Agar $f_i(x, u, t), i = \overline{1, n}$ funksiyalar barcha $x \in R^n, u \in R^m, t \in [t_0, t_1]$ bo'yicha o'zining $f_{ij}(x, u, t)$, xususiylar bilan uzluksiz bo'lsa, (8.8) tenglamaning $x(t_0) = x^0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

Biror $V \subset R^m$ to'plam berilgan bo'lsin. Shu V to'plamdan qiymatlar

qabul qiluvchi $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ bo'lakli-uzluksiz boshqaruvlarni joyiz boshqaruvlar deb ataymiz va bunday boshqarishlar to'plamini U deb belgilaymiz.

Boshqaruv masalalarida boshqarish parametrlari bilan bir qatorda obyektning faza koordinitalariga ham cheklashlar qo'yiladi. Bunday cheklashlar

$$x(t) = x(t, x^0, u) \in G(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (8.9)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $G(t) \subset R^n$ (8.9) ko'rinishdagi cheklashlarga faza cheklashlari deyiladi.

Trayektoriyaning chap va o'ng uchlari qanoatlantirishi zarur bo'lgan shartlar haqida ham to'xtalib o'tamiz. Faraz qilaylik, $S_0(t_0) \subset R^n$ va $S_1(t_1) \subset R^n$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U vaqtda trayektoriyaning uchiga qo'yilgan shartlar

$$x(t_0) \in S_0(t_0), \quad x(t_1) \in S_1(t_1), \quad (8.10)$$

kabi yoziladi. $S_0(t_0)$ va $S_1(t_1)$ to'plamlar, odatda

$$S_0(t_0) = \{y : y \in G_0(t_0), h_i(y, t_0) \leq 0, i = 1, \dots, m_0, h_i(y, t_0) = 0, i = m_0 + 1, \dots, \xi_0\}, \quad (8.11)$$

$$S_1(t_1) = \{x : x \in G(t_1), g_i(x, t_1) \leq 0, i = 1, \dots, m_1, g_i(x, t_1) = 0, i = m_2 + 1, \dots, \xi_1\}, \quad (8.12)$$

shaklda beriladi, bu yerda $h_i(y, t_0)$, $g_i(x, t_1)$ ma'lum funksiyalar.

$\theta_0 \subset R^1, \theta_1 \subset R^1$ to'plamlar berilgan, $\inf \theta_0 < \sup \theta_1$ bo'lsin. $t_0 \in \theta_0, t_1 \in \theta_1$, $u = u(t)$ -joyiz boshqarish, $x(t, x^0, u)$ unga mos joyiz

trayektoriya bo'lsin. Har bir shunday joyiz (x^0, u, x, t_0, t_1) da aniqlangan

$$J(x^0, u, x, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt + g_0(x^0, x(t_1), t_0, t_1) \quad (8.13)$$

funksionalni qaraymiz.

$$J_* = \inf J(x^0, u, x, t_0, t_1)$$

deb belgilaymiz, bu yerda quyi chegara barcha joyiz (x^0, u, x, t_0, t_1) bo'yicha olinadi.

Agar $J(x_*^0, u_*, x_*, t_0^*, t_1^*) = J_*$ bo'lsa, joyiz $(x_*^0, u_*, x_*, t_0^*, t_1^*)$ ga optimal boshqaruv masalasining yechimi, $u_* = u_*(t)$ optimal boshqarish, $x_* = x_*(t)$ optimal trayektoriya deyiladi.

Qo'yilgan optimal boshqaruv masalasini

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt + g_0(x^0, x(t_1), t_0, t_1) \rightarrow \inf \quad (8.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), t_0 \leq t \leq t_1 \\ x(t) &\in G(t), t_0 \leq t \leq t_1 \\ x(t_0) &= x^0, x(t_0) \in S_0(t_0), x(t_1) \in S_1(t_1) \\ t_0 &\in \theta_0, t_1 \in \theta_1, u(t) \in V, t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Agar $G(t) = R^n$ bo'lsa, (8.14), (8.15) masala *faza koordinitalariga*

cheklashlar qo'yilmagan optimal boshqaruv masalasi deyiladi. Agar $S_0(t)$ ($S_1(t)$) to'plam vaqtga bog'liq bo'lmasa va yagona nuqtadan iborat bo'lsa, (8.14), (8.15) masalada trayektoriyalarning chap uchi (o'ng uchi) *mahkamlangan* deyiladi.

Agar $S_0(t)$ (yoki $S_1(t)$), $t_0 \leq t \leq t_1$ to'plam R^n fazo bilan ustma-ust tushsa, optimal boshqaruv masalasida trayektoriyalarning chap (o'ng) uchi bo'sh (erkin) deyiladi. Agar $S_0(t)$ ($S_1(t)$), $t_0 \leq t \leq t_1$, R^n da biror sirt yoki chiziqdan iborat bo'lsa, optimal boshqaruv masalasida trayektoriyalar chap (o'ng) uchi qo'zg'oluvchan deyiladi.

(8.14), (8.15) masaladan optimal boshqaruv masalasining asosiy tiplariga ega bo'lamiz:

a) Tezkor masala. Agar $f_0 \equiv 1$, $g_0 \equiv 1$, t_0 - berilgan (ma'lum), t_1 - noma'lum (izlanayotgan) bo'lsa, tezkor masalaga ega bo'lamiz. Bu masalada kriteriy $J = T(u) = t_1(u) - t_0$ bo'ladi.

b) Terminal boshqaruv masalasi. Bu masala (8.14), (8.15) masaladan, $f_0 \equiv 0$, t_0, t_1 lar belgilangan, $S_1(t) = R^n$, $t_0 \leq t \leq t_1$ bo'lgan holda olinadi. Terminal boshqaruv masalasida kriteriy $J = g_0(x(t_1))$ ko'rinishda bo'ladi.

8.2. Pontryaginining maksimum prinsipi.

Maksimum prinsipi – optimal boshqaruv masalalarida optimallikning asosiy zaruriy sharti hisoblanadi. Bu natija XX asrning 50-yillari ikkinchi yarmida akademik L.S.Pontryagin boshchiligidagi sovet matematiklari tomonidan olingan.

Quyidagi:

$$J(u, x) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt + g_0(x^0, x(t_1)) \rightarrow \inf \quad (8.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), t_0 \leq t \leq t_1 \\ x(t_0) &= x^0, g_i(x(t_1)) \leq 0, i = 1, \dots, k, \\ g_i(x(t_1)) &= 0, i = k+1, \dots, s \\ u &= u(t) \in V, \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

optimal boshqaruv masalasini qaraymiz.

Bu masalada t_0, t_1 vaqt momentlari belgilangan (o'zgarmas), x^0 - berilgan boshlang'ich nuqta. (8.16), (8.17) masala (8.14), (8.15) masaladan $G(t) \equiv R^n, S_0(t_0) = \{x_0\}, S_1(t_1) = \{y \in R^n : g_i(y) \leq 0, i = \overline{1, k}, g_i(y) \leq 0, i = \overline{k+1, S}, \}$ bo'lgan holda kelib chiqadi.

Faraz qilamizki, $f(x, u, t) = (f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t))$ vektor - funksiyaning $f_i(x, u, t)$ komponentalari va $f_0(x, u, t), g_0(x)$ funksiyalar x bo'yicha uzluksiz xususiylar hosilalarga ega bo'lsin.

Maksimum prinsipini bayon qilish uchun Gamilton-Pontryagin

funksiyasi deb ataluvchi,

$$\begin{aligned} H(x, u, t, \psi, a_0) &= -a_0 f_0(x, u, t) + \psi_1 f_1(x, u, t) + \dots + \psi_n f_n(x, u, t) = \\ &= -a_0 f_0(x, u, t) + \psi^T f(x, u, t) \end{aligned} \quad (8.18)$$

funksiyani qaraymiz, bu yerda $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $a_0 = \text{const}$

$u = u(t)$ joyiz boshqarish, $x(t) = x(t, u, x^0)$ unga mos joyiz trayektoriya, $[t_0, t_1]$ oraliqda aniqlangan bo'lsin. $(u(t), x(t)), (t_0 \leq t \leq t_1)$ juftlikka mos ravishda $\psi = \psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, o'zgaruvchilarga nisbatan

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= \frac{\partial H(x, u, t, \psi(t), a_0)}{\partial x_1} \bigg|_{u=u(t)}^{x=x(t)} = \\ &= a_0 f_{0x_1}(x(t), u(t), t) - \sum_{j=1}^n \psi_j(t) f_{jx_1}(x(t), u(t), t), (t_0 \leq t \leq t_1) \end{aligned} \quad (8.19)$$

sistemani qaraymiz. Unga qo'shma sistema deyiladi. (8.19) qo'shma sistemani vektor shaklda

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x(t), u(t), t, \psi(t), a_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (8.20)$$

kabi yozish mumkin, bu yerda $H_x = (H_{x_1}, \dots, H_{x_n})$

Agar (8.6) sistema x, u larga nisbatan chiziqli, ya'ni

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), (t_0 \leq t \leq t_1)$$

ko'rinishda bo'lsa, $H(x, u, t, \psi, a_0) = -a_0 f_0(x, u, t) + \psi'(A(t)x + B(t)u + f(t))$ va (8.20) qo'shma sistema $\dot{\psi}(t) = a_0 f_{0x}(x(t), u(t), t) - A'(t)\psi(t), (t_0 \leq t \leq t_1)$ kabi

bo`ladi, bu yerda ψ - transponirlash belgisi.

(8.20) qo'shma sistema –chiziqli differensial tenglamalar sistemasidan iborat bo`lib, u $\psi(t_0) = \psi_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

8.1-teorema. Agar $(x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq t_1$ (8.16)-(8.17) masalaning yechimi bo`lsa, shunday  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sonlar va  $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)), t_0 \leq t \leq t_1$  vektor-funksiya mavjud bo`ladiki, quyidagilar bajariladi:

1) $a = (a_0 a_1, \dots, a_n) \neq 0, a_0 \geq 0, \dots, a_k \geq 0;$

2) $\psi(t)$ funksiya - (8.20) qo'shma sistemaning $(x(t), u(t))$ ga mos keluvchi yechimidan iborat;

3) $u(t)$ optimal boshqarishning barcha $t \in [t_0, t_1]$ uzluksizlik nuqtalarida $H(x(t), u, t, \psi(t), a_0)$ funksiya $u = (u_1, \dots, u_m)$ o`zgaruvchi bo`yicha V to`plamda aniq yuqori chegarasiga  $u = u(t)$  bo`lganda erishadi, ya'ni

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), a_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), a_0), (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (8.21)$$

$$4) \quad \psi_1(t_1) = - \sum_{j=0}^s a_j g_{jx_i}(x(t_1)), i = 1, 2, \dots, n \quad (8.22)$$

$$a_j g_j(x(t_1)) = 0, j = 1, 2, \dots, k \quad (8.23)$$

(8.22) shartlarga transversallik shartlari deyiladi. (8.21) maksimum

shartlari 8.1-teoremada markaziy o`rinni egallaydi. Shuning uchun uni va quyida keltiriladigan 8.2-teoremani maksimum prinsipi deb atash qabul qilingan.

Endi boshlang`ich yoki oxirgi vaqt momentlari belgilangan quyidagi :

$$J(u, x, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt + g_0(x(t_1), t_0, t_1) \rightarrow \inf \quad (8.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), t_0 \leq t \leq t_1 \\ x(t_0) &= x^0, g_i(x(t_1), t_0, t_1) \leq 0, i = 1, \dots, k, \\ g_i(x(t_1), t_0, t_1) &= 0, i = k+1, \dots, s \\ u &= u(t) \in V, t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

optimal boshqaruv masalasini qaraymiz.

Bu yerda $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$, f_0, g_0 funksiyalarni o`z aniqlanish sohalarida $f_{jx_j}, g_{jx_j}, g_{jt_0}, g_{jt_1}$ xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz deb faraz qilamiz.

8.2-teorema. Agar $(x(t), u(t), t_0, t_1)$ -(8.24), (8.25) masalaning yechimi bo`lsa, shunday  $a_0, a_1, \dots, a_s$  sonlar va  $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)), t_0 \leq t \leq t_1$  vektor-funksiya mavjud bo`ladiki, ular 8.1-teoremaning 1) - 3) shartlarini va quyidagi transversallik shartlarini qanoatlantiradi:

$$\psi(t_1) = - \sum_{j=0}^s a_j g_{jx_i}(x(t_1), t_0, t_1) \quad (8.26)$$

$$\max_{u \in V} H(x(t_0), u, t_0, \psi(t_0), a_0) = - \sum_{j=0}^s a_j g_{j t_{0i}}(x(t_1), t_0, t_1) \quad (8.27)$$

(agar t_0 belgilangan bo'lsa, (8.27) shart qatnashmaydi);

$$\max_{u \in V} H(x(t_1), u, t_1, \psi(t_1), a_0) = - \sum_{j=0}^s a_j g_{j t_{1i}}(x(t_1), t_0, t_1) \quad (8.28)$$

(agar t_1 belgilangan bo'lsa, (8.28) shart qatnashmaydi);

$$a_j g_j(x(t_1), t_0, t_1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (8.29)$$

8.3. Maksimum prinsipining chegaraviy masalasi.

Maksimum prinsipidan amaliyotda qanday foydalanish mumkinligini ko'rib o'tamiz.

$H(x, u, t, \psi, a_0)$ funksiyani $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, o'zgaruvchining funksiyasi deb qaraymiz va har bir belgilangan (x, t, ψ, a_0) da

$$H(x, u, t, \psi, a_0) \rightarrow \sup_{u \in V} \quad (8.30)$$

maksimallashtirish masalasini yechamiz.

$$u = u(x, t, \psi, a_0) \in V \quad (8.31)$$

shu masalaning yechimi bo'lsin, ya'ni

$$H(x, u(x, t, \psi, a_0), t, \psi, a_0) = \sup_{u \in V} H(x, u, t, \psi, a_0) \quad (8.32)$$

tenglik bajariilsin. Agar optimal boshqaruv masalasi yechimga ega bo'lsa, maksimum shartiga ko'ra (8.31) funksiya aniqlangan bo'ladi. Ko'p

hollarda (8.31) funksiyani oshkor ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. Masalan, agar

$$f_j(x, u, t) = f_j^0(x, t) + \sum_{i=1}^m f_j^i(x, t) u_i, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$V = \{ u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m, \alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \}$$

(α_i, β_i , - berilgan sonlar) bo'lsa,

$$H(x, u, t, \psi, a_0) = -a_0 f_0^0(x, t) + \sum_{j=1}^n \psi_j f_j^0(x, t) + \sum_{j=1}^n \varphi_j(x, t, \psi, a_0) u_j$$

bo'ladi, bu yerda

$$\varphi_i(x, t, \psi, a_0) = -a_0 f_0^0(x, t) + \sum_{j=1}^n \psi_j f_j^0(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

U vaqtda (8.30) masala yechimi $u(x, t, \psi, a_0)$ ning koordinatalari

$$u = u_i(x, t, \psi, a_0) = \begin{cases} \beta_i, & \varphi_i(x, t, \psi, a_0) > 0 \\ \alpha_i, & \varphi_i(x, t, \psi, a_0) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

ko'rinishda bo'lishi ravshan. Xususiyl holda, agar $\alpha_i = -1, \beta_i = +1$ bo'lsa, $u_i = \text{sign} \varphi_i(x, t, \psi, a_0), i = 1, 2, \dots, m$ bo'ladi.

Agar V to'plam

$$V = \left\{ u \in R^m : |u| = \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq r \right\}$$

ko'rinishda bo'lsa, (8.31) funksiyani oshkor shaklda

$$u(x, t, \psi, a_0) = \frac{\varphi(x, t, \psi, a_0)}{\|\varphi_i(x, t, \psi, a_0)\|} r$$

kabi yozish mumkin, bu yerda $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$,

Faraz qilaylik, bizga (8.31) funksiya ma'lum bo'lsin. U vaqtda x, ψ o'zgaruvchilarga nisbatan quyidagi $2n$ ta differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(x, t, \psi, a_0), t) \\ \dot{\psi} &= -H_x(x, u(x, t, \psi, a_0), t, \psi, a_0), t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Differensial tenglamalar kursidan yaxshi ma'lumki, (8.33) tenglamalar sistemasining umumiy yechimi $2n$ ta ixtiyoriy parametrlarga (masalan, $x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$, $\psi(t_0) = (\psi_1(t_0), \dots, \psi_n(t_0))$) boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'ladi.

Bundan tashqari, maksimum prinsipidagi $a_0, a_1, \dots, a_s$ parametrlar ham noma'lum bo'lganligidan ularni aniqlash uchun yana $s+1$ ta shart kerak bo'ladi. Shunday qilib, noma'lum $2n+s+1$ ta parametrlarni aniqlash uchun, $2n+s+1$ ta shart zarur. Ularni maksimum prinsipidan, masalan 8.1-teoremadagi (8.22), (8.23) shartlar hamda

$$g_j(x(t_j)) = 0, \quad j = k+1, \dots, s \quad (8.34)$$

shartlardan olamiz. Bu shartlar jami $2n+s$ ta tenglamalarni beradi. Yetishmayotgan yana bitta tenglamani olish uchun, $H(x, u, t, \psi, a_0)$ funksiyaning $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, a_0$ o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli va birjinsli

ekanligini, ya'ni $H(x, u, t, a\psi, aa_0) = aH(x, u, t, \psi, a_0), \forall a \in R^1$ ekanligini hisobga olamiz. U vaqtda (8.32) shartdan

$$u(x, t, a\psi, aa_0) = u(x, t, \psi, a_0), \quad \forall a > 0 \quad (8.35)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, maksimum prinsipida $a_1, a_2, \dots, a_s, \psi_1, \dots, \psi_n$ o'zgaruvchilar musbat ko'paytuvchi aniqligida topiladi. Demak,

$$\|a\|^2 = \sum_{i=0}^s a_i^2 = 1 \quad (8.36)$$

deb olish mumkin. Agar $a_0 > 0$ ekanligi ma'lum bo'lsa, (8.36) shart o'rniga $a_0 = 1$ deb olish ham mumkin. (8.22), (8.23), (8.34), (8.36) tenglamalar sistemasini yechganda

$$a_0 \geq 0, a_1 \geq 0, \dots, a_k \geq 0, \quad g_i(x(t_1), t_0, t_1) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (8.37)$$

shartlarning bajarilishi hisobga olinadi. Shunday qilib, maksimum prinsipi asosida (8.32) maksimum shartidan, (8.33) tenglamalar sistemasi va (8.22), (8.23), (8.34), (8.36), (8.37) shartlardan iborat mahsus chegaraviy masalaga ega bo'ldik. Bu masalaga *maksimum prinsipining chegaraviy masalasi* deyiladi.

Agar $x(t), \psi(t), a_1, a_2, \dots, a_s$, - maksimum prinsipining chegaraviy masalasi yechimidan iborat bo'lsa, ularni (8.31) ga qo'yib,

$$u(t) = u(x(t), t, \psi(t), a_0) \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (8.38)$$

funksiyani hosil qilamiz. Agar bu funksiya $[t_0, t_1]$ oraliqda bo'lakli-uzluksiz bo'lsa, u optimalikka shubhali boshqarish bo'ladi. Agar optimal

boshqarish masalasining yechimi mavjud va maksimum prinsipi chegaraviy masalasi yagona yechimga ega bo'lsa, (8.38) bo'lakli-uzluksiz funksiya optimal boshqaruvdan iborat bo'ladi.

1-misol.
$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (u^2(t) + x^2(t)) dt \rightarrow \inf$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ x(0) &= x(t_1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Bu yerda $t_1 > 0$ vaqt momenti berilgan, boshqarishlar to'plami $V = R^1$. Bu masala sodda bo'lib, uning yechimi $(u(t) \equiv 0, x(t) \equiv 0), (0 \leq t \leq t_1)$ juftlikdan iborat. Shu yechimni maksimum prinsipi (8.1-teorema)dan foydalanib topish mumkin. Haqiqatan ham, Gamilton-Pontryagin funksiyasi $H(x, u, t, \psi, a_0) = -a_0(u^2 + x^2) + \psi u$ yordamida qo'shma sistemani yozamiz:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x = 2a_0 x$$

Agar $a_0 = 0$ bo'lsa, $H = \psi u$ funksiya $V = R^1$ to'plamda yuqori chegarasiga faqat $\psi = 0$ bo'lganda erishadi. Ammo $a_0 = \psi = 0$ shart maksimum prinsipiga ziddir. Demak, $a_0 > 0$. U vaqtda $a_0 = 1$ deb hisoblash mumkin. Bu holda $H = u^2 - x^2 + \psi u$ funksiya u bo'yicha R^1 da yuqori chegarasiga $u = \frac{\psi}{2}$ nuqtada erishadi. U vaqtda maksimum prinsipining

chegaraviy masalasi,

$$\dot{x} = \frac{\psi}{2}, \quad \psi = 2x, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad x(0) = x(t_1) = 0$$

ko`rinishda yoziladi. Bu masalaning yagona yechimi $(x(t) \equiv 0, \psi(t) \equiv 0), (0 \leq t \leq t_1)$ bo'ladi. U vaqtda $(u(t) = 0, \psi(1)/2 \equiv 0), (0 \leq t \leq t_1)$ -bu bizga ma'lum optimal boshqarishdir.

2-misol.
$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (u^2(t) - x^2(t)) dt \rightarrow \inf$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ x(0) &= x(t_1) = 0, t_1 > 0 \end{aligned} \right\}$$

Gamilton-Pontryagin funksiyasi

$$H = -a_0(u^2 - x^2) + \psi u$$

ko`rinishda bo'ladi. Qo'shma sistemani tuzamiz:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x = -2a_0x$$

Agar $a_0 = 0$ bo'lsa, $H = \psi u$ funksiya u bo'yicha aniq yuqori chegarasiga $V = R^1$ to'plamda faqat $\psi = 0$ bo'lganda erishadi. Bu esa, maksimum prinsipiga ziddir. Demak, $a_0 > 0$ ya'ni $a_0 = 1$ deb olish mumkin. U vaqtda $H = u^2 - x^2 + \psi u$ funksiyaning $u \in V = R^1$ bo'yicha aniq yuqori chegarasiga $u = \frac{\psi}{2}$ nuqtada erishiladi. Maksimum prinsipining chegaraviy

masalasi

$$\dot{x} = \frac{\psi}{2}, \quad \dot{\psi} = -2x, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad x(0) = x(t_1) = 0$$

bo`ladi. Bu yerdagi differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad \psi(t) = 2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t$$

ko`rinishda topiladi, bu yerda  $c_1, c_2$  -ixtiyoriy o`zgarmaslar. $x(0) = 0$ shartni hisobga olib $c_2 = 0$ ekanligini topamiz. U vaqtda

$x(t) = c_1 \sin t, \psi(t) = 2c_1 \cos t, x(t_1) = 0$ shartdan $c_1 \sin t_1 = 0$ tenglikni olamiz. $t_1 \neq \pi k$ ($k=1,2,\dots$) bo`lganda, bu yerdan,  $c_1 = 0$  bo`lishi kelib chiqadi va maksimum prinsipi chegaraviy masalasi yagona ($x(t) \equiv 0, \psi(t) \equiv 0$), ($0 \leq t \leq t_1$) yechimga ega, optimallikka shubhali boshqarish esa $u = \frac{\psi}{2} = 0$ bo`ladi.

Agar $t_1 \neq \pi k$ ($k=1,2,\dots$) bo`lsa, maksimum prinsipi chegaraviy masalasi cheksiz ko`p yechimga ega: $x(t) = c_1 \sin t, \psi(t) = 2c_1 \cos t$, bu yerda c_1 -ixtiyoriy o`zgarmas. U vaqtda optimallikka shubhali boshqarish ham cheksiz ko`p bo`ladi:

$$(u(t) = c_1 \cos t \quad (0 \leq t \leq t_1)).$$

Topilgan boshqarish optimal bo`ladimi? Bu savolga javob  $t_1$  ning qiymatiga bog`liq. $t_1 > \pi$ va $0 < t_1 < \pi$ bo`lgan hollarni qaraymiz.

1) $t_1 > \pi$ bo`lsin. U vaqtda  $\inf J(u) = -\infty$  ekanligini ko`rsatamiz. Buning

uchun, $u_m = u_m(t) = \frac{m\pi}{t_1} \cos \frac{\pi t}{t_1}$ boshqarishlar ketma-ketligini va ularga mos

$x_m = x_m(t) = m \sin \frac{\pi t}{t_1}$ ($0 \leq t \leq t_1, m = 1, 2, \dots$) trayektoriyalar ketma-ketligini

qaraymiz. U vaqtda

$$J(u_m) = \int_{t_0}^{t_1} (u_m^2(t) - x_m^2(t)) dt = \frac{1}{2} t_1 m^2 \left(\frac{\pi^2}{t^2} - 1 \right) \rightarrow -\infty, m \rightarrow \infty$$

Demak, $t_1 > \pi$ bo'lganda qaralayotgan optimal boshqaruv masalasi yechimga ega emas. Maksimum prinsipi chegaraviy masalasi esa, yuqorida ko'rsatildiki, $t_1 \neq \pi k$ bo'lganda yagona yechimga ega, $t_1 = \pi k$ bo'lganda esa, cheksiz ko'p yechimga ega.

2) $0 < t_1 < \pi$ bo'lsin. Shunday bo'lakli-uzluksiz $v(t)$ funksiyalarni qaraymizki, $\dot{x}(t) = v(t)$ ($0 \leq t \leq t_1, x(0) = x(t_1) = 0$) masala yechimga ega bo'lsin. U vaqtda shu $x = v(t)$ funksiyalar uchun quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{t_0}^{t_1} (v^2 - x^2) dt = \int_{t_0}^{t_1} (v^2 + x^2 \operatorname{ctg}^2 t - x^2 \sin^2 t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (v^2 + x^2 \operatorname{ctg}^2 t - 2x\dot{x}\operatorname{ctg} t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - x(t)\operatorname{ctg} t)^2 dt \geq 0 \end{aligned}$$

$t_1 < \pi$ bo'lganda $u(t)=0$ va $t_1 = \pi$ bo'lganda $u(t)=c_1 \cos t$ ($c_1 = \text{const}$) funksiya uchun $J(u)=0$ bo'ladi. Demak, $t_1 < \pi$ bo'lganda qaralayotgan optimal boshqaruv masalasi yagona $u(t)=0(0 < t < t_1)$ yechimga ega, $t_1 = \pi$ bo'lganda esa, cheksiz ko'p $u(t)=c_1 \cos t, (0 \leq t \leq t_1)$ (c_1 -ixtiyoriy o'zgarmas) yechimga ega.

8-ma'ruza bo'yicha savollar

1. Optimal boshqaruvning amaliy masalalariga misollar.
2. Optimal boshqaruv umumiy masalasining qo'yilishi. Optimal boshqaruv masalasining asosiy tiplari.
3. Pontryaginining maksimum prinsipi va uning qo'llanilishi.
4. Maksimum prinsipining chegaraviy masalasi va uni yechish orqali optimal boshqarishni topish.

9-ma'ruza

Terminal boshqaruv masalasi uchun maksimum prinsipi.

Reja:

1. Terminal boshqaruv masalasining qo'yilishi. Maksimum prinsipi.
2. Funktsional orttirmasi uchun formula.
3. "Ignasimon" variatsiya. Trayektoriya bahosini aniqlash.
4. Maksimum prinsipining isboti.
5. Ekstremal boshqarishlar.
6. Chiziqli terminal boshqaruv masalasi.

Tayanch iboralar: terminal funktsional (kriteriy), joyiz boshqarish, joyiz trayektoriya, funktsional ottirmasi, funktsional orttirmasi uchun formula, boshqarishning "ignasimon" variatsiyasi, trayektoriya orttirmasi, maksimum sharti, ekstremal boshqarish, qo'shma sistema, optimal boshqarish, optimal trayektoriya, chiziqli terminal boshqaruv masalasi, optimallikning zaruriy va yetarli sharti.

9.1. Terminal boshqaruv masalasi. Maksimum prinsipi.

Boshqarish obyekti

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (9.1)$$

vektorli differensial tenglama bilan berilgan bo'lsin, bu yerda $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i(x, u, t)$ funksiyalarni $f_{ij}(x, u, t)$ hususiy hosilalari bilan birga uzluksiz deb hisoblaymiz. Joyiz boshqarishlar $[t_0, t_1]$ oraliqda aniqlangan bo'lakli uzluksiz va $V \subset R^m$ to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi $u = u(t)$ m – vektor funksiyalardan iborat. (9.1) tenglamaning har bir $u = u(t)$ joyiz boshqarishga mos $x = x(t)$ joyiz trayektoriyasi

$$x(t_0) = x^0 \quad (9.2)$$

shartni qanoatlantiradi. Qaralayotgan obyektни boshqarish

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \quad (9.3)$$

terminal kriteriy orqali sifat jihatidan baholanadi, bu yerda $\varphi(x) - R^n$ da uzluksiz differensiallanuvchi funksiya. Shunday $u^*(t)$ boshqarishni topish kerakki, $J(u^*) = \inf_{u \in U} J(u)$ bo'lsin, bu yerda U – barcha joyiz boshqarishlar to'plami. Shunday qilib, quyidagi

$$\left. \begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t_1)) \rightarrow \inf \\ \dot{x} &= f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) &= x^0, \quad u = u(t) \in V \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

terminal boshqaruv masalasini qaraymiz. Bu masalada trayektoriyalarning

chap uchi mahkamlangan ((9.2) shartga qarang), o'ng uchi esa erkin ($x(t_1) \in R^n$).

(9.4) masala avvalgi ma'ruzamizda qaralgan optimal boshqaruv umumiy masalasining xususiy holi bo'lib, Pontryaginining maksimum prinsipi bu masala uchun quyidagicha bo'ladi.

9.1-teorema. Agar $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – optimal boshqarish, $x^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ optimal trayektoriya bo'lsa,

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in V} H(x^*(t), \psi^*(t), u, t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (9.5)$$

maksimum sharti bajariladi, bu yerda

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(x, u, t),$$

$\psi'(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ funksiya

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x^*(t), \psi, u^*(t), t)}{\partial x} \quad (9.6)$$

$$\psi(t_1) = - \frac{\partial \varphi(x^*(t_1))}{\partial x} \quad (9.7)$$

qo'shma sistemaning yechimidir.

9.2. Funktsional orttirmasi uchun formula.

Teoremaning isbotiga o'tishdan oldin funksionalning orttirmasi uchun formula keltirib chiqaramiz.

$u = u(t), \quad \tilde{u} = u(t) + \Delta u(t), \quad t \in [t_0, t_1]$ joyiz boshqarishlar, $x = x(t),$
 $\tilde{x} = x(t) + \Delta x(t), \quad t \in [t_0, t_1],$ ularga mos joyiz trayektoriyalar bo'lsin.

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$$

ayirmaga (9.3) funksionalning $u = u(t)$ boshqarish bo'yicha orttirmasi deyiladi.

(9.3) funksionalning aniqlanishidan va $\varphi(x)$ funksiyaning differensiallanuvchiligidan,

$$\Delta J(u) = \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o(\|\Delta x(t_1)\|) \quad (9.8)$$

kelib chiqadi.

$\psi = \psi(t)$ ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya uchun o'rinli bo'lgan quyidagi ayniyatni qaraymiz:

$$\psi'(t_1) \Delta x(t_1) - \psi'(t_0) \Delta x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt \quad (9.9)$$

Trayektoriyalarning chap uchi mahkamlangan, ya'ni $x(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x^0$ bo'lgani uchun, $\Delta x(t_0) = 0$.

$$\psi(t_1) = - \frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x} \quad (9.10)$$

deb olamiz. (9.9) va (9.10) larni hisobga olgan holda (9.8) dan

$$\Delta J(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt + o(\|\Delta x(t_1)\|) \quad (9.11)$$

tenglikni olamiz. (9.11)dagi ikkinchi integralni qaraymiz. Tushunarlikli, $\Delta x(t_0) = \tilde{x}(t_0) - x(t)$ funksiya quyidagi

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t), u(t) + \Delta u(t), t) - f(x(t), u(t), t)$$

differensial tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, t, u) \quad (9.12)$$

Gamilton–Pontryagin funksiyasi yordamida quyidagini yozamiz:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} (H(x + \Delta x, \psi, u + \Delta u, t) - H(x, \psi, u, t)) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (H(x, \psi, u + \Delta u, t) - H(x, \psi, u, t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x, \psi, u + \Delta u, t)}{\partial x} \Delta x(t) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x(t)\|) dt \end{aligned} \quad (9.13)$$

Faraz qilaylik, $\psi = \psi(t)$ funksiya

$$\dot{\psi}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} dt \quad (9.14)$$

qo'shma sistemaning (9.10) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin. (9.14) differensial tenglama chiziqli, ya'ni

$$\dot{\psi}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \psi(t)$$

ko'rinishda bo'lgani uchun, $\psi(t)$ funksiya $[t_0, t_1]$ oraliqda bir qiymatli aniqlangandir.

(9.13) va (9.14) ni (9.10) ga keltirib qo'yib, funksional orttirmasini quyidagicha yozamiz:

$$\Delta J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x(t), \psi(t), u(t), t) dt + \eta \quad (9.15)$$

bu yerda $\Delta_{\tilde{u}} H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, \tilde{u}, t) - H(x, \psi, u, t)$,

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \eta_1 = (\|\Delta x(t_1)\|), \quad \eta_2 = -\int_{t_0}^{t_1} O_1(\|\Delta x(t)\|) dt,$$

$$\eta_3 = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_{\tilde{u}}'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt \quad (9.16)$$

Hosil qilingan (9.15) formulaning ba'zi xususiy hollarini qarab chiqamiz.

a) Agar $\varphi(x)$ qavariq funksiya bo'lsa, $\eta_1 \geq 0$ bo'ladi; agar $\varphi(x)$ chiziqli funksiya bo'lsa, $\eta_1 = 0$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, differensiallanuvchi $\varphi(x)$ funksiya

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \geq \frac{\partial \varphi'(x)}{\partial x} \Delta x$$

tengsizlikni qanoatlantirganligi uchun, $==$ bajariladi. $==$ chiziqli bo'lgan holda esa $==$ bo'lishi ravshan.

b) Agar (9.1) sistema x bo'yicha chiziqli bo'lsa, $\eta_2 = 0$ bo'ladi. Haqiqatan ham, agar (9.1) sistema

$$\dot{x} = A(u, t)x + b(u, t)$$

ko'rinishda bo'lsa, $H(x, \psi, u, t) = \psi' [A(u, t)x + b(u, t)]$ funksiya x bo'yicha chiziqli va shuning uchun $\alpha_1(\|\Delta \dot{x}\|) = 0$ bo'ladi.

v) Agar (9.1) sistema, x va u o'zgaruvchilar ajralgan, ya'ni,

$$\dot{x} = f(x, t) + b(u, t)$$

ko'rinishda bo'lsa, $\eta_3 = 0$ bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda $\Delta_{\tilde{u}} H(x, \psi, u, t) = \psi' [b(\tilde{u}, t) - b(u, t)]$. Shuning uchun, $\partial \Delta_{\tilde{u}} H / \partial x = 0$.

Agar

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in V.$$

masalada $\varphi(x)$ qavariq funksiya bo'lsa, yuqoridagi a), b), v) natijalarga ko'ra, (9.15) formula

$$\Delta J(u) \geq - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x(t), \psi(t), u(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) [b(u(t) + \Delta u(t), t) - b(u(t), t)] dt \quad (9.17)$$

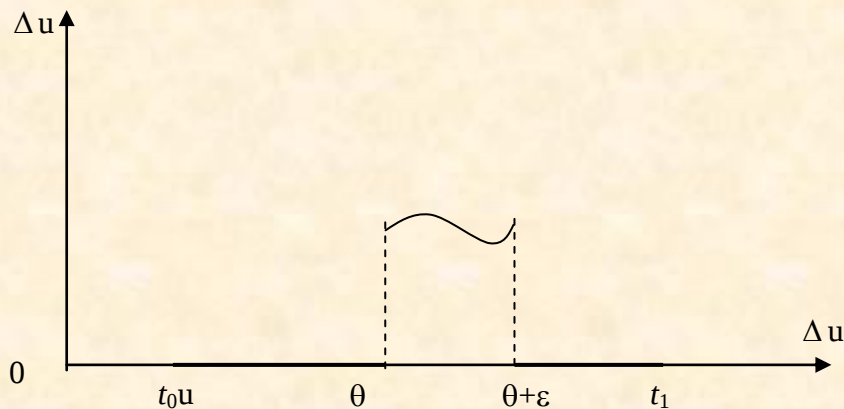
ko'rinishni oladi.

9.3. “Ignasimon variatsiya”. Trayektoriya bahosini aniqlash.

Berilgan $u = u(t)$ boshqaruvni o'zgartirib,

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon) \end{cases} \quad (9.18)$$

boshqaruvni qaraymiz, bu yerda $\theta \in [t_0, t_1)$, $\varepsilon > 0$, $\theta + \varepsilon < t_1$, $v \in V$ (9.1-chizmaga qarang) $\tilde{u}(t)$ – joyiz boshqaruvdir.



9.1-chizma.

$u(t)$ boshqaruvning $\Delta_{\theta, \varepsilon} u(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ ko'rinishdagi variatsiyasiga

“ignasimon” variatsiya (Maksheyn variatsiyasi) deyiladi. Bu variatsiya θ, ε, v parametrlarga bog’liq bo’lib,

$$\Delta_{\theta v \varepsilon} u(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon) \end{cases} \quad (9.19)$$

ko’rinishga ega.

Trayektoriyaning “ignasimon” variatsiyaga mos orttirmasi. Agar $u = u(t)$ boshqaruvga (9.19) ko’rinishdagi $\Delta_{\theta v \varepsilon} u(t)$ “ignasimon” variatsiya berilsa, $x = x(t)$ trayektoriyaning $\Delta_{\theta v \varepsilon} x(t)$ orttirmasi qanoatlantiradigan

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, \tilde{u}, t) - f(x, u, t), \quad \Delta x(t_0) = 0$$

tenglama, quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi:

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, u, t) - f(x, u, t), \quad \Delta x(t_0) = 0 \quad (9.20)$$

$$t_0 \leq t \leq \theta, \quad \theta + \varepsilon \leq t \leq t_1$$

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, v, t) - f(x, u, t), \quad \theta \leq t \leq \theta + \varepsilon \quad (9.21)$$

$\Delta x(t_0) = 0$ bo’lgani uchun $\Delta_{\theta v \varepsilon} x(t_0) \equiv 0$, $t_0 \leq t \leq \theta$ funksiya (9.20) tenglamaning $[t_0, \theta]$ oraliqdan yagona yechimidir. Shunday qilib, (9.21) tenglama uchun boshlang’ich shart $\Delta_{\theta v \varepsilon} x(\theta) = 0$, bo’ladi. Shuning uchun (9.21) tenglama integral tenglama shaklida quyidagicha yoziladi:

$$\Delta x(t) = \int_0^t [f(x + \Delta x, v, \tau) - f(x, u, \tau)] d\tau \quad (9.22)$$

$f(x, u, t)$ funksiyaning $x(t)$ trayektoriya biror Δ - atrofidagi Lipshis o'zgarmasi $L = L(\Delta)$ bo'lsin, ya'ni

$$\|f(x + \Delta x, v, t) - f(x, u, t)\| \leq L \|\Delta x\| \quad (9.23)$$

tengsizlik bajarilsin. U vaqtda (9.22) tenglamadan

$$\begin{aligned} \|\Delta x(t)\| &\leq \int_0^1 \|f(x + \Delta x, v, \tau) - f(x, u, \tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\Delta_v f(x, u, \tau)\| d\tau + L \int_0^1 \|\Delta x(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (9.24)$$

kelib chiqadi, bu yerda $\Delta_v f(x, u, \tau) = f(x, v, \tau) - f(x, u, \tau)$.

(9.1) tenglamaning o'ng tomoniga qo'yilgan shartlardan va $x(t)$ trayektoriya uzluksizligidan kelib chiqadiki, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ uchun L o'zgarmas ε ga bog'liq bo'lmaydi.

Quyidagi

$$C = \int_0^1 \|\Delta_v f(x, u, \tau)\| d\tau, \quad w = \|\Delta x\| \quad (9.25)$$

belgilashlardan foydalansak (9.24) tengsizlik ko'rinishda yoziladi. Bu yerdan

$$\begin{aligned}
w(t) &\leq c + L \int_0^t \left[c + L \int_0^\tau w(s) ds \right] d\tau = c + Lc(t-\theta) + L^2 \int_0^t (t-\tau) w(\tau) d\tau \leq \\
&\leq c + Lc(t-\theta) + c \frac{L^2 (t-\theta)^2}{2} + L^3 \int_0^1 (t-\tau) \int_0^s w(s) d\tau \leq \dots \leq \\
&\leq c \left[1 + \frac{L(t-\theta)}{1!} + \frac{L^2 (t-\theta)^2}{2!} + \dots + \frac{L^k (t-\theta)^k}{k!} + \dots \right] = ce^{L(t-\theta)}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

kelib chiqadi. (9.24) belgilashni hisobga olib, (9.25) tengsizlikdan

$$\|\Delta x(t)\| \leq \left(\int_\theta^t \|\Delta_v f(x, u, \tau)\| d\tau \right) e^{L(t-\theta)}$$

tengsizlikni olamiz. Bu yerdan

$$\|\Delta x(t)\| \leq \left(\int_0^{\theta+\varepsilon} \|\Delta_v f(x, u, t)\| dt \right) e^{L\varepsilon}, \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon] \tag{9.27}$$

kelib chiqadi. $\Delta_v f(x(t), u(t), t)$ funksiya faqat v va t ga bog'liq va t bo'yicha bo'lakli uzluksiz bo'lgani uchun,

$$k(v) = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\Delta_v f(x(t), u(t), t)\| \tag{9.28}$$

mavjud. Shunday qilib (9.26) va (9.27) dan

$$\|\Delta_{\theta v \varepsilon}\| \leq k_1 \varepsilon, \quad \theta \leq t \leq \theta + \varepsilon \tag{9.29}$$

kelib chiqadi, bu yerda $k_1 = k(v)e^{L\varepsilon}$.

Yendi $\Delta_{\theta\varepsilon}x(t)$ funksiyani $[\theta + \varepsilon, t_1]$ oraliqda qaraymiz. Bu yerda u (9.20) tenglamani va (9.29) ga ko'ra ,

$$\|\Delta_{\theta\varepsilon}(\theta + \varepsilon)\| \leq k_1\varepsilon \quad (9.30)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Soddalik uchun (9.22) dagi Lipshis o'zgarmasidan foydalanib va (9.19) ni integral shaklda yozib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\|\Delta x(t)\| \leq \|x(\theta + \varepsilon)\| + \int_{\theta + \varepsilon}^t \|f(x + \Delta x, u, \tau) - f(x, u, \tau)\| d\tau \leq k_1\varepsilon + L \int_{\theta + \varepsilon}^t \|\Delta x(\tau)\| d\tau$$

Bu ham (9.24) ga o'xshash tengsizlikdir. Shuning uchun, bu yerda ham (9.26) tipidagi tengsizlik o'rinli. Demak,

$$\|\Delta_{\theta\varepsilon}x(t)\| \leq k_1\varepsilon e^{L(t-\theta-\varepsilon)}.$$

Bu yerdan

$$\|\Delta_{\theta\varepsilon}x(t)\| \leq k_2\varepsilon, \quad \theta + \varepsilon \leq t \leq t_1 \quad (9.31)$$

tengsizlikni olamiz, bunda $k_2 = k(V)^{L(t-\theta)}$ o'zgarmas ε ga bog'liq emas.

$k = k(V)^{L(t_1-t_0)}$ bo'lsin. $k_1 < k$, $k_2 < k$ ekanligi ravshan. U vaqtda $\Delta_{\theta\varepsilon}x(t) \equiv 0$ $t \in [t_0, \theta]$, (9.29), (9.31) munosabatlarni birlashtirib, $[t_0, t_1]$ oraliqda $x(t)$ trayektoriyaning “ignasimon” variatsiyasiga mos orttirmasi

$$\|\Delta_{\theta\varepsilon}x(t)\| \leq k\varepsilon \quad (9.32)$$

kabi baholanishini ko'ramiz, bu yerda k o'zgarmas ε ga bog'liq emas.

9.4. Maksimum prinsipining isboti.

Endi 9.1-teorema isbotini keltiramiz. $u^*(t)$ $t \in [t_0, t_1]$ optimal boshqaruvning (9.18) ko'rinishdagi ignasimon variatsiyasidan foydalanamiz, ya'ni

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon) \end{cases}$$

ko'rinishdagi joyiz boshqaruvlarni qaraymiz, bu yerda $\theta \in [t_0, t_1]$, $\theta + \varepsilon < t_1$, $\varepsilon > 0$, $v \in V$. U vaqtda,

$$J(\tilde{u}) - J(u^*) \geq 0 \quad (9.33)$$

funksionalning orttirmasi uchun hosil qilingan (9.14) formulaga ko'ra, (9.33) munosabat,

$$0 \leq \Delta J(u^*) = - \int_e^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) dt + \eta_{\theta v \varepsilon} \quad (9.34)$$

ko'rinishida yoziladi, bu yerda

$$\begin{aligned} \eta_{\theta v \varepsilon} = & 0 \left(\left\| \Delta_{\theta v \varepsilon} x^*(t_1) \right\| \right) - \int_0^t 0_1 \left(\left\| \Delta_{\theta v \varepsilon} x^*(t) \right\| \right) dt - \\ & - \int_0^{\theta+\varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^*, \psi^*, u^*, t)}{dx} \Delta_{\theta v \varepsilon} x^*(t) dt \end{aligned} \quad (9.35)$$

(9.32) munosabatni hisobga olsak, (9.35) dan $\eta_{\theta v \varepsilon} = o_2(\varepsilon)$ ekanligi kelib chiqadi. $\Delta_v H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t)$ funksiya $t = \theta$ nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'lganligi uchun,

$$\int_0^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H'(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) dt = \Delta_v H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), u^*(\theta), \theta) \varepsilon + o_3(\varepsilon) \quad (9.36)$$

tenglik bajariadi. Shunday qilib, (9.36) ni hisobga olgan holda, (9.35) dan

$$-\Delta_v H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), u^*(\theta), \theta) \varepsilon + o_4(\varepsilon) \geq 0 \quad (9.37)$$

munosabatni olamiz ($o_4(\varepsilon) = o_2(\varepsilon) + o_3(\varepsilon)$). (9.37) ni $\varepsilon > 0$ songa bo'lib va $\varepsilon \rightarrow 0$ da limitga o'tib,

$$\Delta_v H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), u^*(\theta), \theta) \leq 0$$

tengsizlikni olamiz, ya'ni

$$H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), v, \theta) \leq H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), u^*(\theta), \theta), \quad \forall v \in V. \quad (9.38)$$

Bu munosabat (9.4) tenglikning $\theta \in [t_0, t_1]$ nuqtada o'rinli ekanligini bildiradi. $u^*(t)$ boshqarishni $\theta = t_1$ nuqtada uzluksiz deb hisoblash mumkin. U vaqtda (9.38) munosabatda $\theta \rightarrow t_1$ da limitga o'tsak, uning $\theta = t_1$ nuqtada ham o'rinli ekanligini ko'ramiz. 9.1-teorema isbotlandi.

9.5. Ekstremal boshqaruvlar.

Agar $x = x(t)$, $\psi = \psi(t)$, $u = u(t)$, funksiyalar $[t_0, t_1]$ oraliqda asosiy va

qo'shma sistemani hamda maksimum shartini qanoatlantirsa, ya'ni

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial \psi}, \quad x(t_0) = x^0, \quad (9.38')$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(t_1)}{\partial x}, \quad (9.39)$$

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{v \in V} H(x(t), \psi(t), v, t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (9.40)$$

munosabatlar bajarilsa, $u(t)$ joyiz boshqaruvga ekstremal boshqaruv deyiladi.

Maksimum prinsipi optimallikning zaruriy shartidan iborat, ya'ni ekstremal boshqaruvlar orasida optimal bo'lmaganlari ham topiladi.

1-misol.

$$\left. \begin{aligned} x_2(1) &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= u, \quad x_2 = -x_1^2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad t \in [0, 1], \\ |u| &\leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

Bu masala (9.4) ko'rinishdagi terminal boshqarish masalasidir: $f = (f_1, f_2)$,
 $f_1 = u$, $f_2 = -x_1^2$, $x^0 = (0, 0)$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $\varphi(x) = x_2$, $x = (x_1, x_2)$.

Gamilton-Pontryagin funksiyasini tuzamiz:

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2.$$

Qo'shma sistemani tuzamiz:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 2\psi_2 x_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemaning

$$\psi_1(1) = -\frac{\partial \varphi(x(1))}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_2(1) = -\frac{\partial \varphi(x(1))}{\partial x_2} = -1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi,

$$\psi_2(t) = -1, \quad t \in [0,1], \quad \psi_1(t) = -2 \int_1^t x_2(\tau) d\tau$$

bo'ladi. Qaralayotgan masala uchun (9.4) maksimum sharti,

$$\psi_1(t)u(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi_1(t)u$$

ko'rinishga keladi. Demak, har bir

$$u(t) = \text{sign} \psi_1(t), \quad t \in [0,1] \quad (9.42)$$

joyiz boshqaruv – ekstremal boshqaruv bo'ladi.

$$u(t) \equiv 1, \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \quad u(t) = -1, \quad t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \quad (9.43)$$

ko'rinishdagi boshqaruv ham ekstremal boshqaruv bo'ladi, chunki unga mos keluvchi trayektoriya ning birinchi komponentasi

$$x_1(t) = t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad x_1(t) = -t + \frac{2}{3}, \quad t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right],$$

bo'lib,

$$\psi_1(t) = 2 \int_t^1 x_1(\tau) d\tau = 2 \int_t^{\frac{1}{3}} x_1(\tau) d\tau + 2 \int_{\frac{1}{3}}^1 x_1(\tau) d\tau = \frac{1}{9} - t^2 \geq 0, \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

$$\psi_1(t) = 2 \int_t^1 x_1(\tau) d\tau = 2 \int_t^1 \left(-\tau + \frac{2}{3}\right) d\tau = t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{1}{3} \leq 0, \quad t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right],$$

ya'ni (9.42) shart bajariladi. (9.43) boshqaruv ekstremal boshqaruv bo'lsada optimal boshqaruv emas. Haqiqatan ham, $\bar{u}(t) \equiv 1$, $t \in [0, 1]$ joyiz boshqaruv uchun $J(\bar{u}) = -\frac{1}{3}$, (9.43) uchun esa, $J(u) = -\frac{1}{27}$, ya'ni $J(\bar{u}) < J(u)$.

Ekstremal boshqaruvlarning muhim xossalarini quyidagi teoremda keltiramiz.

9.2-teorema. $u(t)$ $t \in [t_0, t_1]$ – ekstremal boshqaruv bo'lsin. U vaqtda:

- 1) $H(x(t), \psi(t), u(t), t)$ funksiya $t \in [t_0, t_1]$ oraliqda uzluksiz;
- 2) $u(t)$ ning har bir $t \in [t_0, t_1]$ uzluksizlik nuqtasida

$$\frac{dH(x(t), \psi(t), u(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial t} \quad (9.44)$$

tenglik bajariladi.

Isboti. 9.2-teoremaning birinchi tasdig'i isbotini keltiramiz. (9.40)

munosabatga ko'ra t va $\bar{t} = t + \Delta t$ vaqt momentlari uchun

$$H(t) = H(x(t), \psi(t), u(t), t) \geq H(x(t), \psi(t), u(\bar{t}), t)$$

$$H(\bar{t}) = H(x(\bar{t}), \psi(\bar{t}), u(\bar{t}), \bar{t}) \geq H(x(\bar{t}), \psi(\bar{t}), u(t), \bar{t})$$

tengsizliklar bajariladi. Bu yerdan

$$\begin{aligned} H(x(\bar{t}), \psi(\bar{t}), u(\bar{t}), \bar{t}) - H(x(t), \psi(t), u(t), t) &\leq H(\bar{t}) - H(t) \leq \\ &\leq H(x(\bar{t}), \psi(\bar{t}), u(\bar{t}), \bar{t}) - H(x(t), \psi(t), u(\bar{t}), t) \end{aligned} \quad (9.45)$$

Olingan (9.45) tengsizlikning chap va o'ng tomonlari $\Delta t \rightarrow 0$ da nolga intiladi. Demak, $H(\bar{t}) \rightarrow H(t)$, $\Delta t \rightarrow 0$. Bu esa, $H(t)$ funksiyaning ixtiyoriy $t \in [t_0, t_1]$ nuqtada uzluksizligini ko'rsatadi.

9.2-teoremaning ikkinchi tasdig'i isbotini [6] adabiyotdan qarash mumkin.

6. Chiziqli terminal boshqarish masalasi.

Chiziqli boshqarish masalasi uchun chiziqli terminal kriteriyli quyidagi masalani qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} J(u) &= c'x(t_1) \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= A(t)x + b(t, u), \quad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) &= x^0, \quad u = u(t) \in V, \quad t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \right\} \quad (9.46)$$

bu yerda $x \in R^n$, $u \in R^m$, $V \subset R^n$, $A(t) - n \times n$ – matrisa-funksiya,

$b(t, u) = (b_1(t, u), \dots, b_m(t, u)), \quad c \in R^n, \quad x^0 \in R^n.$

$A(t)$ matrisaning elementlari $[t_0, t_1]$ da uzluksiz, $b_i(t, u), \quad i = \overline{1, n}$, funksiyalar $[t_0, t_1] \times V$ da uzluksiz deb faraz qilamiz.

(9.46) masala uchun quyidagi teorema o'rinlidir

9.3-teorema: $u = u(t), \quad t \in [t_0, t_1]$ bo'lakli-uzluksiz funksiyaning (9.46) masalada optimal boshqaruv bo'lishi uchun

$$\max_{v \in V} \psi'(t)b(t, v) = \psi'(t)b(t, u(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (9.47)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir, bu yerda $\psi(t), t \in [t_0, t_1]$ funksiya

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad \psi(t_1) = -c \quad (9.48)$$

qo'shma sistemaning yechimidan iborat.

Isboti: $H(x, \psi, u, t) = \psi^1[A(t)x + b(t, u)]$ Gamilton-Pontryagin funksiyasi yordamida (9.47) shartni (9.40) maksimum sharti ko'rinishida yozish mumkin. (9.48) sistema esa (9.39) ko'rinishda yoziladi. Demak, (9.47) shartning zaruriyligi 9.1-teoremadan kelib chiqadi. Shu shartning $u(t)$ optimal boshqaruv bo'lishi uchun yetarliligi (9.16) munosabatdan kelib chiqadi, chunki ixtiyoriy $\tilde{u} = y(t)$ joyiz boshqaruv uchun

$$J(\dot{u}) - J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) [b(t, \tilde{u}(t)) - b(t, u(t))] dt \geq 0$$

bajariladi. 9.3-teorema isbotlandi.

$$J(u) = x_1(1) + x_2(1) \rightarrow \min,$$

2-misol.

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_1 + u,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, |u| \leq 1, t \in [0,1]$$

Bu masala (9.46) ko'rinishdagi masaladir:

$$x = (x_1, x_2), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b(t, u) = (b_1(t, u), b_2(t, u)), b_1(t, u) = 0,$$

$$b_2(t, u) = u, c = (c_1, c_2) = (1, 1), V = [-1, 1]$$

(9.47) maksimum sharti

$$\max_{v \in V} \psi'(t) b(t, v) = \max_{v \in V} \psi_2(t) u(t) = \psi_2(t) u(t)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$

$$\psi_1(t) = -\psi_2, \quad \psi_2 = -\psi_1(1) = -1, \quad \psi_2(1) = -1$$

qo'shma sistema yechimidan iborat. Demak, optimal boshqaruv

$$u(t) = \text{sign} \psi_2(t), \quad t \in [0, 1]$$

ko'rinishda bo'ladi. Qo'shma sistemaning yechimi

$$\psi_1^*(t) = -e^{1-t}, \quad \psi_2^*(t) = -e^{1-t}$$

bo'ladi. Shunday qilib, optimal boshqarish

$$u^*(t) = \text{sign} \psi_2^* = \text{sign}(-e^{1-t}) = -1, \quad t \in [0, 1]$$

formula bilan aniqlanadi. Optimal trayektoriya esa,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u^*(t)$$

sistemaning $x_1(0) = x_2(0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat. Bu sistemani yechib,

$$x_1^*(t) = 1 - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}, \quad x_2^*(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

optimal trayektoriyani topamiz. Funktsionalning minimal qiymati

$$\min_{u \in U} J(u) = J(u^*) = x_1^*(1) + x_2^*(1) = 1 - e$$

bo'ladi.

9-ma'ruza bo'yicha savollar

1. Terminal boshqarish masalasining qo'yilishi. Asosiy va qo'shma sistemalar, maksimum sharti.
2. Funktsional orttirmasi uchun formulani keltirib chiqaring.
3. Boshqaruvning "ignasimon" variatsiyasi va unga mos trayektoriya orttirmasini baholash.
4. "Ignasimon" variatsiyadan foydalanib, maksimum shartini isbotlang.
5. Ekstremal boshqaruvlar va ularning xossalari.
6. Chiziqli terminal boshqarish masalasida maksimum shartining optimallik uchun zarur va yetarli ekanligini ko'rsating.

10-ma'ruza

Chiziqli boshqaruv sistemalari. Tezkor masala.

Reja:

1. Chiziqli boshqaruv sistemasi va uning erishish to'plami. Ekstremal prinsip.
2. Chiziqli sistemaning regulyarligi va normalligi.
3. Chiziqli tezkor masala. Optimallikning zaruriy va yetarli shartlari.
4. Pontryaginning maksimum prinsipi.
5. Chiziqli stasionar tezkor masala. Optimal boshqarishning sintezi.

Tayanch iboralar: Chiziqli boshqaruv sistemasi, yechimlarning fundamental matrisasi, Koshi formulasi, erishish to'plami, ekstremal prinsip, regulyar chiziqli sistema, normal chiziqli sistema, optimallikning zaruriy shartlari, optimallikning yetarli shartlari, maksimum sharti, maksimum prinsipi, chiziqli statsionar tezkor masala, optimal boshqarishning sintezi.

1. Chiziqli boshqaruv sistemasi va uning erishish to'plami. Ekstremal prinsip.

Boshqarilayotgan obyektining harakati (jarayon),

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \geq t_0, \quad u \in V \quad (10.1)$$

vektorli chiziqli differensial tenglama bilan berilgan bo'lsin, bu yerda $x = (x_1, \dots, x_n)$ holat vektori, $u = (u_1, \dots, u_m)$ boshqaruv vektori, $V \subset R^m$ boshqaruvlar to'plami, t - vaqt, t_0 - boshlang'ich vaqt momenti.

(10.1) tenglamada $n \times n$ o'lchovli $A(t)$ matrisa va $n \times m$ o'lchovli $B(t)$ matrisa elementlarini $t \geq t_0$ nuqtalarda uzluksiz deb faraz qilamiz. V boshqaruvlar to'plamini R^m ning bo'sh bo'lmagan qavariq kompakt to'plami deb hisoblaymiz.

Odatdagidek, (10.1) boshqaruv sistemasi uchun joyiz boshqarishlar sifatida V boshqarishlar to'plamidan qiymatlar qabul qiluvchi bo'lakli-uzluksiz $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, m - vektor-funksiyalarni qaraymiz va bunday boshqarishlar to'plamini U deb belgilaymiz.

Differensial tenglamalar kursidan yaxshi ma'lumki, har bir $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, - joyiz boshqarishga va

$$x(t_0) = x^0 \quad (10.2)$$

boshlang'ich shartga (10.1) tenglamaning $[t_0, t_1]$, - oraliqda bo'lakli-silliq $x(t) = x(t, u, x^0)$, - yechimi mos keladi hamda bu yechim

$$x(t) = F(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t F(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, t \in [t_0, t_1] \quad (10.3)$$

Koshi formulasi (10.2) orqali ifodalanadi, bu yerda $F(t, \tau)$ (10.1) tenglamaga mos

$$\dot{x} = A(t)x \quad (10.4)$$

bir jinsli tenglama yechimlarining fundamental matrisasidan iborat, ya'ni $F(t, \tau) - n \times n$ - o'lchovli matrisa bo'lib, uning i - ustuni (10.4) tenglamaning $x(\tau) = e^i$ ($e^i - E$ birlik matrisaning i -ustuni) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $x^i(t, \tau)$ yechimidan iborat.

(10.3) formulaga ko'ra, $x(t) = x(t, u, x^0)$, trayektoriya ning $t = t_1$ vaqt momentiga mos nuqtasi

$$x(t_1) = F(t_1, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1, t)B(t)u(t)dt, \quad (10.5)$$

ko'rinishda bo'ladi. Barcha $u(t) \in U$ boshqarishlarga mos (10.5) ko'rinishdagi nuqtalarni qaraymiz. Ular R^n da qandaydir $Q(t_1)$ to'plamni hosil qiladi. Shu to'plamni (10.1), (10.2) boshqaruv sistemasining t_1 vaqt momentidagi *erishish to'plami* deb ataymiz. Demak, ta'rifga ko'ra,

$$Q(t_1) = \{x \in R^n : x = F(t_1, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1, t)B(t)u(t)dt, u(t) \in U\}$$

$Q(t_1)$ to'plam elementlarinig (10.5) ko'rinishda ifodalanishidan va V boshqarishlar to'plamining qavariq kompaktligidan, $Q(t_1)$ to'plamning ham chegaralangan qavariq to'plam ekanligi kelib chiqadi.

2. Chiziqli sistemaning regulyarligi va normalligi.

Endi $Q(t_1)$ to'plamning yopiqqligini ta'minlovchi shartni keltiramiz. Bu shart (10.1) sistemaning regulyarlik xossalari orqali ifodalanadi.

Avvalo V boshqarishlar to'plamining k -o'lchamli yoqi tushunchasini keltiramiz.

Agar $S \subset V$ qism to'plam V to'plamga o'tkazilgan, normallari chiziqli bog'lanmagan $m-k$ ta tayanch tekisliklar kesishmasiga tegishli bo'lsa, S to'plam V ning k -o'lchovli yoqi deyiladi. V to'plamning o'zini esa, m - o'lchovli yoqdan iborat deb hisoblaymiz.

Agar ixtiyoriy $c \in R^n, c \neq 0$ vektor va ixtiyoriy $[t_0, t_1]$ kesma uchun $c'F(t_1, t)B(t)$ funksiya V to'plamning har bir k - o'lchamli yoqiga $[t_0, t_1]$ oraliqning chekli son dan ko'p bo'lmagan nuqtalari yoki kesmalarida ortogonal bo'lsa, (10.1) sistema regulyarlik shartini qanoatlantiradi, deyiladi.

Quyidagi tasdiq o'rinli:

10.1-lemma [2]: Agar (10.1) sistema regulyarlik shartini qanoatlantirsa, $Q(t_1)$ - yopiq, chegaralangan, qavariq to'plam bo'ladi.

Chiziqli boshqaruv sistemalarini o'rganishda, ekstremal prinsip deb ataluvchi, quyidagi tasdiqdan keng foydalaniladi.

10.2-lemma. Faraz qilaylik, (10.1) sistema regulyarlik shartini qanoatlantirsin. U vaqtda har bir $c \in R^n, c \neq 0$ vektor $t_1 \geq t_0$ va son uchun $Q(t_1)$ to'plamning shunday $\bar{x}$ chegaraviy nuqtasi mavjud bo'ladiki, unda

$$c'\bar{x} = \max_{x \in Q(t_1)} c'x \quad (10.6)$$

munosabat bajariladi. (10.6) tenglikning o'rinli bo'lishi uchun, shunday $\bar{u}(t) \in U$ boshqarish topilib,

$$\bar{x} = F(t_1, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1, t)B(t)u(t)dt, \quad (10.7)$$

$$c'F(t_1, t)B(t)\bar{u}(t) = \max_{v \in V} c'F(t_1, t)B(t)v, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (10.8)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. 10.1-lemmaga ko'ra $Q(t_1)$ to'plam kompakt bo'lganligi uchun, Veyershtrass teoremasidan uzluksiz $f(x) = c'x$ funksiyaning $Q(t_1)$ da global maksimum nuqtasi $\bar{x}$ mavjudligi kelib chiqadi, ya'ni (10.6) tenglik bajariladi. Bu nuqta $\bar{x}$ to'plamning chegaraviy nuqtasi bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $\bar{x} \in \text{int } Q(t_1)$ deb faraz qilsak, yetarli kichik $\varepsilon > 0$ uchun $x + \varepsilon \in Q(t_1)$ bo'ladi va $c'(x + \varepsilon) = c'x + \varepsilon$, $\|c\|' > c'x$, ya'ni (10.6) ga zid munosabat bajariladi.

$Q(t_1)$ to'plamning aniqlanishiga ko'ra, $\bar{x}$ nuqta, biror $\bar{u}(t) \in U$ boshqarish yordamida, (10.7) formula bo'yicha hosil qilinadi. Endi (10.6) shartni $c'\bar{x} \geq c'x, \forall x \in Q(t_1)$ ko'rinishda yozib va bu yerga $\bar{x}$ nuqtaning (10.7) ifodasini va $x \in Q(t_1)$ nuqtaning Koshi formulasi orqali

$$x = F(t_1, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1, t)B(t)u(t)dt, u(t) \in U$$

ifodasini qo'ysak, quyidagi

$$\int_{t_0}^t [c'F(t_1, t)B(t)\bar{u}(t) - c'F(t_1, t)B(t)\bar{u}(t)]dt > 0 \quad (10.9)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu tengsizlik ixtiyoriy $\bar{u}(t) \in U$ boshqaruv uchun, jumladan,

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & t \notin (\theta - \varepsilon, \theta], \\ v, & t \in (\theta - \varepsilon, \theta], \end{cases} \quad (10.10)$$

ko'rinishdagi boshqarish uchun ham bajariladi, bu yerda $\theta \in (t_0, t_1]$, $v \in V$, $\varepsilon > 0$ -yetarli kichik ($t_0 < \theta - \varepsilon < t_1$). Agar (10.10) boshqarishni (10.2) ga qo'yib, uni $\varepsilon > 0$ ga bo'lsak va $\varepsilon \rightarrow 0$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta - \varepsilon}^{\theta} [c'F(t_1, t)B(t)\bar{u}(t) - c'F(t_1, t)B(t)v]dt = \\ = c'F(t_1, \theta)B(\theta)\bar{u}(\theta) - c'F(t_1, \theta)B(\theta)v \geq 0$$

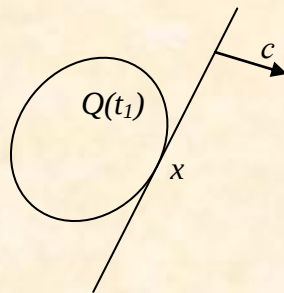
tengsizlikni hosil qilamiz. Bu esa, $v \in V$ vektorning ixtiyoriyligiga ko'ra,

$$c'F(t_1, \theta)B(\theta)\bar{u}(\theta) = \max_{v \in V} c'F(t_1, \theta)B(\theta)v \quad (10.11)$$

tenglikning bajarilishini ko'rsatadi. Shunday qilib, (10.8) tenglik barcha

$\theta \in (t_0, t_1]$, uchun bajarilishi ko'rsatildi. Agar $u(t)$ boshqarishning bo'lakli uzluksizligini hisobga olsak, uni $t=t_0$ nuqtada chapdan uzluksiz deb hisoblashimiz mumkin. Natijada, (10.11) da $\theta \rightarrow t_0$ da limitga o'tsak, uning $\theta = t_0$ nuqtada ham o'rinli ekanligini ko'ramiz. Shunday qilib, (10.8) tenglikning barcha $t \in [t_0, t_1]$, - uchun to'g'riligi ko'rsatildi. 10.2-lemma isbotlandi.

Keltirilgan ekstremal prinsip sodda geometrik ma'noga ega. Ekstremal prinsipga ko'ra, (10.8) shartni qanoatlantiruvchi boshqarishlar (ularni *ekstremal boshqarishlar* ham deb ataydilar) va faqat shu boshqarishlarga chiziqli sistema trayektoriyasini erishish to'plami chegaraviy nuqtasiga o'tkazadi. (10.8), (10.7) formulalar bo'yicha $u(t)$ boshqarishni va $\bar{x} \in Q(t_1)$ nuqtani hosil qiluvchi $c \neq 0$ vektor esa $Q(t_1)$ to'plamdagi $\bar{x}$ nuqtaga o'tkazilgan tayanch tekislikning normalidan iborat (10.1-chizma).



10.1-chizma

Yuqorida ta'kidlanganidek, chiziqli sistema uchun regulyarlik sharti erishish to'plamining yopiqqligini ta'minlaydi. Endi erishish to'plamining yopiqqligi bilan bir qatorda uning qat'iy qavariqligini ham ta'minlovchi yana bir shartni keltiramiz. U *normallik sharti* deyiladi.

(10.1) chiziqli sistema uchun normallik sharti, har bir $c \neq 0$ va $t_1 > t_0$ da (10.8) maksimum shartidan $u(t)$ bo'lakli-uzluksiz funksiyaning $[t_0, t_1]$ dagi barcha uzluksizlik nuqtalarida bir qiymatli aniqlanishini ifodalaydi.

Normallik sharti regulyarlik shartidan kuchliroq talabdir, chunki normallik shartiga ko'ra ixtiyoriy $c \neq 0$ va $t_1 > t_0$ uchun $c'F(t_1, t)B(t)$ funksiya V to'plamning yoqlariga $[t_0, t_1]$ oraliqning faqat alohida olingan nuqtalaridagina ortogonal bo'lishi mumkin, ya'ni $[t_0, t_1]$ ning qism intervallarida ortogonallik qaralmaydi.

10.3-lemma. Agar (10.1) chiziqli sistema normal bo'lsa va V boshqarishlar to'plami bittadan ko'p elementli bo'lsa, ixtiyoriy (10.2) boshlang'ich shart va $t_1 > t_0$ uchun $Q(t_1)$ erishish to'plami qat'iy qavariq bo'ladi.

10.3-lemmaning isbotini [2] dan qarash mumkin.

3. Chiziqli tezkor masala. Optimallikning zaruriy va yetarli shartlari.

(10.1) sistema uchun ikki nuqtali tezkor masalani qaraymiz: shunday

$u^*(t) \in U$ boshqarishni topish talab qilinadiki, unga mos $x^*(t)$ trayektoriya, t_0, t_1 vaqt momentlarida berilgan x^0, x^1 nuqtalardan o'tsin, ya'ni

$$x^*(t_0) = x^0, x^*(t_1) = x^1 \quad (x^0 \neq x^1)$$

shartlar bajarilsin va $t_1 - t_0$ o'tish vaqti minimal bo'lsin. Bunda $u^*(t)$ ga optimal boshqarish, $x^*(t)$ ga optimal trayektoriya, t_1^* ga optimal vaqt momenti (tezkor moment) deyiladi. $(u^*(t), x^*(t), t_1^*)$ esa masalaning yechimidir. Qaralayotgan masalani qisqacha,

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_0 &\rightarrow \min \\ \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) &= x^0, x(t_1) = x^1, \\ u(t) &\in u \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$\rho(t) = \min_{\|c\|=1} \left[c'F(t_1, t)x^0 + \int_{t_0}^t \max_{u \in V} c'F(t, \tau)B(\tau)u d\tau - c'x' \right], \quad t \geq t_0$$

Bu funksiya barcha $t_0 > t_1$ nuqtalarda uzluksizdir.

10.1-teorema. Faraz qilaylik, (10.1) sistema regulyarlik shartini qanoatlantirsin. $(u^*(t), x^*(t), t_1^*)$ - (10.12) masalaning yechimi bo'lsin. U vaqtda:

1) t_1^* optimal vaqt momenti

$$\min_{\|c\|=1} \left[c'F(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \max_{u \in V} c'F(t, \tau)B(\tau)u d\tau - c'x' \right] = 0 \quad (10.13)$$

tenglamaning minimal ildiziga teng;

2) $u^*(t)$ optimal boshqarish,

$$c'^* F(t_1^*, t_0)B(t)u^*(t) = \max_{u \in V} c'F(t_1^*, t_0)B(t)u, \quad t_0 \leq t \leq t_1^* \quad (10.14)$$

maksimum shartini qanoatlantiradi, bu yerda $c^* \in R^n$, $c^* \neq 0$ vektor $t = t_1^*$ bo'lganda (10.13) ning chap tomonidagi ifodaning ixtiyoriy minimum nuqtasidir;

3) $x^*(t)$ optimal trayektoriya

$$\dot{x}^* = A(t)x^* + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x^0 \quad (10.15)$$

munosabatlarni qanoatlantiradi.

Isboti.

1) $x^1 \in Q(t_1)$ munosabat $\rho(t_1) \geq 0$ ga teng kuchlidir. Shuning uchun t_1^* optimal vaqt momenti

$$t_1^* = \min\{t_1 : \rho(t_1) \geq 0, t_1 > t_0\},$$

ya'ni $\rho(t_1^*) \geq 0$ bajariladi. $\rho(t)$ funksiyaning uzluksizligidan va t_1^* ning optimalligidan $\rho(t_1^*) > 0$ bo'la olmasligi kelib chiqadi. Demak, $\rho(t_1^*) = 0$ va t_1^* -(10.13) tenglamaning eng kichik ildizidan iborat.

2) $u^*(t)$ optimal boshqarish bo'lgani uchun, Koshi formulasiga ko'ra,

$$x^1 = F(t_1^*, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1^*, t)B(t)u^*(t)dt, \quad (10.16)$$

bajariladi. Endi (10.13) tenglikda $t = t_1^*$ deb uni $c \in R^n, \|c\| = 1$ bo'yicha ixtiyoriy c^* minimum nuqtasi uchun yozamiz:

$$c^{*'} F(t_1^*, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} \max_{v \in V} c^{*'} F(t_1^*, t)B(t)u^*(t)dt - c^{*'} x^1 = 0,$$

Bu tenglikda x^1 o'rniga uning (10.16) dagi ifodasini keltirib qo'yib, quyidagi

$$\int_{t_0}^{t_1} [\max_{v \in V} c^{*'} F(t_1^*, t)B(t)u - c^{*'} F(t_1^*, t)B(t)u^*(t)]dt = 0,$$

tenglikni olamiz. Bu oxirgi tenglikda integral ostidagi funksiya manfiymas va t bo'yicha bo'lakli-uzluksiz bo'lgani uchun undan talab qilingan (10.14) munosabatni hosil qilamiz.

3) $x^*(t)$ optimal trayektoriya (10.15) munosabat orqali bir qiymatli aniqlanadi.

10.1-teorema isbotlandi.

10.2-teorema. Faraz qilaylik, (10.1) sistema normallik shartini qanoatlantirsin. Agar $u^*(t)$ boshqarish, $x^*(t)$ trayektoriya va t_1^* vaqt momenti 10.1-teoremadagi 1)-3) shartlarni qanoatlantirsa, $(u^*(t), x^*(t), t_1^*)$ -

(10.12) tez harakat masalasining yechimi bo'ladi.

Isboti. $\rho(t)$ funksiyaning ta'rifi va uning uzluksizligidan

$$t_1^* = \min\{t_1 : \rho(t_1) = 0, t_1 > t_0\},$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni (10.13) tenglamaning minimal ildizi optimal vaqt momentini aniqlaydi. $x^*(t)$ optimal trayektoriya (10.15) tenglik orqali bir qiymatli aniqlanganligi uchun, $u^*(t)$ boshqarishning optimalligini ko'rsatsak yetarli bo'ladi.

(10.13) tenglikda $t = t_1^*$ deb uni $c \in R^n, \|c\| = 1$ bo'yicha ixtiyoriy S^* minimum nuqtasi uchun yozamiz:

$$\begin{aligned} 0 = c^{*'} F(t_1^*, t_0) x^0 + \int_{t_0}^{t_1^*} \max_{v \in V} c^{*'} F(t_1^*, t) B(t) u dt - c^{*'} x^1 = c^{*'} F(t_1^*, t_0) x^0 + \\ + \int_{t_0}^{t_1^*} c^{*'} F(t_1^*, t) B(t) u^*(t) dt - c^{*'} x^1 = c^{*'} x^*(t_1) - c^{*'} x^1 \end{aligned} \quad (10.17)$$

Ekstremal prinsipga (10.2-lemma) va $u^*(t)$ boshqarish hamda $x^*(t)$ trayektoriyalarning aniqlanishiga ko'ra,

$$c^{*'} (x - x^*(t_1)) = 0 \quad (10.18)$$

tekislik $Q(t_1)$ erishish to'plamining $x^*(t_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan tayanch tekislik bo'ladi.

(10.17) tenglik ko'rsatadiki, x^1 nuqta (10.18) tayanch tekislikda yotadi. t_1^* -tezkor moment bo'lgani uchun $x^1 \in Q(t_1^*)$ bo'ladi. Agar $x^*(t_1^*) \neq x^1$

bo'lsa, $[x^1, x^*(t_1^*)]$ kesma $Q(t_1)$ ning chegarasiga tegishli bo'lar edi. Ammo 10.3-lemmaga ko'ra, $Q(t_1)$ qat'iy qavariq to'plam ekanligidan, bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, $x^*(t_1^*) = x^1$ ya'ni $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1^*]$ optimal boshqarish bo'ladi.

10.2-teorema isbotlandi.

Optimallikning zaruriy va yetarli shartlarini ifodalovchi 10.1- 10.2-teoremlarga qo'shimcha qilib shuni aytish mumkinki, normallik sharti bajarilganda optimal boshqarish (va demak, optimal trayektoriya ham) yagona bo'ladi. Bu tasdiq (10.14) maksimum shartidan osongina kelib chiqadi.

4. Tezkor masala uchun Pontryaginning maksimum prinsipi.

Optimal boshqaruv nazariyasida optimallikning zaruriy sharti Pontryaginning maksimum prinsipi ko'rinishida ifodalanadi. Quyida 10.1-teoremada keltirilgan zaruriy shartlarni maksimum prinsipi shaklida yozish mumkinligini ko'rsatamiz.

Quyidagi

$$\psi^*(t) = F(t_1^*, t)'c^* \quad (10.19)$$

funksiyani kiritamiz va (10.14) shartni

$$\psi^{*'}(t)B(t)u^*(t) = \max_{v \in V} \psi^{*'}(t)B(t)u, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (10.20)$$

ko'rinishda yozamiz. (10.19) funksiya

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \psi(t_1^*) = c^* \quad (10.21)$$

qo'shma sistemaning yechimidir. Agar

$$H(x, \psi, u, t) = \psi'[A(t)x + B(t)u]$$

Gamilton-Pontryagin funksiyaasidan foydalansak, $x^*(t)$ ning (10.15) ni, $u^*(t)$ ning (10.14) ni va $\psi^*(t)$ ning esa, (10.21) ni qanoatlantirishini

$$\dot{x}^*(t) = H_{\psi}(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) \quad (10.22)$$

$$\dot{\psi}^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) \quad (10.23)$$

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) = \max_{v \in V} H(x^*(t), \psi^*(t), v, t), \quad t \in [t_0, t_1^*] \quad (10.24)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar bu sistemani yana bitta

$$H(x^*(t_1^*), \psi^*(t_1^*), u^*(t_1^*), t_1^*) \geq 0 \quad (10.25)$$

munosabat bilan to'ldirsak, tezkor masala uchun quyidagi maksimum prinsipiga ega bo'lamiz.

10.3-teorema (maksimum prinsipi): Faraz qilaylik, (10.1) sistema uchun regulyarlik sharti bajarilsin. Agar $(u^*(t), x^*(t), t_1^*)$ (10.12) masalaning yechimi bo'lsa, shunday trivial (aynan nol) bo'lmagan $\psi^*(t)$ vektor funksiya topiladiki, (10.22)-(10.25) shartlar bajariladi.

5. Chiziqli stasionar tezkor masala. Optimal boshqarishning sintezi.

Quyidagi

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 \rightarrow \min, \quad \dot{x} &= Ax + Bu, x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1, \\ u &= u(t) \in V, t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (10.26)$$

tezkor masalani qaraymiz, bu yerda $A - n \times n$ -matrisa va $B - n \times m$ -matrisalar o'zgarmas, $V \subset R^m$ qavariq kompakt ko'pyoqlidan iborat.

10.4-lemma [2]: Agar V ko'pyoqlining istalgan qirrasiga parallel bo'lgan w vektor uchun

$$\text{rank}\{Bw, ABw, \dots, A^{n-1}Bw\} = n \quad (10.27)$$

bo'lsa, (10.26) sistema uchun normallik sharti bajariladi.

Yuqorida keltirilgan natijalar (10.26) statsionar tezkor masala uchun quyidagi teoremda aniqlashtiriladi.

10.4-teorema: Faraz qilaylik, (10.26) sistema uchun (10.27) shart bajarilsin. U vaqtda:

a) chiziqli statsionar tezkor masalaning $(u^*(t), x^*(t), t_1^*)$ yechimi uchun shunday $\psi^*(t)$ funksiya mavjud bo'ladiki,

$$\dot{x}^*(t) = H_{\psi}(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)), \dot{\psi}^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) \quad (10.28)$$

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in V} H(x^*(t), \psi^*(t), u), \quad t_0 \leq t \leq t_1^* \quad (10.29)$$

shartlar bajariladi va $u^*(t)$ boshqarish $[t_0, t_1^*]$ da bo'lakli o'zgarmas bo'lib, uning qiymatlari V ko'pyoqlining uchlaridan iborat (bu yerda $H(x, \psi, u) = \psi'[Ax + Bu]$).

b) agar V ko'pyoqlining u^1 ichki nuqtasi uchun $Ax^1 + Bu^1 = 0$ shart

bajarilsa va $u^*(t), x^*(t), \psi^*(t)$ funksiyalar (10.28), (10.29) shartlarni va $x^*(t_1) = x^1$ tenglikni qanoatlantirsa, $u^*(t)$ -optimal boshqarish, $x^*(t)$ -optimal trayektoriya. t_1^* - optimal vaqt momenti bo'ladi.

c) optimal boshqarish yagonadir.

Isboti. Teoremaning a) tasdig'i 10.3-teoremaning natijasidir. b) tasdiq esa 10.4-lemmani hisobga olgan holda normallik shartidan va (10.29) maksimum shartidan kelib chiqadi. b) tasdiqni (10.26) masalaning xususiy holi bo'lgan

$$t_1 \rightarrow \min, \dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x^0, x(t_1) = 0, |u| \leq 1 \quad (10.30)$$

masala uchun isbotlaymiz, bu yerda $A - n \times n$ matrisa, $B \in R^m$, u -skalyar boshqaruv parametri.

(10.30) sistema uchun (10.27) shart,

$$\text{rank}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n \quad (10.31)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Asosiy va qo'shma sistemalardan iborat,

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad \dot{\psi} = -A'(t)\psi$$

sistemani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $u(t), x(t), \psi(t)$, $t \geq 0$ funksiyalar uchun $u(t)$ ning uzluksizlik nuqtalarida quyidagi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi'(t)x(t) &= \dot{\psi}(t)x(t) + \psi'(t)\dot{x}(t) = -\psi'(t)Ax(t) + \psi'(t)Ax(t) + \\ &+ \psi'(t)bu(t) = \psi'(t)bu(t) \end{aligned}$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikni $[\sigma, \tau]$ oraliqda integrallab,

$$\psi'(\tau)x(\tau) - \psi'(\sigma)x(\sigma) = \int_{\sigma}^{\tau} \psi'(t)bu(t)dt \quad (10.32)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Faraz qilaylik, $u^*(t)$ -boshqarish va unga mos $x^*(t), \psi^*(t)$ funksiyalar $[0, t_1^*]$ oraliqda (10.28), (10.29) hamda $x^*(0) = x^0, x^*(t_1^*) = 0$ shartlarni qanoatlantirsin, ammo $u^*(t)$ optimal bo'lmasin. U holda, shunday $u^0(t), t \in [0, t^0]$ boshqarish mavjudki, unga mos $x^0(t)$ trayektoriya $x^0(0) = x^0, x^0(t_1^0) = 0$ shartlarni qanoatlantiradi va $t_1^0 < t_1^*$ tengsizlik bajariladi. (10.32) munosabatdan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \psi^{*'}(t_1^0)x^*(t_1^0) &= \left[\psi^{*'}(t_1^0)x^*(t_1^0) - \psi^{*'}(0)x^*(0) \right] - \left[\psi^{*'}(t_1^0)x^0(t_1^0) - \psi^{*'}(0)x^0(0) \right] = \\ &= \int_0^{t_1^0} \left[\psi^{*'}(t)bu^*(t) - \psi^{*'}(t)bu^0(t) \right] dt \end{aligned} \quad (10.33)$$

10.4-teoremaning shartiga ko'ra, $u^0(t), t \in [0, t^0]$ boshqarish maksimum prinsipini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\psi^{*'}(t)bu^*(t) \geq \psi^{*'}(t)bu^0(t), \quad t \in [0, t_1^*] \supset [0, t_1^0]$$

tengsizlik bajariladi. Shuning uchun, (10.33) dan $\psi^{*'}(t_1^0)x^*(t_1^0) \geq 0$ tengsizlik kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, maksimum shartiga ko'ra,

$$\psi^{*'}(t)bu^*(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi^{*'}(t)bu, t \in [0, t_1^*]$$

bo'lgani uchun, $u^*(t) = \text{sign} \psi^{*'}(t)b$ ko'rinishda bo'ladi. (10.31) shartdan $\psi^{*'}(t)b \neq 0, t \in [0, t_1^*]$, bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, $t_1^0 < t_1^*$ ekanligini hisobga olsak, (10.32) ga asosan,

$$\psi^{*'}(t_1^0)x^*(t_1^0) = \psi^{*'}(t_1^0)x^*(t_1^0) - \psi^{*'}(t_1^0)x^*(t_1^*) = -\int_{t_1^0}^{t_1^*} \psi^{*'}(t)bu^*(t)dt = -\int_{t_1^0}^{t_1^*} |\psi^{*'}(t)b| dt < 0$$

munosabat bajariladi. Olingan qarama-qarshilik, $u^*(t), t \in [0, t_1^*]$ boshqarishning optimalligini ko'rsatadi. 10.4-teorema isbotlandi.

Optimal boshqarishlarni qurishda quyidagi natija ham muhim ahamiyatga ega [2], [3].

10.5-teorema (n intervallar haqida) [2]: Faraz qilaylik, (10.25) statsionar tezkor masala uchun (10.27) shart bajarilsin, $V = \{v \in R^m : |v_i| \leq 1, i = \overline{1, m}\}$ va A matrisaning barcha xos qiymatlari haqiqiy bo'lsin. U vaqtda $u^*(t) = (u_1^*(t), \dots, u_m^*(t))$ ekstremal boshqarish har bir $u_i^*(t)$ koordinatasining o'zgarmaslik intervallari soni n tadan oshmaydi.

Misol. (10.30) masalada $n = 2, x^0 = (x_1^0, x_2^0), x^1 = (0, 0), A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

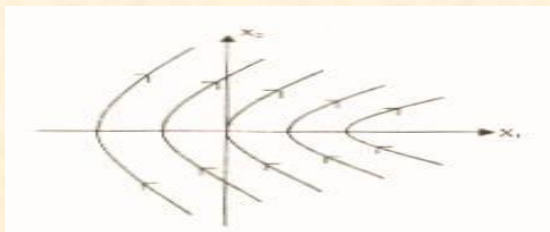
bo'lsin. Bu holda 10.5-teoremaning barcha shartlari bajarilgan bo'ladi, shuning uchun ekstremal boshqarish, $u = +1$ va $u = -1$ qiymatlar qabul qiladi

va o'tish nuqtasi bittadan ko'p emas, ya'ni o'zgarmaslik oraliqlari soni ikkitadan oshmaydi.

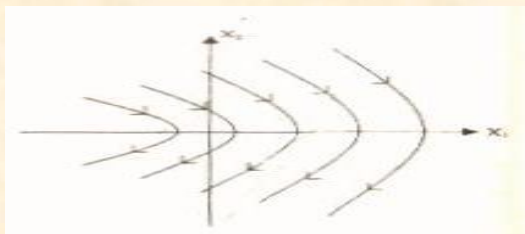
$u = \pm 1$ bo'lganda $x_2 = \pm 1$ nuqtaning harakat tenglamasi $----$ ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdan

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \pm x_2, x_1 = \pm \frac{x_2^2}{2} + const \quad (10.34)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ularga mos harakat trayektoriyalari 10.2 - 10.3-chizmalarda keltirilgan.

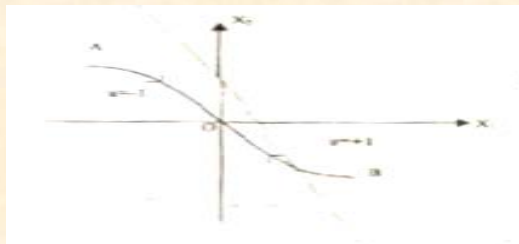


10.2-chizma

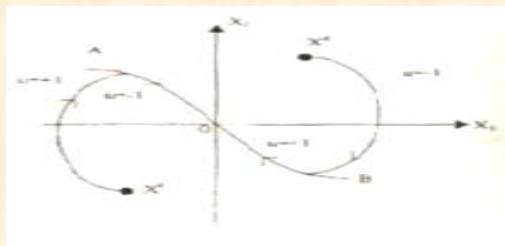


10.3-chizma

Koordinatalar boshiga kelib tushuvchi AO, OV trayektoriyalarni ajratamiz (10.4 - 10.5-chizmalar).



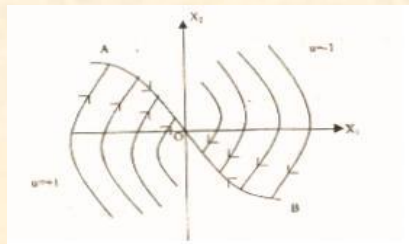
10.4-chizma



10.5-chizma

Agar boshlang'ich x^0 nuqta AO yoki OV yoy ustida yotsa, maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi jarayon topilgan hisoblanadi. Aks holda (10.34) trayektoriyalar ichidan AO yoki OV orqali o'tadiganini aniqlaymiz.

Natijada koordinata boshiga olib keluvchi va faza tekisligini to'ldiruvchi egri chiziqlar oilasini quramiz (10.6-chizma).



10.6-chizma

Bu chiziqlar oilasiga tegishli har bir egri chiziq (10.34) parabolalarning ikki bo'lagidan iborat bo'lib, ular maksimum prinsipini qanoatlantiradi. 10.4-teoremaga ko'ra, bu trayektoriyalar optimaldir. Koordinata boshiga yo'nalgan optimal harakat quyidagicha amalga oshadi:

$$u = \begin{cases} -1, & \text{agar } x^0 \text{ бошлангичнукта } AOB \text{ чизикдан юкорида ёки } AO \text{ ёй устида ётса;} \\ +1, & \text{агар } x^0 \text{ бошлангичнукта } AOB \text{ чизикдан куйида ёки } OB \text{ ёй устида ётса.} \end{cases} \quad (10.35)$$

Boshqarishga (10.35) formula bo'yicha beriladigan qiymatlar $x = (x_1, x_2)$ nuqta AOV chiziqqa (yoki koordinitalar boshiga) tushguncha saqlab qolinadi. $x = (x_1, x_2)$ nuqta AOV chiziqqa tushgan vaqt momentida boshqarishning qiymatini -1 dan $+1$ ga yoki aksincha o'zgartirib, x nuqta koordinata boshiga tushguncha saqlab qolinadi. Boshqaruvning qiymatlari

o'zgaradigan AOV chiziq, *o'tish chizig'i* deb ataladi.

Endi $v(x^0)$ deb, (10.35) formula bilan aniqlanuvchi funksiyani belgilaymiz. U vaqtda optimal boshqarish $u = v(x^0)$ qoida bo'yicha hosil qilinadi. x^0 nuqta ixtiyoriy bo'lgani uchun, bu qoida optimal boshqarishni barcha $x = (x_1, x_2)$ nuqtalarda $u = v(x)$ formula bo'yicha quradi. Ana shunday qoida bo'yicha optimal boshqarishni qurishga uning *optimal sintezi* deyiladi. Demak, (10.35) formula qaralayotgan misolda optimal boshqarishning sintezini beradi. Optimal trayektoriya esa

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v(x)$$

sistemani integrallash orqali quriladi.

10-ma'ruza bo'yicha savollar

1. Chiziqli boshqarish sistemasi erishish to'plamining xossalari (qavariqlik, kompaktlik, ekstremal prinsip).
2. Chiziqli boshqarish sistemasi uchun regulyarlik va normallik shartlari. Bu shartlar erishish to'plamining qanday xossalarini ta'minlaydi?
3. Chiziqli tez harakat masalasi uchun optimallikning zaruriy va yetarli shartlari. Pontryaginning maksimum prinsipi.
4. Chiziqli stasionar tez harakat masalasida optimallik shartlari va ulardan foydalanib optimal boshqaruvni qurish. Optimal boshqaruvning sintezi.

11-ma'ruza

Dinamik programmalashtirish usuli va uning tadbirlari

Reja:

1. Dinamik programmalashtirish usuli (resurslarni taqsimlash masalasi)
2. Terminal boshqarish masalasini dinamik programmalashtirish usuli yordamida yechish.

11.1. Dinamik programmalashtirish usuli (resurslarni taqsimlash masalasi)

Dinamik programmalashtirish deb, matematik modellari ko'p bosqichli va dinamik jarayonli xarakterga ega bo'lgan chiziqli bo'lmagan programmalash-tirishning maxsus masalalari va optimal boshqaruv masalalarini yechishning hisoblash usuliga aytiladi. Bu usul jarayonlarning ketma-ket tahliliga asoslangan bo'lib, ekstremal masalalarni yechishda amerikalik olim R. Bellman tomonidan XX asrning 50-yillaridan boshlab dastlab sistematik va prinsipial keng qo'llanila boshlandi. Mazkur bobda bu usulning asosiy qoidalari chiziqli bo'lmagan programmalashtirishning qator maxsus masalalari uchun bayon qilinadi. Dinamik programmalashtirishning optiml boshqaruv masalalariga ba'zi tadbirlari haqida ham so'z yuritimiz.

Resurslarni taqsimlash masalasi. Aytaylik, c hajmli xomashyo va n ta texnologik jarayon mavjud bo'lsin. Agar xomashyoning x miqdorini i – texnologik jarayonda sarflansa, $f_i(x_i)$ foyda olinadi. Maksimal foyda olish uchun xom ashyoni jarayonlar o'rtasida qanday taqsimlash kerak?

Faraz qilaylik, x_i – i -jarayon uchun ajratilgan xomashyo miqdori bo'lsin. U holda qo'yilgan *resurslarni taqsimlash masalasining* matematik modeli

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = c, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (11.1)$$

ko'rinishni oladi.

(11.1) chiziqli bo'lmagan programmashtirish masalasining o'ziga xosligi shundan iboratki, uning maqsad funksiyasi $f(x)$ va asosiy bog'lanish funksiyasi $g(x)$ *separabeldir*, ya'ni ular bir o'zgaruvchili funksiyalar yig'indisi shaklida ifodalangan.

Ekstremal masalani dinamik programmashtirish usuli bilan yechishning birinchi bosqichi — berilgan masalani unga o'xshash masalalar oilasiga *invariant turkumlashdan* iboratdir. Bu bosqich ma'lum ma'noda san'at bo'lib, har bir muayyan holda tadqiqotchining tajribasi, sezgisi va mahoratiga bog'liqdir. U (11.1) masala uchun ixtiyoriy k , $1 \leq k \leq n$ sondagi texnologik jarayonlarga va y , $0 \leq y \leq c$ xomashyo g'amlamasiga ega bo'lgan resurslarni taqsimlashning ushbu

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k} \quad (11.2)$$

masalalarini qarashdan iboratdir. $k = n$, $y = c$ bo`lganda (11.2) masalalar oilasidan boshlang`ich (11.1) masala olinadi.

(11.2) masalalar oilasidan olingan ixtiyoriy masala maqsad funksiyasining optimal qiymati $B_k(y)$ *Bellman funksiyasi* deyiladi:

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^k f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k} \quad (11.3)$$

Masalani dinamik programmashtirish usuli bilan yechishning ikkinchi bosqichi — Bellman funksiyasi uchun tenglamani olishdan iboratdir. Bu bosqichda *Bellmannning optimallik prinsipi* umumiy holda qo`llaniladi. (11.1) masala uchun uning mohiyati quyida keltiriladigan mulohazalar orqali beriladi. Bu mulohazalar oddiy matematik faktlarga asoslangan va yetarlicha universalidir. Izlanayotgan tenglamani tuzishda invariant turkumlashning to`g`riligi namoyon bo`ladi. Ikkinchi tomondan, turkumlash usuli tenglamaning ko`rinishida ham seziladi,  $k$  jarayonli va  $y$  xomashyo g`amlamasiga ega bo`lgan (11.2) masalada  $k$  -jarayonga  $z$ ,  $0 \leq z \leq y$  miqdordagi xomashyo ajratamiz. Bunda  $k$ -jarayondan olinadigan foyda  $f_k(z)$  ga teng bo`ladi. 1,2,..., $k-1$ nomerli jarayonlar uchun esa, $y-z$ miqdordagi xomashyo qoladi. Aytaylik, bu xomashyo qolgan jarayonlarga optimal taqsimlangan bo`lsin. (11.3) ning aniqlanishiga ko`ra,

$k-1$ ta jarayondan keladigan foydaning maksimal miqdori $B_{k-1}(y-z)$ ga teng bo`ladi. Shunday qilib,  $k$  jarayonga  $z$  miqdorda xomashyo ajratilganda barcha  $k$  jarayonlar va  $y$  xomashyo g`amlamasidan

$$f_k(z) + B_{k-1}(y-z) \quad (11.4)$$

foyda olamiz.

z miqdorni $0 \leq z \leq y$ chegarasida o`zgartirib, (11.4) umumiy foyda maksimal bo`ladigan $x_k^0(y)$ (k -jarayon uchun xomashyoning optimal miqdori) qiymatni topamiz:

$$f_k(x_k^0(y)) + B_{k-1}(y - x_k^0(y)) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)] \quad (11.5)$$

Ikkinchi tomondan, (11.3) ga asosan, xomashyo miqdori y bo`lganda  $k$  ta jarayondan olinadigan maksimal foyda  $B_k(y)$  ga tengdir. Bu qiymatni (11.5) ifodaning o`ng tomoniga tenglashtirib, $B_k(y)$ funksiya uchun

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)], \quad k = \overline{1, n}, \quad 0 \leq y \leq c \quad (11.6)$$

tenglamani olamiz. Bu *Bellman tenglamasi* deb ataladi. (11.6) tenglama $B_k(y)$ funksiyaning k argumentiga nisbatan rekurrent bo`lganligidan uni yechish uchun boshlang`ich shart berilishi kerak. Uni (11.3) dan $k=1$ bo`lganda topish mumkin:

$$B_1(y) = \max_{x_1} f_1(x_1), \quad x_1 = y, \quad x_1 \geq 0 \quad (11.7)$$

Shunday qilib, (11.6) Bellman tenglamasi uchun boshlang'ich shart

$$B_1(y) = f_1(y)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Masalani dinamik programmalash usuli bilan yechishning uchinchi (va oxirgi) bosqichi Bellman tenglamasining yechimini izlashdan va u bo'yicha (11.1) masalaning yechimini qurishdan iboratdir. (11.6) tenglamada $k = 2$ deb olamiz:

$$B_2(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_2(z) + B_1(y - z)] \quad (11.8)$$

Bu ifodani o'ng tomonida berilgan $f_2(z)$ funksiya va (11.7) dan topilgan $B_1(y)$ funksiya bor. Shuning uchun (11.8) formula ma'lum bir o'zgaruvchili funksiyaning maksimalashtirish bilan $B_2(y)$ funksiyaning hisoblash imkonini beradi. So'ngra (11.6) da $k = 3, 4, \dots, n$ deb olib, har bir holda bir o'zgaruvchili funksiyaning maksimalashtirish amali bajarib, ketma-ket $B_3(y), B_4(y), \dots, B_n(y)$ funksiyalarni olamiz.

(11.3) ga asosan, $B_n(c)$ son (11.1) boshlang'ich masala uchun maksimal foydadan iboratdir. Xomashyoning texnologik jarayonlar bo'yicha optimal taqsimotini topish uchun (11.5) ifodaga murojaat qilamiz. Unda $k = n$, $y = c$ deb olib, (11.5) ning aniqlanishi bo'yicha agar barcha n ta

jarayon uchun xomashyo miqdori c ga teng bo'lsa, oxirgi jarayonga (bu holda n -jarayonga) ajratilgan xomashyoning optimal miqdoriga teng bo'lgan $x_n^0(c)$ sonni olamiz. Shunday qilib, boshlang'ich masala $x^0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ optimal rejasining x_n^0 komponentasi topildi: $x_n^0 = x_n^0(c)$

Agar n -jarayon uchun x_n^0 miqdor ajratilsa, u holda qolgan $n-1$ ta jarayon uchun $c - x_n^0$ miqdordagi xomashyo qoladi. (11.5) da $k = n-1$, $y = c - x_n^0$ deb olamiz va $x_{n-1}^0(c - x_n^0)$ ni topamiz. Ravshanki, (11.1) masala x^0 optimal rejasining oxirgidan oldingi komponentasi $x_{n-1}^0 = x_{n-1}^0(c - x_n^0)$ ga tengdir. Yechish jarayonini davom ettirib, (11.1) boshlang'ich masala yechimining $x_{n-2}^0, \dots, x_1^0$ komponentalarini topamiz.

Natijani tahlil qilamiz. Usulning afzalliklari:

- 1) boshlang'ich n ta o'zgaruvchi bo'yicha (11.1) maksimallashtirish masalasi bitta o'zgaruvchi bo'yicha $n-1$ ta (11.6) maksimallashtirish masalasiga keltirildi, hamda natija — global optimal rejadan iborat bo'ldi;
- 2) yechish jarayonida masala elementlarining analitik xossalaridan foydalanilmadi; berilgan funksiyalar jadval, grafik, algoritmik va h.k. ko'rinishda berilishi mumkin edi;
- 3) $B_k(y)$ larni hisoblash natijalari bo'yicha c va n ning qiymatlarini variatsiyalab, (11.1) masalaning yechimini oson qurish mumkin; bu (11.1) masala yechimining ko'rsatilgan parametrlarning o'zgarishiga sezgirligini tahlil qilish imkonini beradi.

Usulning asosiy kamchiligi Bellman tomonidan «o`lchovning qarg`ishi» deb atalgan bo`lib, u shundan iboratki, (11.6) Bellman tenglamasini yechishda funksiyalarni esda saqlashga to`g`ri keladi. Berilgan bitta xomashyoni taqsimlash masalasida ular bir o`zgaruvchili funksiyalardan iborat. Umumiy holda esa, argumentlarning soni xomashyoning xillari soniga teng bo`ladi. EHM da ko`p o`zgaruvchili funksiyalar ( $n > 2$ ) jadvallarini tuzish, operativ xotira imkoniyatining chegaralanganligidan prinsipial qiyinchiliklarga olib keladi, shuning uchun bu usulning muhokama qilinayotgan shu kamchiligi ko`p o`lchovli ( $c$ -vektor) masalalarni yechishda dinamik programmashtirishning yuqorida bayon qilingan klassik tarzini amalga oshirish imkonini bermaydi. «O`lchov qarg`ishi» ni bartaraf etishning turli usullari tavsiya qilingan.

Misol. (11.1) masalaga oid sonli misol qaraymiz, uning kattaliklari 1- jadvalda berilgan.

Bellman funksiyasini hisoblashni 2-jadvalda bajaramiz. Har bir katakda Bellman funksiyasining qiymati bilan bir qatorda, qavs ichida (11.6) tenglamaning o`ng tomoni maksimumga erishadigan  $x_k^0(y)$  qiymat ham ko`rsatilgan. 2-jadvaldan ko`rinadiki, qaralayotgan masalada maksimal foyda  $B_3(5) = 7$  bo`ladi. Resurslarni optimal taqsimlashni topamiz. $x_3^0(5) = 0$ bo`lganligidan, uchinchi texnologik jarayonga resurs ajratmaymiz:  $x_3^0 = 0$ . Shunday qilib, 1-,2-jarayonlarga to`liq 5 hajmdagi

resurs qoladi. 2-jadvaldan $x_2^0(5) = 5$ ekanliginn topamiz. Demak, maksimal foyda olish uchun hamma resursni ikkinchi texnologik jarayonga ajratish kerak ($x_2^0 = 5$). Shuning uchun $x_0^1 = 0$.

Masalada bitta shartni o'zgartiramiz. $c = 4$ deb olamiz. 2- jadvalga asosan bu holda maksimal foyda $B_3(4) = 5$ bo'ladi, hamda $x_3^0 = 1$ So'ngra $B_2(3)$ bo'yicha 2-jadvaldan $x_2^0 = 0$ ni olamiz. Demak, $x_0^1 = 3$. Shunday qilib, 5-chizmadagi oqim qiymati 3 ga teng bo'lgan maksimal oqimdir.

11.2. Terminal boshqaruv masalasini dinamik programmalshtirish usuli bilan yechish.

Terminal boshqaruvning eng sodda masalasi quyidagi ko'rinishda qo'yilgan edi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), x(t_0) = x_0, u(t) \in U, t \in T = [t_0, t_1], \\ I(u) &= \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Bu masalani skalar τ va n vektor x parametriga bog'liq bo'lgan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), x(\tau) = x, u(t) \in U, t \in T_\tau = [\tau, t_1], \\ I(u) &= \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (11.10)$$

masalalar oilasiga turkumlaymiz.

Oilaning umumiy masalasida sifat kriteriysi $I(u)$ ning minimal

qiymatini $B(x, \tau)$ deb belgilaymiz (Bellman funksiyasi). $[\tau, \tau + \Delta\tau]$, $\Delta\tau > 0$ kesmada Bellman tenglamasini olish uchun $u(t) = v(t), t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ boshqarishni tanlaymiz. Bu boshqarish ta'siri ostida (11.6) sistema $x(\tau) = x$ holatdan

$$x(\tau + \Delta\tau) = x(\tau) + \Delta\tau f(x(\tau), v(\tau), \tau) + o(\Delta\tau) \quad (11.11)$$

holatga o'tadi. Aytaylik, (11.6) sistema $t = \tau + \Delta\tau$ momentdan boshlab, $x(\tau + \Delta\tau)$ holatdan $u(t) = u(t | x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau, t \in [\tau + \Delta\tau, t_1])$ boshqarish yordamida optimal boshqarilsin. Bunda, Bellman funksiyasining aniqlanishiga asosan, sifat kriteriysi $B(x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$ qiymatga erishadi. Shunday qilib, $u(t) = v(t), t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$, $u(t) = u(t | x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau, t \in [\tau + \Delta\tau, t_1])$, boshqarishda sifat kriteriysi

$$B(x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) \leq B(x, \tau) \quad (11.12)$$

qiymatga erishadi.

Agar $v(t), t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ sifatida (11.10) masalada $u(t | x, \tau)$ optimal boshqarishning qismini olsak, ravshanki,

$$B(x^0(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) \leq B(x, \tau) \quad (11.13)$$

bo'ladi. Aytaylik, $B(\tau, x) \in C^{(1)}$ bo'lsin. U holda (11.12), (11.13) dan

$$\begin{aligned} B(x, \tau) + \frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, v(\tau), \tau) \Delta\tau + o(\tau) &\leq B(x, \tau), \\ B(x, \tau) + \frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, u^0(\tau), \tau) \Delta\tau + o(\tau) &= B(x, \tau), \end{aligned} \quad (11.14)$$

ekanligini olamiz.

$B(x, \tau)$ ga qisqartirib, so'ngra (11.14) ning ikkala tomonini $\Delta\tau$ ga bo'lib, $\Delta\tau \rightarrow 0$ dan keyin minimallashtirish amali bilan murakkablashgan, xususiyl hosilali differensial tenglamadan iborat, ushbu Bellman tenglamasiga kelamiz:

$$-\frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} = \min_{v \in U} \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, v, \tau). \quad (11.15)$$

(11.15) tenglama uchun, Bellman funksiyasining aniqlanishidan, quyidagi

$$B(x, t_1) = \varphi(x) \quad (11.16)$$

chegaraviy shartni olamiz.

Pontryaginning maksimum prinsipi va Bellman tenglamasi orasida uzviy bog'lanish mavjud: agar $u^0(t), x^0(t), \varphi^0(t), t \in T$, mos ravishda, optimal boshqarish va boshlang'ich hamda qo'shma sistemalarning unga mos yechimlari bo'lib, $B(x, t) \in C^{(2)}$ esa (11.15), (11.16) Bellman tenglamasining yechimi bo'lsa,

$$\psi^0(t) = -\frac{\partial B(x^0(t), t)}{\partial x}, t \in T \quad (11.17)$$

bo'ladi. Haqiqatan, (11.15) dan

$$\frac{\partial B'(x^0(t), t)}{\partial x} f(x^0(t), u^0(t), t) \equiv - \frac{\partial B(x^0(t), t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B'(x, t)}{\partial x} f(x^0, u(t), t) \geq - \frac{\partial B(x, t)}{\partial x}, x = x^0(t)$$

kelib chiqadi. Ya'ni $f'(x, u^0(t), t) \partial B(x, t) / \partial x + \partial B(x, t) / \partial t$ funksiya har bir $t \in T$ momentda x argument bo'yicha $x = x^0(t)$ nuqtada maksimumga erishadi. Uning uchun statsionarlik shartini yozamiz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x^2} f(x^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial B'(x^0(t), t)}{\partial x} \times \\ & \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x \partial t} = 0. \end{aligned} \quad (11.18)$$

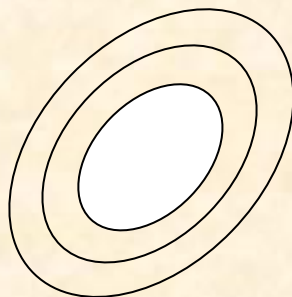
Ikkinchi tomondan, $x^0(t), u^0(t), t \in T$ bo'ylab

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial B(x^0(t), t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x^2} f(x^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x \partial t} = 0. \quad (11.19)$$

ga egamiz. (11.18) ni (11.19) bilan taqqoslab, $\partial B(x^0(t), t) / \partial x$ funksiya qo'shma (11.11) sistemani qanoatlantiradi, degan xulosaga kelamiz. Lekin (11.16) ga muvofiq, $\partial B(x^0(t_1), t_1) / \partial x = \partial \varphi(x^0(t_1)) / \partial x$ tenglik o'rinli, u holda (11.11) sistema yechimining yagonaligiga asosan (11.17) formula bajariladi.

(11.17) formula maksimum prinsipini ko'rgazmali geometrik talqin qilish imkonini beradi. $u^0(t)$ optimal boshqarish har bir t momentda

sistemaga Bellman funksiyasi $B(x,t)$ ning $x^0(t)$ nuqtadagi antigradiyenti $\psi^0(t)$ yo`nalishida maksimal proyeksiyaga ega bo`lgan $f(x^0(t), u^0(t), t)$ tezlik beradi (11.1-chizma).



11.1-chizma.

Optimallikning yetarlilik sharti. Oldingi bandda (11.15) tenglamadan Pontryaginning maksimum prinsipi ancha kuchli talablarda olindi. Hozirgi ishlarda (11.15) tenglamadan, odatda, optimallikning zaruriylik shartlarini emas, balki yetarlilik shartlarini ifodalash uchun foydalaniladi.

11.1-teorema. Aytaylik, $B(x,t)$ -(11.15) Bellman tenglamasining

$$B(x, t_1) = \varphi(x) + \lambda' g(x) (\lambda \geq 0) \quad (11.20)$$

chegaraviy shartli silliq yechimi $u(x,t)$ quyidagi

$$\frac{\partial B'(x,t)}{\partial x} f(x, y(x,t), t) = \min_{u \in U} \frac{\partial B'(x,t)}{\partial x} f(x, u, t) \quad (11.21)$$

shartni qanoatlantiruvchi boshqarish qonuni bo'lsin.

Agar

$$\dot{x} = f(x, u(x,t), t), x(t_0) = x_0$$

tenglama shunday $x(t), t \in T$ yechimga ega bo'lsaki, u yechim bo'ylab $u(t) = u(x(t), t)$ bo'lakli-uzluksiz va

$$g(x(t_1)) \leq 0, \lambda' g(x(t_1)) = 0 \quad (11.22)$$

bo'lsa, $u(t), t \in T$ boshqarish

$$\begin{aligned} I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \dot{x} &= f(x, u, t), \\ x(t_0) &= x_0, u(t) \in U, t \in T, g(x(t_1)) \leq 0 \end{aligned} \quad (11.23)$$

masalada optimal bo'ladi.

Isboti. $u(t), x(t), t \in T$, mos ravishda, (11.23) masalaning bog'lanishlarini qanoatlantiradigan boshqa joiz boshqarish va unga mos trayektoriya bo'lsin. (11.15), (11.21) dan

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B(x(t), t)}{\partial t} &= \frac{\partial B'(x(t), t)}{\partial x} f(x(t), u(t), t), \\ -\frac{\partial B(x(t), t)}{\partial t} &\leq \frac{\partial B'(x(t), t)}{\partial x} f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \end{aligned}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Bu munosabatlar vaqt bo'yicha to'liq hosila atamalarida

$$\frac{d}{dt} B(x, t) \Big|_{u(t)} = 0, \frac{d}{dt} B(x, t) \Big|_{\bar{u}(t)} \geq 0, \quad (11.24)$$

ko`rinishni oladi. (11.24) ni $u(t), \bar{u}(t)$ bo'ylab integrallaymiz va (11.20) chegaraviy shartdan foydalanamiz:

$$B(x(t_1), t_1) - B(x(t_0), t_0) = \varphi(x(t_1)) + \lambda' g(x(t_1)) - B(x_0, t_0) = 0,$$

$$B(\bar{x}(t_1), t_1) - B(\bar{x}(t_0), t_0) = \varphi(\bar{x}(t_1)) + \lambda' g(\bar{x}(t_1)) - B(x_0, t_0) = 0$$

Bu yerdan (11.22) ni hisobga olsak,

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \leq \varphi(\bar{x}(t_1)) + \lambda' g(\bar{x}(t_1)) \leq \varphi(\bar{x}(t_1)) = I(\bar{u}),$$

ya'ni, $u(t), t \in T$ - optimal boshqarish ekan. 11.1-teorema isbotlandi.

12-ma'ruza

Differensial o`yinlar nazariyasining elementlari

Reja:

1. Differensial o`yinlar haqida tushuncha.
2. Chiziqli differensial o`yinlar. Masalaning qo`yilishi.
3. Qavariq to`plamlar nazariyasidan ba'zi ma'lumotlar.
4. Differensial o`yinni yechish.

12.1. Differensial o`yinlar haqida tushuncha.

Manfaatlari o`zaro ustma-ust tushmaydigan tomonlar ishtirok etadigan konfliktli (ixtilofli, nizoli) ziddiyatli holatlarning matematik modeli **o`yin** deb ataladi. Agar o`yinni tavsiflashda differensial tenglamalardan foydalanilsa, u **differensial o`yin** deb ataladi. Differensial o`yinlarning keng tarqalgan modellari optimal boshqaruvning turli maqsadni ko`zlagan kishilar tomonidan tanlanishi mumkin bo`lgan boshqarishning ikki yoki bir necha guruhini o`z ichiga olgan mos modellarining umumlashmasidan iborat.

Differensial o`yinlar nazariyasining asosiy mohiyatini ochib berish maqsadida, biz, sodda masalalardan biri bo`lgan chiziqli differensial o`yinlarni qarab chiqamiz.

12.2. Chiziqli differensial o`yinlar. Masalaning qo`yilishi.

Ushbu

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \quad (12.1)$$

tenglama bilan ifodalangan jarayonga ta'sir ko'rsatuvchi P_1 va P_2 o'yinchilar o'yinning ishtirokchilari bo'lsin (bu yerda A, B, C mos ravishda $(n \times n), (n \times r), (n \times s)$ - matrisalar). P_1 va P_2 o'yinchilarning ixtiyorida, mos ravishda, u va v boshqarishlar bo'lib, o'yinchilar har bir vaqt momentida o'z boshqarishini tanlashda

$$u \in U, \quad v \in V \quad (12.2)$$

Bog'lanishlarga itoat qilishadi, bu yerda U va V lar, mos ravishda, R_r va R_s fazolarning qavariq kompakt qism to'plamlaridir. $u = u(t)$ va $v = v(t)$ funksiyalar t vaqtning funksiyasi sifatida o'lchovlidir.

Bundan tashqari, qavariq yopiq M to'plam - ***o'yinning terminal to'plami*** berilgan.

O'yin shundan iboratki, P_1 o'yinchi x faza nuqtasini M terminal to'plamga keltirishga harakat qiladi, bunda ayni paygda P_2 o'yinchi x nuqtaning M ga tushishiga to'sqinlik qiladi. x nuqta M ga tushgandan boshlab o'yin tugagan, deb hisoblanadi.

P_1 va P_2 o'yinchilarning ***joiz strategiyalari*** sifatida mohiyati quyidagidan iborat ε -strategiyalarni qaraymiz. Boshlang'ich $t = 0$ momentda P_2 o'yinchi P_1 raqibiga o'zining nol bo'lmagan $\varepsilon_1 > 0$ vaqt oralig'idagi boshqarishini bildiradi, bunda $\varepsilon_1 > 0$ miqdorni P_2 o'yinchi o'z

ixtiyori bilan tanlashi mumkin. Shu ma'lumot bo'yicha P_1 o'yinchi ko'rsatilgan vaqt oralig'ida o'z boshqarishini quradi. $\varepsilon_1 > 0$ vaqt o'tgandan keyin P_2 o'yinchi yana $\varepsilon_2 > 0$ vaqt oralig'ini va o'z boshqarishini bildiradi va hakoza.

Agar P_2 o'yinchining har bir ε -strategiyasiga P_1 o'yinchi o'zining shunday ε -strategiyasini qarama-qarshi qo'ysaki, (12.1) sistemaning bu boshqarishlarga mos trayektoriyasi T dan kech bo'lmagan vaqtda M to'plamga tushsa, x_0 nuqtadan boshlangan o'yin, T vaqtda tamomlanishi mumkin, deyiladi.

12.3. Qavariq to'plamlar nazariyasidan ba'zi ma'lumotlar.

To'plamlarning geometrik ayirmasi. Mazkur bandda differensial o'yinlarni qarashda qo'llaniladigan qavariq to'plamlar bilan bog'liq bir necha qurilmalar bayon qilinadi.

Aytaylik, A va B R_n fazoning ikkita qavariq qism to'plamlari bo'lsin. $A-B$ **geometrik ayirma** deb, shunday $z \in R_n$ nuqtalar to'plamiga aytiladiki, ular uchun $z+B \subset A$ bo'ladi, ya'ni

$$A-B = \{z \in R_n : z+B \subset A\} \quad (12.3)$$

Ta'rifdan $(A-B)+B \subset A$ ekanligi kelib chiqadi, bu yerda $A-B$ -shartni qanoatlantiruvchi maksimal to'plamdir, ya'ni $D+B \subset A$ munosabatdan

$D \subset A - B$ ekanligi kelib chiqadi.

Geometrik ayirmaning xossalari:

a) A va B qavariq to'plamlarning $A - B$ geometrik ayirmasi qavariq bo'ladi.

Isboti. $z_1, z_2 \in A - B$ va $0 \leq \alpha \leq 1$ haqiqiy son bo'lsin. $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2$ nuqtani qaraymiz. $\alpha B + (1 - \alpha)B = B$ bo'lganligidan,

$$\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 + B = \alpha(z_1 + B) + (1 - \alpha)(z_2 + B) \subset \alpha A + (1 - \alpha)A = A$$

bu esa $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in A - B$ ekanligini bildiradi.

b) A, B, A_1, B_1 qavariq to'plamlar bo'lib, $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ bo'lsin. U holda

$$A - B \subset A - B_1, \quad (12.4)$$

$$A_1 - B \subset A - B. \quad (12.5)$$

(12.4) mansublikni isbotlaymiz. Ta'rifga ko'ra, $A - B + B \subset A$ ga ega bo'lamiz. $B_1 \subset B$ bo'lganligidan, $A - B + B_1 \subset A$ va demak $(A - B) \subset A - B_1$.

(12.5) mansublik shunga o'xshash isbotlanadi.

c) Aytaylik, A, B lar R_n da qavariq qism to'plamlar bo'lib, A — yopiq bo'lsin. U holda $A - B$ yopiq to'plam bo'ladi.

Isboti. $A - B$ dan ixtiyoriy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikni qaraymiz va

$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ bo'lsin. Ixtiyoriy n va $b \in B$ element uchun, $z_n + b \in A$ bo'lganligidan, A ning yopiqqligiga asosan, B dan olingan ixtiyoriy b uchun $z_0 + b \in A$ bo'ladi, ya'ni $z_0 \in A - B$. Demak, $A - B$ to'plam yopiqdir.

d) Aytaylik, A va B lar R_n dan olingan yopiq qavariq qism to'plamlar bo'lib, B kompakt bo'lsin. U holda

$$\delta^*(\lambda, A - B) \leq \delta^*(\lambda, A, b) - \delta^*(\lambda, B), \quad \lambda \in R_n \quad (12.6)$$

Bu yerda $\delta^*(\lambda, C) = \sup_{x \in C} \lambda(x)$ — qavariq C to'plamning **tayanch funksiyasidir**

Isboti. $A - B + B \subset A$ bo'lganligidan, barcha $\lambda \in R_n$ lar uchun $\delta^*(\lambda, A - B) + B \leq \delta^*(\lambda, A)$ bo'ladi. Bundan tashqari, $\delta^*(\lambda, A - B + B) = \delta^*(\lambda, A - B) + \delta^*(\lambda, B)$. Bu munosabatni oldingi tengsizlikka qo'yish (12.6) ga olib keladi.

e) A yopiq qavariq to'plam, B esa qavariq kompakt bo'lsin. U holda

$$(A + B) - B = A. \quad (12.7)$$

Isboti. $A + B \subset A + B$ bo'lganligidan, $A \subset (A + B) - B$. Endi teskari mansublikni isbotlaymiz. $F \triangleq (A + B) - B$ deb belgilaymiz.

d) xossaga asosan,

$$\delta^*(\lambda, F) \leq \delta^*(\lambda, A+B) - \delta^*(\lambda, B) = \delta^*(\lambda, A), \quad \lambda \in R_n$$

tengsizlikka ega bo'lamiz, bu yerdan $F \subset A$ ekanligi kelib chiqadi.

f) A, B va C lar R_n dan olingan qavariq qism to'plamlar bo'lsin. U holda,

$$(A-B)^* + C \subset (A+C)^* - B \quad (12.8)$$

Isboti: Aytaylik $z \in (A-B)^* + C$ bo'lsin. U holda $z = x + y$ bu yerda

$$x \in A-B^* \quad (12.9)$$

$$y \in C. \quad (12.10)$$

(12.9) dan geometrik ayirma ta'rifiga asosan,

$$x + B \subset A \quad (12.11)$$

kelib chiqadi.

(12.10) va (12.11) larni qo'shib, $z \in (A+C)^* - B$ ni anglatuvchi $z + B \subset A+C$ munosabatni olamiz. Demak, (12.8) mansublik isbotlandi.

Faraz qilaylik, $\Omega(R_n) - R_n$ fazoning barcha bo'sh bo'lmagan kompakt qism to'plamlari majmui bo'lib, S to'plam - R_n da birlik shardan iborat bo'lsin. Ixtiyoriy $X, Y \subset \Omega(R_n)$ lar uchun

$$\rho(X, Y) = \inf\{t \geq 0 : X \subset Y + tS, Y \subset X + tS\} \quad (12.12)$$

deb olamiz. Unda

$$\rho(X, Y) = \max\{\max_{x \in X} \rho(x, Y), \max_{y \in Y} \rho(X, y)\}$$

bo'lishi ni tekshirish qiyin emas. $\Omega(R_n) \times \Omega(R_n)$ da (12.12) munosabatlar orqali aniqlangan ρ funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

1) Barcha $X, Y \in \Omega(R_n)$ lar uchun $\rho(X, Y) \geq 0$ bo'lishi ta'rifdan kelib chiqadi. $\rho(X, Y) = 0$ deb faraz qilamiz. Bu $X \subset Y, Y \subset X$ mansubliklarning o'rinli ekanligiga ekvivalent bo'lib, $X = Y$ ni anglatadi. Aksincha, agar $X = Y$ bo'lsa, $\rho(X, Y) = 0$ tenglik o'z-o'zidan ravshandir

2) ρ funksiyaning simmetrikligi, ya'ni $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ munosabatning o'rinliliigi o'z-o'zidan ravshan.

3) Uchburchak xossasini isbotlaymiz:

$$\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y). \quad a = \rho(X, Z). \quad b = \rho(Z, Y)$$

deb belgilaymiz. (12.12) ning aniqlanishga ko'ra,

$$X \subset Z + aS, \quad Z \subset X + aS, \quad Z \subset Y + bS, \quad Y \subset Z + bS$$

bo'ladi. Bulardan

$$X \subset Y + (a+b)S \quad \text{va} \quad Y \subset X + (a+b)S.$$

Demak,

$$\rho(X, Y) \leq a + b = \rho(X, Z) + \rho(Z, Y).$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Shunday qilib, ρ funksiya $\Omega(R_n)$ to'plamda metrikani beradi. Odatda u **Xausdorf metrikasi** deb ataladi. Quyidagi natijani isbotsiz keltiramiz.

Blyashke teoremasi: Faraz qilaylik, $G - R_n$ dagi kompakt bo'lsin. U holda $\Omega(G) = \{X \in \Omega(R_n) \mid X \subset G\}$ to'plam $\Omega(R_n)$ metrik fazoning kompakt qism to'plami bo'ladi.

Endi haqiqiy o'qni $\Omega(R_n)$ metrik fazoga $X(t)$ uzluksiz akslantirishni qaraymiz. p va q — haqiqiy sonlar bo'lsin, $p \leq q$:

$$Q = \{t_0 = p, t_1, \dots, t_k = q\}, t_0 < t_1 < \dots < t_k.$$

Ushbu

$$\sum(Q) = \sum_{i=1}^k X(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

yig'indini aniqlaymiz, buyerda $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

So'ngra, $X(t)$ ni har qanday $t \in [p, q]$ da qavariq to'plam bo'lsin, deb faraz qilamiz. U holda, $\sum(Q)$ qavariq kompakt to'plam bo'ladi. Shu bilan birga $\sum(Q)$, yig'indi, $[p, q]$ kesmani Q bo'lishga bog'liqdir. $\delta(Q) = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i - t_{i-1}|$ deb belgilaymiz.

Shunday $Y(p, q)$ qavariq kompakt to'plam mavjud bo'lar ekanki, $\rho(Y(p, q), \sum(Q))$ masofa $\delta(Q)$ bilan birga nolga intiladi. Bu $Y(p, q)$ limit to'plam $X(t)$ **akslantirishning integrali** deb ataladi va

$$Y(p, q) = \int_b^a X(t) dt$$

belgi orqali belgilanadi. Bunda $Y(p, q) \in \Omega(R)$ - integrallash chegaralari p va q ning uzluksiz funksiyasi bo'ldi.

Integralning xsssalari (isbotsiz):

A) Arap $r, p \leq r \leq q$, tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_p^r X(t)dt + \int_r^q X(t)dt = \int_p^q X(t)dt.$$

B) $\int_p^q X(t)dt$ integral $y = \int_p^q x(t)dt$ ko'rinishidagi barcha y nuqtalar

to'plami bilan ustma-ust tushadi, bu yerda $x(t)$ — t o'zgaruvchining qiymatlari R_n da yotuvchi o'lchovli funksiyasi bo'lib, $x(t) \in X(t)$, $t \in [p, q]$.

12.4. Differensial o'yinni yechish

1-bandda qo'yilgan differensial o'yinga qaytamiz. O'yninning terminal M to'plami R_n fazoning vektor qism fazosi bo'lsin, deb faraz qilamiz. L orqali, M qism fazoning R_n ga ortogonal to'ldiruvchisini, π orqali esa, R_n fazoning L qism fazoga ortogonal proyeksiyalash amalini belgilaymiz. Endi

$$U(t) = -\pi^{tA}BU, \quad V(t) = \pi^{tA}CV$$

deb belgilaymiz va $S(t) = U(t) - V(t)^*$ to'plam, barcha $t \geq 0$ larda L ning o'lchoviga teng o'lchovga ega bo'lsin, deb faraz qilamiz.

(12.1) tenglamaning boshlang'ich shartdagi yechimini yozamiz:

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{sA}[Bu(t-s) + Cv(t-s)]ds.$$

So`ngra

$$W(t) = \int_0^t S(\tau)d\tau \quad (12.13)$$

deb olamiz.

$T(x)$ orqali $t(t \geq 0)$ ning

$$\pi e^{tA}x \in W(t)$$

mansublik o`rinli bo`lgan minimal qiymatini belgilaymiz. Agar bunday t mavjud bo`lmasa,  $T(x) = +\infty$  deb olamiz. Faqat  $x \in M$  lar uchun  $T(x) = 0$  bo`lishini aytib o`tamiz.

Quyidagi teorema $T(x)$ aniqlanishining mohiyatini ochib beradi.

12.1-teorema: Arap $T(x_0) < +\infty$ bo`lsa,  $P_2$  o`yinchi har qanday o`lchovli  $v(t) \in V$ ,  $0 \leq t \leq T(x_0)$  boshqarishni qo`llamasin, P_1 da shunday o`lchovli  $u(t) \in U$  boshqarish topiladiki,  $x(T(x_0)) \in M$  bo`ladi, bu yerda $x(t), t \geq 0$ yechim (12.1) sistemaning, $u(t)$ va $v(t)$ larga mos yechimidir.

Isboti: $T(x_0) < +\infty$ bo`lganligidan,

$$\pi e^{T(x_0)}x_0 \in W(T(x_0)).$$

Demak, shunday $w(t), 0 \leq t \leq T(x_0)$ funksiya topiladiki,

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 = \int_0^{T(x_0)} w(t) dt, \quad (12.14)$$

bu yerda $w(t) \in S(t), 0 \leq t \leq T(x_0)$.

Geometrik ayirmaning ta'rifidan oxirgi mansublik

$$w(t) + \pi e^{tA} C v \subset -\pi e^{tA} B u, \quad 0 \leq t \leq T(x_0)$$

ekanligini anglatadi. Bu yerdan, har qanday o'lchovli $v(t) \in V, 0 \leq t \leq T(x_0)$ funksiya uchun shunday o'lchovli $u(t) \in U, 0 \leq t \leq T(x_0)$ funksiya mavjudligi va

$$w(t) = -\pi e^{tA} B u(T(x_0) - t) - \pi e^{tA} C v(T(x_0) - t), \quad 0 \leq t \leq T(x_0)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, (12.14) dan,

$$x(T(x_0)) \in M$$

mansublikka ekvivalent bo'lgan,

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 + \int_0^{T(x_0)} \pi e^{tA} B u(T(x_0) - t) + C v(T(x_0) - t) dt = 0$$

munosabatni olamiz (bu yerda $x(t), t \geq 0$ (12.1) sistemaning $u(t), v(t)$ boshqarishlarga mos yechimidir). 12.1-teorema isbotlandi.

12.1-teoremadan, agar P_2 o'yinchining ε -strategiyasi shunday bo'lsaki, $\varepsilon_1 \geq T(x_0)$ bo'lsa, P_1 o'yinchi hamisha o'yinni $T(x_0)$ dan kech bo'lmagan vaqtda tamom qilishi mumkinligi kelib chiqadi.

Endi P_2 o'yinchining ε -strategiyasi uchun $\varepsilon_1 < T(x_0)$ bo'lgan holni qaraymiz.

12.2-teorema: Aytaylik, $T(x_0) < +\infty$ bo'lsin. P_2 o'yinchi $[0, \varepsilon_1]$ vaqt oralig'ida qanday o'lchovli boshqarishni qo'llamasin, P_1 o'yinchida shunday o'lchovli $u(t) \in U$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ boshqarish topiladiki, $T(x(\varepsilon_1)) < T(x_0) - \varepsilon_1$ bo'ladi, bu yerda $x(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$, (12.1) sistemaning $u(t)$, $v(t)$ $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ boshqarishlarga mos yechimidir.

Isboti: $T(x_0) < +\infty$ bo'lganligidan

$$\pi e^{(t_1 + \varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1 + \varepsilon_1) \quad (12.15)$$

mansublik o'rinli bo'lgan $t_1 > 0$ qiymatli to'plam bo'sh bo'lmaydi ((12.15) mansublik $t_1 = T(x_0) - \varepsilon_1$ bo'lganda o'rinlidir). (12.15) ni unga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$\pi e^{(t_1 + \varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} S(t) dt \quad (12.16)$$

shaklda yozamiz. Barcha t lar uchun $S(t) + V(t) \subset U(t)$ bo'lganligidan

$$\int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} S(t) dt + \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} V(t) dt \subset \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} U(t) dt.$$

(12.16) ning ikkala tomoniga $\int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} V(t) dt$ integralni qo'shib va oxirgi

mansublikdan foydalanib,

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)A} x_0 + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} V(t)dt \subset W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t)dt$$

munosabatni olamiz. Endi bu mansublikda chap tomondagi ikkinchi had o`rniga uning elementlaridan birini, chunonchi,

$$\pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon} e^{sA} C v(\varepsilon_1 - s) ds$$

ni qo`yamiz, bu yerda  $v(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , -  $P_2$  o`yinchining $[0, \varepsilon_1]$ oraliqdagi boshqarishidan iborat. U holda

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)A} x_0 + \pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon} e^{sA} C v(\varepsilon_1 - s) ds \in W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t)dt \quad (12.17)$$

t_1 ning (12.17) o`rinli bo`lgan minimal qiymatini tanlab olamiz va uni yana t_1 orqali belgilaymiz, $t_1 \leq T(x_0) - \varepsilon_1$ ekanligi ravshan. Bundan tashqari,

$\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t)dt$ to`plamning (12.17) mansublik saqlanadigan aniq elementi

mavjud. Bu elementni ushbu

$$-\pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon} e^{sA} B u(\varepsilon_1 - s) ds$$

ko`rinishda yozamiz, bu yerda  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1 - u(t) \in U$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$  shartni qanoatlantiruvchi o`lchovli funksiya bo`lib, uni  $P_1$  o`yinchining $[0, \varepsilon_1]$

kesmadagi boshqarishi sifatida tanlab olamiz. U holda (12.17) dan

$$\pi e^{t_1 A} (e^{\varepsilon_1 A} \int_0^{\varepsilon_1} e^{sA} (Bu(\varepsilon_1 - s) + Cv(\varepsilon_1 - s)) ds \in W(t_1)$$

munosabatni, yoki, boshqacha,

$$\pi e^{t_1 A} x(\varepsilon_1) \in W(t_1)$$

munosabatni olamiz (bu yerda $x(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ - (12.1) sistemaning $u(t), v(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ boshqarishlarga mos kelgan yechimidir).

Oxirgi mansublikdan

$$T(x(\varepsilon_1)) \leq t_1 \leq T(x_0) - \varepsilon_1$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

12.1- va 12.2- teoremlarning tasdiqlari P_2 o'yinchining har qanday ε -strategiyasi va o'yinning $T(x_0) < +\infty$ bo'lgan har qanday boshlang'ich x_0 nuqtasi bo'yicha P_1 o'yinchining x nuqtani M qism fazoga $T(x_0)$ vaqtdan kech bo'lmagan vaqtda keltiruvchi boshqarishini ketma-ket qurish imkonini beradi. Haqiqatan, P_2 o'yinchining $[0, \varepsilon_1]$ kesmada berilgan $v(t)$ boshqarish bo'yicha P_1 o'yinchi, 12.2-teoremaga asosan, x nuqtani ε_1 momentda $T(x(\varepsilon_1)) \leq T(x_0) - \varepsilon_1$ ni qanoatlantiruvchi, $x(\varepsilon_1)$ holatga o'tkazuvchi $u(t)$ boshqarishni qurishi mumkin. So'ngra P_2 o'yinchining $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ kesmadagi $v(t)$ boshqarishi ma'lum bo'ladi. Yana avvalgidagidek mulohazalar yuritib, P_1 o'yinchining $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ kesmada shunday $u(t)$

boshqaruishini topamizki, $x(t)$ trayektoriya-ning $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ momentdagi, unga mos $x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ nuqtasi

$$T(x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \leq T(x(\varepsilon_1)) - \varepsilon_1 \leq T(x_0) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu jarayonni ketma-ket davom ettirib, biror $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$ momentda

$$T(x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)) \leq T(x_0) - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k),$$

$$T(x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)) \leq \varepsilon_{k+1}$$

o`rinli bo`lgan $x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$ holatga kelamiz.

12.1-teorema-ga asosan, endi P_1 o`yinchi o`yinni biror $t^* \leq T(x_0)$ momentda tamomlashi mumkin.

Demak, P_1 o`yinchi  $\varepsilon$ -strategiyalar sinfida  $T(x_0) < +\infty$  ni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x_0$  nuqtada boshlangan o`yinni $T(x_0)$ dan oshmaydigan t^* vaqtda tamomlashi mumkin.

Adabiyotlar

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М., Наука, 1979.
2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. - М., ФИЗМАТЛИТ, 2005.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М., Наука, 1988.
4. Галеев Э.М. Оптимизация. – М., КомКнига, 2006.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптималлаштириш усуллари. - Т., Ўзбекистон, 1995.
6. Исраилов И., Отакулов С. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. 1,2 – қисм. Самарқанд, СамДУ, 1999, 2001.
7. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. М., Высшая школа, 2006.
8. Сухарев А.Г., Тимохов Л.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. - М., Наука, 1986.