ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. НИЗАМИ
ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

“Разрешить к защите”
Декан факультета
____
Г.Ф.Джаббаров
“_____”
____________________ 2020год

Студент направления
“5110100–методика преподования математики”
Ким Дмитрий Игнатьевич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему:

“Разработка методики изучения теории графов в школах с углубленным изучением математики ”

Выполнил: Ким.Д.И

Научный руководитель:
Доцент кафедры “Математика и методика ее преподавания”, к.ф-м.н.____________Исмаилов.Ш.Н

Рецензенты:
Старший преподаватель кафедры “Математика в гуманитарных направлениях”, ______Латыпова.А.Р

Учитель математики общеобразовательной школы №19 Ким.И.А

“Допустить к защите”
Заведующий кафедрой
“ Математика и методика ее преподавания”,к.ф-м.н.________________
Акмалов.А.А“_____”
_______________________2020г.

Ташкент 2020 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время обучение математике в школе традиционно опирается на непрерывное обучение математике. Это позволяет развивать мышление учащихся и основную роль играет в данном процессе именно математика, а наибольшую роль в этом плане играет её подраздел *дискретная математика*. [1]

Язык *теории графов* является подразделом дискретной математики и имеет естественное происхождение. По факту люди достаточно часто пользуются графами даже не догадываясь об этом, когда изображают различные дискретные объекты (населенные пункты, станки, станции, приборы, атомы и т.д.) в виде точек, кружочков, квадратиков, а связи между ними (маршруты, производственные потоки, электрические цепи, химические валентности и т.д.) - в виде линий.

Поэтому применение *теории графов* не вызовет затруднений у учеников средних и старших классов, а будет способствовать наглядности обучения, причем абстрактной наглядности, при которой реальные объекты заменяются их знаковым изображением. С помощью графов достаточно легко отображать различные соотношения между объектами и использовать данные наработки для дальнейшего углубления.

Графы в силу достаточно низкого уровня абстракции идеально подходят для ознакомления учеников со способами построения моделей. Построение и изучение графовых моделей помогает избегать формализма в знаниях, когда ученик не видит связи математических понятий и фактов с реальным миром.

Тема "*Теория графов*" имеет ярко выраженную, прикладную направленность. На элементарных примерах ученикам указывается как возможно решить инженерную задачу не строя при этом функциональной зависимости. Методы теории графов завоевали признание в различных областях науки, не только математики но и химии, физики, психологии и других областях. Использование языка и методов теории графов часто ускоряет решение практических задач, упрощает расчеты, повышает эффективность научной, инженерной и конструкторской деятельности. Именно вопросы практики в значительной степени способствуют интенсивному развитию теории графов.

Некоторые положения теории графов могут быть отражены при обучении математике в школе. Школьной программой их изучения уже предусмотрено согласно «Государственному образовательному стандарту общего среднего образования Республики Узбекистан». В данной работе будет рассматриваться методика обучения «*Теории графов*», а также будут разработаны системы уроков соответствии с требованиями установленными

«Государственном образовательном стандартом общего среднего образования Р.Уз» [2]

Постановлением Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» закреплено введение в учебные планы, принятые по соответствующим направлениям образования бакалавриата высших образовательных учреждений, нового раздела «Теория графов» для полного освоения предмета «Высшая математика»[2].

Поэтому разработка методики изучения теории графов в школах на пропедевтическом уровне является **актуальной** задачей.

Объектом: процесс обучения решению задач на дополнительных занятиях в школе..

Предмет исследования: предметом исследования выбраны задачи, при решении которых использованы графы.

Цель работы: разработка и основание комплексно-методической системы изучения элементов теории графов.

Задачи:

- Изучить психолого-педагогическую и методическую литературу по проблеме обучения учащихся решению задач.
- проанализировать научно-методическую литературу по изучению элементов графов;
- разработать курс «Элементы теории графов для учеников средних и старших классов;
- Составить и подобрать задачи, решаемые с использованием теории графов.

Теоретической основой исследования послужили работы «Государственном образовательном стандартом общего среднего образования Р.Уз», О. Оре, О.И. Мельникова, Л.Ю. Березиной и других авторов.

Практической основой исследования послужили работы О.И. Мельникова, Я.И. Перельман и других.

Для решения поставленных задач, использовались следующие методы исследования:

– теоретические: изучение психолого-педагогической и методической литературы по проблеме обучения учащихся решению задач; раскрытие возможности графов как средства обучения учащихся решению задач;

– практические: разработка содержания и методика проведения занятий по теме “Элементы теории графов”; составление и подбор задач, решаемых с использованием теории графов.

Практическая значимость исследования состоит в том, что разработанная методика обучения учащихся решению задач с помощью теории графов может быть применена учителями в их практической деятельности на занятиях в школе.

Содержание настоящей работы представлено введением, двумя главами, заключением и списком использованной литературы.

В первой главе освещаются методы теории графов.

Вторая глава включает в себя разработку системы дополнительных занятий по теме "Элементы теории графов".

Раздел теоретического изложения материала подкреплен практическими задачами и упражнениями.

Целевая аудитория, на которую направлен проект: учащиеся 7,10 классов, преподаватели

Глава I. О понятиях графа и его применениях

§1.1 Изучение требований государственного образовательного стандарта

Учебные программы разрабатываются и утверждаются Министерством народного образования.

Требования к уровню подготовки по общеобразовательным предметам состоят из обязательного минимума и конечных результатов, объема учебной нагрузки, а также требований к качеству образования и включают следующее:

знания — запоминание и понимание изученного;

умения — использование изученного в знакомых ситуациях;

навыки — использование полученных знаний и сформированных умений в незнакомых ситуациях и для получения новых знаний;

компетенция — способность применять имеющиеся знания, умения и навыки в ежедневной деятельности.

Система оценивания – набор эффективных критериев для определения соответствия уровня подготовки учащихся учреждений общего среднего образования требованиям государственного образовательного стандарта общего среднего образования.

Требования к уровню подготовки по общеобразовательным предметам в системе общего среднего, среднего специального и профессионального образования являются базой государственного образовательного стандарта общего среднего, среднего специального и профессионального образования и определяют стандартизированные этапы обучения общеобразовательным предметам и структуру содержания образования.

Согласно государственному образовательному стандарту обучение общеобразовательным предметам в системе общего среднего, среднего специального и профессионального образования осуществляется на следующих этапах:

Уровень стандарта	**Название уровня**
A1	Начальный уровень изучения общеобразовательных предметов
A1+	Углублённый начальный уровень изучения общеобразовательных предметов
A2	Базовый уровень изучения общеобразовательных предметов
A2+	Углублённый базовый уровень изучения общеобразовательных предметов

B1	Общий уровень изучения общеобразовательных предметов
B1+	Углублённый общий уровень изучения общеобразовательных предметов

В данной работе будут разрабатываться учебные программы по графам для следующих уровней: А2+ и В1+.То есть для школ с углубленным изучением математики.

7-КЛАСС
АЛГЕБРА
(А2+ 136часов, 4часа в неделю)

II РАЗДЕЛ. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ (10 часов, А2+: 10 часов)

А2+:Графы. Четность степеней вершин в графе**(6 часов)**

Формируемые предметные компетенции:

Компетенция математического содержания:

А2+: Решает более сложные задачи из данного раздела, доказывает простые утверждения, решает задачи, связанные с графами.[2]

10-КЛАСС
АЛГЕБРА
(А2+ 136 часов, 4часа в неделю)

В1+: Графы.Связность графов.**(6 часов)**

Формируемые предметные компетенции:

Компетенция математического содержания:

В1+:может моделировать простые практические ситуации, используя графы[2]

К учебно-методическим комплексам применяются следующие требования:

Дидактические требования:

- обеспечивать полное усвоение учащимися учебного материала;
- способствовать раскрытию сущности и содержания учебного предмета, а не только передаче информации;
- быть интересными, лаконичными, понятными для разных категорий учащихся;
- формировать научное мировозрение, отвечать требованиям патриотизма и интернационализма, содержать материалы, основанные на достоверных фактах;
- обеспечивать связь образования с повседневной жизнью и практикой, формировать умение применять полученные знания на практике, быть

направленными на обеспечение взаимосвязи с другими учебными предметами;

- включать иллюстративный материал: рисунки карты, чертежи, схемы, таблицы, диаграммы и фотографии;

- отражать новые понятия, термины, правила, формулы, описания и т.п. в виде словарей. [3]

Научно-методические требования:

- отражать последние достижения науки и техники;

- обеспечивать смысловую завершенность тем учебного предмета;

- излагать темы учебного предмета в соответствии с нормами литературного языка несложным, простым и понятным языком;

- соблюдать логический порядок и последовательность изложения материала;

- иллюстрироваться примерами, которые не противоречат менталитету узбекского народа и национальной идее;

- содержать точные формулировки вопросов и заданий;

- учитывать использование передовых педагогических технологий в обучении учеников мышлению, письму, рисованию, черчению, счёту, выполнению практических работ, а также проведению экспрементов;

- не допускать неточности при указании дат и различной трактовки одного понятия;

- включать тексты и иллюстрации, направленные на профессиональную ориентацию, толковый словарь, задания по проектированию и моделированию направленные на развитие технического творчества и логического мышления.[3]

Психолого-педагогические требования:

- учитывая всеми признанные научно обоснованные сведения, уровень знаний учащихся, приемы запоминания и развития мышления, разъяснять значение событий, развивать практический интерес, быть направленным на полное удовлетворение потребностей в получении знаний и практической деятельности;

- учитывать при изложении материала возрастные и психофизиологические особенности ученика, быть понятным, включать известные факты, понятия, правила и отражать преемственность между учебными программами;

- учитывать степень усвоения ранее полученных знаний, возможность восприятия нового учениками.

Теория графов как тема присутствует как тема по математике для дополнительных занятий в школах с углубленным изучением математики седьмых, десятых.

§1.2 История возникновения теории графов

Дискретная (от лат. ***discretus*** - разделенный, прерывистый) **математика** - раздел математики, уделяющий внимание изучению свойств конечного количества объектов. К их числу могут быть отнесены, например, конечные группы, конечные графы, некоторые математические модели информации. В то же время дискретная математика является весьма активно развивающейся частью математики.[4]

Дискретная математика состоит из большого количества разделов: *теории множеств, комбинаторики, теории графов, теории вероятностей*. Среди разделов дискретной математики только теория графов выделяется своей наглядностью, ее модели легки для понимания и часто позволяют занимательную, игровую симуляцию. Впервые основы теории графов появились в работе **Л.Эйлера**, где им описывались решения головоломок и математических развлекательных задач. [4]

Он в 1736 году решил известную в то время задачу, которая называлась проблемой кёнигсбергских мостов. В городе Кёнигсберге было два острова. Эти острова соединены семью мостами с берегами реки Преголя и друг с другом. В задаче нужно было найти маршрут прохождения всех четырёх частей суши, который начинался бы с любой из них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту.

Эйлер доказал невозможность такого маршрута, чем внёс исключительный вклад в решение этой задачи. Чтобы доказать, что в этой задаче нет решения, Эйлер обозначил каждую часть суши **точкой (вершиной)**, а каждый мост – **линией (ребром)**, соединяющей соответствующие точки. Получился «граф» на котором точки отмечены теми же буквами что и четыре части суши. [5]

Утверждение Эйлера о не существовании «положительного» решения у этой задачи равносильно утверждению о невозможности обойти специальным образом граф.

Отправляясь от этого частного случая, Эйлер обобщил постановку задачи и нашёл критерий существования обхода (специального маршрута) у данного графа, а именно граф должен быть связным и каждая его вершина должна быть инцидентна чётному числу рёбер.

В 1847 году *Кирхгофом* для решения совместной системы линейных алгебраических уравнений, была разработана теория деревьев, которая позволяла найти значение силы тока в каждом проводнике (дуге) и в каждом контуре рассматриваемой электрической цепи. Хотя он был физиком, но подходил к решению задач как математик.

Кэли, занимаясь чисто практическими задачами органической химии, в 1857 году открыл важный класс графов, называемых деревьями.

В 1869 году *Жордан*, даже не подозревая о значении своего открытия в области химии, ввёл и изучал деревья, как чисто математические объекты. В 1859 году сэр Вильям Гамильтон придумал игру «Вокруг Света». В игре используется додекаэдр, каждой из 20 вершин которого приписано название известного города. Играющий должен обойти «вокруг света», найдя такой замкнутый путь, идущий по ребрам многогранника, который проходил бы через каждую вершину ровно один раз.

Широкое развитие теория графов получила с 50-х годов XX века в связи с развитием робототехники и ЭВМ. Настоящая работа посвящена использованию графов в качестве некоторого вспомогательного средства, позволяющего облегчить процесс обучения математике и также разработке системы дополнительных занятий для курса школьной математики.

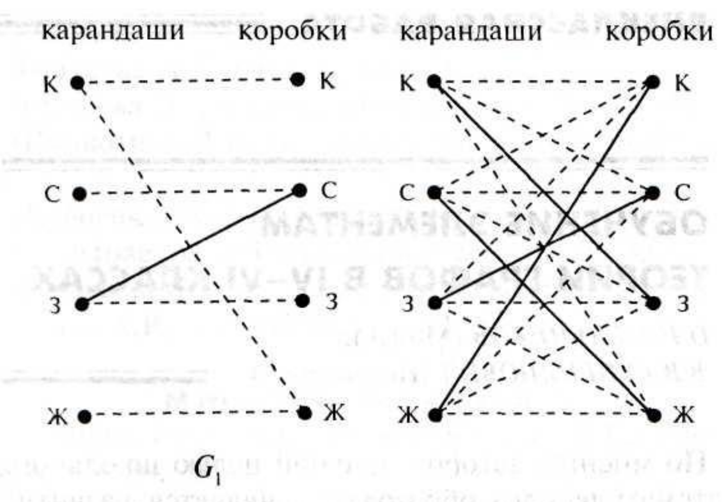
Графы можно использовать как язык, описывающий различные ситуации, возникающие в процессе обучения.

§ 1.3 Задачи, приводящие к графам

Рассмотрим одну из простейших задач:

Задача 3.1«Красный, синий, желтый и зеленый карандаши лежат в четырех коробках по одному. Цвет карандаша отличается от цвета коробки. Известно, что зеленый карандаш лежит в синей коробке, а красный не лежит в желтой. В какой коробке лежит каждый карандаш?»

Решение. Обозначим точками карандаши и коробки. Сплошная линия будет обозначать, что карандаш лежит в соответствующей коробке, а пунктирная, что не лежит. Тогда с учетом задачи имеем граф G_1 (рис. 1).



Далее достраиваем граф по следующему правилу: поскольку в каждой коробке может лежать ровно один карандаш, то из каждой точки должны выходить одна сплошная линия и три пунктирные. Получается граф G_2, дающий решение задачи.

Определение графа. *Графом называется множество точек, изображенных на плоскости (листе бумаги, доске), некоторые пары из которых соединены линиями. Точки называются вершинами графа, линии — ребрами. Степенью вершины называется число ребер, выходящих из вершины*.[5]

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 3.2 «В шахматном турнире по круговой системе, в котором каждый игрок должен встретиться с каждым, участвуют 6 школьников. Известно, что

Ваня сыграл 5 партий, Толя — 4, Леша и Дима — по 3, Семен — 2, Женя — 1. С кем сыграл каждый из участников?»

Решение. Поставим в соответствие каждому игроку точку плоскости — вершину графа. Если два игрока встречались между собой, то будем соединять соответствующие вершины линией — ребром графа. Пусть вершина 1 соответствует Ване, вершина 2 — Толе, вершина 3 — Леше, вершина 4 — Диме, вершина 5 — Семену, вершина 6 — Жене.

Поскольку степень вершины 1 равна 5, то соединим эту вершину со всеми остальными 5 вершинами графа. Из вершины 2 должно выходить 4 ребра, а выходит пока только одно.

Соединим эту вершину ребрами с вершинами 3, 4 и 5, поскольку степень вершины 6 уже равна 1, т.е. из этой вершины все выходящие ребра проведены. Из вершин 3, 4 и 5 выходит по два ребра, степень вершин 3 и 4 должна быть равной 3. Поэтому соединим эти вершины ребром. Построенный граф описывает встречи, проведенные детьми.

Задача 3.3 Три друга– Леша, Сергей и Денис–купили щенков разной породы: щенка такса, щенка колли и щенка овчарки. Известно, что: щенок Леши темнее по окрасу, чем такса, Леси и Гриф; щенок Сергея старше Грифа, овчарки и таксы; Джек и такса всегда гуляют вместе. У кого какой породы щенок? Назовите клички щенков.

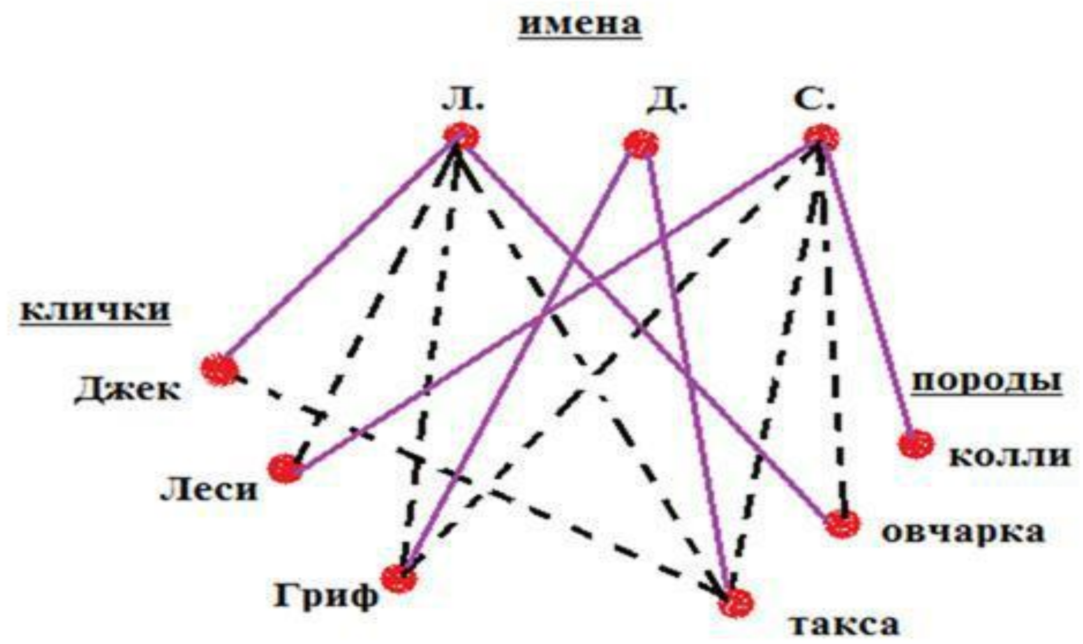
Решение: В данной задаче граф будет состоять из 9 вершин и 6 ребер. Причем вершины надо разбить на три тройки: первая – имена, вторая – клички, третья – порода и разместить их для наглядности в разных плоскостях (Рис 1.1).

Первая ключевая фраза, которая помогает решить задачу: «щенок Леши темнее по окрасу, чем такса, Леси и Гриф», значит у Леши не такса, не Леси, не Гриф.

Вторая ключевая фраза: «щенок Сергея старше Грифа, овчарки и таксы», значит у Сергея не Гриф, не овчарка, не такса. Третья ключевая фраза: «Джек и такса всегда гуляют вместе», значит Джек это не такса. Так как больше с условием задачи работать нельзя, то будем работать по графу. По графу видно, что у Сережи не такса и не овчарка, а значит – колли, поэтому проводим первое ребро.

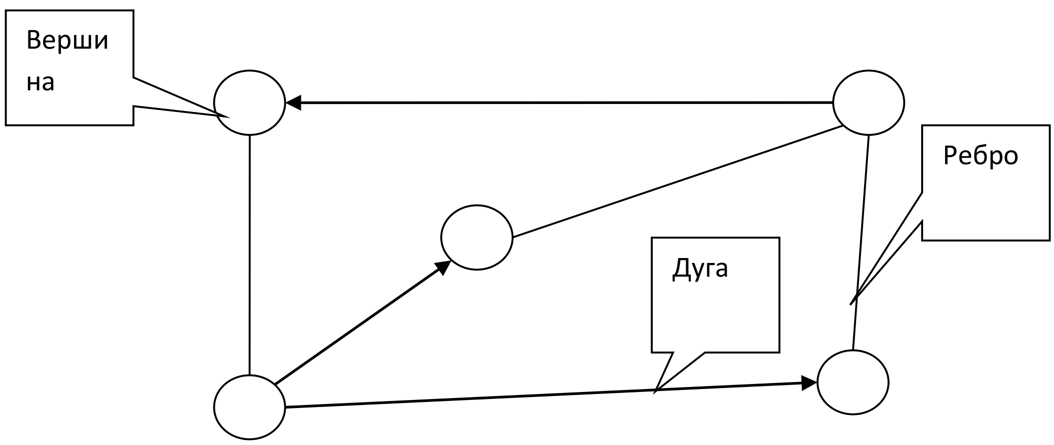
Далее видно, что у Леши не такса и не колли, а значит - овчарка, проводим еще ребра. Денису осталась такса. У Леши не Леси и не Гриф, значит

Джек. У Сережи не Гриф и не Джек, а Леси. Остается Денису Гриф, проводим последнее ребро.



Таким образом можно прийти к понятию графа.

Граф– *это система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (геометрический способ задания графа – см. рисунок*.[4]



Кружки называются <u>вершинами</u> графа, линии - <u>рёбрами.</u>

§1.4 Основные понятия и определения

Пусть дано множество$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$и в V определено семейство $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ пар элементов $u_k = \{v_i, v_j\}, (k = 1, m)$ произвольной кратности и упорядочения.

Пара$\{V, U\}$именуется: *граф*. Графы, как правило, обозначают прописными латинскими буквами, например, *G*, *H*. Принято также писать$G(V, U)$для того, чтобы определить некоторый конкретный граф *G*.

Элементы$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ называются *вершинами* графа, а пары $u_k = \{v_i, v_j\}$, (k = 1, m) — *ребрами*. [6]

Определению графа можно дать следующую интерпретацию. Пусть имеем описание графа:

$$G(V, \mathrm{E}) = \{\{v_1, v_2, \dots, v_6\}, \{\{v_1, v_3\} < v_5, v_1 >, \{v_3, v_4\}, < v_2, v_3 >, \{v_3, v_3\}\}\}.$$

Это описание можно отобразить графически, как показано на рисунке .1. На этом рисунке некоторые ребра отмечены стрелкой, а соответствующие им пары вершин в описании графа выделены угловыми скобками. Это связано с тем, что для некоторого произвольного ребра можно принимать или не принимать во внимание порядок расположения его концов.

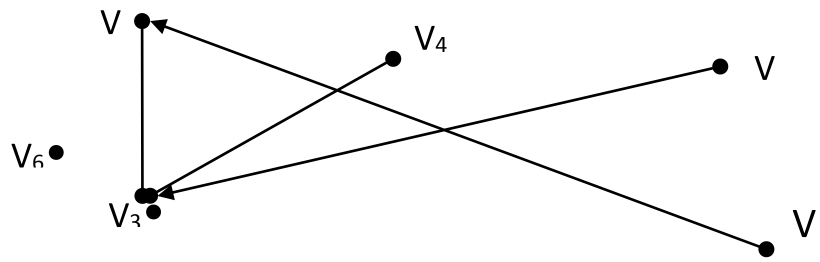


Рис.1

Если этот порядок не существенен, то ребро называется *неориентированным*, в противном случае ребро называется *ориентированным*. Ориентированные ребра называются также *дугами*.

Для ориентированного ребра определены понятия *начальной и конечной вершины*. Начальная вершина записывается в начале пары вершин, определяющих дугу,а конечная — в конце. Так на рисунке. 1 ребра

$< v_5, v_1 >$, и $< v_2, v_3 >$ являются дугами. Они представлены упорядоченными парами вершин и, в связи с этим, обозначены так же, как обозначаются упорядоченные множества.

Ребра $\{v_1, v_3\}\{v_3, v_4\}$неориентированы. Для любого неориентированного ребра полагают, что$\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$так же, как и в случае неупорядоченных множеств. [6]

Граф, у которого все ребра не ориентированы, называется *неориентированным*. Неориентированное ребро может быть эквивалентно паре ориентированных ребер, если это возможно по условию задачи.

Граф, у которого все ребра ориентированы, называется *ориентированным* или *орграфом*.

На рис.1 приведен *смешанный* граф, т.е. содержащий как ориентированные, так и неориентированные ребра

Многие теоремы и определения в теории графов могут быть отнесены как к ориентированным, так и к неориентированным графам. В таких случаях для обозначения ребер применяют круглые скобки, например, ребро $\{v_3, v_4\}$в графе рисунок .1 можно обозначать (v_3, v_4) либо (v_4, v_3), а ребро $< v_5, v_1 >$ — соответственно как (v_5, v_1), указав при этом, что данное ребро представляет дугу.

Принято также обозначение всех ребер круглыми скобками как в случае ориентированных графов, так неориентированных, если совершенно ясно о каком из типов этих графов идет речь в тексте.

Некоторые вершины графа G могут не войти в список пар. Такие вершины именуются *изолированными*. В рассмотренном примере это вершина v_6. Граф, у которого все вершины изолированы, именуется *нуль-графом*. Множество ребер такого графа пусто.

Антиподом нуль-графа является *полный граф*. Ребрами полного графа являются всевозможные пары его вершин.

Как в случае ориентированного графа, так и в случае неориентированного — говорят, что ребро *инцидентно* паре определяющих его вершин.

Граф называется плоским, если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер есть его вершины.

В качестве примеров ориентированных и не ориентированных графов можно привести 2 таблицы

Примеры ориентированных графов

Граф	**Вершины**	**Дуги**
Обучение	Курсы	Необходимое предшествование (например, курс по языку Pascal полезно изучить прежде, чем курс по Delphi, и т.п.)
Одевание ребенка	Предметы гардероба	Необходимое предшествование (например, носки должны быть

		надеты раньше, чем ботинки, и т.п.)
Организация	Сотрудники	Иерархия (начальник — подчиненный)

Примеры неориентированных графов

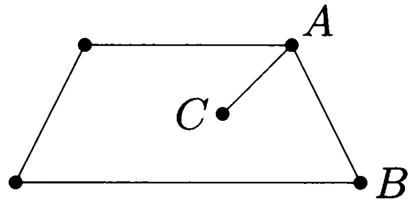
Граф	**Вершины**	**Ребра**
Семья	Люди	Родственные связи
Город	Перекрестки	Улицы
Сеть	Компьютеры	Кабели
Метро	Станции	Пересадки
Листок в клеточку	Клеточки	Наличие общей границы

§1.5 Степень вершины

Степенью вершины называют количество ребер, выходящих из одной вершины. Степень графа обозначают $d(v)$. Вершина графа, для которой $d(v)=0,$ является изолированной, для которой $d(v)=1-$висячей.

Так, например, в графе, изображенном на рисунке 3, вершина A имеет степень 3, вершина B — степень 2, вершина C — степень 1или более краткая запись

d(A)=3, d(B)=2, d(C)=1



Примечание: вершина C является висячей

Вершина называется *нечётной*, если $d(v)$ – нечётное число. Вершина называется *чётной*, если $d(v)$ – чётное число. Степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин.[7]

В графе $G(V,E)$ сумма степеней всех его вершин – число чётное, равное удвоенному числу рёбер графа. Число нечётных вершин любого графа чётно. Во всяком графе с n вершинами, где $n \geq 2$, всегда найдутся, по меньшей мере, две вершины с одинаковыми степенями.

Если в графе с n вершинами $(n \geq 2)$ в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдётся либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n-1$.[7]

Теорема Эйлера: (*Лемма "о рукопожатиях"*). Сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равна удвоенному числу его ребер.

Доказательство: При доказательстве упомянутой формулы Эйлер использовал технику двойного (повторного) счёта. Он посчитал количество инцидентных пар (v, u), где u — ребро и v — одна из его концевых вершин двумя разными способами.

При добавлении ребра сумма степеней вершин графа увеличивается на 2, т.е. вершина v принадлежит $d(v)$ парам, где $d(v)$ — степень вершины (количество инцидентных ей рёбер). Следовательно, число инцидентных пар совпадает с суммой всех степеней.

Однако каждое ребро принадлежит двум инцидентным парам, так как имеет две концевые вершины. Поэтому число инцидентных пар равно удвоенной сумме всех вершин графа.

Поскольку две данные формулы предназначены для одного и то же множества, их значения одинаковы. Чётность или нечётность суммы целых чисел не зависит от количества чётных слагаемых. [6]

Задача.4.1 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?

Решение. Предположим, что это возможно. Рассмотрим тогда граф, вершины которого соответствуют телефонам, а рёбра – соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна 5. Подсчитаем количество рёбер в этом графе.

Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчёте каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому число рёбер графа должно быть равно $15 \cdot 5 : 2$. Но это число нецелое! Следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом невозможно.

Задача.4.2 Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4; 4; 4; 4; 2.

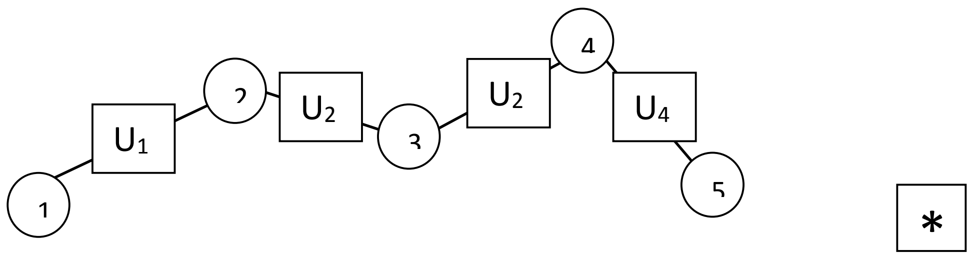
Решение. Предположим, такой граф существует. Тогда в нем найдутся три попарно различные вершины $u;\ v;\ w$, степень каждой из которых равна 4, и отличная от них вершина z степени 2. Поскольку всего в графе 5 вершин, любая вершина степени 4 смежна со всеми другими. Следовательно, каждая из вершин $u;\ v;\ w$ смежна с z. Тогда степень вершины z не меньше чем 3. Противоречие

§1.6Связность графа и разложение на связные компоненты

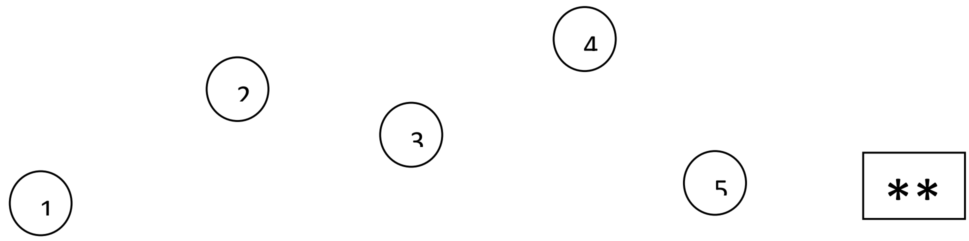
Для введения понятия связности в графах требуется вначале ввести понятие маршрута в графах. Маршрут на графике — это последовательность ребер $U_1, U_2, \dots U_n$, в которой конец одного ребра служит началом другого.

Определение. ПустьG – конечный граф. Маршрутом S в G называется последовательность ребер, $S = (U_1, U_2, \dots U_n)$, * в которой любые соседние два ребра U_{i-1}, U_i, $(i = \overline{2,n})$ имеют общую вершину.

На графах допускаются маршруты, в которых не принимаются во внимание направления ребер. Такие маршруты называются неориентированными. Пусть на графе определен маршрут (*). Та вершина ребра U_1, которая не является общей с вершиной ребраU_2, называется начальной вершиной маршрута S.[6]



Нуль-маршрутом называется маршрут, не содержащий ребер.(**)



Вершина U_j называется достижимый из вершины U_i, если существует маршрут из U_i в U_j. Для определенности считают, что любая вершина U_i достижима из себя нуль-маршрутом независимо от наличия петель.

Циклическим маршрут называется в том случае, если конец последнего ребра последовательности совпал с началом первого ребра. **Пример**: Задача 5.1 (первый и второй рисунок)

Цикл называется простым, если все его вершины различны.

Теорема. Связный граф *G(V,U)* представляет собой простой цикл тогда, и только тогда, когда каждая его вершина имеет степень 2.

Доказательство.

Необходимость. Пусть граф *G(V,U)* представляет собой простой цикл. Он является замкнутым простым путем. Из любой его вершины можно попасть в любую другую, не проходя ни через какую вершину два раза. Очевидно, что степень любой вершины такого графа равна 2.[11]

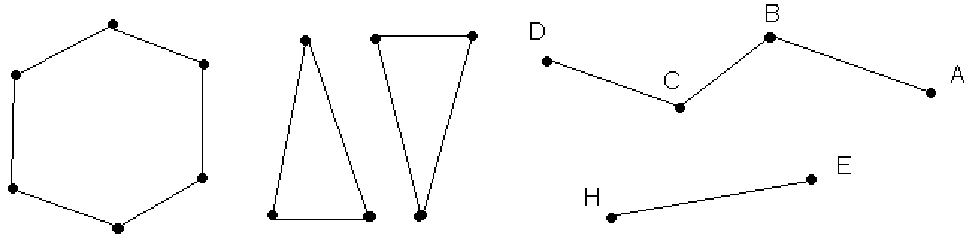
Достаточность. Пусть граф *G(V,U)* связный и степень каждой его вершины равна 2. Любые две его вершины соединены путем. Возьмем произвольную вершину. Пойдем по одному из двух ребер, к которым принадлежит эта вершина.

Мы попадем в следующую вершину, из которой выходит два ребра. По одному мы пришли. Двигаемся далее по второму ребру. Таким образом, все вершины графа будут пройдены и мы вернемся в исходную вершину. Путь замкнется. Следовательно, этот граф является циклом.

Определение. Две вершины графа называются связными, если в графе существует маршрут с концами в этих вершинах, и несвязными в противном случае. В качестве примера связности и несвязности графов можно рассмотреть следующую задачу[8]

Задача 5.1. Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими.

Решение. Участника этой компании изобразим вершиной графа, а отношение знакомства между двумя участниками ребром. Изобразим графы, которые могут соответствовать такой компании.



Итак, ситуация, рассмотренная в задаче, вполне возможна. Но случай соответствует не одной, а двум компаниям, участники одной из них не знакомы с участниками другой.

Про граф говорят, что он связный, так как из каждой вершины по ребрам можно попасть в любую другую. Делаем вывод, что в этом случае каждый через своих знакомых может познакомиться со всеми остальными.

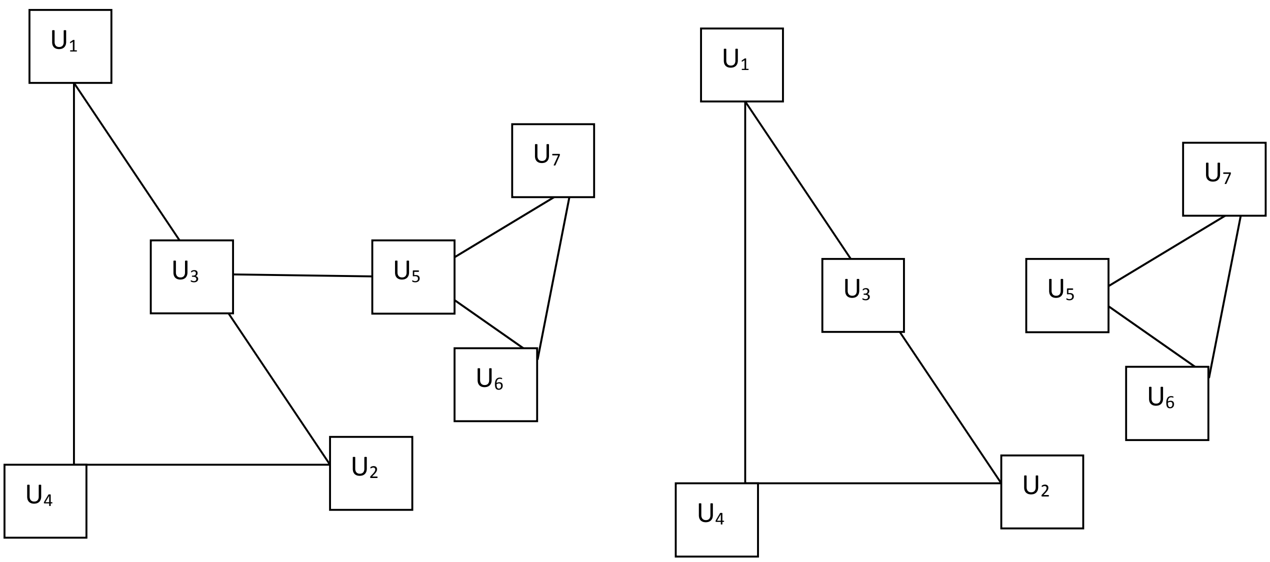
Во втором случае получились два простых цикла, не сцепленные между собой в вершинах. Такой граф называется несвязным.

Две вершины графа называются связными, если в графе существует путь с концами этих графов.

Две вершины графа называются несвязными, если в графе не существует ни одного пути, связывающего их.

Определение. Ребро (u_i, u_j) называется мостом, если в графе G(V,U), полученном после удаления ребра (u_i, u_j), вершины x_i и x_j несвязны.

Пример



В исходном графе ребро (u_3, u_5)является мостом.

Существует несколько признаков мостов:

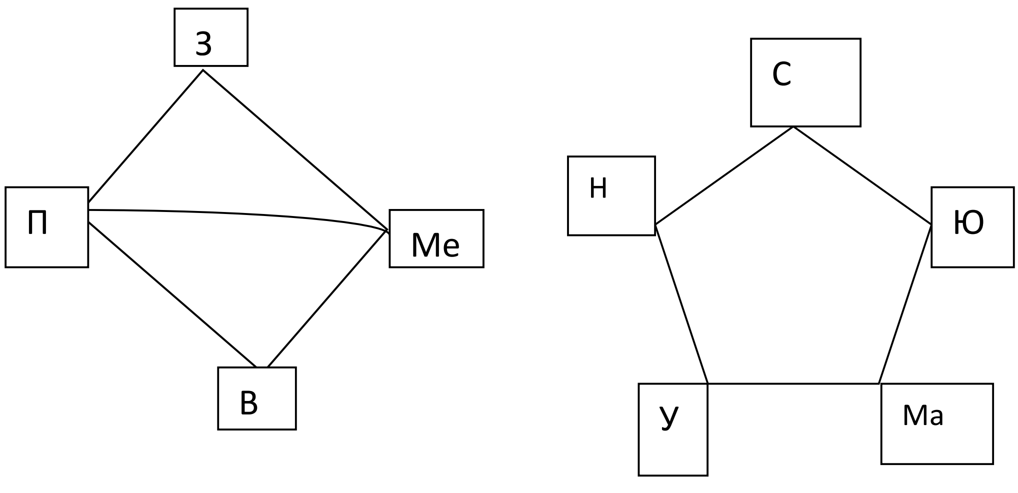
1) Ребро (u_i, u_j) является мостом тогда, и только тогда, когда (u_i, u_j)является единственным путем, соединяющим вершины u_i и u_j.

2) Ребро (u_i, u_j) является мостом тогда, и только тогда, когда найдутся две вершины u_k и u_m, такие, что любой путь, соединяющий их, содержит вершины u_i и u_j.

3) Ребро (u_i, u_j) является мостом тогда, и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

Задача5.2. Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Вене; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, а маршруты ракет – линиями.



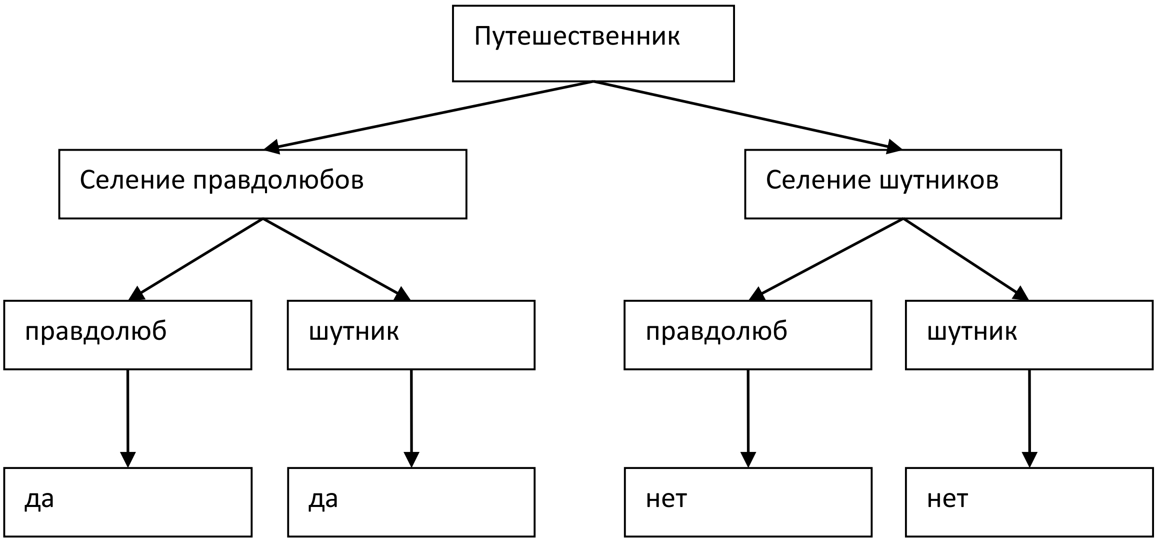
Теперь сразу видно, что долететь с Земли до Марса нельзя.

Задача5.3. Система точек, соединённых отрезками, называется "связной", если из каждой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

Решение: Такое возможно, например, если все точки соединены в цепь. (В качестве примера можно рассмотреть **задачу 5.2**)

Задача 5.4: На острове отдельными селениями живут правдолюбы и шутники. Правдолюбы постоянно говорят правду, а шутники всегда лгут. Жители каждого племени могут бывать в селении другого племени. Докажите, что путешественнику, попавшему в селение, достаточно задать первому встречному вопрос: Вы местный?, чтобы по ответу определить, в селении какого племени он находится.

У путешественника 4 возможности: он может оказаться в одном из двух поселений, где ему может попасться или правдолюб, или шутник. Корневое дерево ниже описывает эти возможности и ответы, полученные в каждом из случаев.



Таким образом можно увидеть, что если будет дан ответ “Да” то значит это селение правдолюбов, а если ответ “ нет ” то значит это селение шутников.

§1.6 Графы деревья.

Определение. *Связный граф без циклов называется деревом.*

Ребро произвольного графа G называется *циклическим*, если оно принадлежит хотя бы одному элементарному циклу в графе и ациклическим в противном случае. Примером ациклического ребра является висячее ребро. Справедливы два простых утверждения:[8]

1) при удалении из связного графа циклического ребра граф остается связным; 2) при удалении ациклического ребра граф становится несвязным.

Первое подтверждается возможностью для любой цепи заменить циклическое ребро цепью из остальных ребер цикла. Второе доказывается от противного: если бы граф оставался связным, то концы удаленного ребра были бы связаны элементарной цепью: возвратив удаленное ребро, получили бы элементарный цикл вопреки тому, что ребро ациклическое.

Связный граф без циклов называется деревом. Это определение исключает наличие на дереве петель и кратных ребер. Прямая сумма несвязных деревьев, рассматриваемая в целом, как граф, называется лесом.

Деревья определяются как графы, не имеющие циклов. Это одно из наиболее часто встречающихся в теории графов понятий, одновременно простое и удобное в обращении.

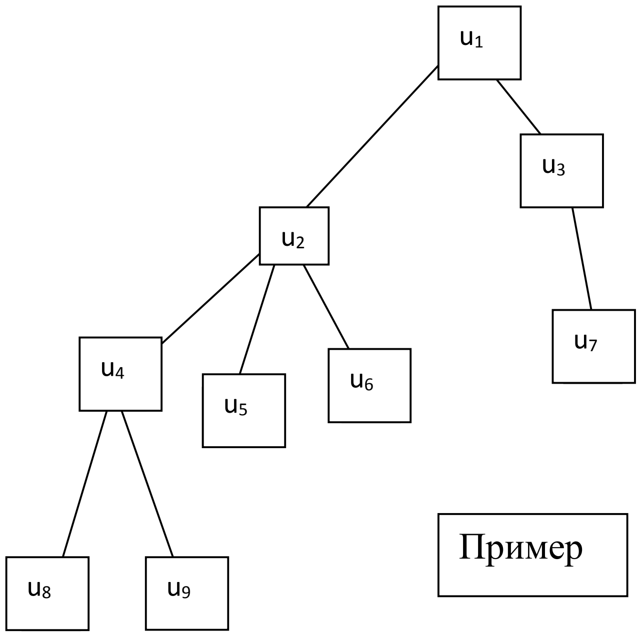
1) связный граф, который становится несвязным при удалении любого ребра;

2) связный граф, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин;

3) граф, любые две вершины которого связаны единственной элементарной цепью;

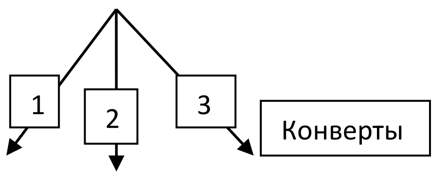
4) граф без циклов, в котором после добавления ребра, связывающего две любые вершины, появляется цикл.

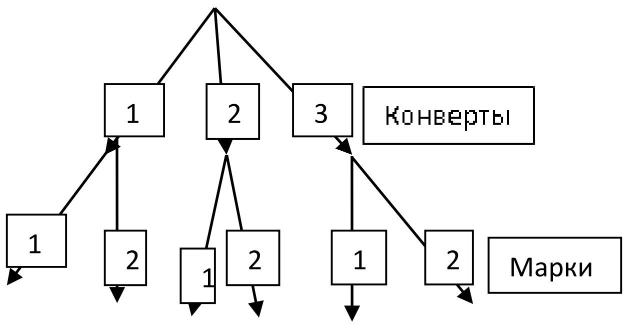
Определение. Вершина дерева, имеющая степень 1, называется висячей. По аналогии с генеалогическими деревьями вводятся родовые понятия для вершин.



Задача 6.1. Для отправки поздравления есть конверты трех видов, на которые клеится одна из двух марок и в которые вкладывается одна из четырех открыток. Сколько существует способов сделать поздравления по почте?

Решение. Занумеруем конверты, марки и открытки. Выбор одного конверта из трех можно изобразить следующим графом:

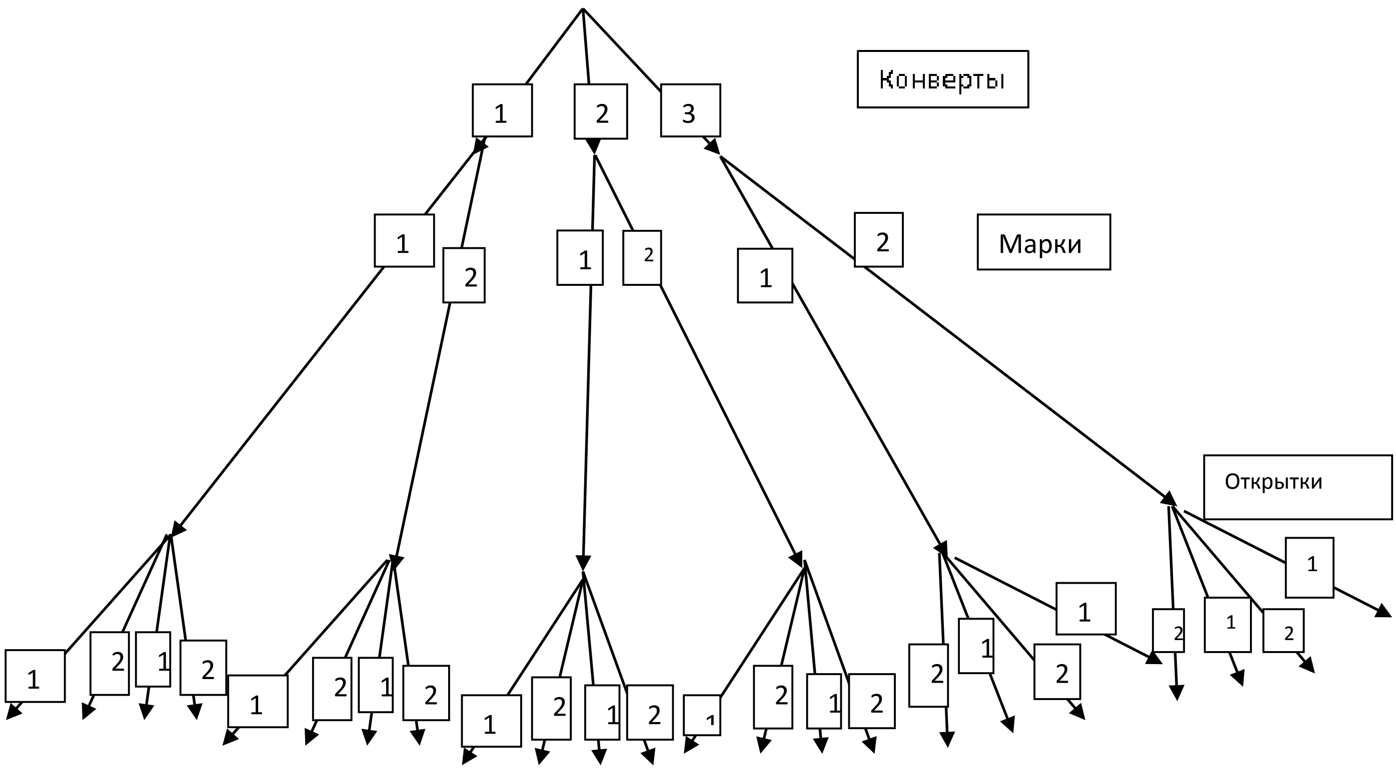




Выбор одного конверта *Наклеивание марок*

На каждый из выбранных конвертов можно наклеить одну из двух марок. Это изображается следующим графом.

Получилось 6 вариантов выбора конверта с маркой. В каждый из таких конвертов с маркой можно вложить одну из 4 открыток:



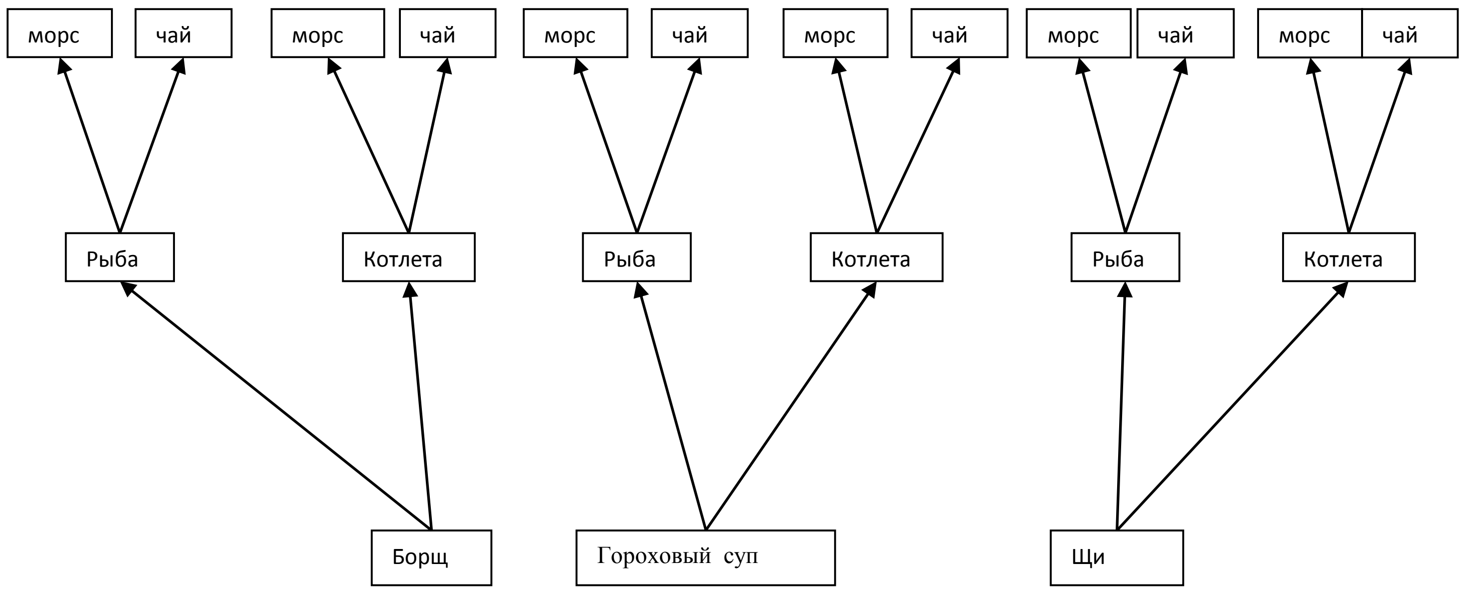
Нижние вершины графа задают варианты рассылки поздравлений.

Ответ: 24.

Задача 6.2. Меню

В школьной столовой на первое можно заказать щи, гороховый суп и борщ, на второе – котлету и рыбу, а на третье – чай и морс. Сколько вариантов обеда можно получить из указанных блюд?

Решение.

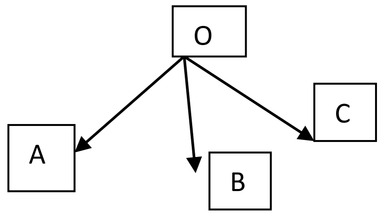


Ответ: 12 вариантов.

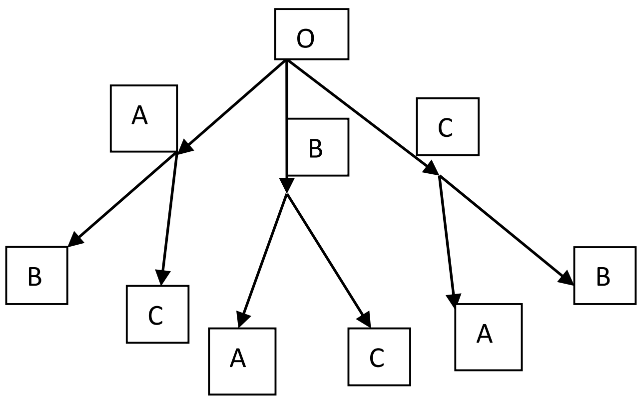
Задача 6.3. Сколькими способами можно рассадить в ряд на три стула трех учеников? Выписать все возможные случаи.

Решение этой задачи удобнее всего представить в виде дерева. За его корневую вершину возьмем произвольную точку плоскости О.

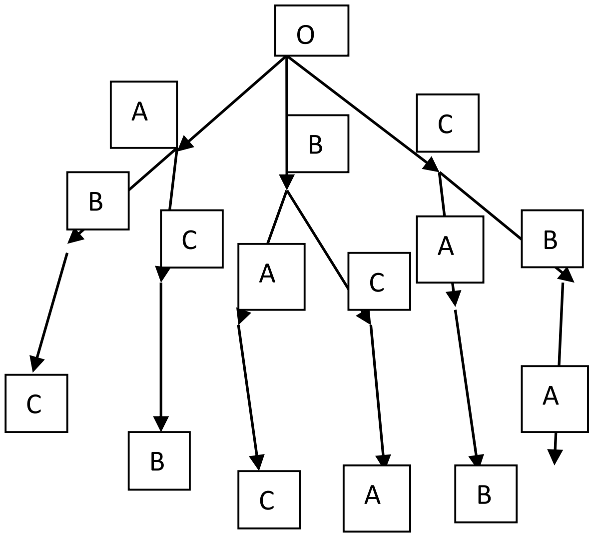
На первый стул можно посадить любого из трех учеников — обозначим их А, В и С. На схеме это соответствует трем ветвям, исходящим из точки О:



Посадив на первый стул ученика *А,* на второй стул можно посадить ученика *В* или *С.* Если же на первый стул сядет ученик *В,* то на второй можно посадить *А* или *С.* А если на первый стул сядет С, то на второй можно будет посадить *А* или *В*. Это соответствует на схеме двум ветвям, исходящим из каждой вершины первого уровня:



Очевидно, что третий стул в каждом случае займет оставшийся ученик. Это соответствует одной ветви дерева, которая «вырастает» на каждой из предыдущих ветвей.



Выпишем все пути от вершин первого уровня к вершинам третьего уровня: *A-B-C, A-C-B, BAC, B-C-A, C-A-B, C-B-A*. Каждый из выписанных путей определяет один из вариантов рассаживания учеников на стулья. Так как других путей нет, то искомое число способов — 6.

Дерево можно не строить, если не требуется выписывать все возможные варианты, а нужно просто указать их число. В этом случае рассуждать нужно так: на первый стул можно усадить одного из трех человек, на второй — одного из двух оставшихся, на третий — одного оставшегося: 3*2*1 = 6.

Теорема.6.1 Дерево с n вершинами содержит $n-1$ребро.

Доказательство. Проведем индукцией по n. При $n=2$ утверждение очевидно. Пусть дерево G содержит n вершин. Удалим из него какую-нибудь концевую вершину и инцидентное ей концевое ребро. Получим новое дерево, содержащее n-1 вершину и, по предположению индукции, $n-2$ ребра. Следовательно, исходное дерево содержит $(n+2)-1 = n - 1$ ребро.[5]

Задача. Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

Решение. Выделим один город и соединим его авиалинией с каждым из остальных 49 городов. Для этого потребуется 49 авиалиний. Меньшим числом авиалиний обойтись нельзя. Действительно, согласно теореме 5.1 в связном графе с 50 вершинами не менее 49 рёбер.

Выводы по первой главе

Данная глава посвящена теоретическим основам для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников. Рассмотрены специфика и перспективы использования изобразительного языка теории графов в школьном курсе математики. Охарактеризованы дидактические условия для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников.

Глава II. Разработка системы дополнительных занятий по теме "Элементы теории графов"

§1.Роль дополнительных занятий в развитии математического мышления

Математика занимает особое место в общем образовании человека. На протяжении многих лет происходит изменение отношения учащихся к математике. Наблюдается снижение популярности математики среди школьников, о чем свидетельствуют беседы с учащимися и учителями, а также низкие результаты в вузах с вступительными экзаменами по математике.[12]

Под дополнительным математическим образованием мы понимаем образовательный процесс, нацеленный на развитие учащихся, формирование у них интереса к математике и обеспечивающий расширение и углубление программного материала.

Дополнительное математическое образование призвано решить целый комплекс задач по углубленному математическому образованию, всестороннему развитию индивидуальных способностей школьников и максимальному удовлетворению их интересов и потребностей.

Дополнительное математическое образование также в первую очередь призвано решить проблему наглядности.

Исследуя *проблему наглядности*, *В.В.Давыдов* приходит к следующему весьма важному выводу: «…там, где содержанием обучения выступают внешние свойства вещей, принцип наглядности себя оправдывает. Но там, где содержанием обучения становятся связи и отношения предметов, - там наглядность далеко не достаточна. Здесь… вступает в силу принцип моделирования». [12]

А так как в курсе математики основным содержанием как раз являются разного рода отношения, то, следовательно, основным для этого курса является не принцип наглядности, а *принцип моделирования*.

В чем же состоит принцип моделирования, *принцип моделирования* не идет вразрез с принципом наглядности – он лишь является его следующей ступенью, его развитием и обобщением, связанным с кардинальными изменениями в целях обучения и типах учебного процесса.

Необходимо, в частности, чтобы учащиеся в процессе обучения овладели общими методами познания, общими способами учебной познавательной деятельности. А для этого нужно, очевидно, выделить, отделить эти методы и способы от тех понятий и явлений, для изучения которых они используются, и сделать их самостоятельным предметом изучения.

Как это можно сделать? Простой рассказ об этих весьма абстрактных вещах будет неэффективен, ибо мышлению ребенка в таком случае не на что опираться: у него нет чувственного образа этих методов и способов познания, они для него неотделимы от самого опыта познания.

Обычная наглядность также здесь помочь не может, ибо в реальной действительности, в окружающем предметном мире нет этих методов и способов. В то же время без опоры на какой-то чувственный образ овладение этими методами и способами как самостоятельными предметами содержания обучения невозможно. [8]

Единственный выход состоит в том, чтобы дать учащимся модели этих методов и способов в виде наглядных и легко обозримых схем, графиков или в каком-то другом виде. Тогда, непосредственным предметом изучения станут эти чувственно-воспринимаемые модели, а через них – опосредственно – и сами методы и способы.

Итак, моделирование в обучении необходимо для того, чтобы сделать возможным полноценное и прочное овладение учащимися методами познания и способами учебной познавательной деятельности.

П.Я. Гольперин выделил три различных типа ориентировки в процессе учения. Мы коснемся только третьего типа. При этом типе учащимся дается метод анализа объектов для самостоятельного составления полной ориентировочной основы действию.[13]

Для того, чтобы учащиеся могли усвоить этот общий метод анализа объектов и составления ориентировочной основы действий по решению частных задач при третьем типе ориентировки, нужно этот метод выделить и отделить от самих конкретных действий по решению частных задач и представить его в легко обозримом и наглядном виде. Сделать это можно только путем моделирования, построив обобщенную модель действий по решению любых задач данного вида, например в виде схемы.

В практике обучения математике, конечно, необходимо использовать и путь варьирования, и путь построения с помощью моделирования обобщенных ориентировочных основ действий, но второй путь является основным, а первый лишь вспомогательным, нужный главным образом для первоначального знакомства учащихся с изучаемым понятием.

Таким образом, моделирование в современных условиях работы учителя математики нужно использовать для формирования у учащихся полноценных умственных действий по третьему типу ориентировки, являющемуся наиболее эффективным и развивающим типом учения.[12]

Кроме того, моделирование в обучении математике необходимо еще и для формирования научно-теоретического стиля мышления.

Моделирование следует использовать в обучении математике и для развития рефлексирующей деятельности учащихся. Ведь очень важно, чтобы учащиеся не только умели произвести те или иные умственные действия, но и могли проанализировать эти действия, а главное – имели потребность в таком анализе, имели привычку к нему. К такому анализу надо постепенно приучать учащихся. Этому будут способствовать задания на составление различных *схем-моделей* изученного материала, составление схем действий по решению задач определенного вида и пр.[10]

Таким образом, принцип моделирования в обучении математике означает, во-первых, изучение самого содержания школьного курса математики с модельной точки зрения, во-вторых, формирование у учащихся умений и навыков математического моделирования различных явлений и ситуаций, наконец, в-третьих, широкое использование моделей как внешних опор для внутренней мыслительной деятельности, для развития научно-теоретического стиля мышления.

Программа для обучающихся 7 и 10 классов.

Пояснительная записка

Программа курса **«Графы»** своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 7 и 10 классов, которым интересна математика.

Курс освещает теорию графов, которая в настоящее время является интенсивно развивающимся разделом дискретной математики. Программа курса направлена на расширение кругозора и знаний учащихся, повышение уровня их математической подготовки через специально подобранный спектр математических задач.

Наряду с основной задачей обучения математики – обеспечением прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений – программа курса направлена на: формирование устойчивого интереса к предмету; выявление и развитие математических способностей; выбор профиля дальнейшего обучения; развитие личностных и межпредметных результатов обучения.

Основные формы и методы обучения: *компактное и чѐткое изложение основ теории графов, решение задач, проектная работа обучающихся, игровые и групповые формы организации занятий*.

Для обучающихся, которые пока не проявляют заметной склонности к математике, данный курс может стать толчком в развитии интереса к предмету и вызвать желание узнать больше.

Цель курса – ознакомление с основными понятиями, задачами и базовыми алгоритмами теории графов на доступном уровне.

Задачи курса: ознакомление учащихся с понятиями и методами теории графов; ознакомление учащихся с приемами и алгоритмами решения задач на языке теории графов; формирование умений распознавать задачи, решаемые с помощью графов и строить графовые модели; развитие логического и алгоритмического мышления школьников; развитие универсальных учебных действий обучающихся.

Данный курс рассчитан на по 6 часов в 7 и 10 классах то есть на 12 часов в совокупности[2]

Учебно-тематическое планирование для 7 класса

№	Название темы	Количество часов
1.	История графов	1
2.	Понятие графов	2
3.	Степень вершины графа. Четность и нечетность вершины	2
4.	Проектные работы	1

Учебно-тематическое планирование для 10 класса

№	Название темы	Количество часов
1.	Повторение	1
2.	Связность графа и разложение на связные компоненты	1
3.	Дерево в графе	2
4.	Практическое применение графов	1
5.	Проектные работы	1

§2.Разработки уроков для 7 классов

Конспект занятия №1

Тема: *«История графов.»* (1ч)

Цели урока: Образовательные: изучить историю происхождения теории графов; рассмотреть задачи, приводящие к графам

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: традиционный.

Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.

Форма организации урока: фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Экскурс в историю возникновения теории графов; (10 мин)
3. Введение в теорию графов с помощью задач (15 мин)
4. Практикум: решение задач; (10 мин)
5. Итог урока; (5 мин)
6. Рефлексия; (3 мин)

Ход занятия

Организационный момент

В наше время теория графов один из наиболее востребованных разделов в изучении дискретной математики. С графами, сами того не замечая, мы сталкиваемся постоянно. Например, графом является схема линий метрополитена. Точками на ней представлены станции, а линиями — пути движения поездов (Рис 2.1). Исследуя свою родословную и возводя ее к далекому предку, мы строим так называемое генеалогическое древо. И это древо — граф (Рис 2.2).[5]

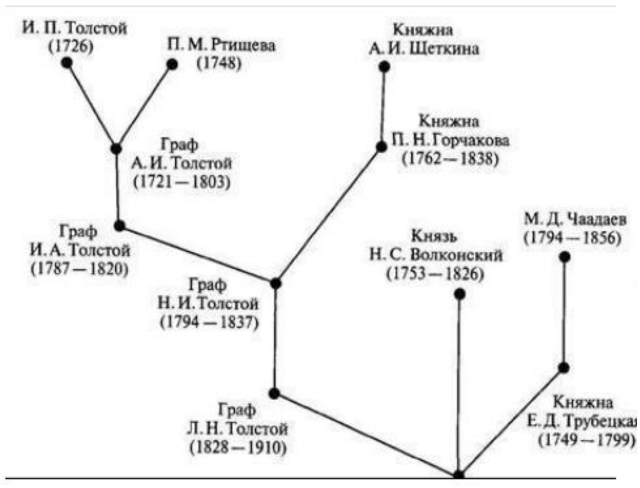


Рис. 2.1 Рис. 2.2

1.Экскурс в историю возникновения теории графов

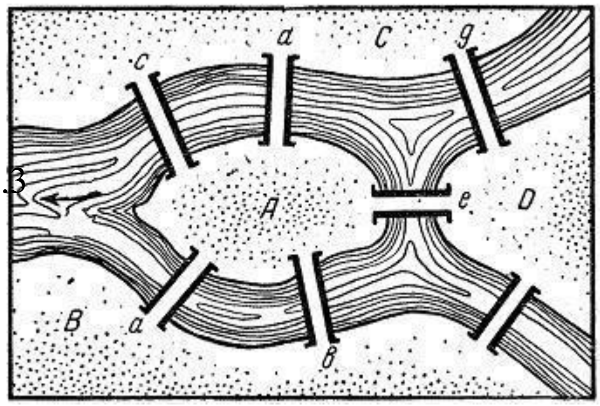
Основоположником теории графов принято считать Леонарда Эйлера, это швейцарский математик, который начал свою работу о графах с рассмотрения одной головоломки «**Задача о кѐнигсбергских мостах**», с которой мы с вами сейчас и познакомимся.

Эта старинная математическая задача, в которой спрашивалось, как можно пройти по всем семи мостамКѐнигсберга, не проходя по одному из них дважды и вернуться обратно (Рис. 2.3).

Задание: Подумайте над решением задачи и предложите свой вариант решения.

Для наглядности учитель раздает ученикам карточки с изображением города и мостов и с условием задачи «Можно ли, выйдя из дома, прогуляться по всем мостам по одному разу и вновь вернуться домой?».

Рис. 2.3

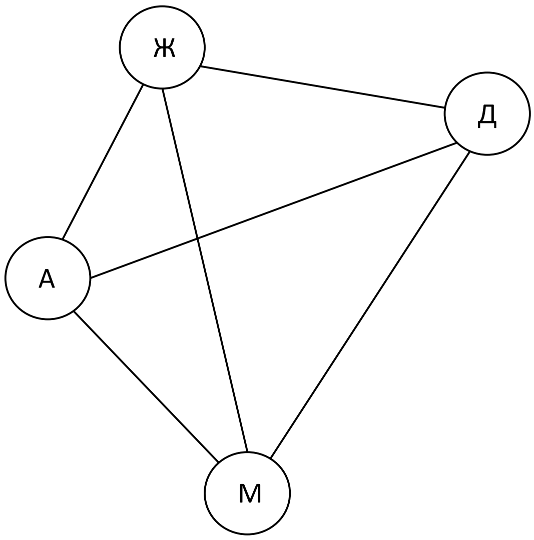


Ученики приходят к выводу, что задача не решаема.

2. Задачи, приводящие к графам.

Задача 2.1. Женя, Дима, Максим и Алеша сыграли между собой по одной партии в шахматы. Сколько всего партий было сыграно?

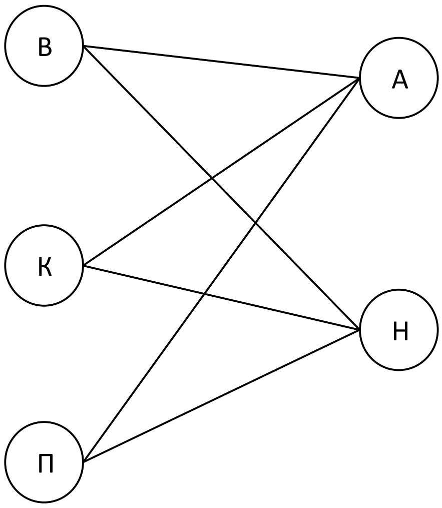
Решение: Женя сыграл партию с Димой, партию с Максимом и партию с Алешей - всего три партии. Дима также сыграл три партии - с Женей, Максимом и Алешей. Но партию Димы с Женей мы уже посчитали. Остается добавить одну партию, которую сыграли Максим с Алешей. Поэтому искомое число партий равно значению выражения 3+2+1. Проще решить эту задачу с помощью рисунка.



Каждая линия обозначает сыгранную партию. Всего на схеме 6 линий, значит всего сыграно 6 партий.[4]

Задача 2.2. Вася, Коля, Петя, Аня и Наташа - лучшие лыжники в пятом классе. Для участия в соревнованиях нужно выбрать из них одного мальчика и одну девочку. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Эту задачу можно решить с помощью следующей схемы.

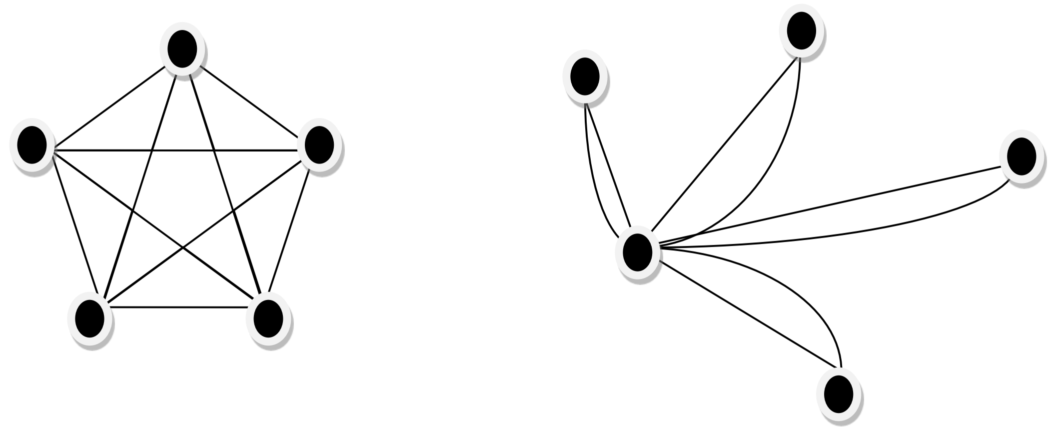


Ответ: 6 способов.

. **Задача 2.3**. Пятеро ученых, участвовавших в научной конференции, обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

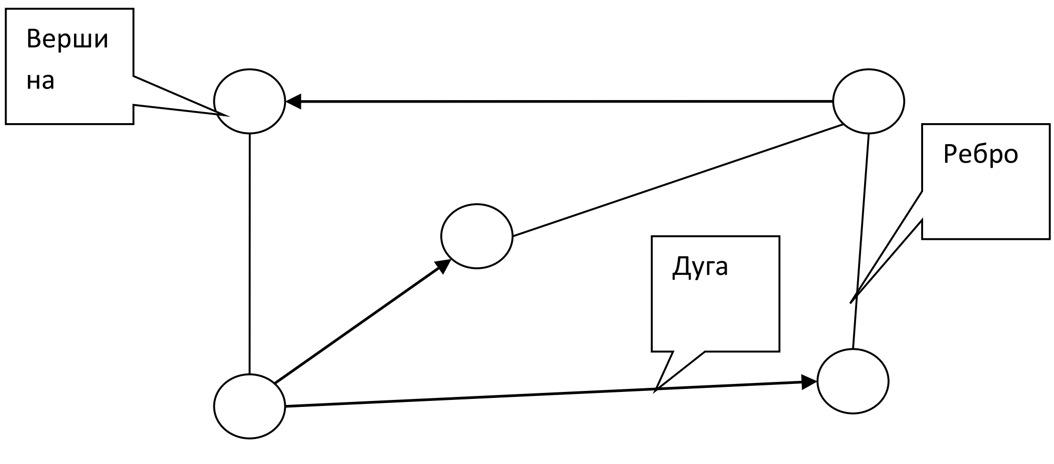
На прощание эти ученые обменялись визитными карточками. Сколько карточек было передано из рук в руки?

Решение:



Ответ: 10 рукопожатий, 20 визитных карточек. Таким образом можно прийти к понятию графа.

Граф– это система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (геометрический способ задания графа – см. рисунок.



Кружки называются <u>вершинами</u> графа, линии - <u>рёбрами.</u>

3. Практикум: Привести примеры графов из жизненных ситуаций

4. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Задания для домашней работы:

а) Постройте граф с 5 вершинами и 10 ребрами;
б) Постройте граф с 3 вершинами и 6 ребрами;
в) Постройте граф с 4 вершинами и 3 ребрами.

Конспект занятия №2

Тема**: *«Понятие графов»***

Цели урока:

Образовательные: подробно изучить основные понятия теории графов; понять способы применения графов на практике

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: комбинированный, традиционный.

Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.

Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

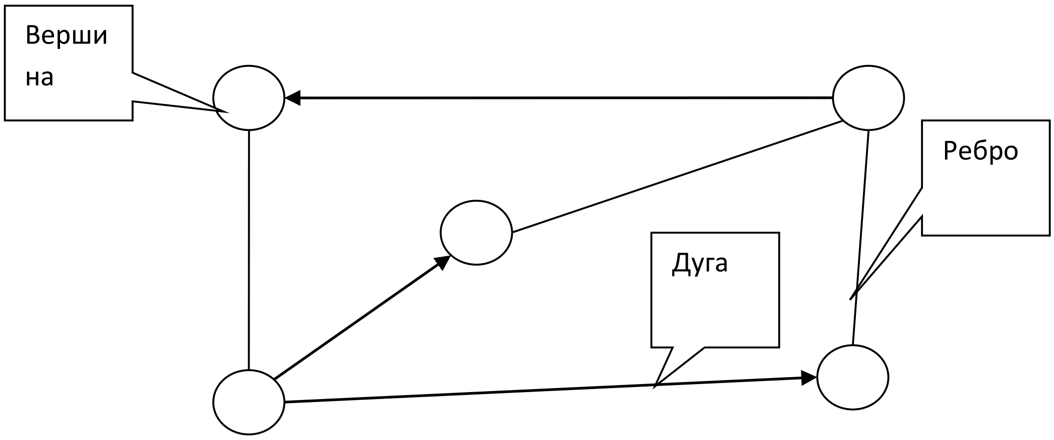
План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Повторение темы прошлого урока (5 мин)
3. Подробное рассмотрение понятий графа (15 мин)
4. Практикум: решение задач; (20 мин)
5. Итог урока; (3 мин)

1. Организационный момент

2. Повторение темы прошлого урока:

Граф– это система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (геометрический способ задания графа – см. рисунок.[15]



Кружки называются <u>вершинами</u> графа, линии - <u>рёбрами.</u>

3. Введение в теорию графов (основные понятия)

Итак, давайте сформулируем определения и теоремы, на которых будем строить наши знания о графах.

Учитель проговаривает определение устно. Граф -это набор точек, некоторые из которых соединены линиями. Отметим, что не все точки могут быть соединены друг с другом.

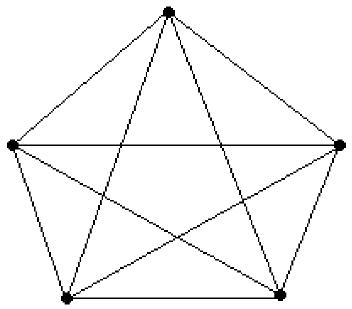
4.Практикум

Задача 2.1: В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Решение: Ни из какого города-цифры, не кратной 3, нельзя долететь в город-цифру, кратную 3.

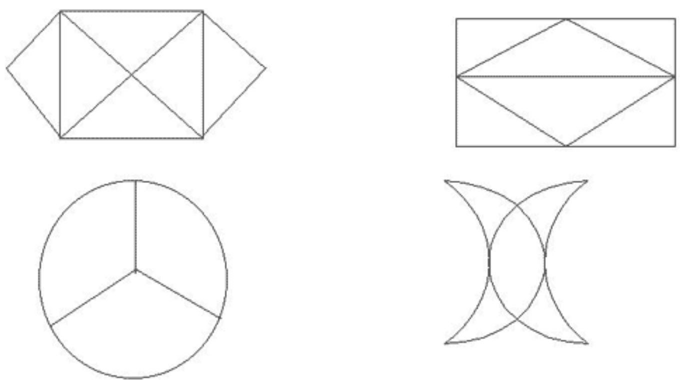
Ответ: Нельзя.

Задача 2.2: Пятеро ученых, участвовавших в научной конференции, обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?



Ответ: Каждое ребро графа – одно рукопожатие. 10 рукопожатий.

Задача 2.3: Определите, какие фигуры можно построить, а какие нельзя.



Задача 2.4: В трёх вершинах пятиугольника расположили по фишке (см. рис. 1). Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами (см. рис. 2)?

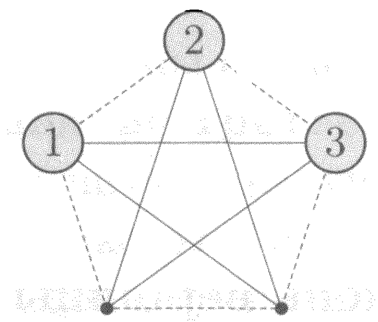


рис.1

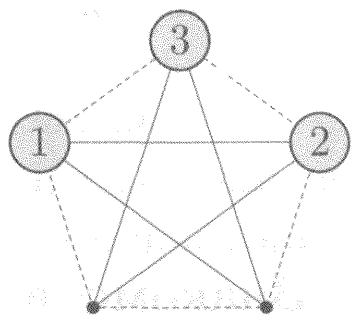


рис.2

Решение: Заметим, что диагонали пятиугольника образуют один замкнутый цикл. Представим себе, что фишки — это пуговицы, нанизанные на нитку (см. рис.3). Ясно, что если двигать пуговицы по нитке, то поменять местами две пуговицы нельзя.

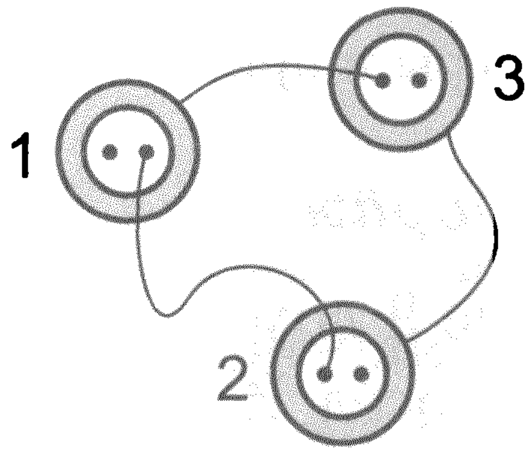


рис3

5. Итог урока

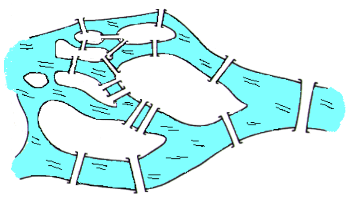
Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Домашнее задание

а) Придумать два графа, которые можно обвести одним росчерком и два – которые нельзя. (приготовить карточку с графами для «соседа»).

б)Решить задачу.

Через реку, омывающую шесть островов, перекинуто семнадцать мостов. Можно ли обойти все эти мосты, не побывав ни на одном из них более одного раза?



Конспект занятия №3

***Тема*: «Решение задач»**

Цели урока:

Образовательные: подробно изучить основные понятия теории графов; понять способы применения графов на практике

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: комбинированный, традиционный.
Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.
Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Повторение темы прошлого урока (5 мин)
3. Фронтальный опрос (10 мин)
4. Практикум: решение задач; (25 мин)
6. Итог урока; (3 мин)

Задача.1 Четыре шахматных коня — два чёрных и два белых — расположены в угловых клетках доски 3x3, как показано на рисунке 4. Кони могут передвигаться на свободные клетки по обычным правилам. Можно ли сделать так, чтобы в верхних углах стояли белые кони, а в нижних — чёрные?

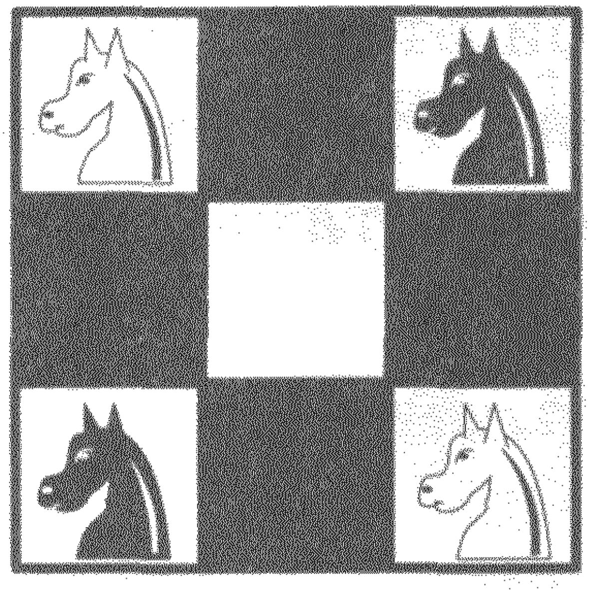


рис.1

Ответ: нет, нельзя.

Решение: Занумеруем клетки доски числами, как показано на рисунке 6а. Построим граф (см. рис.2 и 3), вершины которого будут соответствовать клеткам доски, а ребра соединять клетки, находящиеся на расстоянии одного хода коня (то есть такие клетки, что из одной в другую можно попасть за один ход коня).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

рис.2

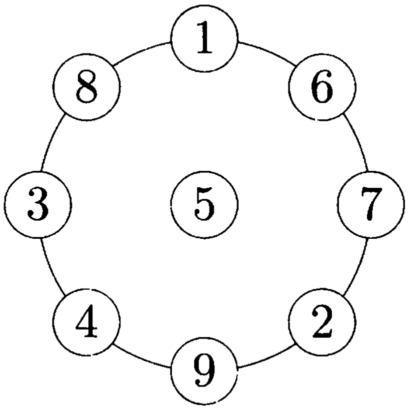


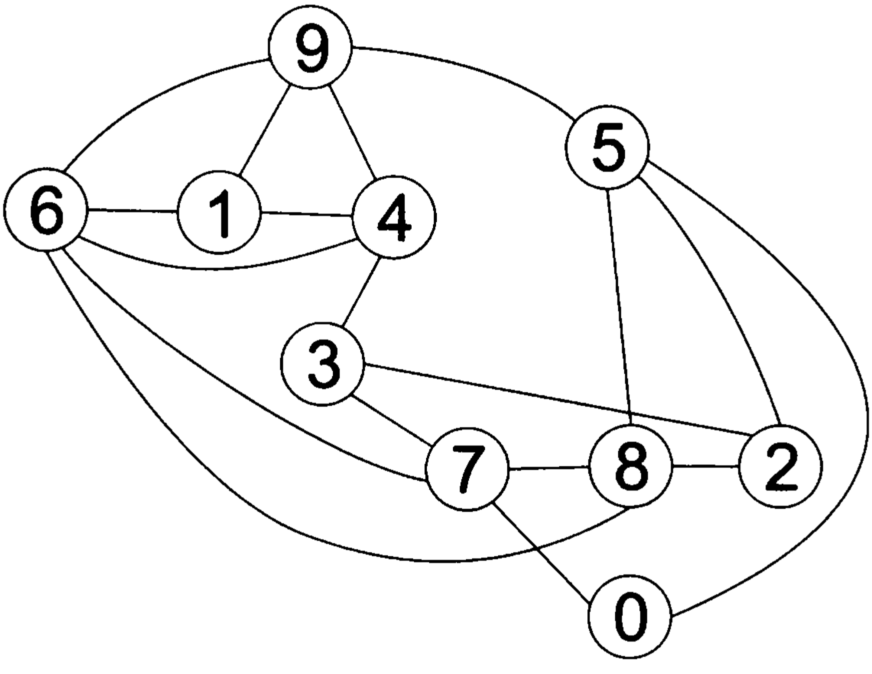
рис.3

Изначально кони расположены так: на клетках 1 и 9 — чёрные, а на 3 и 7 — белые. Чтобы выполнить требуемые по условию задачи перестановки коней, нужно, чтобы, двигаясь по вершинам графа, какие-то два разноцветных коня «перешагнули» друг через друга. Однако по условию это не разрешается, следовательно, требуемое перемещение невозможно.

Задача.2 Можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих цифр делилась либо на 5, либо на 7, либо на 13?.

Ответ: да, можно.

За вершины примем цифры 0, 1, 2, ..., 9. Если сумма двух рядом стоящих цифр делится на 5, либо на 7, либо на 13, то соединим соответствующие вершины ребром. Получим граф:



Теперь несложно получить одно из возможных нужных расположений цифр: 0 — 7 — 3 — 4 — 6 — 1 — 9 — 5 — 2 — 8.

Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Домашнее задание

Конспект занятия №4

***Тема*: «Степень вершины графа. Четность и нечетность вершины»**

Цели урока:

Образовательные: изучить степени вершины графов; изучить лемму о рукопожатиях

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: комбинированный, традиционный.

Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.

Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

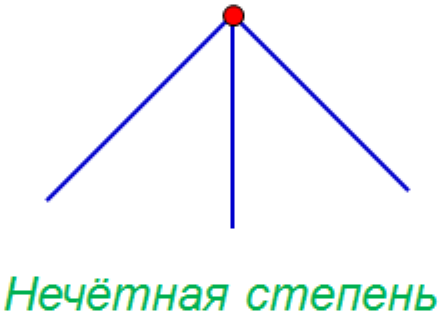
Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Повторение темы прошлого урока (5 мин)
3. Подробное рассмотрение понятий графа (15 мин)
4. Практикум: решение задач; (20 мин)
5. Итог урока; (3 мин)

Степенью вершины называют количество ребер, выходящих из одной вершины. Степень графа обозначают $d(v)$. Вершина графа, для которой $d(v)=0$, является изолированной, для которой $d(v)=1$ – висячей.

Примеры четности и нечетности вершин можно рассмотреть на рисунке 2



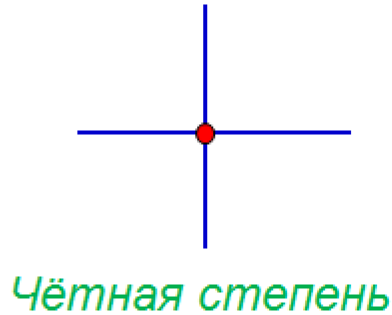


рис.2

Так, например, в графе, изображенном на рисунке 3, вершина А имеет степень 3, вершины В, Д, Е — степень 2, вершина С — степень 1или более краткая запись

d(A)=3, d(B)=2,d(Д)=2, d(E)=2 d(C)=1, d(Б)=0

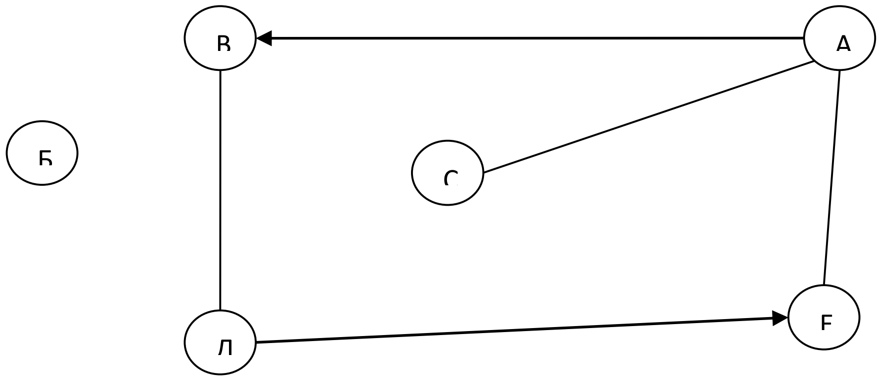
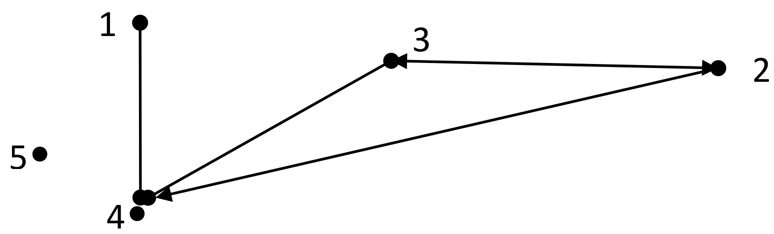


Рис. 3

Задание: Определите степени вершин: d(1), d(2), d(3), d(4), d(5).Обратим внимание на вершину 5 (рис. 2.1), d(5)=0, такая вершина называется *изолированной*, а вершина степени 1- *висячей* (например, на рис. 3 висячей является вершина В).



В качестве примера рассмотрим задачу: «На соревнованиях по теннису участвовало 5 спортсменов. Во время церемонии открытия каждый пожал руку друг другу. Сколько рукопожатий было совершено?»

Решение: Для решения этой задачи изобразим ее условие графически, представив спортсменов - точками, а их рукопожатия- соединяющими точки линиями (Рис. 2.2).

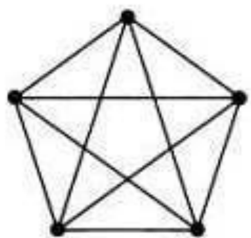


Рис. 2.2

Изобразив условие этой задачи с помощью рисунка, можно легко посчитать линии обозначающие рукопожатия и сказать ответ, но как вы поступите, если количество участников в условии задачи увеличится до 100?

Ученики предлагают свои варианты решения.

Учитель: поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки, то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук (при этом каждая рука учитывается столько раз, во скольких рукопожатиях она участвовала) равно удвоенному числу рукопожатий.

Лемма о рукопожатиях. Сумма степеней всех вершин графа четное число, равное удвоенному числу ребер.[6]

Следствие из леммы о рукопожатиях.

1. В графе число вершин нечетной степени – четное.
2. Число ребер в полном графе n(n-1)/2 (граф полный – если любые две его вершины смежные). [6]

4. Практикум: решение задач

1. Можно ли 15 телефонов соединить проводами так, чтобы каждый был соединѐн ровно с 5 другими?

Ответ: Рассмотрим граф, в котором телефоны — это вершины. Вершины будем соединять ребром, если телефоны соединены проводом. В любом графе число нечетных вершин четно. Значит, так соединить телефоны не получится.

2. В компании каждый пожал руку каждому, всего сделано 15 рукопожатий, сколько человек в компании?

Ответ: q=15, n=?

q=((n-1)*n)/2;

30=(n-1)*n;

n=6.

5. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Задания для домашней работы:

1. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
2. В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван, Антон, у Максима сосед Иван и Сергей, Виктор сосед Диме и Никите, Евгений сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет. Может ли Петр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Конспект занятия №5

Тема*: *«Решение задач»

Цели урока:

Образовательные: изучить степени вершины графов; изучить лемму о рукопожатиях, углубить понимание темы с помощью решения задач

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: комбинированный, традиционный.

Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.

Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Групповой опрос; (20 мин)
3. Самостоятельная работа; (20 мин)
4. Итог урока; (3 мин)

1.Организационный момент; (2 мин)

2. Повторение темы прошлого урока (20 мин). (Путем устного опроса и решения задач в тетрадях)

Вопросы

1. Что такое граф?

2. Что такое степень вершины?
3. Какая вершина называется висячей?
4. Какие вершины называются смежными?

(Объяснение ведется с помощью чертежей нарисованных самим учеником либо заранее приготовленных рисунков)

Задания на оценки.

1.В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве? **Ответ:** $100 \cdot 4 : 2 = 200$.

2. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства одно, пять или девять соседних баронств? **Подсказка:** В графе соседства баронств было бы 19 нечётных вершин. **Ответ:** Не может.

3. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
а)8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

Решение а) В графе из восьми вершин степень 8 встретиться не может. б) Если есть две вершины, связанные со всеми, то степень каждой из остальных вершин не меньше 2. в) Сумма степеней вершин должна быть чётной. **Ответ** а)-в) Не может.

5. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Задания для домашней работы: Придумать три графа, которые можно обвести одним росчерком и 5 – которые нельзя. Также составить проектные работы с применением графов на практике.

§3.Разработки уроков для 10 классов

Конспект занятия №1

***Тема*: «Повторение темы 7 класса.**

Понятие графов»

Цели урока: Образовательные: повторить основные понятия теории графов; **Воспитательные:** воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: комбинированный.
Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.
Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Повторение темы (15 мин)
3. Практикум: решение задач; (25 мин)
4. Итог урока; (3 мин)

1.Организационный момент; (2 мин)

2. Вопросы для повторения

1. Что такое граф? Из каких элементов он состоит?
2. Что означает инцидентность ребра?
3. Что такое степень вершины графа?

Привести примеры.

3. Повторение темы 7 класса.

Пусть дано множество$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$и в V определено семейство $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ пар элементов $u_k = \{v_i, v_j\}, (k = 1, m)$ произвольной кратности и упорядочения.Пара$\{V, U\}$именуется: *граф*.

Элементы$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ называются *вершинами* графа, а пары $u_k = \{v_i, v_j\}$, $(k = 1, m)$ — *ребрами*.

Определению графа можно дать следующую интерпретацию. Пусть имеем описание графа:

$$G(V, \mathrm{E}) = \{\{v_1, v_2, \dots, v_6\}, \{\{v_1, v_3\} < v_5, v_1 >, \{v_3, v_4\}, < v_2, v_3 >, \{v_3, v_3\}\}\}.$$

Это описание можно отобразить графически, как показано на рисунке .1. На этом рисунке некоторые ребра отмечены стрелкой, а соответствующие им пары вершин в описании графа выделены угловыми скобками.

Это связано с тем, что для некоторого произвольного ребра можно принимать или не принимать во внимание порядок расположения его концов.

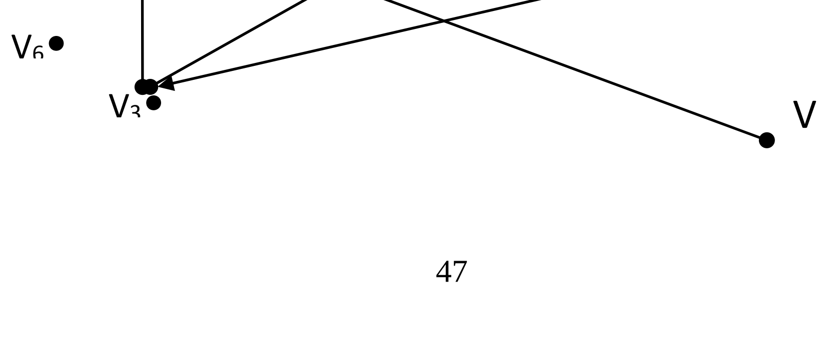


Рис.1

Если этот порядок не существенен, то ребро называется *неориентированным*, в противном случае ребро называется *ориентированным*. Ориентированные ребра называются также *дугами*.

Для ориентированного ребра определены понятия *начальной и конечной вершины*.

Начальная вершина записывается в начале пары вершин, определяющих дугу,а конечная — в конце. Так на рисунке. 1 ребра

$< v_5, v_1 >$, и $< v_2, v_3 >$ являются дугами. Они представлены упорядоченными парами вершин и, в связи с этим, обозначены так же, как обозначаются упорядоченные множества.[8]

Ребра $\{ v_1, v_3\}\{v_3, v_4\}$неориентированы. Для любого неориентированного ребра полагают, что$\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$ то есть порядок вершин не имеет большого значения.

Некоторые вершины графа G могут не войти в список пар. Такие вершины именуются *изолированными*. В рассмотренном примере это вершина v_6. Граф, у которого все вершины изолированы, именуется *нуль-графом*. Множество ребер такого графа пусто.

Антиподом нуль-графа является *полный граф*. Ребрами полного графа являются всевозможные пары его вершин.

Как в случае ориентированного графа, так и в случае неориентированного — говорят, что ребро *инцидентно* паре определяющих его вершин.

Граф называется плоским, если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер есть его вершины. [8]

Степенью вершины называют количество ребер, выходящих из одной вершины. Степень графа обозначают $d(v)$. Вершина графа, для которой $d(v) = 0,$ является изолированной, для которой $d(v) = 1 -$ висячей.

4. Практикум: решение задач

Задача. 1. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Решение: Пусть в столицу входит a дорог. Тогда общее число "входящих" дорог равно $21\cdot 100 + a$, а общее количество "выходящих" дорог не больше $20\cdot 100 + (100 - a)$. Поэтому $21\cdot 100 + a \le 20\cdot 100 + (100 - a)$, то есть $2a \le 0$. Таким образом, $a = 0$.

Задача. 2 Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

Решение: Рассмотрим шесть улиц, выходящих из центра города в разных направлениях (то есть шесть отрезков с общим началом и без других общих точек). Пешеход может, выйдя из центра, пройти каждую улицу туда-обратно. Но, очевидно, пройти по каждой улице ровно один раз невозможно.

Ответ: Могло.

Задача. 3 Докажите, что не существует многогранника, у которого было бы ровно семь рёбер.

Подсказка

Из каждой вершины многогранника выходит не меньше трёх рёбер.

Решение

Если у многогранника четыре вершины, то это тетраэдр, имеющий шесть рёбер. Пусть число n вершин многогранника не меньше пяти. В каждой вершине многогранника сходится по крайней мере три грани, таким образом, из каждой вершины многогранника выходит не меньше трёх рёбер. Значит, всего ребёр не меньше чем $^{3n}/_{2} > 7$.

5. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Конспект занятия №2

***Тема*: Связность графа и разложение на связные компоненты**

Цели урока:

Образовательные: ввести понятие маршрута, связности и разложения на компоненты в графе;

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: комбинированный.

Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.

Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

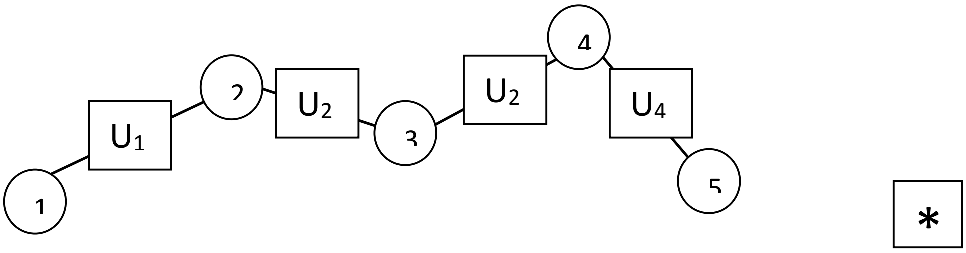
1. Организационный момент; (2 мин)
2. Объяснение понятия маршрута и связности (25 мин)
3. Практикум: решение задач; (15 мин)
4. Итог урока; (3 мин)

1.Организационный момент; (2 мин)

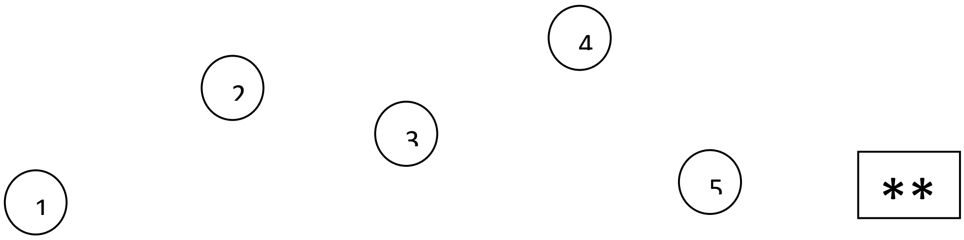
2. Понятие маршрута и связности.

Маршрут на графике — это последовательность ребер $U_1, U_2, \dots U_n$, в которой конец одного ребра служит началом другого.

Определение. Пусть G – конечный граф. Маршрутом S в G называется последовательность ребер, $S = (U_1, U_2, \dots U_n)$, * в которой любые соседние два ребра U_{i-1}, U_i, $(i = \overline{2, n})$ имеют общую вершину. Пусть на графе определен маршрут (*). Та вершина ребра U_1, которая не является общей с вершиной ребра U_2, называется начальной вершиной маршрута S.



Нуль-маршрутом называется маршрут, не содержащий ребер.(**)



Определение. Две вершины графа называются связными, если в графе существует маршрут с концами в этих вершинах, и несвязными в противном случае. В качестве примера связности и несвязности графов можно рассмотреть следующие чертежи [15]

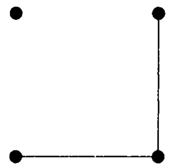


рис.1

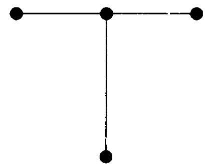


рис.2

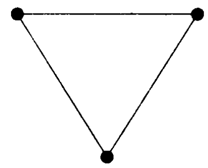
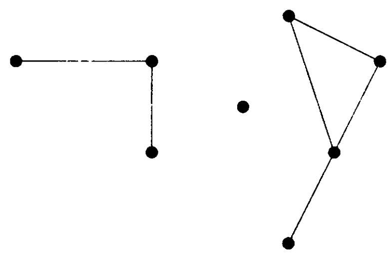


рис.3

На первом рисунке мы видим, что граф несвязен, на втором — связный граф без циклов, на третьем у графа есть цикл. Возникает вопрос: а как выглядит несвязный граф? Он состоит из нескольких «кусков». Так, например, граф, изображённый на рисунке 4, состоит из трёх «кусков», а на рисунке 5 — из двух «кусков». Эти куски называются компонентами связности графа. Связный граф имеет одну компоненту связности



.

рис.4

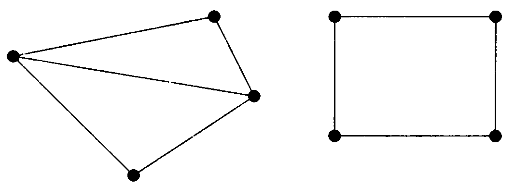
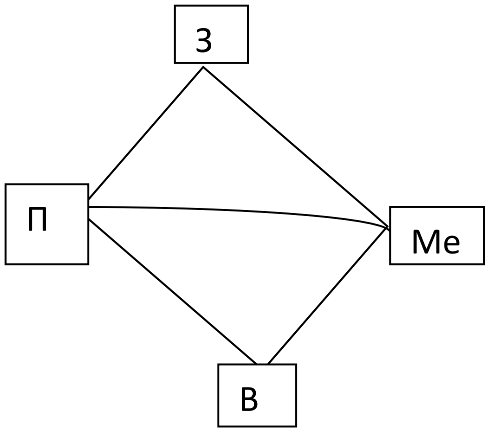


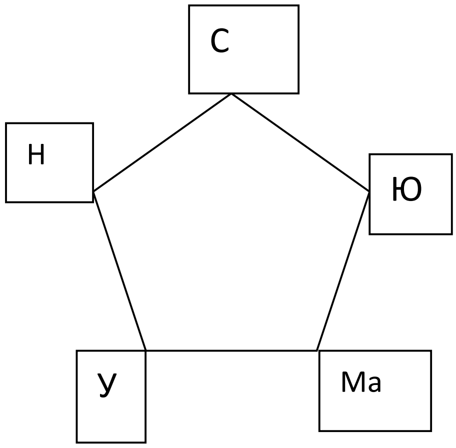
рис.5

3. Практикум

Задача 1.Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Вене; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, а маршруты ракет – линиями.





Теперь сразу видно, что долететь с Земли до Марса нельзя.

Задача 2. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связен.

Решение

Рассмотрим две произвольных вершины и предположим, что они не соединены путем, то есть такой последовательностью ребер, в которой начало очередного ребра совпадает с концом предыдущего. Каждая из этих двух вершин по условию соединена не менее, чем с ${}^{n-1}/_2$ другими; при этом все упомянутые вершины различны – ведь если какие-то две из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные вершины. Таким образом, в графе не менее $\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+2=n+1$ вершин. Противоречие.

Задача 3. Система точек, соединённых отрезками, называется "связной", если из каждой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

Решение: Такое возможно, например, если все точки соединены в цепь.

Ответ: Можно.

4. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Конспект занятия №3

***Тема*: Дерево в графе**

Цели урока: Образовательные: ввести понятие дерева в графе;

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.

Тип урока: комбинированный.

Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.

Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Повторение темы прошлого урока (10 мин)
3. Пояснение темы дерево в графе; (20 мин)
4. Практикум (10 мин)
5. Итог урока; (3 мин)

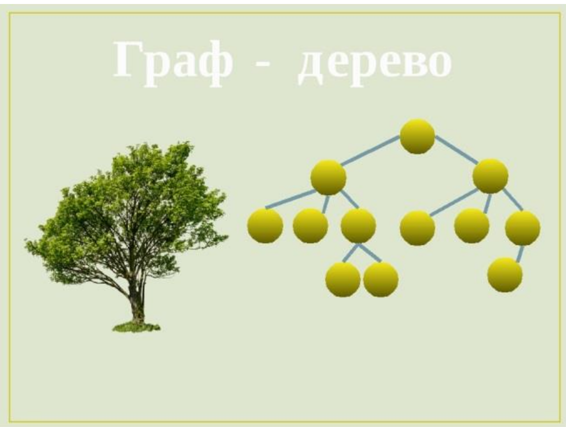
1.Организационный момент; (2 мин)

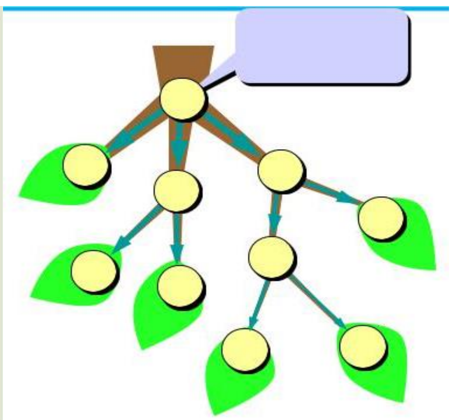
2. Вопросы для повторения

1. Что такое маршрут в графе?
2. Какую роль играет маршрут в определении связности графа?
3. Если в графе имеются две несвязные вершины, будет ли граф связным?

Привести примеры.

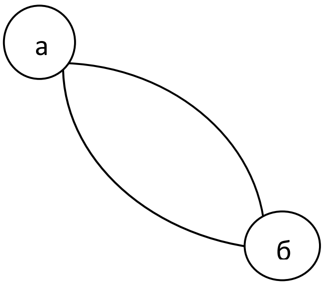
3. Понятие дерева в графе .



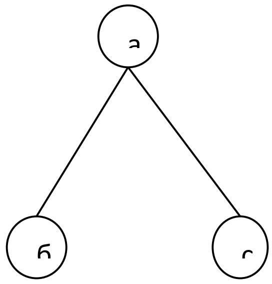


Определение. *Связный граф без циклов называется деревом.*

Ребро произвольного графа G называется циклическим, если оно принадлежит хотя бы одному элементарному циклу в графе и ациклическим в противном случае. Примером ациклического ребра является висячее ребро. Справедливы два простых утверждения:



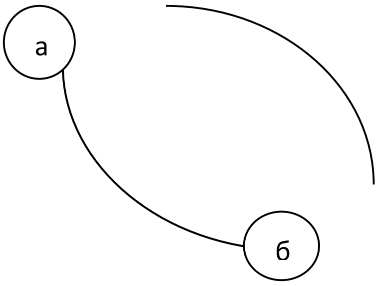
Граф с циклом



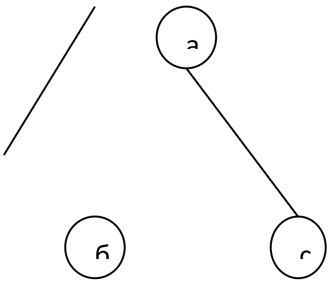
Граф без цикла

1) при удалении из связного графа циклического ребра граф остается связным;

2) при удалении ациклического ребра граф становится несвязным.



Остался связным



Стал несвязным

Первое подтверждается возможностью для любой цепи заменить циклическое ребро цепью из остальных ребер цикла. Второе доказывается от противного: если бы граф оставался связным, то концы удаленного ребра были бы связаны элементарной цепью: возвратив удаленное ребро, получили бы элементарный цикл вопреки тому, что ребро ациклическое.

Связный граф без циклов называется деревом, а висячие вершины лепестками. Это определение исключает наличие на дереве петель и кратных ребер.

1) связный граф, который становится несвязным при удалении любого ребра;

2) связный граф, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин;

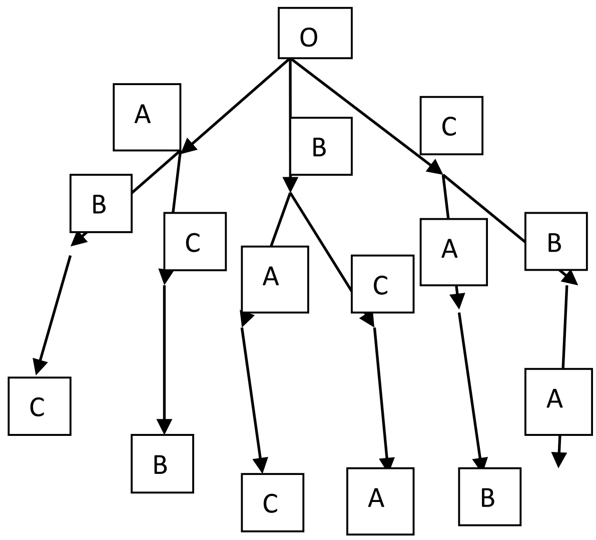
3) граф, любые две вершины которого связаны единственной элементарной цепью;

4) граф без циклов, в котором после добавления ребра, связывающего две любые вершины, появляется цикл.

Для более глубокого понимания темы необходимо дать задачу, в которой она непосредственно применяется.

Задача. 1. Сколькими способами можно рассадить в ряд на три стула трех учеников? Выписать все возможные случаи

Замечание. *Данную задачу можно решить с помощью основной формулы комбинаторики* $P_n = n!$, *если только требуется указать число возможных способов рассадки учеников. Однако для лучшего понимания, желательно использовать древовидную структуру.* [9]



Теорема. Дерево с n вершинами содержит $n-1$ребро.[8]

Доказательство. Проведем индукцией по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть дерево G содержит n вершин. Удалим из него какую-нибудь концевую вершину и инцидентное ей концевое ребро. Получим новое дерево, содержащее n-1 вершину и, по предположению индукции, $n-2$ ребра. Следовательно, исходное дерево содержит $(n+2)-1 = n - 1$ ребро.

4. Практикум: Решить задачи графическим путем

Задача. 1. Меню: В школьной столовой на первое можно заказать щи, гороховый суп и борщ, на второе – котлету и рыбу, а на третье – чай и морс. Сколько вариантов обеда можно получить из указанных блюд?

Задача. 2. Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.(Указание: применить метод от противного)

4. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Конспект занятия №4
***Тема*: **Решение задач на древо

Цели урока:

Образовательные: ввести понятие дерева в графе;
Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.
Тип урока: комбинированный.
Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.
Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (2 мин)
2. Повторение темы прошлого урока (10 мин)
3. Практикум (10 мин)
4. Итог урока; (3 мин)

1.Организационный момент; (2 мин)
2. Вопросы для повторения
1. Какой граф называется деревом?
2. Может ли существовать цикл в дереве?
3. Является ли дерево связным графом?

3. Практикум:

1.Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

Решение: Предположим, что концы удалённого ребра в новом графе соединены простым путем. Тогда этот путь вместе с удалённым ребром образует в исходном графе цикл

2. Дан отрезок *OA*. Из конца отрезка *A* выходит 5 отрезков AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5. Из каждой точки B_i могут выходить ещё пять новых отрезков или ни одного нового отрезка и т.д. Может ли число свободных концов построенных отрезков равняться 1001? Под свободным концом отрезка понимаем точку, принадлежащую только одному отрезку (кроме точки O).

Решение: При проведении пяти отрезков из конца отрезка появляются 5 новых свободных концов и пропадает один старый. В результате число свободных концов увеличивается на 4. Поэтому если пятёрки отрезков проведены k раз, то число свободных концов равно $4k + 1$. При $k = 250$ получаем нужное число свободных концов.

Ответ: Может.

3. n точек соединены отрезками так, что каждая точка с чем-нибудь соединена и нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями.
Доказать, что общее число отрезков равно $n – 1$.

4. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Конспект занятия №5
***Тема*: Практическое применение графов**

Цели урока: Образовательные: применение графов на практике;

Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к учебному труду, учить преодолевать трудности, формировать навыки сотрудничества, расширение кругозора знаний.
Тип урока: комбинированный.
Методы обучения: проблемно-поисковый, словесный, практический.
Форма организации урока: индивидуальная, групповая, фронтальная.

Оборудование урока: откидная доска, дидактический материал

План

1. Организационный момент; (3 мин)
2. Применение графов на практике (20 мин)
3. Практикум (20 мин)
4. Итог урока; (2 мин)

1.Организационный момент; (5 мин)
С помощью графов (блок-схем) естественно задавать алгоритмы решения различных задач. В алгоритмы могут быть встроены как арифметические, так и логические операции. Такое задание имеет большую

наглядность и облегчает школьнику понимание работы алгоритма. Ему становится ясно, почему он должен выполнять те или иные действия при различных возникающих ситуациях. Кроме того, такая форма задания дисциплинирует мышление школьника, позволяет описать все возможные случаи, не пропустив ни одного из них и не рассмотреть никакой случай дважды. Результаты выполнения действий будут меняться в зависимости от начальных условий, и школьнику станет ясно, что алгоритм нацелен на решение не конкретной, а массовой задачи, т.е. такой задачи, в которой исходные параметры могут принимать различные значения.

Рассмотрим на примере модель поиска рационального решения задачи.

Задание 3.1. Например, с помощью блок-схемы естественно задать алгоритм решения квадратного уравнения и системы линейных уравнений с двумя переменными (рис.1, 2).

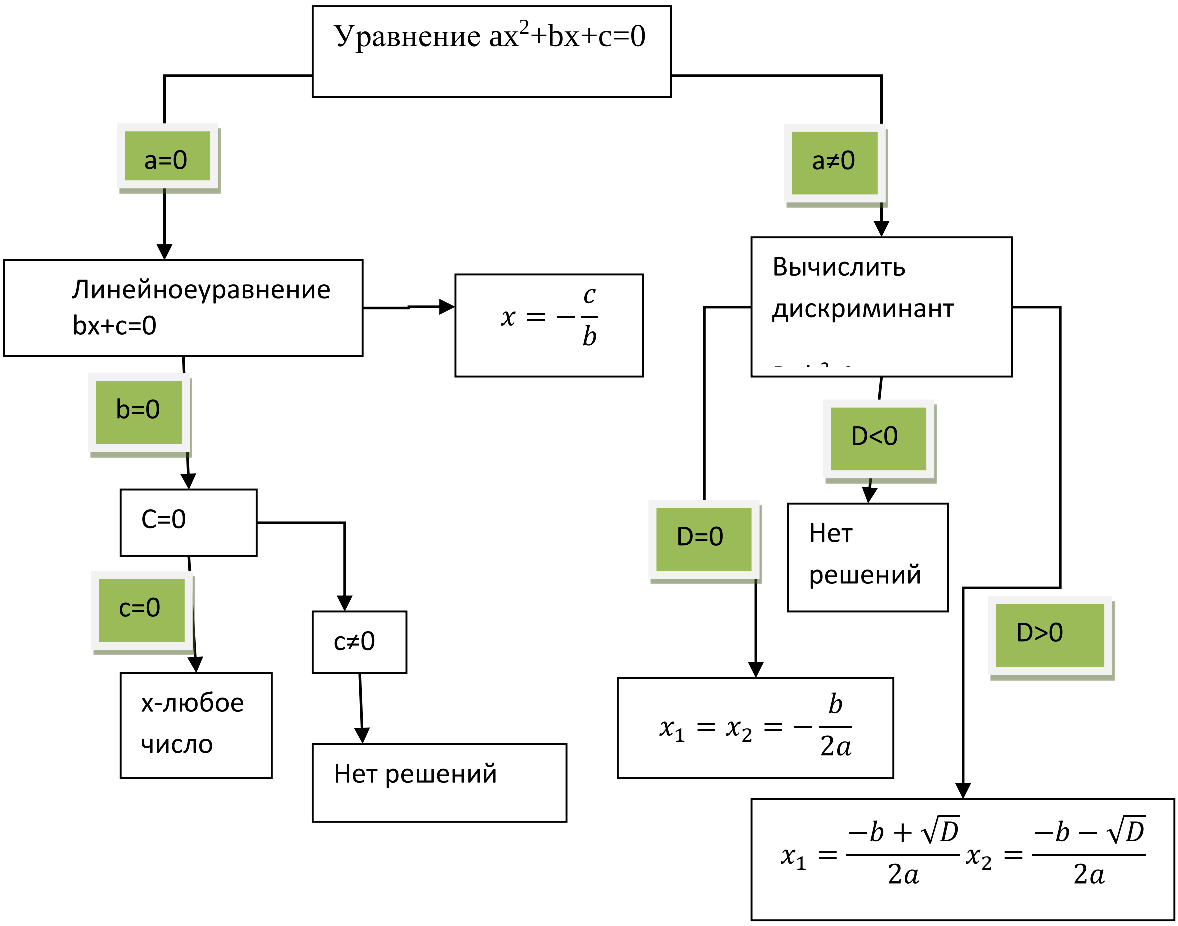


Рис.1

В данном случае был применен граф дерево. Его корнем является само уравнение и процесс решения вершинами,а такие параметры как коэффициенты a,b,c; дискриминант являются его ветвями. В данном примере граф был представлен в виде блок схемы. Данное представление несложно перенести в программный вид [14]

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
```

```
var a,b,c:integer;
    x,x1,x2,d:real;
    s1,s2,s3:string;
begin
  a:=strtoint(Edit1.Text);
  if a<>0 then begin
              b:=strtoint(Edit2.Text);
              c:=strtoint(Edit3.Text);
              d:=b*b-(4*a*c);
              if d>0 then begin
                          x1:=(-b+sqrt(d))/2*a;
                          x2:=(-b-sqrt(d))/2*a;
                          str(x1:0:2,s1);
                          str(x2:0:2,s2);
                          Label4.Caption:='x1='+s1+', x2='+s2;
                        end
                    else if d=0 then begin
                                  x:=-b/(2*a);
                                  str(x:0:2,s3);
                                  Label4.Caption:='x='+s3;
                                end
                            else Label4.Caption:='Нет решений';
              end
          else Label4.Caption:='Линейное уравнение';
end;
```

Таким образом можно совместить урок информатики и математики в один урок.[14]

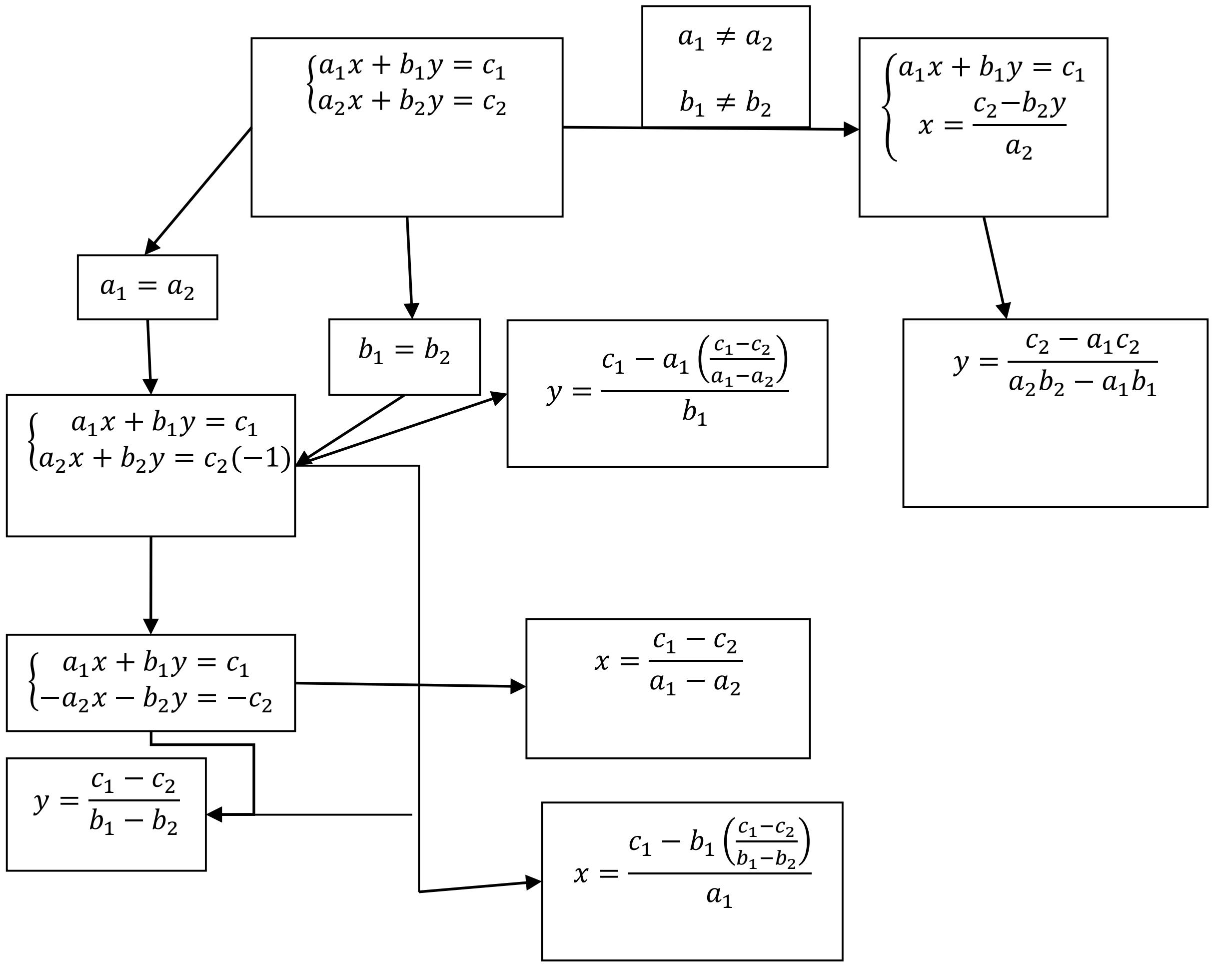
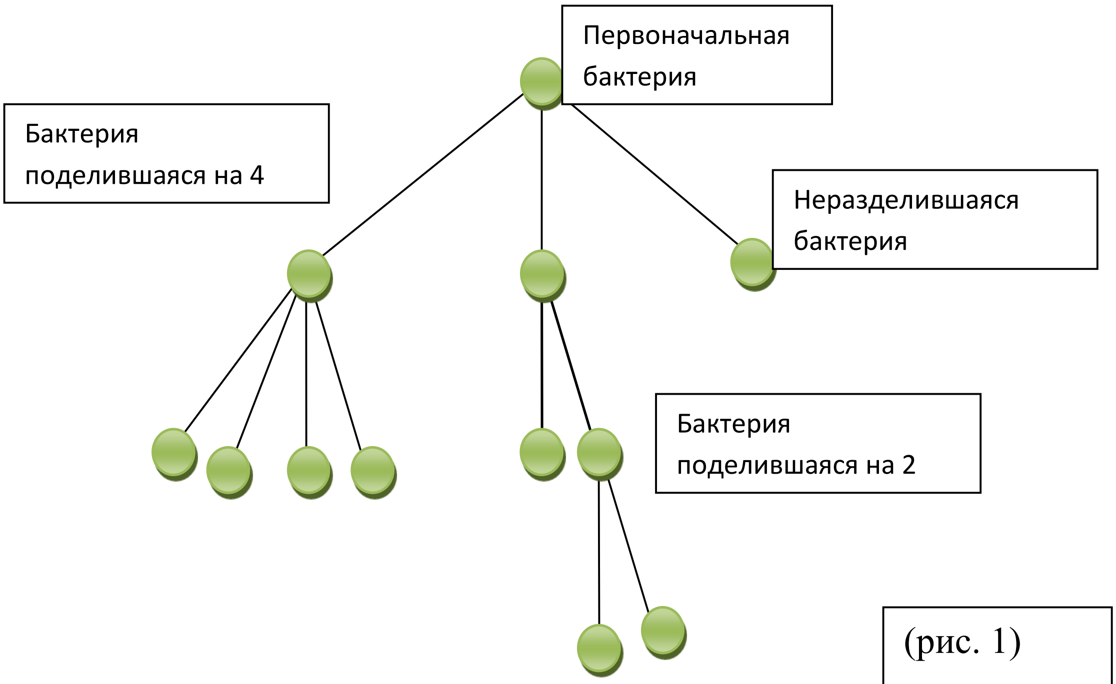


Рис.2

С помощью графов (деревьев) можно изображать различные варианты в достаточно сложных комбинаторных задачах, например в задачах на делние бактерий. Графы опишут все возможные случаи, встречающиеся в таких задачах. И здесь мы приходим к понятию алгоритма, а построенные графы, описывающие решение, позволят познакомить школьника с понятием сложности алгоритма.[11]

Задание 2. Рассмотрим следующую задачу. «Есть бактерия которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляющиеся бактерии могут делиться на 4 бактерии, могут делиться на 2, могут не делиться. Образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на 2 в 6 раз больше, чем число бактерий, разделившихся на 4.



(рис. 1)

Решение. Процесс деления бактерий можно изобразить корневым де ревом (см. рис. 1).

Любая бактерия, разделившаяся на 4 бактерии, будет соответствовать вершине дерева степени 5, бактерия, разделившаяся на две, вершине степени 3. Кроме этих вершин в дереве еще есть вершина степени 3, соответствующая начальной бактерии, и 102 вершины степени 1, соответствующие бактериям, которые не делились.

Пусть n - число бактерий, которые разделились на 4, тогда 6n - число бактерий, которые разделились на две. Дерево, описывающее деление бактерий, будет иметь 7n + 103 вершину и 7n + 102 ребер

Воспользовавшись леммой о рукопожатиях, имеем 5n+3-6n+3+1-102=2(7n+102). Решив это уравнение, получим, что n = 11. Это означает, что 11 раз бактерии делились на четыре и 66 раз на две.

4. Итог урока

Педагог оценивает деятельность детей, поощряет за проделанную работу. Может оцениваться степень усвоения материала, работоспособность, психологическое состояние, результативность, содержание и полезность работы.

Домашнее задание: Решить любой пример с помощью блок схем.

Исследовательский проект на работу в группах на тему: применение графов с последующей защитой во время открытого урока.

Выводы по второй главе

В данной главе представлена методика обучения элементам теории графов обучающихся 7 и 10 классов в рамках курса «Теория графов».
Разработана программа курса «Теория графов». включающая следующие составляющие: пояснительная записка, цели и задачи курса, содержание обучения, учебно-тематическое планирование,

Разработано и представлено соответствующее методическое сопровождение занятий курса – 10 конспектов занятий (12 ч.) курса «Теория графов».

Вывод

В ходе проведенного исследования мы пришли к выводу, что включения элементов теории графов в содержание математической подготовки школьников является требованием для полноценного развития математического склада ума, а также требованием установленным государственным стандартом образования.

Простой язык теории графов позволяет решать многочисленные, разнообразные и довольно нетривиальные задачи дискретной математики. Одной из особенностей теории графов, которая, собственно, и позволяет ввести элементы теории графов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрический – в виде простого, удобного (имеется в виду удобного для человека) в обращении рисунка: вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины.

Рисунок графа, являясь знаком, чувственно воспринимаемым материальным предметом, служит посредником между реальной действительностью и математической моделью.

При изображении графа определенные свойства изучаемого явления моделируются с помощью простых знаков – точек (одного цвета или нескольких цветов) и отрезков (одного цвета или нескольких цветов, направленных или ненаправленных). При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием.

В процессе познания рисунки графов, как чувственные образы, становятся носителями богатого смыслового содержания. Перспективным и естественным является использование изобразительного языка графов в качестве служебных средств, при решении различных методических вопросов обучения математике. В рамках нашего исследования нами были охарактеризованы основные дидактические условия для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников.

Разработана примерная программа курса «Теории графов» рассчитанная на 12 часов (6 часов в 7 классе и 6 часов в 10 классе) и, соответствующее методическое сопровождение –12 конспектов занятий. Однако присутствует нерешенная проблема, госстандартом установлено что данная тематика изучается в 7 и 10 классах, то есть присутствует большой перерыв в 2 года между её изучением. Данный вопрос можно решить либо сокращением разрыва, либо разработкой системы внеурочных занятий.

Изучение элементов теории графов на занятиях по математике способствует формированию предметных и метапредметных результатов обучения, повышению познавательного интереса и воспитанию ценностного отношения к математическим знаниям.

В ходе проведѐнного исследования все основные задачи выполнены и цель достигнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постановление Кабинета Министров РУз «О разработке и введении государственных образовательных стандартов для системы непрерывного образования» от 5 января 1998 г. № 5.
2. Государственный образовательный стандарт общего среднего образования, приложение № 1 к Постановлению Кабинета Министров РУз от 6 апреля 2017 года № 187.
3. Указ Президента Республики Узбекистан от 29. 04. 2019 г. № УП-5712 "Об утверждении Концепции развития системы народного образования Республики Узбекистан до 2030 года"
4. Белов В.В. Теория графов.- М.: Высшая школа, 1976.- 392 с
5. Оре О. Теория графов. М., Наука, 1968. – 352 с
6. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов.-

Минск:НТООО «ТетраСистемс», 2001.- 144 с.–

7. Algebra 7 uchundarslik.Mualiflar:M.A.Mirzaahmedov,I.Sh.Naralievich,. AFIDUM uchun darslik. Toshkent, O‘qituvchi, 2019-240b

8. Информатика и ИКТ. 11 класс. Профильный уровень - Угринович Н.Д 2009-308с

9. Информатика и ИКТ. Учебник для 9 класса - Угринович Н.Д - 2009-295с

10. Основные результаты исследований по проблеме формирования умственных действий и понятий» (1965). П.Я.Гальперин

11. Берж К. Теория графов и её применение.- М.: Иностранная литература,
1962.- 320 с.

12. В. В. Давыдов. Проблемы развивающего обучения

13. Гальперин П.Я. Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий». — М., 1965

14. "Методика применения информационных технологий в изучении многочленов в общеобразовательных школах" Чепухалин.С.А

15. В.М.Гуровиц. Графы.- Издательство МЦНМО-2014