

ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI
BERDAQ ATÍNDAGÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI



Matematika fakulteti

Differencialliq teńlemeler kafedrası

DIFFERENCIALLIQ TENLEMELER

páninen

lektsiya tekstleri

Dúziwshi : O.Nurjanov

Nókis 2019

Mazmunı

- 1 – Tema. Äpiwayı differensiallıq teńlemeler pānine kirisiw.
- 2 – lekciya. Ózgeriwshileri ajralǵan teńlemeler hām oǵan keltiriletúǵın differensiyallıq teńlemeler. Birtekli hām ulıwmalasqan birtekli teńlemeler
- 3 – lekciya. Sızıqlı teńlemeler hām olarǵa keltiriletúǵın teńlemeler. Toliq differenciallardaǵı teńlemeler hām oǵan alıp kelinetúǵın teńlemeler. Integrallawshı kóbeytiwshi
- 4 – lekciya. Birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi. Sheshiminiń bar bolıwı hām birden birliǵı haqqındaǵı teorema. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı.
- 5 – lekciya. Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńlemeler hām olardı integrallaw usılları. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema. Ayırıqsha sheshimler hām olardı tabıw usılları
- 6 – lekciya. Joqarı tártipli differensiallıq teńlemeler. Baslanǵısh shártler. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema. Kvadraturalarda integrallanatuǵın teńlemeler Joqarı tártipli differensiyallıq teńlemelerdiń tártibin tómendetiw
- 7-lekciya. n – tártipli sızıqlı differensiallıq teńlemeler hām olardıń ulıwma qásiyetleri. Sızıqlı ġárezsiz funksiya. Vronskiy determinantı hām onıń qásiyetleri. Bir tekli bolmaǵan sızıqlı teńlemeler. Turaqlıları variyaciyalaw usılı.
- 8-lekciya. Turaqlı koefficientli sızıqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı. Birtekli bolmaǵan turaqlı koefficientli sızıqlı differensiyallıq teńlemeler
- 9– lekciya. Äpiwayı differensiyallıq teńlemeler sistemaların normal túrge keltiriw. Normal sistema ushın bar bolıw hām birden-birlik teoreması
- 10-lekciya. Sızıqlı differensiyallıq teńlemeler sisteması. Ostragrodskiy-Lyuvill formulası. Sızıqlı bir tekli teńlemeler sistemasınıń ulıwma sheshimi haqqında teorema. Fundamentallıq matrica
- 11-lekciya. Turaqlı koefficientli bir tekli sızıqlı sistema. Eyler usılı
- 12-lekciya. Sızıqlı bir tekli bolmaǵan teńlemeler sisteması.
- 13-lekciya. Matrica kórinisindeǵı sızıqlı teńlemeler sisteması. Eksponenciallıq matrica. Matricalı differensiallıq teńlemelerdi integrallaw
- 14-lekciya. Sheshimniń dawamlanıwı. Sheshimniń baslanǵısh shártlerge hām parametrlerge úziksiz ġárezligi haqqındaǵı teorema. Sheshimniń baslanǵısh mánisler hām parametrler boyınsha differenciallanıwshılıǵı haqqında teoremlar
- 15-lekciya. Avtonomiyalı sistemalar. Sheshimniń qásiyetleri. Sızıqlı avtonom sistemaniń ayırıqsha toshkaları. Asimptotikalıq ornıqlı periodlı qozǵalıstıń túsinigi
- 16-lekciya. Lyapunov mánisindeǵı ornıqlılıq. Asimptotikalıq ornıqlılıq haqqında teoremlar. Birinshi jaqınlasıw boyınsha ornıqlılıq haqqındaǵı Lyapunov teoreması

17-lekciya. Ekinshi tártipli sızıqlı differenciyalıq teńlemenı ģıpiwayı koriniske keltiriw. Shegaralıq máseleler. Ekinshi tártipli DT-lerdi dárejeli qatarlar járdeminde integrallaw

18-lekciya. Dara tuwındılı birinshi tártipli sızıqlı teńleme hám onıń ulıwma sheshimi. Dara tuwındılı kvazısızıqlı birinshi tártipli DT-ler

1-leksiya. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykarǵı túsinińleri. Tegislikte hám keńislikte baǵıtlar maydanı. Izoklina. Integral iymek sıızıq. Vektorlıq maydan. Traektoriya. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler arqalı ańlatılatuǵın ayırım fizikalıq hám geometriyalıq máseleler.

Reje:

1. Differenciallıq teńlemelerdiń anıqlaması hám klassifikaciyası
2. Tiykarǵı túsinińler hám olardıń anıqlamaları
3. Baǵıtlar maydanı. Izoklina. Integrallıq iymek sıızıq. Vektorlıq maydan. Traektoriya.
4. ÁDT arqalı ańlatılatuǵın ayırım fizikalıq hám geometriyalıq máseleler.

Tayanış sózler. *Differenciallıq teńleme (DT), Ápiwayı differenciallıq teńleme (ÁDT), Dara tuwındılı DT. DT ler sisteması. DT tártibi. Birinshi tártipli DT-ler. Sheshim. Integrallıq iymek sıızıq. DT-ni integrallaw. Elementar funkciyalarda integrallaw. Kvadraturalarda integrallaw. Koshi máselesi. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ulıwma integral. Dara integral. Parametrlik túrdegi ulıwma sheshim. Baǵıtlar maydanı. Izoklina. Integrallıq iymek sıızıq. Vektorlıq maydan. Traektoriya. Fizikalıq máseleler. Geometriyalıq máseleler.*

1. Tábiyat qubılısların úyreniwde, kóp ámeliy máselelerdi sheshiwde, bir qatar teoriyalıq máselelerdi izertlewde differenciallıq teńlemeler teoriyası úlken rol oynaydı.

Differenciallıq teńleme dep gárezsiz ózgeriwshilerdi, belgisiz funkciyanı hám onıń belgili tártipke shekemgi tuwındıların yamasa ózgeriwshilerdiń differencialların baylanıstratuǵın birdeylik bolmaǵan qatnasqa aytıladı.

Eger belgisiz funksiya tek bir gárezsiz ózgeriwshige baylanıslı bolsa, onda teńleme ápiwayı (ádettegi) differenciallıq teńleme dep, al belgisiz funksiya bir neshe gárezsiz ózgeriwshilerdiń funkciyası bolsa, onda teńleme dara tuwındılı differenciallıq teńleme dep ataladı. Teńlemede qatnasqan eń úlken tuwındınıń tártibi teńlemenıń tártibi delinedi. Máselen $y'' + y = \sin x$, $y''' - y'' = 0$, $y^{(4)} = 0$ teńlemeleri sáykes túrde ekinshi, úshinshi hám tórtinshi tártipli ÁDT-ler boladı.

n – tártipli ÁDT-nıń ulıwma túri

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

kórinisinde jazıladı, bunda x - gárezsiz ózgeriwshi, $y = y(x)$ - belgisiz funksiya, $y', \dots, y^{(n)}$ - sáykes túrde birinshi, ..., n – tártipli tuwındılar, al F – óziniń argumentleriniń bazı-bir belgili funkciyası. (1)-teńlemede n – tártipli tuwındı minnetli túrde qatnasadı.

Birinshi tártipli DT tómendegi túrde jazıladı:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

Bul teńleme úsh ózgeriwshi shamanı belgisiz funkciyanı, onıń tuwındısın hám gárezsiz ózgeriwshini baylanıstıradı. Kóp jaǵdaylarda bul qatnastı

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Bul (3) teńleme birinshi tártipli tuwındıǵa qarata sheshilgen teńleme dep ataladı. Al (2) differenciallıq teńleme tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńleme delinedi. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasın úyreniwdi biz (3) teńlemeden baslaymız.

Anıqlama. (2) yamasa (3) differenciallıq teńlemenıń $I = (a, b)$ intervalındaǵı sheshimi dep, usı aralıqta anıqlanǵan, úzliksiz differenciallanatuǵın, teńlemege qoyǵanda onı barlıq $x \in I$ ushın birdeylikke aylandıratuǵın hár qanday $y = f(x)$ funkciyasına aytıladı. Eger $y = f(x)$ funkciyası (2) yamasa (3) teńlemenıń sheshimi bolsa, yaǵnıy

$$F(x, f(x), f'(x)) \equiv 0 \text{ yamasa } \frac{df(x)}{dx} \equiv f(x, f(x)), \quad x \in I$$

birdeyligi orınlansa, onda ol usı teńlemenı qanaatlandıradı dep aytadı.

Differenciallıq teńlemenıń hár bir $y = f(x)$ sheshimine sáykes keliwshi iymek sızıq (yaǵnıy $y = f(x)$ funkciyasınıń grafigi) usı teńlemenıń integrallıq iymek sızıǵı (yamasa integrallıq sızıǵı) delinedi.

(3) differenciallıq teńlemenıń anıqlanıw oblastındaǵı hár bir (x, y) tochka arqalı abscissalar kóshetine qıyalanıw múyeshiniń tangensi $f(x, y)$ qa teń bolǵan tuwrı júrgizemiz. Bul tuwrılar toparı (3) teńlemege sáykes keliwshi baǵıtlar maydanı (yamasa $f(x, y)$ funkciyasınıń baǵıtlar maydanı) dep ataladı.

Ápiwayı mısallar differenciallıq teńlemenıń sheshimlerdiń sheksiz kópligine iye bolatuǵının kórsetedi.

Differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń áhmiyetli máseleleriniń biri Koshi máselesi bolıp tabıladı. (3) teńleme ushın Koshi máselesi tómendegishe qoyıladı: (3) teńlemenıń barlıq sheshimleri ishinen argumenttiń berilgen $x = x_0$ mánisinde berilgen

$$y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

mánisti qabıl etetuǵın sheshimdi tabıw talap etiledi. Bundaǵı x_0 hám y_0 sanları baslanǵısh mánisler dep, al (4) shárt baslanǵısh shárt dep ataladı.

Teñlemenin on jaǵı bolǵan $f(x,y)$ funkciyası anıqlanǵan D oblastınıń Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye bolatuǵın (x,y) tochkalarınan dúzilgen bólegin $D_1 MD$ dep belgileyik.

Anıqlama. (3) differenciallıq teñleme hám x, C ózgeriwshileriniń bazıbir ózgeriw oblastında anıqlanǵan, x boyınsha úzliksiz differenciallanatuǵın

$$y = f(x, C) \quad (5)$$

funkciya berilgen bolsın. Eger qálegen $(x,y) \in D_1$ točka ushın (5) qatnası C -nıń $C = y(x,y)$ mánisin bir mánisli anıqlasa hám bul mánisti $\frac{dy}{dx} = f'_x(x, C)$ teńlikke qoyıw nátiyjesinde (2) teñleme payda bolsa, onda (5) funkciya (3) teñlemenin D_1 kóplikte anıqlanǵan ulıwma sheshimi dep ataladı.

Bul (5) funkciya erikli turaqlı C -ǵa baylanıslı hám demek, (5) - qatnasın sızıqlar toparınıń teñlemesi dep qarawǵa boladı.

(3) differenciallıq teñlemenin (5) ulıwma sheshiminen erikli turaqlı C nıń belgili mánisinde alınatuǵın sheshim usı teñlemenin dara sheshimi delinedi. Eger

$$F(x, y, C) = 0 \quad (6)$$

teńligi D_1 kóplikte $y = f(x, C)$ ulıwma sheshimdi anıq emes funkciya retinde anıqlasa, onda (6) - qatnasın (2) - differenciallıq teñlemenin ulıwma integralı dep ataydı.

Al, (6) ulıwma integraldan erikli turaqlı C -nıń belgili mánisinde alınatuǵın $y(x, y) = 0$ qatnası dara integral delinedi.

Geyde teñlemenin ulıwma sheshimin (5) túrinde de yamasa (6) túrinde de alıw múmkin bolmay, al x hám y ti (3) teñlemeden bazıbir t parametriniń úzliksiz differenciallanıwshı funkciyası retinde, yaǵnıy

$$\begin{cases} x = f(t, C), \\ y = y(t, C) \end{cases} \quad t_0 < t < t_1 \quad (8)$$

túrinde tabıw múmkin, bunda C - erikli turaqlı. Bul (8) qatnasları (3) teñlemenin $t_0 < t < t_1$ intervalındaǵı parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi dep ataladı.

Tuwındıǵa qarata sheshilmegen (2) differenciallıq teñleme ushın da ulıwma sheshim, ulıwma integral, parametrlik formadaǵı ulıwma sheshim, dara sheshim túsinikleri joqarıdaǵıday bolıp anıqlanadı.

Differenciallıq teñlemeler teoriyasında (2) yamasa (3) teñlemenin barlıq sheshimlerin tabıw tiykarǵı másele bolıp esaplanadı. Barlıq sheshimlerdi tabıw differenciallıq teñlemenin integrallaw (sheshiw) dep ataladı.

Eger (3) teńlemenin sheshimin elementar funkciyalar yamasa olardin integrallari járdeminde jazıw múmkin bolsa, onda differenciallıq teńleme kvadraturalarda integrallanadı delinedi.

(1)-(3) differenciallıq teńlemeler menen bir qatarda ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasında teńlemeler sistemaları da qaraladı.

Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

teńlemeler sisteması normal sistema dep ataladı. (4) differenciallıq teńlemeler sistemasının sheshimi dep, sistemasın teńlemelerine qoyǵanda olardı birdeylikke aylandıratuǵın hár qanday $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) funkciyalar jıynaǵına ayıladı. Ádette, eger differenciallıq teńleme sheshiletuǵın bolsa, onda ol sheshimlerin sheksiz kópligine iye boladı. Sheshimlerdi tabıw processı differenciallıq teńlemenı integrallaw dep ataladı.

Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli teńleme bolǵan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

teńlemesin qarayıq, bunda $f(x, y)$ - bul Oxy tegisliktin bazıbir D oblastında anıqlanǵan úzliksiz berilgen funkciya.

(1) differenciallıq teńlemenin anıqlanıw oblastındaǵı hár bir (x, y) tochka arqalı abscissalar kósherine qıyalanıw múyeshinin tangensi $f(x, y)$ qa teń bolǵan tuwrı júrgizemiz. Bul tuwrılar toparı (1) teńlemege sáykes keliwshi baǵıtlar maydanı (yamasa $f(x, y)$ funkciyasının baǵıtlar maydanı) dep ataladı.

(1) differenciallıq teńlemenin integrallıq iymek sıızǵı hár bir tochkasında $f(x, y)$ funkciyasının baǵıtlar maydanına urınadı, yaǵnıy integrallıq iymek sıızıqtın hár bir tochkasındaǵı urınbanın baǵıtı usı tochkadaǵı urınbanın (1) teńleme menen anıqlanǵan maydanının baǵıtı menen ústpe-úst túsedı. Óziniń hár bir tochkasında usı tochkadaǵı maydannın baǵıtına urınatuǵın hár qanday iymek sıızıq integrallıq iymek sıızıq boladı.

Hár bir tochkasında maydannın baǵıtı birdey bolatuǵın iymek sıızıq izoklina dep ataladı. (1) differenciallıq teńlemenin izoklinalarının teńlemeleri $f(x, y) = k$ túrine iye, bunda $k = \operatorname{tga} = \operatorname{const}$, a - (1) teńlemenin integrallıq iymek sıızıǵına (x, y) tochkada júrgizilgen urınbasının Ox kósherinin on baǵıtı menen jasaǵan múyeshi. Berilgen izoklinanı kesip ótiwshi barlıq integrallıq iymek sıızıqlar kesilisiw tochkalarında abscissalar kósherine birdey múyesh penen qıyalanǵan boladı. Izoklinalar járdeminde (1) differenciallıq teńlemenin integrallıq iymek sıızıǵın juwıq túrde jasaw múmkin.

Al mına

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

normal sistemanıń hár qanday $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) sheshimine geometriyalıq jaqtan $x, y_1, \dots, y_n$ ózgeriwshileriniń $n+1$ ólshemli R^{n+1} keńisligindegi iymek sızıq sıpatında mánis beriwge boladı. Bul iymek sızıq usı (2) sistemanıń integrallıq iymek sızıǵı delinedi. Al, $y_1, \dots, y_n$ ózgeriwshileriniń n ólshemli R^n keńisligi fazalıq keńislik dep, al integrallıq iymek sızıqtıń fazalıq keńislikke proeksiyası fazalıq traektoriya dep ataladı.

(2) teńlemeler D oblastınıń hár bir noqatında $\tau = (1, f_1, \dots, f_n)$ vektorı menen berilgen bazıbir baǵıttı anıqlaydı. Hár bir noqatında berilgen baǵıtqa iye keńisliktiń bunday oblastı vektorlıq maydan (baǵıtlar maydanı) dep ataladı. (2) teńlemeler sistemasın integrallaw geometriyalıq jaqtan hár bir noqatında júrgizilgen urınbanıń baǵıtı usı vektor maydandaǵı berilgen τ baǵıtı menen ústpe-úst túsetuǵın iymek sızıqlardı tabıwdı ańlatadı.

Differenciallıq teńlemelerge mexanikanıń, fizikanıń, astronomiyanıń hám basqa da tábiyattanıw ilimleriniń hám sonday-aq, texnikanıń kóp máseleleri alıp kelinedi. Differenciallıq teńlemelerge alıp kelinetuǵın bazıbir máselelerdi qaraymız.

1 - misal. Meyli $f(x)$ - bul $I = (a, b)$ intervalda úzliksiz funkciya, al $y(x)$ onıń dáslepki funkciyası bolsın. Sonda $y'(x) = f(x)$ bolıp, dáslepki funkciyanı tabıw ushın biz birinshi tártipli ápiwayı differenciallıq teńlemenı aldıq. Onıń sheshimleri belgili:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds + C, \quad (x_0 \in I),$$

bunda C - erikli turaqlı.

2 - misal. Massası m bolǵan dene $v(0) = 0$ baslanǵısh tezlik penen bazıbir biyiklikten taslap jiberilgen. Eger ortalıqtıń (hawanıń) qarsılıǵı tezlikke proporcional bolsa, onda usı deneniń túsiw tezliginiń ózgeriw nızamın anıqlań.

Sheshiliwi. Nyutonnıń ekinshi nızamına muwapıq: $ma = F$, yaǵnıy $m \frac{dv}{dt} = F$, bunda F - denegе tásir etiwshi kúshlerdiń qosındısı (teń tásir etiwshisi), $v = v(t)$ - deneniń t waqt momentindegi tezligi.

Máseleniń shárti boyınsha denegе eki qarama-qarsı baǵıtlanǵan kúshler tásir etedi: hawanıń qarsılıq kúshi $F_1 = -kv$, $k > 0$ hám jerdiń tartıw kúshi $F_2 = mg$. Solay etip, $F = F_1 + F_2$.

Demek, $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$ ($k > 0$) túrindegi differenciallıq teńlemege kelemiz. Bul

teńlemenin sheshimi $v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$ funkciyası bolatuǵın kórsetiw qıyın emes. Dene óz qozǵalısnı shárt boyınsha nollik tezlik penen baslaytuǵın bolǵanlıqtan, yaǵnıy $v(0) = 0$ bolǵanlıqtan, $c = -\frac{mg}{k}$ boladı. Solay etip, denenin qálegen t waqıt momentindegi tezligi

$$v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

funkciyası menen bir mánisli anıqlanadı.

Hawanın qarsılıǵın esapǵa almaǵan jaǵdayda, yaǵnıy dene erkin túskende $\frac{dv}{dt} = g$ tezliktiń shaması sıızıqlı túrde ósedi: $v(t) = gt$.

Hawanın qarsılıǵın esapqa alǵan jaǵdayda da tezlik ósedi, biraqta soǵan qaramastan ol waqıttıń ótiwi menen $v = \frac{mg}{k}$ turaqlı shamaǵa umtıladı hám dene teń ólshewli túrde tómen túsedı.

3 - mısál. Radioaktivlik ıdıraw tezligi zattıń muǵdarına proporcional ekenligi tájiriybeden belgili. Radioaktivli zattıń yarım ıdıraw periodın (zattıń yarımı ıdırap bolatuǵın waqıttı) tabıń.

Sheshiliwi. Meyli $x(t)$ - radioaktivli zattıń t waqıt momentindegi muǵdarı bolsın, $x(0) = x_0$. Másele shártinde ayılǵan tájiriybeli fakt $\frac{dx}{dt} = -kx$, $k > 0$ ekenin ańlatadı, bunda k - proporcionallıq koefficienti, al $-$ belgisi zattıń massasınıń kemiytuǵınlıǵın ańlatadı. Solay etip, biz differenciallıq teńleme aldıq, onıń sheshimi $x(t) = ce^{-kt}$ funkciyası boladı. Al, $x(0) = x_0$ bolǵanlıqtan, $c = x_0$ bolıp, zattıń muǵdarınıń waqıt boyınsha ózgeriw nızamı $x(t) = x_0 e^{-kt}$ túrine iye boladı. Zattıń yarımı ıdırawına ketetuǵın waqıt T shamasın (yarım ıdıraw periodın) $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-kT}$ teńlemesinen anıqlaymız. Sonda $T = \frac{\ln 2}{k}$ boladı. Bul waqıt zattıń baslanǵısh massasına ǵárezli bolmaydı.

4 - mısál. Kóbeyiw ushın qolaylı sháriyatlarda turǵan bakteriyalardıń kóbeyiw tezligi olardıń muǵdarına proporcional ekeni tájiriybeden belgili. Qanday waqıt ishinde bakteriyalar olardıń dáslepki sanına salıstırǵanda m ese kóbeyedi?

Sheshiliwi. Eger $N(t)$ - bakteriyalardıń t waqıt momentindegi sanı bolıp, $N(0) = N_0$ bolsa, onda olardıń sanınıń waqıt ótiwi menen ózgeriwi biologiyalıq tájiriybege muwapıq,

$\frac{dN}{dt} = kN, k > 0$ differenciallıq teńlemesi menen suwretlenedi. Bul teńlemenin sheshimi $N(0) = N_0$ shárttı esapqa alǵanda $N(t) = N_0 e^{kt}$ funkciyası boladı. Bakteriyalardıń sanı m ese kóbeyetuǵın T waqıttı $N(T) \in mN_0 = N_0 e^{kT}$ teńlemesinen anıqlaymız. Sonda $T = \frac{\ln m}{k}$ boladı. Al, koefficienti bakteriyalardıń túrinen hám olar jasap atırǵan sháriyatlardan ǵárezli boladı. Onı tájriybe jolı menen anıqlaw múmkin.

Tákırlaw ushın sorawlar

1. Ápiwayı differenciallıq teńleme, dara tuwındılı differenciallıq teńleme degen ne? Differenciallıq teńlemenin tártibi degen ne?
2. Differenciallıq teńlemenin sheshimi (integrallıq iymek sıızıq) degen ne? Differenciallıq teńlemenin integrallaw máselesi neden ibarat?
3. Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli teńlemelerdin tiykarǵı beriliw kórinisleri qanday? Sheshimler qanday túrde beriliwi múmkin?
4. Differenciallıq teńlemeler izertlewlerde qalay kelip shıǵadı? Berilgen bir parametrli iymek sıızıqlar toparınıń differenciallıq teńlemesi qalay dúziledi?
5. Birinshi tártipli tuwındıǵa qarata sheshilgen teńleme ushın Koshi máselesi neden ibarat?
6. Ulıwma sheshim degen ne? Ulıwma sheshim formulası járdeminde Koshi máselesi qalay sheshiledi? Ulıwma integral degen ne? Parametrik formadaǵı ulıwma sheshim degen ne? Dara sheshim degen ne? Ol ulıwma sheshim formulası menen qalay baylanısadı?

2 – lekciya. Ózgeriwshileri ajıralǵan teńlemeler hám oǵan keltiriletúǵın differensiyallıq teńlemeler. Birtekli hám ulıwmalasqan birtekli teńlemeler

Reje:

1. Ózgeriwshileri ajıralǵan teńlemeler.
2. Ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemeler hám olarǵa keltiriletúǵın teńlemeler.
3. Birtekli teńlemeler hám olarǵa keltiriletúǵın teńlemeler. Ulıwmalasqan birtekli teńlemeler.

Tayanış sózler: Ózgeriwshileri ajıralǵan teńlemeler.

Ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemeler hám olarǵa keltiriletúǵın teńlemeler.

Birtekli teńlemeler hám olarǵa keltiriletúǵın teńlemeler. Ulıwmalasqan birtekli teńlemeler.

Meyli $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ yamasa $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ teńlemesi bazıbir usıl menen

$$F_1(x)dx = F_2(y)dy \quad (1)$$

túrine alıp kelinsin, bunda $F_1(x)$ - tek x ózgeriwshisiniń, al $F_2(y)$ - tek y ózgeriwshisiniń funkciyası bolsın. Bul funkciyalardı úzliksiz funkciyalar dep uyǵarayıq.

Eger $y = \varphi(x)$ funkciyasın (1) teńlemesiniń sheshimi dep esaplasaq hám onı usı teńlemege qoysaq, onda $F_1(x)dx \equiv F_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ birdeyligine iye bolamız. Bul birdeyliktiń eki jaǵı differenciallar bolıp, olardıń birinshisi tikkeley ǵárezsiz ózgeriwshi arqalı, al ekinshisi onıń funkciyası arqalı ańlatılǵan. Eger differenciallar bir-biri menen teń bolsa, onda olardan alınǵan anıq emes integrallar bir-birinen tek erikli qosılıwshıǵa ǵana ayrıladı. Sol sebepli birdeyliktiń eki jaǵın integrallap,

$$\int F_1(x)dx = \int F_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx + C \text{ yamasa } \int F_1(x)dx = \int F_2(y)dy + C \quad (2)$$

qatnasına iye bolamız, bunda C - erikli turaqlı.

Bul alınǵan (2) qatnası (1) teńlemesiniń ulıwma integralın beredi, al egerde onı y ke qarata sheshiw múmkin bolsa, onda usı teńlemenıń ulıwma sheshimin alıwǵa boladı.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ yamasa } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

teńlemesin (1) túrine keltiriw ózgeriwshilerdi ajıratıw dep, al (1) túrindegi teńleme ózgeriwshileri ajıralǵan teńleme dep ataladı. Ózgeriwshilerdi ajıratıw usılın birinshi ret shveycariyalı matematik I. Bernulli (1667-1748) qollanǵan.

Eger $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ teńlemede $M(x, y)$ hám $N(x, y)$ funkciyaların $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$ túrinde kórsetiw múmkin bolsa, onda bul

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \quad (3)$$

teńlemesi ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńleme dep ataladı. Bul teńlemenin eki jaǵın da $M_2(y)N_1(x) \neq 0$ dep esaplap, $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$ ańlatpasına kóbeytiw arqalı onıń ózgeriwshilerin ańsat ajıratıwǵa boladı. Sonda

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

teńlemesin alamız. Bul ózgeriwshileri ajıralǵan teńleme. Onı

$$d\left[\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy\right] = 0$$

túrinde jazıwǵa boladı, bunnan

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C \quad (4)$$

qatnası kelip shıǵadı, bunda C - erikli turaqlı. (4) qatnası (3) teńlemenin ulıwma integralı boladı.

Eskertiw. (3) teńlemesinin eki jaǵın da $N_1(x)M_2(y)$ kóbeymesine bólgende biz usı teńlemenin bazıbir sheshimlerin, atap aytqanda, $N_1(x) = 0$ hám $M_2(y) = 0$ bolatuǵın sheshimlerin joǵaltıwımız múmkin.

1 - mısal. $x(1 + y^2) + y(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenin $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$ túrinde jazamız. Bul teńlemenin eki jaǵında $(1 + x^2)(1 + y^2)$ kóbeymesine bólip, ózgeriwshileri ajıralǵan teńlemenin alamız:

$$\frac{x}{1 + x^2}dx + \frac{y}{1 + y^2}dy = 0.$$

Al, bul teńlemenin integrallap, tómendegilerdi tabamız:

$$\int \frac{xdx}{1 + x^2} + \int \frac{ydy}{1 + y^2} = C_1, \quad \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \frac{1}{2}\ln C.$$

Bunnan $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$, bunda C - erikli turaqlı. Bul qatnas berilgen teńlemenin ulıwma integralın beredi.

Ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemelerge birtekli teńlemeler alıp klinedi. Meyli bazıbir $f(x, y)$ funkciyası berilsin. Eger erikli t shaması (parametri) ushın $f(tx, ty) \equiv t^m f(x, y)$ birdeyligi orınlansa, onda bul $f(x, y)$ funkciyası m ólsheмли birtekli funkciya dep ataladı.

Meyli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5)$$

teńlemesi berilsin. Eger (5) teńlemenin óń jaǵı bolǵan $f(x, y)$ funkciyası nol ólsheмли birtekli funkciya bolsa, yaǵnıy

$$f(tx, ty) \equiv f(x, y) \quad (6)$$

birdeyligi orınlansa, onda bul teńleme birtekli teńleme dep ataladı. Bul (6) birdeyliginde $t = \frac{1}{x}$

dep esaplap, $f(x, y)$ funkciyasın $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ túrinde kórsetiwge boladı. Sonda (5) birtekli teńlemesi

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7)$$

túrinde jazıladı. Al, bul teńlemenı

$$y = ux \quad (8)$$

formulası járdeminde jańa $u = u(x)$ belgisiz funkciyasına ótiw arqalı ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp keliw múmkin. Haqıyqatında da, (8) den $\frac{du}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ekenin esapqa alıp, (7) teńlemede u ózgeriwshisine ócek,

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \text{ yamasa } xdu = [\varphi(u) - u]dx \quad (9)$$

teńlemesine iye bolamız. Bul (9) teńleme ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńleme.

Meyli $\varphi(u) - u \neq 0$, yaǵnıy $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \neq \frac{y}{x}$ bolsın. Sonda (9) teńlemesinin eki jaǵında usı ayırmaǵa hám x qa bólip, $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$ teńlemesin alamız. Bul teńlemenı integrallasaq, onda

$$x = Ce^{-F(u)} \quad (10)$$

ulıwma sheshimi kelip shıǵadı, bunda C - erikli turaqlı, al

$$F(u) = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}.$$

Endi (8) formulasınan $\frac{y}{x} = u$ ekenin esapqa alsaq, onda (10) nan

$$x = Ce^{-F\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (11)$$

qatnasın alamız. Bul (11) qatnası (7) teńlemenin hám demek, oǵan teń kúshli bolǵan (5) birtekli teńlemenin ulıwma integralın beredi.

Meyli

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (12)$$

teńlemesi berilsin. Eger $M(x, y)$ hám $N(x, y)$ funkciyaları birdey m ólshemli birtekli funkciyalar bolsa, onda bul teńleme birtekli teńleme dep ataladı. Bul jaǵdayda da (8) almasırwı járdeminde (12) teńlemesin ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp kelip integrallawǵa boladı.

Kóp teńlemeler birtekli teńlemelerge alıp kelinedi. Mısalı,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

teńlemesin $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ sızıqlı almasırwı járdeminde birtekli teńlemege alıp keliwge boladı, bunda α, β - bul $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ hám $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ tuwrılarının kesilisiw tochkasınıń koordinataları. Eger bul tuwrılar kesilispese, onda $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ boladı hám berilgen teńleme bul jaǵdayda $a_1x + b_1y + c_1 = z$ almasırwı járdeminde ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp kelinedi.

$F(x, y)$ funkciyası k dárejeli kvazibirtekli (ulıwmalasqan birtekli) funkciya dep ataladı, egerde bazıbir α hám β sanları tabılıp, barlıq $\lambda > 0$ ushın

$$F(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^k F(x, y)$$

teńligi orınlansa.

Kvazibirtekli dárejeler funkciyalardı kóbeytkende qosıladı, olar ólshemler dep te ataladı. Solay etip, x ózgeriwshisi α ólshemli, y ózgeriwshisi β ólshemli boladı, al txy^2 bolsa $\alpha + 2\beta$ ólshemli boladı hám t.b.

(5) differenciallıq teńlemesi kvazibirtekli (ulıwmalasqan birtekli) teńleme dep ataladı, egerde $f(x, y)$ funkciyası $\beta - \alpha$ dárejeli kvazibirtekli funkciya bolsa, yaǵnıy $f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta - \alpha} f(x, y)$ teńligi orınlansa.

$y = z^{\frac{\beta}{\alpha}}$ almasıwı járdeminde kvazibirtekli teńleme birtekli teńlemege alıp klinedi, biraqta ámelde $y = ux^{\frac{\beta}{\alpha}}$ túrindegi almasıwıdan paydalanǵan qolaylı boladı, bul almasıw ulıwmalasqan birtekli teńlemenı ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp keledi.

2 - mısal. $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ teńlemesın sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńleme birtekli teńleme. $y = xz$ almasıwın kitemiz. Sonda $(x - xz \cos z)dx + x \cos z(xdz + zdx) = 0$ yamasa $dx + x \cos z dz = 0$, $\frac{dx}{x} + \cos z dz = 0$, $\int \frac{dx}{x} + \int \cos z dz = C$, $\ln|x| + \sin z = C$. Demek, $\ln|x| + \sin \frac{y}{x} = C$ teńligi berilgen teńlemenıń ulıwma integralı boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. túrindegi tolıq emes diferenciallıq teńlemeler qalay integralanadı?
2. Ózgeriwshileri ajıralǵan hám ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemeler qalay integralanadı? Qanday teńleme ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp klinedi?
3. Qanday teńleme birtekli teńleme dep ataladı? Ol qalay integrallanadı? Qanday teńlemeler birtekli teńlemege alıp klinedi? Ulıwmalasqan birtekli teńleme degen ne? Ol qalay integrallanadı?

3–lekciya. Sızıqlı teńlemeler hām olarǵa keltiriletuǵın teńlemeler. Toliq differenciallardagı teńlemeler hām oǵan alıp kelinetuǵın teńlemeler. Integrallawshı kóbeytiwshi

Reje:

1. Sızıqlı teńleme. Birtekli sızıqlı teńleme. Birtekli emes sızıqlı teńleme.
2. Sızıqlı teńlemelerdi sheshiw usılları
3. Sızıqlı teńlemege alıp kelinetuǵın teńlemeler. Bernulli teńlemesi.
4. Rikkati teńlemesi haqqında túsiniq.
5. Toliq differenciallı teńleme (TDT).
6. Integrallawshı kóbeytiwshi.

Tayanış sozler: Sızıqlı teńleme. Birtekli sızıqlı teńleme. Birtekli emes sızıqlı teńleme. Toliq differenciallı teńleme (TDT). Integrallawshı kóbeytiwshi.

Erikli túraqılını variyasiyalaw usılı. Bernulli teńlemesi.

Egerde birinshi tártipli differenciallıq teńleme belgisiz funkciyaǵa hām onıń tuwındısına qarata sızıqlı bolsa, yaǵnıy belgisiz funkciya hām onıń tuwındısı birinshi dárejede qatnassa, onda bunday teńleme *sızıqlı differenciallıq teńleme* dep ataladı.

Birinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemenin normal túri tómendegidey bolıp jazıladı

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

bunda $P(x)$, $Q(x)$ - berilgen úzliksiz funkciyalar.

Bundaǵı $P(x)$ - sızıqlı teńlemenin koefficienti, al $Q(x)$ - onıń saltań aǵzası delinedi. Eger (1) teńlemede $Q(x) \equiv 0$ bolsa, yaǵnıy bul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (2)$$

túrine iye bolsa, onda ol *birtekli sızıqlı teńleme* dep ataladı. Usıǵan baylanıslı, egerde $Q(x) \neq 0$ bolsa, (1) teńleme *birtekli emes sızıqlı teńleme* delinedi.

(1) teńlemege sáykes keliwshi (2) túrindegi birtekli sızıqlı teńlemenı qarayıq hām onı tómendegi túrde jazayıq: $dy + P(x)ydx = 0$. Bunnan ózgeriwshilerdi ajıracaq, onda

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

teñlemesine iye bolamız. Bul ózgeriwshileri ajıralğan teñleme. Onı integrallasaq, onda $\ln|y| + \int P(x)dx = \ln C$ boladı, bunnan

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad (3)$$

bunda C - erikli turaqlı. Bul (3) formula (2) birtekli sızıqlı teñlemenıń ulıwma sheshimin beredi.

Birtekli emes sızıqlı teñlemenı sheshiwdiń klassikalıq usıllarınıń biri bolğan *erikli turaqlı variaciyalaw usılın* (Lagranj usılın) qarayıq.

Bul usıldı qollanganda, dáslep (1) teñlemege sáykes keliwshi (2) birtekli teñlemesi integrallanadı. Onıń ulıwma sheshimi, joqarıda kórsetilgendey-aq, (3) formulası menen beriledi. Sol sebepli (3) funkciyası C erikli turaqlı bolğanda (1) birtekli emes teñlemenıń sheshimi bola almaydı. Degen menen, birtekli emes teñlemenıń sheshimin de usı túrde izleybiz, biraqta C tı erikli turaqlı emes, al x tıń bazıbir funkciyası dep esaplaymız, yaǵnıy erikli turaqlı variaciyalaymız (onı ózgeredi dep esaplaymız). Solay etip, (1) birtekli emes teñlemenıń sheshimin

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (4)$$

túrinde izleybiz, bunda $C(x)$ - x tıń jańa belgisiz funkciyası. Sonda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (5)$$

tuwındısın esaplap, (1) teñlemesine (4) hám (5) ańlatpaların qoyıp,

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

qatnasına yamasa

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad (6)$$

qatnacına iye bolamız. Bunı integrallap,

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \quad (7)$$

funkciyasın tabıwǵa boladı. Endi bul tabılğan (7) ańlatpasın izlengen (4) sheshimge aparıp qoyamız. Sonda

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \quad (8)$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul (8) formula (1) birtekli emes sızıqlı teñlemenin ulıwma sheshimin beredi.

(1) teñlemenin sheshimin $y = u(x) \cdot \mathcal{G}(x)$ túrinde izleyviz. Sonda

$$\frac{du}{dx} \mathcal{G} + u \frac{d\mathcal{G}}{dx} + p(x)u \cdot \mathcal{G} = Q(x).$$

Al, $u(x)$ retinde $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ teñlemesinin sheshimleriniñ birewin saylap alamız, mısalı,

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Sonda $\mathcal{G}(x)$ funkciyasın

$$e^{-\int p(x)dx} \frac{d\mathcal{G}}{dx} = Q(x)$$

teñlemesinen tabamız, yaǵnıy $\mathcal{G}(x) = C + \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx$, bunda C - erikli turaqlı. Tabılǵan $u(x)$ hám $\mathcal{G}(x)$ funkciyaların kóbeytip, (1) teñlemenin ulıwma sheshimin, yaǵnıy (8) formulanı alamız.

(1) sızıqlı teñlemenin eki jaǵın da $e^{\int p(x)dx}$ funkciyasına kóbeytip, onı

$$\frac{d}{dx} \left(ye^{\int p(x)dx} \right) = Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

túrinde jazamız. Bunı integrallasaq, onda

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx \text{ yamasa } y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right].$$

Mına $f'(y) \frac{dy}{dx} + f(y)p(x) = Q(x)$ teñlemesi $z = f(y)$ almatırıw járdeminde sızıqlı teñlemege alıp kelinedi. Dara jaǵdayda,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0; 1)$$

teñlemesin sızıqlı teñlemege alıp keliwge boladı. Bul teñleme *Bernulli teñlemesi* dep ataladı. Bernulli teñlemesin

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x), \quad y \neq 0$$

túrinde jazıp, $z = y^{1-n}$ almatırıwın qollanıp, onı z belgisiz funkciyasına qarata sızıqlı teñlemege alıp kelemiz. Biraqta, Bernulli teñlemesinin sheshimin $y = u \cdot \mathcal{G}$ túrinde izlep, sızıqlı teñlemege keltirmey-aq sheshken qolaylı boladı. Al,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

teńlemesi *Rikkati teńlemesi* dep ataladı. Bul teńleme ulıwma jaǵdayda kvadraturalarda integrallanbaydı. Egerde, onıń bir $y = y_1(x)$ dara sheshimi belgili bolsa, onda $y = y_1 + z$ almasıruwı járdeminde Rikkati teńlemesin Bernulli teńlemesine alıp keliwge boladı.

Mısal. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul birtekli emes sızıqlı teńleme. Onı erikli turaqlını variaciyalaw usılı menen sheshemiz. Dáslep sáykes birtekli teńlemenıń ulıwma sheshimin tabayıq:

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0, \quad \frac{dy}{y} + \cos x dx = 0, \quad \int \frac{dy}{y} + \int \cos x dx = \ln C, \\ \ln |y| + \sin x = \ln C, \quad y = C e^{-\sin x}.$$

Berilgen teńlemenıń sheshimin $y = C(x)e^{-\sin x}$ túrinde izleyviz. Sonda

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\sin x} - \cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C(x) + C(x) e^{-\sin x} \cos x = e^{-\sin x},$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = 1, \quad C(x) = x + C.$$

Demek, $y = (x + C)e^{-\sin x}$.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Qanday teńleme sızıqlı teńleme dep ataladı? Qanday shártler orınlanganda sızıqlı teńleme ushın Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye? Sheshim qanday intervalda bar boladı? Sızıqlı teńleme ayrıqsha sheshimge iye bolıwı múmkin be?

2. Birtekli sızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimi qanday túrge iye (ádettegi túrde hám Koshi túrinde)? Eger birtekli sızıqlı teńlemenıń nolden ózgeshe bir dara sheshimi belgili bolsa, onda onıń ulıwma sheshimi qalay jazıladı?

3. Eger birtekli emes sızıqlı teńlemenıń bir dara sheshimi hám sáykes birtekli teńlemenıń ulıwma sheshimi belgili bolsa, onıń ulıwma sheshimin qalay tabıwǵa boladı?

4. Birtekli emes sızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimin tabıwdıń Lagranj usılı (erikli turaqlını variaciyalaw usılı) neden ibarat?

5. Birtekli emes sızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimi (ádettegi kóriniste hám Koshi kórinisinde) qanday túrge iye?

6. Bernulli teńlemesi qalay integrallanadı?

Differenciallıq formadağı

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

teńlemesin karayıq.

(1) differenciallıq teńlemesi *tolıq differencialdağı teńleme* dep ataladı, eger de bul teńlemenin sol jağı bazıbir eki argumentli $u(x, y)$ funkciyasınan alınğan tolıq differencial bolsa, yaǵnıy

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2)$$

birdeyligi orınlansa.

Bul jaǵdayda (1) teńlemenin

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Eger $y(x)$ funkciyası (1) teńlemenin sheshimi bolsa, onda $du(x, y(x)) \equiv 0$ birdeyligi orınlanadı, demek bunnan integrallap,

$$u(x, y) = C \quad (4)$$

qatnasın alamız, bunda C - erikli turaqlı hám kerisinshe, eger bazıbir $y(x)$ funkciyası (4) qatnastı birdeylikke aynaldırsa, onda bul birdeylikti differenciallasaq, $du(x, y) = 0$ boladı, demek, (4) formulası (1) teńlemenin ulıwma integralın beredi. $M(x, y)$ hám $N(x, y)$ funkciyaların xOy tegisliginin bazıbir bir baylanıslı D oblastında sáykes túrde y hám x boyınsha úzliksiz dara tuwındılarǵa iye dep esaplaymız.

Teorema. (1) differenciallıq teńlemenin sol jağı bazıbir eki x hám y ǵárezsiz ózgeriwshili $u(x, y)$ funkciyasının tolıq differencialı bolıwı ushın

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (5)$$

birdeyliginin orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

(1) tolıq differenciallardağı teńlemenin ulıwma integralı

$$\int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = C \text{ yamasa } \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = C$$

formularının biri menen anıqlanadı, bunda $x_0, y_0 \in D$ - bazıbir turaqlılar.

Mısal. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul teńlemede

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y$$

bolğanlıqtan, ol tolıq differencialdağı teńleme boladı. Toliq differencial usı teńlemenin sol jaǵına teń bolatuǵın $u(x, y)$ funkciyası tómendegishe tabıladı:

$$u(x, y) = \int (2xy + 3y^2) dx + \varphi(y), \quad u(x, y) = x^2 y + 3y^2 x + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y)] = x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{d\varphi(y)}{dy} = -3y^2,$$

$$d\varphi(y) = -3y^2 dy, \quad \varphi(y) = -3 \int y^2 dy + C_1, \quad \varphi(y) = -y^3 + C_1.$$

Demek, $u(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + C_1$. Sonda berilgen teńlemenin ulıwma integralı

$$x^2 y + 3y^2 - y^3 = C$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Kóp jaǵdaylarda (1) túrindegi teńleme tolıq differencialdağı teńleme bolmay, biraqta onı usınday teńlemege alıp keliw múmkin.

Bul (1) tenlemenin eki jaǵında bazıbir $\mu(x, y)$ funkciyaǵa kóbeytiw arqalı erisiledi. Bunday funkciya - integrallawshı kóbeytiwshı dep ataladı.

Integrallawshı kóbeytiwshini tabıw ushın

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (6)$$

teńlemesin ańsat alıwǵa boladı. Bul teńleme $\mu(x, y)$ belgisiz funkciyasına qarata dara tuwındılı differenciallıq teńleme bolıp, ulıwma jaǵdayda onı sheshiw qıyın boladı. Sonın ushın onın ayırım dara jaǵdayların qaraymız:

a) Meyli (1) teńleme tek x tan gárezli bolğan integrallawshı kóbeytiwshige iye bolsın, yaǵnıy $\mu = \mu(x)$. Sonda $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ bolıp, (6) teńleme

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (7)$$

túrine iye boladı. (7) teńlemenı integrallap,

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} \quad (8)$$

túrindegi integrallawshı kóbeytiwshige iye bolamız.

b) Meyli (1) teńleme tek y ke gárezli bolǵan integrallawshı kóbeytiwshige iye, yaǵnıy $\mu = \mu(y)$ bolsın. Bunda $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$ bolıp, (6) teńleme

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = - \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} \quad (9)$$

túrine iye boladı hám a) jaǵdayına uqsas soǵı teńlemenı integrallap, (1) teńlemenıń

$$\mu = \mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy} \quad (10)$$

túrindegi integrallawshı kóbeytiwshisine iye bolamız.

c) Endi integrallawshı kóbeytiwshi bazıbir belgili $w = w(x, y)$ funkciyasınıń funkciyası bolǵan jaǵdaydı qaraymız, yaǵnıy $\mu = \mu(w) = \mu[w(x, y)]$, bunda $w(x, y)$ - belgili funkciya. Sonda bul jaǵdayda

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'_w \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'_w \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

bolǵanlıqtan, (6) teńlemenı

$$\mu \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = \left[N \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial w}{\partial y} \right] \frac{d\mu}{dw}$$

túrinde yamasa

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial w}{\partial y}} dw \quad (11)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Eger

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial w}{\partial y}} \equiv \theta(w)$$

bolsa, onda (11) teńlemeden $\mu = \mu[w(x, y)]$ funkciyasın tabıwǵa boladı. Haqıyqatında da, bul jaǵdayda (11) teńlemeden

$$\mu = e^{\int \theta(w) dw} \quad (12)$$

túrindegi integrallawshı kóbeytiwshini alamız.

2-mısal. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul jerde $M(x, y) = 2xy^2 - 3y^3$, $N(x, y) = 7 - 3xy^2$. Demek,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 9y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2$$

bolǵanlıqtan, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ boladı. Al,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{4xy - 9y^2 + 3y^2}{-(2xy^2 - 3y^3)} = -\frac{4xy - 6y^2}{y^2(2x - 3y)} = -\frac{2}{y}$$

bolǵanlıqtan, $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y} dy$ teńlemesine iye bolamız, bunnan

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = -2 \int \frac{dy}{y} + \ln C, \quad \ln|\mu| = -2 \ln|y| + \ln C,$$

$$\mu = \frac{C}{y^2}, \quad C=1, \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Endi berilgen teńlemenı $\mu = \frac{1}{y^2}$ funkciyasına kóbeytemiz:

$$(2xy - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0.$$

Bul teńleme tolıq differencialdaǵı teńleme. Onı tómendegishe sheshemiz:

$$u(x, y) = \int (2x - 3y)dx + \varphi(y), \quad u(x, y) = x^2 - 3xy + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{7}{y^2} - 3x, \quad \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{7}{y^2},$$

$$\varphi(y) = 7 \int \frac{dy}{y^2} + C_1, \quad \varphi(y) = -\frac{7}{y} + C_1.$$

Demek, berilgen teńlemenıń ulıwma integralı $x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C$ boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Qanday shártlerde teńlemesi tolıq differenciallardagı teńleme boladı? Onıń ulıwma sheshimi qanday túrge iye?

2. Integralawshı kóbeytiwshi usılı neden ibarat? Qanday shártler orınlanganda a) tek tan gárezli, b) tek ten gárezli, c) hám tiń bazıbir funkciyasınan gárezli bolğan integrallawshı kóbeytiwshi bar boladı?

4 – lekciya. Birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi. Sheshiminiń bar bolıwı hám birden birliǵı haqqındaǵı teorema. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı.

Reje:

1. Koshi máselesiniń qoyılıwı.
2. Sheshiminiń bar bolıwı hám birden birliǵı haqqındaǵı teorema
3. Teoremanıń dálileniwi.
4. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı.
5. Eyler usılı. Eyler sınıq sızıqları.
6. Sheshimniń dawam etiliwi haqqında teorema
7. Sheshimniń baslanǵısh shártke hám parametrge uziliksiz ġárezililigi

Tayanış sózler: Koshi máselesi. Pikar teoreması. teń kúshli integrallıq teńleme. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı. Sheshiminiń bar bolıwı. Sheshimniń birden birliǵı. Eyler usılı. Eyler sınıq sızıqları. Sheshimniń dawam etiliwi. Baslanǵısh shárt. Parametr. Uziliksiz ġárezililik.

Meyli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differentiallıq teńlemesi hám

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

baslanǵısh shárti berilsin, bunda $f(x, y)$ bazıbir oblastta berilgen funkciya, al x_0, y_0 - berilgen baslanǵısh mánisler.

Teorema (Pikar teoreması). Meyli $f(x, y)$ funkciyası tómendegi eki shártti qanaatlandıratuǵın bolsın:

1) $f(x, y)$ funkciyası óziniń eki ózgeriwshisi boyınsha da $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ jabıq oblastında anıqlanǵan hám úzliksiz bolsın, demek, ol shegaralanǵan:

$$|f(x, y)| \leq M \quad (3)$$

bunda M - oń turaqlı;

2) $f(x, y)$ funkciyası R oblastında y ózgeriwshisi boyınsha Lipshic shártin qanaatlandırsın, yaǵnıy qálegen $(x, y_1, y_2) \in R$ ushın

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (4)$$

teńsizligi orınlansın, bunda L - Lipshic turaqlısı, $L > 0$.

Sonda (1) differenciallıq teńlemesiniń (2) baslanğısh shártin qanaatlandıratuǵın, $|x - x_0| \leq h$ aralıǵındaǵı x mánisleri ushın anıqlanǵan hám úzliksiz differenciallanatuǵın, x tıń usı mánislerinde R oblastınan shıǵıp ketpeytuǵın $y = y(x)$ sheshimi bar boladı hám ol birden-bir boladı, bunda

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}. \quad (5)$$

Pikar teoreması Koshi máselesi sheshiminiń tek bar bolıwın hám onıń birden-birligin táminlep ǵana qoymastan, al bul sheshimdi belgili dállikte juwıq túrde tabıwdıń usılın da beredi.

Atap aytqanda, Pikar teoremasıń shártleri orınlanǵanda izbe-iz juwıqlasıw metodına muwapıq, (1), (2) Koshi máselesiniń sheshimin

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds, \quad y_0(x) = y_0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

rekurrentlik qatnasları menen anıqlanatuǵın $\{y_n(x)\}$ funkciyalardıń teń ólshewli jıynaqlı izbe-izliginiń $n \rightarrow \infty$ daǵı shegi retinde tabıwǵa boladı. Bunda $y(x)$ dál sheshimdi n -shi juwıq sheshim $y_n(x)$ penen almastırǵandaǵı qáteliktiń bahalanıwı

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} h^n$$

teńsizligi menen beriledi.

Pikar teoremasındaǵı Lipshic shártin $f(x, y)$ funkciyasınıń y boyınsha shegaralanǵan $\frac{\partial f}{\partial y}$ dara tuwındıǵa iye bolıw shárti menen almastırılǵa boladı. Lagranj teoremasına muwapıq,

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2), \quad 0 < \theta < 1$$

bolǵanlıqtan, bul ayırmanı bahalay otırıp, $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < K$ ekenin esapqa alsaq,

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$ teńsizligin, yaǵnıy Lipshic shártin keltirip shıǵarıwǵa boladı. Lipshic shárti Koshi máselesi sheshiminiń birden-birligin táminleydi. Al, bul Lipshic shártiniń orınlanıwı talap etilmegen jaǵdayda Koshi máselesiniń sheshiminiń tek bar bolıwın Peano dálillegen.

Teorema (Peano teoreması). Meyli $f(x, y)$ funkciyası R tuwrımúyeshliginde úzliksiz funkciya bolsın hám $M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$, $h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$.

Sonda (1), (2) Koshi máselesi $[x_0 - h, x_0 + h]$ aralıǵında eń keminde bir $y = y(x)$ sheshimge iye boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı?
2. Pikar teoreması neden ibarat?
3. Qanday shártte Koshi máselesi sheshimi bar boladı?
4. Qanday shártlerde sheshim birden-bir boladı?
5. Izbe-iz juwıqlasıwlar metodı neden ibarat?

1. Differenciallıq teńlemelerdi juwıq túrde integrallawdıń metodlarınń biri Eyler metodı bolıp tabıladı. Bul metodqa muwapıq

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differenciallıq teńleneniń (x_0, y_0) noqatı arqalı ótiwshi izlengen integrallıq iymek sızıǵı hár bir zvenosı ózleriniń shetki noqatlarınń birinde integrallıq iymek sızıqqa urınatúǵın tuwrı sızıqlı kesindilerden ibarat bolǵan sınıq sızıq penen almasırladı (1-súwret). Bul metodtı qollanǵanda izlengen $y = y(x)$ sheshimniń $x = b$ toshkadaǵı mánisim juwıq esaplaw ushın $x_0 \leq x \leq b$ (eger $b > x_0$ bolsa) kesindi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ bunda $x_n = b$, noqatları menen n teńdey bóleklerge bólinedi. Hár bir bólektiń $x_{i+1} - x_i = h$ uzınlıǵı esaplaw adımı dep ataladı. Izlengen sheshimniń x_i noqatların daǵı juwıq mánislerin y_i arqalı belgileymiz. Bul y_i mánislerin esaplaw ushın $x_0 \leq x \leq x_1$ kesindide integrallıq iymek sızıqtı onıń (x_0, y_0) noqattaǵı urınbasınıń kesindisi menen almasıramız. Demek, $y_1 = y_0 + hy'_0$, bunda $y'_0 = f(x_0, y_0)$ (1-súwret)

Usıǵan uqsas tómendegi esaplawlardı orınlaymız:

$$y_2 = y_1 + hy'_1, \text{ bunda } y'_1 = f(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2, \text{ bunda } y'_2 = f(x_2, y_2)$$

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}, \text{ bunda } y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Eger $b < x_0$ bolsa, onda esaplawlar sxeması buringıday bolıp qaladı, biraq h adım teris boladı.

Al, $h \rightarrow 0$ de Eyler sınıq sızıqları izlengen integrallıq iymek sızıqtıń grafigine jaqınlasatuǵının kútiw tabiyǵıy boladı hám demek, h adımdı kishiriytiw menen Eyler metodu izlengen sheshimniń b noqattaǵı dál mánisin beriwge jaqınlasadı. Bul tastıyqlawdıń dállileniwi sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı fundamentallıq teoremaǵa alıp kelinedi.

2. Biz sheshimniń bar bolıwın tek

$$I_n : x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$$

aralıq ushın ǵana dállillegen edik. Biraq ta, eger bunda biz $f(x, y)$ funkciya anıqlanǵan hám úzliksiz bolǵan (hám Lipshic shártin qanaatlandıratuǵın) D oblastınan shıǵıp ketpesek, onda tabılǵan sheshimdi dawam etiw mumkin.

Haqıyqatında da, meyli $x = x_0 + h$ bolǵanda tabılǵan sheshimniń y'_0 mánisi D oblastında jatatuǵın bolsın, sonda D oblastında ele pútinley jatatuǵın $R_1 : |x - x_0^{(1)}| \leq a_1, |y - y_0^{(1)}| \leq b_1$ tuwrımúyeshligin tabıwǵa boladı (D oblastınıń ishki noqatı túsiniǵı paydalanıldı). M_1 arqalı R_1 tuwrımúyeshliktegi $|f(x, y)|$ tiń maksimumların belgileybiz. Sonıń menen birge baslanǵısh mánisler sıpatında $x_0^{(1)}$ hám $y_0^{(1)}$ mánislerin qabıl etemiz. Sonda biz dállillegen boyınsha (1) differenciallıq teńlemenin

$$I_1 : x_0^{(1)} - h_1 \leq x \leq x_0^{(1)} + h_1, \quad h_1 = \min \left\{ a_1; \frac{b}{M_1} \right\}$$

aralıqtaǵı sheshimin bar dep tastıyqlay alamız. Bul I_1 intervaldıń ortası I_n intervalınıń ushı menen betlesedi. bul noqatta biz jasaǵan eki sheshimde birdey $y_0^{(1)}$ mánisti qabıl etedi, demek, birden-birlik qásiyeti boyınsha eki sheshimde I_n hám I_1 aralıqlardıń ulıwma bóleginde ústpe-üst túsedi. Biraq ta, I_1 intervaldıń $(x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1)$ yarımı I_n intervaldan sırtta jatadı. Usı yarımında tabılǵan sheshim I_n intervalda aldın alınǵan sheshimniń dawamlanıwı boladı dep aytamız. Eger sheshimniń $x_0^{(1)} + h_1$ noqattaǵı mánisi $y_0^{(2)}$ bolıp hám koordinataları $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + h_1, y_0^{(2)}$ bolǵan noqat ele D oblastınıń ishinde jatsa, onda biz $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$ baslanǵısh berilgenler boyınsha sheshimdi I_2 intervalda anıqlay alamız, bul aralıqtıń bir yarımı I_1 menen betlesedi hám bul ulıwma bólekte jańa sheshim aldınǵı sheshim menen ústpe-üst túsedi; I_2 intervaldıń ekinshi yarımında biz qarastırıp atırǵan sheshimniń dawamlanıwın alamız. Usıǵan uqsas jasaw x tiń kemiwshi mánisleri ushın da júrgiziliwi múmkin. Usınday dawamlanıwlar menen D oblastınıń shegarasına qálegeninshe jaqın keliw múmkin.

Ońǵa da, solǵa da dawamlanbaytuǵın sheshim dawamsız (dawamlan baytuǵın) sheshim dep ataladı. Hár bir sheshimdi dawamsız sheshimge deyin dawamlawǵa bolatuǵının dállillewge boladı. Eger integrallıq sızıqtı dawamlan baytuǵın sheshimniń grafigi dep túsinssek, onda hár bir (x_0, y_0) noqat arqalı bir integrallıq iymek sızıq ótiwi haqqındaǵı tastıyqlaw dál boladı.

Tómendegi tastıyqlaw orını

1-Teorema (tuyıq shegaralanğan oblastta sheshimniń dawamlanıwı haqqında). Meyli $f(x, y)$ funkciyası sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teoremanıń shártlerin tuyıq shegaralanğan D oblastta qanaatlandıratuǵın bolsın. Sonda (1) differenciallıq teńlemeniniń D oblastı ishinen ótetuǵın qálegen $y(x)$ sheshimin eki tárepke qarata D oblastınıń Γ shegarasına shıqqanǵa deyin, yaǵnıy $(a, y(a))$ hám $(b, y(b))$ noqatları Γ shegarada jatatuǵın sonday $[a, b]$ kesindige dawamlawǵa boladı.

3⁰. (1) differenciallıq teńlemeniniń sheshimin tek ǵárezsiz ózgeriwshi x tiń ǵana funkciyası emes, al sonıń menen birge, sheshimniń grafigi ótetuǵın noqat koordinatalarınıń da funkciyası sıpatında qarawǵa boladı. Máselen 1- tártipli ÁDT bolǵan

$$\dot{y} = y$$

teńlemesi $y(x) = y_0 e^{x-x_0}$ teńligi menen berilgen sheshimge iye boladı, oǵan sáykes keliwshi integrallıq iymek sıızıq (x_0, y_0) toshkası arqalı ótedi. Sońǵı shárt y ti x , x_0, y_0 ózgeriwshilerininiń funkciyası sıpatında anıqlaydı, bul analitikalıq túrde

$$y(x, x_0, y_0) = y_0 e^{x-x_0}$$

túrinde jazıladı.

ÁDT sheshimi qanday bolıp x, x_0, y_0 ózgeriwshilerinen ǵárezli bolıwı haqqındaǵı bilim tek teoriya ushın ǵana emes, al ámeliyat ushın da áhmiyetke iye. Sebebi ámeliy máselelerdi sheshkende matematikalıq modeldi dúziwde baslanǵısh berilgenler ádette anaw yáki mınaw ólshewler nátiyjesinde tabıladı, al hár qanday ólshew absolyut dál túrde ótkerilwi múmkin bolmaǵanlıqtan, baslanǵısh berilgenlerdi ólshewdegi kishi qátelikler sheshimlerdiń qásiyetlerine qansha tásir etiwı haqqındaǵı másele payda boladı.

1-Anıqlama. Baslanǵısh $\dot{y} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ máseleniń $\varphi(x, x_0, y_0)$ sheshimi $[x_0, x_0 + h] \subset I$ aralıqta x_0, y_0 baslanǵısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezli, egerde $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın $\delta = \delta(\varepsilon, h) > 0$ sanı tabılıp, hár qanday basqa $\dot{y} = f(x, y)$, $y(x^*) = y_0^*$ baslanǵısh máseleniń $\psi(x, x^*, y_0^*)$ sheshimi ushı $|x_0^* - x_0| < \delta$, $|y_0^* - y_0| < \delta$ teńsizliklerinen $\forall t \in [x_0, x_0 + h]$ ushın

$$|\psi(x, x_0^*, y_0^*) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \varepsilon$$

teńsizligi kelip shıǵatuǵın bolsa. Basqasha aytqanda (1) teńlemeniniń $y(x_0) = y_0$ baslanǵısh shártti qanaatlandıratuǵın $y = y(x, x_0, y_0)$ sheshimin $[x_0, x_0 + h]$ aralıqta x_0, y_0 baslanǵısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezli boladı, egerde baslanǵısh berilgenlerdiń az ózgerisine $[x_0, x_0 + h]$ aralıqta sheshimniń az ózgerisi sáykes kelse (2- sıızılma)

Geyde bul qásiyet integrallıq úzliksizlik yamasa waqıttıń shekli ózgeriw aralıǵındaǵı ornıqlılıq dep ataladı.

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı

2-Teorema. Eger $\dot{y} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ baslanǵısh másele sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teorema shártlerin qanaatlandırsa onda onıń sheshimi x ǵárezsiz ózgeriwshiden hám x_0, y_0 baslanǵısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezli boladı.

Eger DT –niń oń jaǵı tek x hám y ten ǵárezli bolmay, al bazı-bir parametrden de ǵárezli bolsa, onda bul parametr sheshimlerdiń qásiyetine qanday tásir jasaydı?-degen soraw payda boladı.

Haqıyqatında da, differenciallıq teńlemelerdiń (differenciallıq modellerdiń) oń jaqlarına kiriwshi parametrlar úyrenilip atırǵan sistemanıń fizikalıq tabiyatın xarakterleydi. Bunday parametrlar, máselen , massa, zaryadlar,serippelik h.t.b bolıwı múmkin. Bul parametrlar baslanǵısh berilgenler sıyaqlı absolyut dál ólsheniliwi múmkin emes hám sonlıqtan bul jerde de parametrlar diń az ózgerisi sheshimlerdiń qásiyetine qanday tásir jasaydı?-degen soraw kelip shıǵadı.

Qatań formulirivkalarǵa óte otırıp, mına baslanǵısh máseleni (al dálirek aytqanda baslanǵısh máseleler jıynaǵın) qaraymız:

$$\dot{y} = f(x, y, \mu), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı

3-Teorema.(sheshimniń parametrden úzliksiz ǵárezligi haqqında). Eger (2) differenciallıq teńlemeniniń oń jaǵı μ boyınsha $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ bolǵanda úzliksiz bolsa hám sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teorema shártlerin qanaatlandırsa, sonıń menen birge L Lipshic turaqlısı μ den ǵárezli bolmasa, onda (2) máseleniń $y(x, \mu)$ sheshimi μ den úzliksiz ǵárezli boladı.

5 – lekciya. Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńlemeler hám olardı integrallaw usılları. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema. Ayırıqsha sheshimler hám olardı tabıw usılları

Reje:

1. Birinshi tártipli n -dárejeli differensiyallıq teńlemeler.
2. Tolıq emes teńlemeler. Parametr kiritiw usılı.
3. Lagranj teńlemesi.
4. Klero teńlemesi.
5. .Koshi máselesi. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema.
6. Ayırıqsha sheshimler hám olardı tabıw usılları

Tayanış sózler: Birinshi tártipli n -dárejeli differensiyallıq teńlemeler. 1

Tolıq emes teńlemeler. Parametr kiritiw usılı. Lagranj teńlemesi. Klero teńlemesi. Koshi máselesi. Sheshimniń bar bolıwı. Ayırıqsha sheshim. P -diskriminantlıq iymek sızıq. C -diskriminantlıq iymek sızıq.

Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńlemelerdiń kvadraturalarda integrallanatuǵın ayırım klassların qaraymız. Solardıń biri sol jaǵı y' qa qarata n -dárejeli kópáǵzalı bolǵan

$$a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0 \quad (1)$$

teńlemesi bolıp tabıladı, bunda $a_i(x, y)$, $i = 0, 1, \dots, n$ bazıbir oblastta úzliksiz funkciyalar. Bul teńleme birinshi tártipli n -dárejeli differensiallıq teńleme dep ataladı.

Meyli qarastırıp atırǵan oblastta $a_0(x, y) \neq 0$ bolsın. Sonda algebranıń tiykargı teoremasına muwapıq, (1) teńleme y' tuwındısıniń n mánisin anıqlaydı. Differensiallıq teńlemeninń ulıwma kursında teńlemelerdi tek haqıyqıy oblastta qaraw menen sheklenetuǵın bolǵanlıqtan, bul mánisler ishinen kompleks mánislerdi qarastırmaı, tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli m teńlemege iye bolamız:

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n. \quad (2)$$

Eger $f_i(x, y)$ funkciyası bazıbir D oblastında Pikar teoremasınıń shártlerin qanaatlandırısa, onda usı oblasttıń hár bir tochkası arqalı birden-bir integrallıq iymek sızıq ótedi. Solay etip, (2) teńlemeleriniń hár birin integrallap, m integrallıq iymek sızıqlardı alamız.

Nátıyjede (2) teńlemeninń alınǵan $y_i = \varphi_i(x, c)$ ulıwma sheshimleriniń yamasa $\psi_i(x, y) = C$, $i = \overline{1, m}$ ulıwma integrallarınıń jıynaǵı berilgen (1) teńlemeninń ulıwma integralı

boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul ulıwma integral $[\psi_1(x, y) - C][\psi_2(x, y) - C] \dots [\psi_m(x, y) - C] = 0$ qatnası túrinde jazılıwı múmkin.

1 - mısál. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenı $y'^2 - 2y \cdot y' + y^2 \sin^2 x = 0$ túrinde jazıwǵa boladı. Bul birinshi tártipli ekinshi dárejeli differenciallıq teńleme. Onı y' ke qarata sheshsek, $y' = y \pm y \cos x$ teńlemelerin alamız. Al, bul teńlemelerdi integrallap, berilgen teńlemenıń $\ln Cy = x \pm \sin x$ túrindegi ulıwma integralına iye bolamız, bunda C - erikli turaqlı.

Tuwındıǵa qarata sheshilmegen

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3)$$

túrindegi teńlemede x yamasa y , yamasa ol ekewi de qatnaspasa, onda bunday teńlemeler tolıq emes teńlemeler dep ataladı.

I. Dáslep tek y' tan turatuǵın

$$F(y') = 0 \quad (4)$$

differenciallıq teńlemesin qarayıq. Eger bul teńleme y' tıń eń keminde bir haqıyqıy mánisin anıqlasa, onda bul teńlemenıń barlıq sheshimlerin kvadraturalarsız tabıwǵa boladı.

Haqıyqatında da, meyli (4) teńleme y' qa qarata k haqıyqıy korengge iye bolsın:

$$y' = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

yaǵnıy

$$F(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

(5) den $y = a_k x + C$, ($k = 1, 2, \dots$) kelip shıǵadı, bunnan

$$a_k = \frac{y - C}{x}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

(7) ni (6) ǵa qoysaq, onda (4) teńlemesiniń

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0 \quad (8)$$

túrindegi ulıwma integralına iye bolamız.

Demek, (4) teńlemenıń ulıwma integralı bul teńlemede y' tı $\frac{y - C}{x}$ qa almasıwıw jolı menen ańsat alınadı.

II. Endi belgisiz funkciya y qatnaspaytuǵın

$$F(x, y') = 0 \quad (9)$$

teńlemesin qaraymız. Tómenдеgi jaǵdaylar bolıwı múmkin.

a) Eger bul teńlemenı y' qa qarata sheshiw múmkin bolsa, onda

$$y' = f_k(x), \quad (k=1,2,...) \quad (10)$$

teńlemelerine kelemiz, bunda $f_k(x)$ - bazıbir aralıqta úzliksiz bolǵan haqıyqıy funkciyalar. (10) teńlemelerdi integrallap, sáykes túrde, olardıń ulıwma sheshimlerin tabamız:

$$y = \int f_k(x)dx + C, \quad (k=1,2,...).$$

Bul ulıwma sheshimlerdiń jıynaǵı (9) teńlemenıń ulıwma integralı boladı.

b) Meyli (9) teńleme ǵárezsiz ózgeriwshi x qa qarata ańsat sheshiletuǵın bolsın, yaǵnıy bul teńlemenı

$$x = f(y') \quad (11)$$

túrinde jazıw múmkin bolsın, bunda $f(y')$ - tuwındı y' ózgeretuǵın bazıbir oblastta differenciallanatuǵın funkciya. Bul teńlemenı tómendegi usıl menen sheshiwge boladı. $\frac{dy}{dx} = p$ dep esaplap hám p nı parametr esabında qarastırıp, y tı usı p parametri arqalı ańlatamız. Sonda (11) qatnasınan

$$x = f(p) \quad (12)$$

boladı, bunnan

$$dx = f'(p)dp \quad (13)$$

Al, $dy = y'dx$, $dy = p dx$ bolǵanlıqtan, (13) ti esapqa alsaq, onda $dy = pf'(p)dp$ boladı hám bul qatnastı integrallap, $y = \int pf'(p)dp + C$ formulasın alamız.

Solay etip, bul jaǵdayda (9) teńleme

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int pf'(p)dp + C \end{cases} \quad (14)$$

túrindegi parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimge iye boladı. Eger (14) teńlemelerinen r parametrin joq etiw múmkin bolsa, onda (9) teńlemenıń $y = \varphi(x, C)$ ulıwma sheshimine yamasa $\Phi(x, y, C) = 0$ ulıwma integralına iye bolamız.

(9) teńlemenı usınday usıl menen sheshiw parametr kiritiw metodı dep ataladı.

2 - mısál. $x(y'^2 - 1) = 2y'$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeni x qa qarata sheshiw ańsat: $x = \frac{2y'}{y'^2 - 1}$. Endi $y' = p$ dep belgilep alıp, sońǵı teńlemeni $x = \frac{2p}{p^2 - 1}$ túrinde jazamız. Bul qatnastı differenciallasaq, onda $dx = \frac{2(p^2 + 1)}{(p^2 - 1)^2} dp$ qatnasın alamız. Bunnan $dy = p dx$ ekenin esapqa alsaq, $dy = \frac{2(p^2 + 1)p}{(p^2 - 1)^2} dp$ boladı. Bul teńlemeni integrallasaq,

$$y = \frac{2}{p^2 - 1} - \ln|p^2 - 1| + C$$

kelip shıǵadı. Solay etip, berilgen teńlemenıń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$x = \frac{2p}{p^2 - 1}, y = \frac{2}{p^2 - 1} - \ln|p^2 - 1| + C$$

túrinde jazıladı.

c) (9) teńleme x qa da hám y' qa qarata sheshilmewi múmkin. Biraqta ayırım jaǵdaylarda bul teńlemeni parametrlik formada, mısalı

$$x = \varphi(t), y' = \psi(t) \quad (15)$$

túrinde jazıw múmkin. Bul jaǵdayda (15) den $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$ kelip shıǵadı. Sonda (9) teńlemenıń ulıwma sheshimi tómendegishe parametrlik formada jazıladı:

$$x = \varphi(t), y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C, \quad (16)$$

bunda C - erikli turaqlı.

III. Meyli (1) teńlemede ǵárezsiz ózgeriwshi x qatnaspasın:

$$F(y, y') = 0. \quad (17)$$

Bul teńleme ushın da (9) teńlemeni sheshkendegi jaǵdaylarǵa usaǵan jaǵdaylar bolıwı múmkin.

3 - mısál. $y\sqrt{1 - y'^2} = y'$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul jaǵdayda parametr esabında y' tı alıwǵa bolar edi, biraq $y' = \sin \varphi$ dep alıw qolaylıraq boladı. Berilgen teńlemeden ti φ arqalı ańlatamız. $y\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sin \varphi$, $y = \operatorname{tg} \varphi$.

Solay etip, berilgen teńlemeni parametrlik kóriniste tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} \varphi, \\ y' = \sin \varphi. \end{cases}$$

Endi x ózgeriwshisin φ arqalı ańlatayıq:

$$dy = y'dx, \quad dy = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad dx = \frac{dy}{y'}, \quad dx = \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi},$$

bunnan

$$x = \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} + C = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\cos \varphi} + C.$$

Demek, berilgen teńlemenin parametrik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\cos \varphi} + C, \\ y = \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Lagranj teńlemesi dep, tuwındıǵa qarata sheshilmegen, al belgisiz funkciyaǵa hám gárezsiz ózgeriwshige qarata sıızıqlı bolǵan

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0 \quad (18)$$

túrindegi teńlemege aytıladı, bunda A, B, C - úzliksiz differenciallanatuǵın funkciyalar.

Ádette, $A(y') \neq 0$ dep esaplap, Lagranj teńlemesin

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \quad (19)$$

túrinde qarastradı, bunda

$$\varphi(y') = -\frac{B(y')}{A(y')}, \quad \psi(y') = -\frac{C(y')}{A(y')}.$$

Lagranj teńlemesin sheshiw ushın parametr kiritiw usılın qollanıwǵa boladı. $y' = p$ dep alıp, (19) teńlemenin

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \quad (20)$$

túrinde jazamız. Bul teńlemenin eki jaǵında x boyınsha differenciallayıq:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(p)x \frac{dp}{dx} + \varphi(p) + \psi'(p) \frac{dp}{dx}. \quad (21)$$

Al, $\frac{dy}{dx} = p$ ekenligin esapqa alsaq, onda sońǵı teńleme $p = [\varphi'(p)x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} + \varphi(p)$ túrine keledi, bunnan

$$[\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp + [\varphi(p) - p]dx = 0. \quad (22)$$

Endi $\varphi(p) - p \neq 0$ dep esaplap, sońǵı teńlemenıń eki jaǵın da usı ayırmaǵa bólsek,

$$dx + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x dp = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} dp$$

teńlemesin alamız, bunnan

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (23)$$

túrindegi birtekli emes sıızıqlı teńlemege kelemiz. Bul teńlemenıń ulıwma sheshimi

$$x = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} dp} \left[C + \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} dp} dp \right] \quad (24)$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul sheshimdi qısqasha

$$x = \omega(p)C + \chi(p) \quad (25)$$

túrinde jazıwǵa boladı, bunda $\omega(p)C$ funkciyası (23) teńlemege sáykes keliwshi birtekli sıızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimi, al $\chi(p)$ - birtekli emes teńlemenıń dara sheshimi. Sonda Lagranj teńlemesiniń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = \omega(p)C + \chi(p), \\ y = \varphi(p)[\omega(p)C + \chi(p)] + \psi(p) \end{cases} \quad (26)$$

túrinde jazıladı.

Meyli $\varphi(p) - p = 0$ bolsın hám bul teńleme $p = p_i$ ($i = 1, 2, \dots$) haqıyqıy korenlerine iye bolsın. Sonda $y = \varphi(p_i)x + \psi(p_i)$ funkciyaları da Lagranj teńlemesiniń ayırıqsha sheshimi bolıwı múmkin.

Lagranj teńlemesiniń dara jaǵdayı bolǵan

$$y = xy' + \psi(y') \quad (27)$$

teńlemesin qarayıq. Bul teńleme Klero teńlemesi dep ataladı. Onı Lagranj teńlemesin sheshkendegidey usıl menen sheshemiz.

$$y' = p, \quad dy = p dx, \quad y = px + \psi(p); \quad (28)$$

$$dy = p dx + x dp + \psi'(p) dp, \quad p dx = p dx + x dp + \psi'(p) dp,$$

$$[x + \psi'(p)]dp = 0.$$

Soñğı teńleme tómendegi eki teńleme menen teń kúshli: $dp = 0$, $x + \psi'(p) = 0$. Bul teńlemenin birinshisinen $p = C$ boladı. p nıń bul mánisin (28) ge qoysaq, onda

$$y = Cx + \psi(C) \quad (29)$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul Klero teńlemesiniń ulıwma sheshimin beredi. Endi $x + \psi'(p) = 0$ jaǵdayın qarayıq. Bunnan $x = -\psi'(p)$ boladı. Sonda Klero teńlemesiniń

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \quad (30)$$

túrinde jazılǵan jáne bir sheshimine iye bolamız. (29) hám (30) sheshimlerin salıstırsaq, onda erikli turaqlı C nıń hesh bir mánisinde (30) sheshimi (29) sheshiminen kelip shıqpaytuǵının kóriwge boladı. (30) sheshim Klero teńlemesiniń ayrıqsha sheshimi boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. -dárejeli birinshi tártipli teńleme degen ne? Ol qalay integrallanadı?
2. teńlemesiniń ulıwma integralı qanday túrge iye?
3. Belgisiz funkciya qatnaspaǵan teńleme qalay integrallanadı?
4. Ğárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńleme qalay integrallanadı?
5. Lagranj hám Klero teńlemeleri qalay integrallanadı?

Tuwındıǵa qarata sheshilmegen

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

differentiallıq teńlemenin ayrıqsha sheshimleriniń bar bolıwı hám olardı tabıw haqqındaǵı máseleni qarayıq.

Eger $F(x, y, y')$ funkciyası (1) teńleme ushın Koshi máselesiniń sheshiminiń bar bolıwı hám onıń birden-birligi haqqındaǵı teoremanıń shártlerin qanaatlandırsa, onda (x, y) tegisliginiń qarastırılǵan oblastında hár bir (x_0, y_0) tochkası arqalı berilgen baǵıt boyınsha (1) teńlemenin tek bir integrallıq iymek sızıǵı ótedi.

Demek, eger (1) teńlemenin ayrıqsha sheshimleri bar bolsa, onda olar usı teoremanıń shártleri buzılǵan tochkaları arqalı ótedi. Eger $F(x, y, y')$ funkciyası úzliksiz hám ol birinshi tártipli úzliksiz dara tuwındılarǵa iye bolsa, onda ayrıqsha sheshimlerdi koordinataları

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad p = \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

teńlemelerin qanaatlandıratuǵın tochkalar ishinen izlew kerek. Eger bul sistemadan p parametrin joq etiw múmkin bolsa, onda (1) teńlemenin ayırıqsha sheshimi bolıwı múmkin bolǵan

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (3)$$

kópligin alamız. (3) qatnası menen anıqlanatuǵın tochkalar kópligi (1) teńlemenin p - **diskriminantlıq iymek sızıǵı** dep ataladı.

Eger (1) differenciallıq teńlemenin p -diskriminantlıq iymek sızıǵı bar bolsa, onda olar bul teńlemenin ayırıqsha sheshimleri bolıwı múmkin.

Bunnan (1) teńlemenin ayırıqsha sheshimlerin tabıwdın tómendegi usılı kelip shıǵadı:

1) (1) teńlemenin p -diskriminantlıq iymek sızıǵın tabıw kerek;

2) Bul tabılǵan teńlemenin p -diskriminantlıq iymek sızıǵı berilgen teńlemenin integrallıq iymek sızıqları bolama? Sonı tekseriw kerek;

3) Bul integrallıq iymek sızıqlardıń hár bir tochkasında birden-birlik qásiyeti buzılama? Sonı tekseriw kerek.

Eger usı úsh shárt te orınlansa, onda differenciallıq teńlemenin bul izertlengen sheshimi **ayırıqsha sheshim** boladı.

(1) túrdegi differenciallıq teńlemenin ayırıqsha sheshimlerin tabıwdın ádewir ápiwayı hám qolaylı bolǵan ekinshi usılı usı teńlemelerdin ulıwma sheshimi yamasa ulıwma integralı belgili bolǵan jaǵdayda paydalanıladı. Bul usıl bir parametrik iymek sızıqlar toparınıń orawshısı haqqındaǵı túsiniqke tiykarlanadı.

Meyli (4) differenciallıq teńlemenin

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (4)$$

ulıwma integralı tabılǵan bolsın, bunda C - erikli turaqlı. Bul ulıwma integral xOy tegisliginde bir parametrik iymek sızıqlar toparın anıqlaydı.

Eger usı iymek sızıqlar toparınıń orawshısı, yaǵnıy hár bir tochkasında (4) topardın bir iymek sızıǵı menen ulıwma urınbaǵa iye bolatuǵın iymek sızıq bar bolsa, onda bul orawshı berilgen (1) differenciallıq teńlemenin ayırıqsha sheshimi boladı. Haqıyqatında da, urınbasınıń baǵıtı (1) teńlemesi menen anıqlanǵan maydanniń baǵıtlarınıń biri menen dál kelgenlikten orawshı integrallıq iymek sızıq boladı. Sonıń menen birge, orawshınıń hár bir tochkası arqalı eń keminde eki integrallıq iymek sızıq - orawshınıń ózi hám (4) topardın iymek sızıqlarınıń biri ótkenlikten orawshınıń hár bir tochkasında sheshimniń birden-birliǵi buzıladı. Demek, orawshı ayırıqsha integrallıq iymek sızıq, yaǵnıy ayırıqsha sheshim boladı.

Matematikalıq analiz kursınan belgili bolǵanıday-aq, eger $\Phi(x, y, C)$ úzliksiz differenciallanatuǵın funkciya bolsa, onda (4) iymek sızıqlar toparınıń orawshısı

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C}(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

teńlemeler sisteması menen anıqlanatuǵın **S-diskriminantlıq iymek sızıqtıń** quramına kiredi.

Eger $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \varphi(x), C) \neq 0$ yamasa $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \varphi(x), C) \neq 0$ shártleri orınlansa, onda onıń bazıbir $y = \varphi(x)$ tarmaǵı orawshı boldı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Ayrıqsha sheshim degen ne?
2. p -diskriminantlıq iymek sızıq degen ne hám ol qalay tabıladı?
3. Ayrıqsha sheshimdi tabıw usılı neden ibarat?
4. S diskriminantlıq iymek qalay tabıladı?
5. Integrallıq iymek sızıqlar toparınıń orawshısı qalay tabıladı?
6. Birinshi tártipli teńlemenıń ulıwma túri qalay jazıladı?
7. Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı?

5-Tema. Joqarı tártipli differensiyallıq teńlemeler.6 – lekciya. Joqarı tártipli differensiallıq teńlemeler.Baslanǵısh shártler. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema. Kvadraturalarda integrallanatuǵın teńlemeler

Joqarı tártipli differensiyallıq teńlemelerdiń tártibin tómendetiw

Reje:

1. Joqarı tártipli differensiyallıq teńlemeler. Tiykargı túsinikler hám anıqlamalar.
2. Koshi máselesi. Sheshimniń bar-bolıwı haqqındaǵı teorema.
3. Ulıwma sheshim.Ulıwma integral. Parametrlik kórinistegi ulıwma sheshim. Aralıq integralları.
4. $y^{(n)} = f(x)$ túrindeǵi teńlemeler.
5. $F(x, y^{(n)}) = 0$ túrindeǵi teńlemeler
6. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ túrindeǵi teńlemeleri.
Belgisiz funkciya hám onıń k-tártipke shekemgi tuwindıları qatnaspaǵan teńlemeler
7. Ğárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńlemeler.
8. $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ge qarata bir tekli teńleme.

9. Ulıwmalasqan bir tekli teńlemeler.
10. Dál tuwındılardaǵı teńlemeler.

Tayanış sózler: Joqarı tártipli differensiyallıq teńlemeler. Sheshim. Integrallıq iymek sıızıq. Koshi máselesi. Pikar teoreması. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ulıwma integral. Aralıq integralları. Joqarı tártipli differenciallıq teńleme. Kvadratura. Integrallanatuǵın teńlemeler túrleri. Belgisiz funkciya qatnaspaǵan teńlemeler. Ğárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńlemeler. Bir tekli teńleme. Ulıwmalasqan bir tekli teńlemeler. Dál tuwındılardaǵı teńlemeler.

Biz joqargı tártipli tuwındılardı óz ishine alatuǵın n -tártipli differenciallıq teńlemelerdi úyrenemiz.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

túrindegi teńleme n -tártipli ápiwayı differenciallıq teńleme dep ataladı. Bul jerde x - ğárezsiz ózgeriwshi, y - belgisiz funkciya, $y', \dots, y^{(n)}$ - y funkciyasınıń sáykes tártiptegi tuwındıları, al F bolsa, $n+2$ ólshemli R^{n+2} keńisliginiń bazıbir D oblastında anıqlanǵan hám úzliksiz berilgen funkciya. Bul (1) teńlemede $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ shamaları qatnaspawı da múmkin, biraq teńlemede n - tártipli tuwındı $y^{(n)}$ niń qatnasıwı shárt bolıp tabıladı.

Kóp jaǵdaylarda (1) teńlemenı

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

teńleme kórinisine keltiredi. (2) teńleme úlken tuwındıǵa qarata sheshilgen n - tártipli differenciallıq teńleme dep ataladı. (2) teńlemede f funkciyasın $n+1$ ólshemli $R^{(n+1)}$ keńisliginiń bazıbir G oblastında anıqlanǵan úzliksiz funkciya dep uyǵaramız.

Anıqlama. (2) differenciallıq teńlemenıń $I = (a, b)$ intervalındaǵı sheshimi dep tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın $y = \varphi(x)$ funkciyasına aytıladı:

1) $\varphi(x) \in C^n(I)$; 2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in G, \forall x \in I$; 3) $\varphi(x)$ funkciyası (2) teńlemenı birdeylikke aylandıradı, yaǵnıy $\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)), \forall x \in I$.

Eger $\varphi(x)$ - (2) teńlemenıń sheshimi bolsa, onda $\{x, \varphi(x) | x \in I\}$ kópligi, yaǵnıy $y = \varphi(x)$ sheshimniń grafigi (2) teńlemenıń integrallıq iymek sıızıǵı delinedi.

Sheshim túsiniǵı (1) teńleme ushın da usıǵan uqsas anıqlanadı.

(2) differenciallıq teńleme ushın Koshi máselesi yamasa baslanǵısh másele dep, (2) teńlemenıń $x = x_0$ bolǵanda berilgen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

baslanğısh shártlerin qanaatlandıratuǵın $y = y(x)$ sheshimin tabıw máselesine aytıladı, bunda $x_0 \in I, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ berilgen sanlar bolıp, olar baslanğısh mánisler dep ataladı. Koshi máselesi sheshiminiń bar bolıwın hám onıń birden-birligin tómendegi teorema támiyinleydi.

Teorema (Pikar teoreması). Meyli (2) differenciallıq teńlemenıń on jaǵı

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b, \dots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b$$

oblastında anıqlanǵan bolıp, tómendegi eki shártti qanaatlandırsın :

1) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyası R oblastında úzliksiz hám demek, ol shegaralanǵan:

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq M \quad (M > 0);$$

2) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyası $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ózgeriwshileri boyınsha Lipshic shártin qanaatlandıradı :

$$|f(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})| \leq L \sum_{k=0}^{n-1} |y_1^{(k)} - y_2^{(k)}|, \quad (4)$$

bunda $L > 0$, $y^{(0)} \equiv y$, al $(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)})$ hám $(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})$ R oblastınıń qálegen tochkaları.

Sonda (2) differenciallıq teńleme (3) baslanğısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın

$$|x - x_0| \leq h$$

aralıǵında anıqlanǵan birden-bir $y = y(x)$ sheshimge iye boladı, bunda

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{\max(M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)} \right\}.$$

Eskertiw. Eger (2) teńlemenıń on jaǵı $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ boyınsha shegaralanǵan dara tuwındılarǵa iye bolsa:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right| \leq K, \quad k = \overline{0, n-1},$$

onda (4) Lipshic shárti sózsiz orınlanadı hám bunda $L = K$ boladı.

Meyli G - hár bir tochkasında (2) teńleme ushın Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye bolatuǵın oblast bolsın.

Anıqlama. n erikli turaqlı $C_1, C_2, \dots, C_n$ di óz ishine alǵan

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (5)$$

funkciyası (2) teńlemenin G oblastındaǵı ulıwma sheshimi dep ataladı, egerde

1) φ funkciyası x boyınsha n ret úzliksiz differenciallanatuǵın bolsa;

2) qálegen $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ tochka ushın

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

$$y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

.....

$$y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

sisteması $C_1, C_2, \dots, C_n$ turaqlılarına qarata bir mánisli sheshimge iye

$$C_1^0 = \psi_1(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}),$$

$$C_2^0 = \psi_2(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}),$$

.....

$$C_n^0 = \psi_n(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$$

(6)

bolsa;

3) (6) qatnasları menen anıqlanǵan $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ erikli turaqlılarının qálegen mánislerinde $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ tochkası G oblastına tiyisli bolǵanda $\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ funkciyası (2) teńlemenin sheshimi bolsa.

Solay etip, n -tártipli (2) differenciallıq teńlemenin ulıwma sheshimi n erikli turaqlını óz ishine aladı.

Geometriyalıq jaqtan, ulıwma sheshim xOy tegisliginde $C_1, C_2, \dots, C_n$ lerden ibarat n parametrden ǵárezli bolǵan integrallıq iymek sızıqlar toparın beredi.

(2) differenciallıq teńlemenin ulıwma sheshiminen $C_1, C_2, \dots, C_n$ turaqlılarının belgili bir sanlıq mánislerinde alınatuǵın hár qanday sheshim usı teńlemenin dara sheshimi delinedi.

Eger (5) ulıwma sheshim G oblastında anıq emes túrde

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (7)$$

qatnası menen berilse, onda bul (7) qatnası (2) teńlemenin G oblastındaǵı ulıwma integralı dep ataladı. Al, (7) qatnasınan $C_1, C_2, \dots, C_n$ turaqlılarının belgili bir sanlıq mánislerinde kelip shıǵatuǵın hár qanday $\psi(x, y) = 0$ qatnası berilgen teńlemenin dara integralı dep ataladı.

Geypara jaǵdaylarda (2) teńleme ushın ulıwma sheshimdi yamasa ulıwma integraldı anıqlaw qıyın bolıp, bul teńlemenı integrallay otırıp, x hám y ti bazıbir t parametriniń funkciyası retinde anlatıw múmkin. Eger bul funkciyalar barlıǵı bolıp n erikli turaqlını óz ishine alıp, (2) teńlemenı qanaatlandırsa hám erikli turaqlılardıń belgili bir sanlıq mánislerinde usı teńlemenıń bazıbir dara sheshimin berse, onda olardı (2) differenciallıq teńlemenıń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi dep ataydı hám

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \quad (8)$$

túrinde jazadı.

Eger (8) teńliklerinen t parametrin shıǵarıp taslaw múmkin bolsa, onda ádettegi formadaǵı ulıwma sheshimge yamasa ulıwma integralǵa iye bolamız.

Hár bir tochkasında Koshi máselesiniń sheshiminiń birden-birligi buzılatuǵın sheshim ayırıqsha sheshim dep ataladı. n -tártipli (2) teńleme $n-1$ -erikli turaqlılardan ǵárezli bolǵan ayırıqsha sheshimlerdiń toparına iye bolıwı múmkin.

(2) differenciallıq teńlemenı integrallaw procesinde $\psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \dots, C_k) = 0$ qatnasına iye bolamız, bunda y belgisiz funkciya, al $C_1, C_2, \dots, C_k$ - erikli turaqlılar. Bunday qatnas (2) teńlemenıń k - tártipli aralıq integralı dep ataladı.

Al, $n-1$ -tártipli tuwındıǵa iye hám bir erikli turaqlını óz ishine alatuǵın $\psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0$ túrindegi aralıq integralı (2) teńlemenıń birinshi integralı dep ataladı.

Eger n hár qıylı ǵárezsiz birinshi integral belgili bolsa, onda olardan $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ tuwındılarınıń barlıǵın shıǵarıp taslap, berilgen teńlemenıń ulıwma integralın alamız.

$y^{(n)}$ tuwındıǵa qarata sheshilmegen (1) teńlemesi ushın da Koshi máselesi, (2) teńlemesi ushın Koshi máselesine uqsas qoyıladı: yaǵnıy (1) teńlemenıń $x = x_0$ bolǵanda berilgen (3) baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw talap etiledi. Bunda, egerde $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ berilgen baslanǵısh mánislerge hám $F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ teńlemesinen anıqlanatuǵın $y^{(n)}$ mánisleriniń hár birine tek bir sheshim ǵana sáykes kelse, onda Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye delinedi. Keri jaǵdayda, Koshi máselesiniń sheshiminiń birden-birligi buzılǵan dep esaplanadı.

(1) teńleme ushın Koshi máselesi sheshiminiń bar bolıwın hám onıń birden-birligin tómendegi teorema tastıyıqlaydı.

Teorema. Meyli F funkciyası D oblastında úzliksiz bolıp, usı oblastta $y, y', \dots, y^{(n)}$ boyınsha úzliksiz dara tuwındılarǵa iye bolsın. Sonda $F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}) \neq 0$ shártlerin qanaatlandıratuǵın qálegen

$(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ točka ushın (1) teńlemenin $x_0 \in I$ tochkasınin bazıbir dógereginde anıqlanǵan hám n ret úzliksiz differenciallanatuǵın, (3) shártlerin qanaatlandıratuǵın hám sonday-aq $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ bolatuǵın birden-bir $y = y(x)$ sheshimi bar boladı.

Bul teoremanı dálillewde kóp argumentli anıq emes funkciyanın bar bolıwı haqqındaǵı teorema hám usı lekciyada keltirilgen Pikar teoreması paydalanadı.

Tákırlaw ushın sorawlar

1. $y^{(n)}$ ge qarata sheshilgen n -tártipli teńleme qanday kóriniske iye? (2) teńlemenin sheshimi (integrallıq iymek sıızǵı) degen ne? Ol qanday kórinislerde beriliwi múmkin?
2. $y^{(n)}$ ge qarata sheshilgen n -tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyladı?
3. Ekinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qanday geometriyalıq hám mexanikalıq maǵanaǵa iye?
4. Qanday shártlerde Koshi máselesi sheshimge iye? Qashan bul sheshim birden-bir boladı?
5. Ulıwma sheshim degen ne? Ulıwma sheshim formulasınan Koshi máselesi qalay sheshiledi? Koshi kórinisindegi ulıwma sheshim degen ne?
6. Qanday sheshim dara sheshim delinedi? Ayırıqsha sheshim degen ne? Qanday jaǵdaylarda teńleme ayırıqsha sheshimlerge iye emes?

Joqarı tártipli differenciallıq teńlemelerdin kvadraturalarda integrallanatuǵın bazı bir túrlerin qarastıramız.

1. Gárezsiz ózgeriwshini hám belgisiz funkciyanın n -tártipli tuwındısın baylanıstıratuǵın teńleme:

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Bul teńleme $y^{(n)}$ ge qarata sheshilse, yaǵnıy $y^{(n)} = f(x)$ túrine alıp keliw múmkin bolsa, onda onın ulıwma sheshimi

$$Y = \int \dots \int_{n-1} f(x) dx \dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

túrine iye boladı, bul jerde $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Meyli (1) teńleme $y^{(n)}$ ge qarata sheshilmeytuǵın, biraq x qa qarata sheshiletuǵın teńleme bolsın, yaǵnıy $x = f(y^{(n)})$. Onda $y^{(n)} = p$ dep alıp, onıń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimin

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \varphi(p) + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n \end{cases}$$

túrinde kórsetiwge boladı.

Eger teńleme x qa qarata yamasa $y^{(n)}$ ge qarata sheshilmese, onda $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \gamma(t)$ belgilewin jasap, onıń

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

túrindegi parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimin alıwǵa boladı.

Mısal. $x = y''^2 + 1$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. $y'' = t$ dep belgileymiz. Sonda $x = t^2 + 1$, bunnan $dx = 2tdt$. Al, $dy' = y''dx = tdx = 2t^2dt$ bolǵanlıqtan, $\int dy' = \int 2t^2dt + C_1$ yamasa $y' = \frac{2}{3}t^3 + C_1$ boladı. Bunnan $dy = y'dx = \left(\frac{2}{3}t^3 + C_1\right)2tdt$ bolǵanlıqtan, $y = \int \left(\frac{2}{3}t^3 + C_1\right)2tdt = \frac{4}{15}t^5 + C_1t^2 + C_2$.

Solay etip, berilgen teńlemenıń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \frac{4}{15}t^5 + C_1t^2 + C_2 \end{cases}$$

túrinde jazıladı.

2. Ǵárezsiz ózgeriwshi anıq túrde qatnaspaytuǵın

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

túrindegi teńlemeler. Bul teńlemede $z = y^{(n-1)}$ dep alıp, onı

$$F\left(z, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad (3)$$

túrindgi ġárezsiz ózgeriwshi argument qatnaspaġan birinshi tártipli differenciallıq teńlemege alıp keliwge boladı. Eger ol tuwındıǵa qarata sheshilse, onda $\frac{dz}{dx} = f(z)$ bolıp, bunnan $x = \psi(z, C_1)$ boladı.

Meyli bul teńlik z ke qarata $z = \varphi(x, C_1)$ túrinde sheshilsin. Onda $y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$ bolıp,

$$y = \int \dots \int_{n-1} \varphi(x, C_1) dx dx \dots dx + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n$$

boladı.

Eger (3) teńleme z ke qarata elementar funkciyada sheshilse, yaǵnıy $z = f\left(\frac{dz}{dx}\right)$ bolsa, onda $\frac{dz}{dx} = p$ parametrin engizip,

$$\begin{cases} x + C_1 = \int \frac{f'(p)}{p} dp, \\ y = \gamma(p) + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n \end{cases}$$

túrindgi parametrik formadaǵı ulıwma sheshimge iye bolamız.

3. Ğárezsiz ózgeriwshi anıq túrde qatnaspaytuǵın

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

túrindgi teńlemeler. Bul teńlemenı $y^{(n-2)} = z$ almasırwı járdeminde $F(z, z'') = 0$ túrindegi ekinshi tártipli teńlemege alıp kelemiz.

Meyli ol z'' ke qarata $z'' = f(z)$ túrinde sheshiletuǵın bolsın. Onda bunı integrallap,

$$\pm \int \frac{dz}{\sqrt{2 \int f(z) dz + C_1}} = x + C_2$$

yamasa $y^{(n-2)} = z$ ti esapqa alsaq, $\gamma(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0$ túrindegi aralıq integralǵa iye bolamız. Bul teńleme $n-2$ -tártipli differenciallıq teńleme bolıp, onı joqarıdaǵı usıllardıń biri menen integrallawǵa boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar.

1. $y^{(n)} = f(x)$ teńlemesiniń ulıwma sheshimi qanday kóriniske iye?
2. $F(x, y^{(n)}) = 0$ teńlemesiniń ulıwma sheshimin qalay tabıwǵa boladı?

3. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ teńlemesi qalay integrallanadı?

4. $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ teńlemesi qalay integrallanadı?

Meyli

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < n) \quad (1)$$

túrindegi teńlemeni qarayıq. Bul teńlemeni $y^{(k)} = z$ belgilewi járdeminde jańa $z = z(x)$ belgisiz funkciyasın engiziw arqalı $(n - k)$ -tártipli teńlemege alıp keliwge boladı:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (2)$$

Eger (2) teńleme kvadraturada integrallanatuǵın bolsa, onda onı integrallap, $z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$ ulıwma sheshimin yamasa $\phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0$ ulıwma integralın alamız. Sonda biz qaytadan y ózgeriwshisine ótip, (1) teńlemenin

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \text{ yamasa } \phi(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0 \quad (3)$$

aralıq integralına iye bolamız. Alınǵan (3) teńleme (10.1) tipindegi teńleme boladı.

1-mısal. $xy''' - y'' = 0$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemede belgisiz funksiya y hám onıń birinshi tártipli tuwındısı qatnaspaǵan, yaǵnıy bul 1^0 tiptegi teńleme. $y'' = z$ dep, jańa z belgisiz funkciyasına ócek, onda berilgen teńleme $xz' - z = 0$ teńlemesine keledi. Bunnan

$$x \frac{dz}{dx} - z = 0, \quad \frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \int \frac{dz}{z} - \int \frac{dx}{x} = \ln C_1, \quad \ln |z| - \ln |x| = \ln C_1, \quad z = C_1 x.$$

Endi y ózgeriwshige qayta ócek, onda $y'' = C_1 x$ teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemeni eki ret izbe-iz integrallap, berilgen teńlemenin $y = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3$ ulıwma sheshimin alamız, bunda C_1, C_2, C_3 - erikli turaqlılar.

Bunday teńleme

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

túrine iye. Biz

$$y' = p \quad (5)$$

formulası járdeminde jańa $p = p(y)$ belgisiz funkciyasına ótemiz, bul jerde y ti gárezsiz ózgeriwshi retinde qabıl etemiz. $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ tuwındıların p hám onıń y boyınsha alınǵan tuwındıları arqalı ańlatamız. Sonda

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} p \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dp}{dy} p \right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 p}{dy^2} p + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right) p, \quad (6)$$

.....,

$$y^{(n)} = w \left(p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right).$$

Endi (5) hám (6) tuwındıların (4) teńlemege qoysaq,

$$F \left(y, p, \frac{dp}{dy} p, \dots, w \left(p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) \right) = 0 \quad (7)$$

teńlemege iye bolamız. Bul $(n-1)$ -tártipli teńleme. Eger onı sheship, $p = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$ ulıwma sheshimin tapsaq, onda y belgisiz funkciyasına qaytadan ótip,

$$y' = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1}) \quad (8)$$

teńlemesin alamız. Bul teńlemenı integrallap, (4) teńlemenıń ulıwma sheshimin tabamız.

2-mısal. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$ Koshi máselesiniń sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńleme gárezsiz ózgeriwshi x anıq túrde qatnaspaǵan teńleme boladı. $y' = p$ almasırwı járdeminde jańa $p = p(y)$ belgisiz funkciyasın kiritemiz. Sonda berilgen teńleme

$$p \frac{dp}{dy} \cos y + p^2 \sin y = p$$

túrine keledi. Izlengen sheshim ushın $p \neq 0$, $y \neq 0$. Sol sebepli sońǵı teńlemenıń eki jaǵında $p \cos y$ ke bólip,

$$\frac{dp}{dy} + \frac{\sin y}{\cos y} p = \frac{1}{\cos y}$$

teńlemesin alamız. Bul birinshi tártipli birtekli emes sızıqlı teńleme. Onıń ulıwma sheshimi tómendegi formula arqalı anıqlanadı:

$$p = e^{-\int \frac{\sin y}{\cos y} dy} \left[C_1 + \int \frac{1}{\cos y} e^{\int \frac{\sin y}{\cos y} dy} dy \right],$$

bunnan $p = C_1 \cos y + \sin y$. Bundaǵı C_1 erikli turaqlını berilgen baslanǵısh shártlerdi paydalanıp tabamız. Shártke muwapıq, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = p\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ bolǵanlıqtan, sońǵı teńlikten $C_1 = \sqrt{3}$ ekeni kelip shıǵadı. Demek, $p = \sqrt{3} \cos y + \sin y$ yamasa $p = 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right)$.

Endi $y' = p$ almasırwın esapqa alsaq, onda

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{dy}{\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right)} = 2dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right)} = 2x + C_2, \quad \ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + C_2.$$

Bunnan baslanǵısh shártlerdi esapqa alsaq, $C_2 = 2$ ekeni kelip shıǵadı. Sol sebepli berilgen Koshi máselesiniń sheshimi

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + 2$$

qatnası menen anıqlanadı.

Eskertiw. Usı mısalda kórsetilgenindey-aq, joqarı tártipli teńlemeler ushın Koshi máselesin tártibin tómendetiw usılı menen sheshkende erikli turaqlılardı hár bir integrallawdan keyin tawıp barǵan maqul boladı.

Meyli

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (9)$$

teńlemesi berilsin. Bul teńleme belgisiz funkciyaǵa hám onıń tuwındılarına qarata birtekli teńleme dep ataladı, egerde F funkciyası $y, y', \dots, y^{(n)}$ ge qarata birteklilik kórsetkishi m bolǵan birtekli funkciya bolsa, yaǵnıy $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) \equiv t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ birdeyligi orınlansa. Bul jaǵdayda

$$y' = yu \quad (10)$$

almastırırwı járdeminde jańa u belgisiz funkciyasın kiricek, onda (9) teńlemeninń tártibi bir birlikke tómenleydi. Haqıyqatında da,

$$\begin{aligned} y' &= yu, \\ y'' &= y(u^2 + u'), \\ y''' &= y(u^3 + 3uu' + u''), \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= yq(u, u', \dots, u^{(n-1)}). \end{aligned} \tag{11}$$

$$F(x, 1, u, u^2 + u', \dots, q(u, u', \dots, u^{(n-1)})) = 0 \quad (13)$$

boladı. Bul (11) tuwındıladı (9) teńlemege qoysaq hám F funkciyasınıń birteklilik qásiyetin paydalansaq, onda

$$y^m F(x, 1, u, u^2 + u', \dots, q(u, u', \dots, u^{(n-1)})) = 0 \quad (12)$$

teńlemesin alamız. (12) teńlemenı y^m ge qısqarcaq, u ğa qarata $(n-1)$ -tártıplı differenciallıq teńlemege iye bolamız.

Eger (13) teñlemenin ulıwma sheshimin $u = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$ túrinde tapsaq, onda (10) ға muwapıq u dı $\frac{y'}{y}$ ke almasırap,

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

teńlemesin alamız. Bul teńlemeni integrallap, (9) teńlemenin ulıwma sheshimin tabamız:

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx} \quad (14)$$

bunda $C_1, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Eskertiw. Biz (12) teñlemi y^m ge qısqartqanda $y=0$ sheshimin joytpaymız, sebebi bul $y=0$ sheshimi (14) den $C_n=0$ bolğanda alınadı.

(9) tənlemini qarayıq. Eger sonday k hám n sanları tabılıp,

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \dots, t^{k-n} y^{(n)}) \equiv t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

birdeyligi orınlansa, yaǵnıy $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ di sáykes túrde birinshi, k -shi, $(k-1)$ -shi, ..., $(k-n)$ -shi ólshemli shamalar dep esaplaǵanda, F funkciyası birtekli funkciya bolsa, onda (9) teńleme ulıwmalasqan birtekli teńleme dep ataladı.

Bunday teńlemenі integrallaw ushın x hám y ózgeriwshilerinіń ornına sáykes túrde t hám u jańa ózgeriwshilerin

$$x = e^t, y = ue^{kt} \quad (15)$$

formulalar járdeminde kiritemiz. Sonda (9) teńleme gárezsiz ózgeriwshisi qatnaspaǵan teńlemege, yaǵnıy tártibin bir birlikke tómendetiw múmkin bolǵan teńlemege aylanadı.

Bul jaǵdayda (15) almasırwın orınlaǵanda tuwındılar tómendegi formulalar boyınsha túrlenedi:

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \left(\frac{du}{dt} e^{kt} + k u e^{kt} \right) e^{-t} = (u' + ku) e^{(k-1)t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} e^{-t} = (u'' + (2k-1)u' + k(k-1)u) e^{(k-2)t}, \quad (16)$$

.....,

$$y^{(n)} = w(u, u', \dots, u^{(n)}) e^{(k-n)t}.$$

Bul (15) hám (16) formulaların (9) teńlemege qoyıp $e^{mt} F_1(u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$ túrindegi teńlemenі alamız. Bunnan e^{mt} ǵa qısqartqannan keyin anıq túrde gárezsiz ózgeriwshi t qatnaspaǵan teńlemege kelemiz.

3-mısal. $x^4 y'' - (x^3 + 2xy) y' + 4y^2 = 0$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenі $x^4 y'' - x^3 y' - 2xy y' + 4y^2 = 0$ túrinde jazayıq. Bul teńlemenіń ulıwmalasqan birtekli teńleme ekenin kórsetiw ushın hám k sanın tabıw ushın x tı tx qa, y tı $t^k y$ ke, y' tı $t^{k-1} y'$ qa, al y'' tı $t^{k-2} y''$ qa almasırgannan keyin, teńlemenіń hár bir aǵzasına kirgen t nıń dáreje kórsetkishlerin bir-birine teńlestiriw kerek. Berilgen teńlemede ayılǵan almasırwıdı ámelge asırgannan keyin teńlemenіń birinshi aǵzasına t shaması $4+k-2$ dárejede, ekinshi aǵzasına $3+k-1$ dárejede, úshinshi aǵzasına $1+k+k-1$ dárejede, al tórtinshi aǵzasına $2k$ dárejede kiredi. Demek, k sanı $4+k-2=3+k-1=1+k+k-1=2k$ teńlemelerin qanaatlandırw kerek. Bunnan $k=2$. Eger de k ushın alıńǵan teńlemeler birgelikli bolmasa, onda berilgen differenciallıq teńleme kórsetilgen mániste birtekli teńleme bolmaydı.

Solay etip, berilgen teńlemede $x = e^t$, $y = ue^{2t}$ almasırwın isleybiz. Sonda

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \left(\frac{du}{dt} + 2u \right) e^t, \quad y'' = \frac{d^2 u}{dt^2} + 3 \frac{du}{dt} + 2u.$$

Bulardı esapqa alsaq, berilgen teńleme $u'' + 2(1-u)u' = 0$ túrine keledi. Bul gárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńleme. Onı joqarıda kórsetilgen usıl menen integrallap, $u = 1 + C_1 \operatorname{tg}(C_1 t + C_2)$ ulıwma sheshimge iye bolamız. Bunnan dáslepki x hám y

özgeriwshilerine ócek, berilgen teńlemenin ulıwma sheshimin alamız:
 $y = x^2 [1 + C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln x + C_2)]$, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar.

Meyli

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (17)$$

teńlemenin shep jaq bólegi $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ özgeriwshilerinen gárezli bolğan bazıbir $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyasınan x boyınsha alınğan dál tuwındı bolsın, yaǵnıy

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

yamasa

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}. \quad (18)$$

Bunday teńlemeler dál tuwındılardaǵı teńlemeler dep ataladı. Bul (18) qatnasınan

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1 \quad (19)$$

qatnasının (17) teńlemenin birinshi integralı bolatuǵını kelip shıǵadı, al bul (19) qatnası belgisiz funksiya $y(x)$ - ke qarata $(n-1)$ -tártipli differenciallıq teńleme. Solay etip, shep bólegi dál tuwındı bolıp kelgen teńlemelerdin tártibin 1 ge tómennetiwge boladı.

4-mısal. $yy'' + y'^2 = 1$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Bul teńlemenin shep bólegi bolğan $yy'' + y'^2$ ańlatpası yy' tın tuwındısı boladı. Sol sebebli berilgen teńlemenı $\frac{d}{dx}(yy') = 1$ túrinde jaza alamız, bunnan

$$d(yy') = dx, \quad \int d(yy') = \int dx + \bar{C}_1, \quad yy' = x + \bar{C}_1,$$

$$y \frac{dy}{dx} = x + \bar{C}_1, \quad y dy = (x + \bar{C}_1) dx, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \bar{C}_1 x + \bar{C}_2, \quad y^2 = x^2 + C_1 x + C_2,$$

$C_1 = 2\bar{C}_1, C_2 = 2\bar{C}_2$ - erikli turaqlılar.

Eger (17) teńleme dál tuwındılardaǵı teńleme bolmasa, onda bul teńlemenin integrallawshı kóbeytiwshisi bolatuǵın sonday $\mu = \mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyasın tańlap alıwǵa hárezli etiledi, berilgen teńlemenı bul funksiyaǵa kóbeytkennen keyin ol dál tuwındılardaǵı teńlemege aynaladı.

5-mısal. $yy'' = y'(y' + 1)$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. $y \equiv 0$ bul teńlemenin sheshimi bolatuǵını ayqın kórinip tur. Berilgen teńlemenin $yy'' - y'^2 = y'$ túrinde jazıp hám $y \neq 0$ dep esaplap, teńlemenin shep hám on jaqların $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ integrallawshı kóbeytiwshige kóbeytemiz:

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2}, \text{ bunnan } \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \right) \text{ yamasa } \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} \right) = 0.$$

Solay etip, berilgen teńleme dál tuwındılardaǵı teńlemege alıp kelindi. Onın birinshi integralı

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1 \text{ yamasa } y' - C_1 y = -1$$

boladı. Bunan $C_1 = 0$ bolǵanda $y = -x + C$ sheshimin alamız. Al, $C_1 \neq 0$ bolǵanda birinshi tártipli birtekli emes sızıqlı teńlemege iye bolamız hám onın ulıwma sheshimi

$$y = e^{C_1 x} \left(C_2 - \int e^{-C_1 x} dx \right) = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1} \quad (C_1 \neq 0)$$

boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Belgisiz funkciya qatnaspaǵan teńleme hám belgisiz funkciya menen onın izbe-iz kelgen dáslepki tuwındıları qatnaspaǵan teńleme qanday almastırıw járdeminde tártibi tóménletiledi?

2. Gárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńlemenin tártibi qalay tóménletiledi?

3. $y, y', \dots, y^{(n)}$ ge qarata birtekli teńleme, ulıwmalasqan birtekli teńleme hám dál tuwındılardaǵı teńleme qalay integrallanadı?

7-lekciya. n – t rtipli sızılı differensiallıq t nlemeler h m olardıń ulıwma q sietleri. Sızılı   rezsiz funksiya. Vronskiy determinantı h m onıń q sietleri. Bir tekli bolma an sızılı t nlemeler. Turaqlılardı variyaciyalaw usılı.

Reje:

1. n –t rtipli sızılı differensial t nlemeler.
2. Bar-bolıwı h m birden-birlik teoreması.
3. Sızılı t nlemelerdıń ulıwmalıq q sietleri.
4. Sızılı differenciallıq operator.
5. n –t rtipli birtekli sızılı t nlemeler. Sheshimlerdıń q sietleri
6. Sızılı   rezli h m sızılı   rezsiz funksiya
7. Vronskiy determinantı h m onıń q sietleri. Ostrogradskiy-liyvill formulası
8. Sheshimlerdıń fundamental sisteması
9. Bir tekli bolma an sızılı t nlemeler. Ulıwma sheshim
10. Superpoziciya q sieti
11. Turaqlılardı variyaciyalaw usılı.

Tayanış s zler: *Sızılı differensial t nlemeler. Birtekli sızılı t nleme. Birtekli emes sızılı t nleme. Bar-bolıwı h m birden-birlik teoreması. Sızılı differenciallıq operator. Birtekli sızılı t nlemelerdıń sheshimleriniń q sietleri. Sızılı   rezli funksiya. Sızılı   rezsiz funksiya.*

Vronskiy determinant, onıń q sietleri. Ostrogradskiy-liyvill formulası. Sheshimlerdıń fundamental sisteması. Ulıwma sheshim. Bir tekli bolma an sızılı t nlemeler. Ulıwma sheshim. Superpoziciya q sieti. Turaqlılardı variyaciyalaw usılı.

Differenciallıq t nlemeler teoriyasında sızılı t nlemeler tarawı  lken  hmiyetke iye. Sebebi sızılı t nlemeler o ada tereń izertlengen h m sonıń menen birge olar fizikada, mexanikada, texnikada, matematikalıq biologiyada h m t. b. ilim tarawlarında keńnen qollanıw mumkinshiligine iye bolıp tabıladı.

Eger n -t rtipli differenciallıq t nleme belgisiz funksiya a h m onıń barlıq $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ tuwındılarına qarata sızılı bolsa, onda ol sızılı differenciallıq t nleme dep ataladı. Bunday t nleme ulıwma t rde t mendegishe jazıladı:

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = F(x), \quad (1)$$

bunda $A_i(x), i=1,2,...,n, F(x)$ - gárezsiz ózgeriwshi x tın belgili funkciyaları, $A_i(x)$ funkciyaları (1) teńlemenin koefficientleri delinedi, al $F(x)$ bolsa (1) teńlemenin bos aǵzası yamasa oń jaǵı dep ataladı.

Ulıwma jaǵdayda, (1) teńleme ózgermeli koefficientli sıızılıq teńleme delinedi. Dara jaǵdayda, bul teńlemenin barlıq $A_i, i=0,1,2,...,n$ koefficientleri turaqlı sanlar bolıwı múmkin, bul jaǵdayda, yaǵnıy $A_i = \text{const}, i=0,1,2,...,n$ bolǵanda (1) teńleme turaqlı koefficientli sıızılıq differenciallıq teńleme dep ataladı.

Eger $A_0(x) \neq 0$ bolsa, onda berilgen (1) teńlemenin eki jaǵın da usı koefficientke bólip, onı

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (2)$$

túrde jazıwǵa boladı, bunda $p_i(x), i=1,...,n, f(x)$ - belgili funkciyalar. Bul kanonikalıq túrdegi sıızılıq teńleme delinedi.

Eger $f(x) \equiv 0, x \in I$ bolsa, onda (2) teńleme

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (3)$$

kórinisinde boladı hám ol birtekli sıızılıq teńleme delinedi. Usıǵan baylanıslı, eger (2) teńlemede $f(x) \neq 0, x \in I$ bolsa, onda ol birtekli emes sıızılıq teńleme dep ataladı.

Sıızılıq differenciallıq teńlemenin berilgen qosımsha shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi úlken áhmiyetke iye. Usınday máselelerdin eń áhmiyetlileriniń biri Koshi máselesi bolıp tabıladı.

(2) teńleme ushın Koshi máselesi, yaǵnıy baslanǵısh másele, tómendegishe qoyıladı: (2) teńlemenin barlıq sheshimleri ishinen $x = x_0$ bolǵanda berilgen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (4)$$

baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw talap etiledi, bunda $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ berilgen baslanǵısh mánisler.

Kanonikalıq túrdegi (2) teńlemenı

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y + f(x) \equiv R(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

túrinde jazıp hám $R(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyası óziniń barlıq

$$\frac{\partial R}{\partial y^{(n-i)}} = -p_i(x), (i=1,2,...,n) \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y^{(0)}} = \frac{\partial R}{\partial y} = p_n(x) \right)$$

dara tuwındıları menen birge $x \in [\alpha, \beta] \subset I$ bolǵanda hám qálegen $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ ushın úzliksiz ekenin esapqa alsaq, onda (2) teńlemenin oń jaǵı sheshimnin bar bolıwı hám onıń birden birliǵı haqqındaǵı Pikar teoremasınin barlıq shártlerin qanaatlandıratuǵının kóriwge boladı. Demek, bul teoremaǵa muwapıq, qálegen $x_0 \in I$ de hám qálegen

$y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ baslanğısh mánislerde (2) teńleme ushın Koshi máselesiniń sheshimi pútkil $I = (a, b)$ intervalında bar boladı hám ol birden-bir boladı.

Sızıqlı teńlemenin hár qanday sheshimi dara sheshim boladı, demek, bunday teńleme ayırıqsha sheshimlerde iye bolmaydı. Sızıqlı teńlemeler tómendegi ulıwmalıq qásiyetlerge iye:

1. Sızıqlı teńleme ġárezsiz ózgeriwshini qálegen almasırdıwda sızıqlı bolıp qaladı.

Eger, usı $x = \varphi(t)$ almasırdıwın (2) birtekli sızıqlı teńlemede orınlasaq, onda biz qaytadan birtekli sızıqlı teńlemenin alamız, yaǵnıy ġárezsiz ózgeriwshini qálegen almasırdıwda teńlemenin sızıqlılıǵı hám bir tekliligi saqlanadı.

2. Sızıqlı teńleme belgisiz funkciyanı qálegen sızıqlı almasırdıwda sızıqlı bolıp qaladı.

Al, eger (2) birtekli sızıqlı teńlemede $y = \alpha(x)z$ birtekli sızıqlı almasırdıwın orınlasaq, onda qaytadan birtekli sızıqlı teńlemege iye bolamız yaǵnıy belgisiz funkciyanı birtekli sızıqlı almasırdıwda teńlemenin sızıqlılıǵı hám birtekliligi saqlanadı. Sızıqlı teńlemelerdin bul kásiyetleri olardı ápiwayılastırıp ushın, dara jaǵdayda, turaqlı koefficientli teńlemege keltiriw ushın paydalanıladı.

Meyli n -tártipli sızıqlı birtekli teńleme bolǵan

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (5)$$

teńlemesi berilsin.

Bul (5) teńlemenin sol jaǵında belgisiz funkciya $y(x)$ ke qarata kórsetilgen differenciallaw, $p_i(x)$ funkciyasına kóbeytiw hám qosıp ámellerin qollanıw nátiyjesi n -tártipli sızıqlı differenciallıq operator dep ataladı hám $L[y]$ arqalı belgilenedi, yaǵnıy

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \quad (6)$$

Bul operator járdeminde (5) teńleme

$$L[y] = 0 \quad (5')$$

túrinde jazıladı. $L[y]$ operatorı tómendegi eki áhmiyetli qásiyetke iye:

1) $L[Cy] = CL[y]$, $y \in C^n$, $C = \text{const}$;

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, $y_1 \in C^n$, $y_2 \in C^n$.

Bul eki qásiyetin saldarı retinde tómendegi qatnastı alıwǵa boladı:

$$L\left[\sum_{i=1}^m C_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^m C_i L[y_i(x)],$$

bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Endi (5) sızılıqlı birtekli teńlemenin sheshimleriniń áhmiyetli qásiyetlerin kórsetemiz.

Teorema-1. Eger $y = y_1(x)$ funkciyası (5) sızılıqlı birtekli teńlemenin I intervalında sheshimi bolsa, onda $Cy_1(x)$ funkciyası da sol intervalda (5) teńlemenin sheshimi boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Teorema-2. Eger $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ funkciyaları I intervalında (5) sızılıqlı birtekli teńlemenin sheshimleri bolsa, onda $y = y_1(x) + y_2(x)$ funkciyası da usı intervalda (5) teńlemenin sheshimi boladı.

Bul eki teoremadan tómendegi saldar kelip shıǵadı:

Saldar. Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları I intervalda (5) teńlemenin sheshimi bolsa, onda sol intervalda

$$y = \sum_{i=1}^m C_i y_i(x) \quad (7)$$

funkciyası da (5) teńlemenin sheshimi boladı, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Teorema-3. Eger (5) sızılıqlı birtekli teńlemenin $p_i(x)$, $x \in I$, ($i = 1, 2, \dots, n$) koefficientleri haqıyqıy funkciyalar bolıp, bul teńleme $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleks sheshimge iye bolsa, onda $u(x)$ hám $v(x)$, $x \in I$ funkciyalarınıń hár biri usı (5) teńlemenin sheshimi boladı.

Joqarıda keltirilgen saldar boyınsha n erikli turaqlını óz ishine alǵan (7) funkciya da (5) n -tártipli sızılıqlı birtekli teńlemenin sheshimi boladı. Eger bul turaqlılardıń barlıǵı eskereleklik turaqlılar bolsa, onda (7) ańlatpası ulıwma sheshim boladı.

Bul (7) ańlatpa (5) teńlemenin ulıwma sheshimi bolıwı ushın dara sheshimler qanday shártlerdi qanaatlandırıwı kerekligi haqqındaǵı másele funkciyalardıń sızılıqlı ǵárezsizligi túsiniǵi menen baylanıslı sheshiledi.

Meyli bazıbir $I = (a, b)$ intervalında anıqlanǵan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funkciyaları berilsin.

Anıqlama. Eger bir waqıtta 0 ge teń bolmaǵan sonday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ turaqlı sanları bar bolıp, I intervalda

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \quad (8)$$

birdeyligi orınlı bolsa, onda usı $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funkciyalar I intervalda sızılıqlı ǵárezli dep ataladı.

Eger de (8) birdeyligi barlıq $x \in I$ ushın orınlı bolatuǵın sonday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ turaqlıları bar bolmasa, yaǵnıy (8) birdeyligi tek $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ bolǵanda ǵana orınlı bolsa, onda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funkciyaları I intervalda sıızıqlı ǵárezsiz dep ataladı.

Meyli, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları I intervalında anıqlanǵan, úzliksiz hám $n-1$ -tártipke shekemgi hám usı tártiptegi úzliksiz tuwındılarına iye bolsın. Usı funkciyalar jıynaǵınıń sıızıqlıǵárezzililiginin yamasa sıızıqlı ǵárezsizliginin belgisin alıw ushın bul funkciyalardan hám olardıń tuwındılarının dúzilgen

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (9)$$

anıqlawışın kiritemiz. Bul (9) anıqlawış Vronskiy anıqlawışı yamasa vronskian dep ataladı.

Tómendegi tastıyqlaw orınlı.

Teorema-4. Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları sıızıqlı ǵárezli bolsa, onda olardıń Vronskiy anıqlawışı birdeylik túrde nolge teń boladı.

Teorema-5. Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları (5) birtekli sıızıqlı teńlemenin (a, b) intervalındaǵı sıızıqlı ǵárezsiz dara sheshimleri bolsa, onda olardıń Vronskiy anıqlawışısı usı intervaldın bir de tochkasın da nolge aynalmaydı.

4-5 teoremalardan (5) teńlemenin n dara sheshiminiń sıızıqlı ǵárezsizliginin tómendegi belgisi kelip shıǵadı: úzliksiz koef-ficientlerge iye n -tártipli sıızıqlı birtekli teńlemenin n sheshiminiń koef-ficientlerdin úzliksizlik intervalında sıızıqlı ǵárezsiz bolıwı ushın olardıń Vronskiy anıqlawışının usı intervaldın barlıq tochkalarında nolden ózgeshe bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

n -tártipli birtekli sıızıqlı teńleme bolǵan (5) teńlemenin n dara sheshiminiń Vronskiy anıqlawışı ushın onıń mánisin $n-1$ -tártipli tuwındı aldındaǵı $p_1(x)$ koef-ficient penen

baylanıstratuǵın $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(x)dx}$ formulası orınlı. Bul formula Ostrogradskiy -Liuvill formulası dep ataladı.

Eger $W(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$ bolsa, onda barlıq $x \in (a, b)$ ushın $W(x) \neq 0$ bolǵanlıqtan, $W(x)$ anıqlawışının (a, b) intervalının bazıbir $x = x_0$ tochkasında nolge aynalmaytuǵına iseniw jetkilikli.

Anıqlama. (5) sıızıqlı birtekli teńlemenin n sıızıqlı ǵárezsiz dara sheshimlerinden turǵan hár qanday sistema usı teńlemenin sheshimlerinin fundamentallıq sisteması dep ataladı.

Teorema-6. Eger (5) birtekli sızılıq teńlemenin barlıq koefficientleri (a, b) intervalında úzliksiz bolsa, onda ol sheshimlerin fundamentallıq sistemasına iye boladı.

Teorema-7. (Ulıwma sheshim haqqında). Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları (5) birtekli sızılıq teńlemenin sheshimleriniin fundamentallıq sisteması bolsa, onda $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ formulası (5) teńlemenin $a < x < b$, $|y| < +\infty, |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty$ oblasttaǵı ulıwma sheshimin beredi, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. n -tártipli sızılıq teńlemenin ulıwma túri qanday? Qanday shártte sızılıq teńleme ushın Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye?

2. Birtekli sızılıq teńlemenin dara sheshimleriniin tiykargı qásiyetleri neden ibarat?

3. Birtekli sızılıq teńlemenin qanday sheshimleri sızılıq-ǵárezsiz dep ataladı? Sheshimlerin fundamentallıq sisteması degen ne? Nollık sheshim fundamentallıq sistema quramına kiriwi múmkin be? Sheshimlerin berilgen sisteması fundamentallıq sistema bolıwınıın zárúrli hám jetkilikli shártleri neden ibarat?

4. Eger sheshimlerin fundamentallıq sisteması belgili bolsa, birtekli sızılıq teńlemenin ulıwma sheshimin qalay dúziw múmkin? Ulıwma sheshim qanday oblastta anıqlanadı? Ulıwma sheshim formulası járdeminde Koshi máselesin qalay sheshiwge boladı? Eger berilgen tochkada normallasqan sheshimlerin fundamentallıq sisteması belgili bolsa, Koshi kórinisindegi ulıwma sheshimdi qalay jazıwǵa boladı?

n -tártipli birtekli emes sızılıq differenciallıq teńleme

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

túrinde jazıladı, bunda $p_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ koefficientleri hám $f(x) \in C^0$ saltań aǵzası $I = (a, b)$ aralıǵında anıqlanǵan, úzliksiz funkciyalar.

Tómendegi tastıyıqlawlar birtekli emes sızılıq teńlemenin sheshimleriniin qásiyetlerin ańlatadı.

1-teorema. Eger $y(x)$ funkciyası $L[y] = f(x)$ birtekli emes teńlemenin, al $y_0(x)$ sáykes birtekli $L[y] = 0$ teńlemesiniin sheshimi bolsa, onda $y_0(x) + y(x)$ qosındısı birtekli emes teńlemenin sheshimi boladı.

2-teorema. Eger $y_1(x)$ funkciyası $L[y] = f_1(x)$ teńlemesiniń, al $y_2(x)$ funkciyası $L[y] = f_2(x)$ teńlemesiniń sheshimi bolsa, onda $y_1(x) + y_2(x)$ funkciyası $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ teńlemesiniń sheshimi boladı.

3-teorema. Eger (1) birtekli emes teńlemeninń bazıbir $y(x)$ dara sheshimi belgili bolsa, onda onıń ulıwma sheshimi usı dara sheshim menen sáykes birtekli teńlemeninń ulıwma sheshiminiń qosındısına teń boladı.

Endi (1) túrindegi birtekli emes sızıqlı teńlemelerdi sheshiwdiń erkli turaqlılardı variaciyalaw metodı dep atalatuǵın Lagranjǵa tiyisli bir usılın keltiremiz.

Meyli (1) teńlemege sáykes keliwshi birtekli sızıqlı teńlemeninń sheshimleriniń fundamentallıq sisteması $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ belgili bolsın. Sonda bul birtekli teńlemeninń ulıwma sheshimi

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) \quad (2)$$

túrinde jazıladı, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar. Bul ańlatpa birtekli teńlemenin qanaatlandıradı hám demek, ol C_i ler turaqlı bolǵanda (1) teńlemenin qanaatlandırmaydı. Biz (1) teńlemeninń sheshimin de usı (2) túrinde izleymiz, biraqta bundaǵı $C_1, C_2, \dots, C_n$ di ǵárezsiz ózgeriwshi x tń funkciyaları bolsın dep esaplaymız, yaǵnıy (1) teńlemeninń sheshimin

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x) \quad (3)$$

túrinde izleymiz, bunda $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ házirshe belgisiz funkciyalar. Bul funkciyalardı anıqlaw ushın n teńleme kerek. Olardıń birewin (3) ańlatpası (1) teńlemenin qanaatlandıradı degen shártten alınadı da, al qalǵan $n-1$ teńleme erkin túrde saylap alınadı, biz olardı y ten alınǵan tuwındılar júdá ápiwayı túrde bolatuǵınday etip saylap alamız.

(3) teńligin x boyınsha differenciallaymız:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) + \\ + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x).$$

Endi qosımsha saylap alınatuǵın $n-1$ teńlemeninń birinshisi esabında sońǵı teńliktiń oń jaǵındaǵı $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ tuwındıları qatnasqan aǵzalardıń qosındısın nolge teńewden alınatuǵın

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \quad (4)$$

teńlemesin alamız. Sonda y' ushın

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \dots + C_n(x)y_n' \quad (5)$$

añlatpasına iye bolamız. Bul (5) teńligin x boyınsha differenciallap, alıńǵan nátiyjede $C_i(x)$ funkciyalarınń tuwındıları qatnasqan aǵzalardıń qosındısı nolge teńeymiz:

$$C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + \dots + C'_n(x)y'_n = 0. \quad (6)$$

Bul ekinshi qosımsha teńleme boladı. Sonda

$$y'' = C_1(x)y''_1 + C_2(x)y''_2 + \dots + C_n(x)y''_n \quad (7)$$

boladı. Usılay dawam ete otırıp, $n-1$ -qádemde $n-1$ - qosımsha teńleme alamız

$$C'_1(x)y^{(n-2)}_1 + C'_2(x)y^{(n-2)}_2 + \dots + C'_n(x)y^{(n-2)}_n = 0 \quad (8)$$

hám $y^{(n-1)}$ ushın tómendegi añlatpaǵa iye bolamız

$$y^{(n-1)} = C_1(x)y^{(n-1)}_1 + C_2(x)y^{(n-1)}_2 + \dots + C_n(x)y^{(n-1)}_n. \quad (9)$$

Bul (9) teńligin x boyınsha differenciallap, $y^{(n)}$ ushın

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= C'_1(x)y^{(n-1)}_1 + C'_2(x)y^{(n-1)}_2 + \dots + C'_n(x)y^{(n-1)}_n + \\ &+ C_1(x)y^{(n)}_1 + C_2(x)y^{(n)}_2 + \dots + C_n(x)y^{(n)}_n \end{aligned} \quad (10)$$

añlatpasın alamız. Endi (3), (5), ..., (10) añlatpaların (1) teńlemege qoyıp,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n C_i(x)[y^{(n)}_i + p_1(x)y^{(n-1)}_i + \dots + p_{n-1}(x)y'_i + p_n(x)y_i(x)] + \\ &+ C'_1(x)y^{(n-1)}_1 + C'_2(x)y^{(n-1)}_2 + \dots + C'_n(x)y^{(n-1)}_n = f(x) \end{aligned}$$

teńlemesin alamız. Al, $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ funkciyaları cáykes birtekli sızıqlı teńlemeninń dara sheshimleri bolǵanlıqtan, qosındı belgisi astındaǵı $C_i(x)$ qasındaǵı barlıq kóbeytiwshiler nolge aylanadı hám $C'_i(x)$ funkciyaların anıqlaw ushın kerek bolǵan n -teńlemenin alamız

$$C'_1(x)y^{(n-1)}_1 + C'_2(x)y^{(n-1)}_2 + \dots + C'_n(x)y^{(n-1)}_n = f(x). \quad (11)$$

Solay etip, biz belgisizleri $C'_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ bolǵan (4), (6), ..., (8), (11) túrindegi n birtekli emes sızıqlı teńlemeler sistemasına iye boldıq. Bul sızıqlı sistemanıń anıqlawıshı (1) - teńlemege sáykes keliwshi birtekli teńlemeninń sheshimleriniń fundamentallıq sisteması ushın Vronskiy anıqlawıshı bolıp, ol nolge aylanbaydı, demek, bul sistemanı $C'_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ tuwındılarına qarata sheship, $C'_i(x) = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ teńlemelerine iye bolamız. Bul teńlemelerdi integrallasaq

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + C_i \quad (12)$$

boladı, bunda C_i - jańa erikli turaqlılar.

$C_i(x)$ funksiýalarynyň bul tabylyşy (12) aňlatpalaryň (3) formulağa goyup, (1) teňlemeniniň uluwma sheshimine iye bolamyz:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + \sum_{i=1}^n y_i \int \varphi_i(x) dx. \quad (13)$$

Solay etip, (1) teňlemege sýykes keliwshi birtekli sızıqlı teňlemeniniň sheshimleriniň fundamentallıq sisteması belgili bolğanda (1) birtekli emes sızıqlı teňlemeniniň sheshimin kvadratura járdeminde alıwğa boladı hám bul (1) teňlemeniniň uluwma sheshimi (13) formulası menen beriledi.

Mısal. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ teňlemesiniň uluwma sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen sızıqlı teňlemege sýykes keliwshi birtekli teňleme, yaǵnıy $y'' + y = 0$ teňlemesi $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ túrindegi sheshimlerdiń fundamentallıq sistemasına iye bolğanlıqtan, onıń uluwma sheshimi $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ túrinde jazıladı, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar. Endi usı erikli turaqlılardı variaciyalaymız hám berilgen teňlemeniniň sheshimin $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ kórinisinde izleyviz, bundağı $C_1(x)$ hám $C_2(x)$ funksiýaları

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

sistemasınan anıqlanadı. Bul sońǵı sistemanı $C_1'(x)$ hám $C_2'(x)$ tuwındılarına qarata sheship,

$$C_1'(x) = -1, \quad C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

teňlemelerine iye bolamız, al olardı integrallasaq, $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|\sin x| + C_2$ boladı. Bul tabylyşy aňlatpalardı izlengen sheshimge qoysaq, berilgen teňlemeniniň

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

túrindegi uluwma sheshimin alamız, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Eger birtekli emes sızıqlı teňlemeniniň bir dara sheshimi hám sýykes birtekli teňlemeniniň uluwma sheshimi belgili bolsa, berilgen teňlemeniniň uluwma sheshimin qalay tabıw múmkin?

2. Birtekli emes sızıqlı teňlemeniniň uluwma sheshimin tabıwdıń Lagranj usılı neden ibarat?

8-lekciya. Turaqlı koefficientli sıızqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı. Birtekli bolmaǵan turaqlı koefficientli sıızqlı differenciyaqlıq teńlemeler

Reje:

1. Turaqlı koefficientli sıızqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı.
2. Xarakteristikalıq teńleme. Onıń korenleriniń hár qıylı jaǵdayları
3. Ulıwma túri. Anıq emes koefficientler usılı
4. Oń jaǵı kópaǵzalı bolǵan jaǵday.
5. Oń jaǵı kvazikópaǵzalı bolǵan jaǵdaylar.
6. Eyler teńlemesi

Tayanış sózler: Turaqlı koefficientli sıızqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı.

Xarakteristikalıq teńleme. Onıń korenleriniń hár qıylı jaǵdayları Anıq emes koefficientler usılı. Kópaǵzalı. Kvazikópaǵzalı. Dara sheshimdi dúziw. Eyler teńlemesi.

Meyli n -tártpili turaqlı koefficientli birtekli sıızqlı teńleme bolǵan

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

teńlemesi berilsin, bunda $a_1, a_2, \dots, a_n$ koefficientleri turaqlı haqıyqıy sanlar. Sıızqlı teńlemelerdiń ulıwmalıq qásiyetlerine muwapıq, (1) teńlemenıń ulıwma sheshimin tabıw ushın onıń sheshimleriniń fundamentallıq sistemasın dúzetuǵın, yaǵnıy sıızqlı ǵárezsiz bolǵan n dara sheshimlerin tabıw jetkilikli.

Berilgen (1) birtekli sıızqlı teńlemenıń dara sheshimlerin tabıw ushın 1743-jılı L. Eyler qollanǵan usıldı paydalanamız. Bul Eyler usılına muwapıq, (1) teńlemenıń dara sheshimi

$$y = e^{kx} \quad (2)$$

túrinde izlenedi, bunda k - turaqlı, onı (2) funkciyası (1) teńlemenı qanaatlandıratuǵınday etip saylap alamız.

Usı maqsette (2) ańlatpasın x boyınsha izbe-iz túrde n ret differenciallap,

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots, y^{(n)} = k^n e^{kx} \quad (3)$$

tuwındılarına iye bolamız. Bul (2) hám (3) ańlatpaların (1) teńlemenin sol jaǵına qoyamız:

$$L[e^{kx}] = \varphi(k)e^{kx}, \quad (4)$$

bunda

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n. \quad (5)$$

Sonda (2) funkciyası (1) teńlemenin sheshimi boladı, yaǵnıy $L[e^{kx}] \equiv 0$ birdeyligi orınlanadı, egerde k sanı

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (6)$$

teńlemenin koreni bolsa. (6) - bul belgisizi k bolǵan n -dárezeli algebralıq teńleme. Ol (1) differenciallıq teńlemenin xarakteristikalıq teńlemesi dep ataladı, al onın korenleri (1) teńlemenin xarakteristikalıq sanları dep ataladı. (6) xarakteristikalıq teńlemenin sol jaǵı bolǵan $\varphi(k)$ kópazǵalı xarakteristikalıq kópazǵalı dep ataladı.

(1) teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sistemasınıń dúzilisi xarakteristikalıq teńlemenin korenleriniń túrinen ǵárezli boladı. Bul (6) xarakteristikalıq teńleme n -dárezeli algebralıq teńleme, demek ol n korengge iye. Tómendegi jaǵdaylardı qaraymız:

1. Xarakteristikalıq teńlemenin barlıq korenleri haqıyqıy hám hár qıylı, yaǵnıy ápiwayı korenler:

$$k_1, k_2, \dots, k_n. \quad (7)$$

Bul korenlerdi (2) formulaǵa qoyıp, (1) differenciallıq teńlemenin n dara sheshimine iye bolamız:

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}. \quad (8)$$

Bul dara sheshimler sıızıqlı ǵárezsiz boladı hám sol sebepli olar (1) teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sistemasın dúzedi. Sonda (1) teńlemenin ulıwma sheshimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x} \quad (9)$$

túrinde jazıladı, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - ler erikli turaqlılar.

1-mısal. $y'' + y' - 2y = 0$ teńlemesiniń ulıwma sheshimin tabın.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenin $k^2 + k - 2 = 0$ xarakteristikalıq teńlemesi $k_1 = 1$ hám $k_2 = -2$ korenlerge iye. Demek, sheshimlerdin fundamentallıq sisteması $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$

boladı, al ulıwma sheshim $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ túrinde jazıladı, bunda C_1 hám C_2 - erikli turaqlılar.

2. (6) xarakteristikalıq teńlemenıń barlıq korenleri hár qıylı, biraq olardıń ishinde kompleks korenler bolǵan jaǵday.

Berilgen (1) teńlemenıń koefficientleri haqıyqıy sanlar bolǵanlıqtan, eger xarakteristikalıq teńleme kompleks korenlerge iye bolsa, onda olar kompleks túyinles korenler bolıp keledi, yaǵnıy $k_1 = \alpha + i\beta$ hám $k_2 = \alpha - i\beta$ boladı. Bul kompleks túyinles korenler jubına (2) ge muwapıq, $e^{(\alpha+i\beta)x}$ hám $e^{(\alpha-i\beta)x}$ túrindegi eki kompleks sheshimler sáykes keledi. Eyler formulası boyınsha bul kompleks sheshimniń haqıyqıy bólegin jorıma bóleginen ajıratıp, tómendegige iye bolamız:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Demek, $k_1 = \alpha + i\beta$ kompleks korengi (1) teńlemenıń

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (10)$$

túrindegi eki haqıyqıy sheshimi sáykes keledi. Al, $k_2 = \alpha - i\beta$ túyinles korengi sáykes keletuǵın $e^{(\alpha-i\beta)x}$ kompleks sheshimdi $e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$ túrinde jazıw múmkin bolǵanlıqtan, bul sheshimniń (10) haqıyqıy sheshimlerdiń kombinaciyası bolatuǵını kórinip tur. Solay etip, (6) xarakteristikalıq teńlemenıń kompleks túyinles $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ korenler jubına (1) teńlemenıń (10) túrindegi eki haqıyqıy dara sheshimi sáykes keledi.

Barlıq kompleks túyinles korenler juplarına sáykes keliwshi haqıyqıy dara sheshimlerdi hám haqıyqıy korenlerge sáykes keliwshi dara sheshimlerdi tawıp, sheshimlerdiń fundamentallıq sistemasına iye bolamız, al bul boyınsha ulıwma sheshimdi dúze alamız.

2-mısal. $y'' + y = 0$ teńlemesiniń ulıwma sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenıń xarakteristikalıq teńlemesi $k^2 + 1 = 0$ túrine iye, al onıń korenleri $k_{1,2} = \pm i$ boladı. Olarǵa sáykes keliwshi kompleks sheshimler $y = e^{ix}$, $y = e^{-ix}$ bolıp, al sıızıqlı ǵárezsiz haqıyqıy dara sheshimler $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ boladı. Sonda ulıwma sheshim $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ túrinde jazıladı, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar.

3. (6) xarakteristikalıq teńlemenıń korenleri ishinde eseli korenler bolǵan jaǵday.

Bul jaǵdayda e^{kx} túrindegi hár qıylı sheshimlerdiń, yaǵnıy sıızıqlı ǵárezsiz sheshimlerdiń sanı n nen az boladı hám demek, olar fundamentallıq sistema dúze almaydı. Sol sebepli, jetkiliksiz bolıp turǵan sıızıqlı ǵárezsiz dara sheshimlerdi basqa túrde izlewge tuwra keledi.

Eger (6) xarakteristikalıq teńlemenıń $k = k_0$ koreni 4 eseli koren bolsa, onda oǵan (1) teńlemenıń

$$y_1 = e^{k_0 x}, \quad y_2 = x e^{k_0 x}, \quad \dots, \quad y_4 = x^{4-1} e^{k_0 x} \quad (11)$$

túrindgi 4 dara sheshimi sáykes keledi. Bunda tómendegi eki jaǵdaydı ayırıp qaraymız.

a) Meyli $k_0 = 0$ sanı (6) xarakteristikalıq teńlemenin 4 eseli koreni bolsın. Demek, (6) xarakteristikalıq teńlemenin sol jaǵı k^4 ulıwma kóbeytiwshige iye, yaǵnıy koefficientler $a_n = a_{n-1} = a_{n-r+1} = 0$, biraq $a_{n-4} \neq 0$ hám (6) xarakteristikalıq teńleme tómendegi túrde jazıladı:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-4} k^4 = 0.$$

Bul teńlemege sáykes keliwshi sızıqlı birtekli differenciallıq teńleme $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-4} y^{(4)} = 0$ túrine iye boladı. Bul sońǵı teńleme

$$y_1 = 1, y_2 = x, \dots, y_r = x^{r-1} \quad (12)$$

túrindgi dara sheshimlerge iye, sebebi teńlemede r den kishi tártiptegi tuwındılar qatnaspaydı. Bul (12) funkciyalar $(-\infty; \infty)$ aralıǵında sızıqlı ǵárezsiz. Solay etip, (6) xarakteristikalıq teńlemenin r eseli $k = 0$ korenine (12) túrindgi r sızıqlı ǵárezsiz dara sheshimler sáykes keledi.

3-mısal. $y^{IV} - y'' = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul teńlemenin xarakteristikalıq teńlemesi $k^4 - k^2 = 0$ bolıp, ol $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -1$, $k_4 = 1$ korenlerge iye. Bundaǵı $k_1 = k_2 = 0$ túrindgi eki eseli korengge $y_1 = 1, y_2 = x$ dara sheshimler, al $k_3 = -1$ hám $k_4 = 1$ ápiwayı korenlerge, sáykes túrde $y_3 = e^{-x}, y_4 = e^x$ dara sheshimleri sáykes keledi. Bul tabılǵan tórt dara sheshim sızıqlı ǵárezsiz dara sheshimler bolıp, olar fundamentallıq sistema dúzedi.

Solay etip, berilgen teńlemenin ulıwma sheshimi $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^x$ túrinde jazıladı, bunda C_1, C_2, C_3, C_4 - turaqlılar.

b) Meyli $k_0 \neq 0$ sanı (6) xarakteristikalıq teńlemenin r eseli koreni bolsın. Bul jaǵdayda

$$y = e^{k_0 x} z \quad (13)$$

túrindgi ózgeriwshilerdi almasırw mäseleni nolge teń bolǵan eseli koren jaǵdayına alıp keledi.

Haqıyqatında da, (1) teńlemede (13) almasırwın ámelge asırsaq, onda

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} z' + b_n z = 0 \quad (14)$$

differenciallıq teńlemege kelemiz. Bul (14) teńlemenin dara sheshimin

$$z = e^{px} \quad (15)$$

túrindge izleyviz. Sonda onıń xarakteristikalıq teńlemesi

$$p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n = 0 \quad (16)$$

boladı. Al, (2), (13), (15) ańlatpaların paydalansaq, onda $e^{kx} = e^{k_0 x} e^{px}$ qatnası kelip shıǵadı, bunnan $k = k_0 + p$.

Demek, (16) xarakteristikalıq teńlemenin nolden ózgeshe r eseli k_0 korenine (16) teńlemenin r eseli $p = 0$ koreni sáykes keledi. Al, a) punktine muwapıq, (16) xarakteristikalıq teńleme r eseli $p = 0$ korengiye bolǵanlıqtan, oǵan sáykes keliwshi (14) differenciallıq teńleme $z_1 = 1, z_2 = x, \dots, z_r = x^{r-1}$ dara sheshimlerge iye boladı.

Demek, $y = ze^{k_0 x}$ baylanısı boyınsha (6) xarakteristikalıq teńlemenin r eseli $k \in \mathbb{N}_0$ korenine

$$y_1 = e^{k_0 x}, y_2 = x e^{k_0 x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{k_0 x}$$

dara sheshimleri sáykes keledi. Bul dara sheshimler sıızılıǵı gárezsiz boladı.

Eger

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

birtekli emes sıızılıq teńlemenin óń jaǵı

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

kóriniske iye bolsa, onda onı anıq emes koefficientler usılı menen sheshken qolaylı, bunda $P_n(x)$ hám $Q_m(x)$ - sáykes túrde n hám m dárejeli kópáǵzalılar.

Bul jaǵdayda (1) teńlemenin dara sheshimi

$$y(x) = x^r e^{\alpha x} [P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x] \quad (2)$$

kóriniste izlenedi, bunda r sanı (1) teńlemege sáykes keliwshi birtekli sıızılıq teńlemenin

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (3)$$

xarakteristikalıq teńlemesinin $\alpha \pm \beta i$ koreni eseligine teń bolǵan san. Eger xarakteristikalıq teńleme $\alpha \pm \beta i$ kompleks korengiye bolmasa, $r = 0$ dep alınadı. Al, $P_s(x)$ hám $Q_s(x)$ lar s dárejeli anıq emes koefficientli kópáǵzalılar bolıp, bunda $s = \max\{n; m\}$ boladı. Bul kópáǵzalılardıń anıq emes koefficientlerin tabıw ushın (2) ańlatpasın berilgen (1) teńlemege qoyıp, birdey funkciyalar aldındaǵı koefficientlerdi teńlestiriw kerek.

Eger $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x)$ bolsa, onda (1) teńlemenin dara sheshimi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_i(x) \quad (i = \overline{1, p})$$

birtekli emes sıızıqlı teńlemelerdin $y_i(x)$ dara sheshimleriniń qosındısınan ibarat boladı.

Turaqlı koefficientli birtekli emes teńlemelerdi sheshiw usılların qollanıwdı mısallarda kórsetemiz.

1 – mısál. $y''' - 4y' = x^2$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Dáslep berilgen teńlemege sáykes keliwshi $y''' - 4y' = 0$ birtekli teńlemenini sheshemiz. Bul teńlemenin sheshimin Eyler metodına muwapıq, $y = e^{\lambda x}$ kórinisinde izleyviz. Xarakteristikalıq teńleme $\lambda^3 - 4\lambda = 0$ túrinde jazıladı hám ol $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ korenlerge iye boladı. λ shamasının bul tabılğan mánislerin izlengen sheshimge qoyıp, birtekli teńlemenin $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{-2x}$ dara sheshimlerine iye bolamız. Bul dara sheshimler sıızıqlı gárezsiz funkciyalar bolğanlıqtan, birtekli teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sistemasın dúzedi. Sol sebepli $\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ ańlatpası birtekli teńlemenin ulıwma sheshimin beredi, bunda C_1, C_2, C_3 - erikli turaqlılar.

Berilgen birtekli emes teńlemenin dara sheshimin tabıw ushın anıq emes koefficientler usılın qollanamız. 0 sanı berilgen teńlemege sáykes keliwshi birtekli sıızıqlı teńlemenin xarakteristikalıq teńlemesinin koreni hám $f(x) = P_2(x) = x^2$ bolğanlıqtan, berilgen teńlemenin dara sheshimi $y = x(Ax^2 + Bx + C)$ yamasa $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ kórinisinde izlenedi, bunda A, B, C - anıq emes koefficientler. Bul ańlatpanı differenciallap, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{array}{l|l} -4 & y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ 1 & y''' = 6A. \end{array}$$

Bul tuwındılardı berilgen teńlemege qoyıp, alınğan teńliktiń eki jaǵındaǵı x tın birdey dárejeleri aldındaǵı koefficientlerdi teńlestirip, tómendegilerge iye bolamız:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -12A = 1, \\ x & -8B = 0, \\ x^0 & -4C + 6A = 0. \end{array}$$

Bunnan $A = -\frac{1}{12}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{8}$. Demek, izlengen dara sheshim

$y_{d.sh.} = -\frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$ boladı. Al, berilgen teńlemenin ulıwma sheshimi

$$y = y + y_{d.sh.} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$$

boladı.

2-mısal. $y'' + y = 4e^x$ teńlemesinin $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$ baslanğısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi: Berilgen teńlemege sáykes keliwshi birtekli teńlemenin ulıwma sheshimi 1 – misalda tabılǵan edi: $\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Endi berilgen teńlemenin dara sheshimin anıq emes koefficientler usılı menen tabamız.

$\alpha = 1$ sanı $\lambda^2 + 1 = 0$ xarakteristikalıq teńlemenin koreni bolmaǵanlıqtan berilgen teńlemenin dara sheshimi $y = Ae^x$ kórinisinde izlenedi, bunda A - anıq emes koefficient. A koefficientti tabıw ushın izlengen sheshimdi eki márte differenciallap, y'' hám y ti berilgen teńlemege qoyıp, alıńǵan teńlikti e^x qa qısqartqannan keyin $A + A = 4$ qatnasına iye bolamız, bunnan $A = 2$. Demek, berilgen teńlemenin dara sheshimi $y = 2e^x$ boladı, al onın ulıwma sheshimi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x$$

boladı.

Endi ulıwma sheshimdi C_1 hám C_2 erikli turaqlıların berilgen baslanğısh shártler boyınsha tabamız. Tabılǵan ulıwma sheshimdi differenciallap, $y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2e^x$ ańlatpasın alamız. $y(0) = 4$ hám $y'(0) = -3$ ekenin esapqa alıp, $C_1 + 2 = 4$, $C_2 + 2 = -3$ teńliklerin alamız, bunnan $C_1 = 2$, $C_2 = -5$. Demek, $y = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x$ funkciyası berilgen Koshi máselesinin izlengen sheshimi boladı.

3 – misal. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi: a) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ xarakteristikalıq teńleme $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ korenlerge iye. Sáykes birtekli teńlemenin ulıwma sheshimi $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ boladı.

b) Berilgen differencialliq teńlemenin on jaǵı $f(x) = \sin x$. Bunı (2) formulani on jaǵı menen salıstırsaq, $\alpha = 0, P_m(x) \equiv 0, Q_m(x) \equiv 1, \beta = 1$. Al $\beta i = i$ sanı xarakteristikalıq teńlemenin koreni emes. Sol sebepli berilgen teńlemenin dara sheshimi $y_{d.sh.} = A \cos x + B \sin x$ kórinisinde izlenedi. y', y'' lardı tabamız:

$$y' = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Endi y, y', y'' lardı berilgen teńlemege qoyıp, tómendegi teńlikke kelemiz:

$$-A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) + 2(A \cos x + B \sin x) = \sin x$$

yamasa

$$(A - 3B) \cos x + (3A + B) \sin x = \sin x.$$

Bul sońǵı teńliktegi $\cos x$ hám $\sin x$ lar aldındaǵı koefficientlerdi teńlestirip, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & A - 3B = 0, \\ \sin x & 3A + B = 1. \end{array}$$

Bunnan, $A = \frac{3}{10}, B = \frac{1}{10}$. Demek, teńlemenin dara sheshimi

$$y_{d.sh.} = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x.$$

Al, ulıwma sheshim $y = \tilde{y} + y_{d.sh.}$ bolǵanlıqtan,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

boladı.

4 – mısál. $y'' - y = x^2 e^{-x} \cos x$ teńlemesinin dara sheshiminiń túrin anıqlań.

Sheshiliwi: Bul jaǵdayda $\alpha = -1, \beta = 1, P_n(x) = x^2, Q_m(x) = 0$. Al $\lambda^2 - 1 = 0$ xarakteristikalıq teńleme $\lambda_1 = -1$ hám $\lambda_2 = 1$ korenlerge iye. $\alpha \pm i\beta = -1 \pm i$ sanları xarakteristikalıq teńlemenin korenleri emes, demek, $r = 0$. Sol sebepli berilgen teńlemenin dara sheshimi

$$y_{\text{д.ш.}} = e^{-x}[(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x]$$

kórinisine iye boladı, bunda A, B, C, D, E, F - anıq emes koefficientler.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. n - tártipli birtekli emes sızıqlı DT qanday túrge iye?
2. n - tártipli birtekli emes sızıqlı DT-niń ulıwma sheshiminiń dúzilisi qanday?
3. Anıq emes koefficientler metodı qanday teńlemeler ushın qollanadı?
4. Anıq emes koefficientler metodınıń mazmunı neden ibarat?
5. $L[y] = P_m(x)$ teńlemesiniń dara sheshiminiń túriqanday, bunda $L[y]$ - turaqlı koefficientli sızıqlı operator, $P_m(x)$ - bul m dárejeli kópaǵzalı?
6. $L[y] = e^{\alpha x} P_m(x)$ teńlemesiniń dara sheshiminiń túri qalay jazıladı?
7. $L[y] = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$ teńlemesiniń dara sheshiminiń túri qalay jazıladı?

9– lekciya. Āpiwayı differenciyaqlıq teńlemeler sistemaların normal túrge keltiriw. Normal sistema ushın bar bolıw hám birden-birlik teoreması

Reje:

1. Differenciallıq teńlemeler sisteması. Tiykarǵı túsinikler.
2. Normal sistema ushın Pikar teoreması.
3. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ayırıqsha sheshim

Tayanış sózler: *Differenciallıq teńlemeler sisteması Ulıwma túri. Kanonikalıq sistema. Normal sistema. Sheshim. Koshi máselesi. Pikar teoreması. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ayırıqsha sheshim.*

Āpiwayı differenciallıq teńlemeler sisteması dep, x argumentti, usı argumenttiń k sandaǵı $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ belgisiz funkciyaların hám olardıń tuwındıların baylanıstratuǵın k teńlemelerdiń jıynaǵına aytıladı. Sistemaniń ulıwma túri tómendegishe jazıladı:

$$F_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (1)$$

Bul sistemani integrallaw máselesi, usı sistemaniń hár birin qanaatlandıratuǵın $y_1, y_2, \dots, y_k$ funkciyaların tabıwdı talap etedi. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ funkciyalarınıń usınday jıynaǵın (1) sistemaniń sheshimi dep ataydı.

Eger anıq emes funkciya haqqındağı teoremanıń shártleri orınlansa, onda (1) sistemanı úlken tuwındılardıǵa qarata sheshiwge boladı:

[illegible]

Bunday t rdegi (2) sistemanı kanonikalıq sistema dep ataydı.

Jańa belgisiz funksiýalardı kiritiw arqalı joqargı tártipli k teńlemeler sistemasın oǵan ekwivalent bolǵan hám barlıq n ($n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$) izlengen funksiýalardıń tuwındılarına qarata sheshilgen birinshi tártipli n teńlemeler sisteması menen almastırıw múmkin. Bunday sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n), \\ \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad (3)$$

sistemasınıń dara jaǵdayı boladı. (3) sistema ápiwayı differenciallıq teńlemelerdiń normal sisteması dep ataladı, al n sistemaniń tártibi delinedi. Bul sistemani

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3')$$

túrinde de qısqasha jazıw múmkin, bul jerde $f_1, f_2, \dots, f_n$ - qarastırılıp atırǵan oblastta anıqlanǵan hám úzliksiz funkciyalar. Eger $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $f(x, y) = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$,

$$\frac{dy}{dx} = \left\{ \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx} \right\}$$
 dep belgilesek, onda (3) sistema

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

kórinistegi vektorlıq formadağı túrine iye boladı.

(3) sistemanın (a, b) intervalındaғы sheshimi dep usı intervalda anıqlanған, úzliksiz differenciallanatuğın hám (3) sistemanın hár bir teńlemesin barlıq $x \in (a, b)$ ushın orınly bolған birdeylikke aylandıratuğın n sandaғы

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x) \quad (5)$$

funkciyalar jıynağına aytadı.

(3) sistemağa sáykes keliwshi (4) vektorlıq teńlemenin sheshimi usı vektorlıq teńlemesin birdeylikke aylandıratuǵın, dúziwshileri $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ bolǵan $y = y(x)$ vektorı retinde anıqlanadı.

$n+1$ ólshemli $(x, y_1, \dots, y_n)$ keńisligindegi (5) sheshimge sáykes keletuǵın iymek sızıq (3) sistemaniń integrallıq iymek sızıǵı delinedi. Bul iymek sızıq sonday qásiyetke iye, oǵan júrgizilgen urınbanıń baǵıtlawshı kosinusları 1 sanına hám urınıw tochkadaǵı (3) sistemaniń oń jaqlarınıń mánislerine proporcional boladı.

Eger (3) sistemaniń oń jaǵı berilgen $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ točka arqalı baǵıtlawshı kosinusları 1 sanına hám $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ mánislerine proporcional bolǵan kesindi júrgizsek, onda baǵıtlar maydanın alamız.

Solay etip, (1) sistemani integrallaw máselesi usı baǵıtlar maydanı boyınsha integrallıq iymek sızıqlardı tabıwdan ibarat.

(1) normal sistema ushın

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)} \quad (6)$$

baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi Koshi máselesi dep ataladı, bunda $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ - berilgen sanlar. Geometriyalıq jaqtan, Koshi máselesi (3) sistemaniń barlıq integrallıq iymek sızıqları ishinen berilgen $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ tochkadan ótiwshi integrallıq iymek sızıqtı tabıwdı ańlatadı.

Koshi máselesi sheshiminiń bar bolıwın hám onıń birden-birligin tómendegi teorema támiyinleydi.

Teorema (Pikar teoreması). Meyli (4) teńlemeler sistemasınıń oń jaǵı bolǵan $f(x, y)$ vektor-funkciyası $R: |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b$ oblastta anıqlanǵan bolıp, tómendegi eki shártti qanaatlandırıń:

1) $f(x, y)$ óziniń x, y ózgeriwshileri boyınsha R de úzliksiz bolsın, demek ol shegaralanǵan boladı: $\|f(x, y)\| \leq M$, bunda M - oń san, al (x, y) - bul R oblastınıń qálegen tochkası;

2) $f(x, y)$ vektor-funkciyası y ózgeriwshisi boyınsha Lipshic shártin qanaatlandırıń, yaǵnıy $\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq L\|y - y'\|$ teńsizligi orınlansın, bunda L - oń san, al (x, y) hám (x, y') - bul R oblastınıń qálegen eki tochkası.

Sonda (4) teńlemeler sistemasınıń $|x - x_0| \leq h$ aralıǵında anıqlanǵan, úzliksiz differenciallanatuǵın hám $y(x_0) = y_0$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın $y = \varphi(x)$ sheshimi

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad - f = (f_1, \dots, f_n) \text{ vektorinin evklid norması.}$$

Anıqlama. $x, C_1, C_2, \dots, C_n$ ózgeriwshileriniń bazıbir D ózgeriw oblastında anıqlanğan hám x boyınsha úziliksiz differenciallanatuǵın

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{array} \right. \quad (7)$$

1) (7) sistemi D oblastında $C_1, C_2, \dots, C_n$ erikli turaqlılarına qarata sheshiledi:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ C_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array} \right. \quad (8)$$

(5) sheshim dara sheshim dep ataladı, egerde onıń qálegen tochkası arqalı (3) sistemanıń basqa sheshimi ótpese, yaǵnıy bul sheshimniń hár bir tochkasında Koshi máselesi sheshimi birden-bir bolsa. (7) ulıwma sheshiminen $C_1, C_2, \dots, C_n$ erkli turaqlılarınıń belgili bir mánislerinde alınatuǵın sheshim dara sheshim boladı. Eger (5) sheshimniń hár bir tochkasında Koshi máselesi sheshiminiń birden-birligi buzılsa, onda bul sheshim ayrıqsha sheshim dep ataladı.

1. Differenciallıq teńlemeninń normal sisteması qanday ulıwma túrge iye? Onın tártibi degen ne? Normal sistemanın sheshimi (integrallıq iymek sıızıǵı) degen ne?

3. Normal sistemanıń ulıwma sheshimi degen ne? Ulıwma sheshim formulası járdeminde Koshi máselesi qalay sheshiledi?

$$\psi(x, y_1, \dots, y_n) = C \quad (4)$$

túrindegi usı differenciallıq teńlemeler sistemasınan keltirilip shıǵarılǵan hám y_i diń ornına sistemanıń $y_i = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ sheshimin qoyǵanda, bul dara sheshimniń barlıq tochkalarında birdeylilikke aylanatuǵın qatnastan ibarat.

(4) qatnası (1) sistemanıń birinshi integralı bolıwınıń, zárúrli hám jetkilikli shárti, bul

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_i} f_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (5)$$

birdeyliginiń orınlanıwı bolıp tabıladı.

Geyde birinshi integral dep, $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ funkciyası túsiniledi.

Eger (1) sistemanıń n ǵárezsiz birinshi integralları $\psi_1(x, y_1, \dots, y_n)$, $\psi_2(x, y_1, \dots, y_n)$, ..., $\psi_n(x, y_1, \dots, y_n)$ belgili bolsa, onda joqarıdaǵı aytqanday olardan dúzilgen (3) teńlemelerdiń jıynaǵı (1) sistemanıń ulıwma integralın beredi.

(3) ulıwma integraldan onı $y_1, y_2, \dots, y_n$ ge qarata sheshe otırıp, (1) sistemanıń ulıwma sheshimin alıwǵa boladı. $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ birinshi integrallar ǵárezsiz bolıwı ushın olardıń yakobiani nolden ózgeshe bolıwı tiyis:

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demek, (1) sistemanı integrallaw ushın onıń n ǵárezsiz birinshi integralın tabıw jetkilikli.

Egerde differenciallıq teńlemeler sisteması simmetriyalı túrde berilgen bolsa, onda, birinshi integral járdeminde bul sistemanı integrallaw máselesi ayırıqsha qolaylı boladı.

(1) sistemanı

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (6)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Al, $x, y_1, \dots, y_n$ ózgeriwshileriniń ornına $x_1, x_2, \dots, x_n$ ózgeriwshilerin jazsaq hám ápiwayılıq ushın ózgeriwshilerdiń sanın $n+1$ emes, al n arqalı belgilesek, onda (6) sistemanı tómendegi túrde jazıwǵa boladı.

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (7)$$

Bul (7) sistema simmetriyalıq formadaǵı differenciallıq teńlemeler sisteması dep ataladı. Bul sistemaniń ulıwma integralı

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1} \quad (8)$$

túrinde jazıladı.

(7) sistemadan normal sistemaǵa ótiw ushın ózgeriwshilerdiń birewin, mısalı x_n di ǵárezsiz ózgeriwshi retinde alamız. Sonda

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n} \quad (7')$$

boladı. Bunda oń jaqlardıń úzliksizligi buzılmaı ushın $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ baslanǵısh mánislerde $X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0$ bolıwı tiyis.

(8) birinshi integrallarınıń hár biriniń yamasa ulıwma aytqanda

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (8)$$

túrindegi qatnastır (7) sistemaniń birinshi integralı bolıwınıń analitikalıq shártin tabıw ushın tómendegidey isleymiz.

(7) sistemaniń integrallıq iymek sıızıǵı boylap ψ funkciyası turaqlı mánis saqlaydı, demek, onıń usı iymek sıızıq boylap alınǵan tolıq differencialı nolge teń:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Biraqta integrallıq iymek sıızıqlar boyınsha dx_i differencialları (7) sistemaǵa muwapıq X_i funkciyalarınń mánislerine proporcional, demek, hár bir integrallıq iymek sıızıq boyınsha

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0$$

(9)

boladı. Onda joqarıda aytqan analitikalıq shárt tómendegishe beriledi: (7) sistemaniń birinshi integralı bolǵan $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyası (9) teńlemenı birdeylik túrde qanaatlandıradı hám kerisinshe (9) teńlemenı qanaatlandıratuǵın ıqtıyarlı $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyası (7) sistemaniń birinshi integralı boladı.

Mısal. $\frac{dx}{2z-y} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi. $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ teńlemeden berilgen sistemaniń birinshi integrallarınıń birin tabamız:

$\frac{y}{z} = C_1$. Jáne bir integral tabıw ushın tómendegi integrallanıwshı kombinaciyanı dúzemiz:

$$\frac{dx}{2z-y} = \frac{2dz-dy}{2z-y}, \quad d(x-2z+y) = 0.$$

Bunnan $x-2z+y = C_2$. Tabılıǵan bul birinshi integrallar ǵárezsiz boladı.

Solay etip, berilgen sistemanıń barlıq sheshimleri $y = C_1z$, $x-2z+y = C_2$ qatnaslarınan anıqlanadı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Normal sistemanıń integralı degen ne?
2. n -tártipli normal sistema qansha ǵárezsiz integrallarǵa iye bolıwı múmkin?
3. Normal sistemanıń birinshi integralı degen ne?
4. Qanday birinshi integrallar ǵárezsiz boladı?
5. n -tártipli normal sistemanıń ulıwma integralı degen ne?
6. Simmetriyalı kórinistegi differenciallıq teńlemeler sisteması degen ne? Onıń integralı, birinshi integralı, ulıwma integralı degen ne?

10-lekciya. Sızıqlı differenciaylıq teńlemeler sisteması. Ostragrodskiy-Lyuvill formulası. Sızıqlı bir tekli teńlemeler sistemasınıń ulıwma sheshimi haqqında teorema. Fundamentallıq matrica

Reje:

1. Ulıwma túsinipler.
2. Bar bolıw hám birden-birlik teoreması.
3. Bir tekli teńlemeler sistemaları. Sheshimlerdiń tiykarǵı qásiyetleri.
4. Vektor-funkciyalardıń sızıqlı ǵárezziligi hám sızıqlı ǵárezsizligi
5. Vronskiy determinantı hám onıń qásiyetleri. Ostrogradskiy-Liuvill-Yakobi formulası
6. Sheshimlerdiń fundamentallıq sisteması. Ulıwma sheshim haqqında teorema.
7. Fundamentallıq matrica

Tayanış sózler: Sızıqlı differenciaylıq teńlemeler sisteması. Bir tekli sızıqlı sistema. Bir tekli bolmaǵan sızıqlı sistema. Bar bolıw hám birden-birlik teoreması. Bir tekli sistemanıń sheshimleriniń qásiyetleri. Sızıqlı ǵárezli vektor funkciyalar. Sızıqlı ǵárezsiz vektor funkciyalar. Vronskiy determinantı. Ostrogradskiy-Liuvill-Yakobi formulası. Sheshimlerdiń fundamentallıq sisteması.

Ulıwma sheshim.

1⁰ . Differensiallıq teńlemelerdiń normal sistemasınıń dara túri sıızıqlı differensiallıq teńlemeler sisteması boladı.

Eger normal sistema belgisiz funksiylarğa hám onıń tuwındılarına qarata sızılıq bolsa, yaǵnıy olar sistemanıń hár bir teńlemesinde birinshi dárejede qatnassa, onda bunday sistema *sızılıq differenciallıq teńlemeler sisteması* dep ataladı.

Bunday sistema

[illegible]

kórinisinde, yamasa

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}$$

türinde jazıladı, bunda $a_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1, n}$) – t gárezsiz ózgeriwshiniń ($t \in [a, b]$) bazıbir berilgen úzliksiz haqıyqıy funksiyaıarı, olar sistemanıń *koefficientleri* dep ataladı; al $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ – $t \in [a, b]$ gárezsiz ózgeriwshinin' bazıbir berilgen úzliksiz haqıyqıy funksiyaalar, olar sistemanıń *erkin aǵzaları* delinedi.

Eger $f_1(t) \equiv 0, f_2(t) \equiv 0, \dots, f_n(t) \equiv 0$ bolsa, onda (1) sistema

[illegible]

túrine, yamasa

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1, n}$$

kórinisine iye bolıp, bul sistema *birtekli sızıqlı sistema* dep ataladı.

Eger $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ erkin aǵzalardıń eń keminde birewi nolden ózgeshe bolsa, onda (1) sistema *birtekli bolmaǵan sıızıqlı sistema* delinedi.

Burın úyrenilgen n -tártıplı sızıqlı differenciallıq teńleme bolǵan

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t) \quad (3)$$

teńlemesi sıızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń birtekli bolmağan sistemasına alıp keliniwi múmkin.

Haqiqatında da, bul teńlemede

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t), \\x_n(t) &= y^{(n-1)}(t)\end{aligned}$$

belgilewlerin kiricek, onda

$$\begin{cases}x'_1 = x_2, \\x'_2 = x_3, \\ \dots \dots \dots \\x'_{n-1} = x_n, \\x'_n = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_n + f(t)\end{cases}$$

sistemasın alamız. Al, (3) teńlemege sáykes keliwshi n -tártpılı birtekli sızıqlı teńleme sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń birtekli sızıqlı sistemasına alıp klinedi.

(1), (2) túrindegi teńlemeler sistemaların matricalıq túrde jazıwǵa boladı. Meyli

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

bolsın. Sonda (1), (2) teńlemeler sistemaları sáykes túrde tómendegi kóriniste jazıladı:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + F(t), \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$$

bunda $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ – belgisiz vektor-funkciya; $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ – onıń tuwındısı, $F(t)$ – belgili vektor-funkciya, $A(t)$ – sızıqlı differenciallıq teńlemeler sistemasınıń matricası.

2⁰. Normal sistemalar ushın Pikar teoremasınıń shártleri orınlanıw ushın (1) sızıqlı sistemalıq barlıq $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ koefficientleri hám barlıq $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ erkin aǵzaları $[a, b]$ aralıqta úzliksiz bolıwı jetkilikli. Bul jaǵdayda (1) sızıqlı sistema ushın qálegen $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ baslang'sh shártlerge iye Koshi máselesi pútkil $[a, b]$ aralıqta anıqlang'an birden-bir sheshimge iye boladı. Bul baslang'sh shártlerde t_0 mánisin belgilep alıp hám $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ baslang'ish mánislerdi ózgerter otırıp, (1) sistemalıq sheshimlerinin' sheksiz kópligin alamız.

Meyli $A(t)$ matricası hám $F(t)$ vektor-funkciyası $I = [a, b]$ kesindide úzliksiz bolsın hám $t_0 \in I$. Sonda

1. (4) sistemalıq

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (6)$$

başlang'ışh shártin qanaatlandratug'ın sheshimi pútkil I kesindide bar boladı.

2. (4), (6) Koshi máselesi sheshimi birden-bir boladı: eger $\mathbf{x}(t)$, $z(t)$ – us (4) sistemanın' birdey (6) başlang'ışh shártin qanaatlandratug'ın sheshimleri bolsa, onda pútkil I kesindide $\mathbf{x}(t) \equiv z(t)$ boladı.

Haqıyqatında da, $A(t)$ matricası úzliksiz bolg'anlıqtan, onın' barlıq $a_{ij}(t)$ elementleri, al $F(t)$ vektor-funkciyası úzliksiz bolg'anlıqtan, onın' barlıq $f_i(t)$ dúziwshileri úzliksiz bolıp, (4) vektorlıq ten'lemenin', yag'nıy (1) sızılıq sistemanın' on' jaqlarının' x_j , $j = \overline{1, n}$ boyınsha dara tuwındıları $I = [a, b]$ kesindisinde úzliksiz $a_{ij}(t)$ koefficientlerge ten' bolg'anlıqtan shegaralang'an bolıp, Koshi máselesi sheshiminin' bar bolıw hám birden-birligi teoremasının' barlıq shártleri orınlanadı.

3⁰. Birtekli sızılıq differenciallıq ten'lemelerdin' mına

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \quad (7)$$

sistemasın qaraymız, bunda $A(t)$ – bazıbir (a, b) aralg'ında úzliksiz matrica.

Usı birtekli sızılıq sistemanın' sheshimlerinin' tiykarg' qásiyetlerin keltiremiz.

1. Eger $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ vektor-funkciyaların' hár biri bazıbir (a, b) intervalda (7) birtekli sızılıq sistemann' sheshimi bolsa, onda bul vektor-funkciyalardn'

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i(t)$$

sızılıq kombinaciyası da us sistemann' sheshimi bolad, $C_1, C_2, \dots, C_n$ – erikli turaqlar.

2. Eger $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ vektor-funkciya (7) birtekli sızılıq sistemann' (a, b) intervalda anqlang'an hám $\mathbf{x}(t_0) = 0$, $t_0 \in (a, b)$ başlang'ışh shártti qanaatlandratug'n sheshimi bolsa, onda $\mathbf{x}(t)$ vektor-funkciya (a, b) intervalda birdeylik túrde nolge ten' bolad: $\mathbf{x}(t) \equiv 0$, $t \in (a, b)$.

3. Eger (7) birtekli sızılıq sistemann' $A(t)$ matricası haqıyqatında matrica bolp, bul sistema $\mathbf{x} = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, $t \in (a, b)$ kompleks sheshimge iye bolsa, onda bul kompleks sheshiminin' $\mathbf{u}(t)$ haqıyqat bólegi de hám $\mathbf{v}(t)$ jorma bólegi de us sistemann' (a, b) intervaldag' sheshimi bolad.

Meyli (a, b) intervalda anqlang'an

$$\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t) \quad (2)$$

vektor-funkciyalar berilsin, bunda

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}$$

Eger barlg' bir waqтта nolge ten' emes sonday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ turaql sanlar bar bolp, (a, b) intervalda

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n(t) \equiv 0 \quad (3)$$

birdeyligi ornlansa, onda (2) vektor-funkciyalar (a, b) intervalda *sızıqlı g'árezli* dep atalad.

Eger (3) ten'ligi tek $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ bolg'anda g'ana birdeylik türde ornlansa, onda (2) vektor-funkciyalar *sızıqlı g'árezsiz* dep atalad.

Bazıbir (a, b) intervalda anqlang'an n sandag' (2) vektor-funkciyalar ushn *Vronskiy determinant* dep,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

kórinisindegi anqlawshqa aytamz.

Eger (2) vektor-funkciyalar (a, b) intervalda sızıqlı g'árezli bolsa, onda bul aralqta $W(t) \equiv 0$. Eger (2) vektor-funkciyalar $A(t)$ matri-cas úzliksiz bolatug'n (a, b) intervaldag' (1) birtekli sızıqlı sistemann' sızıqlı g'árezsiz sheshimleri bolsa, onda olarn' $W(t)$ Vronskiy determinant (a, b) intervaldn' bir de noqatnda nolge aynalmayd.

(1) birtekli sızıqlı sistemann' n sheshimlerinin' (a, b) intervalda sızıqlı g'árezsiz bolw ushn olarn' vronskiann' us intervaldn' bir de noqatn da nolge aynalmaw zárúrli hám jetkilikli.

Biraq ta, (1) sistemann' n sheshimlerinin' sızıqlı g'árezsizligin anqlaw ushn $W(t)$ anqlawshn' (a, b) intervalnn' bir noqatnda bolsa da nolden ózgeshe bolw-na isenim payda etiw jetkilikli. Bul (1) sistemann' n dara sheshimlerinin' vronskiann' tómendegi eki ájayp qásiyetlerinen kelip shg'ad:

1. Eger $W(t)$ anqlawsh (1) sistemann' koefficientleri úzliksiz bolg'an (a, b) intervalnn' bir noqatnda bolsa da nolge aynalsa, onda $W(t)$ us intervaldn' barlıq noqatlarnda nolge ten' bolad.

2. Eger $W(t)$ us (a, b) intervaldn' bir noqatnda bolsa da nolge aynalmasa, onda ol (a, b) intervaldn' bir de noqatnda nolge aynalmayd.

Solay etip, (1) sistemann' koefficientleri úzliksiz bolatug'n (a, b) intervalnda us sistemann' n sheshimlerinin' sızıqlı g'árezsiz bolw ushn olarn' vronskiann' (a, b) intervaldn' bir noqatnda aq nolge aynalmaw zárúrli hám jetkilikli.

Tómendegi tastyqlaw ornl.

Eger $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ – birtekli sızıqlı sistemann' sheshimleri bolsa, onda olarn' Vronskiy determinant qálegen noqatta

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(s)ds} \quad (4)$$

formula boynsha tablad, bunda $t_0 \in (a, b)$.

Bul (4) formula *Ostrogradskiy-Liuvill formulası* dep atalad.

Eger n ólshemli (1) birtekli sızıqlı sistemann' $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sheshimleri sızıqlı g'árezsiz bolsa, onda bul sheshimlerin' jynag' us sistemann' sheshimlerinin' *fundamentallq sisteması* dep ataladı.

(1) sistemann' n sheshimler jynag' (a, b) intervalda sheshimlerin' *fundamentallq sisteması* bolw ushn olarn' Vronskiy determinantn' (a, b) intervaldn' bir noqatnda aq nolden ózgeshe bolw zárúrli hám jetkilikli.

Tómendegi tastyqlaw orınlı.

Eger (1) birtekli sızıqlı sistemann' barlıq koefficientleri (a, b) intervalda úzliksiz bolsa, onda us intervalda anqlang'an hám úzliksiz bolg'an sheshimlerin' *fundamentallq sisteması* bar bolad.

(1) birtekli sızıqlı sistemann' sheshimlerinin' *fundamentallq sisteması* belgili bolw us sistemann' ulwma sheshimin dúziwge múmkinshilik beredi.

Tómendegi tástıyıqlaw orınlı.

Eger $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ – (1) birtekli sızıqlı sistemann' n sızıqlı g'árezsiz sheshimlerin' ibarat sistema, yag'ny ol sheshimlerin' *fundamentallq sisteması* bolsa, onda birtekli sızıqlı sistemann' ulwma sheshimi

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + C_n\mathbf{x}_n(t)$$

bolad, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ – erikli turaqlılar.

Bag'analar (1) birtekli sızıqlı sistemann' $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sızıqlı g'árezsiz dara sheshimleri bolg'an mına

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

kvadratlıq matrica usı sistemannıń *fundamentallıq matricası* dep ataladı.

Eger bazıbir $t = t_0$ bolg'anda $\mathbf{X}(t_0) = E$ (E – *birlikmatrica*) shárti ornlansa, onda bunday *fundamentallq matrica normallastrlg'an fundamentallq matrica* dep atalad.

Qarastrp atrg'an (1) sistema menen birge

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \quad (5)$$

matricalıq ten'lemenı qarayq.

Bul eki sisteman tóمندegi tasyqlaw baylanstrad.

1. Meyli $\mathbf{X}(t)$ matricas (1) sistemann' fundamentallq matricas bolsn. Sonda $\mathbf{X}(t)$ matricas (5) matricallq ten'lemeneni qanaatlandrad.

2. Meyli $\mathbf{X}(t)$ – us (5) matricallq ten'lemenin' sheshimi bolsn. Sonda bul matricann' hár bir bag'anas (1) sistemann' sheshimi bolad.

$\mathbf{X}(t)$ fundamentallq matricann' determinant (1) sistemann' sızıqlı g'árezsiz n sheshimlerinin' Vronskiy determinant bolg'anlqtan, ol nolge ten' emes, demek, $\mathbf{X}(t)$ aynmag'an matrica bolad.

Úzliksiz koefficientlerge iye hár qanday birtekli sızıqlı sistema fundamentallq matricag'a iye bolad.

Haqqatnda da,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A(t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t_0) = E, \quad t_0 \in (a, b)$$

sistemasın qarayq. Al, $\det\mathbf{X}(t_0) = \det E \neq 0$ bolg'anlqtan, t_0 noqatnn' bazıbir (α, β) dógeregi bar bolp, onda barlıq $t \in (\alpha, \beta)$ ushn $\det\mathbf{X}(t) \neq 0$ bolad, yag'ny $\mathbf{X}(t)$ matricas (α, β) intervalda fundamentallq matrica bolad.

1. Meyli $\bar{\mathbf{X}}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\mathbf{C}$ – aynımağan matrica bolsın. Sonda $\mathbf{X}(t) = \bar{\mathbf{X}}(t)\mathbf{C}$ matricası da usı (1) sistemanın fundamentallıq matricası boladı.

2. Meyli $\mathbf{X}_1(t)$ hám $\mathbf{X}_2(t)$ matricaları (1) sistemanın fundamentallıq matricalar bolsın. Sonda aynımağan sonday $\mathbf{C}$ matricası bar bolıp,

$$\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{C}$$

teńligi orınlı.

Eger $\mathbf{X}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\mathbf{C}$ – aynımağan matrica bolsa, onda $\mathbf{C}\mathbf{X}(t)$ matricası fundamental matrica bolıwı shárt emes.

1. Eger $\mathbf{X}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\mathbf{C}$ – erikli turaqlı vektor bolsa, onda

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$$

añlatpası usı (1) sistemanın sheshimi boladı.

2. Meyli $\mathbf{X}(t)$ – (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\bar{\mathbf{x}}(t)$ vektor-funkciyası usı sistemanın sheshimi bolsın. Sonda sonday $\bar{\mathbf{C}}$ vektorı bar bolıp, $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t)\bar{\mathbf{C}}$ teńligi orınlı.

Bul teoremadan tóمندegi juwmaq kelip shıǵadı:

Eger $\mathbf{X}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası bolsa, onda usı sistemanın ulıwma sheshimi

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$$

túrine iye boladı, bunda $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – erikli turaqlı vektor.

11-lekciya. Turaqlı koefficientli bir tekli sızıqlı sistema. Eyler usılı

Reje:

1. Turaqlı koefficientli birtekli sızıqlı DTS-ları.
2. Eyler usılı

Tayanış sózler: *Turaqlı koefficientli birtekli sızıqlı sistema. Eyler usılı. Xarakteristikalıq teńleme. Sheshimlerdiń fundamentallıq sistemasın dúziw.*

Birtekli

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{ki} y_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

sisteması turaqlı koeffitsientli dep ataladı, egerde barlıq $a_{ki}, i, k = 1, 2, \dots, n$ koeffitsientler turaqlı shamalar bolsa.

Turaqlı koeffitsientli birtekli sistemalar hámme waqıt elementar funktsiyalardan turatuǵın fundamentallıq sheshimler sistemasına iye boladı. Bunday sheshimler sistemasın dúziwdiń tiykarǵı usılı Eyler usılı bolıp tabıladı.

Eyler usılına muwapıq, (1) sistemanıń sheshimi

$$y_1 = g_1 e^{l x}, y_2 = g_2 e^{l x}, \dots, y_n = g_n e^{l x} \quad (2)$$

túrinde izlenedi, bul jerde $g_1, g_2, \dots, g_n$ hám l shamaları anıqlanıwı kerek bolǵan bazıbir turaqlı sanlar.

Bul belgisizlerdi anıqlaw ushın (2) ni (1) degi orınlarına aparıp qoyamız hám $e^{l x}$ qa qısqartıp

(1) sistemasının sheshimleriniñ fundamentallıq sisteması boladı. Bul fundamentallıq sheshimler sisteması arqalı berilgen (1) teńlemeler sistemasının

1. Sızılıqlı bir tekli bolmağan teñlemeler sistemalar. Ulıwma sheshim.

2. Erikli turaqlını variaciyalaw usılı

3. Oñ tamalı arnawlı kóriniste bolğan sızıqlı turaqlı koefficientli teńlemeler sisteması.

Tayanış sózler: Sızıqlı bir tekli bolmağan teńlemeler sistemalar. Ulıwma sheshim. Superpoziciya qásiyeti. Erikli turaqlını variaciyalaw usılı. Koshidın integrallıq formulası. Anıq emes koefficientler usılı.

Meyli birtekli bolmağan sızıqlı sistema

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y + F(x) \quad (1)$$

berilsin, bunda $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ - $n \times n$ - ólshemli matrica, $F(x) \neq 0$ vektorı $I = (a, b)$ intervalında anıqlanğan hám úzliksiz bolsın. Sızıqlı L operatorı járdeminde (1) sistema

$$L[y] = F(x) \quad (2)$$

túrinde jazıladı. Al, (1) sistemağa sáykes keliwshi birtekli sistema

$$L[y] = 0 \quad (3)$$

túrinde jazıladı.

Teorema-1. Eger $Y_0(x)$ vektor funkciya (1) sistemağa sáykes keliwshi (3) birtekli sistemanın sheshimi bolıp, $\Phi(x)$ vektor funkciya (1) birtekli emes sistemanın bir dara sheshimi bolsa, onda $Y_0(x) + \Phi(x)$ funkciyası da usı (1) birtekli emes sistemanın sheshimi boladı.

Teorema-2 (Ulıwma sheshim haqqında). Birtekli emes sızıqlı sistemanın ulıwma sheshimi usı sistemağa sáykes keliwshi birtekli sistemanın ulıwma sheshimi menen berilgen birtekli emes sistemanın dara sheshiminiń qosındısına teń.

Teorema-3. Eger

$$L[y] = \sum_{k=1}^m f^{(k)}(x), \quad f^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n^{(k)}(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

birtekli emes sızıqlı sistema berilgen bolıp, $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)$ vektor funkciyalar I intervalında sáykes türde

$$L[y] = f^{(1)}(x), L[y] = f^{(2)}(x), \dots, L[y] = f^{(m)}(x)$$

sistemaların sheshimleri bolsa, onda I intervalında

$$\psi(x) = \varphi^{(1)}(x) + \varphi^{(2)}(x) + \dots + \varphi^{(m)}(x)$$

vektor- funkciya berilgen (4) sistemanın sheshimi boladı.

Eger (1) birtekli emes sızıqlı sistemağa sáykes keliwshi birtekli sızıqlı sistemanıń sheshimleriniń fundamentallıq sisteması belgili bolsa, onda bul (1) sistemanıń ulıwma sheshimin erikli turaqlıları variaciyalaw usılı (Lagranj usılı) járdeminde tabıwǵa boladı.

Meyli (3) birtekli sızıqlı sistemanıń $J(x)$ fundamentallıq matricası belgili bolsın. Sonda onıń ulıwma sheshimi

$$Y = J(x)C$$

túrinde jazıladı, bunda C - erikli turaqlı vektor. Endi (1) birtekli emes sistemanıń sheshimin

$$Y = J(x)C(x) \quad (5)$$

túrinde izleybiz, bunda $C(x)$ - házirshe anıq emes vektor-funkciya. Onı anıqlaw ushın (5) ti differenciallap (1) sistemağa qoyamız. Sonda

$$J(x) \cdot \frac{dC(x)}{dx} = F(x)$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńliktiń eki jaǵında soldan $J^{-1}(x)$ matricaga kóbeytemiz:

$$\frac{dC(x)}{dx} = J^{-1}(x)F(x).$$

Endi sońǵı teńlikten x_0 den x qa shekem integrallap, $x, x_0 \in I$ tómendegige iye bolamız:

$$C(x) = C + \int_{x_0}^x J^{-1}(s)F(s)ds.$$

Bul tabılǵan ańlatpanı (5) formulağa qoysaq, onda

$$Y(x) = J(x)C + \int_{x_0}^x K(t,s)F(s)ds \quad (6)$$

formulasına iye bolamız, bunda $K(x,s) = J(x)J^{-1}(s)$ - Koshi matricası.

Bul (6) formula (1) sistemanıń ulıwma sheshimin beredi. Eger (1) sistema menen birge

$$Y(x_0) = Y_0 \quad (7)$$

baslanǵısh shárt te berilse hám $J(x)$ (3) sistemanıń $x = x_0$ bolǵanda birlik matricaga aylanıwshı fundamentallıq matricası bolsa, yaǵnıy $Y(x_0) = E$ bolıp, ol normallastırılǵan fundamental matrica bolsa, onda (6) formuladan (1), (7) Koshi máselesiniń sheshimin alıwǵa boladı

$$Y(x) = J(x)y_0 + \int_{x_0}^x K(x,s)F(s)ds \quad (8)$$

Bul (8) formula Koshi formulası dep te ataladı.

Meyli turaqlı koefficientli sızılıq birtekli emes sistema bolğan

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x) \quad (1)$$

sisteması berilsin, bunda $A = (n \times n)$ ólshemli turaqlı matrica $A = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n, a_{ij}$ - haqıyqıy sanlar, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ - bazıbir $I = (a, b)$ intervalda anıqlanğan hám úzliksiz vektor-funkciya.

Bul (1) birtekli emes sızılıq sistemasını sáykes birtekli sistemasınıń ulıwma sheshimin taba otırıp, Lagranjdıń erikli turaqlılardı variaciyalaw usılı járdeminde sheshiwge boladı.

Eger (1) sistemada $f(x)$ vektor- funkciyanıń hár bir dúziwshisi kvazikópaǵzalı bolsa, yaǵnıy eger $f_i(x)$ funkciya $b = b_1x + \dots + b_mx^m, e^{ax}, \cos \beta x, \sin \beta x$ funkciyalarınń kóbeymeleri hám qosındılardan tursa, onda onıń dara sheshimin anıq emes koefficientler usılı járdeminde tabıwǵa boladı.

Meyli $f(x)$ vektor – funkciyanıń hár bir koordinatası $f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ kvazikópaǵzalı bolsın, yaǵnıy $f_i(x) = P_{m_i}(x)e^{\gamma x}$ túrine iye bolsın, bunda $P_{m_i}(x), i = 1, 2, \dots, n$ $-m_i$ -dárezeli kópaǵzalı, $m = \max m_i, i = \overline{1, n}$.

1) Eger γ sanı sáykes birtekli sistemasınıń A matricasınıń menshikli sanı bolmasa, onda (1) sistemasınıń dara sheshimi

$$y_i(x) = Q_m^{(i)}(x)e^{\gamma x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

túrinde izlenedi, bunda $Q_m^{(i)}$ – bul m dárezeli anıq emes koefficientli kópaǵzalı. Onıń koefficientleri anıq emes koefficientler usılı menen tabıladı.

2) Eger γ sanı sáykes birtekli sistemasınıń xarakteristikalıq teńlemesi ushın r eseli koren bolsa, onda dara sheshim

$$y_i(x) = Q_{m+r}^{(i)}(x)e^{\gamma x}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

túrinde izlenedi, bunda $Q_{m+r}^{(i)}(x)$ -bul dárezesi $m + r$ ge teń bolğan anıq emes koefficientli kópaǵzalı. Bul jaǵdayda da $Q_{m+r}^{(i)}(x)$ kópaǵzalınıń anıq emes koefficientleri anıq emes koefficientler usılı járdeminde yaǵnıy (3) anlatpası (1) sistemaǵa qoyılıp hám uqsas aǵzalardıń koefficientlerin salıstırıw jolı menen tabıladı.

Mısalı: 1) $f(x)$ vektor-funkciyasınıń hár bir dúziwshisi dárezesi $m = s$ ten úlken bolmağan kóp aǵzalı bolǵanda, yaǵnıy

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^1 x^s + A_1^1 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^1 x + A_s^1 \\ A_0^2 x^s + A_1^2 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^2 x + A_s^2 \\ \dots \\ A_0^n x^s + A_1^n x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^n x + A_s^n \end{pmatrix}$$

bolǵanda:

a) eger A matricası nolge teń menshikli sanǵa iye bolmasa, yaǵnıy onıń xarakteristikaliq teńlemesiniń k_i korenleri nolge teń bolmasa ($k_i \neq 0; j = \overline{1, n}$) bolsa, onda berilgen (1) sistemanıń dara sheshimi

[illegible]

túrinde izlenedi.

b) eger γ sanı saykes birtekli sistemanıń xarakteristikalıq teńlemesi ushın r eseli koren bolsa, yaǵnıy $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ bolsa, onda dara sheshim $s + r$ dárejeli kópaǵzalı túrinde izlenedi, yaǵnıy

[illegible]

2) Meyli $f(x)$ tóمندegi túrge iye bolsın:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} (A_0^1 x^S + A_1^1 x^{S-1} + \dots + A_{S-1}^1 x + A_S^1) \\ e^{\lambda x} (A_0^2 x^S + A_1^2 x^{S-1} + \dots + A_{S-1}^2 x + A_S^2) \\ \dots \\ e^{\lambda x} (A_0^n x^S + A_1^n x^{S-1} + \dots + A_{S-1}^n x + A_S^n) \end{pmatrix}$$

a) eger xarakteristikaliq teńlemenin kóreni γ ǵa teń bolmasa, yaǵniy $k \neq \gamma$ bolsa, onda dara sheshim tómendegi túrde izlenedi:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma x} (B_0^1 x^S + B_1^1 x^{S-1} + \dots + B_{S-1}^1 x + B_S^1) \\ e^{\gamma x} (B_0^2 x^S + B_1^2 x^{S-1} + \dots + B_{S-1}^2 x + B_S^2) \\ \dots \\ e^{\gamma x} (B_0^n x^S + B_1^n x^{S-1} + \dots + B_{S-1}^n x + B_S^n) \end{pmatrix}$$

b) Eger γ sanı xarakteristikaliq teńlemenin r eseli kóreni bolsa, yaǵnıy $k_1 = k_2 = \dots = k_r = \gamma$ bolsa, onda dara sheshim tómendegi túrde izlenedi:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma x}(B_0^1x^{r+s} + B_1^1x^{r+s-1} + \dots + B_{r+s}^1) \\ e^{\gamma x}(B_0^2x^{r+s} + B_1^2x^{r+s-1} + \dots + B_{r+s}^2) \\ \dots\dots\dots \\ e^{\gamma t}(B_0^n x^{r+s} + B_1^n x^{r+s-1} + \dots + B_{r+s}^n) \end{pmatrix};$$

3) Meyli $f(x)$ tóمندegi túرge iye bolsın:

[illegible]

a) Eger $p \pm iq$ sanı xarakteristikaliq teńlemenıń kóreni bolmasa, onda dara sheshim tómendegi túrde izlenedi:

[illegible]

b) Eger $p \pm iq$ sanı xarakteristikaliq teńlemenıń r eseli koreni bolsa, onda dara sheshim tómenдеgi túrde izlenedi:

[illegible]

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Eger birtekli emes sızıqlı sistemalıń bir dara sheshimi hám sáykes birtekli sızıqlı sistemalıń ulıwma sheshimi belgili bolsa, onıń ulıwma sheshimi qalay dúziledi?
2. Birtekli emes sızıqlı sistemalıń ulıwma sheshimin tabıwdıń Lagranj usılı neden ibarat?
3. Turaqlı koefficientli birtekli emes sistemalı sheshiwdiń anıq emes koefficientler usılı neden ibarat?
4. Turaqlı koefficientli birtekli sistemalıń A matricasınıń menshikli sanlarına hám sistemalıń oń jaǵına baylanıslı túrde dara sheshimler qanday kóriniste izlenedi?

13-lekciya. Matrica kórinisindegi sızıqlı teńlemeler sisteması. Eksponenciallıq matrica. Matricalı differenciallıq teńlemelerdi integrallaw

Reje:

1. Eksponenciallıq matrica hám onıń qásiyetleri.
2. Sızıqlı bir tekli turaqlı koefficientli teńlemeler sistemasın sheshiwdiń matricalıq usılı

Tayanış sózler: Eksponencial matrica. Matrica eksponentasınıń qásiyetleri. Matricalıq usıl. A matricasınıń Jordan forması. Fundamentallıq matricanı dúziw.

Skalyar shama a nıń eksponencialı $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^p}{p!} + \dots$ qatarı menen kórsetiletuǵını belgili. Usıǵan uqsas túrde A kvadratlıq matricasınıń eksponencialı túsiniǵı kiritiledi. A matricasınıń eksponencialı dep,

$$\exp A = e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^p}{p!} + \dots \quad (1)$$

qatarı túsiniledi.

Bul (1) qatar qálegen kvadratlıq matrica ushın jıynaqlı, sebebi bul matricanıń norması ushın dúzilgen $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!}$ skalyar qatarı jıynaqlı boladı.

(1) qatardıń qálegen A kvadratlıq matrica ushın jıynaqlıǵınan

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(At)^p}{p!} \quad (2)$$

qatardıń da jıynaqlıǵı kelip shıǵadı, bunda t – skalyar kóbeytiwshi. Bul qatar A^t kóbeymeniń eksponencialın beredi, yaǵnıy e^{At} . Solay etip,

$$e^{At} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(At)^p}{p!}.$$

Eksponencialdın bazı bir qásiyetlerin keltiremiz.

1) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As} = e^{As} \cdot e^{At}$. Haqıyqatında da,

$$e^{At} \cdot e^{As} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l s^l}{l!} = \sum_{p=0}^{\infty} A^p \cdot \sum_{k=0}^p \frac{t^k s^{p-k}}{k!(p-k)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p (t+s)^p}{p!} = e^{A(t+s)}.$$

Al, $e^{A(t+s)} = e^{A(s+t)}$ bolǵanlıqtan, keltirilgen teńliklerden e^{At} hám e^{As} matricalarınń kommutativligi de kelip shıǵadı. $s = -t$ dep esaplap, $e^{At} \cdot e^{-At} = e^{A0} = E$ ekenin alamız. Demek, e^{At} – mudamı aynımaǵan matrica hám onıń kerı matricası e^{-At} matricasına teń.

2) Eger $AB = BA$ bolsa, onda $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$.

3) Eksponencialdın tuwındısı. (2) qatardı formal túrde differenciallaǵannan alınǵan qatarda teń ólshewli jıynaqlı boladı, sonlıqtan, (2) qatardı aǵzama-aǵza differenciallaǵan nızamlı. Bunı esapqa alsaq, onda

$$\frac{de^{At}}{dt} = A + \frac{A^2 t}{1!} + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots = Ae^{At} = e^{At} A.$$

Meyli a – haqıyqıy san bolsın. $t \in R$ ózgeriwshiniń e^{at} kórsetkishli funkciyası jáne bir xarakteristikalıq qásiyetke iye: e^{at} funkciyası $\dot{x} = ax$ skalyar differenciallıq teńlemesin hám $x|_{t=0} = 1$ baslanǵısh shártin qanaatlandıradı.

Bul qásiyetti de kórsetkishli funkciyanıń anıqlaması sıpatında alıwǵa boladı.

Differenciallıq teńlemeler teoriyasında matricanıń eksponentasin anıqlaǵanda kórsetkishli funkciyanıń usı xarakteristikalıq qásiyetin tiykar etip alıwǵa boladı.

Anıqlama. $t \cdot A$ matricanıń eksponentası (eksponencialı) dep,

$$x' = Ax \tag{3}$$

birtekli sızıqlı sistemanıń $X(0) = E$ shárti menen normalastırılǵan $X(t)$ fundamentallıq matricasına, yaǵnıy

$$X' = AX', \quad X|_{t=0} = E \tag{4}$$

matricalıq Koshi máselesiniń sheshimine ayılıadı.

Solay etip, anıqlama boyınsha

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{At} \Big|_{t=0} = E. \quad (5)$$

Al, $e^{A(t-t_0)}$ matricası

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(t_0) = E$$

matricaliq teñlemenin sheshimi boladı hám demek,

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

birtekli sızıqlı sistemaniń fundamentallıq matricası boladı.

Usıǵan baylanıslı A – turaqlı matrica bolǵanda

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \quad (6)$$

birtekli emes sızıqlı sistemaniń $x(t_0) = C$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın ulıwma sheshimin tómendegishe kórsetiwge boladı:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} C + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_0)} e^{-A(s-t_0)} f(s) ds \quad \text{yamasa} \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} C + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds.$$

Endi (3) birtekli sızıqlı sistemani matricaliq usıl menen sheshiw máselesin qarayıq.

Meyli H – A matricasını J jordan formasına túrlendiretuǵın matrica bolsın, demek,

$$A = H J H^{-1} \quad (7)$$

(3) teñlemede

$$x = Hy \quad (8)$$

ózgeriwshilerdi almastırıwın orınlaymız. Sonda

$$\frac{dy}{dt} = H^{-1} A Hy.$$

Endi (7) esapqa alsaq, onda

$$\frac{dy}{dt} = Jy \quad (9)$$

sistemasına iye bolamız.

Bundağı J matricası kvazidiagonalıq strukturağa iye: $J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_p(\lambda_p))$, λ_i – bul A matricasınıñ menshikli mánisleri. Bağanalıq matrica y ti sonday bloklarğa bólemiz, j – bloktıñ qatarlar sanı. $J_j(\lambda_j)$ jordan kletkasınıñ tártibine teñ bolsın. Sonda

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p(\lambda_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}.$$

Solay etip, biziñ vektorlı-matricalı teñlememiz p gárezsiz teñlemelerge ajıraladı:

$$\frac{dy_j}{dt} = J_j(\lambda_j) y_j \quad (j = 1, 2, \dots, p). \quad (10)$$

Bul (10) sistemanıñ fundamentallıq matricası $Y_j = e^{J_j(\lambda_j)t}$ túrine iye boladı yamasa $J_j(\lambda_j) = \lambda_j E_{k_j} + N_{k_j}$ bolğanlıqtan, $Y_j = e^{\lambda_j t} e^{N_{k_j} t}$ boladı. Al,

$$e^{N_{k_j} t} = E_{k_j} + \frac{N_{k_j} t}{1} + \frac{N_{k_j}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{N_{k_j}^{k_j-1} t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}.$$

Demek,

$$e^{N_{k_j} t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Solay etip,

$$Y_j(t) = e^{\lambda_j t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Al, (10) teñlemenıñ fundamentallıq matricasın bile otırıp, (9) teñlemenıñ fundamentallıq matricasın tómendegi kvazidiagonalıq túrde dúziw múmkin:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Y_p \end{bmatrix}.$$

Meyli

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t), \quad X(t_0) = C \quad (11)$$

matricaliq teńleme berilgen bolsın.

Teorema. (11) matricaliq teńlemenin sheshimi

$$X = Y(t)CZ(t) \quad (12)$$

kórinisinde kórsetiledi, bunda $Y(t)$ hám $Z(t)$ – sáykes túrde

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = E \quad (13)$$

$$\frac{dZ}{dt} = ZB(t), \quad Z(t_0) = E \quad (14)$$

matricaliq teńlemelerdin sheshimleri.

Dálillew. (12) formulasın t boyınsha differenciallap, (13) hám (14) ti esapqa alıp, tómendegige iye bolamız:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt}CZ + YC\frac{dZ}{dt} = AYCZ + YCZB.$$

Kórinip turǵanıday, usınday túrge (11) teńlemenin óń jaǵı da keledi, eger X tın ornına (12) qoyılsa. Teorema dálillendi.

1-saldar. Mına

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X - XA(t), \quad X(t_0) = C \quad (15)$$

matricaliq teńlemenin sheshimi

$$X = Y(t)CY^{-1}(t) \quad (16)$$

kórinisine iye boladı.

Haqıyqatında da, bul jaǵdayda (13), (14) teńlemeleri

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = E, \quad (17)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -ZA(t), \quad Z(t_0) = E \quad (18)$$

túrine iye boladı. (18) teńleme (17) teńlemege túyinles teńleme boladı hám sonlıqtan $Z(t) = Y^{-1}(t)$.

Bunnan (12) ge muvafiq, (16) a'latpası kelip shı'adı.

2-saldar. Eger (11) te'lemede A hám B turaqlı matricalar bolsa, onda bul te'lemenıń sheshimi

$$X = e^{A(t-t_0)} C e^{B(t-t_0)}$$

túrinde kórsetiledi.

14-lekciya. Sheshimniń dawamlanıwı. Sheshimniń baslan'ısh shártlerge hám parametrlerge úzliksiz gárezligi haqqında'ı teorema. Sheshimniń baslan'ısh mánisler hám parametrler boyınsha differenciallanıwshılı'ı haqqında teoremlar

Reje:

1. Sheshimniń dawamlanıwı.
2. Sheshimniń parametrden úzliksiz gárezligi haqqında'ı teorema.
3. Sheshiminiń baslan'ısh berilgenlerden úzliksiz gárezligi haqqında'ı teorema
4. Sheshiminiń parametrlar boyınsha differenciallanıwshılı'ı haqqında teorema
5. Sheshimniń baslan'ısh mánisler boyınsha differenciallanıwı haqqında teorema

Tayanısh sózler: *Sheshimniń dawam etiliwi. Dawamsız sheshimler. Sheshimniń parametrlar boyınsha úzliksizligi. Sheshiminiń baslan'ısh berilgenler boyınsha úzliksizligi Sheshim.Parametr. Sheshiminiń parametrlar boyınsha differenciallanıwshılı'ı.*

Sheshimniń baslan'ısh mánisler boyınsha differenciallanıwshılı'ı. Variyaciyalarda'ı te'lemeler sistemasi.

Meyli differenciallıq te'lemelerdiń normal sistemasi bol'gan

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}$$

sistemasi yamasa vektorlıq túrde jazıl'gan

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

sisteması berilgen bolsın, bunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $f(t, x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya.

Bul normal sistema ushın bar bolıw hám birden-birlik teoremasınıń shártleri orınlanadı dep uyǵaramız.

Biz (1) teńlemeler sistemasınıń oń jaǵı bolǵan $f(t, x)$ vektor-funkciyası bazıbir λ parametrden de ǵárezli bolǵan jaǵdaydı qaraymız:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \quad (2)$$

sonıń menen birge, λ parametriniń qálegen mánisi ushın sheshimniń bar bolıw hám birden-birliǵi haqqındaǵı teorema shártleri orınlı boladı dep uyǵaramız. Sonda (2) sistemanıń $x(t_0) = x_0$ baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın $x = x(t, \lambda, t_0, x_0)$ sheshimi λ parametriniń bazıbir funkciyası boladı.

Meyli berilgen (2) sistemada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n ólshemli vektor hám $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – parametr bolıp, $f(t, x, \lambda) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya bolsın.

Bul (2) teńlemeler sisteması menen birge

$$x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

baslanǵısh shártlerdi de qaraymız, bunda $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ – berilgen n ólshemli turaqlı vektor.

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

Teorema. Meyli $f(t, x, \lambda)$ vektor-funkciyası

$$\mathbb{R}: |t - t_0| \leq a, \quad \|x - x_0\| \leq b, \quad \|\lambda - \lambda_0\| \leq c, \quad a, b, c \geq 0$$

oblastta anıqlanǵan bolıp, tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) $f(t, x, \lambda)$ vektor-funkciyası t, x, λ boyınsha $\mathbb{R}$ oblastta úzliksiz hám demek, ol usı oblastta shegaralanǵan: $\|f(t, x, \lambda)\| \leq M$, bunda M – oń turaqlı, sonıń menen birge, ol λ parametrden ǵárezli emes;

2) $f(t, x, \lambda)$ vektor-funkciyası x boyınsha $\mathbb{R}$ oblastında Lipshic shártin qanaatlandıradı, yaǵnıy $\|f(t, x, \lambda) - f(t, x', \lambda)\| \leq L \|x - x'\|$ teńsizliǵi barlıq $(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}$ hám $(t, x', \lambda) \in \mathbb{R}$ ushın orınlanadı, bunda $L > 0$ turaqlısı λ parametrden ǵárezli emes.

Sonda (2) differenciallıq teńlemeler sisteması (3) baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın, $|t - t_0| \leq h, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c$ bolǵanda anıqlanǵan birden-bir $x = x(t, \lambda)$ sheshimge iye hám bul sheshim t ǵárezsiz ózgeriwshisine qarata teń ólshewli túrde λ parametriniń úzliksiz funkciyası boladı, yaǵnıy qálegen $\varepsilon > 0$ ushın sonday $\delta > 0$ bar bolıp $\|\Delta\lambda\| < \delta$ bolǵanda barlıq $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ushın

$$\| \mathbf{x}(t, \lambda + \Delta \lambda) - \mathbf{x}(t, \lambda) \| < \varepsilon$$

teńsizligi orınlanadı, bunda $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

(1), (3) Koshi máselesi berilsin. (1) sistemanıń oń jaǵı bolǵan $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ vektor-funkciyasın

$$\mathbb{R}: |t - t_0| \leq a, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b$$

oblastta anıqlanǵan dep esaplaymız.

Teorema. Eger (1) sistemanıń oń jaǵı bolǵan $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ vektor-funkciyası $\mathbb{R}$ oblastta Pikar teoremasınıń shártlerin qanaatlandırsa, onda (1) sistemanıń $t = t^*$ bolǵanda $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın $\mathbf{x} = \varphi(t, t^*, \mathbf{x}^*)$ sheshimi t ǵárezsiz ózgeriwshiniń hám t^* , $\mathbf{x}^*$ baslanǵısh berilgenlerdiń

$$|t - t_0| \leq \frac{h}{2} - \omega, \quad |t^* - t_0| \leq \omega, \quad \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0\| \leq \frac{b}{2}$$

oblasttaǵı úzliksiz funkciyası boladı, bunda $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $0 \leq \omega \leq \frac{h}{4}$.

Meyli

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda), \\ \mathbf{x}(t_0, \lambda) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

baslanǵısh máseleler jıynaǵ berilsin, bunda $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – parametr, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya.

Teorema. Eger $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ vektor-funkciyası $(t, \mathbf{x}, \lambda) \in I \times D \times \Lambda$ oblastta $t, \mathbf{x}, \lambda$ boyınsha r márte ($r \geq 1$) úzliksiz differenciallanatuǵın bolsa, onda (1) baslanǵısh máseleleriniń $\mathbf{x}(t, \lambda)$ sheshimleri de $(t, \lambda) \in I_1 \times \Lambda$ oblastta t boyınsha da hám λ parametri boyınsha da r márte úzliksiz differenciallanadı, bunda $I_1 \subset I$, $\mathbf{x}_0 \in D$.

Meyli

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{2}$$

differenciallıq teńlemeler sisteması hám

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3}$$

baslanǵısh shárti berilgen bolsın.

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

Teorema. Eger $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ vektor-funkciyası $I \times D$ oblastta $t, \mathbf{x}$ ózgeriwshileri boyınsha $r \geq 1$ tártiptegi hám sol tártiptegi úzliksiz tuwındılarǵa iye bolsa, onda (2), (3) baslanǵısh máseleleriń $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ sheshimi $t, t_0, \mathbf{x}_0$ ózgeriwshileri boyınsha $r \geq 1$ tártipke shekemgi hám sol tártiptegi úzliksiz tuwındılarǵa iye boladı.

15-lekciya. Avtonomiyalı sistemalar. Sheshimniń qásiyetleri. Sızıqlı avtonom sistemaniń ayırıqsha toshkaları. Asimptotikalıq ornıqlı periodlı qozǵalıstıń túsinigi

Reje:

1. Avtonomiyalı sistema haqqında túsinik
2. Sheshimniń qásiyetleri
3. Sızıqlı avtonom sistema
4. Ayırıqsha toshkalardıń tipleri
5. Asimptotikalıq ornıqlı periodlı qozǵalıstıń túsinigi

Tayanış sózler: 1. Avtonom sistema. Fazalıq keńislik. Fazalıq iymek sızıqlar. Traektoriyalardıń túrleri. Teńsalmaqlılıq awqalları. Sheshimniń qásiyetleri. Sızıqlı avtonom sistema. Ayırıqsha toshka. Teń salmaqlılıq awqalı. Tınıshlıq toshkası. Ayırıqsha toshkalar tipleri: Túyin, er, focus, oray. Periodlı qozǵalıstı.

Eger differenciallıq teńlemeler sistemasına gárezsiz ózgeriwshi anıq túrde kirmese, onda bul sistema *avtonomiyalı sistema* dep ataladı.

Birinshi tártipli n teńlemeden ibarat normal túrdegi avtonomiyalı sistemaniń ulıwma túri

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

kórinisinde yamasa vektorlıq túrde

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

túrinde jazıladı, bunda t – gárezsiz ózgeriwshi, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n ólshemli vektor; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya. Al, ón jaǵında t anıq túrde qatnasqan

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

normal sisteması *avtonomiyalı emes sistema* delinedi. Bul sistemada jańa $x_{n+1} = t$ belgisiz funkciyasın kirgizip, onı $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ ózgeriwshileriniń keńisligindegi

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{x}), \quad \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$$

kórinisindegi avtonomiyalı sistema túrinde jazıwǵa boladı.

Eger bul sistemalarda gárezsiz ózgeriwshi t waqıttı ańlatatuǵın bolsa, onda ol *dinamikalıq sistemalar* delinedi.

Meyli (2) avtonomiyalı sistemaniń ón jaǵı bolǵan $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektor-funkciyası $x_1, x_2, \dots, x_n$, ózgeriwshileriniń $\mathbb{R}^n$ keńisliginiń bazıbir D ashıq oblastında úzliksiz bolsın hám usı D oblastında pútinley jatatuǵın qálegen tuyıq shegaralanǵan oblastta Lipshic shártin qanaatlandırsın. Sonda bar bolıw hám birden-birlik teoremasına muwapıq, qálegen haqıyqıy t_0 sanı ushın hám qálegen $\mathbf{x}_0 \in D$ noqat ushın (2) sistemaniń $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın birden-bir $\mathbf{x} = \varphi(t)$ sheshimi bar boladı.

Meyli $\mathbf{x} = \varphi(t)$ funkciyası (2) sistemaniń I intervalda anıqlanǵan sheshimi bolsın. Sonda $\mathbf{x} = \varphi(t)$, $t \in I$ noqatlar kópligi $\mathbb{R}_x^n$ keńisliginde iymek sızıq (sızıq) boladı. Haqıyqatında da, $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $t \in I$ – bul iymek sızıqtıń parametrlik teńlemesi. Bul iymek sızıq (1) avtonomiyalı sistemaniń *fazalıq traektoriyası* (yamasa *traektoriyası*) dep ataladı. Al, fazalıq traektoriyalar jaylasqan $\mathbb{R}_x^n$ keńisligi (1) avtonomiyalı sistemaniń *fazalıq keńisligi* dep ataladı. $n = 2$ bolǵanda $\mathbb{R}_x^2$ *fazalıq tegislik* delinedi.

(2) sistemaniń integrallıq iymek sızıqlar koordinataları $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ bolǵan $(n + 1)$ -ólshemli $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ keńisliginde súwretlenedi. Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ funkciyası sistemaniń sheshimi bolsa, onda integrallıq iymek sızıq $\mathbf{x} = \varphi(t)$, $t = t$, $t \in I$ teńlemeleri menen beriledi. Demek, oǵan sáykes keletuǵın fazalıq traektoriya integrallıq iymek sızıqtıń $\mathbb{R}_x^n$ fazalıq keńislikke proekciyası boladı.

Endi avtonomiyalı sistemalardıń sheshimleriniń qásiyetlerin úyrenemiz.

1. Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ – (2) avtonomiyalı sistemaniń sheshimi bolsa, onda C qálegen turaqlı bolǵanda $\mathbf{x} = \varphi(t + C)$ vektor-funkciyası da usı (2) sistemaniń sheshimi boladı.

2. Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ hám $\mathbf{x} = \psi(t)$ – berilgen (2) sistemaniń eki sheshimleri bolsa hám $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$ bolsa, onda $\psi(t) = \varphi(t + C)$, bunda $C = t_1 - t_2$. Basqasha aytqanda, eger eki

$\mathbf{x} = \varphi(t)$ hám $\mathbf{x} = \psi(t)$ traektoriyalar ulıwma noqatqa iye bolsa, onda bul traektoriyalar ústpe-úst túsedi.

3. Avtonomiyalı sistemalardıń sheshimleri gruppalıq qásiyetke iye: eger $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ – (2) sistemanıń $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ baslanğısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimi bolsa, onda

$$\varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}_0)) = \varphi(t + s, \mathbf{x}_0)$$

teńligi orınlı.

Anıqlama. Eger $\mathbf{f}(a) = 0$ teńligi orınlansa, onda $\mathbf{x} = a$ noqatı (2) avtonomiyalı sistemanıń *teń salmaqlıq awhalı* dep ataladı.

Teń salmaqlıq awhalı avtonomiyalı sistemanıń *tınıshlıq noqatı* dep te ataladı.

4. Eger a – teń salmaqlıq awhalı bolsa, onda $\mathbf{x}(t) \equiv a$, $-\infty < t < \infty$ vektor-funkciya (2) avtonomiyalı sistemanıń sheshimi boladı.

5. Eger a – teń salmaqlıq awhalı bolsa, onda $\mathbf{x} = a$ noqat fazalıq traektoriya boladı.

6. Noqattan ózgeshe bolǵan fazalıq traektoriya tegis iymek sıızıq boladı (yaǵnıy hár bir noqatında nollik emes urınba vektorǵa iye).

Teorema. (2) avtonomiyalı sistemanıń hár qanday fazalıq traektoriyası tómendegi úsh tiptiń birewine tiyisli:

1) óz-ara kesilispeytuǵın tegis iymek sıızıq;

2) tuyıq tegis iymek sıızıq (cikl);

3) noqat.

Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ sheshimge sáykes keletuǵın fazalıq traektoriya tegis tuyıq iymek sıızıq bolsa, onda bul sheshim t ózgeriwshinin' periodı $T > 0$ bolǵan periodlı funkciyası boladı.

Mına

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

teńlemeler sisteması

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos(-t + C_2), \\ x_2 = C_1 \sin(-t + C_2) \end{cases}$$

túrindegi sheshimlerge iye, bunnan t parametrin shıǵarıp taslasaq, onda $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$ bolıp, traektoriyalar orayı $(0,0)$ teń salmaqlıq awhalında bolǵan koncentrlık sheńber toparı boladı. Solay etip, traektoriyalardıń tuyıqlıǵı $x_1(t)$ hám $x_2(t)$ funkciyalarınıń birdey periodtaǵı periodlı sheshimler bolıwın kórsetedi.

16-lekciya. Lyapunov mánisindegi ornıqlılıq. Asimptotikalıq ornıqlılıq haqqında teoremlar. Birinshi jaqınlasıw boyınsha ornıqlılıq haqqındaǵı Lyapunov teoreması

Reje:

1. Lyapunov mánisindegi ornıqlılıq. Tiýkarǵı túsinikler ham anıqlamalar
2. Asimptotikalıq ornıqlılıq haqqında teorema
3. Sızıqlı sistemalardıń ornıqlılıǵı.
4. Birinshi juwıqlasıw boyınsha ornıqlılıq. Lyapunov teoreması.

Tayanış sózler: Ornıqlılıq. Asimptotikalıq ornıqlılıq. Ornıqsızlıq. Sızıqlı sistema. Ornıqlılıq shártleri. Birinshi jaqınlasıw sisteması. Lyapunov teoreması.

Ornıqlılıq máseleleri dáslep mexanikada sistemalardıń teń salmaqlılıq awhalların úyrengende kelip shıqtı. 1644-jılı awırılıq kúshiniń tásirinde turǵan deneler sistemasınıń teń salmaqlılıǵınıń ornıqlılıq shártin ulıwma jaǵday ushın italyan matematigi hám fizigi E. Torrichelli anıqladı, al bunnan 144 jıl keyin, yaǵnıy 1788- jılı J.Lagranj qálegen konservativlik sistemaniń teń salmaqlılıq awhalınıń ornıqlılıǵınıń jetkilikli shártlerin anıqlawshı teremni dálilledi.

Ásirese, XVIII-ásirdiń aqırı XIX-ásirdiń basındaǵı Quyash sistemasınıń ornıqlılıǵı boyınsha Lagranj benen Laplastıń klassikalıq miynetleri úlken áhmiyetke iye boldı.

1892-jılı A.M. Lyapunovtıń “Qozǵalıstıń ornıqlılıǵı haqqındaǵı ulıwma másele“ dep atalınǵan ataqlı doktorlıq dissertaciyası járiyalandı. Mine, usı miyneti menen ol házirgi zaman ornıqlılıq teoriyasınıń tiýkarın salıwshı boldı.

A.M. Lyapunov qozǵalıstıń ornıqlılıǵınıń qatań hám sonıń menen birge tábiǵıy anıqlamasın berdi. Onıń bul anıqlamasınıń sátli bolǵanı sonshellı, onı tiýkarǵı anıqlama retinde barlıq ilimpazlar qabıl etti. Ornıqlılıqtıń basqa túrleri Lyapunov mánisindegi ornıqlılıq penen baylanışlı yamasa oǵan alıp kelinedi.

Differenciallıq teńlemeler sistemasın qarayıq:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

bunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(t, x)$ vektor-funkciyası $t \geq t_0 \geq 0$, $x \in D$ oblastta úzliksiz hám x boyınsha Lipııc shártin qanaatlandıratuǵın bolsın.

Meyli $x = \varphi(t)$ funkciyası (1) sistemaniń $x|_{t=t_0} = \varphi(t_0)$, $t_0 \geq 0$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimi, al $x = x(t)$ usı sistemaniń basqa $x|_{t=t_0} = x(t_0)$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimi bolsın. Bul $\varphi(t)$ hám $x(t)$ sheshimlerdi barlıq $t \geq t_0$ ushın anıqlanǵan, yaǵnıy olardı ońǵa qaray sheksiz dawamlanǵan dep esaplaymız.

Анықлама. Егер кálegen $\varepsilon > 0$ хám $t \in (t_0; \infty)$ ushyn sonday $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sanı tabılıp, (1) sistemanıń hár qanday $x = x(t)$ sheshimi ushyn $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ teńsizliginen barlıq $t \geq t_0$ ushyn

$$\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$$

teńsizligi kelip shıqsa, onda usı sistemanıń $x = \varphi(t)$, $(t_0 \leq t < \infty)$ sheshimi $t \rightarrow +\infty$ da Lyapunov mánisinde ornıqlı dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $x = \varphi(t)$ sheshimge qálegen t_0 momentinde jetkilikli dárejede jaqın bolǵan $x(t)$ sheshimi $\varphi(t)$ sheshiminiń dógeresinde jasalǵan qálegen tar ε - tútiksheniń ishinde tolıǵı menen jaylassa, onda usı $x = \varphi(t)$ sheshim ornıqlı boladı.

Анықлама. Егер δ sanın t_0 baslanǵısh mánisinen ǵárezli emes etip, yaǵnıy $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ túrinde saylap alıw múmkin bolsa, onda $x = \varphi(t)$ sheshimi teń ólshewli ornıqlı dep ataladı.

Анықлама. Егер: 1) (1) sistemanıń $x = \varphi(t)$ $(a \leq t < \infty)$ sheshimi ornıqlı bolsa hám 2) qálegen $t_0 \in [a, \infty)$ ushyn sonday $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ bar bolıp, (1) sistemanıń $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_0$ shártin qanaatlandıratuǵın hár qanday $x = x(t)$ $(t_0 \leq t < \infty)$ sheshimi $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$ qásiyetine iye bolsa, onda usı sistemanıń $x = \varphi(t)$ $(a < t < \infty)$ sheshimi $t \rightarrow \infty$ da Lyapunov mánisinde asimptotikalıq túrde ornıqlı dep ataladı.

Мeyli $\{t, \varphi(t)\}$, $t \geq t_0$ (1) sistemanıń integrallıq iymek sızıǵı bolsın. Егер $\{t, x(t)\}$ integrallıq iymek sızıǵı t_0 momentinde dáslepkege jetkilikli dárejede jaqın bolıp, $t \rightarrow \infty$ da $\{t, \varphi(t)\}$ integrallıq iymek sızıǵına umtılsa, onda $x = \varphi(t)$ sheshim asimptotikalıq túrde ornıqlı boladı.

Анықлама. Егер bazıбір $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ ushyn qálegen $\delta > 0$ ushyn (1) sistemanıń sonday $x_\delta(t)$ sheshimi (eń keminde bir sheshimi) hám $t_1 = t_1(\delta)$ mánisi tabılıp, $\|x_\delta(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ teńsizligi orınlanganda $t \geq t_1$ ushyn $\|x_\delta(t) - \varphi(t)\| \geq \varepsilon$ teńsizligi orınlansa, onda usı sistemanıń $x = \varphi(t)$ $(a \leq t < \infty)$ sheshimi ornıqsız dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $t = t_0$ bolǵanda $(t_0, \varphi(t_0))$ tochkasına jetkilikli dárejede jaqın tochkadan ótetuǵın hám waqıttıń bazıбір $t = t_1$ momentinde $\{t; \varphi(t)\}$ integrallıq iymek sızıǵınıń dógeresine jasalǵan qálegeninshe tar ε - tútiksheden shıǵıp ketetuǵın $\{t, x_\delta(t)\}$, $t \geq t_0$ integrallıq iymek sızıǵı bar bolsa, onda $x = \varphi(t)$ sheshim ornıqsız boladı.

Endi (1) sistemanıń nollik emes $x = \varphi(t)$ sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesin usı sistema menen baylanıslı bolǵan bazıбір basqa sistemanıń nollik sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesine alıp keliw múmkin ekenin kórseteyik. Bul sistemanı alıw ushyn (1) sistemada $x = y + \varphi(t)$

dep esaplap, ózgeriwshilerdi almastıramız, bunda $y = y(t)$ - jańa izleniwshi funksiya. Sonda

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, x) - f(t, \varphi) \equiv f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$$

boladı. Solay etip, berilgen (1) sisteması

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y) \quad (2)$$

sistemasına ótedi, bunda $Y(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$, $Y(t, 0) = 0$, al, $x = \varphi(t)$ sheshim $y \equiv 0$ nollik (triviallıq) sheshimge ótedi. Bul sheshim $x(t_0) = 0$ nollik baslangısh shártlerge sáykes keledi.

Solay etip, (1) sistemanıń $x = \varphi(t)$ nollik emes sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesi (2) sistemanıń $y \equiv 0$ nollik sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesine alıp kelindi.

Biz tiykarınan barlıq $t \geq t_0$ ushın $f(t, 0) \equiv 0$ shártin qanaatlándıratuǵın (1) sistemanıń nollik sheshimin (teń salmaqlılıq awhalın) ornıqlılıqqa izertleymiz.

Nollik sheshiminiń ornıqlılıǵınıń, asimptotikalıq ornıqlılıǵınıń hám ornıqsızlıǵınıń anıqlamaları tómendegiden ibarat:

Oń jaǵı $f(t, x)$ funksiya $f(t, 0) \equiv 0$ shártin qanaatlándıratuǵın (1) sistemanı qarayıq, $x = x(t, x_0)$ usı sistemanıń (t_0, x_0) tochkası arqalı ótetuǵın sheshimi bolsın.

Anıqlama. Eger qálegen kishi $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanı bar bolıp, $\|x_0\| < \delta$ bolǵanda barlıq $t = t_0$ ushın $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ teńsizligi orınlansa, onda (1) sistemanıń $\varphi(t) \equiv 0$ nollik sheshimi Lyapunov mánisinde ornıqlı dep ataladı.

Anıqlama. Eger (1) sistemanıń $\varphi(t) \equiv 0$ nollik sheshimi ornıqlı bolsa hám sonday $\delta > 0$ bar bolıp, usı sistemanıń hár qanday $x(t, x_0)$ sheshimi ushın $\|x_0\| < \delta$ bolǵanda $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$ qatnası orınlı bolsa, onda bul $\varphi(t) \equiv 0$ nollik sheshim Lyapunov mánisinde asimptotikalıq túrde ornıqlı dep ataladı.

Anıqlama. Eger (1) sistemanıń $\varphi(t) \equiv 0$ nollik sheshimi ornıqlı bolmasa, onda ol ornıqsız dep ataladı.

Tekseriw ushın sorawlar

1. Koshi máselesi sheshiminiń Lyapunov mánisindegi ornıqlılıǵı degen ne?
2. Sheshimniń asimptotikalıq ornıqlılıǵı degen ne?
3. Ornıqsız sheshim degen ne?
4. Nollik sheshimniń ornıqlılıǵı, asimptotikalıq ornıqlılıǵı, ornıqsızlıǵı qalay anıqlanadı?

Meyli

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1)$$

birtekli sızıqlı sisteması berilsin, bunda $A(t)$ barlıq $t \geq t_0$ ushın anıqlanğan úzliksiz shegaralanğan matrica. Bul (1) sistemanıń sheshimleriniń ornıqlılıǵı yamasa ornıqsızlıǵı usı sistemanıń $X(t, t_0)$ fundamentallıq matricasınıń (matricantınıń) $t \rightarrow +\infty$ daǵı qásiyeti menen anıqlanadı. Tómendegi teorema ornılı.

Teorema. (1) sızıqlı sistemanıń sheshimleriniń:

1) *ornıqlı* bolıwı ushın onıń $X(t, t_0)$ fundamentallıq matricasınıń $t \geq t_0$ bolǵanda shegaralanğan bolıwı;

2) *asimptotikalıq ornıqlı* bolıwı ushın onıń matricantınıń, yaǵnıy $X(t, t_0)$ fundamentallıq matricasınıń $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t, t_0)\| = 0$ shártin qanaatlandırıwı;

3) *ornıqsız* bolıwı ushın usı matricanttıń shegaralanbağan bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

$X(t, t_0)$ matricanı $x(t_0)$ baslanǵısh mánisten gárezli bolmaǵanlıqtan, (1) sızıqlı sistemanıń barlıq sheshimleri bir waqıtta ya ornıqlı, ya ornıqsız boladı. Sonlıqtan (1) sistemanıń sheshimleriniń ornıqlı, asimptotikalıq ornıqlı yamasa ornıqsız bolıwına baylanıslı túrde bul sistemanı ádette ornıqlı, asimptotikalıq ornıqlı yamasa ornıqsız sistema dep ataydı.

Eger (1) sistemada $A(t) \equiv A$ turaqlı matrica bolsa, onda onıń sheshimleriniń ornıqlılıq shártleri A matricasınıń menshikli sanları menen anıqlanadı. Tómendegi teorema ornılı.

Teorema. Turaqlı koefficientli

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2)$$

sistemanıń sheshimleri sonda hám tek sonda ǵana:

1) *ornıqlı* boladı, eger A matricasınıń menshikli mánisleriniń haqıyqıy bólekleri oń bolmasa, yaǵnıy $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ bolsa, sonıń menen birge, nollik haqıyqıy bólekke iye menshikli sanǵa bir ólshemli Jordan kletkaları sáykes kelse, yaǵnıy bunday menshikli sanlar ápiwayı elementar bóliwshilerge iye bolsa;

2) *asimptotikalıq ornıqlı* boladı, eger A matricasınıń menshikli sanlarınıń haqıyqıy bólekleri teris bolsa, yaǵnıy $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ bolsa;

3) *ornıqsız* boladı, eger A matricasınıń haqıyqıy bólegi nolge teń bolǵan eń keminde bir menshikli sanına bir ólshemli emes Jordan kletkası sáykes kelse (bunday menshikli san ápiwayı

emes elementar bóliwshige iye) yamasa A matricasınıń eń keminde bir menshikli sanınıń haqıyqıy bólegi oń bolsa.

Meyli endi sıızqlı emes

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x) \quad (3)$$

túrindegi differenciallıq teńlemeler sisteması berilsin, bunda A - turaqlı matrica, $f(t, x)$ - t hám x boyınsha ($t \geq t_0$, $\|x\| \leq h$) úzliksiz funkciya, al $t \geq t_0$ boyınsha teń ólshewli túrde

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (4)$$

shártti qanaatlandıratuǵın bolsın.

Turaqlı koefficientli

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (5)$$

teńlemeler sisteması (3) sistema ushın birinshi juwıqlasıw sisteması dep ataladı.

Tómendegi teorema birinshi juwıqlasıw boyınsha ornıqlılıq kriteriyn beredi.

Teorema. Eger A matricasınıń barlıq menshikli sanlarınıń haqıyqıy bólekleri teris bolsa, al $f(t, x)$ funkciyası (4) teńlikti qanaatlandırırsa, onda (3) sistemalıń nollik sheshimi asimptotikalıq ornıqlı boladı. Eger A matricasınıń menshikli sanları ishinde haqıyqıy bólegi oń bolatuǵın eń keminde bir san bolsa, al $f(t, x)$ funkciyası (4) shártti qanaatlandırırsa, onda (3) sistemalıń nollik sheshimi ornıqsız boladı.

Eskertiw. Eger $f(t, x)$ funkciyası $f(t, 0) = 0$ hám $\frac{\partial f(t, 0)}{\partial x} = 0$ shártlerin qanaatlandırırsa, onda ol (4) shártin de qanaatlandıradı.

Eger A matricasınıń menshikli sanları ishinde eń keminde birewi nollik haqıyqıy bólekke iye bolıp, al qalǵanları teris haqıyqıy bóleklerge iye bolsa, onda (3) sistemalıń nollik sheshimi ornıqlı da (asimptotikalıq ornıqlı da), sonday-aq, ornıqsız da bolıwı múmkin, yaǵnıy bul jaǵdayda (5) túrindegi birinshi juwıqlasıw sistemasınıń ornıqlılıǵınan (3) sistemalıń nollik sheshiminiń ornıqlılıǵı haqqında juwmaq shıǵarıwǵa bolmaydı. Bul jaǵdayda qosımsha izertlewdi talap etedi.

Tekseriw ushın sorawlar

1. Sızqlı birtekli sistemalıń ornıqlılıq, asimptotikalıq ornıqlılıq hám ornıqsızlıq shártleri neden ibarat?

2. Turaqlı koefficientli sızıqlı birtekli sistemalıń nollık sheshiminiń ornıqlılıǵın (ornıqsızlıǵın) bul sistemalıń matricasınıń menshikli sanları arqalı qalay anıqlawǵa boladı?

3. Birinshi juwıqlasıw boyınsha ornıqlılıq kriteriyi neden ibarat?

Sızıqlı birtekli turaqlı koefficientli ekinshi tártipli avtonomiyalı

sistemalıń fazalıq tegisligi

1. Fazalıq tegislik
2. Eki teńlemeler sisteması ushın teń salmaqlıq awhallarınıń tipleri

Avtonomiyalı differenciallıq teńlemeler sisteması bolǵan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

sistemasın qaraymız, bunda $P(x, y)$ hám $Q(x, y)$ funkciyaları xOy tegisliktiń bazıbir oblastında yamasa pútkil tegislikte anqlanǵan, úzliksiz differenciallanıwshı funkciyalar. Gárezsiz ózgeriwshı t waqıt dep esaplanılǵan jaǵdaylarda (1) sistema *dinamikalıq sistema* dep, al koordinatalıq tegislik onıń *fazalıq tegisligi* dep ataladı.

(1) sistemada fazalıq iymek sızıqlardıń (traektoriyalardıń) úsh túri bolıwı múmkin: noqat, tuyıq iymek sızıq hám tuyıq emes iymek sızıq.

Traektoriyası (x_0, y_0) noqatı (teń salmaqlıq awhalı yamasa tınıshlıq noqatı) bolǵan sheshim turaqlı boladı: $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ barlıq $t \in \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ ushın. Tuyıq iymek sızıqtan ibarat traektoriya periodlı sheshimge sáykes keledi, al tuyıq emes iymek sızıqqa periodlı emes sheshim sáykes keledi.

L fazalıq iymek sızıqtaǵı *baǵıt* dep, $(x(t), y(t))$ fazalıq noqattıń L boyınsha t ózgeriwshiniń ósiw tárepine baǵıtlanǵan qozǵalıw baǵıt túsiniledi.

(1) dinamikalıq sistemalı sapalı izertlewdiń tiykarǵı máselesi fazalıq tegisliktiń traektoriyalarǵa bóliniwiniń sapalıq súwretin anıqlawdan ibarat.

(1) sistemalıń traektoriyalarınıń fazalıq tegisliktegi jaylasıwın anıqlaw ushın barlıq traektoriyalardıń emes, al tek olardıń ishindegi ayrıqsha delinetuǵın ayırımlarınıń: teń salmaqlıq awhallarınıń, sheklik cikllerdiń hám eń keminde bir yarım traektoriya bazıbir teń salmaqlıq awhalınıń separatrissası bolatuǵın tuyıq emes iymek sızıqlardıń jaylasıwların biliw kerek.

Eger tuyıq fazalıq iymek sızıqtıń pútinley sonday traektoriyalar menen toltırılǵan dógeregi bar bolıp, bul traektoriyalar boylap fazalıq noqat $t \rightarrow +\infty$ da yamasa $t \rightarrow -\infty$ da usı tuyıq iymek sızıqqa umtılatuǵın bolsa, onda bul tuyıq fazalıq iymek sızıq (1) sistemalıń *sheklik cikli* dep ataladı.

Biz (1) sistemanıń dara jaǵday bolǵan turaqlı koefficientli birtekli sıızıqlı eki ten'lemeler sistemasn qaraymız:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (2)$$

bunda $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Bul (2) sistemann' sheshimin $x = \gamma_1 e^{\lambda t}$, $y = \gamma_2 e^{\lambda t}$ túrinde izleybiz, bunda $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ – házirshe anq emes turaqlılar. Bundaǵı λ turaqlısın anqlaw ushın

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

xarakteristikalıq teńlemenı alamız, al γ_1 hám γ_2 turaqlı kóbeytiwshige deyingi dálilikte

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

sistemasınan anıqlanadı.

Tómendegi jaǵdaylardı qaraymız:

a) Xarakteristikalıq teńlemenıń λ_1 hám λ_2 korenleri haqıyqıy hám hár qıylı. Bul jaǵdayda (2) sistemanıń ulwıma sheshimi tómendegi túrge iye boladı:

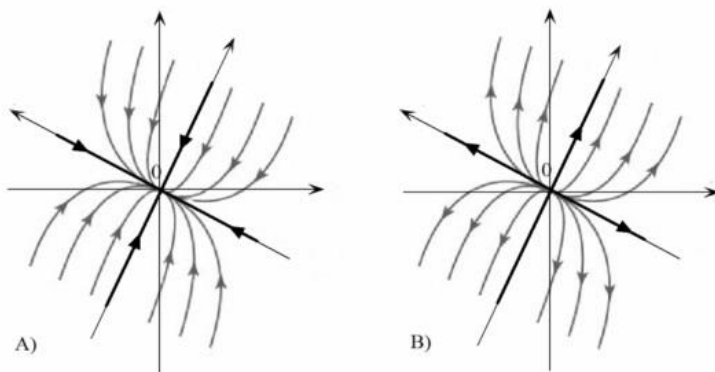
$$\begin{cases} x = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y = C_1 \alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad (5)$$

bunda $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – (4) sistemadan sáykes túrde $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$ bolǵanda anıqlanǵan turaqlılar, al C_1 hám C_2 – erikli turaqlılar.

1) Eger (3) xarakteristikalıq teńlemenıń λ_1 hám λ_2 korenleri haqıyqıy hám hár qıylı bolıp, olar birdey belgili bolsa, yaǵnıy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ bolsa, onda (2) sistemanıń $x = 0, y = 0$ teń salmaqlıq awhalı *túyin* dep ataladı.

Eger $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ bolsa, onda $x = 0, y = 0$ teń salmaqlıq awhalı asimptotikalıq ornıqlı boladı, sebebi (5) formulada $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ kóbeytiwshiler bar bolǵanlıqtan, $t = t_0$ baslanǵısh momentte koordinatalar basınıń qálegen δ -dógeresinde bolǵan traektorıyanıń barlıq noqatları t jetkilikli úlken bolǵanda da koordinatalar basınıń qálegeninshe kishi ε -dógeresinde jatatuǵın noqatlarǵa ótedi, al $t \rightarrow \infty$ da koordinatalar basına umtıladı.

Bul jag'dayda $x = 0, y = 0$ ten' salmaqlıq awhalı *ornıqlı túyin* delinedi. Strelkalar traektoriyalar boylap t óskendegi qozǵalıǵ baǵıtların kórsetedi.



A) ornıqlı túyin; B) ornıqsız túyin.

2) Meyli $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ bolsın. Bul jaǵday t n $-t$ ǵa almasıǵanda aldınǵı jaǵdayǵa ótedi. Demek, traektoriyalar aldınǵı jaǵdaydaǵıday túrge iye boladı, biraq ta, tek traektoriyalar boyınsha noqatlar qarama-qarsı baǵıtta qozǵaladı.

Kórinip turǵanıday, koordinatalar basına qálegeninshe jaqın noqatlar t nıń ósiwi menen koordinatalar basınıń ε -dógereginen uzaqlasadı. Qarastırılǵan tiptegi teń salmaqlıq awhalı *ornıqsız túyin* dep ataladı.

3) Eger $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ bolsa, onda teń salmaqlıq awhal jáne ornıqsız boladı, sebebi

$$x = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1 \alpha_2 e^{\lambda_1 t}$$

traektoriyalar boyınsha qozǵalıwshı noqat C_1 parametriniń qálegeninshe kishi mánislerinde t nıń ósiwi menen koordinatalar basınıń ε -dógereginen shıǵıp ketedi.

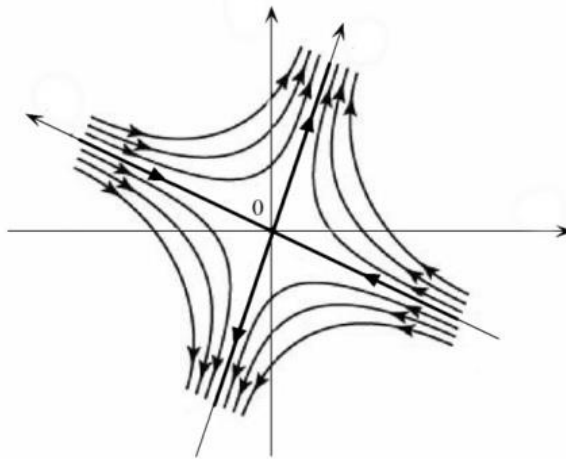
Qarastırıp atırǵan jaǵdayda koordinatalar basına jaqınlasıwshı qozǵalıstı bar, atap aytqanda:

$$x = C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y = C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

$\lambda_2 < 0$ bolǵanlıqtan, koordinatalar basına jaqınlasadı.

Sonıń menen birge, C_2 parametriniń hár qıylı mánislerinde birdey $y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x$ tuwrısı boyınsha hár qıylı qozǵalıslar alamız. t óskende bul tuwrıdaǵı noqatlar koordinatalar basına qaraǵan baǵıt boyınsha qozǵaladı.

Al, $y = \frac{a_2}{a_1} x$ tuwrısı boyınsha traektoriya noqatlar t nıń ósiwi menen koordinatalar basınan uzaqlasıp qozǵaladı. Eger de $C_1 \neq 0$ hám $C_2 \neq 0$ bolsa, onda $t \rightarrow \infty$ da hám sonday-aq, $t \rightarrow -\infty$ da traektoriya teń salmaqlıq awhalı dógereginen shıǵıp ketedi. Qarastırıp atırǵan tipte, atap aytqanda, λ_1 hám λ_2 korenler haqıyqıy hám hár qıylı bolıp, hár qıylı belgili bolǵanda, yaǵnıy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ bolǵanda $x = 0$, $y = 0$ teń salmaqlıq awhalı *er* dep ataladı.



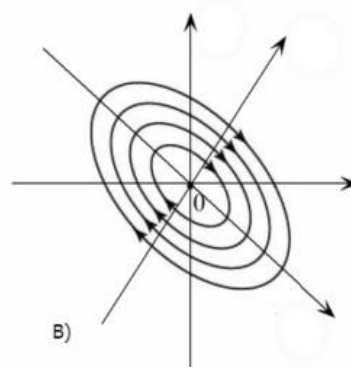
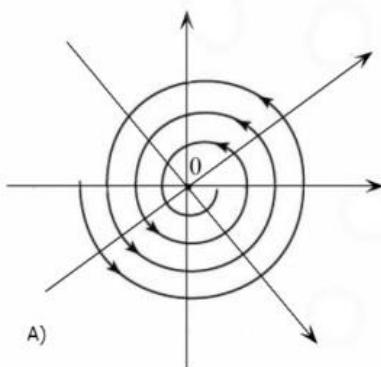
Er

b) Meyli (3) xarakteristikalıq teńlemenıń korenleri kompleks, yaǵnıy $\lambda_{1,2} = p \pm qi$, $q \neq 0$ bolsın. Bul jaǵdayda qarastırıp atırǵan (2) sistemanıń ulıwma sheshimin

$$\begin{aligned} x &= e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt}(C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt) \end{aligned} \quad (6)$$

túrinde kórsetiwge boladı, bunda C_1 hám C_2 – erikli turaqlılar, al C_1^* hám C_2^* – us turaqlılardıń bazıbir sıızılıq kombinacijaları. Bunda tómendegi jaǵdaylar bolıw múmkin:

1) $\lambda_{1,2} = p + qi$, $p < 0$, $q \neq 0$. Bul jaǵdayda waqıt t ósiwi menen e^{pt} kóbeytiwshisi nolge umtıladı, al (6) ten'liklerdegi ekinshi periodlı kóbeytiwshi shegaralangán bolıp qaladı. Egerde $p = 0$ bolsa, onda (6) ten'likleriniń óń jaǵındaǵı ekinshi kóbeytiwshiniń periodlı bolıwına baylanlı traektoriyalar $x = 0$, $y = 0$ teń salmaqlıq awhalın qorshaytuǵın tuyıq iymek sıızıqlar boladı. Al, t ózgeriwshiniń ósiwi menen nolge umtılatuǵın e^{pt} ($p < 0$) kóbeytiwshiniń bar bolıw tuyıq iymek sıızıqlardı spirallarǵa aylandıradı, bul spirallar $t \rightarrow \infty$ da koordinatalar basına asimptotikalıq túrde jaqınlasadı, sonıń menen birge, $t = t_0$ bolǵanda koordinatalar basınıń qálegen δ -dógeresinde turǵan noqatlar t jetkilikli úlken bolǵanda da teń salmaqlıq awhalınıń berilgen ε -dógeresine tiyisli boladı. Demek, teń salmaqlıq awhalı asimptotikalıq ornıqlı hám *ornıqlı fokus* dep ataladı. Fokus túyinnen sonıń menen ayrıladı, traektoriyalarǵa júrgizilgen urınbalar urınıw noqatı teń salmaqlıq awhalına jaqınlasqanda belgili bir shekke umtılmaydı.



A) ornıqlı fokus; B) oray.

2) $\lambda_{1,2} = -p \pm qi, p > 0, q \neq 0$. Bul jaǵday t n $-t$ ǵa almasıǵanda aldınǵı jaǵdayǵa ótedi. Demek, traektoriyalar aldınǵı jaǵdaydan ózgeshelenbeydi, biraq olar boyınsha qozǵalı t óskende keri baǵıtta boladı. $t = t_0$ baslanǵısh momentte koordinatalar basına qálegeninshe jaqın jaylasqan noqatlar ósiwshi e^{pt} ($p > 0$) kóbeytiwshi bar bolǵanlıqtan, t nıń ósiwi menen koordinatalar basınıń ε -dógereginen uzaqlasadı. Bul jaǵdayda teń salmaqlıq awhalı ornıqsız hám ol *ornıqsız fokus* dep ataladı.

3) $\lambda_{1,2} = \pm qi, p = 0, q \neq 0$. Sheshimniń periodlıǵına baylanıslı bul jaǵdayda traektoriyalar teń salmaqlıq awhalın óz ishine alatuǵın tuyıq iymek sıızıqlar boladı. Bul jaǵdayda teń salmaqlıq awhalın *oray* dep ataydı. Oray ornıqlı tınıshlıq noqat (teń salmaqlıq awhalı) boladı, sebebi qálegen berilgen $\varepsilon > 0$ ushın sonday $\delta > 0$ sanın tańlap alıw múmkin, noqatlar koordinatalar basınıń δ -dógereginde jatqan tuyıq traektoriyalar yamasa C_1 hám C_2 shamaların sonday kishi etip tańlap alıw múmkin, mına

$$\begin{cases} x = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt, \\ y = C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt \end{cases}$$

sheshimler $x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2$ teńsizligin qanaatlandıradı. Biraq, bul jaǵdayda asimptotikalıq ornıqlılıq bolmaydı, sebebi $x(t)$ hám $y(t)$ funkciyalar $t \rightarrow \infty$ da 0 ge umtılmaydı.

c) Meyli (3) xarakteristikalıq teńleme korenleri eseli korenler bolsın: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

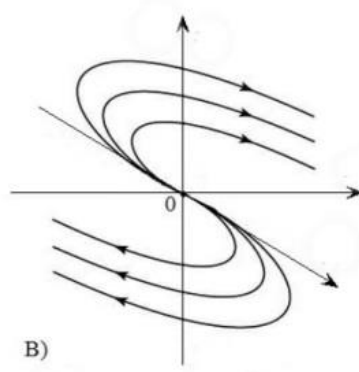
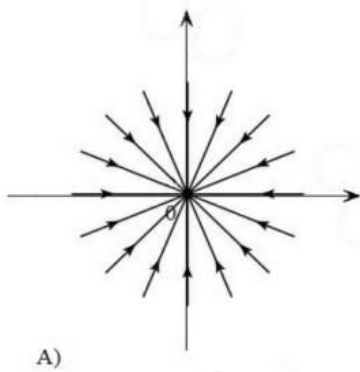
1) Dáslep $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ bolǵan jaǵdaydı qarayıq.

Ulıwma sheshim eseli korenler bolǵan jaǵdayda

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t}(C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 t), \\ y(t) = e^{\lambda t}(C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 t) \end{cases}$$

túrine iye boladı. Sonıń menen birge, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ bolıwı da múmkin, bul jaǵdayda α_1 hám α_2 erikli turaqlılar boladı. Al, $t \rightarrow \infty$ da tez nolge umtılatuǵın $e^{\lambda t}$ kóbeytiwshi bolǵanlıqtan, $e^{\lambda t}(C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 t)$ kóbeymesi $t \rightarrow \infty$ da nolge umtıladı, sonıń menen birge, t jetkilikli úlken bolǵanda da koordinatalar basınıń qálegen δ -dógereginiń noqatlar koordinataları basınıń berilgen ε -dógereginen tiyisli boladı hám demek, tınıshlıq noqat asimptotikalıq ornıqlı. Bul *ornıqlı túyin* boladı.

Eger $\beta_1 = \beta_2 = 0$ bolsa, onda jáne ornıqlı túyinge iye bolamız. Bul jaǵdayda teń salmaqlıq awhalı *dikritikalıq túyin* dep ataladı.



A) dikritikalıq túyin; B) ornıqsız túyin.

2) Eger $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ bolsa, onda t n $-t$ ğa almasırap, aldınğı jaǵdayǵa kelinedi, demek, traektoriyalar aldınğı jaǵdaydıń traektoriyalarınan parıqlanbaydı. Bul jaǵdayda tınıshlıq noqat *ornıqsız túyin* delinedi.

Solay etip, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ bolǵandaǵı barlıq múmkin bolǵan jaǵdaylar qarastırıldı.

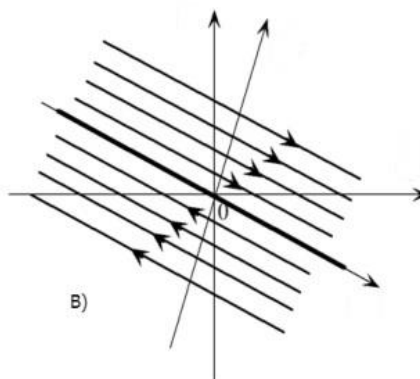
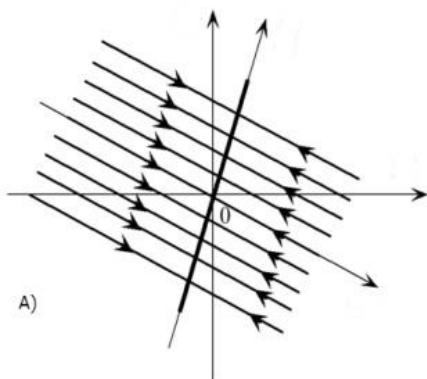
Endi $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ bolǵan jaǵdaydı qaraymız. Sonda xarakteristikalıq teńleme

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

túrine iye bolıp, $\lambda_1 = 0$ korengi iye boladı. Meyli bunda $\lambda_2 \neq 0$ bolsın. Sonda ulıwma sheshim

$$\begin{cases} x = C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y = C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

túrine iye boladı. Bul teńliklerden t nı shıǵarıp taslap, $\beta_1(y - C_1 \alpha_2) = \beta_2(x - C_2 \alpha_1)$ parallel tuwrılar toparna iye bolamz. Bunda $C_2 = 0$ bolsa, $a_1 y = a_2 x$ tuwrısında jaylasqan tınıshlıq noqatlardıń (teń salmaqlıq awhallarınıń) bir parametrli toparın alamız. Eger $\lambda_2 < 0$ bolsa, onda $t \rightarrow \infty$ da hár bir traektoriyada noqatlar usı traektoriyada jatatuǵın $x = C_1 \alpha_1$, $y = C_1 \alpha_2$ tınıshlıq noqatına jaqınlasadı. $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ tınıshlıq noqatı ornıqlı, biraq asimptotikalıq ornıqlı bolmaydı.



A) ornıqlı tınıshlıq noqatlarınıń tuwrısı ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$); B) ornıqsız tınıshlıq noqatlarınıń tuwrısı ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$).

Egerde $\lambda_2 > 0$ bolsa, onda traektoriyalar aldınǵı jaǵdaydaǵıday bolıp jaylasadı da, biraq traektoriyalardaǵı noqatlar qozǵalısqarama-qarsı baǵıtta boladı. Bul jaǵdayda $x \equiv 0, y \equiv 0$ tınıshlıq noqatı ornıqsız boladı.

Egerde $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bolsa, onda tómendegi eki jaǵday bolıwı múmkin:

1) (2) sistemasnıń ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = C_1, \\ y = C_2 \end{cases}$$

túrine iye. Bul jaǵdayda barlıq noqatlar tınıshlıq noqatlar boladı, barlıq sheshimler ornıqlı.

2) Ulıwma sheshim tómendegi túrge iye:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 t, \\ y = C_1^* + C_2^* t, \end{cases}$$

bunda C_1^* hám C_2^* turaqlılar C_1 hám C_2 erikli turaqlılarnıń sızıqlı kombinaciyası. Bul jaǵdayda $x \equiv 0, y \equiv 0$ tınıshlıq noqatı ornıqsız.

17-lekciya. Ekinshi tártipli sızıqlı differenciaylıq teńlemenı ģpiwayı koriniske keltiriw. Shegaralıq máseleler. Ekinshi tártipli DT-lerdi dárejeli qatarlar járdeminde integrallaw

Reje:

1. Ekinshi tártipli sızıqlı differenciaylıq teńlemenı ģpiwayı koriniske keltiriw.
2. Shegaralıq máseleler. Grin funkciyası
3. Grin funkciyasınıń bar bolıwı hám birden-birligi haqqında
4. Menshikli mǎnisler hám menshikli funksiyalar túsinigi
5. Ekinshi tártipli DT-lerdi dárejeli qatarlar járdeminde sheshiw
6. Uliwmalasqan dárejeli qatarlar

Tayanish sōzler: Ekinshi tārtpili sızıqlı differenciyaallıq teñleme. Shegaralıq shārtler. Shegaralıq másele. Grin funkciyası. Menshikli mánisler hām menshikli funksiyalar túsiniǵı. Dārejeli qatarlar. Uliwmalasqan dārejeli qatarlar

Biz differenciyaallıq teñlemeler ushin Koshi máselesin úyrendik. Ápiwayı qılıp aytqanda, Koshi máselesi berilgen tochkadan ótetuǵın integrallıq iymek siziqtı izlewden ibarat edi. Eger integrallıq iymek siziqtıń berilgen eki tochkadan otiwi talap etilse, bul másele Koshi máselesinen pariqlılıp, berilgen eki tochkaniń hár biri ushin ayırım alıńǵan Koshi máselesi sheshimge iye bolsa da, bul qoyılǵan másele sheshimge iye bolmawı múmkin,

Birinshi tārtpili differenciyaallıq teñleme ushin másele

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

túrinde jazılıwı múmkin.

Ekinshi tārtpili sızıqlı teñleme bolǵan

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t) \quad (1)$$

teñlemenı qarayıq.

Meyli $a(t), b(t), c(t)$ hām $f(t)$ funkciyalari bazibir $t_0 \leq t \leq t_1$ kesindide aniqlanǵan hām úzliksiz bolsın. Usı (1) teñlemenıń

$$\begin{aligned} \alpha_0 \dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) &= A, \\ \beta_0 \dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) &= B \end{aligned} \quad (2)$$

shārtlerin qanaatlantıratıuǵın $x(t)$ sheshimin izleymiz, bunda $\alpha_0, \alpha_1, A, \beta_0, \beta_1$ - turaqlılar.

Bul (2) shārtler shegaralıq yamasa shetki shārtler dep, al, (1), (2) máselesiniń ózi shegaralıq másele dep ataladı.

(1), (2) shegaralıq másele ushin tómendegi úsh múmkinshiliktiń birewi orınli bolıwı múmkin: shegaralıq másele birden-bir sheshimge iye, sheshimlerdiń sheksiz kópligine iye, ulıwma sheshimge iye emes.

(1), (2) shegaralıq másele sheshiw ushin dáslep (1) differenciyaallıq teñlemenıń ulıwma sheshimin tabamız. Keyin tabılǵan ulıwma sheshimdi berilgen (2) shegaralıq shārtlerge qoyıp, ulıwma sheshimdegı C_1, C_2 erikli turaqlılarına qarata algebralıq teñlemeler sistemasına iye bolamız. Eger bul sistema bir mánisli sheshiletuǵın bolsa, onı sheship, C_1, C_2 erikli turaqlılardıń tabılǵan mánislerin ulıwma sheshimge qoyıp, berilgen shegaralıq másele sheshimine iye bolamız.

Misal. Mina

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (3)$$

differenciyaallıq teñleme ushin shegaralıq shārtleri

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1, \quad (4)$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = 1, \quad (5)$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = 0, \quad (6)$$

bolgan ush shegaraliq maseleni qaraymiz.

Berilgen (3) tenlemenin uliwma sheshimi

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad (7)$$

boladi. (3), (4) shegaraliq masale birden-bir sheshimge iye, sebebi (7) formuladan (4) shartlerge muwapiq,

$$C_1 = -\frac{1}{\sin 1}, \quad C_2 = 0$$

manislerin alamiz. Bul manislerdi (7) formulagaa qoysaq, onda $x(t) = -\frac{1}{\sin 1} \cos t$ sheshimge iye bolamiz.

(3), (5) shegaraliqmasale sheshimge iye emes, sebebi (7) formuladan (5) shartlerge muwapiq,

$$1 = -C_1 \sin \pi = 0$$

kelip shigadi, al bul mumkin emes.

(3), (6) shegaraniin masale sheksiz kop sheshimlerge iye: $x = C_1 \cos t$, bunda C_1 - qalagen turaqli.

Shegaraliq maseleni Grin funkciyasi jardeminde sheshiw. Mina

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t) \quad (8)$$

tenleme ushin

$$\begin{aligned} \alpha_0 \dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) &= A, & \alpha_0^2 + \alpha_1^2 &> 0 \\ \beta_0 \dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) &= B, & \beta_0^2 + \beta_1^2 &> 0 \end{aligned} \quad (9)$$

shegaraliq shartlerdi qanaatlantiratuvin shegaraliq maseleni qarayiq.

Bul (8), (9) shegaraliq masale birden-bir sheshimge iye dep uygarayiq.

Meyli $x = x_1(t)$ funkciyasi

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0 \quad (10)$$

tenlemenin (9) shegaraliq shartlerdin birinshisin qanaatlandiratuvin, yagniy $\alpha_0 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0) = 0$ bolatuvin trivialliq emes sheshimi, al $x = x_2(t)$ funkciyasi usi (10)

teńlemenin ekinshi shegaraliq shártti qanaatlandiratuǵın, yaǵniy $\beta_0 \dot{x}_2(t_1) + \beta_1 x_2(t_1) = 0$ bolatuǵın trivialliq emes sheshimi bolsın.

Sonda $x_1(t)$ ekinshi shegaraliq shártti qanaatlandirmaydı, sebebi keri jaǵdayda qálegen C turaqlıda $x = Cx_1(t)$ funkciyasi (9), (10) shegaraliq máseleńin sheshimleri bolar edi hám biziń (8), (9) shegaraliq máselemiz sheksiz kóp sheshimlerge iye bolar edi. Dál usınday etip, $x_2(t)$ sheshimniń birinshi shegaraliq shártti qanaatlandirmaytuǵını dálillendi. Solay etip,

$$\beta_0 \dot{x}_1(t_1) + \beta_1 x_1(t_1) \neq 0 \quad (11)$$

$$\alpha_0 \dot{x}_2(t_0) + \alpha_1 x_2(t_0) \neq 0$$

Bul dúzilgen $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ sheshimler siziqli ǵárezsiz, sebebi keri jaǵdayda olar proporcional bolar edi hám birdey shegaraliq shártlerdi qanaatlandırar edi, al bul múmkin emes.

(8), (9) shegaraliq máseleńin Grin funkciyasi dep, $t \in [a, b]$, $s \in (a, b)$ bolǵanda aniqlanǵan hám hár bir fiksirlengen $s \in (a, b)$ ushin tómendegi shártlerdi qanaatlandiratuǵın $G(t, s)$ funkciyasına aytiladi:

- 1) $t \neq s$ bolǵanda $G(t, s)$ funkciyasi (10) teńlemenin qanaatlandıradi;
- 2) $t = t_1$ hám $t = t_2$ bolǵanda $G(t, s)$ funkciyasi (9) shegaraliq shártlerdi qanaatlandıradi;
- 3) $t = s$ bolǵanda $G(t, s)$ funkciyasi t boyınsha úzliksiz, al onıń tuwindisi t boyınsha sekiriwi $\frac{1}{a(t)}$ ǵa teń bolǵan birinshi tekli úziliske iye:

$$\begin{aligned} G(s+0, s) &= G(s-0, s), \\ G'_t(s+0, s) - G'_t(s-0, s) &= \frac{1}{a(s)} \end{aligned} \quad (12)$$

Bul (8), (9) shegaraliq máseleńin Grin funkciyasın dúziw ushin (10) teńlemenin nóldeń ózgeshe bolǵan eki $x_1(t)$ hám $x_2(t)$ sheshimlerin tabamız, olardıń birinshisin, al ekinshisin usı shártlerdiń ekinshisin qanaatlandiratuǵın bolsın.

Eger $x_1(t)$ bir waqıtta (9) shegaraliq shártlerdiń ekewin qanaatlandirmasa onda $G(t, s)$ grin funkciyasi bar boladı hám onı tómendegi túrde izlewge boladı:

$$G(t, s) = \begin{cases} \varphi(s)x_1(t), & t_0 \leq t \leq s, \\ \varphi(s)x_2(t), & s \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (13)$$

bunda $\varphi(s)$ hám $\varphi(s)$ funkciyalari (13) funkciyasi (12) shártleri qanaatlantiratuǵınday etip, yaǵniy

$$\begin{cases} \varphi(s)x_2(s) = \varphi(s)x_1(s), \\ \varphi(s)x_2'(s) - \varphi(s)x_1'(s) = \frac{1}{a(s)} \end{cases}$$

bolatuǵınday etip saylap alinadi. Eger $G(t,s)$ Grin funkciyasi tabilsa, onda (8), (9) shegaralıq máselesiniń sheshimi

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t,s) f(s) ds$$

formulasi menen ańlatiladi.

Birinshi tártipten joqari tártipli ózgermeli koefficientli siziqli differencialliq teńlemenin sheshimleri báhá elementar funkciyalarda ańlatila bermeydi hám bunday teńlemenin integrallaw kvadratarǵa da siyrek alıp kelinedi.

Bunday teńlemelerdi integrallawdıń eń kóp tarqalǵan usili izlengen sheshimdi dárejeli qatar túrinde kórsetiw bolıp tabiladi.

Ekinshi tártipli teńleme bolǵan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

teńlemesin qarayıq.

Meyli (1) teńlemenin $p(x)$ hám $q(x)$ koefficientleri $|x - x_0| < a$ intervalda analitikaliq funkciyalar bolsin, yaǵniy $|x - x_0| < a$ bolǵanda jiynaqlı bolǵan dárejeli qatarlarǵa jayılatuǵın bolsin:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \quad (2)$$

Teorema. Eger $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyalari $|x - x_0| < a$ bolǵanda analitikaliq funkciyalar bolsa, onda (1) teńlemesiniń hár qanday $y = y(x)$ sheshimi $|x - x_0| < a$ bolǵanda analitikaliq funkciya boladı, yaǵniy $|x - x_0| < a$ bolǵanda jiynaqlı bolatuǵın dárejeli qatarǵa jayiladi:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

Bul teorema (1) teńlemenin integrallawǵa yaǵniy onıń sheshimin dárejeli qatar kórinisinde dúziwge múmkinshilik beredi. Bunday dúziwdıń algoritmi tómendegiden ibarat. A'piwayiliq ushin $x_0 = 0$ dep esaplaymız. (1) teńlemenin sheshimin x tiń dárejeleri boyınsha jayılǵan aniq emes koefficientli qatar túrinde izleymiz:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (3)$$

bunda c_k , $k=0,1,2,\dots$ - aniq emes koefficientler. (3) qatardi (1) teńlemege qoyip,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

teńligin alamiz.

Bul teńlikti $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots$ dárejeleri aldındaǵı koefficientlerdi nolge teńlestirip, belgisiz $c_0, c_1, c_2, \dots$ koefficientlerin anıqlaw ushin rekurrentlik teńlemeler sistemasin alamiz:

$$q_0 c_0 + p_0 c_1 + 1 \cdot 2 c_2 = 0$$

$$q_1 c_0 + (q_0 + p_1) c_1 + 2 p_0 c_2 + 2 \cdot 3 c_3 = 0$$

.....

$$\sum_{i=1}^k [q_{k-i} c_i + (i+1) p_{k-i} c_{i+1}] + (k+1)(k+2) c_{k+2} = 0 \quad (4)$$

.....

bundaǵı c_0 hám c_1 koefficientlerin erkin aliwǵa boladi. c_0 hám c_1 di belgilep, (1) teńlemenin $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$, baslangısh shártlerin qanaatlandıratúǵın sheshimin izleybiz. Birinshi teńlemeden c_2 , ekinshi teńlemeden c_3 ti tabamiz hám t.b.

Eger (1) teńlemede $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyalari racional funkciyalar bolsa, yaǵniy

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad q(x) = \frac{q_1(x)}{q_0(x)},$$

bolip, $p_0(x), p_1(x), q_0(x), q_1(x)$ - kopaǵzalilar bolsa, onda $p_0(x) = 0$ yamasa $q_0(x) = 0$ bolatúǵın tochkalar (1) teńlemenin ayırıqsha tochkalari dep ataladi.

Ekinshi tártipli

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (5)$$

teńlemesi ushin $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyalari $|x| < a$ aralıqta analitikaliq funkciyalar bolǵanda $x=0$ tochkasi ayırıqsha točka boladi, eger $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyalarin dárejeli qatarǵa jayǵandaǵı p_0 yamasa q_0 koefficientleriniń birewi nolden ózgeshe bolsa. Bul regulıarlıq ayırıqsha točka (yamasa birinshi tekli ayırıqsha točka) dep atalatúǵın eń ápiwayı ayırıqsha tochkaniń misali boladi.

$x = x_0$ ayırıqsha tochkaniń dógeresinde dárejeli qatar kórinisindegi sheshim bar bolmawi múmkin. Bul jaǵdayda sheshimdi uliwmalasqan dárejeli qatar túrinde izlew kerek:

$$y = (x - x_0)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (6)$$

bunda λ hám $c_0, c_1, c_2, \dots, c_0 \neq c$ aniqlawı tiyis.

(5) teńlemenı $x > 0$ bolǵanda qaraymız. Bul teńlemege (6) ańlatpasın $x_0 = 0$ bolǵanda qoyıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} & [\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0]c_0 + \{[\lambda(\lambda + 1) + p_0(\lambda + 1) + q_0]c_1 + (\lambda p_0 + q_0)c_0\}x + \dots \\ & + \{[(\lambda + k)(\lambda + k - 1) + \dots + p_0(\lambda + k) + q_0]c_k + \dots + (\lambda p_0 + q_0)c_0\}x^k + \dots = 0 \end{aligned}$$

Bundaǵı x tiń dárejeleri aldındaǵı koefficientlerdi nolge teńlestirip, rekurrentlik teńlemeler sistemasın alamız:

$$\begin{aligned} f_0(\lambda)c_0 &= 0 \\ f_0(\lambda + 1)c_1 + f_1(\lambda)c_0 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_0(\lambda + 1)c_k + f_1(\lambda + k - 1)c_{k-1} + f_2(\lambda + k - 2)c_{k-2} + \dots + f_k(\lambda)c_0 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (7)$$

Bunda

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0, \\ f_m(\lambda) &= \lambda p_m + q_m, m \geq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Al, $c_0 \neq 0$ bolǵanlıqtan λ aniqlawshı teńleme dep atalatuǵın

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \quad (9)$$

teńlemenı qanaatlandırıwı tiyis.

Meyli λ_1, λ_2 - usı teńlemenıń korenleri bolsın. Eger $\lambda_1 - \lambda_2$ ayırması pútın san bolmasa, onda $f_0(\lambda_1 + k) \neq 0$, $f_0(\lambda_2 + k) \neq 0$, barlıq $k > 0$ pútın sanı ushin, demek, kórsetilgen metod penen (1) teńlemenıń eki sızıqlı ġarezsız dara sheshimin dúziwge boladı:

$$y_1 = x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \quad \text{hám} \quad y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k$$

Egerde $\lambda_1 - \lambda_2$ ayırması pútın san bolsa, onda joqarıda kórsetilgen usıl menen ulıwmalasqan qatar túrinde bir $y_1(x)$ sheshimdi dúziwge boladı. Bul sheshimdi bile otirip, Liuvill – Ostrogradskiy formulasi járdeminde $y_1(x)$ penen sızıqlı ġarezsız bolatuǵın ekinshi sheshimdi tabıw múmkin.

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

Bul formuladan $y_2(x)$ sheshimdi $y_2(x) = Ay_1(x) \ln x + x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ túrinde izlew múmkin ekenligi kelip shıǵadı.

18-lekciya. Dara tuwındılı birinshi tártipli sıızıqlı teńleme hám onıń ulıwma sheshimi. Dara tuwındılı kvazısızıqlı birinshi tártipli DT-ler

Reje:

1. Tiykargı túsınıklar hám anıqlamalar.
2. Dara tuwındılı birinshi tártipli sıızıqlı teńleme
3. Ulıwma sheshim.
4. Dara tuwındılı kvazısızıqlı birinshi tártipli differenciallıq teńleme
5. Xarakteristikalar hám integrallıq betlikler.
6. Koshi máselesi sheshiminiń bar-bolıwı hám birden birliği haqqındaǵı Koshi-Kovalevskaya teoreması

Tayanış sózler: *Dara tuwındılı differensiallıq teńleme. Tártibi. Birinshi tártipli sıızıqlı teńleme. Sheshim. Koshi máselesi. Ulıwma sheshim. Kvazısızıqlı teńleme. Xarakteristikalar. Integrallıq betlik. Koshi-Kovalevskaya teoreması*

Bir neshe ǵárezsiz ózgeriwshilerdi, olardıń belgisiz funkciyasın hám onıń dara tuwındıların baylanıstıratuǵın teńleme dara tuwındılı differenciallıq teńleme dep ataladı. Teńlemedegi eń joqarı tártipli tuwındınıń tártibi teńlemenıń tártibi delinedi. Eki ózgeriwshili $z = z(x, y)$ funkciyası jaǵdayında bunday teńlemenıń ulıwma túri tómendegishe jazıladı:

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots) = 0.$$

Al, $x_1, x_2, \dots, x_n$ túrindegi n ǵárezsiz ózgeriwshili dara tuwındılı teńlemenı

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}, \dots) = 0 \quad (1)$$

túrinde jazıw múmkin, bunda F - óz argumentleriniń berilgen funkciyası.

(1) teńlemenin sheshimi dep, $x_1, x_2, \dots, x_n$ lerdin bazıbir ózgeriw oblastında teńlemege kirgen óziniń tuwındıları menen anıqlanǵan hám teńlemenı birdeylikke aylandıratuǵın hár qanday $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyasına ayıladı. Al,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \quad (2)$$

kórinisindegi teńleme birinshi tártipli n ózgeriwshili dara tuwındılı teńleme boladı.

(2) dara tuwındılı differenciallıq teńleme ushın Koshi máselesi tómendegishe qoyıladı: Ğárezsiz ózgeriwshilerdin birewiniń belgilengen mánisinde, máselen $x_n = x_n^{(0)}$ bolǵanda berilgen úzliksiz differenciallanatuǵın funkciyaǵa aynalatuǵın, yaǵnıy $x_n = x_n^{(0)}$ bolǵanda

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (3)$$

bolatuǵın (2) teńlemenin

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

sheshimin tabıw talap etiledi. (3) shártler (4) sheshimnin baslanǵısh shártleri delinedi.

Meyli eki ğárezsiz ózgeriwshili birinshi tártipli teńleme berilsin:

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0. \quad (5)$$

Bul teńlemenin $z = z(x, y)$ sheshimine (x, y, z) keńisliginde bazıbir betlik sáykes keledi. Bul betlik (5) teńlemenin integrallıq betligi dep ataladı. (5) teńleme ushın Koshi máselesi $x = x_0$ bolǵanda berilgen

$$z = z(x_0, y) = \varphi(y) \quad (6)$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın

$$z = z(x, y) \quad (7)$$

sheshimin tabıwdan ibarat, yaǵnıy $x = x_0$ tegisliginde jatıwshı berilgen (6) iymek sızıǵı arqalı ótiwshi (7) integrallıq betlik izlenedi.

(6) baslanǵısh shártlerdi ózgerte otırıp, biz bir ıqtıyarlı funkciyadan ğárezli sheshimler kópligine iye bolamız.

Joqarı tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler sisteması ushın sheshimnin bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teoremanı saykes funkciyalardin hám baslanǵısh shártlerdin analitikalıq bolıwı shártlerinde dálillegen S.V. Kovalevskaya boldı.

Eger (2) teńlemede belgisiz funkciyalardin dara tuwındıları sızıqlı túrde qatnassa, onda bunday teńleme sızıqlı teńleme delinedi. Ol tómendegishe jazıladı:

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u), \quad (8)$$

bunda $X_1, X_2, \dots, X_n, R$ - berilgen funksiylar. Teńlemenin on jaǵı R birdeylik túrde nolge teń, al $X_1, X_2, \dots, X_n$ koefficientleri u ózgeriwshisine ǵárezli bolmaǵanda (8) sıızıqlı teńleme

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (9)$$

túrine iye boladı hám ol birtekli sıızıqlı teńleme dep ataladı. Keri jaǵdayda, ol birtekli emes sıızıqlı teńleme delinedi.

Simmetriyalıq formadaǵı

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} \quad (10)$$

ápiwayı differenciallıq teńlemeler sisteması (9) birtekli sıızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemege sáykes keliwshi sistema delinedi.

Teorema. Eger $\psi(x_1, \dots, x_n)$ funksiya (10) sistemasınıń úzliksiz differenciallanatuǵın integralı bolsa, onda $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ funksiya (9) teńlemenin sheshimi boladı.

Teorema. Eger $u = u_1(x_1, \dots, x_n) \neq \text{const}$ (9) teńlemenin sheshimi bolsa, onda $u_1(x_1, \dots, x_n)$ funksiya (10) sistemasınıń integralı boladı.

Haqıyqatında da, birinshi tastıyıqlaw simmetriyalı formadaǵı ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasınıń integralınıń anıqlamasınan kelip shıǵadı. Al, ekinshi tastıyıqlawdıń orınlı ekeni de ap-anıq derlik. Xaqıyqatında da, $u_1(x_1, \dots, x_n)$ funksiyanıń tolıq differencialı (10) sistemaǵa muwapıq, birdeylik túrde nolge teń ekenin dálillew kerek, yaǵnıy

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} X_1(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} X_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} X_n(x_1, \dots, x_n) \equiv 0. \quad (11)$$

Bul $u = u_1(x_1, \dots, x_n)$ funksiyanıń (9) teńlemenin sheshimi ekeninen kelip shıǵadı.

Demek, bul teoremadan (9) teńlemenin hám (10) sistemasını integrallaw máseleleriniń ekvivalent ekeni kelip shıǵadı.

Berilgen shártlerde (10) sistema dál $n-1$ ǵárezsiz integrallarǵa iye boladı:

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n), \psi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n). \quad (12)$$

Bul integrallar $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ baslanǵısh tochkanın bazıbir dógeriginde anıqlanǵan hám úzliksiz differenciallanatuǵın funksiylar boladı. Al, (12) integrallarınıń qálegen úzliksiz differenciallanatuǵın

$$u = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \quad (13)$$

funkciyası da usı (10) sistemanıń integralı boladı hám demek, ol (9) dara tuwındılı teńlemenıń sheshimi boladı. (13) sheshim (9) teńlemenıń ulıwma sheshimi dep ataladı, bunda F - óziniń argumentleriniń qálegen úzliksiz differenciallanıwshı funkciyası.

Eki gárezsiz ózgeriwshili teńleme jaǵdayın qaraymız:

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

bunda $z = z(x, y)$ - belgisiz funksiya, al $P(x, y)$ hám $Q(x, y)$ - berilgen funksiylar. (14) teńlemenıń hár bir sheshimine (x, y, z) keńisliginde bazıbir betlik - usı teńlemenıń integrallıq betligi sáykes keledi. Bul jaǵdayda (10) sistema bir teńlemege aynaladı:

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \quad (15)$$

Meyli $\varphi(x, y)$ usı teńlemenıń integralı bolsın, yaǵnıy $\psi(x, y) = C$ - ulıwma integral. Sonda (14) teńlemenıń ulıwma sheshimi

$$z = F[\psi(x, y)] \quad (16)$$

funkciyası boladı, bunda F - qálegen úzliksiz differenciallanatuǵın funksiya.

Geometriyalıq jaqtan, (14) ulıwma sheshimge bir erikli funksiya F ten gárezli bolǵan (16) integrallıq betlikler toparı sáykes keledi.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Dara tuwındılı differenciallıq teńleme degen ne, onıń sheshimi degen ne? Eki gárezsiz ózgeriwshili teńlemenıń sheshimi qanday geometriyalıq mániske iye?
2. Qanday teńlemege birinshi tártipli dara tuwındılı sızıqlı teńleme dep ataydı? Qanday jaǵdayda ol birtekli, birtekli emes dep ataladı?
3. Birinshi tártipli dara tuwındılı teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı? Ol eki gárezsiz ózgeriwshili teńleme jaǵdayında qanday geometriyalıq maǵanaǵa iye boladı?
4. Birinshi tártipli dara tuwındılı birtekli sızıqlı sistemanıń ulıwma sheshimi qalay dúziledi? Bul teńleme ushın Koshi máselesi qalay sheshiledi?

Meyli

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u) \quad (1)$$

teńlemesi berilsin.

Bundađı $X_1, X_2, \dots, X_n$ koefficientleri hám R óń jađı baslanđısh $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$ tochkasınıń bazıbır dógereginde dara tuwındıları menen birge anıqlanđan hám úzliksiz bolsın, sonıń menen birge,

$$X_n(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)}) \neq 0. \quad (2)$$

(1) teńlemenıń sheshimin anıq emes túrde

$$V(x_1, \dots, x_n, u) = 0 \quad (3)$$

túrinde izleybiz, bunda V - óziniń argumentleriniń bazıbır úzliksiz differenciallanatuđın funkciyası, sonıń menen birge,

$$\frac{\partial V(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})}{\partial u} \neq 0. \quad (4)$$

(3) qatnasın X_k boyınsha differenciallaymız, bunnan u dı $x_1, \dots, x_n$ diń (3) teńlemeden anıqlanatuđın funkciyası dep qarastıramız. Sonda

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5)$$

bunnan

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (6)$$

(6) nı (1) ge qoyıp hám $\frac{\partial V}{\partial u}$ ğa kóbeytip tómendegige iye bolamız:

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

(7) teńleme V belgisiz funkciyađa qarata birtekli sıızqlı teńleme. Ođan sáykes keliwshi sistema

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R} \quad (8)$$

tómendegi n ğárezsiz integralđa iye:

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (9)$$

Sonlıqtan,

$$V = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \quad (10)$$

qatnası (7) teńlemenıń ulıwma sheshimi boladı. (10) dı (3) ke qoyıp, (1) teńlemenıń izlengen sheshimine iye bolamız:

$$F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0. \quad (11)$$

Bul (1) teńlemenıń ulıwma sheshimi boladı, bunda F - ıqtıyarlı úzliksiz differenciallanıwshı funkciya.

Meyli

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (12)$$

berilsin, bunda $z = z(x, y)$ - belgisiz funksiya (1) sistema

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (13)$$

túrine iye. Eger $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)$ usı sistemaniń gárezsiz integralları bolsa, onda (14) teńlemeninń ulıwma sheshimi

$$F(\psi_1, \psi_2) = 0. \quad (14)$$

Sızıqlı bir tekli bolmağan teńleme ushın Koshi máselesiniń sheshiliwin qarayıq.

Koshi máselesi (1) teńlemenin

$$u|_{x_n=x_0} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (15)$$

shártti qanaatlandıratúǵın $u = f(x_1, \dots, x_n)$ sheshimin tabıwdan ibarat, bunda φ berilgen úzliksiz differenciallanatuǵın funkciya. (1) teńlemenıń ulıwma sheshimin bilgen halda, Koshi máselesi sheshimin qalay tabıw kerekligin kórsetemiz. Bul jerde tiykargı másele ulıwma sheshimdegi F funkciyanıń kórinisin anıqlawǵa keledi.

(9) birinshi integrallarda x_n ornına baslanğısh x_n^0 mánisti qoyıp, payda bolǵan ańlatpalardı $\overline{\psi}_i$ arqalı belgilep alamız, yaǵnıy

[illegible]

(15) başlangıç şarttı tömendegi kóriniste jazamız: $x_n = x_n^0$ de $u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$. Bul şarttı (11) teńlik penen salıstırıp F funkciyanı

$$F(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) = u - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (17)$$

teñlik orınlanatugınday etip saylap alamız. (16) sistemani $X_1, X_2, \dots, X_n, u$ largá qarata sheshemiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n), \\ x_2 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n), \\ \\ x_{n-1} = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n), \\ u = \omega(\overline{\psi}_1, ..., \overline{\psi}_n). \end{array} \right.$$

Endi F ushin

$$F(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) = \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) - \\ - \phi[\psi_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \dots, \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n)]$$

funkciyanı alsaq, (17) şərt örinlanadı. Demek,

$$\omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) - \phi[\omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \dots, \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n)] = 0 \quad (18)$$

formula izlenip atırǵan Koshi máselesiniń sheshimin anıq emes túrde beredi. (18) teńlemeni y ke qarata sheship, Koshi máselesi sheshimin anıq túrde tabamız.

Mısal. $(1 + \sqrt{u - x - y}) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2$ teńlemesiniń $y = 0$ bolǵanda $z = 2x$ baslangısh

shártin qanaatlandıratuğın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen dara tuwındılı teńlemege sáykes keliwshi ápiwayı differenciallıq teńlemeler sisteması $\frac{dx}{1+\sqrt{u-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{2}$ túrine iye. Onıń integralları

$\psi_1 = u - 2y$, $\psi_2 = 2\sqrt{u - x - y} + y$ boladı. Bul integrallarda $y = 0$ dep esaplap, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{cases} u = \bar{\psi}_1, \\ 2\sqrt{u-x} = \bar{\psi}_2. \end{cases}$$

Bul sistemani x hám u ga qarata sheship,

$$\begin{cases} x = \bar{\psi}_1 - \frac{\bar{\psi}_2^2}{4}, \\ u = \bar{\psi}_1 \end{cases}$$

qatnasların tabamız. Sonlıqtan (18) formulağa muwapıq, berilgen Koshi máselesiniń sheshimi

$$\psi_1 - 2(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}) = 0, \quad 2\psi_1 - \psi_2^2 = 0$$

boladı yamasa ψ_1 hám ψ_2 lerdi olardıń ańlatpaları menen almastırsaq, onda

$$2u - 4y - (2\sqrt{u - x - y} + y)^2 = 0$$

boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Birinshi tártipli dara tuwındılı birtekli emes sızıqlı teńlemeniniń ulıwma sheshimin qalay dúziwge boladı?
2. Bul teńleme ushın Koshi máselesi qalay sheshiledi?

Тийкаргы адебиятлар

1. Morris Tenenbout, Harry Pollard. Ordinary Differential Equations. Birkhhauser. Germany, 2010.
2. Robinson J.C. An Introduction to Ordinary Differential Equations, Cambridge University Press 2013.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., КомКнига/ URSS. 2006. – 472 с.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., КомКнига/ URSS. 2006. – 312 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: Изд-во РХД. 2000. – 175 с.

Қосымша адабиятлар

6. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ, Тошкент, 2016. 56-б.
7. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Мамлакатимизни 2016 йилда ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришнинг асосий якунлари ва 2017 йилга мўлжалланган иқтисодий дастурнинг энг муҳим устувор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг кенгайтирилган мажлисидаги маъруза, 2017 йил 14 январь –Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 104-б.
8. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза. 2016 йил 7 декабрь- Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 48-б.
9. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажакимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамыз. Мазкур китобдан Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2016 йил 1 ноябрдан 24 ноябрга қадар Қорақалпоғистон Республикаси, вилоятлар ва Тошкент шаҳри сайловчилари вакиллари билан ўтказилган сайловолди учрашувларида сўзлаган нутқлари ўрин олган.-Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 488-б.
10. Салоҳиддинов М.С., Насриддинов Г. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент. Ўқитувчи. 1994.
11. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991. 314 с.
12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1984.
13. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1987.
14. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1980.
15. Самойленко А.М. и др. дифференциальные уравнения. М., 1989. 384
16. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М.: Наука. 1987.

Интернет сайтлари

1. www.lib.homelinux.org/math
2. www.eknigu.com/lib/Mathematics/
3. www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC

