

ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI
BERDAQ ATÍNDAĞÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI



Matematika fakulteti

Differenciallıq teńlemeler kafedrası

ÁPIWAYÍ DIFFERENCIALLIQ TEŃLEMELER

páninen

lektsiya tekstleri

5130100 Matematika bakalavr baǵdari ushin

Nókis 2019

Mazmunı

- 1-leksiya. Äpiwayı differensiallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykarǵı túsinipleri
- 2-leksiya. Tegislikte hám keńislikte baǵıtlar maydanı. Izoklina. Integral iymek sıızıq. Vektorlıq maydan. Traektoriya. Äpiwayı differensiallıq teńlemeler arqalı ańlatılatuǵın ayırım fizikalıq hám geometriyalıq máseleler.
- 3 – leksiya. Ózgeriwshileri ajralǵan teńlemeler hám oǵan keltiriletuǵın differensiyallıq teńlemeler. Birtekli hám ulıwmalasqan birtekli teńlemeler
- 4 – leksiya. Sızıqlı teńlemeler hám olarǵa keltiriletuǵın teńlemeler
- 5 – leksiya. Tolıq differenciallardadı teńlemeler hám oǵan alıp kelinetuǵın teńlemeler. Integrallawshı kóbeytiwshi
- 6 – leksiya. Birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi. Sheshiminiń bar bolıwı hám birden birliǵi haqqındaǵı teorema. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı
- 7-leksiya. Eyler sınıq sıızıqları. Sheshimdi dawam etkiziw haqqındaǵı teorema. Sheshimniń baslanǵısh shártke hám parametrgе úziliksiz ġárezliligi
- 8 – leksiya. Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńlemeler hám olardı integrallaw usılları
- 9 – leksiya. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema. Ayırıqsha sheshimler hám olardı tabıw usılları
- 10 – leksiya. Joqarı tártipli differensiallıq teńlemeler. Baslanǵısh shártler. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema
- 11-leksiya. Kvadraturalarda integrallanatuǵın teńlemeler
- 12-leksiya. Joqarı tártipli differensiyallıq teńlemelerdiń tártibin tómendetiw
- 13-leksiya. n – tártipli sıızıqlı differensiallıq teńlemeler hám olardıń ulıwma qásiyetleri.
- 14-leksiya. Sızıqlı ġárezsiz funksiya. Vronskiy determinantı hám onıń qásiyetleri.
- 15-leksiya. Bir tekli bolmaǵan sıızıqlı teńlemeler. Turaqlılardı variyaciyalaw usılı.
- 16-leksiya. Turaqlı koefficientli sıızıqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı.
- 17-leksiya. Birtekli bolmaǵan turaqlı koefficientli sıızıqlı differensiyallıq teńlemeler
- 18 – leksiya. Äpiwayı differensiyallıq teńlemeler sistemaların normal túrge keltiriw. Normal sistema ushın bar bolıw hám birden-birlik teoreması
- 19 – leksiya. DTS-lardıń baslanǵısh integralları. Simmetriyalıq kórinistegi sistemalar
- 20-leksiya. Sızıqlı differensiyallıq teńlemeler sisteması.
- 21-leksiya. Ostragrodskiy-Lyuvill formulası. Sızıqlı bir tekli teńlemeler sistemasınıń ulıwma sheshimi haqqında teorema. Fundamentallıq matrica
- 22-leksiya. Turaqlı koefficientli bir tekli sıızıqlı sistema. Eyler usılı
- 23-leksiya. Sızıqlı bir tekli bolmaǵan teńlemeler sisteması.
- 24-leksiya. Sheshimniń dawamlanıwı. Sheshimniń baslanǵısh shártlerge hám parametrlerge úzliksiz ġárezligi haqqındaǵı teorema.

25-lekciya. Sheshimniń baslanǵısh mánisler hám parametrler boyınsha differenciallanıwshılıǵı haqqında teoremlar

26-lekciya. Avtonomiyalı sistemalar. Sheshimniń qásiyetleri

27-lekciya. Sızıqlı avtonom sistemanıń ayırıqsha toshkaları. Asimptotikalıq ornıqlı periodlı qozǵalıstúsiniǵı

28-lekciya. Lyapunov mánisindeǵı ornıqlılıq. Asimptotikalıq ornıqlılıq haqqında teoremlar.

29 - lekciya. Birinshi jaqınlasıw boyınsha ornıqlılıq haqqındaǵı Lyapunov teoreması

30-lekciya. Sızıqlı birtekli turaqlı koefficientli ekinshi tártipli avtonomiyalı sistemanıń fazalıq tegislighi

31-lekciya. Ekinshi tártipli sızıqlı differenciayallıq teńlemenı aǵıwayı koriniske keltiriw. Shegaralıq máseleler.

32-lekciya. Ekinshi tártipli DT-lerdi dárejeli qatarlar járdeminde integrallaw

33-lekciya. Dara tuwındılı birinshi tártipli sızıqlı teńleme hám onıń ulıwma sheshimi

34-lekciya. Dara tuwındılı kvazisızıqlı birinshi tártipli DT-ler

1-leksiya. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykarǵı túsiniikleri

Reje:

1. Differenciallıq teńlemelerdiń anıqlaması hám klassifikaciyası

2. Tiykarǵı túsiniikler hám olardıń anıqlamaları

Tayanış sózler. *Differenciallıq teńleme (DT), Ápiwayı differenciallıq teńleme (ÁDT), Dara tuwındılı DT. DT ler sisteması. DT tártibi. Birinshi tártipli DT-ler. Sheshim. Integrallıq iymek sızıq. DT-ni integrallaw. Elementar funkciyalarda integrallaw. Kvadraturalarda integrallaw. Koshi máselesi. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ulıwma integral. Dara integral. Parametrlik túrdegi ulıwma sheshim.*

1. Tábiyat qubılısların úyreniwde, kóp ámeliy máselelerdi sheshiwde, bir qatar teoriyalıq máselelerdi izertlewde differenciallıq teńlemeler teoriyası úlken rol oynaydı.

Differenciallıq teńleme dep gárezsiz ózgeriwshilerdi, belgisiz funkciyanı hám onıń belgili tártipke shekemgi tuwındıların yamasa ózgeriwshilerdiń differencialların baylanıstıratuǵın birdeylik bolmaǵan qatnasqa aytıladı.

Eger belgisiz funkciya tek bir gárezsiz ózgeriwshige baylanıslı bolsa, onda teńleme ápiwayı (ádettegi) differenciallıq teńleme dep, al belgisiz funkciya bir neshe gárezsiz ózgeriwshilerdiń funkciyası bolsa, onda teńleme dara tuwındılı differenciallıq teńleme dep ataladı. Teńlemede qatnasqan eń úlken tuwındınıń tártibi teńlemenıń tártibi delinedi. Máselen $y'' + y = \sin x$, $y''' - y'' = 0$, $y^{(4)} = 0$ teńlemeleri sáykes túrde ekinshi, úshinshi hám tórtinshi tártipli ÁDT-ler boladı.

n – tártipli ÁDT-nıń ulıwma túri

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

kórinisinde jazıladı, bunda x -gárezsiz ózgeriwshi, $y = y(x)$ - belgisiz funkciya, $y', \dots, y^{(n)}$ -sáykes túrde birinshi, ..., n – tártipli tuwındılar, al F – óziniń argumentleriniń bazı-bir belgili funkciyası. (1)-teńlemede n – tártipli tuwındı minnetli túrde qatnasadı.

Birinshi tártipli DT tómendegi túrde jazıladı:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

Bul teńleme úsh ózgeriwshi shamanı belgisiz funkciyanı, onıń tuwındısın hám gárezsiz ózgeriwshini baylanıstıradı. Kóp jaǵdaylarda bul qatnastı

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Bul (3) teńleme birinshi tártipli tuwındıǵa qarata sheshilgen teńleme dep ataladı. Al (2) differenciallıq teńleme tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńleme delinedi. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasın úyreniwdi biz (3) teńlemeden baslaymız.

Анықлама. (2) ямаса (3) differenciallıq теңлемениң $I = (a,b)$ интервалындағы шешими деп, усы аралықта анықланған, үзліксіз differencialланатуғын, теңлемеге қойғанда оны барлық $x \in OI$ үшін бірдейлікке айландыратуғын хәр қандай $y = f(x)$ функциясына айтылады. Егер $y = f(x)$ функциясы (2) ямаса (3) теңлемениң шешими болса, яғни

$$F(x, f(x), f'(x)) \in 0 \text{ ямаса } \frac{df(x)}{dx} \in f(x, f(x)), \quad x \in OI$$

бірдейлігі орынланса, онда ол усы теңлемени қанаатландырады депте атыды.

Differentiallıq теңлемениң хәр бир $y = f(x)$ шешимине сәйкес келиуши ийек сизік (яғни $y = f(x)$ функциясының графиги) усы теңлемениң интеграллық ийек сизігі (ямаса интеграллық сизігі) делінеди.

(3) differentiallıq теңлемениң анықлану обласындағы хәр бир (x,y) точка арқалы абсиссалар кóшерине қыалану мұйешиниң тангенси $f(x,y)$ қа тең болған туури жүргіземіз. Бул туурилар топары (3) теңлемеге сәйкес келиуши бағитлар майданı (ямаса $f(x,y)$ функциясының бағитлар майданı) деп аталады.

Апиуайы мисаллар differentiallıq теңлемениң шешимлердиң шексиз кóплигине ийе болатуғының кóрсетеди.

Differentiallıq теңлемелер теориясының аһмийетли мәсеелериниң бири Koshi мәселеси болып табылады. (3) теңleme үшін Koshi мәселеси тóмендегисхе қойылады: (3) теңлемениң барлық шешимлери ishinen argumenttiң берілген $x = x_0$ мánisinde берілген

$$y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

мánисти қабыл етуғын шешимди табу талап етиледі. Бундағы x_0 хám y_0 санлары басланғыш мánислер деп, ал (4) шарт басланғыш шарт деп аталады.

Теңлемениң оң жағы болған $f(x,y)$ функциясы анықланған D обласының Koshi мәселеси бирден-бир шешимге ийе болатуғын (x,y) тоchkalarınan дүзилген бóлegin $D_1 MD$ деп белгилейик.

Анықлама. (3) differentiallıq теңleme хám x, C өзгеріушileriniң базıbir өзгеріу обласында анықланған, x бойынша үзліксіз differencialланатуғын

$$y = f(x, C) \quad (5)$$

функция берілген болсын. Егер қálegen $(x,y) \in D_1$ точка үшін (5) қатнасы C -ниң $C = y(x,y)$

мánisin бир мánisли анықласа хám бул мánисти $\frac{dy}{dx} = f'_x(x, C)$ теңлікке қойу нáтийjesinde (2)

теңleme payda болса, онда (5) функция (3) теңлемениң D_1 кóпликте анықланған улıума шешими деп аталады.

Bul (5) funkciya erikli turaqlı C -ğa baylanıslı hám demek, (5) - qatnasın sızıqlar toparınıń teńlemesi dep qarawğa boladı.

(3) differenciallıq teńlemenıń (5) ulıwma sheshiminen erikli turaqlı C nıń belgili mánisinde alınatuǵın sheshim usı teńlemenıń dara sheshimi delinedi. Eger

$$F(x, y, C) = 0 \quad (6)$$

teńligi D_1 kóplikte $y = f(x, C)$ ulıwma sheshimdi anıq emes funkciya retinde anıqlasa, onda (6) - qatnasın (2) - differenciallıq teńlemenıń ulıwma integralı dep ataydı.

Al, (6) ulıwma integraldan erikli turaqlı C -nıń belgili mánisinde alınatuǵın $y(x, y) = 0$ qatnası dara integral delinedi.

Geyde teńlemenıń ulıwma sheshimin (5) túrinde de yamasa (6) túrinde de alıw múmkin bolmay, al x hám y ti (3) teńlemeden bazıbir t parametriniń úzliksiz differenciallanıwshı funkciyası retinde, yaǵnıy

$$\begin{cases} x = f(t, C), \\ y = y(t, C) \end{cases} \quad t_0 < t < t_1 \quad (8)$$

túrinde tabıw múmkin, bunda C - erikli turaqlı. Bul (8) qatnasları (3) teńlemenıń $t_0 < t < t_1$ intervalındaǵı parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi dep ataladı.

Tuwındıǵa qarata sheshilmegen (2) differenciallıq teńleme ushın da ulıwma sheshim, ulıwma integral, parametrlik formadaǵı ulıwma sheshim, dara sheshim túsinipleri joqarıdaǵıday bolıp anıqlanadı.

Differenciallıq teńlemeler teoriyasında (2) yamasa (3) teńlemenıń barlıq sheshimlerin tabıw tiykarǵı másele bolıp esaplanadı. Barlıq sheshimlerdi tabıw differenciallıq teńlemenı integrallaw (sheshiw) dep ataladı.

Eger (3) teńlemenıń sheshimin elementar funkciyalar yamasa olardıń integralları járdeminde jazıw múmkin bolsa, onda differenciallıq teńleme kvadraturalarda integrallanadı delinedi.

(1)-(3) differenciallıq teńlemeler menen bir qatarda ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasında teńlemeler sistemaları da qaraladı.

Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

teńlemeler sisteması normal sistema dep ataladı. (4) differenciallıq teńlemeler sistemasınıń sheshimi dep, sistemaniń teńlemelerine qoyǵanda olardı birdeylikke aylandıratuǵın hár qanday $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) funkciyalar jıynaǵına aytıladı. Ádette, eger differenciallıq teńleme sheshiletuǵın bolsa, onda ol sheshimlerdiń sheksiz kópligine iye boladı. Sheshimlerdi tabıw processı differenciallıq teńlemenı integrallaw dep ataladı.

2-lekciya. Tegislikte hám keńislikte baǵıtlar maydanı. Izoklina. Integral iymek sıızıq. Vektorlıq maydan. Traektoriya. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler arqalı ańlatılatuǵın ayırım fizikalıq hám geometriyalıq máseleler.

Reje:

1. Baǵıtlar maydanı. Izoklina. Integrallıq iymek sıızıq. Vektorlıq maydan. Traektoriya.
2. ÁDT arqalı ańlatılatuǵın ayırım fizikalıq hám geometriyalıq máseleler.

Tayanış sózler: Baǵıtlar maydanı. Izoklina. Integrallıq iymek sıızıq. Vektorlıq maydan. Traektoriya. Fizikalıq máseleler. Geometriyalıq máseleler.

Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli teńleme bolǵan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

teńlemesin qarayıq, bunda $f(x, y)$ - bul Oxy tegisliktiń bazıbir D oblastında anıqlanǵan úzliksiz berilgen funkciya.

(1) differenciallıq teńlemenıń anıqlanıw oblastındaǵı hár bir (x, y) tochka arqalı abscissalar kósherine qıyalanıw múyeshiniń tangensi $f(x, y)$ qa teń bolǵan tuwrı júrgizemiz. Bul tuwrılar toparı (1) teńlemege sáykes keliwshi baǵıtlar maydanı (yamasa $f(x, y)$ funkciyasınıń baǵıtlar maydanı) dep ataladı.

(1) differenciallıq teńlemenıń integrallıq iymek sıızıǵı hár bir tochkasında $f(x, y)$ funkciyasınıń baǵıtlar maydanına urınadı, yaǵnıy integrallıq iymek sıızıqtıń hár bir tochkasındaǵı urınbanıń baǵıtı usı tochkadaǵı urınbanıń (1) teńleme menen anıqlanǵan maydanınıń baǵıtı menen ústpe-úst tusedi. Óziniń hár bir tochkasında usı tochkadaǵı maydanniń baǵıtına urınatuǵın hár qanday iymek sıızıq integrallıq iymek sıızıq boladı.

Hár bir tochkasında maydanniń baǵıtı birdey bolatuǵın iymek sıızıq izoklina dep ataladı. (1) differenciallıq teńlemenıń izoklinalarınıń teńlemeleri $f(x, y) = k$ túrine iye, bunda $k = tga = const$, a - (1) teńlemenıń integrallıq iymek sıızıǵına (x, y) tochkada júrgizilgen urınbasınıń Ox kósheriniń oń baǵıtı menen jasaǵan múyeshi. Berilgen izoklinanı kesip ótiwshi barlıq integrallıq iymek sıızıqlar kesilisiw tochkalarında abscissalar kósherine birdey múyesh penen qıyalanǵan boladı. Izoklinalar járdeminde (1) differenciallıq teńlemenıń integrallıq iymek sıızıǵın juwıq túrde jasaw múmkin.

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

normal sistemaniń hár qanday $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) sheshimine geometriyalıq jaqtan $x, y_1, \dots, y_n$ ózgeriwshileriniń $n+1$ ólshemli R^{n+1} keńisligindeki iymek sıızıq sıpatında mánis beriwge boladı. Bul iymek sıızıq usı (2) sistemaniń integrallıq iymek sıızıǵı delinedi. Al, $y_1, \dots, y_n$ ózgeriwshileriniń n ólshemli R^n keńisligi fazalıq keńislik dep, al integrallıq iymek sıızıqtıń fazalıq keńislikke proeksiyası fazalıq traektoriya dep ataladı.

(2) teńlemeler D oblastınıń hár bir noqatında $\tau = (1, f_1, \dots, f_n)$ vektorı menen berilgen bazıbir baǵıttı anıqlaydı. Hár bir noqatında berilgen baǵıtqa iye keńisliktiń bunday oblastı vektorlıq maydan (baǵıtlar maydanı) dep ataladı. (2) teńlemeler sistemasın integrallaw geometriyalıq jaqtan hár bir noqatında júrgizilgen urınbanıń baǵıtı usı vektor maydandaǵı berilgen τ baǵıtı menen ústpe-úst túsetuǵın iymek sıızıqlardı tabıwdı ańlatadı.

Differenciallıq teńlemelerge mexikanıń, fizikanıń, astronomiyanıń hám basqa da tábiyattanıw ilimleriniń hám sonday-aq, texnikanıń kóp máseleleri alıp kelinedi. Differenciallıq teńlemelerge alıp kelinetuǵın bazıbir máselelerdi qaraymız.

1 - mısál. Meyli $f(x)$ - bul $I = (a, b)$ intervalda úzliksiz funkciya, al $y(x)$ onıń dáslepki funkciyası bolsın. Sonda $y'(x) = f(x)$ bolıp, dáslepki funkciyanı tabıw ushın biz birinshi tártipli ápiwayı differenciallıq teńlemenı aldıq. Onıń sheshimleri belgili:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds + C, \quad (x_0 \in I),$$

bunda C - erikli turaqlı.

2 - mısál. Massası m bolǵan dene $v(0) = 0$ baslanǵısh tezlik penen bazıbir biyiklikten taslap jiberilgen. Eger ortalıqtıń (hawanıń) qarsılıǵı tezlikke proporcional bolsa, onda usı deneniń túsiw tezliginiń ózgeriw nızamın anıqlań.

Sheshiliwi. Nyutonnıń ekinshi nızamına muwapıq: $ma = F$, yaǵnıy $m \frac{dv}{dt} = F$, bunda F - denegge tásir etiwshi kúshlerdiń qosındısı (teń tásir etiwshisi), $v = v(t)$ - deneniń t waqıt momentindeki tezligi.

Máseleniń shárti boyınsha denegge eki qarama-qarsı baǵıtlanǵan kúshler tásir etedi: hawanıń qarsılıq kúshi $F_1 = -kv$, $k > 0$ hám jerdiń tartıw kúshi $F_2 = mg$. Solay etip, $F = F_1 + F_2$.

Demek, $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$ ($k > 0$) túrindegi differenciallıq teńlemege kelemiz. Bul teńlemenıń sheshimi $v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$ funkciyası bolatuǵın kórsetiw qıyın emes. Dene óz

qozǵalısnı shárt boyınsha nollik tezlik penen baslaytuǵın bolǵanlıqtan, yaǵnıy $v(0) = 0$ bolǵanlıqtan, $c = -\frac{mg}{k}$ boladı. Solay etip, deneniń qálegen t waqıt momentindegi tezligi

$$v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

funkciyası menen bir mánisli anıqlanadı.

Hawanıń qarsılıǵın esapǵa almaǵan jaǵdayda, yaǵnıy dene erkin túskende $\frac{dv}{dt} = g$ tezliktiń shaması sıızıqlı túrde ósedi: $v(t) = gt$.

Hawanıń qarsılıǵın esapqa alǵan jaǵdayda da tezlik ósedi, biraqta soǵan qaramastan ol waqıttıń ótiwi menen $v = \frac{mg}{k}$ turaqlı shamaǵa umtıladı hám dene teń ólshewli túrde tómen túsedi.

3 - mısál. Radioaktivlik ıdıraw tezligi zattıń muǵdarına proporcional ekenligi tájiriybeden belgili. Radioaktivli zattıń yarım ıdıraw periodın (zattıń yarımı ıdırap bolatuǵın waqıttı) tabıń.

Sheshiliwi. Meyli $x(t)$ - radioaktivli zattıń t waqıt momentindegi muǵdarı bolsın, $x(0) = x_0$. Másele shártinde ayılǵan tájiriybeli fakt $\frac{dx}{dt} = -kx$, $k > 0$ ekenin ańlatadı, bunda k - proporcionallıq koefficienti, al $-$ belgisi zattıń massasınıń kemiytuǵınlıǵın ańlatadı. Solay etip, biz differenciallıq teńleme aldıq, onıń sheshimi $x(t) = ce^{-kt}$ funkciyası boladı. Al, $x(0) = x_0$ bolǵanlıqtan, $c = x_0$ bolıp, zattıń muǵdarınıń waqıt boyınsha ózgeriw nızamı $x(t) = x_0 e^{-kt}$ túrine iye boladı. Zattıń yarımı ıdırawına ketetuǵın waqıt T shamasın (yarım ıdıraw periodın) $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-kT}$ teńlemesinen anıqlaymız. Sonda $T = \frac{\ln 2}{k}$ boladı. Bul waqıt zattıń baslanǵısh massasına ǵárezli bolmaydı.

4 - mısál. Kóbeyiw ushın qolaylı sháriyatlarda turǵan bakteriyalardıń kóbeyiw tezligi olardıń muǵdarına proporcional ekeni tájiriybeden belgili. Qanday waqıt ishinde bakteriyalar olardıń dáslepki sanına salıstırǵanda m ese kóbeyedi?

Sheshiliwi. Eger $N(t)$ - bakteriyalardıń t waqıt momentindegi sanı bolıp, $N(0) = N_0$ bolsa, onda olardıń sanınıń waqıt ótiwi menen ózgeriwi biologiyalıq tájiriybege muwapıq, $\frac{dN}{dt} = kN$, $k > 0$ differenciallıq teńlemesi menen suwretlenedi. Bul teńlemenıń sheshimi $N(0) = N_0$ shártti esapqa alǵanda $N(t) = N_0 e^{kt}$ funkciyası boladı. Bakteriyalardıń sanı m ese kóbeyetuǵın T waqıttı $N(T) = mN_0 = N_0 e^{kT}$ teńlemesinen anıqlaymız. Sonda $T = \frac{\ln m}{k}$

boladı. Al, koefficienti bakteriyalardıń túrinen hám olar jasap atırǵan sháriyatlardan ǵárezli boladı. Onı tájriybe jolı menen anıqlaw múmkin.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Ápiwayı differenciallıq teńleme, dara tuwındılı differenciallıq teńleme degen ne? Differenciallıq teńlemenıń tártibi degen ne?
2. Differenciallıq teńlemenıń sheshimi (integrallıq iymek sızıq) degen ne? Differenciallıq teńlemenı integrallaw máselesi neden ibarat?
3. Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli teńlemelerdiń tiykarǵı beriliw kórinisleri qanday? Sheshimler qanday túrde beriliwi múmkin?
4. Differenciallıq teńlemeler izertlewlerde qalay kelip shıǵadı? Berilgen bir parametrli iymek sızıqlar toparınıń differenciallıq teńlemesi qalay dúziledi?
5. Birinshi tártipli tuwındıǵa qarata sheshilgen teńleme ushın Koshi máselesi neden ibarat?
6. Ulıwma sheshim degen ne? Ulıwma sheshim formulası járdeminde Koshi máselesi qalay sheshiledi? Ulıwma integral degen ne? Parametrlik formadaǵı ulıwma sheshim degen ne? Dara sheshim degen ne? Ol ulıwma sheshim formulası menen qalay baylanısadı?

3 – lekciya. Ózgeriwshileri ajıralğan teńlemeler hám oğan keltiriletúǵın differensiyallıq teńlemeler. Birtekli hám ulıwmalasqan birtekli teńlemeler

Reje:

1. Ózgeriwshileri ajıralğan teńlemeler.
2. Ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemeler hám olarǵa keltiriletuǵın teńlemeler.
3. Birtekli teńlemeler hám olarǵa keltiriletuǵın teńlemeler. Ulıwmalasqan birtekli teńlemeler.

Tayanış sózler: Ózgeriwshileri ajıralğan teńlemeler.

Ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemeler hám olarǵa keltiriletuǵın teńlemeler.

Birtekli teńlemeler hám olarǵa keltiriletuǵın teńlemeler. Ulıwmalasqan birtekli teńlemeler.

Meyli $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ yamasa $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ teńlemesi bazıbir usıl menen

$$F_1(x)dx = F_2(y)dy \quad (1)$$

túrine alıp kelinsin, bunda $F_1(x)$ - tek x ózgeriwshisiniń, al $F_2(y)$ - tek y ózgeriwshisiniń funkciyası bolsın. Bul funkciyalardı úzliksiz funkciyalar dep uyǵarayıq.

Eger $y = \varphi(x)$ funkciyasın (1) teńlemesiniń sheshimi dep esaplasaq hám onı usı teńlemege qoysaq, onda $F_1(x)dx \equiv F_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ birdeyligine iye bolamız. Bul birdeyliktiń eki jaǵı differenciallar bolıp, olardıń birinshisi tikkeley gárezsiz ózgeriwshi arqalı, al ekinshisi onıń funkciyası arqalı ańlatılǵan. Eger differenciallar bir-biri menen teń bolsa, onda olardan alınǵan anıq emes integrallar bir-birinen tek erikli qosılıwshıǵa ǵana ayrıladı. Sol sebepli birdeyliktiń eki jaǵın integrallap,

$$\int F_1(x)dx = \int F_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx + C \text{ yamasa } \int F_1(x)dx = \int F_2(y)dy + C \quad (2)$$

qatnasına iye bolamız, bunda C - erikli turaqlı.

Bul alınǵan (2) qatnası (1) teńlemesiniń ulıwma integralın beredi, al egerde onı y ke qarata sheshiw múmkin bolsa, onda usı teńlemenıń ulıwma sheshimin alıwǵa boladı.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ yamasa } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

teńlemesin (1) túrine keltiriw ózgeriwshilerdi ajıratıw dep, al (1) túrindegi teńleme ózgeriwshileri ajıralğan teńleme dep ataladı. Ózgeriwshilerdi ajıratıw usılın birinshi ret shveycariyalı matematik I. Bernulli (1667-1748) qollanǵan.

Eger $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ teńlemede $M(x, y)$ hám $N(x, y)$ funkciyaların $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$ túrinde kórsetiw múmkin bolsa, onda bul

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \quad (3)$$

teńlemesi ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńleme dep ataladı. Bul teńlemenin eki jaǵın da $M_2(y)N_1(x) \neq 0$ dep esaplap, $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$ ańlatpasına kóbeytiw arqalı onıń ózgeriwshilerin ańsat ajıratıwǵa boladı. Sonda

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

teńlemesin alamız. Bul ózgeriwshileri ajıralǵan teńleme. Onı

$$d\left[\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy\right] = 0$$

túrinde jazıwǵa boladı, bunnan

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C \quad (4)$$

qatnası kelip shıǵadı, bunda C - erikli turaqlı. (4) qatnası (3) teńlemenin ulıwma integralı boladı.

Eskertiw. (3) teńlemesinin eki jaǵın da $N_1(x)M_2(y)$ kóbeymesine bólgende biz usı teńlemenin bazıbir sheshimlerin, atap aytqanda, $N_1(x) = 0$ hám $M_2(y) = 0$ bolatuǵın sheshimlerin joǵaltıwımız múmkin.

1 - mısál. $x(1+y^2) + y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 0$ teńlemesin sheshin.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenin $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ túrinde jazamız. Bul teńlemenin eki jaǵında $(1+x^2)(1+y^2)$ kóbeymesine bólip, ózgeriwshileri ajıralǵan teńlemenin alamız:

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Al, bul teńlemenin integrallap, tómendegilerdi tabamız:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = C_1, \quad \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln C.$$

Bunnan $(1+x^2)(1+y^2) = C$, bunda C - erikli turaqlı. Bul qatnas berilgen teńlemenin ulıwma integralın beredi.

Ózgeriwshileri ajralatuǵın teńlemelerge birtekli teńlemeler alıp kelinedi. Meyli bazı bir $f(x, y)$ funkciyası berilsin. Eger erikli t shaması (parametri) ushın $f(tx, ty) \equiv t^m f(x, y)$ birdeyligi orınlansa, onda bul $f(x, y)$ funkciyası m ólshemli birtekli funkciya dep ataladı.

Meyli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5)$$

teńlemesi berilsin. Eger (5) teńlemenin ón jaǵı bolǵan $f(x, y)$ funkciyası nol ólshemli birtekli funkciya bolsa, yaǵnıy

$$f(tx, ty) \equiv f(x, y) \quad (6)$$

birdeyligi orınlansa, onda bul teńleme birtekli teńleme dep ataladı. Bul (6) birdeyliginde $t = \frac{1}{x}$

dep esaplap, $f(x, y)$ funkciyasın $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ túrinde kórsetiwge boladı. Sonda (5) birtekli teńlemesi

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7)$$

túrinde jazıladı. Al, bul teńlemenin

$$y = ux \quad (8)$$

formulası járdeminde jańa $u = u(x)$ belgisiz funkciyasına ótiw arqalı ózgeriwshileri ajralatuǵın teńlemege alıp keliw múmkin. Haqıyqatında da, (8) den $\frac{du}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ekenin esapqa alıp, (7) teńlemede u ózgeriwshisine ócek,

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \text{ yamasa } x du = [\varphi(u) - u] dx \quad (9)$$

teńlemesine iye bolamız. Bul (9) teńleme ózgeriwshileri ajralatuǵın teńleme.

Meyli $\varphi(u) - u \neq 0$, yaǵnıy $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \neq \frac{y}{x}$ bolsın. Sonda (9) teńlemesinin eki jaǵında usı ayırmaǵa hám x qa bólip, $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$ teńlemesin alamız. Bul teńlemenin integrallasaq, onda

$$x = C e^{-F(u)} \quad (10)$$

ulıwma sheshimi kelip shıǵadı, bunda C - erikli turaqlı, al

$$F(u) = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}.$$

Endi (8) formulasınan $\frac{y}{x} = u$ ekenin esapqa alsaq, onda (10) nan

$$x = Ce^{-F\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (11)$$

qatnasın alamız. Bul (11) qatnası (7) teńlemenin hám demek, oǵan teń kúshli bolǵan (5) birtekli teńlemenin ulıwma integralın beredi.

Meyli

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (12)$$

teńlemesi berilsin. Eger $M(x, y)$ hám $N(x, y)$ funkciyaları birdey m ólshemli birtekli funkciyalar bolsa, onda bul teńleme birtekli teńleme dep ataladı. Bul jaǵdayda da (8) almasırwı járdeminde (12) teńlemesin ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp kelip integrallawǵa boladı.

Kóp teńlemeler birtekli teńlemelerge alıp klinedi. Mısalı,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

teńlemesin $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ sıızılıq almasırwı járdeminde birtekli teńlemege alıp keliwge boladı, bunda α, β - bul $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ hám $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ tuwrılarınıń kesilisiw tochkasınıń koordinataları. Eger bul tuwrılar kesilispese, onda $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ boladı hám berilgen teńleme bul jaǵdayda $a_1x + b_1y + c_1 = z$ almasırwı járdeminde ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp klinedi.

$F(x, y)$ funkciyası k dárejeli kvazibirtekli (ulıwmalasqan birtekli) funkciya dep ataladı, egerde bazıbir α hám β sanları tabılıp, barlıq $\lambda > 0$ ushın

$$F(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^k F(x, y)$$

teńligi orınlansa.

Kvazibirtekli dárejeler funkciyalardı kóbeytkende qosıladı, olar ólshemler dep te ataladı. Solay etip, x ózgeriwshisi α ólshemli, y ózgeriwshisi β ólshemli boladı, al txy^2 bolsa $\alpha + 2\beta$ ólshemli boladı hám t.b.

(5) differenciallıq teńlemesi kvazibirtekli (ulıwmalasqan birtekli) teńleme dep ataladı, egerde $f(x, y)$ funkciyası $\beta - \alpha$ dárejeli kvazibirtekli funkciya bolsa, yaǵnıy $f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta - \alpha} f(x, y)$ teńligi orınlansa.

$y = z^{\frac{\beta}{\alpha}}$ almasırwı járdeminde kvazibirtekli teńleme birtekli teńlemege alıp klinedi,

biraqta ámelde $y = ux^{\frac{\beta}{\alpha}}$ túrindegi almasırwıdan paydalanǵan qolaylı boladı, bul almasırw ulıwmalasqan birtekli teńlemenin ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp keledi.

2 - mısál. $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńleme birtekli teńleme. $y = xz$ almasırwın kiritemiz. Sonda $(x - xz \cos z)dx + x \cos z(xdz + zdx) = 0$ yamasa $dx + x \cos z dz = 0$, $\frac{dx}{x} + \cos z dz = 0$, $\int \frac{dx}{x} + \int \cos z dz = C$, $\ln|x| + \sin z = C$. Demek, $\ln|x| + \sin \frac{y}{x} = C$ teńligi berilgen teńlemenin ulıwma integralı boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. túrindegi tolıq emes diferenciallıq teńlemeler qalay integralanadı?
2. Ózgeriwshileri ajıralǵan hám ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemeler qalay integralanadı? Qanday teńleme ózgeriwshileri ajıralatuǵın teńlemege alıp klinedi?
3. Qanday teńleme birtekli teńleme dep ataladı? Ol qalay integrallanadı? Qanday teńlemeler birtekli teńlemege alıp klinedi? Ulıwmalasqan birtekli teńleme degen ne? Ol qalay integrallanadı?

4 – lekciya. Sızıqlı teńlemeler hám olarǵa keltiriletuǵın teńlemeler

Reje:

1. Sızıqlı teńleme. Birtekli sızıqlı teńleme. Birtekli emes sızıqlı teńleme.
2. Sızıqlı teńlemelerdi sheshiw usılları
3. Sızıqlı teńlemege alıp kelinetuǵın teńlemeler. Bernulli teńlemesi.
4. Rikkati teńlemesi haqqında túsiniq.

Tayanış sozler: 1. Sızıqlı teńleme. Birtekli sızıqlı teńleme. Birtekli emes sızıqlı teńleme.

Erikli túraqılını variyasiyalaw usılı. Bernulli teńlemesi.

Egerde birinshi tártipli differenciallıq teńleme belgisiz funkciyaǵa hám onıń tuwındısına qarata sızıqlı bolsa, yaǵnıy belgisiz funkciya hám onıń tuwındısı birinshi dárejede qatnassa, onda bunday teńleme *sızıqlı differenciallıq teńleme* dep ataladı.

Birinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemenıń normal túri tómendegidey bolıp jazıladı

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

bunda $P(x)$, $Q(x)$ - berilgen úzliksiz funkciyalar.

Bundaǵı $P(x)$ - sızıqlı teńlemenıń koefficienti, al $Q(x)$ - onıń saltań aǵzası delinedi. Eger (1) teńlemede $Q(x) \equiv 0$ bolsa, yaǵnıy bul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (2)$$

túrine iye bolsa, onda ol *birtekli sızıqlı teńleme* dep ataladı. Usıǵan baylanıslı, egerde $Q(x) \neq 0$ bolsa, (1) teńleme *birtekli emes sızıqlı teńleme* delinedi.

(1) teńlemege sáykes keliwshi (2) túrindegi birtekli sızıqlı teńlemenı qarayıq hám onı tómendegi túrde jazayıq: $dy + P(x)ydx = 0$. Bunnan ózgeriwshilerdi ajıracaq, onda

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul ózgeriwshileri ajralǵan teńleme. Onı integrallasaq, onda $\ln|y| + \int P(x)dx = \ln C$ boladı, bunnan

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad (3)$$

bunda C - erikli turaqlı. Bul (3) formula (2) birtekli sızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimin beredi.

Birtekli emes sızıqlı teńlemenı sheshiwdiń klassikalıq usıllarınıń biri bolǵan *erikli turaqlılın variaciyalaw usılın* (Lagranj usılın) qarayıq.

Bul usıldı qollanğanda, dáslep (1) teńlemege sáykes keliwshi (2) birtekli teńlemesi integrallanadı. Onıń ulıwma sheshimi, joqarıda kórsetilgendey-aq, (3) formulası menen beriledi. Sol sebepli (3) funkciyası C erikli turaqlı bolğanda (1) birtekli emes teńlemenıń sheshimi bola almaydı. Degen menen, birtekli emes teńlemenıń sheshimin de usı túrde izleybiz, biraqta C tı erikli turaqlı emes, al x tıń bazıbir funkciyası dep esaplaymız, yaǵnıy erikli turaqlıını variaciyalaymız (onı ózgeredi dep esaplaymız). Solay etip, (1) birtekli emes teńlemenıń sheshimin

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (4)$$

túrinde izleybiz, bunda $C(x)$ - x tıń jańa belgisiz funkciyası. Sonda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (5)$$

tuwındısın esaplap, (1) teńlemesine (4) hám (5) ańlatpaların qoyıp,

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

qatnasına yamasa

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad (6)$$

qatnacına iye bolamız. Bunı integrallap,

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \quad (7)$$

funkciyasın tabıwğa boladı. Endi bul tabılğan (7) ańlatpasın izlengen (4) sheshimge aparıp qoyamız. Sonda

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \quad (8)$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul (8) formula (1) birtekli emes sızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimin beredi.

(1) teńlemenıń sheshimin $y = u(x) \cdot g(x)$ túrinde izleybiz. Sonda

$$\frac{du}{dx} g + u \frac{dg}{dx} + p(x)u \cdot g = Q(x).$$

Al, $u(x)$ retinde $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ teńlemesiniń sheshimleriniń birewin saylap alamız, mısalı,

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Sonda $g(x)$ funkciyasın

$$e^{-\int p(x)dx} \frac{d\mathcal{G}}{dx} = Q(x)$$

teńlemesinen tabamız, yaǵnıy $\mathcal{G}(x) = C + \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx$, bunda C - erikli turaqlı. Tabılǵan $u(x)$ hám $\mathcal{G}(x)$ funkciyaların kóbeytip, (1) teńlemenıń ulıwma sheshimin, yaǵnıy (8) formulanı alamız.

(1) sıızıqlı teńlemenıń eki jaǵın da $e^{\int p(x)dx}$ funkciyasına kóbeytip, onı

$$\frac{d}{dx} \left(ye^{\int p(x)dx} \right) = Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

túrinde jazamız. Bunı integrallasaq, onda

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx \text{ yamasa } y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right].$$

Mına $f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)p(x) = Q(x)$ teńlemesi $z = f(y)$ almatırıw járdeminde sıızıqlı teńlemege alıp kelinedi. Dara jaǵdayda,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0; 1)$$

teńlemesin sıızıqlı teńlemege alıp keliwge boladı. Bul teńleme *Bernulli teńlemesi* dep ataladı. Bernulli teńlemesin

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x), \quad y \neq 0$$

túrinde jazıp, $z = y^{1-n}$ almatırıwın qollanıp, onı z belgisiz funkciyasına qarata sıızıqlı teńlemege alıp kelemiz. Biraqta, Bernulli teńlemesiniń sheshimin $y = u \cdot \mathcal{G}$ túrinde izlep, sıızıqlı teńlemege keltirmey-aq sheshken qolaylı boladı. Al,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

teńlemesi *Rikkati teńlemesi* dep ataladı. Bul teńleme ulıwma jaǵdayda kvadraturalarda integrallanbaydı. Egerde, onıń bir $y = y_1(x)$ dara sheshimi belgili bolsa, onda $y = y_1 + z$ almatırıwı járdeminde Rikkati teńlemesin Bernulli teńlemesine alıp keliwge boladı.

Mısal. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul birtekli emes sıızıqlı teńleme. Onı erikli turaqlını variaciyalaw usılı menen sheshemiz. Dáslep sáykes birtekli teńlemenıń ulıwma sheshimin tabayıq:

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0, \quad \frac{dy}{y} + \cos x dx = 0, \quad \int \frac{dy}{y} + \int \cos x dx = \ln C,$$

$$\ln|y| + \sin x = \ln C, \quad y = Ce^{-\sin x}.$$

Berilgen teńlemenin sheshimin $y = C(x)e^{-\sin x}$ túrinde izleyviz. Sonda

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\sin x} - \cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C(x) + C(x)e^{-\sin x} \cos x = e^{-\sin x},$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = 1, \quad C(x) = x + C.$$

Demek, $y = (x + C)e^{-\sin x}$.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Qanday teńleme sıızıqlı teńleme dep ataladı? Qanday shártler orınlanganda sıızıqlı teńleme ushın Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye? Sheshim qanday intervalda bar boladı? Sıızıqlı teńleme ayrıqsha sheshimge iye bolıwı múmkin be?

2. Birtekli sıızıqlı teńlemenin ulıwma sheshimi qanday túrge iye (ádettegi túrde hám Koshi túrinde)? Eger birtekli sıızıqlı teńlemenin nolden ózgeshe bir dara sheshimi belgili bolsa, onda onın ulıwma sheshimi qalay jazıladı?

3. Eger birtekli emes sıızıqlı teńlemenin bir dara sheshimi hám sáykes birtekli teńlemenin ulıwma sheshimi belgili bolsa, onın ulıwma sheshimin qalay tabıwǵa boladı?

4. Birtekli emes sıızıqlı teńlemenin ulıwma sheshimin tabıwdın Lagranj usılı (erikli turaqlını variaciyalaw usılı) neden ibarat?

5. Birtekli emes sıızıqlı teńlemenin ulıwma sheshimi (ádettegi kóriniste hám Koshi kórinisinde) qanday túrge iye?

6. Bernulli teńlemesi qalay integrallanadı?

5 – lekciya. Toliq differenciallardagi teńlemeler hám oǵan alıp kelinetúǵın teńlemeler. Integrallawshı kóbeytiwshi

Reje:

1. Toliq differenciallı teńleme (TDT).
2. Integrallawshı kóbeytiwshi.

Tayanış sózler: Toliq differenciallı teńleme (TDT). Integrallawshı kóbeytiwshi.

Differenciallıq formadaǵı

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

teńlemesin karayıq.

(1) differenciallıq teńlemesi *toliq differencialdagi teńleme* dep ataladı, eger de bul teńlemenin sol jaǵı bazıbir eki argumentli $u(x, y)$ funkciyasınan alınǵan toliq differencial bolsa, yaǵnıy

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2)$$

birdeyligi orınlansa.

Bul jaǵdayda (1) teńlemenin

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Eger $y(x)$ funkciyası (1) teńlemenin sheshimi bolsa, onda $du(x, y(x)) \equiv 0$ birdeyligi orınlanadı, demek bunnan integrallap,

$$u(x, y) = C \quad (4)$$

qatnasın alamız, bunda C - erikli turaqlı hám kerisinshe, eger bazıbir $y(x)$ funkciyası (4) qatnastı birdeylikke aynaldırsa, onda bul birdeylikti differenciallasaq, $du(x, y) = 0$ boladı, demek, (4) formulası (1) teńlemenin ulıwma integralın beredi. $M(x, y)$ hám $N(x, y)$ funkciyaların xOy tegisliginin bazıbir bir baylanıslı D oblastında sáykes túrde y hám x boyınsha úzliksiz dara tuwındılarǵa iye dep esaplaymız.

Teorema. (1) differenciallıq teńlemenin sol jaǵı bazıbir eki x hám y ǵárezsiz ózgeriwshili $u(x, y)$ funkciyasının toliq differencialı bolıwı ushın

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (5)$$

birdeyliginin orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

(1) tolıq differenciallardagı teńlemenıń ulıwma integralı

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C \text{ yamasa } \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C$$

formulalarınń biri menen anıqlanadı, bunda $x_0, y_0 \in D$ - bazıbir turaqlılar.

Mısal. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul teńlemede

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y$$

bolǵanlıqtan, ol tolıq differencialdagı teńleme boladı. Tólıq differencial usı teńlemenıń sol jaǵına teń bolatuǵın $u(x, y)$ funkciyası tómendegishe tabıladı:

$$u(x, y) = \int (2xy + 3y^2) dx + \varphi(y), \quad u(x, y) = x^2 y + 3y^2 x + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y)] = x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{d\varphi(y)}{dy} = -3y^2,$$

$$d\varphi(y) = -3y^2 dy, \quad \varphi(y) = -3 \int y^2 dy + C_1, \quad \varphi(y) = -y^3 + C_1.$$

Demek, $u(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + C_1$. Sonda berilgen teńlemenıń ulıwma integralı

$$x^2 y + 3y^2 - y^3 = C$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Kóp jaǵdaylarda (1) túrindegi teńleme tolıq differencialdagı teńleme bolmay, biraqta onı usınday teńlemege alıp keliw múmkin.

Bul (1) tenlemenıń eki jaǵında bazıbir $\mu(x, y)$ funkciyaǵa kóbeytiw arqalı erisiledi. Bunday funkciya - integrallawshı kóbeytiwshı dep ataladı.

Integrallawshı kóbeytiwshini tabıw ushın

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (6)$$

teńlemesin ańsat alıwǵa boladı. Bul teńleme $\mu(x, y)$ belgisiz funkciyasına qarata dara tuwındılı differenciallıq teńleme bolıp, ulıwma jaǵdayda onı sheshiw qıyın boladı. Sonıń ushın onın ayırım dara jaǵdayların qaraymız:

a) Meyli (1) teńleme tek x tan gárezli bolǵan integrallawshı kóbeytiwshige iye bolsın, yaǵnıy $\mu = \mu(x)$. Sonda $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ bolıp, (6) teńleme

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (7)$$

túrine iye boladı. (7) teńlemenini integrallap,

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} \quad (8)$$

túrindegi integrallawshı kóbeytiwshige iye bolamız.

b) Meyli (1) teńleme tek y ke gárezli bolğan integrallawshı kóbeytiwshige iye, yaǵnıy $\mu = \mu(y)$ bolsın. Bunda $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$ bolıp, (6) teńleme

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = - \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} \quad (9)$$

túrine iye boladı hám a) jaǵdayına uqsas sońǵı teńlemenini integrallap, (1) teńlemenin

$$\mu = \mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy} \quad (10)$$

túrindegi integrallawshı kóbeytiwshisine iye bolamız.

c) Endi integrallawshı kóbeytiwshi bazıbir belgili $w = w(x, y)$ funkciyasınıń funkciyası bolğan jaǵdaydı qaraymız, yaǵnıy $\mu = \mu(w) = \mu[w(x, y)]$, bunda $w(x, y)$ - belgili funksiya. Sonda bul jaǵdayda

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'_w \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'_w \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

bolǵanlıqtan, (6) teńlemenini

$$\mu \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right] = \left[N \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial w}{\partial y} \right] \frac{d\mu}{dw}$$

túrinde yamasa

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial w}{\partial y}} dw \quad (11)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Eger

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial w}{\partial y}} \equiv \theta(w)$$

bolsa, onda (11) teńlemeden $\mu = \mu[w(x, y)]$ funkciyasın tabıwǵa boladı. Haqıyqatında da, bul jaǵdayda (11) teńlemeden

$$\mu = e^{\int \theta(w) dw} \quad (12)$$

túrindegi integrallawshı kóbeytiwshini alamız.

2-mısal. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul jerde $M(x, y) = 2xy^2 - 3y^3$, $N(x, y) = 7 - 3xy^2$. Demek,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 9y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2$$

bolǵanlıqtan, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ boladı. Al,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{4xy - 9y^2 + 3y^2}{-(2xy^2 - 3y^3)} = -\frac{4xy - 6y^2}{y^2(2x - 3y)} = -\frac{2}{y}$$

bolǵanlıqtan, $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y} dy$ teńlemesine iye bolamız, bunnan

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = -2 \int \frac{dy}{y} + \ln C, \quad \ln|\mu| = -2\ln|y| + \ln C,$$

$$\mu = \frac{C}{y^2}, \quad C=1, \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Endi berilgen teńlemeni $\mu = \frac{1}{y^2}$ funkciyasına kóbeytemiz:

$$(2xy - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0.$$

Bul teńleme tolıq differencialdaǵı teńleme. Onı tómendegishe sheshemiz:

$$u(x, y) = \int (2x - 3y)dx + \varphi(y), \quad u(x, y) = x^2 - 3xy + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{7}{y^2} - 3x, \quad \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{7}{y^2},$$

$$\varphi(y) = 7 \int \frac{dy}{y^2} + C_1, \quad \varphi(y) = -\frac{7}{y} + C_1.$$

Demek, berilgen teńlemenin ulıwma integralı $x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C$ boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Qanday shártlerde teńlemesi tolıq differenciallardagı teńleme boladı? Onın ulıwma sheshimi qanday túrge iye?
2. Integralawshı kóbeytiwshi usılı neden ibarat? Qanday shártler orınlanganda a) tek tan gárezli, b) tek ten gárezli, c) hám tiń bazıbir funkciyasınan gárezli bolğan integrallawshı kóbeytiwshi bar boladı?

6 – lekciya. Birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi. Sheshiminiń bar bolıwı hám birden birliǵı haqqındaǵı teorema. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı

Reje:

1. Koshi máselesiniń qoyılıwı.
2. Sheshiminiń bar bolıwı hám birden birliǵı haqqındaǵı teorema
3. Teoremanıń dálileniwi.
4. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı.
5. **Tayanış sózler:** Koshi máselesi. Pikar teoreması. teń kúshli integrallıq teńleme. Izbe-iz juwıqlasıwlar usılı. Sheshiminiń bar bolıwı. Sheshimniń birden birliǵı

Meyli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differentiallıq teńlemesi hám

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

baslanǵısh shárti berilsin, bunda $f(x, y)$ bazıbir oblastta berilgen funkciya, al x_0, y_0 - berilgen baslanǵısh mánisler.

Teorema (Pikar teoreması). Meyli $f(x, y)$ funkciyası tómendegi eki shártti qanaatlandıratuǵın bolsın:

1) $f(x, y)$ funkciyası óziniń eki ózgeriwshisi boyınsha da $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ jabıq oblastında anıqlanǵan hám úzliksiz bolsın, demek, ol shegaralanǵan:

$$|f(x, y)| \leq M \quad (3)$$

bunda M - oń turaqlı;

2) $f(x, y)$ funkciyası R oblastında y ózgeriwshisi boyınsha Lipshic shártin qanaatlandırıń, yaǵnıy qálegen $(x, y_1, y_2) \in R$ ushın

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (4)$$

teńsizliǵı orınlansın, bunda L - Lipshic turaqlısı, $L > 0$.

Sonda (1) differentiallıq teńlemesiniń (2) baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın, $|x - x_0| \leq h$ aralıǵındaǵı x mánisleri ushın anıqlanǵan hám úzliksiz differentiallanatuǵın, x tıń usı mánislerinde R oblastınan shıǵıp ketpeytuǵın $y = y(x)$ sheshimi bar boladı hám ol birden-bir boladı, bunda

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}. \quad (5)$$

Pikar teoreması Koshi máselesi sheshiminiń tek bar bolıwın hám onıń birden-birligin táminlep ğana qoymastan, al bul sheshimdi belgili dálilke juwıq túrde tabıwdıń usılın da beredi.

Atap aytqanda, Pikar teoremasıń shártleri orınlanganda izbe-iz juwıqlasıw metodına muwapıq, (1), (2) Koshi máselesiniń sheshimin

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds, \quad y_0(x) = y_0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

rekurrentlik qatnasları menen anıqlanatuǵın $\{y_n(x)\}$ funkciyalardıń teń ólshewli jıynaqlı izbe-izliginiń $n \rightarrow \infty$ daǵı shegi retinde tabıwǵa boladı. Bunda $y(x)$ dál sheshimdi n -shi juwıq sheshim $y_n(x)$ penen almastırǵandaǵı qáteliktiń bahalanıwı

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} h^n$$

teńsizligi menen beriledi.

Pikar teoremasındaǵı Lipshic shártin $f(x, y)$ funkciyasınıń y boyınsha shegaralangan $\frac{\partial f}{\partial y}$ dara tuwındıǵa iye bolıw shárti menen almastırwǵa boladı. Lagranj teoremasına muwapıq,

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2), \quad 0 < \theta < 1$$

bolǵanlıqtan, bul ayırmanı bahalay otırıp, $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < K$ ekenin esapqa alsaq,

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$ teńsizligin, yaǵnıy Lipshic shártin keltirip shıǵarıwǵa boladı. Lipshic shárti Koshi máselesi sheshiminiń birden-birligin táminleydi. Al, bul Lipshic shártiniń orınlanıwı talap etilmegen jaǵdayda Koshi máselesiniń sheshiminiń tek bar bolıwın Peano dálillegen.

Teorema (Peano teoreması). Meyli $f(x, y)$ funkciyası R tuwrımúyeshliginde úzliksiz funkciya bolsın hám $M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

Sonda (1), (2) Koshi máselesi $[x_0 - h, x_0 + h]$ aralıǵında eń keminde bir $y = y(x)$ sheshimge iye boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı?
2. Pikar teoreması neden ibarat?
3. Qanday shártte Koshi máselesi sheshimi bar boladı?

4. Qanday shártlerde sheshim birden-bir boladı?

5. Izbe-iz juwıqlasıwlar metodı neden ibarat?

7-leksiya. Eyler sınıq sızıqları. Sheshimdi dawam etkiziw haqqındaǵı teorema. Sheshimniń baslanǵısh shártke hám parametrge úziliksiz ġárezililigi

Reje:

1. Eyler usılı. Eyler sınıq sızıqları.
2. Sheshimniń dawam etiliwi haqqında teorema
3. Sheshimniń baslanǵısh shártke hám parametrge uziliksiz ġárezililigi
4. **Tayanış sózler:** Eyler usılı. Eyler sınıq sızıqları. Sheshimniń dawam etiliwi. Baslanǵısh shárt. Parametr. Uziliksiz ġárezililik.

1. Differenciallıq teńlemelerdi juwıq túrde integrallawdıń metodlarınń biri Eyler metodı bolıp tabıladı. Bul metodqa muwapıq

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differenciallıq teńleneniń (x_0, y_0) noqatı arqalı ótiwshi izlengen integrallıq iymek sızıǵı hár bir zwenosı ózleriniń shetki noqatlarınń birinde integrallıq iymek sızıqqa urınatuǵın tuwrı sızıqlı kesindilerden ibarat bolǵan sınıq sızıq penen almasırladı (1-súwret). Bul metodtı qollanǵanda izlengen $y = y(x)$ sheshimniń $x = b$ toshkadaǵı mánisim juwıq esaplaw ushın $x_0 \leq x \leq b$ (eger $b > x_0$ bolsa) kesindi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ bunda $x_n = b$, noqatları menen n teńdey bóleklerge bólinedi. Hár bir bólektiń $x_{i+1} - x_i = h$ uzınlıǵı esaplaw adımı dep ataladı. Izlengen sheshimniń x_i noqatların daǵı juwıq mánislerin y_i arqalı belgileymiz. Bul y_i mánislerin esaplaw ushın $x_0 \leq x \leq x_1$ kesindide integrallıq iymek sızıqtı onıń (x_0, y_0) noqattaǵı urınbasınıń kesindisi menen almasıramız. Demek, $y_1 = y_0 + hy'_0$, bunda $y'_0 = f(x_0, y_0)$ (1-súwret)

Usıǵan uqsas tómendegi esaplawlardı orınlaymız:

$$y_2 = y_1 + hy'_1, \text{ bunda } y'_1 = f(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2, \text{ bunda } y'_2 = f(x_2, y_2)$$

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}, \text{ bunda } y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Eger $b < x_0$ bolsa, onda esaplawlar sxeması burınǵıday bolıp qaladı, biraq h adım teris boladı.

Al, $h \rightarrow 0$ de Eyler sınıq sızıqları izlengen integrallıq iymek sızıqtıń grafigine jaqınlasatuǵının kútiw tabiyǵıy boladı hám demek, h adımıd kishiriytiw menen Eyler metodı izlengen sheshimniń b noqattaǵı dál mánisin beriwge jaqınlasadı. Bul tastıyqlawdıń dállileniwi sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı fundamentallıq teoremaǵa alıp klinedi.

2. Biz sheshimniń bar bolıwın tek

$$I_n : x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$$

aralıq ushın ǵana dállillegen edik. Biraq ta, eger bunda biz $f(x, y)$ funkciya anıqlanǵan hám úzliksiz bolǵan (hám Lipshic shártin qanaatlandıratuǵın) D oblastınan shıǵıp ketpesek, onda tabılǵan sheshimdi dawam etiw mumkin.

Haqıyqatında da, meyli $x = x_0 + h$ bolǵanda tabılǵan sheshimniń y'_0 mánisi D oblastında jatatuǵın bolsın, sonda D oblastında ele pútinley jatatuǵın $R_1 : |x - x_0^{(1)}| \leq a_1, |y - y_0^{(1)}| \leq b_1$ tuwrımúyeshligin tabıwǵa boladı (D oblastınıń ishki noqatı túsiniǵı paydalanıldı). M_1 arqalı R_1 tuwrımúyeshliktegi $|f(x, y)|$ tiń maksimumların belgileymiz. Sonıń menen birge baslanǵısh mánisler sıpatında $x_0^{(1)}$ hám $y_0^{(1)}$ mánislerin qabıl etemiz. Sonda biz dállillegen boyınsha (1) differenciallıq teńlemenin

$$I_1 : x_0^{(1)} - h_1 \leq x \leq x_0^{(1)} + h_1, \quad h_1 = \min \left\{ a_1; \frac{b}{M_1} \right\}$$

aralıqtaǵı sheshimin bar dep tastıyqlay alamız. Bul I_1 intervaldıń ortası I_n intervalınıń ushi menen betlesedi. bul noqatta biz jasaǵan eki sheshimde birdey $y_0^{(1)}$ mánisti qabıl etedi, demek, birden-birlik qásiyeti boyınsha eki sheshimde I_n hám I_1 aralıqlardıń ulıwma bóleginde ústpe-üst túsedi. Biraq ta, I_1 intervaldıń $(x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1)$ yarımı I_n intervaldan sırtta jatadı. Usı yarımda tabılǵan sheshim I_n intervalda aldın alınǵan sheshimniń dawamlanıwı boladı dep aytamız. Eger sheshimniń $x_0^{(1)} + h_1$ noqattaǵı mánisi $y_0^{(2)}$ bolıp hám koordinataları $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + h_1, y_0^{(2)}$ bolǵan noqat ele D oblastınıń ishinde jatsa, onda biz $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$ baslanǵısh berilgenler boyınsha sheshimdi I_2 intervalda anıqlay alamız, bul aralıqtıń bir yarımı I_1 menen betlesedi hám bul ulıwma bólekte jańa sheshim aldınǵı sheshim menen ústpe-üst túsedi; I_2 intervaldıń ekinshi yarımında biz qarastırıp atırǵan sheshimniń dawamlanıwın alamız. Usıǵan uqsas jasaw x tiń kemiwshi mánisleri ushın da júrgiziliwi múmkin. Usınday dawamlanıwlar menen D oblastınıń shegarasına qálegeninshe jaqın keliw múmkin.

Ońǵa da, solǵa da dawamlanbaytuǵın sheshim dawamsız (dawamlan baytuǵın) sheshim dep ataladı. Hár bir sheshimdi dawamsız sheshimge deyin dawamlawǵa bolatuǵının dállillewge boladı. Eger integrallıq sızıqtı dawamlan baytuǵın sheshimniń grafigi dep túsinssek, onda hár bir (x_0, y_0) noqat arqalı bir integrallıq iymek sızıq ótiwi haqqındaǵı tastıyqlaw dál boladı.

Tómendegi tastıyqlaw orınlı

1-Teorema (tuyıq shegaralanğan oblastta sheshimniń dawamlanıwı haqqında). Meyli $f(x, y)$ funksiya sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teoremanıń shártlerin tuyıq shegaralanğan D oblastta qanaatlandıratuǵın bolsın. Sonda (1) differenciallıq teńlemenin D oblastı ishinen ótetuǵın qálegen $y(x)$ sheshimin eki tárepke qarata D oblastınıń Γ shegarasına shıqqanǵa deyin, yaǵnıy $(a, y(a))$ hám $(b, y(b))$ noqatları Γ shegarada jatatuǵın sonday $[a, b]$ kesindige dawamlawǵa boladı.

3⁰. (1) differenciallıq teńlemenin sheshimin tek ǵárezsiz ózgeriwshi x tıń ǵana funksiya emes, al sonıń menen birge, sheshimniń grafigi ótetuǵın noqat koordinatalarınıń da funksiya sıpatında qarawǵa boladı. Máselen 1- tártipli ÁDT bolǵan

$$\dot{y} = y$$

teńlemesi $y(x) = y_0 e^{x-x_0}$ teńligi menen berilgen sheshimge iye boladı, oǵan sáykes keliwshi integrallıq iymek sıızıq (x_0, y_0) toshkası arqalı ótedi. Sońǵı shárt y ti x , x_0, y_0 ózgeriwshilerin in funksiya sıpatında anıqlaydı, bul analitikalıq túrde

$$y(x, x_0, y_0) = y_0 e^{x-x_0}$$

túrinde jazıladı.

ÁDT sheshimi qanday bolıp x, x_0, y_0 ózgeriwshilerinen ǵárezli bolıwı haqqındaǵı bilim tek teoriya ushın ǵana emes, al ámeliyat ushın da áhmiyetke iye. Sebebi ámeliy máselelerdi sheshkende matematikalıq modeldi dúziwde baslanǵısh berilgenler ádette anaw yáki mınaw ólshewler nátiyjesinde tabıladı, al hár qanday ólshew absolyut dál túrde ótkerilwi múmkin bolmaǵanlıqtan, baslanǵısh berilgenlerdi ólshewdegi kishi qátelikler sheshimlerdiń qásiyetlerine qansha tásir etiwı haqqındaǵı másele payda boladı.

1-Anıqlama. Baslanǵısh $\dot{y} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ máseleniń $\varphi(x, x_0, y_0)$ sheshimi $[x_0, x_0 + h] \subset I$ aralıqta x_0, y_0 baslanǵısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezli, egerde $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın $\delta = \delta(\varepsilon, h) > 0$ sanı tabılıp, hár qanday basqa $\dot{y} = f(x, y)$, $y(x^*) = y_0^*$ baslanǵısh máseleniń $\psi(x, x^*, y_0^*)$ sheshimi ushı $|x_0^* - x_0| < \delta$, $|y_0^* - y_0| < \delta$ teńsizliklerinen $\forall t \in [x_0, x_0 + h]$ ushın

$$|\psi(x, x_0^*, y_0^*) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \varepsilon$$

teńsizligi kelip shıǵatuǵın bolsa. Basqasha aytqanda (1) teńlemenin $y(x_0) = y_0$ baslanǵısh shártti qanaatlandıratuǵın $y = y(x, x_0, y_0)$ sheshimin $[x_0, x_0 + h]$ aralıqta x_0, y_0 baslanǵısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezli boladı, egerde baslanǵısh berilgenlerdiń az ózgerisine $[x_0, x_0 + h]$ aralıqta sheshimniń az ózgerisi sáykes kelse (2- sıızılma)

Geyde bul qásiyet integrallıq úzliksizlik yamasa waqıttıń shekli ózgeriw aralıǵındaǵı ornıqlılıq dep ataladı.

Tómendegi tastıyqlaw orınlı

2-Teorema. Eger $\dot{y} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ baslanğısh másele sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teorema shártlerin qanaatlandırsa onda onıń sheshimi x ǵárezsiz ózgeriwshiden hám x_0, y_0 baslanğısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezli boladı.

Eger DT –niń oń jaǵı tek x hám y ten ǵárezli bolmay, al bazı-bir parametrden de ǵárezli bolsa, onda bul parametr sheshimlerdiń qásiyetine qanday tásir jasaydı?-degen soraw payda boladı.

Haqıyqatında da, differenciallıq teńlemelerdiń (differenciallıq modellerdiń) oń jaqlarına kiriwshi parametrlar úyrenilip atırǵan sistemanıń fizikalıq tabiyatın xarakterleydi. Bunday parametrlar, máselen, massa, zaryadlar, serippelik h.t.b bolıwı múmkin. Bul parametrlar baslanğısh berilgenler sıyaqlı absolyut dál ólsheniliwi múmkin emes hám sonlıqtan bul jerde de parametrlar diń az ózgerisi sheshimlerdiń qásiyetine qanday tásir jasaydı?-degen soraw kelip shıǵadı.

Qatań formulirivkalarǵa óte otırıp, mına baslanğısh máseleni (al dálirek aytqanda baslanğısh máseleler jıynadı) qaraymız:

$$\dot{y} = f(x, y, \mu), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Tómendegi tastıyqlaw orınlı

3-Teorema. (sheshimniń parametrden úzliksiz ǵárezligi haqqında). Eger (2) differenciallıq teńlemenin oń jaǵı μ boyınsha $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ bolǵanda úzliksiz bolsa hám sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teorema shártlerin qanaatlandırsa, sonıń menen birge L Lipshic turaqlısı μ den ǵárezli bolmasa, onda (2) máselenin $y(x, \mu)$ sheshimi μ den úzliksiz ǵárezli boladı.

8 – lekciya. Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńlemeler hám olardı integrallaw usılları

Reje:

1. Birinshi tártipli n -dárezeli differensiyallıq teńlemeler.
2. Toliq emes teńlemeler. Parametr kiritiw usılı.
3. Lagranj teńlemesi.
4. Klero teńlemesi.
5. **Tayanış sózler:** Birinshi tártipli n -dárezeli differensiyallıq teńlemeler. Toliq emes teńlemeler. Parametr kiritiw usılı. Lagranj teńlemesi. Klero teńlemesi.

Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńlemelerdiń kvadraturalarda integrallanatuǵın ayırım klassların qaraymız. Solardıń biri sol jaǵı y' qa qarata n -dárezeli kópazǵalı bolǵan

$$a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0 \quad (1)$$

teńlemesi bolıp tabıladı, bunda $a_i(x, y)$, $i = 0, 1, \dots, n$ bazıbir oblastta úzliksiz funksiya. Bul teńleme birinshi tártipli n -dárezeli differensiallıq teńleme dep ataladı.

Meyli qarastırıp atırǵan oblastta $a_0(x, y) \neq 0$ bolsın. Sonda algebranıń tiykarǵı teoremasına muwapıq, (1) teńleme y' tuwındısınıń n mánisin anıqlaydı. Differensiallıq teńlemenıń ulıwma kursında teńlemelerdi tek haqıyqıy oblastta qaraw menen sheklenetuǵın bolǵanlıqtan, bul mánisler ishinen kompleks mánislerdi qarastırmaı, tuwındıǵa qarata sheshilgen birinshi tártipli m teńlemege iye bolamız:

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n. \quad (2)$$

Eger $f_i(x, y)$ funksiya bazıbir D oblastında Pikar teoremasınıń shártlerin qanaatlandırsa, onda usı oblasttıń hár bir tochkası arqalı birden-bir integrallıq iymek sıızıq ótedi. Solay etip, (2) teńlemeleriniń hár birin integrallap, m integrallıq iymek sıızıqlardı alamız.

Nátıyjede (2) teńlemenıń alınǵan $y_i = \varphi_i(x, C)$ ulıwma sheshimleriniń yamasa $\psi_i(x, y) = C$, $i = \overline{1, m}$ ulıwma integrallarınıń jıynaǵı berilgen (1) teńlemenıń ulıwma integralı boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul ulıwma integral $[\psi_1(x, y) - C][\psi_2(x, y) - C] \dots [\psi_m(x, y) - C] = 0$ qatnası túrinde jazılıwı múmkin.

1 - mısál. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenı $y'^2 - 2y \cdot y' + y^2 \sin^2 x = 0$ túrinde jazıwǵa boladı. Bul birinshi tártipli ekinshi dárezeli differensiallıq teńleme. Onı y' ke qarata sheshsek,

$y' = y \pm y \cos x$ teńlemelerin alamız. Al, bul teńlemelerdi integrallap, berilgen teńlemenin $\ln Cy = x \pm \sin x$ túrindegi ulıwma integralına iye bolamız, bunda C - erikli turaqlı.

Tuwindıǵa qarata sheshilmegen

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3)$$

túrindegi teńlemede x yamasa y , yamasa ol ekewi de qatnaspasa, onda bunday teńlemeler tolıq emes teńlemeler dep ataladı.

I. Dáslep tek y' tan turatuǵın

$$F(y') = 0 \quad (4)$$

differentiallıq teńlemesin qarayıq. Eger bul teńleme y' tın eń keminde bir haqıyqıy mánisin anıqlasa, onda bul teńlemenin barlıq sheshimlerin kvadraturalarsız tabıwǵa boladı.

Haqıyqatında da, meyli (4) teńleme y' qa qarata k haqıyqıy korengi iye bolsın:

$$y' = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

yaǵnıy

$$F(\alpha_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

(5) den $y = \alpha_k x + C$, ($k = 1, 2, \dots$) kelip shıǵadı, bunnan

$$\alpha_k = \frac{y - C}{x}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

(7) ni (6) ǵa qoysaq, onda (4) teńlemesinin

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0 \quad (8)$$

túrindegi ulıwma integralına iye bolamız.

Demek, (4) teńlemenin ulıwma integralı bul teńlemede y' tı $\frac{y - C}{x}$ qa almastırıw jolı menen ańsat alınadı.

II. Endi belgisiz funkciya y qatnaspaytuǵın

$$F(x, y') = 0 \quad (9)$$

teńlemesin qaraymız. Tómenдеgi jaǵdaylar bolıwı múmkin.

a) Eger bul teńlemenin y' qa qarata sheshiw múmkin bolsa, onda

$$y' = f_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

teńlemelerine kelemiz, bunda $f_k(x)$ - bazıbir aralıqta úzliksiz bolǵan haqıyqıy funkciyalar. (10) teńlemelerdi integrallap, sáykes túrde, olardıń ulıwma sheshimlerin tabamız:

$$y = \int f_k(x)dx + C, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Bul ulıwma sheshimlerdiń jıynaǵı (9) teńlemenıń ulıwma integralı boladı.

b) Meyli (9) teńleme ǵárezsiz ózgeriwshi x qa qarata ańsat sheshiletuǵın bolsın, yaǵnıy bul teńlemenı

$$x = f(y') \quad (11)$$

túrinde jazıw múmkin bolsın, bunda $f(y')$ - tuwındı y' ózgeretuǵın bazıbir oblastta differenciallanatuǵın funkciya. Bul teńlemenı tómendegi usıl menen sheshiwge boladı. $\frac{dy}{dx} = p$ dep esaplap hám p nı parametr esabında qarastırıp, y tı usı p parametri arqalı ańlatamız. Sonda (11) qatnasınan

$$x = f(p) \quad (12)$$

boladı, bunnan

$$dx = f'(p)dp \quad (13)$$

Al, $dy = y'dx$, $dy = p dx$ bolǵanlıqtan, (13) ti esapqa alsaq, onda $dy = pf'(p)dp$ boladı hám bul qatnastı integrallap, $y = \int pf'(p)dp + C$ formulasın alamız.

Solay etip, bul jaǵdayda (9) teńleme

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int pf'(p)dp + C \end{cases} \quad (14)$$

túrindegi parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimge iye boladı. Eger (14) teńlemelerinen r parametrin joq etiw múmkin bolsa, onda (9) teńlemenıń $y = \varphi(x, C)$ ulıwma sheshimine yamasa $\Phi(x, y, C) = 0$ ulıwma integralına iye bolamız.

(9) teńlemenı usınday usıl menen sheshiw parametr kiritiw metodı dep ataladı.

2 - mısál. $x(y'^2 - 1) = 2y'$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenı x qa qarata sheshiw ańsat: $x = \frac{2y'}{y'^2 - 1}$. Endi $y' = p$ dep

belgilep alıp, sońǵı teńlemenı $x = \frac{2p}{p^2 - 1}$ túrinde jazamız. Bul qatnastı differenciallasaq, onda

$$dx = \frac{2(p^2 + 1)}{(p^2 - 1)^2} dp \text{ qatnasın alamız. Bunnan } dy = p dx \text{ ekenin esapqa alsaq, } dy = \frac{2(p^2 + 1)p}{(p^2 - 1)^2} dp$$

boladı. Bul teńlemenı integrallasaq,

$$y = \frac{2}{p^2 - 1} - \ln|p^2 - 1| + C$$

kelip shıǵadı. Solay etip, berilgen teńlemenıń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$x = \frac{2p}{p^2 - 1}, y = \frac{2}{p^2 - 1} - \ln|p^2 - 1| + C$$

túrinde jazıladı.

c) (9) teńleme x qa da hám y' qa qarata sheshilmewi múmkin. Biraqta ayırım jaǵdaylarda bul teńlemenı parametrlik formada, mısalı

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \quad (15)$$

túrinde jazıw múmkin. Bul jaǵdayda (15) den $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$ kelip shıǵadı. Sonda (9) teńlemenıń ulıwma sheshimi tómendegishe parametrlik formada jazıladı:

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C, \quad (16)$$

bunda C - erikli turaqlı.

III. Meyli (1) teńlemede ǵárezsiz ózgeriwshi x qatnaspasın:

$$F(y, y') = 0. \quad (17)$$

Bul teńleme ushın da (9) teńlemenı sheshkendegi jaǵdaylarǵa usaǵan jaǵdaylar bolıwı múmkin.

3 - mısál. $y\sqrt{1 - y'^2} = y'$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul jaǵdayda parametr esabında y' tı alıwǵa bolar edi, biraq $y' = \sin \varphi$ dep alıw qolaylıraq boladı. Berilgen teńlemeden ti φ arqalı ańlatamız. $y\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sin \varphi$, $y = \operatorname{tg} \varphi$.

Solay etip, berilgen teńlemenı parametrlik kóriniste tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} \varphi, \\ y' = \sin \varphi. \end{cases}$$

Endi x ózgeriwshisin φ arqalı ańlatayıq:

$$dy = y'dx, \quad dy = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad dx = \frac{dy}{y'}, \quad dx = \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi},$$

bunnan

$$x = \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} + C = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\cos \varphi} + C.$$

Demek, berilgen teńlemenıń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\cos \varphi} + C, \\ y = \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Lagranj teńlemesi dep, tuwındıǵa qarata sheshilmegen, al belgisiz funkciyaǵa hám ǵárezsiz ózgeriwshige qarata sıızıqlı bolǵan

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0 \quad (18)$$

túrindegi teńlemege aytıladı, bunda A, B, C - úzliksiz differenciallanatuǵın funkciyalar.

Ádette, $A(y') \neq 0$ dep esaplap, Lagranj teńlemesin

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \quad (19)$$

túrinde qarastıradı, bunda

$$\varphi(y') = -\frac{B(y')}{A(y')}, \quad \psi(y') = -\frac{C(y')}{A(y')}.$$

Lagranj teńlemesin sheshiw ushın parametr kiritiw usılın qollanıwǵa boladı. $y' = p$ dep alıp, (19) teńlemenin

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \quad (20)$$

túrinde jazamız. Bul teńlemenin eki jaǵında x boyınsha differenciallayıq:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(p)x \frac{dp}{dx} + \varphi(p) + \psi'(p) \frac{dp}{dx}. \quad (21)$$

Al, $\frac{dy}{dx} = p$ ekenligin esapqa alsaq, onda sońǵı teńleme $p = [\varphi'(p)x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} + \varphi(p)$ túrine keledi, bunnan

$$[\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp + [\varphi(p) - p]dx = 0. \quad (22)$$

Endi $\varphi(p) - p \neq 0$ dep esaplap, sońǵı teńlemenin eki jaǵın da usı ayırmaǵa bólsek,

$$dx + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x dp = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} dp$$

teńlemesin alamız, bunnan

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (23)$$

túrindegi birtekli emes sıızıqlı teńlemege kelemiz. Bul teńlemenin ulıwma sheshimi

$$x = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p} dp} \left[C + \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p} dp} dp \right] \quad (24)$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul sheshimdi qısqaşa

$$x = \omega(p)C + \chi(p) \quad (25)$$

túrinde jazıwǵa boladı, bunda $\omega(p)C$ funkciyası (23) teńlemege sáykes keliwshi birtekli sıızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimi, al $\chi(p)$ - birtekli emes teńlemenıń dara sheshimi. Sonda Lagranj teńlemesiniń parametrlik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = \omega(p)C + \chi(p), \\ y = \varphi(p)[\omega(p)C + \chi(p)] + \psi(p) \end{cases} \quad (26)$$

túrinde jazıladı.

Meyli $\varphi(p) - p = 0$ bolsın hám bul teńleme $p = p_i$ ($i = 1, 2, \dots$) haqıyqıy korenlerine iye bolsın. Sonda $y = \varphi(p_i)x + \psi(p_i)$ funkciyaları da Lagranj teńlemesiniń ayrıqsha sheshimi bolıwı múmkin.

Lagranj teńlemesiniń dara jaǵdayı bolǵan

$$y = xy' + \psi(y') \quad (27)$$

teńlemesin qarayıq. Bul teńleme Klero teńlemesi dep ataladı. Onı Lagranj teńlemesin sheshkendegidey usıl menen sheshemiz.

$$y' = p, \quad dy = p dx, \quad y = px + \psi(p); \quad (28)$$

$$dy = p dx + x dp + \psi'(p) dp, \quad p dx = p dx + x dp + \psi'(p) dp,$$

$$[x + \psi'(p)] dp = 0.$$

Sońǵı teńleme tómendegi eki teńleme menen teń kúshli: $dp = 0$, $x + \psi'(p) = 0$. Bul teńlemenıń birinshisinen $p = C$ boladı. p nıń bul mánisin (28) ge qoysaq, onda

$$y = Cx + \psi(C) \quad (29)$$

boladı, bunda C - erikli turaqlı. Bul Klero teńlemesiniń ulıwma sheshimin beredi. Endi $x + \psi'(p) = 0$ jaǵdayın qarayıq. Bunnan $x = -\psi'(p)$ boladı. Sonda Klero teńlemesiniń

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \quad (30)$$

túrinde jazılǵan jáne bir sheshimine iye bolamız. (29) hám (30) sheshimlerin salıstırsaq, onda erikli turaqlı C nıń hesh bir mánisinde (30) sheshimi (29) sheshiminen kelip shıqpaytuǵının kóriwge boladı. (30) sheshim Klero teńlemesiniń ayrıqsha sheshimi boladı.

1. -dárejeli birinshi tártipli teńleme degen ne? Ol qalay integrallanadı?
2. teńlemesiniń ulıwma integralı qanday túrge iye?
3. Belgisiz funkciya qatnaspaǵan teńleme qalay integrallanadı?
4. Gárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńleme qalay integrallanadı?
5. Lagranj hám Klero teńlemeleri qalay integrallanadı?

9 – lekciya. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema. Ayırıqsha sheshimler hám olardı tabıw usılları

Reje:

1. Koshi máselesı. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema.
2. Ayırıqsha sheshimler hám olardı tabıw usılları

Tayanış sózler: Koshi máselesı. Sheshimniń bar bolıwı. Ayırıqsha sheshim. P-diskriminantlıq iymek sıızıq. C-diskriminantlıq iymek sıızıq.

Tuwındıǵa qarata sheshilmegen

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

differentiallıq teńlemeniniń ayırıqsha sheshimleriniń bar bolıwı hám olardı tabıw haqqındaǵı másele ni qarayıq.

Eger $F(x, y, y')$ funkciyası (1) teńleme ushın Koshi máselesiniń sheshiminiń bar bolıwı hám onıń birden-birligi haqqındaǵı teoremanıń shártlerin qanaatlandırsa, onda (x, y) tegisliginiń qarastırılǵan oblastında hár bir (x_0, y_0) tochkası arqalı berilgen baǵıt boyınsha (1) teńlemeniniń tek bir integrallıq iymek sıızıǵı ótedi.

Demek, eger (1) teńlemeniniń ayırıqsha sheshimleri bar bolsa, onda olar usı teoremanıń shártleri buzılǵan tochkaları arqalı ótedi. Eger $F(x, y, y')$ funkciyası úzliksiz hám ol birinshi tártipli úzliksiz dara tuwındılarǵa iye bolsa, onda ayırıqsha sheshimlerdi koordinataları

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad p = \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

teńlemelerin qanaatlandıratuǵın tochkalar ishinen izlew kerek. Eger bul sistemadan p parametrin joq etiw múmkin bolsa, onda (1) teńlemeniniń ayırıqsha sheshimi bolıwı múmkin bolǵan

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (3)$$

kóplıgın alamız. (3) qatnası menen anıqlanatuǵın tochkalar kóplıgı (1) teńlemenıń p -*diskriminantlıq iymek sıızıǵı* dep ataladı.

Eger (1) differenciallıq teńlemenıń p -diskriminantlıq iymek sıızıǵı bar bolsa, onda olar bul teńlemenıń ayırıqsha sheshimleri bolıwı múmkin.

Bunnan (1) teńlemenıń ayırıqsha sheshimlerin tabıwdıń tómendegi usılı kelip shıǵadı:

1) (1) teńlemenıń p -diskriminantlıq iymek sıızıǵın tabıw kerek;

2) Bul tabılǵan teńlemenıń p -diskriminantlıq iymek sıızıǵı berilgen teńlemenıń integrallıq iymek sıızıqları bolama? Sonı tekseriw kerek;

3) Bul integrallıq iymek sıızıqlardıń hár bir tochkasında birden-birlik qásiyeti buzılama? Sonı tekseriw kerek.

Eger usı úsh shárt te orınlansa, onda differenciallıq teńlemenıń bul izertlengen sheshimi *ayırıqsha sheshim* boladı.

(1) túrdegi differenciallıq teńlemenıń ayırıqsha sheshimlerin tabıwdıń ádewir ápiwayı hám qolaylı bolǵan ekinshi usılı usı teńlemelerdiń ulıwma sheshimi yamasa ulıwma integralı belgili bolǵan jaǵdayda paydalanıladı. Bul usıl bir parametrlik iymek sıızıqlar toparınıń orawshısı haqqındaǵı túsinikke tiykarlanadı.

Meyli (4) differenciallıq teńlemenıń

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (4)$$

ulıwma integralı tabılǵan bolsın, bunda C - erikli turaqlı. Bul ulıwma integral xOy tegisliginde bir parametrli iymek sıızıqlar toparın anıqlaydı.

Eger usı iymek sıızıqlar toparınıń orawshısı, yaǵnıy hár bir tochkasında (4) topardıń bir iymek sıızıǵı menen ulıwma urınbaǵa iye bolatuǵın iymek sıızıq bar bolsa, onda bul orawshı berilgen (1) differenciallıq teńlemenıń ayırıqsha sheshimi boladı. Haqıyqatında da, urınbasınıń baǵıtı (1) teńlemesi menen anıqlanǵan maydanniń baǵıtlarınıń biri menen dál kelgenlikten orawshı integrallıq iymek sıızıq boladı. Sonıń menen birge, orawshınıń hár bir tochkası arqalı eń keminde eki integrallıq iymek sıızıq - orawshınıń ózi hám (4) topardıń iymek sıızıqlarınıń biri ótkenlikten orawshınıń hár bir tochkasında sheshimniń birden-birligi buzıladı. Demek, orawshı ayırıqsha integrallıq iymek sıızıq, yaǵnıy ayırıqsha sheshim boladı.

Matematikalıq analiz kursınan belgili bolǵanıday-aq, eger $\Phi(x, y, C)$ úzliksiz differenciallanatuǵın funkciya bolsa, onda (4) iymek sıızıqlar toparınıń orawshısı

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C}(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

teńlemeler sisteması menen anıqlanatuǵın ***S-diskriminantlıq iymek sızıqtuń*** quramına kiredi.

Eger $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \varphi(x), C) \neq 0$ yamasa $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \varphi(x), C) \neq 0$ shártleri orınlansa, onda onıń bazıbir $y = \varphi(x)$ tarmaǵı orawshı boldı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Ayrıqsha sheshim degen ne?
2. p -diskriminantlıq iymek sızıq degen ne hám ol qalay tabıladı?
3. Ayrıqsha sheshimdi tabıw usılı neden ibarat?
4. S diskriminantlıq iymek qalay tabıladı?
5. Integrallıq iymek sızıqlar toparınıń orawshısı qalay tabıladı?
6. Birinshi tártipli teńlemenıń ulıwma túri qalay jazıladı?
7. Tuwındıǵa qarata sheshilmegen birinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı?
8. Koshi máselesi sheshiminiń bar bolıwı hám birden-birlik shártleri neden ibarat?

10 – lekciya. Joqarı tártipli differentsiallıq teńlemeler. Baslanǵısh shártler. Sheshimniń bar bolıwı haqqında teorema

Reje:

1. Joqarı tártipli differentsiallıq teńlemeler. Tiykargı túsinikler hám anıqlamalar.
2. Koshi máselesi. Sheshimniń bar-bolıwı haqqındaǵı teorema.
3. Ulıwma sheshim. Ulıwma integral. Parametrlik kórinistegi ulıwma sheshim. Aralıq integralları.
4. **Tayanış sózler:** Joqarı tártipli differentsiallıq teńlemeler. Sheshim. Integrallıq iymek sızıq. Koshi máselesi. Pikar teoreması. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ulıwma integral. Aralıq integralları.

Biz joqargı tártipli tuwındılardı óz ishine alatuǵın n -tártipli differentsiallıq teńlemelerdi úyrenemiz.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

túrindegi teńleme n -tártipli ápiwayı differentsiallıq teńleme dep ataladı. Bul jerde x - ǵárezsiz ózgeriwshi, y - belgisiz funkciya, $y', \dots, y^{(n)}$ - y funkciyasınıń sáykes tártiptegi tuwındıları, al F bolsa, $n+2$ ólshemli R^{n+2} keńisliginiń bazıbir D oblastında anıqlanǵan hám úzliksiz berilgen funkciya. Bul (1) teńlemede $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ shamaları qatnaspawı da múmkin, biraq teńlemede n – tártipli tuwındı $y^{(n)}$ niń qatnasıwı shárt bolıp tabıladı.

Kóp jaǵdaylarda (1) teńlemenı

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

teńleme kórinisine keltiredi. (2) teńleme úlken tuwındıǵa qarata sheshilgen n – tártipli differentsiallıq teńleme dep ataladı. (2) teńlemede f funkciyasın $n+1$ ólshemli $R^{(n+1)}$ keńisliginiń bazıbir G oblastında anıqlanǵan úzliksiz funkciya dep uyǵaramız.

Anıqlama. (2) differentsiallıq teńlemenıń $I = (a, b)$ intervalındaǵı sheshimi dep tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın $y = \varphi(x)$ funkciyasına aytıladı:

1) $\varphi(x) \in C^n(I)$; 2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in G, \forall x \in I$; 3) $\varphi(x)$ funkciyası (2) teńlemenı birdeylikke aylandıradı, yaǵnıy $\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)), \forall x \in I$.

Eger $\varphi(x)$ – (2) teńlemenıń sheshimi bolsa, onda $\{x, \varphi(x) | x \in I\}$ kópligi, yaǵnıy $y = \varphi(x)$ sheshimniń grafıǵı (2) teńlemenıń integrallıq iymek sızıǵı delinedi.

Sheshim túsinigi (1) teńleme ushın da usıǵan uqsas anıqlanadı.

(2) differenciallıq teńleme ushın Koshi máselesi yamasa baslanǵısh másele dep, (2) teńlemenin $x = x_0$ bolǵanda berilgen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın $y = y(x)$ sheshimin tabıw máselesine aytıladı, bunda $x_0 \in I, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ berilgen sanlar bolıp, olar baslanǵısh mánisler dep ataladı. Koshi máselesi sheshiminiń bar bolıwın hám onıń birden-birligin tómendegi teorema támiyinleydi.

Teorema (Pikar teoreması). Meyli (2) differenciallıq teńlemenin oń jaǵı

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b, \dots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b$$

oblastında anıqlanǵan bolıp, tómendegi eki shártti qanaatlandırsın:

1) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyası R oblastında úzliksiz hám demek, ol shegaralanǵan:

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq M \quad (M > 0);$$

2) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyası $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ózgeriwshileri boyınsha Lipshic shártin qanaatlandıradı:

$$|f(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})| \leq L \sum_{k=0}^{n-1} |y_1^{(k)} - y_2^{(k)}|, \quad (4)$$

bunda $L > 0$, $y^{(0)} \equiv y$, al $(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)})$ hám $(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})$ R oblastınıń qálegen tochkaları.

Sonda (2) differenciallıq teńleme (3) baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın

$$|x - x_0| \leq h$$

aralıǵında anıqlanǵan birden-bir $y = y(x)$ sheshimge iye boladı, bunda

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{\max(M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)} \right\}.$$

Eskertiw. Eger (2) teńlemenin oń jaǵı $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ boyınsha shegaralanǵan dara tuwındılarga iye bolsa:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right| \leq K, \quad k = \overline{0, n-1},$$

onda (4) Lipshic shárti sózsiz orınlanadı hám bunda $L = K$ boladı.

Meyli G - hár bir tochkasında (2) teńleme ushın Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye bolatuǵın oblast bolsın.

Anıqlama. n erikli turaqlı $C_1, C_2, \dots, C_n$ di óz ishine alğan

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (5)$$

funkciyası (2) teńlemenin G oblastındaǵı ulıwma sheshimi dep ataladı, egerde

1) φ funkciyası x boyınsha n ret úzliksiz differenciallanatuǵın bolsa;

2) qálegen $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ tochka ushın

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

$$y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

.....

$$y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

sisteması $C_1, C_2, \dots, C_n$ turaqlılarına qarata bir mánisli sheshimge iye

$$C_1^0 = \psi_1(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}),$$

$$C_2^0 = \psi_2(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}),$$

.....

$$C_n^0 = \psi_n(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$$

(6)

bolsa;

3) (6) qatnasları menen anıqlanğan $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ erikli turaqlılarının qálegen mánislerinde $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ tochkası G oblastına tiyisli bolǵanda $\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ funkciyası (2) teńlemenin sheshimi bolsa.

Solay etip, n -tártpılı (2) differenciallıq teńlemenin ulıwma sheshimi n erikli turaqlını óz ishine aladı.

Geometriyalıq jaqtan, ulıwma sheshim xOy tegisliginde $C_1, C_2, \dots, C_n$ lerden ibarat n parametrdn gárezli bolǵan integrallıq iymek sızıqlar toparın beredi.

(2) differenciallıq teńlemenin ulıwma sheshiminen $C_1, C_2, \dots, C_n$ turaqlılarının belgili bir sanlıq mánislerinde alınatuǵın hár qanday sheshim usı teńlemenin dara sheshimi delinedi.

Eger (5) ulıwma sheshim G oblastında anıq emes túrde

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (7)$$

qatnası menen berilse, onda bul (7) qatnası (2) teńlemenin G oblastındaǵı ulıwma integralı dep ataladı. Al, (7) qatnasınan $C_1, C_2, \dots, C_n$ turaqlılarının belgili bir sanlıq mánislerinde kelip shıǵatuǵın hár qanday $\psi(x, y) = 0$ qatnası berilgen teńlemenin dara integralı dep ataladı.

Geypara jaǵdaylarda (2) teńleme ushın ulıwma sheshimdi yamasa ulıwma integraldı anıqlaw qıyın bolıp, bul teńlemenin integrallay otırıp, x hám y ti bazıbir t parametrinin funkcıyası retinde ańlatıw múmkin. Eger bul funkcıyalar barlıǵı bolıp n erikli turaqlını óz ishine alıp, (2) teńlemenin qanaatlandırsa hám erikli turaqlılardıń belgili bir sanlıq mánislerinde usı teńlemenin bazıbir dara sheshimin berse, onda olardı (2) differenciallıq teńlemenin parametrik formadaǵı ulıwma sheshimi dep ataydı hám

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \quad (8)$$

túrinde jazadı.

Eger (8) teńliklerinen t parametrin shıǵarıp taslaw múmkin bolsa, onda ádettegi formadaǵı ulıwma sheshimge yamasa ulıwma integralǵa iye bolamız.

Hár bir tochkasında Koshi máselesinin sheshiminiń birden-birligi buzılatuǵın sheshim ayırıqsha sheshim dep ataladı. n -tártipli (2) teńleme $n-1$ -erikli turaqlılardan ǵárezli bolǵan ayırıqsha sheshimlerdin toparına iye bolıwı múmkin.

(2) differenciallıq teńlemenin integrallaw procesinde $\psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \dots, C_k) = 0$ qatnasına iye bolamız, bunda y belgisiz funkcıya, al $C_1, C_2, \dots, C_k$ - erikli turaqlılar. Bunday qatnas (2) teńlemenin k - tártipli aralıq integralı dep ataladı.

Al, $n-1$ -tártipli tuwındıǵa iye hám bir erikli turaqlını óz ishine alatuǵın $\psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0$ túrindegi aralıq integralı (2) teńlemenin birinshi integralı dep ataladı.

Eger n hár qıylı ǵárezsiz birinshi integral belgili bolsa, onda olardan $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ tuwındılarının barlıǵın shıǵarıp taslap, berilgen teńlemenin ulıwma integralın alamız.

$y^{(n)}$ tuwındıǵa qarata sheshilmegen (1) teńlemesi ushın da Koshi máselesi, (2) teńlemesi ushın Koshi máselesine uqsas qoyıladı: yaǵnıy (1) teńlemenin $x = x_0$ bolǵanda berilgen (3) baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw talap etiledi. Bunda, egerde $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ berilgen baslanǵısh mánislerge hám $F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ teńlemesinen anıqlanatuǵın $y^{(n)}$ mánislerinin hár birine tek bir sheshim ǵana sáykes kelse, onda Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye delinedi. Keri jaǵdayda, Koshi máselesinin sheshiminiń birden-birligi buzılǵan dep esaplanadı.

(1) teńleme ushın Koshi máselesi sheshiminiń bar bolıwın hám onıń birden-birligin tómendegi teorema tastıyıqlaydı.

Teorema. Meyli F funkciyası D oblastında úzliksiz bolıp, usı oblastta $y, y', \dots, y^{(n)}$ boyınsha úzliksiz dara tuwındılargá iye bolsın. Sonda $F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}) \neq 0$ shártlerin qanaatlandıratuǵın qálegen $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ tochka ushın (1) teńlemenin $x_0 \in I$ tochkasınıń bazıbir dógereginde anıqlanǵan hám n ret úzliksiz differenciallanatuǵın, (3) shártlerin qanaatlandıratuǵın hám sonday-aq $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ bolatuǵın birden-bir $y = y(x)$ sheshimi bar boladı.

Bul teoremanı dálillewde kóp argumentli anıq emes funkciyanıń bar bolıwı haqqındaǵı teorema hám usı lekciyada keltirilgen Pikar teoreması paydalanadı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. $y^{(n)}$ ge qarata sheshilgen n -tártipli teńleme qanday kóriniske iye? (2) teńlemenin sheshimi (integrallıq iymek sızıǵı) degen ne? Ol qanday kórinislerde beriliwi múmkin?
2. $y^{(n)}$ ge qarata sheshilgen n -tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı?
3. Ekinshi tártipli teńleme ushın Koshi máselesi qanday geometriyalıq hám mexanikalıq maǵanaǵa iye?
4. Qanday shártlerde Koshi máselesi sheshimge iye? Qashan bul sheshim birden-bir boladı?
5. Ulıwma sheshim degen ne? Ulıwma sheshim formulasınan Koshi máselesi qalay sheshiledi? Koshi kórinisindegi ulıwma sheshim degen ne?
6. Qanday sheshim dara sheshim delinedi? Ayırıqsha sheshim degen ne? Qanday jaǵdaylarda teńleme ayırıqsha sheshimlerge iye emes?

11-lekciya. Kvadraturalarda integrallanatuğın teńlemeler

Reje:

1. $y^{(n)} = f(x)$ túrindegi teńlemeler.
2. $F(x, y^{(n)}) = 0$ túrindegi teńlemeler
3. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ túrindegi teńlemeleri.

Tayanış sózler:Joqarı tártipli differenciallıq teńleme. Kvadratura. Integrallanatuğın teńlemeler túrleri.

Joqarı tártipli differenciallıq teńlemelerdiń kvadraturalarda integrallanatuğın bazı bir túrlerin qarastıramız.

1. Gárezsiz ózgeriwshini hám belgisiz funkciyanıń n-tártipli tuwındısın baylanıstratuğın teńleme:

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Bul teńleme $y^{(n)}$ ge qarata sheshilse, yaǵnıy $y^{(n)} = f(x)$ túrine alıp keliw múmkin bolsa, onda onıń ulıwma sheshimi

$$Y = \int \dots \int_{n-1} f(x) dx \dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

túrine iye boladı, bul jerde $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Meyli (1) teńleme $y^{(n)}$ ge qarata sheshilmeytuğın, biraq x qa qarata sheshiletuğın teńleme bolsın, yaǵnıy $x = f(y^{(n)})$. Onda $y^{(n)} = p$ dep alıp, onıń parametrlik formadağı ulıwma sheshimin

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \varphi(p) + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n \end{cases}$$

túrinde kórsetiwge boladı.

Eger teńleme x qa qarata yamasa $y^{(n)}$ ge qarata sheshilmese, onda $x = \varphi(t), y^{(n)} = \gamma(t)$ belgilewin jasap, onıń

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

túrindegi parametrlik formadağı ulıwma sheshimin alıwğa boladı.

Mısal. $x = y''^2 + 1$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. $y'' = t$ dep belgileymiz. Sonda $x = t^2 + 1$, bunnan $dx = 2tdt$. Al, $dy' = y''dx = tdx = 2t^2dt$ bolğanlıqtan, $\int dy' = \int 2t^2dt + C_1$ yamasa $y' = \frac{2}{3}t^3 + C_1$ boladı. Bunnan $dy = y'dx = \left(\frac{2}{3}t^3 + C_1\right)2tdt$ bolğanlıqtan, $y = \int \left(\frac{2}{3}t^3 + C_1\right)2tdt = \frac{4}{15}t^5 + C_1t^2 + C_2$.

Solay etip, berilgen teńlemenin parametrik formadaǵı ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \frac{4}{15}t^5 + C_1t^2 + C_2 \end{cases}$$

túrinde jazıladı.

2. Ǵárezsiz ózgeriwshi anıq túrde qatnaspaytuǵın

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

túrindegi teńlemeler. Bul teńlemede $z = y^{(n-1)}$ dep alıp, onı

$$F(z, \frac{dz}{dx}) = 0 \quad (3)$$

túrindegi ǵárezsiz ózgeriwshi argument qatnaspaǵan birinshi tártipli differenciallıq teńlemege alıp keliwge boladı. Eger ol tuwındıǵa qarata sheshilse, onda $\frac{dz}{dx} = f(z)$ bolıp, bunnan $x = \psi(z, C_1)$ boladı.

Meyli bul teńlik z ke qarata $z = \varphi(x, C_1)$ túrinde sheshilsin. Onda $y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$ bolıp,

$$y = \int \dots \int_{n-1} \varphi(x, C_1) dx dx \dots dx + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n$$

boladı.

Eger (3) teńleme z ke qarata elementar funkciyada sheshilse, yaǵnıy $z = f\left(\frac{dz}{dx}\right)$ bolsa, onda $\frac{dz}{dx} = p$ parametrin engizip,

$$\begin{cases} x + C_1 = \int \frac{f'(p)}{p} dp, \\ y = \gamma(p) + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n \end{cases}$$

túrindegi parametrik formadaǵı ulıwma sheshimge iye bolamız.

3. Ǵárezsiz ózgeriwshi anıq túrde qatnaspaytuǵın

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

túrindgi teńlemeler. Bul teńlemeni $y^{(n-2)} = z$ almasırwı járdeminde $F(z, z'') = 0$ túrindgi ekinshi tártipli teńlemege alıp kelemiz.

Meyli ol z'' ke qarata $z'' = f(z)$ túrinde sheshiletuǵın bolsın. Onda bunı integrallap,

$$\pm \int \frac{dz}{\sqrt{2 \int f(z) dz + C_1}} = x + C_2$$

yamasa $y^{(n-2)} = z$ ti esapqa alsaq, $\gamma(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0$ túrindgi aralıq integralǵa iye bolamız. Bul teńleme $n-2$ -tártipli differenciallıq teńleme bolıp, onı joqarıdaǵı usıllardıń biri menen integrallawǵa boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar.

1. $y^{(n)} = f(x)$ teńlemesiniń ulıwma sheshimi qanday kóriniske iye?
2. $F(x, y^{(n)}) = 0$ teńlemesiniń ulıwma sheshimin qalay tabıwǵa boladı?
3. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ teńlemesi qalay integrallanadı?
4. $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ teńlemesi qalay integrallanadı?

12-lekciya. Joqarı tártipli differensiyallıq teńlemelerdiń tártibin tómendetiw

Reje:

1. Belgisiz funksiya hám onıń k-tártipke shekemgi tuwındıları qatnaspaǵan teńlemeler
2. Ğárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńlemeler.
3. $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ge qarata bir tekli teńleme.
4. Ulıwmalasqan bir tekli teńlemeler.
5. Dál tuwındılardaǵı teńlemeler.
6. **Tayanış sózler:** Belgisiz funksiya qatnaspaǵan teńlemeler. Ğárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńlemeler. Bir tekli teńleme. Ulıwmalasqan bir tekli teńlemeler. Dál tuwındılardaǵı teńlemeler.

Meyli

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < n) \quad (1)$$

túrindegi teńlemenı qarayıq. Bul teńlemenı $y^{(k)} = z$ belgilewi járdeminde jańa $z = z(x)$ belgisiz funkciyasın engiziw arqalı $(n - k)$ -tártipli teńlemege alıp keliwge boladı:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (2)$$

Eger (2) teńleme kvadraturada integrallanatuǵın bolsa, onda onı integrallap, $z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$ ulıwma sheshimin yamasa $\phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0$ ulıwma integralın alamız. Sonda biz qaytadan y ózgeriwshisine ótip, (1) teńlemenıń

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \text{ yamasa } \phi(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0 \quad (3)$$

aralıq integralına iye bolamız. Alınǵan (3) teńleme (10.1) tipindegi teńleme boladı.

1-mısal. $xy''' - y'' = 0$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemede belgisiz funksiya y hám onıń birinshi tártipli tuwındısı qatnaspaǵan, yaǵnıy bul 1^o tiptegi teńleme. $y'' = z$ dep, jańa z belgisiz funkciyasına ócek, onda berilgen teńleme $xz' - z = 0$ teńlemesine keledi. Bunnan

$$x \frac{dz}{dx} - z = 0, \quad \frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \int \frac{dz}{z} - \int \frac{dx}{x} = \ln C_1, \quad \ln |z| - \ln |x| = \ln C_1, \quad z = C_1 x.$$

Endi y ózgeriwshige qayta ócek, onda $y'' = C_1 x$ teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemenı eki ret izbe-iz integrallap, berilgen teńlemenıń $y = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3$ ulıwma sheshimin alamız, bunda C_1, C_2, C_3 - erikli turaqlılar.

Bunday teńleme

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

túrine iye. Biz

$$y' = p \quad (5)$$

formulası járdeminde jańa $p = p(y)$ belgisiz funkciyasına ótemiz, bul jerde y ti ġárezsiz ózgeriwshi retinde qabıl etemiz. $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ tuwındıların p hám onıń y boyınsha alınğan tuwındıları arqalı ańlatamız. Sonda

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} p \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dp}{dy} p \right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 p}{dy^2} p + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right) p,$$

.....,

$$y^{(n)} = w \left(p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right).$$

Endi (5) hám (6) tuwındıların (4) teńlemege qoysaq,

$$F \left(y, p, \frac{dp}{dy} p, \dots, w \left(p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) \right) = 0 \quad (7)$$

teńlemege iye bolamız. Bul $(n-1)$ -tártipli teńleme. Eger onı sheship, $p = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$ ulıwma sheshimin tapsaq, onda y belgisiz funkciyasına qaytadan ótip,

$$y' = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1}) \quad (8)$$

teńlemesin alamız. Bul teńlemenı integrallap, (4) teńlemenıń ulıwma sheshimin tabamız.

2-mısal. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$ Koshi máselesiniń sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńleme ġárezsiz ózgeriwshi x anıq túrde qatnaspağan teńleme boladı. $y' = p$ almastırıwı járdeminde jańa $p = p(y)$ belgisiz funkciyasın kiritemiz. Sonda berilgen teńleme

$$p \frac{dp}{dy} \cos y + p^2 \sin y = p$$

túrine keledi. Izlengen sheshim ushın $p \neq 0$, $y \neq 0$. Sol sebepli sońǵı teńlemenıń eki jaǵında $p \cos y$ ke bólip,

$$\frac{dp}{dy} + \frac{\sin y}{\cos y} p = \frac{1}{\cos y}$$

teńlemesin alamız. Bul birinshi tártipli birtekli emes sızıqlı teńleme. Onıń ulıwma sheshimi tómendegi formula arqalı anıqlanadı:

$$p = e^{-\int \frac{\sin y}{\cos y} dy} \left[C_1 + \int \frac{1}{\cos y} e^{\int \frac{\sin y}{\cos y} dy} dy \right],$$

bunnan $p = C_1 \cos y + \sin y$. Bundaǵı C_1 erikli turaqlını berilgen baslanǵısh shártlerdi paydalanıp tabamız. Shártke muwapıq, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = p\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ bolǵanlıqtan, sońǵı teńlikten $C_1 = \sqrt{3}$ ekeni kelip shıǵadı. Demek, $p = \sqrt{3} \cos y + \sin y$ yamasa $p = 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right)$.

Endi $y' = p$ almasıruwın esapqa alsaq, onda

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{dy}{\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right)} = 2dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right)} = 2x + C_2, \quad \ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + C_2.$$

Bunnan baslanǵısh shártlerdi esapqa alsaq, $C_2 = 2$ ekeni kelip shıǵadı. Sol sebepli berilgen Koshi máselesiniń sheshimi

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + 2$$

qatnası menen anıqlanadı.

Eskertiw. Usı mısalda kórsetilgenindey-aq, joqarı tártipli teńlemeler ushın Koshi máselesin tártibin tómendetiw usılı menen sheshkende erikli turaqlılardı hár bir integrallawdan keyin tawıp barǵan maqul boladı.

Meyli

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (9)$$

teńlemesi berilsin. Bul teńleme belgisiz funkciyaǵa hám onıń tuwındılarına qarata birtekli teńleme dep ataladı, egerde F funkciyası $y, y', \dots, y^{(n)}$ ge qarata birteklilik kórsetkishi m bolǵan birtekli funkciya bolsa, yaǵnıy $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) \equiv t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ birdeyligi orınlansa. Bul jaǵdayda

$$y' = yu \quad (10)$$

almastırırwı járdeminde jańa u belgisiz funkciyasın kiricek, onda (9) teńlemeninń tártibi bir birlikke tómenleydi. Haqıyqatında da,

$$\begin{aligned} y' &= yu, \\ y'' &= y(u^2 + u'), \\ y''' &= y(u^3 + 3uu' + u''), \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= yq(u, u', \dots, u^{(n-1)}). \end{aligned} \tag{11}$$

$$F(x, 1, u, u^2 + u', \dots, q(u, u', \dots, u^{(n-1)})) = 0 \quad (13)$$

boladı. Bul (11) tuwındılardı (9) teñlemege qoysaq hám F funkciyasınıń birteklilik qásiyetin paydalansaq, onda

$$y^m F(x, 1, u, u^2 + u', \dots, g(u, u', \dots, u^{(n-1)})) = 0 \quad (12)$$

teńlemesin alamız. (12) teńlemeni y^m ge qısqarcaq, u ğa qarata $(n-1)$ -tártıplı differenciallıq teńlemege iye bolamız.

Eger (13) teñlemenin ulıwma sheshimin $u = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$ túrinde tapsaq, onda (10) ға muwapıq u dı $\frac{y'}{y}$ ke almasırap,

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

teñlemesin alamız. Bul teñlemeni integrallap, (9) teñlemenin ulıwma sheshimin tabamız:

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx} \quad (14)$$

bunda $C_1, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Eskertiw. Biz (12) teńlemi y^m ge qısqartqanda $y=0$ sheshimin joytpaymız, sebebi bul $y=0$ sheshimi (14) den $C_n=0$ bolǵanda alınadı.

(9) tənlemini qarayıq. Eger sonday k hám n sanları tabılıp,

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \dots, t^{k-n} y^{(n)}) \equiv t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

birdeyligi orınlansa, yaǵnıy $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ di sáykes túrde birinshi, k -shi, $(k-1)$ -shi, ..., $(k-n)$ -shi ólshemli shamalar dep esaplaǵanda, F funkciyası birtekli funkciya bolsa, onda (9) teńleme ulıwmalasqan birtekli teńleme dep ataladı.

Bunday teńlemenı integrallaw ushın x hám y ózgeriwshileriniń ornına sáykes túrde t hám u jańa ózgeriwshilerin

$$x = e^t, y = ue^{kt} \quad (15)$$

formulalar járdeminde kiritemiz. Sonda (9) teńleme gárezsiz ózgeriwshisi qatnaspaǵan teńlemege, yaǵnıy tártibin bir birlikke tómenletiw múmkin bolǵan teńlemege aylanadı.

Bul jaǵdayda (15) almasırıwın orınlaǵanda tuwındılar tómendegi formulalar boyınsha túrlenedi:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dt} e^{-t} = \left(\frac{du}{dt} e^{kt} + k u e^{kt} \right) e^{-t} = (u' + k u) e^{(k-1)t}, \\
y'' &= \frac{dy'}{dt} e^{-t} = (u'' + (2k-1)u' + k(k-1)u) e^{(k-2)t}, \\
&\dots\dots\dots, \\
y^{(n)} &= w(u, u', \dots, u^{(n)}) e^{(k-n)t}.
\end{aligned}
\tag{16}$$

Bul (15) hám (16) formulaların (9) teńlemege qoyıp $e^{mt}F_1(u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$ túrindegi teńlemenı alamız. Bunnan e^{mt} ğa qısqartqannan keyin anıq túrde ğárezsiz ózgeriwshi t qatnaspağan teńlemege kelemiz.

3-misal. $x^4 y'' - (x^3 + 2xy) y' + 4y^2 = 0$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeni $x^4 y'' - x^3 y' - 2xyy' + 4y^2 = 0$ túrinde jazayıq. Bul teńlemenin ulıwmalasqan birtekli teńleme ekenin kórsetiw ushın hám k sanın tabıw ushın x tı tx qa, y tı $t^k y$ ke, y' tı $t^{k-1} y'$ qa, al y'' tı $t^{k-2} y''$ qa almasırgannan keyin, teńlemenin hár bir aǵzasına kirgen t nıń dáreje kórsetkishlerin bir-birine teńlestiriw kerek. Berilgen teńlemede ayılǵan almasırıwdı ámelge asırgannan keyin teńlemenin birinshi aǵzasına t shaması $4+k-2$ dárejede, ekinshi aǵzasına $3+k-1$ dárejede, úshinshi aǵzasına $1+k+k-1$ dárejede, al tórtinshi aǵzasına $2k$ dárejede kiredi. Demek, k sanı $4+k-2=3+k-1=1+k+k-1=2k$ teńlemelerin qanaatlandırıw kerek. Bunnan $k=2$. Eger de k ushın alıńǵan teńlemeler birgelikli bolmasa, onda berilgen differenciallıq teńleme kórsetilgen mániste birtekli teńleme bolmaydı.

Solay etip, berilgen teńlemede $x = e^t$, $y = ue^{2t}$ alastırıwın isleymiz. Sonda

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \left(\frac{du}{dt} + 2u \right) e^t, \quad y'' = \frac{d^2u}{dt^2} + 3 \frac{du}{dt} + 2u.$$

Bulardı esapqa alsaq, berilgen teńleme $u'' + 2(1-u)u' = 0$ túrine keledi. Bul gárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńleme. Onı joqarıda kórsetilgen usıl menen integrallap, $u = 1 + C, tq(C, t + C_2)$ ulıwma sheshimge iye bolamız. Bunnan dáslepki x hám y

özgeriwshilerine ócek, berilgen teńlemenin ulıwma sheshimin alamız:
 $y = x^2[1 + C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln x + C_2)]$, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar.

Meyli

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (17)$$

teńlemenin shep jaq bólegi $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ özgeriwshilerinen gárezli bolğan bazıbir $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyasınan x boyınsha alınğan dál tuwındı bolsın, yaǵnıy

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

yamasa

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}. \quad (18)$$

Bunday teńlemeler dál tuwındılardaǵı teńlemeler dep ataladı. Bul (18) qatnasınan

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1 \quad (19)$$

qatnasının (17) teńlemenin birinshi integralı bolatuǵını kelip shıǵadı, al bul (19) qatnası belgisiz funkciya $y(x)$ - ke qarata $(n-1)$ -tártipli differenciallıq teńleme. Solay etip, shep bólegi dál tuwındı bolıp kelgen teńlemelerdin tártibin 1 ge tómendetiwge boladı.

4-mısal. $yy'' + y'^2 = 1$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Bul teńlemenin shep bólegi bolğan $yy'' + y'^2$ ańlatpası yy' tın tuwındısı boladı. Sol sebebli berilgen teńlemenin $\frac{d}{dx}(yy') = 1$ túrinde jaza alamız, bunnan

$$d(yy') = dx, \quad \int d(yy') = \int dx + \bar{C}_1, \quad yy' = x + \bar{C}_1,$$

$$y \frac{dy}{dx} = x + \bar{C}_1, \quad y dy = (x + \bar{C}_1) dx, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \bar{C}_1 x + \bar{C}_2, \quad y^2 = x^2 + C_1 x + C_2,$$

$C_1 = 2\bar{C}_1, C_2 = 2\bar{C}_2$ - erikli turaqlılar.

Eger (17) teńleme dál tuwındılardaǵı teńleme bolmasa, onda bul teńlemenin integrallawshı kóbeytiwshisi bolatuǵın sonday $\mu = \mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyasın tańlap alıwǵa háreket etiledi, berilgen teńlemenin bul funkciyaǵa kóbeytkennen keyin ol dál tuwındılardaǵı teńlemege aynaladı.

5-mısal. $yy'' = y'(y' + 1)$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. $y \equiv 0$ bul teńlemenin sheshimi bolatugin ayqın kórinip tur. Berilgen teńlemenin $yy'' - y'^2 = y'$ túrinde jazıp hám $y \neq 0$ dep esaplap, teńlemenin shep hám óń jaqların $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ integrallawshı kóbeytiwshige kóbeytemiz:

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2}, \text{ bunnan } \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \right) \text{ yamasa } \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} \right) = 0.$$

Solay etip, berilgen teńleme dál tuwındılardağı teńlemege alıp kelindi. Onın birinshi integralı

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1 \text{ yamasa } y' - C_1 y = -1$$

boladı. Bunan $C_1 = 0$ bolǵanda $y = -x + C$ sheshimin alamız. Al, $C_1 \neq 0$ bolǵanda birinshi tártipli birtekli emes sıızıqlı teńlemege iye bolamız hám onın ulıwma sheshimi

$$y = e^{C_1 x} \left(C_2 - \int e^{-C_1 x} dx \right) = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1} \quad (C_1 \neq 0)$$

boladı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Belgisiz funkciya qatnaspaǵan teńleme hám belgisiz funkciya menen onın izbe-iz kelgen dáslepki tuwındıları qatnaspaǵan teńleme qanday almasıw járdeminde tártibi tóménletiledi?

2. Gárezsiz ózgeriwshi qatnaspaǵan teńlemenin tártibi qalay tóménletiledi?

3. $y, y', \dots, y^{(n)}$ ge qarata birtekli teńleme, ulıwmalasqan birtekli teńleme hám dál tuwındılardağı teńleme qalay integrallanadı?

13-lekciya. n – tártipli sızıqlı differensiallıq teńlemeler hám olardıń ulıwma qásiyetleri.

Reje:

1. n –tártipli sızıqlı differensial teńlemeler.
2. Bar-bolıwı hám birden-birlik teoreması.
3. Sızıqlı teńlemelerdıń ulıwmalıq qásiyetleri.
4. Sızıqlı differenciallıq operator.
5. n –tártipli birtekli sızıqlı teńlemeler. Sheshimlerdıń qásiyetleri

6. Tayanış sózler: *Sızıqlı differensial teńlemelerl. Birtekli sızıqlı teńleme. Birtekli emes sızıqlı teńleme. Bar-bolıwı hám birden-birlik teoreması. Sızıqlı differenciallıq operator. Birtekli sızıqlı teńlemelerdıń sheshimleriniń qásiyetleri.*

Differenciallıq teńlemeler teoriyasında sızıqlı teńlemeler tarawı úlken áhmiyetke iye. Sebebi sızıqlı teńlemeler oǵada tereń izertlengen hám sonıń menen birge olar fizikada, mexanikada, texnikada, matematikalıq biologiyada hám t. b. ilim tarawlarında keńnen qollanıw mumkinshiligine iye bolıp tabıladı.

Eger n -tártipli differenciallıq teńleme belgisiz funkciyaǵa hám onıń barlıq $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ tuwındılarına qarata sızıqlı bolsa, onda ol sızıqlı differenciallıq teńleme dep ataladı. Bunday teńleme ulıwma túrde tómendegishe jazıladı:

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = F(x), \quad (1)$$

bunda $A_i(x), i=1,2,\dots,n, F(x)$ - ǵárezsiz ózgeriwshi x tıń belgili funkciyaları, $A_i(x)$ funkciyaları (1) teńlemenıń koefficientleri delinedi, al $F(x)$ bolsa (1) teńlemenıń bos aǵzası yamasa oń jaǵı dep ataladı.

Ulıwma jaǵdayda, (1) teńleme ózgermeli koefficientli sızıqlı teńleme delinedi. Dara jaǵdayda, bul teńlemenıń barlıq $A_i, i=0,1,2,\dots,n$ koefficientleri turaqlı sanlar bolıwı múmkin, bul jaǵdayda, yaǵnıy $A_i = \text{const}, i=0,1,2,\dots,n$ bolǵanda (1) teńleme turaqlı koefficientli sızıqlı differenciallıq teńleme dep ataladı.

Eger $A_0(x) \neq 0$ bolsa, onda berilgen (1) teńlemenıń eki jaǵın da usı koefficientke bólip, onı

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (2)$$

túrde jazıwǵa boladı, bunda $p_i(x), i=1,\dots,n, f(x)$ - belgili funkciyalar. Bul kanonikalıq túrdegi sızıqlı teńleme delinedi.

Eger $f(x) \equiv 0, x \in I$ bolsa, onda (2) teńleme

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (3)$$

kórinisinde boladı hám ol birtekli sızıqlı teńleme delinedi. Usıǵan baylanışlı, eger (2) teńlemede $f(x) \neq 0, x \in I$ bolsa, onda ol birtekli emes sızıqlı teńleme dep ataladı.

Sızıqlı differenciallıq teńlemenin berilgen qosımsha shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi úlken áhmiyetke iye. Usınday máselelerdin en áhmiyetlilerinin biri Koshi máselesi bolıp tabıladı.

(2) teńleme ushın Koshi máselesi, yaǵnıy baslanǵısh másele, tómendegishe qoyıladı: (2) teńlemenin barlıq sheshimleri ishinen $x = x_0$ bolǵanda berilgen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (4)$$

baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw talap etiledi, bunda $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ berilgen baslanǵısh mánisler.

Kanonikalıq túrdegi (2) teńlemenin

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y + f(x) \equiv R(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

túrinde jazıp hám $R(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funkciyası óziniń barlıq

$$\frac{\partial R}{\partial y^{(n-i)}} = -p_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y^{(0)}} = \frac{\partial R}{\partial y} = p_n(x) \right)$$

dara tuwındıları menen birge $x \in [\alpha, \beta] \subset I$ bolǵanda hám qálegen $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ ushın úzliksiz ekenin esapqa alsaq, onda (2) teńlemenin on jaǵı sheshimnin bar bolıwı hám onıń birden birliǵı haqqındaǵı Pikar teoremasınıń barlıq shártlerin qanaatlandıratuǵının kóriwge boladı. Demek, bul teoremaǵa muwapıq, qálegen $x_0 \in I$ de hám qálegen $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ baslanǵısh mánislerde (2) teńleme ushın Koshi máselesinin sheshimi pútkil $I = (a, b)$ intervalında bar boladı hám ol birden-bir boladı.

Sızıqlı teńlemenin hár qanday sheshimi dara sheshim boladı, demek, bunday teńleme ayırıqsha sheshimlerge iye bolmaydı. Sızıqlı teńlemeler tómendegi ulıwmalıq qásiyetlerge iye:

1. Sızıqlı teńleme ǵárezsiz ózgeriwshini qálegen almasırwda sızıqlı bolıp qaladı.

Eger, usı $x = \varphi(t)$ almasırwın (2) birtekli sızıqlı teńlemede orınlasaq, onda biz qaytadan birtekli sızıqlı teńlemenin alamız, yaǵnıy ǵárezsiz ózgeriwshini qálegen almasırwda teńlemenin sızıqlılıǵı hám bir tekliligi saqlanadı.

2. Sızıqlı teńleme belgisiz funkciyanı qálegen sızıqlı almasırwda sızıqlı bolıp qaladı.

Al, eger (2) birtekli sızıqlı teńlemede $y = \alpha(x)z$ birtekli sızıqlı almasırwın orınlasaq, onda qaytadan birtekli sızıqlı teńlemege iye bolamız yaǵnıy belgisiz funkciyanı birtekli sızıqlı almasırwda teńlemenin sızıqlılıǵı hám birtekliligi saqlanadı. Sızıqlı teńlemelerdin bul kásiyetleri olardı ápiwayılastırıp ushın, dara jaǵdayda, turaqlı koefficientli teńlemege keltiriw ushın paydalanıladı.

Meyli n -tártpili sızıqlı birtekli teńleme bolǵan

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (5)$$

teńlemesi berilsin.

Bul (5) teńlemenin sol jaǵında belgisiz funkciya $y(x)$ ke qarata kórsetilgen differenciallaw, $p_i(x)$ funkciyasına kóbeytiw hám qosıw ámellerin qollanıw nátiyjesi n -tártipli sızıqlı differenciallıq operator dep ataladı hám $L[y]$ arqalı belgilenedi, yaǵnıy

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \quad (6)$$

Bul operator járdeminde (5) teńleme

$$L[y] = 0 \quad (5')$$

túrinde jazıladı. $L[y]$ operatorı tómendegi eki áhmiyetli qásiyetke iye:

- 1) $L[Cy] = CL[y]$, $y \in C^n$, $C = \text{const}$;
- 2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, $y_1 \in C^n$, $y_2 \in C^n$.

Bul eki qásiyettin saldarı retinde tómendegi qatnastı alıwǵa boladı:

$$L\left[\sum_{i=1}^m C_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^m C_i L[y_i(x)],$$

bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Endi (5) sızıqlı birtekli teńlemenin sheshimleriniń áhmiyetli qásiyetlerin kórsetemiz.

Teorema-1. Eger $y = y_1(x)$ funkciyası (5) sızıqlı birtekli teńlemenin I intervalında sheshimi bolsa, onda $Cy_1(x)$ funkciyası da sol intervalda (5) teńlemenin sheshimi boladı, bunda C - erikli turaqlı.

Teorema-2. Eger $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ funkciyaları I intervalında (5) sızıqlı birtekli teńlemenin sheshimleri bolsa, onda $y = y_1(x) + y_2(x)$ funkciyası da usı intervalda (5) teńlemenin sheshimi boladı.

Bul eki teoremadan tómendegi saldar kelip shıǵadı:

Saldar. Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları I intervalda (5) teńlemenin sheshimi bolsa, onda sol intervalda

$$y = \sum_{i=1}^m C_i y_i(x) \quad (7)$$

funkciyası da (5) teńlemenin sheshimi boladı, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Teorema-3. Eger (5) sızıqlı birtekli teńlemenin $p_i(x)$, $x \in I$, ($i = 1, 2, \dots, n$) koefficientleri haqıyqıy funkciyalar bolıp, bul teńleme $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleks sheshimge iye bolsa, onda $u(x)$ hám $v(x)$, $x \in I$ funkciyalarınin hár biri usı (5) teńlemenin sheshimi boladı.

Joqarıda keltirilgen saldar boyınsha n erikli turaqlını óz ishine alğan (7) funksiya da (5) n -tártipli sızıqlı birtekli teńlemenin sheshimi boladı. Eger bul turaqlılardıń barlıǵı eskererlik turaqlılar bolsa, onda (7) ańlatpası ulıwma sheshim boladı.

Bul (7) ańlatpa (5) teńlemenin ulıwma sheshimi bolıwı ushın dara sheshimler qanday shártlerdi qanaatlandırıwı kerekligi haqqındaǵı másele funksiylardıń sızıqlı ġárezcizligi túsiniǵı menen baylanıslı sheshiledi.

14-lekciya. Sızıqlı ġárezsiz funksiylar. Vronskiy determinantı hám onıń qásiyetleri.

Reje:

1. Sızıqlı ġárezli hám sızıqlı ġárezsiz funksiylar
2. Vronskiy determinantı hám onıń qásiyetleri. Ostrogradskiy-liyvill formulası
3. Sheshimlerdin fundamental sisteması

Tayanış sózler: Sızıqlı ġárezli funksiylar. Sızıqlı ġárezsiz funksiylar.

Vronskiy determinant, onıń qásiyetleri. Ostrogradskiy-liyvill formulası. Sheshimlerdin fundamental sisteması. Ulıwma sheshim.

Meyli bazıbir $I = (a, b)$ intervalında anıqlanǵan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyları berilsin.

Anıqlama. Eger bir waqıtta 0 ge teń bolmaǵan sonday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ turaqlı sanları bar bolıp, I intervalda

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \quad (8)$$

birdeyligi orınlı bolsa, onda usı $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiylar I intervalda sızıqlı ġárezli dep ataladı.

Eger de (8) birdeyligi barlıq $x \in I$ ushın orınlı bolatuǵın sonday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ turaqlıları bar bolmasa, yaǵnıy (8) birdeyligi tek $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ bolǵanda ǵana orınlı bolsa, onda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyları I intervalda sızıqlı ġárezsiz dep ataladı.

Meyli, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyları I intervalında anıqlanǵan, úzliksiz hám $n-1$ -tártipke shekemgi hám usı tártiptegi úzliksiz tuwındılarına iye bolsın. Usı funksiylar jıynaǵınıń sızıqlı ġárezziliginin yamasa sızıqlı ġárezsizliginin belgisin alıw ushın bul funksiylardan hám olardıń tuwındılarınan dúzilgen

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (9)$$

anıqlawışın kiritemiz. Bul (9) anıqlawış Vronskiy anıqlawışı yamasa vronskian dep ataladı.

Tómendegi tastıyqlaw orınlı.

Teorema-4. Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları sıızqlı ġárezli bolsa, onda olardıń Vronskiy anıqlawshısı birdeylik túrde nolge teń boladı.

Teorema-5. Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları (5) birtekli sıızqlı teńlemenin (a, b) intervalında ġárezsiz dara sheshimleri bolsa, onda olardıń Vronskiy anıqlawshısı usı intervaldıń bir de tochkasın da nolge aynalmaydı.

4-5 teoremalardan (5) teńlemenin n dara sheshiminiń sıızqlı ġárezsizliginiń tómendegi belgisi kelip shıǵadı: úzliksiz koef-ficientlerge iye n -tártipli sıızqlı birtekli teńlemenin n sheshiminiń koef-ficientlerdin úzliksizlik intervalında sıızqlı ġárezsiz bolıwı ushın olardıń Vronskiy anıqlawshısınıń usı intervaldıń barlıq tochkalarında nolden ózgeshe bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

n -tártipli birtekli sıızqlı teńleme bolǵan (5) teńlemenin n dara sheshiminiń Vronskiy anıqlawshısı ushın onıń mánisin $n-1$ -tártipli tuwındı aldında ġı $p_1(x)$ koef-ficient penen

baylanıstratuǵın $W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x p_1(x)dx}$ formulası orınlı. Bul formula Ostrogradskiy -Liuvill formulası dep ataladı.

Eger $W(x_0) \neq 0, x_0 \in (a, b)$ bolsa, onda barlıq $x \in (a, b)$ ushın $W(x) \neq 0$ bolǵanlıqtan, $W(x)$ anıqlawshısınıń (a, b) intervalınıń bazıbir $x = x_0$ tochkasında nolge aynalmaytuǵınına iseniw jetkilikli.

Anıqlama. (5) sıızqlı birtekli teńlemenin n sıızqlı ġárezsiz dara sheshimlerinden turǵan hár qanday sistema usı teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sisteması dep ataladı.

Teorema-6. Eger (5) birtekli sıızqlı teńlemenin barlıq koef-ficientleri (a, b) intervalında úzliksiz bolsa, onda ol sheshimlerdin fundamentallıq sistemasına iye boladı.

Teorema-7. (Ulıwma sheshim haqqında). Eger $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkciyaları (5) birtekli sıızqlı teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sisteması bolsa, onda $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ formulası (5) teńlemenin $a < x < b$, $|y| < +\infty, |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty$ oblasttaǵı ulıwma sheshimin beredi, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. n -tártipli sıızqlı teńlemenin ulıwma túri qanday? Qanday shártte sıızqlı teńleme ushın Koshi máselesi birden-bir sheshimge iye?

2. Birtekli sıızqlı teńlemenin dara sheshimleriniń tiykarǵı qásiyetleri neden ibarat?

3. Birtekli sıızqlı teńlemenin qanday sheshimleri sıızqlı-ġárezsiz dep ataladı? Sheshimlerdin fundamentallıq sisteması degen ne? Nollik sheshim fundamentallıq sistema quramına kiriwi

múmkın be? Sheshimlerdiń berilgen sisteması fundamentallıq sistema bolıwınıń zárúrli hám jetkilikli shártleri neden ibarat?

4. Eger sheshimlerdiń fundamentallıq sisteması belgili bolsa, birtekli sızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimin qalay dúziw múmkın? Ulıwma sheshim qanday oblastta anıqlanadı? Ulıwma sheshim formulası járdeminde Koshi máselesin qalay sheshiwge boladı? Eger berilgen tochkada normallasqan sheshimlerdiń fundamentallıq sisteması belgili bolsa, Koshi kórinisindegi ulıwma sheshimdi qalay jazıwǵa boladı?

15-lekciya. Bir tekli bolmaǵan sızıqlı tńlemeler. Turaqlılardı variyaciyalaw usılı.

Reje:

1. Bir tekli bolmaǵan sızıqlı tńlemeler. Ulıwma sheshim
2. Superpoziciya qásiyeti
3. Turaqlılardı variyaciyalaw usılı.

Tayanış sózler: *Bir tekli bolmaǵan sızıqlı tńlemeler. Ulıwma sheshim*

Superpoziciya qásiyeti. Turaqlılardı variyaciyalaw usılı.

n -tártipli birtekli emes sızıqlı differenciallıq teńleme

$$L[y] \in y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

túrinde jazıladı, bunda $p_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ coefficientleri hám $f(x) \geq 0$ saltań aǵzası $I = (a, b)$ aralıǵında anıqlanǵan, úzliksiz funkciyalar.

Tómenдеgi tastıyıqlawlar birtekli emes sızıqlı teńlemenıń sheshimleriniń qásiyetlerin ańlatadı.

1-teorema. Eger $y(x)$ funkciyası $L[y] = f(x)$ birtekli emes teńlemenıń, al $y_0(x)$ sáykes birtekli $L[y] = 0$ teńlemesiniń sheshimi bolsa, onda $y_0(x) + y(x)$ qosındısı birtekli emes teńlemenıń sheshimi boladı.

2-teorema. Eger $y_1(x)$ funkciyası $L[y] = f_1(x)$ teńlemesiniń, al $y_2(x)$ funkciyası $L[y] = f_2(x)$ teńlemesiniń sheshimi bolsa, onda $y_1(x) + y_2(x)$ funkciyası $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ teńlemesiniń sheshimi boladı.

3-teorema. Eger (1) birtekli emes teńlemenıń bazıbir $y(x)$ dara sheshimi belgili bolsa, onda onıń ulıwma sheshimi usı dara sheshim menen sáykes birtekli teńlemenıń ulıwma sheshiminiń qosındısına teń boladı.

Endi (1) túrinдеgi birtekli emes sızıqlı teńlemelerdi sheshiwdiń erkli turaqlılardı variyaciyalaw metodı dep atalatuǵın Lagranjǵa tiyisli bir usılın keltiremiz.

Meyli (1) teńlemege sáykes keliwshi birtekli sızıqlı teńlemenıń sheshimleriniń fundamentallıq sisteması $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ belgili bolsın. Sonda bul birtekli teńlemenıń ulıwma sheshimi

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) \quad (2)$$

túrinde jazıladı, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - erikli turaqlılar. Bul ańlatpa birtekli teńlemenı qanaatlandıradı hám demek, ol C_i ler turaqlı bolǵanda (1) teńlemenı qanaatlandırmaydı. Biz (1) teńlemenıń sheshimin de usı (2) túrinde izleybiz, biraqta bundaǵı $C_1, C_2, \dots, C_n$ di ǵárezsiz ózgeriwshi x tıń funkciyaları bolsın dep esaplaymız, yaǵnıy (1) teńlemenıń sheshimin

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x) \quad (3)$$

túrinde izleybiz, bunda $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ házirshe belgisiz funkciyalar. Bul funkciyalardı anıqlaw ushın n teńleme kerek. Olardıń birewin (3) ańlatpası (1) teńlemenı qanaatlandıradı degen shártten alınadı da, al qalǵan $n-1$ teńleme erkin túrde saylap alınadı, biz olardı y ten alıńǵan tuwındılar júdá ápiwayı túrde bolatuǵınday etip saylap alamız.

(3) teńligin x boyınsha differenciallaymız:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) + \\ + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x).$$

Endi qosımsha saylap alınatuǵın $n-1$ teńlemenıń birinshisi esabında sońǵı teńliktiń oń jaǵındaǵı $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ tuwındıları qatnasqan aǵzalardıń qosındısın nolge teńewden alınatuǵın

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \quad (4)$$

teńlemesin alamız. Sonda y' ushın

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \dots + C_n(x)y_n' \quad (5)$$

ańlatpasına iye bolamız. Bul (5) teńligin x boyınsha differenciallap, alıńǵan nátiyjede $C_i(x)$ funkciyalarınıń tuwındıları qatnasqan aǵzalardıń qosındısın nolge teńeymiz:

$$C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \dots + C_n(x)y_n' = 0. \quad (6)$$

Bul ekinshi qosımsha teńleme boladı. Sonda

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \dots + C_n(x)y_n'' \quad (7)$$

boladı. Usılay dawam ete otırıp, $n-1$ -qádemde $n-1$ - qosımsha teńleme alamız

$$C_1'(x)y^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \quad (8)$$

hám $y^{(n-1)}$ ushın tómendegi ańlatpaǵa iye bolamız

$$y^{(n-1)} = C_1(x)y^{(n-1)} + C_2(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n(x)y_n^{(n-1)}. \quad (9)$$

Bul (9) teńligin x boyınsha differenciallap, $y^{(n)}$ ushın

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} + \\ &+ C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \dots + C_n(x)y_n^{(n)} \end{aligned} \quad (10)$$

ańlatpasın alamız. Endi (3), (5), ..., (10) ańlatpaların (1) teńlemege qoyıp,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i(x)[y_i^{(n)} + p_1(x)y_i^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_i' + p_n(x)y_i(x)] + \\ + C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{aligned}$$

teńlemesin alamız. Al, $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ funkciyaları cáykes birtekli sızıqlı teńlemenin dara sheshimleri bolǵanlıqtan, qosındı belgisi astındaǵı $C_i(x)$ qasındaǵı barlıq kóbeytiwshiler nolge aylanadı hám $C_i'(x)$ funkciyaların anıqlaw ushın kerek bolǵan n -teńlemenin alamız

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \quad (11)$$

Solay etip, biz belgisizleri $C_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$ bolǵan (4), (6), ..., (8), (11) túrindegi n birtekli emes sızıqlı teńlemeler sistemasına iye boldıq. Bul sızıqlı sistemaniń anıqlawıshı (1) - teńlemege sáykes keliwshi birtekli teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sisteması ushın Vronskiy anıqlawıshı bolıp, ol nolge aylanbaydı, demek, bul sistemani $C_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$ tuwındılarına qarata sheship, $C_i'(x) = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ teńlemelerine iye bolamız. Bul teńlemelerdi integrallasaq

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + C_i \quad (12)$$

boladı, bunda C_i - jańa erikli turaqlılar.

$C_i(x)$ funkciyalarınıń bul tabılǵan (12) ańlatpaların (3) formulaǵa qoyıp, (1) teńlemenin ulıwma sheshimine iye bolamız:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + \sum_{i=1}^n y_i \int \varphi_i(x) dx. \quad (13)$$

Solay etip, (1) teńlemege sáykes keliwshi birtekli sızıqlı teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sisteması belgili bolǵanda (1) birtekli emes sızıqlı teńlemenin sheshimin kvadratura járdeminde alıwǵa boladı hám bul (1) teńlemenin ulıwma sheshimi (13) formulası menen beriledi.

Mısal. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ teńlemesiniń ulıwma sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen sıızıqlı teńlemege sıykes keliwshi birtekli teńleme, yaǵnıy $y'' + y = 0$ teńlemesi $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ túrindegi sheshimlerdiń fundamentallıq sistemasına iye bolǵanlıqtan, onıń ulıwma sheshimi $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ túrinde jazıladı, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar. Endi usı erikli turaqlılardı variaciyalaymız hám berilgen teńlemenıń sheshimin $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ kórinisinde izleybiz, bundaǵı $C_1(x)$ hám $C_2(x)$ funkciyaları

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

sistemasınan anıqlanadı. Bul sońǵı sistemanı $C_1'(x)$ hám $C_2'(x)$ tuwındılarına qarata sheship,

$$C_1'(x) = -1, \quad C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

teńlemelerine iye bolamız, al olardı integrallasaq, $C_1(x) = -x + C_1, C_2(x) = \ln|\sin x| + C_2$ boladı. Bul tabılǵan ańlatpalardı izlengen sheshimge qoysaq, berilgen teńlemenıń

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

túrindegi ulıwma sheshimin alamız, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Eger birtekli emes sıızıqlı teńlemenıń bir dara sheshimi hám sıykes birtekli teńlemenıń ulıwma sheshimi belgili bolsa, berilgen teńlemenıń ulıwma sheshimin qalay tabıw múmkin?
2. Birtekli emes sıızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimin tabıwdıń Lagranj usılı neden ibarat?

16-lekciya. Turaqlı koefficientli sızıqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı.

Reje:

4. Turaqlı koefficientli sızıqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı.
5. Xarakteristikalıq teńleme. Onıń korenleriniń hár qıylı jaǵdayları

Tayanış sózler: Turaqlı koefficientli sızıqlı bir tekli teńlemeler. Eyler usılı.

Xarakteristikalıq teńleme. Onıń korenleriniń hár qıylı jaǵdayları

Meyli n -tártpili turaqlı koefficientli birtekli sızıqlı teńleme bolǵan

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

teńlemesi berilsin, bunda $a_1, a_2, \dots, a_n$ koefficientleri turaqlı haqıyqıy sanlar. Sızıqlı teńlemelerdiń ulıwmalıq qásiyetlerine muwapıq, (1) teńlemenıń ulıwma sheshimin tabıw ushın onıń sheshimleriniń fundamentallıq sistemasın dúzetuǵın, yaǵnıy sızıqlı ǵárezsiz bolǵan n dara sheshimlerin tabıw jetkilikli.

Berilgen (1) birtekli sızıqlı teńlemenıń dara sheshimlerin tabıw ushın 1743-jılı L. Eyler qollanǵan usıldı paydalanamız. Bul Eyler usılına muwapıq, (1) teńlemenıń dara sheshimi

$$y = e^{kx} \quad (2)$$

túrinde izlenedi, bunda k - turaqlı, onı (2) funkciyası (1) teńlemenı qanaatlandıratuǵınday etip saylap alamız.

Usı maqsette (2) ańlatpasın x boyınsha izbe-iz túrde n ret differenciallap,

$$y' = k e^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots, y^{(n)} = k^n e^{kx} \quad (3)$$

tuwındılarına iye bolamız. Bul (2) hám (3) ańlatpaların (1) teńlemenıń sol jaǵına qoyamız:

$$L[e^{kx}] = \varphi(k) e^{kx}, \quad (4)$$

bunda

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n. \quad (5)$$

Sonda (2) funkciyası (1) teńlemenıń sheshimi boladı, yaǵnıy $L[e^{kx}] \equiv 0$ birdeyligi orınlanadı, egerde k sanı

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (6)$$

teńlemenin koreni bolsa. (6) - bul belgisizi k bolǵan n -dárezeli algebralıq teńleme. Ol (1) differenciallıq teńlemenin xarakteristikalıq teńlemesi dep ataladı, al onın korenleri (1) teńlemenin xarakteristikalıq sanları dep ataladı. (6) xarakteristikalıq teńlemenin sol jaǵı bolǵan $\varphi(k)$ kópaǵzalısı xarakteristikalıq kópaǵzalı dep ataladı.

(1) teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sistemasınıń dúzilisi xarakteristikalıq teńlemenin korenleriniń túrinen ǵárezli boladı. Bul (6) xarakteristikalıq teńleme n -dárezeli algebralıq teńleme, demek ol n korenge iye. Tómendegi jaǵdaylardı qaraymız:

1. Xarakteristikalıq teńlemenin barlıq korenleri haqıyqıy hám hár qıylı, yaǵnıy ápiwayı korenler:

$$k_1, k_2, \dots, k_n. \quad (7)$$

Bul korenlerdi (2) formulaǵa qoyıp, (1) differenciallıq teńlemenin n dara sheshimine iye bolamız:

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}. \quad (8)$$

Bul dara sheshimler sıızıqlı ǵárezsiz boladı hám sol sebepli olar (1) teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sistemasın dúzedi. Sonda (1) teńlemenin ulıwma sheshimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x} \quad (9)$$

túrinde jazıladı, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ - ler erikli turaqlılar.

1-mısal. $y'' + y' - 2y = 0$ teńlemesiniń ulıwma sheshimin tabın.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemenin $k^2 + k - 2 = 0$ xarakteristikalıq teńlemesi $k_1 = 1$ hám $k_2 = -2$ korenlerge iye. Demek, sheshimlerdin fundamentallıq sisteması $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$ boladı, al ulıwma sheshim $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ túrinde jazıladı, bunda C_1 hám C_2 - erikli turaqlılar.

2. (6) xarakteristikalıq teńlemenin barlıq korenleri hár qıylı, biraq olardıń ishinde kompleks korenler bolǵan jaǵday.

Berilgen (1) teńlemenin koefficientleri haqıyqıy sanlar bolǵanlıqtan, eger xarakteristikalıq teńleme kompleks korenlerge iye bolsa, onda olar kompleks túyinles korenler bolıp keledi, yaǵnıy $k_1 = \alpha + i\beta$ hám $k_2 = \alpha - i\beta$ boladı. Bul kompleks túyinles korenler jubına (2) ge muwapıq, $e^{(\alpha+i\beta)x}$ hám $e^{(\alpha-i\beta)x}$ túrindegi eki kompleks sheshimler sáykes keledi. Eyler formulası boyınsha bul kompleks sheshimniń haqıyqıy bólegin jorıma bóleginen ajratıp, tómendegige iye bolamız:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Demek, $k_1 = \alpha + i\beta$ kompleks korenge (1) teńlemenin

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (10)$$

túrindgi eki haqıyqıy sheshimi sáykes keledi. Al, $k_2 = \alpha - i\beta$ túyinles korengge sáykes keletuǵın $e^{(\alpha-i\beta)x}$ kompleks sheshimdi $e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$ túrinde jazıw múmkin bolǵanlıqtan, bul sheshimniń (10) haqıyqıy sheshimlerdiń kombinaciyası bolatuǵını kórinip tur. Solay etip, (6) xarakteristikalıq teńlemeniniń kompleks túyinles $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ korenler jubına (1) teńlemeniniń (10) túrindegi eki haqıyqıy dara sheshimi sáykes keledi.

Barlıq kompleks túyinles korenler juplarına sáykes keliwshi haqıyqıy dara sheshimlerdi hám haqıyqıy korenlerge sáykes keliwshi dara sheshimlerdi tawıp, sheshimlerdiń fundamentallıq sistemasına iye bolamız, al bul boyınsha ulıwma sheshimdi dúze alamız.

2-mısal. $y'' + y = 0$ teńlemesiniń ulıwma sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeniniń xarakteristikalıq teńlemesi $k^2 + 1 = 0$ túrine iye, al onıń korenleri $k_{1,2} = \pm i$ boladı. Olarǵa sáykes keliwshi kompleks sheshimler $y = e^{ix}$, $y = e^{-ix}$ bolıp, al sızıqlı ǵárezsiz haqıyqıy dara sheshimler $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ boladı. Sonda ulıwma sheshim $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ túrinde jazıladı, bunda C_1, C_2 - erikli turaqlılar.

3. (6) xarakteristikalıq teńlemeniniń korenleri ishinde eseli korenler bolǵan jaǵday.

Bul jaǵdayda e^{kx} túrindegi hár qıylı sheshimlerdiń, yaǵnıy sızıqlı ǵárezsiz sheshimlerdiń sanı n nen az boladı hám demek, olar fundamentallıq sistema dúze almaydı. Sol sebepli, jetkiliksiz bolıp turǵan sızıqlı ǵárezsiz dara sheshimlerdi basqa túrde izlewge tuwra keledi.

Eger (6) xarakteristikalıq teńlemeniniń $k = k_0$ koreni 4 eseli koren bolsa, onda oǵan (1) teńlemeniniń

$$y_1 = e^{k_0 x}, y_2 = x e^{k_0 x}, \dots, y_4 = x^{4-1} e^{k_0 x} \quad (11)$$

túrindgi 4 dara sheshimi sáykes keledi. Bunda tómendegi eki jaǵdaydı ayırıp qaraymız.

a) Meyli $k_0 = 0$ sanı (6) xarakteristikalıq teńlemeniniń 4 eseli koreni bolsın. Demek, (6) xarakteristikalıq teńlemeniniń sol jaǵı k^4 ulıwma kóbeytiwshige iye, yaǵnıy koefficientler $a_n = a_{n-1} = a_{n-r+1} = 0$, biraq $a_{n-4} \neq 0$ hám (6) xarakteristikalıq teńleme tómendegi túrde jazıladı:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-4} k^4 = 0.$$

Bul teńlemege sáykes keliwshi sızıqlı birtekli differenciallıq teńleme $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-4} y^{(4)} = 0$ túrine iye boladı. Bul sońǵı teńleme

$$y_1 = 1, y_2 = x, \dots, y_r = x^{r-1} \quad (12)$$

túrindgi dara sheshimlerde iye, sebebi teńlemede r den kishi tártiptegi tuwındılar qatnaspaydı. Bul (12) funkciyalar $(-\infty; \infty)$ aralıǵında sızıqlı ǵárezsiz. Solay etip, (6) xarakteristikalıq teńlemeniniń r eseli $k = 0$ korenine (12) túrindegi r sızıqlı ǵárezsiz dara sheshimler sáykes keledi.

3-mısal. $y^{IV} - y'' = 0$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi. Bul teńlemenıń xarakteristikalıq teńlemesi $k^4 - k^2 = 0$ bolıp, ol $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -1$, $k_4 = 1$ korenlerge iye. Bundaǵı $k_1 = k_2 = 0$ túrindegi eki eseli korengge $y_1 = 1, y_2 = x$ dara sheshimler, al $k_3 = -1$ hám $k_4 = 1$ ápiwayı korenlerge, sáykes túrde $y_3 = e^{-x}, y_4 = e^x$ dara sheshimleri sáykes keledi. Bul tabılǵan tórt dara sheshim sıızıqlı ǵárezsiz dara sheshimler bolıp, olar fundamentallıq sistema dúzedi.

Solay etip, berilgen teńlemenıń ulıwma sheshimi $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^x$ túrinde jazıladı, bunda C_1, C_2, C_3, C_4 - turaqlılar.

b) Meyli $k_0 \neq 0$ sanı (6) xarakteristikalıq teńlemenıń r eseli koreni bolsın. Bul jaǵdayda

$$y = e^{k_0 x} z \quad (13)$$

túrindegi ózgeriwshilerdi almasırw máseleni nolge teń bolǵan eseli koren jaǵdayına alıp keledi.

Haqıyqatında da, (1) teńlemede (13) almasırwın ámelge asırsaq, onda

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} z' + b_n z = 0 \quad (14)$$

differentciallıq teńlemege kelemiz. Bul (14) teńlemenıń dara sheshimin

$$z = e^{px} \quad (15)$$

túrinde izleyviz. Sonda onıń xarakteristikalıq teńlemesi

$$p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n = 0 \quad (16)$$

boladı. Al, (2), (13), (15) ańlatpaların paydalansaq, onda $e^{kx} = e^{k_0 x} e^{px}$ qatnası kelip shıǵadı, bunnan $k = k_0 + p$.

Demek, (16) xarakteristikalıq teńlemenıń nolden ózgeshe r eseli k_0 korenine (16) teńlemenıń r eseli $p = 0$ koreni sáykes keledi. Al, a) punktine muwapıq, (16) xarakteristikalıq teńleme r eseli $p = 0$ korengge iye bolǵanlıqtan, oǵan sáykes keliwshi (14) differentciallıq teńleme $z_1 = 1, z_2 = x, \dots, z_r = x^{r-1}$ dara sheshimlerde iye boladı.

Demek, $y = ze^{k_0 x}$ baylanısı boyınsha (6) xarakteristikalıq teńlemenıń r eseli $k \neq 0$ korenine

$$y_1 = e^{k_0 x}, y_2 = x e^{k_0 x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{k_0 x}$$

dara sheshimleri sáykes keledi. Bul dara sheshimler sıızıqlı ǵárezsiz boladı.

17-lekciya. Birtekli bolmağan turaqlı koefficientli sıızılıq differenciyalıq teńlemeler

Reje:

1. Ulıwma túri. Anıq emes koefficientler usılı
2. Oń jaǵı kópaǵzalı bolǵan jaǵday.
3. Oń jaǵı kvazikópaǵzalı bolǵan jaǵdaylar.
4. Eyler teńlemesi

Tayanış sózler: Anıq emes koefficientler usılı. Kópaǵzalı. Kvazikópaǵzalı. Dara sheshimdi dúziw. Eyler teńlemesi.

Eger

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

birtekli emes sıızılıq teńlemenin oń jaǵı

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

kóriniske iye bolsa, onda onı anıq emes koefficientler usılı menen sheshken qolaylı, bunda $P_n(x)$ hám $Q_m(x)$ - sáykes túrde n hám m dárejeli kópaǵzalılar.

Bul jaǵdayda (1) teńlemenin dara sheshimi

$$y(x) = x^r e^{\alpha x} [P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x] \quad (2)$$

kóriniste izlenedi, bunda r sanı (1) teńlemege sáykes keliwshi birtekli sıızılıq teńlemenin

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (3)$$

xarakteristikalıq teńlemesinin $\alpha \pm \beta i$ koreni eseligine teń bolǵan san. Eger xarakteristikalıq teńleme $\alpha \pm \beta i$ kompleks korenge iye bolmasa, $r = 0$ dep alınadı. Al, $P_s(x)$ hám $Q_s(x)$ lar s dárejeli anıq emes koefficientli kópaǵzalılar bolıp, bunda $s = \max\{n; m\}$ boladı. Bul kópaǵzalılardıń anıq emes koefficientlerin tabıw ushın (2) ańlatpasın berilgen (1) teńlemege qoyıp, birdey funkciyalar aldındaǵı koefficientlerdi teńlestiriw kerek.

Eger $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x)$ bolsa, onda (1) teńlemenin dara sheshimi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_i(x) \quad (i = \overline{1, p})$$

birtekli emes sıızılıq teńlemelerdin $y_i(x)$ dara sheshimleriniń qosındısınan ibarat boladı.

Turaqlı koefficientli birtekli emes teńlemelerdi sheshiw usılların qollanıwdı mısallarda kórsetemiz.

1 – mısál. $y''' - 4y' = x^2$ teńlemesin integrallań.

Sheshiliwi. Dáslep berilgen teńlemege sáykes keliwshi $y''' - 4y' = 0$ birtekli teńlemenini sheshemiz. Bul teńlemenin sheshimin Eyler metodına muwapıq, $y = e^{\lambda x}$ kórinisinde izleyemiz. Xarakteristikalıq teńleme $\lambda^3 - 4\lambda = 0$ túrinde jazıladı hám ol $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ korenlerge iye boladı. λ shamasının bul tabılğan mánislerin izlengen sheshimge qoyıp, birtekli teńlemenin $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{-2x}$ dara sheshimlerine iye bolamız. Bul dara sheshimler sıızıqlı gárezsiz funkciyalar bolğanlıqtan, birtekli teńlemenin sheshimleriniń fundamentallıq sistemasın dúzedi. Sol sebepli $\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ ańlatpası birtekli teńlemenin ulıwma sheshimin beredi, bunda C_1, C_2, C_3 - erikli turaqlılar.

Berilgen birtekli emes teńlemenin dara sheshimin tabıw ushın anıq emes koefficientler usılın qollanamız. 0 sanı berilgen teńlemege sáykes keliwshi birtekli sıızıqlı teńlemenin xarakteristikalıq teńlemesinin koreni hám $f(x) = P_2(x) = x^2$ bolğanlıqtan, berilgen teńlemenin dara sheshimi $y = x(Ax^2 + Bx + C)$ yamasa $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ kórinisinde izlenedi, bunda A, B, C - anıq emes koefficientler. Bul ańlatpanı differenciallap, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{array}{l|l} -4 & y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ 1 & y''' = 6A. \end{array}$$

Bul tuwındılardı berilgen teńlemege qoyıp, alınğan teńliktiń eki jaǵındaǵı x tın birdey dárejeleri aldındaǵı koefficientlerdi teńlestirip, tómendegilerge iye bolamız:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -12A = 1, \\ x & -8B = 0, \\ x^0 & -4C + 6A = 0. \end{array}$$

$$\text{Bunnan } A = -\frac{1}{12}, B = 0, C = -\frac{1}{8}. \quad \text{Demek, izlengen dara sheshim}$$

$$y_{d.sh.} = -\frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} \text{ boladı. Al, berilgen teńlemenin ulıwma sheshimi}$$

$$y = y + y_{d.sh.} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$$

boladı.

2-mısal. $y'' + y = 4e^x$ teńlemesinin $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$ baslangısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi: Berilgen teńlemege sáykes keliwshi birtekli teńlemenin ulıwma sheshimi 1 – mısalda tabılǵan edi: $\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Endi berilgen teńlemenin dara sheshimin anıq emes koefficientler usılı menen tabamız.

$\alpha = 1$ sanı $\lambda^2 + 1 = 0$ xarakteristikalıq teńlemenin koreni bolmaǵanlıqtan berilgen teńlemenin dara sheshimi $y = Ae^x$ kórinisinde izlenedi, bunda A - anıq emes koefficient. A koefficientti tabıw ushın izlengen sheshimdi eki márte differenciallap, y'' hám y ti berilgen teńlemege qoyıp, alıńǵan teńlikti e^x qa qısqartqannan keyin $A + A = 4$ qatnasına iye bolamız, bunnan $A = 2$. Demek, berilgen teńlemenin dara sheshimi $y = 2e^x$ boladı, al onın ulıwma sheshimi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x$$

boladı.

Endi ulıwma sheshimdi C_1 hám C_2 erikli turaqlıların berilgen baslanǵısh shártler boyınsha tabamız. Tabılǵan ulıwma sheshimdi differenciallap, $y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2e^x$ ańlatpasın alamız. $y(0) = 4$ hám $y'(0) = -3$ ekenin esapqa alıp, $C_1 + 2 = 4$, $C_2 + 2 = -3$ teńliklerin alamız, bunnan $C_1 = 2$, $C_2 = -5$. Demek, $y = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x$ funkciyası berilgen Koshi máselesinin izlengen sheshimi boladı.

3 – mısál. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ teńlemesin sheshiń.

Sheshiliwi: a) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ xarakteristikalıq teńleme $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ korenlerge iye. Sáykes birtekli teńlemenin ulıwma sheshimi $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ boladı.

b) Berilgen differenciallıq teńlemenin oń jaǵı $f(x) = \sin x$. Bunı (2) formulaniń oń jaǵı menen salıstırsaq, $\alpha = 0$, $P_m(x) \equiv 0$, $Q_m(x) \equiv 1$, $\beta = 1$. Al $\beta i = i$ sanı xarakteristikalıq teńlemenin koreni emes. Sol sebepli berilgen teńlemenin dara sheshimi $y_{d.sh.} = A \cos x + B \sin x$ kórinisinde izlenedi. y', y'' lardı tabamız:

$$y' = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Endi y, y', y'' lardı berilgen teńlemege qoyıp, tómendegi teńlikke kelemiz:

$$-A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) + 2(A \cos x + B \sin x) = \sin x$$

yamasa

$$(A - 3B) \cos x + (3A + B) \sin x = \sin x.$$

Bul sońǵı teńliktegi $\cos x$ hám $\sin x$ lar aldındaǵı koefficientlerdi teńlestirip, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{cases} \cos x & A - 3B = 0, \\ \sin x & 3A + B = 1. \end{cases}$$

Bunnan, $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{1}{10}$. Demek, teńlemenıń dara sheshimi

$$y_{d.sh.} = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x.$$

Al, ulıwma sheshim $y = \tilde{y} + y_{п.ш.}$ bolǵanlıqtan,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

boladı.

4 – mısál. $y'' - y = x^2 e^{-x} \cos x$ teńlemesiniń dara sheshiminiń túrin anıqlań.

Sheshiliwi: Bul jaǵdayda $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $P_n(x) = x^2$, $Q_m(x) = 0$. Al $\lambda^2 - 1 = 0$ xarakteristikalıq teńleme $\lambda_1 = -1$ hám $\lambda_2 = 1$ korenlerge iye. $\alpha \pm i\beta = -1 \pm i$ sanları xarakteristikalıq teńlemenıń korenleri emes, demek, $r = 0$. Sol sebepli berilgen teńlemenıń dara sheshimi

$$y_{п.ш.} = e^{-x} [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x]$$

kórinisine iye boladı, bunda A, B, C, D, E, F - anıq emes koefficientler.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. n - tártipli birtekli emes sızıqlı DT qanday túrge iye?
2. n - tártipli birtekli emes sızıqlı DT-niń ulıwma sheshiminiń dúzilisi qanday?
3. Anıq emes koefficientler metodı qanday teńlemeler ushın qollanadı?
4. Anıq emes koefficientler metodınıń mazmunı neden ibarat?
5. $L[y] = P_m(x)$ teńlemesiniń dara sheshiminiń túriqanday, bunda $L[y]$ - turaqlı koefficientli sızıqlı operator, $P_m(x)$ - bul m dárejeli kópaǵzalı?

6. $L[y] = e^{\alpha x} P_m(x)$ teńlemesiniń dara sheshiminiń túri qalay jazıladı?

7. $L[y] = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$ teńlemesiniń dara sheshiminiń túri qalay jazıladı?

18 – lekciya. Āpiwayı differenciyalıq teńlemeler sistemaların normal túrge keltiriw.Normal sistema ushın bar bolıw hám birden-birlik teoreması

Reje:

1. Differensiallıq teńlemeler sisteması. Tiykargı túsiniqler.
2. Normal sistema ushın Pikar teoreması.
3. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ayırıqsha sheshim

Tayanish sózler: Differencialliq teńlemeler sisteması Ulıwma túri. Kanonikalıq sistema. Normal sistema. Sheshim. Koshi máselesi. Pikar teoreması. Ulıwma sheshim. Dara sheshim. Ayırıqsha sheshim.

Ápiwayı differenciallıq teńlemeler sisteması dep, x argumentti, usı argumenttiń k sandaǵı $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ belgisiz funkciyaların hám olardıń tuwındıların baylanıstratuǵın k teńlemelerdiń jıynaǵına aytıladı. Sistemanıń ulıwma túri tómendegishe jazıladı:

$$F_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (1)$$

Bul sistemany integrallaw máselesi, usy sistemany hár birin qanaatlandyruýy $y_1, y_2, \dots, y_k$ funkeiyalaryn tabywdy talap etedi. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ funkeiyalarynyñ usyndy jynagyn (1) sistemanyñ sheshimi dep ataydy.

Eger aniq emes funkciya haqqindağı teoremanın shártleri orinlansa, onda (1) sistemani úlken tuwındılarga qarata sheshiwge boladı:

[illegible]

Bunday türdəgi (2) sisteməni kanonikalıq sistema dep ataydı.

Jańa belgisiz funksiýalary kiritiw arqaly joqarǵy tártipli k teńlemeler sistemasyn oǵan ekwivalent bolǵan hám barlyq n ($n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$) izlengen funksiýalaryń tuwındılarına qarata sheshilgen birinshi tártipli n teńlemeler sisteması menen almasırw múmkin. Bunday sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n), \\ \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad (3)$$

sistemasının dara jaǵdayı boladı. (3) sistema ápiwayı differenciallıq teńlemelerdiń normal sisteması dep ataladı, al n sistemaniń tártibi delinedi. Bul sistemani

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3')$$

túrinde de qısqasha jazıw múmkin, bul jerde $f_1, f_2, \dots, f_n$ - qarastırılıp atırǵan oblastta anıqlanǵan hám úzliksiz funkciyalar. Eger $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $f(x, y) = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, $\frac{dy}{dx} = \left\{ \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx} \right\}$ dep belgilesek, onda (3) sistema

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

kórinistegi vektorlıq formadaǵı túrine iye boladı.

(3) sistemaniń (a, b) intervalındaǵı sheshimi dep usı intervalda anıqlanǵan, úzliksiz differenciallanatuǵın hám (3) sistemaniń hár bir teńlemesin barlıq $x \in (a, b)$ ushın orınlı bolǵan birdeylikke aylandıratuǵın n sandaǵı

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x) \quad (5)$$

funkciyalar jıynaǵına aytadı.

(3) sistemaǵa sáykes keliwshi (4) vektorlıq teńlemenıń sheshimi usı vektorlıq teńlemesin birdeylikke aylandıratuǵın, dúziwshileri $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ bolǵan $y = y(x)$ vektorı retinde anıqlanadı.

$n+1$ ólshemli $(x, y_1, \dots, y_n)$ keńisligindegi (5) sheshimge sáykes keletuǵın iymek sıızıq (3) sistemaniń integrallıq iymek sıızıǵı delinedi. Bul iymek sıızıq sonday qásiyetke iye, oǵan júrgizilgen urınbanıń baǵıtlawshı kosinusları 1 sanına hám urınıw tochkadaǵı (3) sistemaniń oń jaqlarınıń mánislerine proporcional boladı.

Eger (3) sistemaniń oń jaǵı berilgen $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ tochka arqalı baǵıtlawshı kosinusları 1 sanına hám $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ mánislerine proporcional bolǵan kesindi júrgizsek, onda baǵıtlar maydanın alamız.

Solay etip, (1) sistemani integrallaw máselesi usı baǵıtlar maydanı boyınsha integrallıq iymek sıızıqlardı tabıwdan ibarat.

(1) normal sistema ushın

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)} \quad (6)$$

baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi Koshi máselesi dep ataladı, bunda $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ - berilgen sanlar. Geometriyalıq jaqtan, Koshi máselesi (3) sistemaniń barlıq integrallıq iymek sıızıqları ishinen berilgen $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ tochkadan ótiwshi integrallıq iymek sıızıqtı tabıwdı ańlatadı.

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \\ C_n = \psi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \quad (8)$$

2) $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ tochkası D oblastında ózgergende (8) formulaları menen anıqlanatuǵın $C_1, C_2, \dots, C_n$ erikli turaqlılarınıń barlıq mánislerinde (7) funkciyalar jıynaǵı (3) sistemanıń sheshimi boladı.

(5) sheshim dara sheshim dep ataladı, egerde onıń qálegen tochkası arqalı (3) sistemanıń basqa sheshimi ótpese, yaǵnıy bul sheshimniń hár bir tochkasında Koshi máselesi sheshimi birden-bir bolsa. (7) ulıwma sheshiminen $C_1, C_2, \dots, C_n$ erkli turaqlılarınıń belgili bir mánislerinde alınatuǵın sheshim dara sheshim boladı. Eger (5) sheshimniń hár bir tochkasında Koshi máselesi sheshiminiń birden-birligi buzılsa, onda bul sheshim ayrıqsha sheshim dep ataladı.

Takirarlaw ushın sorawlar

1. Differenciallıq teńlemenıń normal sisteması qanday ulıwma túrge iye? Onıń tártibi degen ne? Normal sistemanıń sheshimi (integrallıq iymek sızıǵı) degen ne?

2. Normal sistema ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı? Qanday jaǵdayda ol sheshimge iye? Qanday shártte bul sheshim birden-bir boladı?

3. Normal sistemanıń ulıwma sheshimi degen ne? Ulıwma sheshim formulası járdeminde Koshi máselesi qalay sheshiledi?

- Meyli

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \quad (2)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x,y_1,...,y_n) = C_1, \\ \psi_2(x,y_1,...,y_n) = C_2, \\ \\ \psi_n(x,y_1,...,y_n) = C_n \end{array} \right. \quad (3)$$

Solay etip, birinshi integral, bul gárezsiz ózgeriwshi menen sistemaniń belgisiz funkciyaları arasındaǵı

$$\psi(x, y_1, \dots, y_n) = C \quad (4)$$

(4) qatnası (1) sistemaniń birinshi integralı bolıwınıń, zárúrli hám jetkilikli shárti, bul

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_i} f_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (5)$$

birdeyliginiń ornlanıwı bolıp tabıladı.

Geyde birinshi integral dep, $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ funkciyası túsiniledi.

Eger (1) sistemanıń n ǵárezsiz birinshi integralları $\psi_1(x, y_1, \dots, y_n)$, $\psi_2(x, y_1, \dots, y_n)$, ..., $\psi_n(x, y_1, \dots, y_n)$ belgili bolsa, onda joqarıdaǵı aytqanday olardan dúzilgen (3) teńlemelerdiń jıynaǵı (1) sistemanıń ulıwma integralın beredi.

(3) ulıwma integraldan onı $y_1, y_2, \dots, y_n$ ge qarata sheshe otırıp, (1) sistemanıń ulıwma sheshimin alıwǵa boladı. $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ birinshi integrallar ǵárezsiz bolıwı ushın olardıń yakobiani nolden ózgeshe bolıwı tiyis:

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demek, (1) sistemanı integrallaw ushın onıń n ǵárezsiz birinshi integralın tabıw jetkilikli.

Egerde differenciallıq teńlemeler sisteması simmetriyalı túrde berilgen bolsa, onda, birinshi integral járdeminde bul sistemanı integrallaw máselesi ayrıqsha qolaylı boladı.

(1) sistemanı

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (6)$$

túrinde jazıwǵa boladı. Al, $x, y_1, \dots, y_n$ ózgeriwshileriniń ornına $x_1, x_2, \dots, x_n$ ózgeriwshilerin jazsaq hám ápiwayılıq ushın ózgeriwshilerdiń sanın $n+1$ emes, al n arqalı belgilesek, onda (6) sistemanı tómendegi túrde jazıwǵa boladı.

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (7)$$

Bul (7) sistema simmetriyalıq formadaǵı differenciallıq teńlemelar sisteması dep ataladı. Bul sistemanıń ulıwma integralı

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \quad \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \quad \dots, \quad \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1} \quad (8)$$

túrinde jazıladı.

(7) sistemadan normal sistemaǵa ótiw ushın ózgeriwshilerdiń birewin, mısalı x_n di ǵárezsiz ózgeriwshi retinde alamız. Sonda

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n} \quad (7')$$

boladı. Bunda óń jaqlardıń úzliksizligi buzılmaı ushın $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ baslanǵısh mánislerde $X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0$ bolıwı tiyis.

(8) birinshi integrallarınıń hár biriniń yamasa ulıwma aytqanda

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (8)$$

túrindegi qatnastır (7) sistemanıń birinshi integralı bolıwınıń analitikalıq shártin tabıw ushın tómendegidey isleymiz.

(7) sistemanıń integrallıq iymek sızıǵı boylap ψ funkciyası turaqlı mánis saqlaydı, demek, onıń usı iymek sızıq boylap alınǵan tolıq differencialı nolge teń:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Biraqta integrallıq iymek sızıqlar boyınsha dx_i differencialları (7) sistemaǵa muwapıq X_i funkciyalarınıń mánislerine proporcional, demek, hár bir integrallıq iymek sızıq boyınsha

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0 \quad (9)$$

boladı. Onda joqarıda aytqan analitikalıq shárt tómendegishe beriledi: (7) sistemanıń birinshi integralı bolǵan $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyası (9) teńlemenı birdeylik túrde qanaatlandıradı hám kerisinshe (9) teńlemenı qanaatlandıratuǵın iqtıyarlı $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyası (7) sistemanıń birinshi integralı boladı.

Mısal. $\frac{dx}{2z-y} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi. $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ teńlemeden berilgen sistemanıń birinshi integrallarınıń birin tabamız:

$\frac{y}{z} = C_1$. Jáne bir integral tabıw ushın tómendegi integrallanıwshı kombinaciyanı dúzemiz:

$$\frac{dx}{2z-y} = \frac{2dz-dy}{2z-y}, \quad d(x-2z+y) = 0.$$

Bunnan $x-2z+y = C_2$. Tabılǵan bul birinshi integrallar ǵárezsiz boladı.

Solay etip, berilgen sistemanıń barlıq sheshimleri $y = C_1 z$, $x-2z+y = C_2$ qatnaslarınan anıqlanadı.

Tákirarlaw ushın sorawlar

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

bolsın. Sonda (1), (2) teńlemeler sistemaları sáykes túrde tómendegi kóriniste jazıladı:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t), \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

bunda $x = x(t)$ – belgisiz vektor-funkciya; $\frac{dx}{dt}$ – onıń tuwındısı, $F(t)$ – belgili vektor-funkciya, $A(t)$ – sıızılıq differenciallıq teńlemeler sistemasınıń matricası.

2⁰. Normal sistemalar ushın Pikar teoremasınıń shártleri orınlanıw ushın (1) sıızılıq sistemanıń barlıq $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ koefficientleri hám barlıq $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ erkin aǵzaları $[a, b]$ aralıqta úzliksiz bolıwı jetkilikli. Bul jaǵdayda (1) sıızılıq sistema ushın qálegen $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ baslang'sh shártlerge iye Koshi máselesi pútkil $[a, b]$ aralqta anıqlang'an birden-bir sheshimge iye boladı. Bul baslang'sh shártlerde t_0 mánisin belgilep alıp hám $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ baslang'ish mánislerdi ózgerter otırıp, (1) sistemanıń sheshimlerinin' sheksiz kópligin alamız.

Meyli $A(t)$ matricası hám $F(t)$ vektor-funkciyası $I = [a, b]$ kesindide úzliksiz bolsın hám $t_0 \in I$. Sonda

1. (4) sistemann'

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (6)$$

baslang'ish shártin qanaatlandratug'ın sheshimi pútkil I kesindide bar boladı.

2. (4), (6) Koshi máselesi sheshimi birden-bir boladı: eger $x(t), z(t)$ – us (4) sistemanıń birdey (6) baslang'sh shártin qanaatlandratug'ın sheshimleri bolsa, onda pútkil I kesindide $x(t) \equiv z(t)$ boladı.

Haqıyqatında da, $A(t)$ matricası úzliksiz bolg'anlıqtan, onıń barlıq $a_{ij}(t)$ elementleri, al $F(t)$ vektor-funkciyası úzliksiz bolg'anlıqtan, onıń barlıq $f_i(t)$ dúziwshileri úzliksiz bolıp, (4) vektorlıq ten'lemenin', yag'nıy (1) sıızılıq sistemanıń on' jaqlarının' x_j , $j = \overline{1, n}$ boyınsha dara tuwındıları $I = [a, b]$ kesindisinde úzliksiz $a_{ij}(t)$ koefficientlerge ten' bolg'anlıqtan shegaralang'an bolıp, Koshi máselesi sheshiminin' bar bolıw hám birden-birligi teoremasınıń barlıq shártleri orınlanadı.

3⁰. Birtekli sıızılıq differenciallıq ten'lemelerdin' mına

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (7)$$

sistemasın qaraymız, bunda $A(t)$ – bazıbir (a, b) aralg'ında úzliksiz matrica.

Usı birtekli sıızılıq sistemanıń sheshimlerinin' tiykarg' qásiyetlerin keltiremiz.

1. Eger $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ vektor-funkciyaların' hár biri bazıbir (a, b) intervalda (7) birtekli sıızılıq sistemann' sheshimi bolsa, onda bul vektor-funkciyalardn'

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t)$$

sızıqlı kombinasiyası da us sistemann' sheshimi bolad, $C_1, C_2, \dots, C_n$ – erikli turaqlar.

2. Eger $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ vektor-funkciya (7) birtekli sızıqlı sistemann' (a, b) intervalda anqlang'an hám $\mathbf{x}(t_0) = 0, t_0 \in (a, b)$ baslang'sh shártti qanaatlandratug'n sheshimi bolsa, onda $\mathbf{x}(t)$ vektor-funkciya (a, b) intervalda birdeylik túrde nolge ten' bolad: $\mathbf{x}(t) \equiv 0, t \in (a, b)$.

3. Eger (7) birtekli sızıqlı sistemann' $A(t)$ matricas haqqy mat-rica bolp, bul sistema $\mathbf{x} = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t), t \in (a, b)$ kompleks sheshimge iye bolsa, onda bul kompleks sheshimnin' $\mathbf{u}(t)$ haqqy bólegi de hám $\mathbf{v}(t)$ jorma bólegi de us sistemann' (a, b) intervaldag' sheshimi bolad.

21-lekciya. Ostragrodskiy-Lyuvill formulası. Sızıqlı bir tekli teńlemeler sistemasınıń ulıwma sheshimi haqqında teorema. Fundamentallıq matrica

Reje:

1. Vektor-funkciyalardıń sızıqlı ġárezililigi hám sızıqlı ġárezsizligi
2. Vronskiy determinantı hám onıń qásiyetleri. Ostrogradskiy-Liuvill-Yakobi formulası
3. Sheshimlerdiń fundamentallıq sisteması. Ulıwma sheshim haqqında teorema.
4. Fundamentallıq matrica

Tayanısh sózler: Sızıqlı ġárezli vektor funkciyalar. Sızıqlı ġárezsiz vektor funkciyalar. Vronskiy determinantı. Ostrogradskiy-Liuvill-Yakobi formulası. Sheshimlerdiń fundamentallıq sisteması. Ulıwma sheshim.

Meyli (a, b) intervalda anqlang'an

$$\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t) \quad (2)$$

vektor-funkciyalar berilsin, bunda

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}$$

Eger barlg' bir waqtta nolge ten' emes sonday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ turaqlı sanlar bar bolp, (a, b) intervalda

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n(t) \equiv 0 \quad (3)$$

birdeyligi onlansa, onda (2) vektor-funkciyalar (a, b) intervalda sızıqlı g' árezli dep atalad.

Eger (3) ten'ligi tek $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ bolg'anda g' ana birdeylik túrde onlansa, onda (2) vektor-funkciyalar sızıqlı g' árezsiz dep atalad.

Bazıbir (a, b) intervalda anqlang'an n sandag' (2) vektor-funkciyalar ushn Vronskiy determinant dep,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

kórinisindegi anqlawshqa aytamz.

Eger (2) vektor-funkciyalar (a, b) intervalda sızıqlı g'árezli bolsa, onda bul aralqta $W(t) \equiv 0$. Eger (2) vektor-funkciyalar $A(t)$ matri-cas úzliksiz bolatug'n (a, b) intervaldag' (1) birtekli sızıqlı sistemann' sızıqlı g'árezsiz sheshimleri bolsa, onda olarn' $W(t)$ Vronskiy determinant (a, b) intervaldn' bir de noqatnda nolge aynalmayd.

(1) birtekli sızıqlı sistemann' n sheshimlerinin' (a, b) intervalda sızıqlı g'árezsiz bolw ushn olarn' vronskiann' us intervaldn' bir de noqatn da nolge aynalmaw zárúrli hám jetkilikli.

Biraq ta, (1) sistemann' n sheshimlerinin' sızıqlı g'árezsizligin anqlaw ushn $W(t)$ anqlawshtn' (a, b) intervalnn' bir noqatnda bolsa da nolden ózgeshe bolw-na isenim payda etiw jetkilikli. Bul (1) sistemann' n dara sheshimlerinin' vronskiann' tómendegi eki ájayp qásiyetlerinen kelip shg'ad:

1. Eger $W(t)$ anqlawsh (1) sistemann' koefficientleri úzliksiz bolg'an (a, b) intervalnn' bir noqatnda bolsa da nolge aynalsa, onda $W(t)$ us intervaldn' barlıq noqatlarnda nolge ten' bolad.

2. Eger $W(t)$ us (a, b) intervaldn' bir noqatnda bolsa da nolge aynalmasa, onda ol (a, b) intervaldn' bir de noqatnda nolge aynalmayd.

Solay etip, (1) sistemann' koefficientleri úzliksiz bolatug'n (a, b) intervalnda us sistemann' n sheshimlerinin' sızıqlı g'árezsiz bolw ushn olarn' vronskiann' (a, b) intervaldn' bir noqatnda aq nolge aynalmaw zárúrli hám jetkilikli.

Tómendegi tasyqlaw ornl.

Eger $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ – birtekli sızıqlı sistemann' sheshimleri bolsa, onda olarn' Vronskiy determinant qálegen noqatta

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(s) ds} \quad (4)$$

formula boynsha tablad, bunda $t_0 \in (a, b)$.

Bul (4) formula *Ostrogradskiy-Liuvill formulası* dep atalad.

Eger n ólsheimli (1) birtekli sızıqlı sistemann' $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sheshimleri sızıqlı g'árezsiz bolsa, onda bul sheshimlerin' jynag' us sistemann' sheshimlerinin' *fundamentallq sisteması* dep ataladı.

(1) sistemann' n sheshimler jynag' (a, b) intervalda sheshimlerin' fundamentallq sistemas bolw ushn olarn' Vronskiy determinantnn' (a, b) intervaldn' bir noqatnda aq nolden ózgeshe bolw zárúrli hám jetkilikli.

Tómendegi tasyqlaw orınlı.

Eger (1) birtekli sızıqlı sistemann' barlıq coefficientleri (a, b) intervalda úzliksiz bolsa, onda us intervalda anqlang'an hám úzliksiz bolg'an sheshimlerin' fundamentallq sistemas bar bolad.

(1) birtekli sızıqlı sistemann' sheshimlerinin' fundamentallq sistemasnn' belgili bolw us sistemann' ulwma sheshimin dúziwge múminshilik beredi.

Tómendegi tastıyqlaw orınlı.

Eger $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ – (1) birtekli sızıqlı sistemann' n sızıqlı g'árezsiz sheshimlerinin ibarat sistema, yag'ny ol sheshimlerin' fundamentallq sistemas bolsa, onda birtekli sızıqlı sistemann' ulwma sheshimi

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + C_n\mathbf{x}_n(t)$$

bolad, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ – erikli turaqlar.

Bag'analar (1) birtekli sızıqlı sistemann' $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ sızıqlı g'árezsiz dara sheshimleri bolg'an mına

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

kvadratlıq matrica usı sistemaniń *fundamentallıq matricası* dep ataladı.

Eger bazıbir $t = t_0$ bolg'anda $\mathbf{X}(t_0) = E$ (E – *birlikmatrica*) shártı ornlansa, onda bunday fundamentallq matrica *normallastrlg'an fundamentallq matrica* dep atalad.

Qarastrp atrg'an (1) sistema menen birge

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A(t)\mathbf{X} \quad (5)$$

matricalıq ten'lemenı qarayq.

Bul eki sistemaniń tómendegi tastıyqlaw baylanstrad.

1. Meyli $\mathbf{X}(t)$ matricası (1) sistemann' fundamentallq matricası bolsn. Sonda $\mathbf{X}(t)$ matricası (5) matricalıq ten'lemenı qanaatlendrad.

2. Meyli $\mathbf{X}(t)$ – us (5) matricalıq ten'lemenin' sheshimi bolsn. Sonda bul matricann' hár bir bag'anas (1) sistemann' sheshimi bolad.

$\mathbf{X}(t)$ fundamentallq matricann' determinant (1) sistemann' sızıqlı g'árezsiz n sheshimlerinin' Vronskiy determinant bolg'anlıqtan, ol nolge ten' emes, demek, $\mathbf{X}(t)$ aynmag'an matrica bolad.

Úzliksiz coefficientlerge iye hár qanday birtekli sızıqlı sistema fundamentallq matricag'a iye bolad.

Haqqatnda da,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A(t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t_0) = E, \quad t_0 \in (a, b)$$

sistemanın qarayq. Al, $\det \mathbf{X}(t_0) = \det E \neq 0$ bolg'anlıqtan, t_0 noqatnı' bazıbir (α, β) dógeregi bar bolp, onda barlıq $t \in (\alpha, \beta)$ ushn $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$ bolad, yag'ny $\mathbf{X}(t)$ matricası (α, β) intervalda fundamentallıq matrica bolad.

1. Meyli $\bar{\mathbf{X}}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\mathbf{C}$ – aynımağan matrica bolsın. Sonda $\mathbf{X}(t) = \bar{\mathbf{X}}(t)\mathbf{C}$ matricası da usı (1) sistemanın fundamentallıq matricası boladı.

2. Meyli $\mathbf{X}_1(t)$ hám $\mathbf{X}_2(t)$ matricaları (1) sistemanın fundamentallıq matricalar bolsın. Sonda aynımağan sonday $\mathbf{C}$ matricası bar bolıp,

$$\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{C}$$

teńligi orınlı.

Eger $\mathbf{X}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\mathbf{C}$ – aynımağan matrica bolsa, onda $\mathbf{C}\mathbf{X}(t)$ matricası fundamental matrica bolıwı shárt emes.

1. Eger $\mathbf{X}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\mathbf{C}$ – erikli turaqlı vektor bolsa, onda

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$$

ańlatpası usı (1) sistemanın sheshimi boladı.

2. Meyli $\mathbf{X}(t)$ – (1) sistemanın fundamentallıq matricası, al $\bar{\mathbf{x}}(t)$ vektor-funkciyası usı sistemanın sheshimi bolsın. Sonda sonday $\bar{\mathbf{C}}$ vektorı bar bolıp, $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t)\bar{\mathbf{C}}$ teńligi orınlı.

Bul teoremadan tómendegi juwmaq kelip shıǵadı:

Eger $\mathbf{X}(t)$ matricası (1) sistemanın fundamentallıq matricası bolsa, onda usı sistemanın ulıwma sheshimi

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$$

túrine iye boladı, bunda $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – erikli turaqlı vektor.

Bul sistema nollik emes sheshimge iye bolıwı ushın onıń anıqlawıshı nolge teń bolıwı kerek, yaǵnıy $l = 0$ sanı

Kompleks korenler hámme waqıt túyinlesi menen ushırasadı. Demek $l_1 = a + bi$ bir kompleks koreni bolsa, onda $l_2 = a - bi$ bul da koreni boladı. $l_1 = a + bi$ ge sáykes keliwshi sheshimdi (2) den paydalanıp tapsaq,

$$y_n = g_{1n} e^{(a+bi)x} = g_{1n} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = g_{1n} e^{ax} \cos bx + i g_{1n} e^{ax} \sin bx$$

túrindegi dara sheshimler sistemasına iye bolamız. $l_2 = a - bi$ korengé sáykes keliwshi dara sheshimler sisteması usı sheshimler sisteması menen sızıqlı ġárezli boladı, sonlıqtan bul sheshimlerdi taslap ketemiz.

Endi qalğan korenler arasında kompleks koren bar bolsa, onda olarğa sáykes keliwshi dara sheshimler sistemasın usı jol menen esaplap, (1) sistemaniń fundamental sheshimler sistemasına iye bolamız.

c) (4) xarakteristikalıq teflemenin korenleri arasında eseli korenler bolgan jaǵday. Meyli $l = l_1$ koreni k eseli koren bolsın. Onda usı k eseli korengesaykes keliwshi sheshim

$$y_1 = P_1(x)e^{l_{r^x}}, y_2 = P_2(x)e^{l_{r^x}}, \dots, y_n = P_n(x)e^{l_{r^x}} \quad (5)$$

túrine iye boladı, bul jerde $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ lar dárejesi $k-1$ den úlken bolmağan bazıbir ko'paǵzalılar. Bul ko'paǵzalılardıń belgisiz koeffitsientlerin tabıw ushın (5) ańlatpaların (1) sistemaǵa aparıp qoyamız hám x tıń birdey dárejeleri aldındaǵı koeffitsientlerdi salıstıramız.

Eger $k=n$ bolsa, onda (5) sheshim (1) sistemanıń ulıwma sheshimi bolıp tabıladı, eger $k < n$ bolsa, onda qalğan sheshimlerdi anıqlap, payda bolğan n sandaǵı sıızıqlı ǵárezsiz dara sheshimler sisteması boyınsha ulıwma sheshimdi dúzemiz.

23-lekciya. Sızılı bir tekli bolmağan teńlemeler sisteması.

Reje:

1. Sızılı bir tekli bolmağan teńlemeler sisteması. Ulıwma sheshim.
2. Erikli turaqlı variaciyalaw usılı
3. Oń tamalı arnawlı kóriniste bolğan sızılı turaqlı koefficientli teńlemeler sisteması.

Tayanış sózler: Sızılı bir tekli bolmağan teńlemeler sisteması. Ulıwma sheshim. Superpoziciya qasıyeti. Erikli turaqlı variaciyalaw usılı. Koshidin' integrallıq formulası. Anıq emes koefficientler usılı.

Meyli birtekli bolmağan sızılı sistema

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y + F(x) \quad (1)$$

berilsin, bunda $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ - $n \times n$ - ólshemli matrica, $F(x) \neq 0$ vektorı $I = (a, b)$ intervalında anıqlanğan hám úzliksiz bolsın. Sızılı L operatorı járdeminde (1) sistema

$$L[y] = F(x) \quad (2)$$

túrinde jazıladı. Al, (1) sistemağa sáykes keliwshi birtekli sistema

$$L[y] = 0 \quad (3)$$

túrinde jazıladı.

Teorema-1. Eger $Y_0(x)$ vektor funkciya (1) sistemağa sáykes keliwshi (3) birtekli sistemalı sheshimi bolıp, $\Phi(x)$ vektor funkciya (1) birtekli emes sistemalı bir dara sheshimi bolsa, onda $Y_0(x) + \Phi(x)$ funkciyası da usı (1) birtekli emes sistemalı sheshimi boladı.

Teorema-2 (Ulıwma sheshim haqqında). Birtekli emes sızılı sistemalı ulıwma sheshimi usı sistemağa sáykes keliwshi birtekli sistemalı ulıwma sheshimi menen berilgen birtekli emes sistemalı dara sheshiminiń qosındısına teń.

Teorema-3. Eger

$$L[y] = \sum_{k=1}^m f^{(k)}(x), \quad f^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_n^{(k)}(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

birtekli emes sızılı sistema berilgen bolıp, $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)$ vektor funkciyalar I intervalında sáykes túrde

$$L[y] = f^{(1)}(x), L[y] = f^{(2)}(x), \dots, L[y] = f^{(m)}(x)$$

sistemaların sheshimleri bolsa, onda I intervalında

$$\psi(x) = \varphi^{(1)}(x) + \varphi^{(2)}(x) + \dots + \varphi^{(m)}(x)$$

vektor- funkciya berilgen (4) sistemanın sheshimi boladı.

Eger (1) birtekli emes sızıqlı sistemağa sáykes keliwshi birtekli sızıqlı sistemanın sheshimleriniń fundamentallıq sisteması belgili bolsa, onda bul (1) sistemanın ulıwma sheshimin erikli turaqlıları variaciyalaw usılı (Lagranj usılı) járdeminde tabıwğa boladı.

Meyli (3) birtekli sızıqlı sistemanın $J(x)$ fundamentallıq matricesı belgili bolsın. Sonda onıń ulıwma sheshimi

$$Y = J(x)C$$

túrinde jazıladı, bunda C - erikli turaqlı vektor. Endi (1) birtekli emes sistemanın sheshimin

$$Y = J(x)C(x) \quad (5)$$

túrinde izleyviz, bunda $C(x)$ - házirshe anıq emes vektor-funkciya. Onı anıqlaw ushın (5) ti differenciallap (1) sistemağa qoyamız. Sonda

$$J(x) \cdot \frac{dC(x)}{dx} = F(x)$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńliktiń eki jaǵında soldan $J^{-1}(x)$ matricaga kóbeytemiz:

$$\frac{dC(x)}{dx} = J^{-1}(x)F(x).$$

Endi sońǵı teńlikten x_0 den x qa shekem integrallap, $x, x_0 \in I$ tómendegige iye bolamız:

$$C(x) = C + \int_{x_0}^x J^{-1}(s)F(s)ds.$$

Bul tabılǵan ańlatpanı (5) formulağa qoysaq, onda

$$Y(x) = J(x)C + \int_{x_0}^x K(t,s)F(s)ds \quad (6)$$

formulasına iye bolamız, bunda $K(x,s) = J(x)J^{-1}(s)$ - Koshi matricesı.

Bul (6) formula (1) sistemanın ulıwma sheshimin beredi. Eger (1) sistema menen birge

$$Y(x_0) = Y_0 \quad (7)$$

baslanǵısh shárt te berilse hám $J(x)$ (3) sistemanın $x = x_0$ bolǵanda birlik matricaga aylanıwshi fundamentallıq matricesı bolsa, yaǵnıy $Y(x_0) = E$ bolıp, ol normallastırılǵan fundamental matrica bolsa, onda (6) formuladan (1), (7) Koshi máselesiniń sheshimin alıwğa boladı

$$Y(x) = J(x)y_0 + \int_{x_0}^x K(x,s)F(s)ds \quad (8)$$

Bul (8) formula Koshi formulası dep te ataladı.

Meyli turaqlı koefficientli sızıqlı birtekli emes sistema bolǵan

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x) \quad (1)$$

sisteması berilsin, bunda $A = (n \times n)$ ólshemli turaqlı matrica $A = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n, a_{ij}$ - haqıyqıy sanlar, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ - bazıbir $I = (a, b)$ intervalda anıqlanǵan hám úzliksiz vektor-funkciya.

Bul (1) birtekli emes sızıqlı sistemanı sıykes birtekli sistemanıń ulıwma sheshimin taba otırıp, Lagranjdıń erikli turaqlılardı variaciyalaw usılı járdeminde sheshiwge boladı.

Eger (1) sistemada $f(x)$ vektor- funkciyanıń hár bir dúziwshisi kvazikópaǵalı bolsa, yaǵnıy eger $f_i(x)$ funkciya $b = b_1x + \dots + b_mx^m, e^{ax}, \cos \beta x, \sin \beta x$ funkciyalarınń kóbeymeleri hám qosındılarınan tursa, onda onıń dara sheshimin anıq emes koefficientler usılı járdeminde tabıwǵa boladı.

Meyli $f(x)$ vektor – funkciyanıń hár bir koordinatası $f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ kvazikópaǵalı bolsın, yaǵnıy $f_i(x) = P_{m_i}(x)e^{\gamma x}$ túrine iye bolsın, bunda $P_{m_i}(x), i = 1, 2, \dots, n$ - m_i -dárezeli kópaǵalı, $m = \max m_i, i = \overline{1, n}$.

1) Eger γ sanı sıykes birtekli sistemanıń A matricasınıń menshikli sanı bolmasa, onda (1) sistemanıń dara sheshimi

$$y_i(x) = Q_m^{(i)}(x)e^{\gamma x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

túrinde izlenedi, bunda $Q_m^{(i)}$ – bul m dárezeli anıq emes koefficientli kópaǵalı. Onıń koefficientleri anıq emes koefficientler usılı menen tabıladı.

2) Eger γ sanı sıykes birtekli sistemanıń xarakteristikalıq teńlemesi ushın r eseli koren bolsa, onda dara sheshim

$$y_i(x) = Q_{m+r}^{(i)}(x)e^{\gamma x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

túrinde izlenedi, bunda $Q_{m+r}^{(i)}(x)$ -bul dárezesi $m + r$ ge teń bolǵan anıq emes koefficientli kópaǵalı. Bul jaǵdayda da $Q_{m+r}^{(i)}(x)$ kópaǵalınıń anıq emes koefficientleri anıq emes koefficientler usılı járdeminde yaǵnıy (3) ańlatpası (1) sistemaǵa qoyılıp hám uqsas aǵzalardıń koefficientlerin salıstırıw jolı menen tabıladı.

Mısalı: 1) $f(x)$ vektor-funkciyasınıń hár bir dúziwshisi dárezesi $m = s$ ten úlken bolmaǵan kóp aǵalı bolǵanda, yaǵnıy

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^1 x^s + A_1^1 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^1 x + A_s^1 \\ A_0^2 x^s + A_1^2 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^2 x + A_s^2 \\ \dots \\ A_0^n x^s + A_1^n x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^n x + A_s^n \end{pmatrix}$$

bolğanda:

a) eger A matricası nolge teń menshikli sanğa iye bolmasa, yaǵnıy onıń xarakteristikalıq teńlemesiniń k_i korenleri nolge teń bolmasa ($k_i \neq 0; j = \overline{1, n}$) bolsa, onda berilgen (1) sistemanıń dara sheshimi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 x^s + B_1^1 x^{s-1} + \dots + B_{s-1}^1 x + B_s^1 \\ B_0^2 x^s + B_1^2 x^{s-1} + \dots + B_{s-1}^2 x + B_s^2 \\ \dots \\ B_0^n x^s + B_1^n x^{s-1} + \dots + B_{s-1}^n x + B_s^n \end{pmatrix}$$

túrinde izlenedi.

b) eger γ sanı sáykes birtekli sistemanıń xarakteristikalıq teńlemesi ushın r eseli koren bolsa, yaǵnıy $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ bolsa, onda dara sheshim $s + r$ dárejeli kópazǵalı túrinde izlenedi, yaǵnıy

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 x^{s+r} + B_1^1 x^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^1 \\ B_0^2 x^{s+r} + B_1^2 x^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^2 \\ \dots \\ B_0^n x^{s+r} + B_1^n x^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^n \end{pmatrix}$$

2) Meyli $f(x)$ tómendegi túrge iye bolsın:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma x} (A_0^1 x^s + A_1^1 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^1 x + A_s^1) \\ e^{\gamma x} (A_0^2 x^s + A_1^2 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^2 x + A_s^2) \\ \dots \\ e^{\gamma x} (A_0^n x^s + A_1^n x^{s-1} + \dots + A_{s-1}^n x + A_s^n) \end{pmatrix}$$

a) eger xarakteristikalıq teńlemenıń kóreni γ ға teń bolmasa, yaǵnıy $k \neq \gamma$ bolsa, onda dara sheshim tómendegi túrde izlenedi:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma x} (B_0^1 x^s + B_1^1 x^{s-1} + \dots + B_{s-1}^1 x + B_s^1) \\ e^{\gamma x} (B_0^2 x^s + B_1^2 x^{s-1} + \dots + B_{s-1}^2 x + B_s^2) \\ \dots \\ e^{\gamma x} (B_0^n x^s + B_1^n x^{s-1} + \dots + B_{s-1}^n x + B_s^n) \end{pmatrix}$$

b) Eger γ sanı karakteristikaliq teńlemenıń r eseli kóreni bolsa, yaǵnıy $k_1 = k_2 = \dots = k_r = \gamma$ bolsa, onda dara sheshim tómendegi túrde izlenedi:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma x} (B_0^1 x^{r+s} + B_1^1 x^{r+s-1} + \dots + B_{r+s}^1) \\ e^{\gamma x} (B_0^2 x^{r+s} + B_1^2 x^{r+s-1} + \dots + B_{r+s}^2) \\ \dots \\ e^{\gamma x} (B_0^n x^{r+s} + B_1^n x^{r+s-1} + \dots + B_{r+s}^n) \end{pmatrix};$$

3) Meyli $f(x)$ tómendegi túrge iye bolsın:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{px} (A_0^1 x^s + A_1^1 x^{s-1} + \dots + A_s^1) \cos qx \\ e^{px} (A_0^2 x^s + A_1^2 x^{s-1} + \dots + A_s^2) \cos qx \\ \dots \\ e^{px} (A_0^n x^s + A_1^n x^{s-1} + \dots + A_s^n) \cos qx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{px} (B_0^1 x^s + B_1^1 x^{s-1} + \dots + B_s^1) \sin qx \\ e^{px} (B_0^2 x^s + B_1^2 x^{s-1} + \dots + B_s^2) \sin qx \\ \dots \\ e^{px} (B_0^n x^s + B_1^n x^{s-1} + \dots + B_s^n) \sin qx \end{pmatrix}.$$

a) Eger $p \pm iq$ sanı karakteristikaliq teńlemenıń kóreni bolmasa, onda dara sheshim tómendegi túrde izlenedi:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{px} (C_0^1 x^s + C_1^1 x^{s-1} + \dots + C_s^1) \cos qx \\ e^{px} (C_0^2 x^s + C_1^2 x^{s-1} + \dots + C_s^2) \cos qx \\ \dots \\ e^{px} (C_0^n x^s + C_1^n x^{s-1} + \dots + C_s^n) \cos qx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{px} (D_0^1 x^s + D_1^1 x^{s-1} + \dots + D_s^1) \sin qx \\ e^{px} (D_0^2 x^s + D_1^2 x^{s-1} + \dots + D_s^2) \sin qx \\ \dots \\ e^{px} (D_0^n x^s + D_1^n x^{s-1} + \dots + D_s^n) \sin qx \end{pmatrix};$$

b) Eger $p \pm iq$ sanı karakteristikaliq teńlemenıń r eseli kóreni bolsa, onda dara sheshim tómendegi túrde izlenedi:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{px} (C_0^1 x^{s+r} + C_1^1 x^{s+r-1} + \dots + C_{s+r}^1) \cos qx \\ e^{px} (C_0^2 x^{s+r} + C_1^2 x^{s+r-1} + \dots + C_{s+r}^2) \cos qx \\ \dots \\ e^{px} (C_0^n x^{s+r} + C_1^n x^{s+r-1} + \dots + C_{s+r}^n) \cos qx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{px} (D_0^1 x^{s+r} + D_1^1 x^{s+r-1} + \dots + D_{s+r}^1) \sin qx \\ e^{px} (D_0^2 x^{s+r} + D_1^2 x^{s+r-1} + \dots + D_{s+r}^2) \sin qx \\ \dots \\ e^{px} (D_0^n x^{s+r} + D_1^n x^{s+r-1} + \dots + D_{s+r}^n) \sin qx \end{pmatrix}.$$

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Eger birtekli emes sızıqlı sistemaniń bir dara sheshimi hám sáykes birtekli sızıqlı sistemaniń ulıwma sheshimi belgili bolsa, onıń ulıwma sheshimi qalay dúziledi?
2. Birtekli emes sızıqlı sistemaniń ulıwma sheshimin tabıwdıń Lagranj usılı neden ibarat?
3. Turaqlı koefficientli birtekli emes sistemani sheshiwdiń anıq emes koefficientler usılı neden ibarat?
4. Turaqlı koefficientli birtekli sistemaniń A matricasınıń menshikli sanlarına hám sistemaniń óń jaǵına baylanıslı túrde dara sheshimler qanday kóriniste izlenedi?

23-lekciya. Matrica kórinisindegi sızıqlı teńlemeler sisteması. Eksponenciallıq matrica. Matricalı differenciallıq teńlemelerdi integrallaw

Reje:

1. Eksponenciallıq matrica hám onıń qásiyetleri.
2. Sızıqlı bir tekli turaqlı koefficientli teńlemeler sistemasın sheshiwdiń matricalıq usılı

Tayanış sózler: *Eksponencial matrica. Matrica eksponentasınıń qásiyetleri. Matricalıq usıl. A matricasınıń Jordan forması. Fundamentallıq matricanı dúziw.*

Skalyar shama a nıń eksponencialı $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^p}{p!} + \dots$ qatarı menen kórsetiletuǵını belgili. Usıǵan uqsas túrde A kvadratlıq matricasınıń eksponencialı túsiniǵı kiritiledi. A matricasınıń eksponencialı dep,

$$\exp A = e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^p}{p!} + \dots \quad (1)$$

qatarı túsiniledi.

Bul (1) qatar qálegen kvadratlıq matrica ushın jıynaqlı, sebebi bul matricanıń norması ushın dúzilgen $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!}$ skalyar qatarı jıynaqlı boladı.

(1) qatardıń qálegen A kvadratlıq matrica ushın jıynaqlıǵınan

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(At)^p}{p!} \quad (2)$$

qatardıń da jıynaqlıǵı kelip shıǵadı, bunda t – skalyar kóbeytiwshi. Bul qatar At kóbeymeniń eksponencialın beredi, yaǵnıy e^{At} . Solay etip,

$$e^{At} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(At)^p}{p!}.$$

Eksponencialdıń bazı bir qásiyetlerin keltiremiz.

1) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As} = e^{As} \cdot e^{At}$. Haqiqatında da,

$$e^{At} \cdot e^{As} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l s^l}{l!} = \sum_{p=0}^{\infty} A^p \cdot \sum_{k=0}^p \frac{t^k s^{p-k}}{k!(p-k)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p (t+s)^p}{p!} = e^{A(t+s)}.$$

Al, $e^{A(t+s)} = e^{A(s+t)}$ bolganlıqtan, keltirilgen teńliklerden e^{At} hám e^{As} matricalarınń kommutativligi de kelip shıǵadı. $s = -t$ dep esaplap, $e^{At} \cdot e^{-At} = e^{A0} = E$ ekenin alamız. Demek, e^{At} – mudamı aynımaǵan matrica hám onıń kerı matricası e^{-At} matricasına teń.

2) Eger $AB = BA$ bolsa, onda $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$.

3) Eksponencialdın tuwındısı. (2) qatardı formal túrde differenciallaǵannan alınǵan qatarda teń ólshewli jıynaqlı boladı, sonlıqtan, (2) qatardı aǵzama-aǵza differenciallaǵan nızamlı. Bunı esapqa alsaq, onda

$$\frac{de^{At}}{dt} = A + \frac{A^2 t}{1!} + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots = Ae^{At} = e^{At} A.$$

Meyli a – haqiqıy san bolsın. $t \in \mathbb{R}$ ózgeriwshiniń e^{at} kórsetkishli funkciyası jáne bir xarakteristikalıq qásiyetke iye: e^{at} funkciyası $\dot{x} = ax$ skalyar differenciallıq teńlemesin hám $x|_{t=0} = 1$ baslanǵısh shártin qanaatlandıradı.

Bul qásiyetti de kórsetkishli funkciyanıń anıqlaması sıpatında alıwǵa boladı.

Differenciallıq teńlemeler teoriyasında matricanıń eksponentasin anıqlaǵanda kórsetkishli funkciyanıń usı xarakteristikalıq qásiyetin tiykar etip alıwǵa boladı.

Anıqlama. $t \cdot A$ matricanıń eksponentası (eksponencialı) dep,

$$x' = Ax \quad (3)$$

birtekli sızıqlı sistemanıń $X(0) = E$ shárti menen normalastırılǵan $X(t)$ fundamentallıq matricasına, yaǵnıy

$$X' = AX', \quad X|_{t=0} = E \quad (4)$$

matricalıq Koshi máselesiniń sheshimine aytıladı.

Solay etip, anıqlama boyınsha

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}, \quad e^{At}|_{t=0} = E. \quad (5)$$

Al, $e^{A(t-t_0)}$ matricası

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(t_0) = E$$

matricalıq teńlemenıń sheshimi boladı hám demek,

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

birtekli sızılı sistemaniñ fundamentallıq matricası boladı.

Usıǵan baylanıslı A – turaqlı matrica bolǵanda

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \quad (6)$$

birtekli emes sızılı sistemaniñ $x(t_0) = C$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın ulıwma sheshimin tómendegishe kórsetiwge boladı:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}C + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_0)} e^{-A(s-t_0)} f(s) ds \quad \text{yamasa} \quad x(t) = e^{A(t-t_0)}C + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds.$$

Endi (3) birtekli sızılı sistemani matricalıq usıl menen sheshiw máselesin qarayıq.

Meyli H – A matricasını J jordan formasına túrlendiretuǵın matrica bolsın, demek,

$$A = H J H^{-1} \quad (7)$$

(3) teńlemede

$$x = Hy \quad (8)$$

özgeriwshilerdi almasıruwın orınlaymız. Sonda

$$\frac{dy}{dt} = H^{-1} A H y.$$

Endi (7) esapqa alsaq, onda

$$\frac{dy}{dt} = J y \quad (9)$$

sistemasına iye bolamız.

Bundaǵı J matricası kvazidiagonalıq strukturaǵa iye: $J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_p(\lambda_p))$, λ_i – bul A matricasınıñ menshikli mánisleri. Baǵanalıq matrica y ti sonday bloklarǵa bólemiz, j – bloktıñ qatarlar sanı. $J_j(\lambda_j)$ jordan kletkasınıñ tártibine teń bolsın. Sonda

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p(\lambda_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}.$$

Solay etip, biziñ vektorlı-matricalı teńlememiz p ǵárezsiz teńlemelerge ajraladı:

$$\frac{dy_j}{dt} = J_j(\lambda_j) y_j \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (10)$$

Bul (10) sistemanıń fundamentallıq matricası $Y_j = e^{J_j(\lambda_j)t}$ túrine iye boladı yamasa $J_j(\lambda_j) = \lambda_j E_{k_j} + N_{k_j}$ bolǵanlıqtan, $Y_j = e^{\lambda_j t} e^{N_{k_j} t}$ boladı. Al,

$$e^{N_{k_j} t} = E_{k_j} + \frac{N_{k_j} t}{1} + \frac{N_{k_j}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{N_{k_j}^{k_j-1} t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}.$$

Demek,

$$e^{N_{k_j} t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Solay etip,

$$Y_j(t) = e^{\lambda_j t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Al, (10) teńlemenıń fundamentallıq matricasın bile otırıp, (9) teńlemenıń fundamentallıq matricasın tómendegi kvazidiagonalıq túrde dúziw múmkin:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Y_p \end{bmatrix}.$$

Meyli

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t), \quad X(t_0) = C \quad (11)$$

matricalıq teńleme berilgen bolsın.

Teorema. (11) matricalıq teńlemenıń sheshimi

$$X = Y(t)CZ(t) \quad (12)$$

kórinisinde kórsetiledi, bunda $Y(t)$ hám $Z(t)$ – sáykes túrde

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = E \quad (13)$$

$$\frac{dZ}{dt} = ZB(t), \quad Z(t_0) = E \quad (14)$$

matricaliq teńlemelerdiń sheshimleri.

Dálillew. (12) formulasın t boyınsha differenciallap, (13) hám (14) ti esapqa alıp, tómendegige iye bolamız:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt} C Z + Y C \frac{dZ}{dt} = A Y C Z + Y C Z B.$$

Kórinip turǵanıday, usınday túrge (11) teńlemenıń óń jaǵı da keledi, eger X tıń ornına (12) qoyılsa. Teorema dálillendi.

1-saldar. Mına

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X - XA(t), \quad X(t_0) = C \quad (15)$$

matricaliq teńlemenıń sheshimi

$$X = Y(t) C Y^{-1}(t) \quad (16)$$

kórinisine iye boladı.

Haqıyqatında da, bul jaǵdayda (13), (14) teńlemeleri

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = E, \quad (17)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -ZA(t), \quad Z(t_0) = E \quad (18)$$

túrine iye boladı. (18) teńleme (17) teńlemege túyinles teńleme boladı hám sonlıqtan $Z(t) = Y^{-1}(t)$.

Bunnan (12) ge muwapıq, (16) ańlatpası kelip shıǵadı.

2-saldar. Eger (11) teńlemede A hám B turaqlı matricalar bolsa, onda bul teńlemenıń sheshimi

$$X = e^{A(t-t_0)} C e^{B(t-t_0)}$$

túrinde kórsetiledi.

24-lekciya. Sheshimniń dawamlanıwı. Sheshimniń baslanǵısh shártlerge hám parametrlerge úzliksiz ǵárezligi haqqındaǵı teorema.

Reje:

1. Sheshimniń dawamlanıwı.
2. Sheshimniń parametrden úzliksiz ǵárezligi haqqındaǵı teorema.
3. Sheshiminiń baslanǵısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezligi haqqındaǵı teorema

Tayanısh sózler: *Sheshimniń dawam etiliwi. Dawamsız sheshimler. Sheshimniń parametrler boyınsha úzliksizligi. Sheshiminiń baslanǵısh berilgenler boyınsha úzliksizligi*

Meyli differenciallıq teńlemelerdiń normal sisteması bolǵan

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}$$

sisteması yamasa vektorlıq túrde jazılǵan

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

sisteması berilgen bolsın, bunda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya.

Bul normal sistema ushın bar bolıw hám birden-birlik teoremasınıń shártleri orınlanadı dep uyǵaramız.

Biz (1) teńlemeler sistemasınıń oń jaǵı bolǵan $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ vektor-funkciyası bazıbir λ parametrden de ǵárezli bolǵan jaǵdaydı qaraymız:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) \quad (2)$$

sonıń menen birge, λ parametriniń qálegen mánisi ushın sheshimniń bar bolıw hám birden-birliǵi haqqındaǵı teorema shártleri orınlı boladı dep uyǵaramız. Sonda (2) sistemaniń $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \lambda, t_0, \mathbf{x}_0)$ sheshimi λ parametriniń bazıbir funkciyası boladı.

Meyli berilgen (2) sistemada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n ólshemli vektor hám $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – parametr bolıp, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya bolsın.

Bul (2) teńlemeler sisteması menen birge

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

baslanǵısh shártlerdi de qaraymız, bunda $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ – berilgen n ólshemli turaqlı vektor.

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

Teorema. Meyli $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ vektor-funkciyası

$$\mathbb{R}: |t - t_0| \leq a, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b, \quad \|\lambda - \lambda_0\| \leq c, \quad a, b, c \geq 0$$

oblastta anıqlanǵan bolıp, tómendegi shártlerdi qanaatlandırınsın:

1) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ vektor-funkciyası $t, \mathbf{x}, \lambda$ boyınsha $\mathbb{R}$ oblastta úzliksiz hám demek, ol usı oblastta shegaralanğan: $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)\| \leq M$, bunda M – oń turaqlı, sonıń menen birge, ol λ parametrden gárezli emes;

2) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ vektor-funkciyası $\mathbf{x}$ boyınsha $\mathbb{R}$ oblastında Lipshic shártin qanaatlandıradı, yaǵnıy $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}', \lambda)\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ teńsizligi barlıq $(t, \mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}$ hám $(t, \mathbf{x}', \lambda) \in \mathbb{R}$ ushın orınlanadı, bunda $L > 0$ turaqlısı λ parametrden gárezli emes.

Sonda (2) differenciallıq teńlemeler sisteması (3) baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın, $|t - t_0| \leq h, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c$ bolǵanda anıqlanğan birden-bir $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \lambda)$ sheshimge iye hám bul sheshim t gárezsiz ózgeriwshisine qarata teń ólshewli túrde λ parametriniń úzliksiz funkciyası boladı, yaǵnıy qálegen $\varepsilon > 0$ ushın sonday $\delta > 0$ bar bolıp $\|\Delta\lambda\| < \delta$ bolǵanda barlıq $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ushın

$$\|\mathbf{x}(t, \lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{x}(t, \lambda)\| < \varepsilon$$

teńsizligi orınlanadı, bunda $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

(1), (3) Koshi máselesi berilsin. (1) sistemaniń oń jaǵı bolǵan $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ vektor-funkciyasın

$$\mathbb{R}: |t - t_0| \leq a, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b$$

oblastta anıqlanğan dep esaplaymız.

Teorema. Eger (1) sistemaniń oń jaǵı bolǵan $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ vektor-funkciyası $\mathbb{R}$ oblastta Pikar teoremasınıń shártlerin qanaatlandırsa, onda (1) sistemaniń $t = t^*$ bolǵanda $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın $\mathbf{x} = \varphi(t, t^*, \mathbf{x}^*)$ sheshimi t gárezsiz ózgeriwshiniń hám $t^*, \mathbf{x}^*$ baslanǵısh berilgenlerdiń $|t - t_0| \leq \frac{h}{2} - \omega, |t^* - t_0| \leq \omega, \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0\| \leq \frac{b}{2}$ oblasttaǵı úzliksiz funkciyası boladı, bunda $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, 0 \leq \omega \leq \frac{h}{4}$.

25-lekciya. Sheshimniń baslanǵısh mánisler hám parametrlar boyınsha differenciallanıwshılıǵı haqqında teoremlar

Reje:

1. Sheshiminiń parametrlar boyınsha differenciallanıwshılıǵı haqqında teorema
2. Sheshimniń baslanǵısh mánisler boyınsha differenciallanıwı haqqında teorema

Tayanış sózler: Sheshim. Parametr. Sheshiminiń parametrlar boyınsha differenciallanıwshılıǵı.

Sheshimniń baslanǵısh mánisler boyınsha differenciallanıwshılıǵı. Variyaciyalardaǵı teńlemeler sisteması.

Meyli

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda), \\ \mathbf{x}(t_0, \lambda) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

baslanǵısh máseleler jıynaǵ berilsin, bunda $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – parametr, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya.

Teorema. Eger $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ vektor-funkciyası $(t, \mathbf{x}, \lambda) \in I \times D \times \Lambda$ oblastta $t, \mathbf{x}, \lambda$ boyınsha r márte ($r \geq 1$) úzliksiz differenciallanatuğın bolsa, onda (1) baslanğısh máseleleriniń $\mathbf{x}(t, \lambda)$ sheshimleri de $(t, \lambda) \in I_1 \times \Lambda$ oblastta t boyınsha da hám λ parametri boyınsha da r márte úzliksiz differenciallanadı, bunda $I_1 \subset I, \mathbf{x}_0 \in D$.

Meyli

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2)$$

differenciallıq teńlemeler sisteması hám

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

baslanğısh shárti berilgen bolsın.

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

Teorema. Eger $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ vektor-funkciyası $I \times D$ oblastta $t, \mathbf{x}$ ózgeriwshileri boyınsha $r \geq 1$ tártiptegi hám sol tártiptegi úzliksiz tuwındılarǵa iye bolsa, onda (2), (3) baslanğısh máseleleriń $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ sheshimi $t, t_0, \mathbf{x}_0$ ózgeriwshileri boyınsha $r \geq 1$ tártipke shekemgi hám sol tártiptegi úzliksiz tuwındılarǵa iye boladı.

26-lekciya. Avtonomiyalı sistemalar. Sheshimniń qásiyetleri

Reje:

1. Avtonomiyalı sistema haqqında túsiniq
2. Sheshimniń qásiyetleri

Tayanış sózler: 1. Avtonom sistema. Fazalıq keńislik. Fazalıq iymek sızıqlar. Traektoriyalardıń túrleri. Teńsalmaqlılıq awqalları. Sheshimniń qásiyetleri

Eger differenciallıq teńlemeler sistemasına ǵárezsiz ózgeriwshi anıq túrde kirmese, onda bul sistema *avtonomiyalı sistema* dep ataladı.

Birinshi tártipli n teńlemeden ibarat normal túrdegi avtonomiyalı sistemanıń ulıwma túri

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

kórinisinde yamasa vektorlıq túrde

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

túrinde jazıladı, bunda t – ǵárezsiz ózgeriwshi, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n ólshemli vektor; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – n ólshemli vektor-funkciya. Al, óń jaǵında t anıq túrde qatnasqan

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

normal sisteması *avtonomiyalı emes sistema* delinedi. Bul sistemada jańa $x_{n+1} = t$ belgisiz funkciyasın kirgizip, onı $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ ózgeriwshileriniń keńisligindegi

$$\frac{dx}{dt} = f(x_{n+1}, \mathbf{x}), \quad \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$$

kórinisindegi avtonomiyalı sistema túrinde jazıwǵa boladı.

Eger bul sistemalarda ǵárezsiz ózgeriwshi t waqıttı ańlatatuǵın bolsa, onda ol *dinamikalıq sistemalar* delinedi.

Meyli (2) avtonomiyalı sistemalıń oń jaǵı bolǵan $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektor-funkciyası $x_1, x_2, \dots, x_n$, ózgeriwshileriniń $\mathbb{R}^n$ keńisliginiń bazıbir D ashıq oblastında úzliksiz bolsın hám usı D oblastında pútinley jatatuǵın qálegen tuyıq shegaralanǵan oblastta Lipshic shártin qanaatlандırsın. Sonda bar bolıw hám birden-birlik teoremasına muwapıq, qálegen haqıyqıy t_0 sanı ushın hám qálegen $\mathbf{x}_0 \in D$ noqat ushın (2) sistemalıń $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$ baslanǵısh shártin qanaatlандıratuǵın birden-bir $\mathbf{x} = \varphi(t)$ sheshimi bar boladı.

Meyli $\mathbf{x} = \varphi(t)$ funkciyası (2) sistemalıń I intervalda anıqlanǵan sheshimi bolsın. Sonda $\mathbf{x} = \varphi(t)$, $t \in I$ noqatlar kópligi $\mathbb{R}_x^n$ keńisliginde iymek sıızıq (sıızıq) boladı. Haqıyqatında da, $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $t \in I$ – bul iymek sıızıqtıń parametrlik teńlemesi. Bul iymek sıızıq (1) avtonomiyalı sistemalıń *fazalıq traektoriyası* (yamasa *traektoriyası*) dep ataladı. Al, fazalıq traektoriyalar jaylasqan $\mathbb{R}_x^n$ keńisligi (1) avtonomiyalı sistemalıń *fazalıq keńisligi* dep ataladı. $n = 2$ bolǵanda $\mathbb{R}_x^2$ *fazalıq tegislik* delinedi.

(2) sistemalıń integrallıq iymek sıızıqlar koordinataları $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ bolǵan $(n + 1)$ -ólshemli $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ keńisliginde súwretlenedi. Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ funkciyası sistemalıń sheshimi bolsa, onda integrallıq iymek sıızıq $\mathbf{x} = \varphi(t)$, $t = t$, $t \in I$ teńlemeleri menen beriledi. Demek, oǵan sáykes keletuǵın fazalıq traektoriya integrallıq iymek sıızıqtıń $\mathbb{R}_x^n$ fazalıq keńislikke proekciyası boladı.

27-lekciya. Sızıqlı avtonom sistemanın ayırıqsha toshkalari. Asimptotikalıq ornıqlı periodlı qozğalı túsini

Reje:

1. Sızıqlı avtonom sistema
2. Ayırıqsha toshkalardıń tipleri
3. Asimptotikalıq ornıqlı periodlı qozğalı túsini

Tayanış sózler: Sızıqlı avtonom sistema. Ayırıqsha toshka. Teń salmaqlılıq awqalı. Tınıshlıq toshkası. Ayırıqsha toshkalar tipleri: Túyin, er, focus, oray. Periodlı qozğalı

Endi avtonomiyalı sistemalardıń sheshimleriniń qásiyetlerin úyrenemiz.

1. Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ – (2) avtonomiyalı sistemanın sheshimi bolsa, onda C qálegen turaqlı bolğanda $\mathbf{x} = \varphi(t + C)$ vektor-funkciyası da usı (2) sistemanın sheshimi boladı.

2. Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ hám $\mathbf{x} = \psi(t)$ – berilgen (2) sistemanın eki sheshimleri bolsa hám $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$ bolsa, onda $\psi(t) = \varphi(t + C)$, bunda $C = t_1 - t_2$. Basqasha aytqanda, eger eki $\mathbf{x} = \varphi(t)$ hám $\mathbf{x} = \psi(t)$ traektoriyalar ulıwma noqatqa iye bolsa, onda bul traektoriyalar ústpe-úst túsedi.

3. Avtonomiyalı sistemalardıń sheshimleri gruppalıq qásiyetke iye: eger $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ – (2) sistemanın $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ baslanğısh shártin qanaatlandıratuğın sheshimi bolsa, onda

$$\varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}_0)) = \varphi(t + s, \mathbf{x}_0)$$

teńligi orınlı.

Anıqlama. Eger $\mathbf{f}(a) = 0$ teńligi orınlansa, onda $\mathbf{x} = a$ noqatı (2) avtonomiyalı sistemanın *teń salmaqlıq awqalı* dep ataladı.

Teń salmaqlıq awqalı avtonomiyalı sistemanın *tınıshlıq noqatı* dep te ataladı.

4. Eger a – teń salmaqlıq awqalı bolsa, onda $\mathbf{x}(t) \equiv a$, $-\infty < t < \infty$ vektor-funkciya (2) avtonomiyalı sistemanın sheshimi boladı.

5. Eger a – teń salmaqlıq awqalı bolsa, onda $\mathbf{x} = a$ noqat fazalıq traektoriya boladı.

6. Noqattan ózgeshe bolğan fazalıq traektoriya tegis iymek sızıq boladı (yağnıy hár bir noqatında nollik emes urınba vektorğa iye).

Teorema. (2) avtonomiyalı sistemanın hár qanday fazalıq traektoriyası tómendegi úsh tiptiń birewine tiyisli:

- 1) óz-ara kesilispeytuğın tegis iymek sızıq;
- 2) tuyıq tegis iymek sızıq (cikl);
- 3) noqat.

Eger $\mathbf{x} = \varphi(t)$ sheshimge sáykes keletúgín fazalıq traektoriya tegis tuyıq iymek sıızıq bolsa, onda bul sheshim t ózgeriwshinin' periodı $T > 0$ bolğan periodlı funkciyası boladı.

Mına

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

teńlemeler sisteması

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos(-t + C_2), \\ x_2 = C_1 \sin(-t + C_2) \end{cases}$$

túrindegi sheshimlerge iye, bunnan t parametrin shıǵarıp taslasaq, onda $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$ bolıp, traektoriyalar orayı $(0,0)$ teń salmaqlıq awhalında bolğan koncentrlık sheńber toparı boladı. Solay etip, traektoriyalardıń tuyıqlıǵı $x_1(t)$ hám $x_2(t)$ funkciyalarınıń birdey periodtaǵı periodlı sheshimler bolıwın kórsetedi.

28-lekciya. Lyapunov mánisindegi ornıqlılıq. Asimptotikalıq ornıqlılıq haqqında teoremlar.

Reje:

1. Lyapunov mánisindegi ornıqlılıq. Tiykarǵı túsinipler ham anıqlamalar
2. Asimptotikalıq ornıqlılıq haqqında teorema

Tayanış sózler: *Ornıqlılıq. Asimptotikalıq ornıqlılıq. Ornıqsızlıq.*

Ornıqlılıq máseleleri dáslep mexanikada sistemalardıń teń salmaqlılıq awhalların úyregende kelip shıqtı. 1644-jılı awırılıq kúshiniń tásirinde turǵan deneler sistemasınıń teń salmaqlılıǵınıń ornıqlılıq shártin ulıwma jaǵday ushın italyan matematigi hám fizigi E. Torrichelli anıqladı, al bunnan 144 jıl keyin, yaǵnıy 1788- jılı J.Lagranj qálegen konservativlik sistemalıq teń salmaqlılıq awhalınıń ornıqlılıǵınıń jetkilikli shártlerin anıqlawshı teremanı dálilledi.

Ásirese, XVIII-ásirdiń aqırı XIX-ásirdiń basındaǵı Quyash sistemasınıń ornıqlılıǵı boyınsha Lagranj benen Laplastıń klassikalıq miynetleri úlken áhmiyetke iye boldı.

1892-jılı A.M. Lyapunovtıń “Qozǵalıstıń ornıqlılıǵı haqqındaǵı ulıwma másele“ dep atalınǵan atalıq doktorlıq dissertaciyası járiyalandı. Mine, usı miyneti menen ol házirgi zaman ornıqlılıq teoriyasınıń tiykarın salıwshı boldı.

A.M. Lyapunov qozǵalıstıń ornıqlılıǵınıń qatań hám sonıń menen birge tábiǵıy anıqlamasın berdi. Onıń bul anıqlamasınıń sátli bolǵanı sonshellı, onı tiykarǵı anıqlama retinde barlıq ilimpazlar qabıl etti. Ornıqlılıqtıń basqa túrleri Lyapunov mánisindegi ornıqlılıq penen baylanışlı yamasa oǵan alıp kelinedi.

Differenciallıq teńlemeler sistemasın qarayıq:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

bunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(t, x)$ vektor-funkciyası $t \geq t_0 \geq 0$, $x \in D$ oblastta úzliksiz hám x boyınsha Lipııic shártin qanaatlandıratuǵın bolsın.

Meyli $x = \varphi(t)$ funkciyası (1) sistemanıń $x|_{t=t_0} = \varphi(t_0)$, $t_0 \geq 0$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimi, al $x = x(t)$ usı sistemanıń basqa $x|_{t=t_0} = x(t_0)$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimi bolsın. Bul $\varphi(t)$ hám $x(t)$ sheshimlerdi barlıq $t \geq t_0$ ushın anıqlanǵan, yaǵnıy olardı ońǵa qaray sheksiz dawamlanǵan dep esaplaymız.

Anıqlama. Eger kálegen $\varepsilon > 0$ hám $t \in (t_0; \infty)$ ushın sonday $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sanı tabılıp, (1) sistemanıń hár qanday $x = x(t)$ sheshimi ushın $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ teńsizliginen barlıq $t \geq t_0$ ushın

$$\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$$

teńsizligi kelip shıqsa, onda usı sistemanıń $x = \varphi(t)$, $(t_0 \leq t < \infty)$ sheshimi $t \rightarrow +\infty$ da Lyapunov mánisinde ornıqlı dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $x = \varphi(t)$ sheshimge qálegen t_0 momentinde jetkilikli dárejede jaqın bolǵan $x(t)$ sheshimi $\varphi(t)$ sheshiminiń dógeresinde jasalǵan qálegen tar ε - tútiksheniń ishinde tolıǵı menen jaylassa, onda usı $x = \varphi(t)$ sheshim ornıqlı boladı.

Anıqlama. Eger δ sanın t_0 baslanǵısh mánisinen ǵárezli emes etip, yaǵnıy $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ túrinde saylap alıw múmkin bolsa, onda $x = \varphi(t)$ sheshimi teń ólshewli ornıqlı dep ataladı.

Anıqlama. Eger: 1) (1) sistemanıń $x = \varphi(t)$ ($a \leq t < \infty$) sheshimi ornıqlı bolsa hám 2) qálegen $t_0 \in [a, \infty)$ ushın sonday $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ bar bolıp, (1) sistemanıń $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_0$ shártin qanaatlandıratuǵın hár qanday $x = x(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) sheshimi $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$ qásiyetine iye bolsa, onda usı sistemanıń $x = \varphi(t)$ ($a < t < \infty$) sheshimi $t \rightarrow \infty$ da Lyapunov mánisinde asimptotikalıq túrde ornıqlı dep ataladı.

Meyli $\{t, \varphi(t)\}$, $t \geq t_0$ (1) sistemanıń integrallıq iymek sızıǵı bolsın. Eger $\{t, x(t)\}$ integrallıq iymek sızıǵı t_0 momentinde dáslepkege jetkilikli dárejede jaqın bolıp, $t \rightarrow \infty$ da $\{t, \varphi(t)\}$ integrallıq iymek sızıǵına umtılsa, onda $x = \varphi(t)$ sheshim asimptotikalıq túrde ornıqlı boladı.

Anıqlama. Eger bazıbir $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ ushın qálegen $\delta > 0$ ushın (1) sistemanıń sonday $x_\delta(t)$ sheshimi (eń keminde bir sheshimi) hám $t_1 = t_1(\delta)$ mánisi tabılıp, $\|x_\delta(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ teńsizligi orınlanǵanda $t \geq t_1$ ushın $\|x_\delta(t) - \varphi(t)\| \geq \varepsilon$ teńsizligi orınlansa, onda usı sistemanıń $x = \varphi(t)$ ($a \leq t < \infty$) sheshimi ornıqsız dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $t = t_0$ bolǵanda $(t_0, \varphi(t_0))$ tochkasına jetkilikli dárejede jaqın tochkadan ótetuǵın hám waqıttıń bazıbir $t = t_1$ momentinde $\{t; \varphi(t)\}$ integrallıq iymek sızıǵınıń

dógeregine jasalǵan qálegeninshe tar ε - tútiksheden shıǵıp ketetuǵın $\{t, x_\varepsilon(t)\}$, $t \geq t_0$ integrallıq iydek sıızǵı bar bolsa, onda $x = \varphi(t)$ sheshim ornıqsız boladı.

Endi (1) sistemaniń nollık emes $x = \varphi(t)$ sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesin usı sistema menen baylanıslı bolǵan bazıbir basqa sistemaniń nollık sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesine alıp keliw múmkin ekenin kórseteyik. Bul sistemani alıw ushın (1) sistemada $x = y + \varphi(t)$

dep esaplap, ózgeriwshilerdi almastıramız, bunda $y = y(t)$ - jańa izleniwshi funkciya. Sonda

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, x) - f(t, \varphi) \equiv f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$$

boladı. Solay etip, berilgen (1) sisteması

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y) \quad (2)$$

sistemasına ótedi, bunda $Y(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$, $Y(t, 0) = 0$, al, $x = \varphi(t)$ sheshim $y \equiv 0$ nollık (triviallıq) sheshimge ótedi. Bul sheshim $x(t_0) = 0$ nollık baslanǵısh shártlerge sáykes keledi.

Solay etip, (1) sistemaniń $x = \varphi(t)$ nollık emes sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesi (2) sistemaniń $y \equiv 0$ nollık sheshimin ornıqlılıqqa izertlew máselesine alıp kelindi.

Biz tiykarınan barlıq $t \geq t_0$ ushın $f(t, 0) \equiv 0$ shártin qanaatlándıratuǵın (1) sistemaniń nollık sheshimin (teń salmaqlılıq awhalın) ornıqlılıqqa izertleybiz.

Nollık sheshiminiń ornıqlılıǵınıń, asimptotikalıq ornıqlılıǵınıń hám ornıqsızlıǵınıń anıqlamaları tómendegiden ibarat:

On jaǵı $f(t, x)$ funkciyası $f(t, 0) \equiv 0$ shártin qanaatlándıratuǵın (1) sistemani qarayıq, $x = x(t, x_0)$ usı sistemaniń (t_0, x_0) tochkası arqalı ótetuǵın sheshimi bolsın.

Anıqlama. Eger qálegen kishi $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanı bar bolıp, $\|x_0\| < \delta$ bolǵanda barlıq $t = t_0$ ushın $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ teńsizligi orınlansa, onda (1) sistemaniń $\varphi(t) \equiv 0$ nollık sheshimi Lyapunov mánisinde ornıqlı dep ataladı.

Anıqlama. Eger (1) sistemaniń $\varphi(t) \equiv 0$ nollık sheshimi ornıqlı bolsa hám sonday $\delta > 0$ bar bolıp, usı sistemaniń hár qanday $x(t, x_0)$ sheshimi ushın $\|x_0\| < \delta$ bolǵanda $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$ qatnası orınlı bolsa, onda bul $\varphi(t) \equiv 0$ nollık sheshim Lyapunov mánisinde asimptotikalıq túrde ornıqlı dep ataladı.

Anıqlama. Eger (1) sistemaniń $\varphi(t) \equiv 0$ nollık sheshimi ornıqlı bolmasa, onda ol ornıqsız dep ataladı.

Tekseriw ushın sorawlar

1. Koshi máselesi sheshiminiń Lyapunov mánisindegi ornıqlılıǵı degen ne?
2. Sheshimniń asimtotikalıq ornıqlılıǵı degen ne?
3. Ornıqsız sheshim degen ne?
4. Nollık sheshimniń ornıqlılıǵı, asimtotikalıq ornıqlılıǵı, ornıqsızlıǵı qalay anıqlanadı?

29 - lekciya. Birinshi jaqınlasıw boyınsha ornıqlılıq haqqındaǵı Lyapunov teoreması

Reje:

1. Sızıqlı sistemalardıń ornıqlılıǵı.
2. Birinshi juwıqlasıw boyınsha ornıqlılıq. Lyapunov teoreması.

Tayanış sózler: *Sızıqlı sistema. Ornıqlılıq shártleri. Birinshi jaqınlasıw sisteması. Lyapunov teoreması.*

Meyli

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1)$$

birtekli sızıqlı sisteması berilsin, bunda $A(t)$ barlıq $t \geq t_0$ ushın anıqlanǵan úzliksiz shegaralanǵan matrica. Bul (1) sistemaniń sheshimleriniń ornıqlılıǵı yamasa ornıqsızlıǵı usı sistemaniń $X(t, t_0)$ fundamentallıq matricasınıń (matricantınıń) $t \rightarrow +\infty$ daǵı qásiyeti menen anıqlanadı. Tómendegi teorema ornılı.

Teorema. (1) sızıqlı sistemaniń sheshimleriniń:

- 1) *ornıqlı* bolıwı ushın onıń $X(t, t_0)$ fundamentallıq matricasınıń $t \geq t_0$ bolǵanda shegaralanǵan bolıwı;
- 2) *asimptotikalıq ornıqlı* bolıwı ushın onıń matricantınıń, yaǵnıy $X(t, t_0)$ fundamentallıq matricasınıń $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t, t_0)\| = 0$ shártin qanaatlandırıwı;
- 3) *ornıqsız* bolıwı ushın usı matricanttıń shegaralanbaǵan bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

$X(t, t_0)$ matricanı $x(t_0)$ baslanǵısh mánisten gárezli bolmaǵanlıqtan, (1) sızıqlı sistemaniń barlıq sheshimleri bir waqıtta ya ornıqlı, ya ornıqsız boladı. Sonlıqtan (1) sistemaniń sheshimleriniń ornıqlı, asimptotikalıq ornıqlı yamasa ornıqsız bolıwına baylanıslı túrde bul sistemani ádette ornıqlı, asimptotikalıq ornıqlı yamasa ornıqsız sistema dep ataydı.

Eger (1) sistemada $A(t) \equiv A$ turaqlı matrica bolsa, onda onıń sheshimleriniń ornıqlılıq shártleri A matricasınıń menshikli sanları menen anıqlanadı. Tómendegi teorema ornılı.

Teorema. Turaqlı koefficientli

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2)$$

sistemanın sheshimleri sonda hám tek sonda ǵana:

1) *ornıqlı* boladı, eger A matricasınıń menshikli mánisleriniń haqıyqıy bólekleri ón bolmasa, yaǵnıy $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$ bolsa, sonıń menen birge, nollik haqıyqıy bólekke iye menshikli sanǵa bir ólshemli Jordan kletkaları sáykes kelse, yaǵnıy bunday menshikli sanlar ápiwayı elementar bóliwshilerge iye bolsa;

2) *asimptotikalıq ornıqlı* boladı, eger A matricasınıń menshikli sanlarınıń haqıyqıy bólekleri teris bolsa, yaǵnıy $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ bolsa;

3) *ornıqsız* boladı, eger A matricasınıń haqıyqıy bólegi nolge teń bolǵan eń keminde bir menshikli sanına bir ólshemli emes Jordan kletkası sáykes kelse (bunday menshikli san ápiwayı emes elementar bóliwshige iye) yamasa A matricasınıń eń keminde bir menshikli sanınıń haqıyqıy bólegi ón bolsa.

Meyli endi sıızıqlı emes

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x) \quad (3)$$

túrindegi differenciallıq teńlemeler sisteması berilsin, bunda A - turaqlı matrica, $f(t, x)$ - t hám x boyınsha ($t \geq t_0, \|x\| \leq h$) úzliksiz funkciya, al $t \geq t_0$ boyınsha teń ólshewli túrde

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (4)$$

shártti qanaatlandıratuǵın bolsın.

Turaqlı koefficientli

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (5)$$

teńlemeler sisteması (3) sistema ushın birinshi juwıqlasıw sisteması dep ataladı.

Tómendegi teorema birinshi juwıqlasıw boyınsha ornıqlılıq kriteriyn beredi.

Teorema. Eger A matricasınıń barlıq menshikli sanlarınıń haqıyqıy bólekleri teris bolsa, al $f(t, x)$ funkciyası (4) teńlikti qanaatlandırsa, onda (3) sistemanıń nollik sheshimi asimptotikalıq ornıqlı boladı. Eger A matricasınıń menshikli sanları ishinde haqıyqıy bólegi ón bolatuǵın eń keminde bir san bolsa, al $f(t, x)$ funkciyası (4) shártti qanaatlandırsa, onda (3) sistemanıń nollik sheshimi ornıqsız boladı.

Eskertiw. Eger $f(t, x)$ funkciyası $f(t, 0) = 0$ hám $\frac{\partial f(t, 0)}{\partial x} = 0$ shártlerin qanaatlandırsa, onda ol (4) shártin de qanaatlandıradı.

Eger A matricasınıń menshikli sanları ishinde eń keminde birewi nollık haqıyqıy bólekke iye bolıp, al qalǵanları teris haqıyqıy bóleklerge iye bolsa, onda (3) sistemanıń nollık sheshimi ornıqlı da (asimptotikalıq ornıqlı da), sonday-aq, ornıqsız da bolıwı múmkin, yaǵnıy bul jaǵdayda (5) túrindegi birinshi juwıqlasıw sistemasınıń ornıqlılıǵınan (3) sistemanıń nollık sheshiminiń ornıqlılıǵı haqqında juwmaq shıǵarıwǵa bolmaydı. Bul jaǵdayda qosımsha izertlewdi talap etedi.

Tekseriw ushın sorawlar

1. Sızıqlı birtekli sistemanıń ornıqlılıq, asimptotikalıq ornıqlılıq hám ornıqsızlıq shártleri neden ibarat?
2. Turaqlı koefficientli sızıqlı birtekli sistemanıń nollık sheshiminiń ornıqlılıǵın (ornıqsızlıǵın) bul sistemanıń matricasınıń menshikli sanları arqalı qalay anıqlawǵa boladı?
3. Birinshi juwıqlasıw boyınsha ornıqlılıq kriteriyi neden ibarat?

30-lekciya

Sızıqlı birtekli turaqlı koefficientli ekinshi tártipli avtonomiyalı sistemanıń fazalıq tegisligi

1. Fazalıq tegislik
2. Eki teńlemeler sisteması ushın teń salmaqlıq awhallarınıń tipleri

Avtonomiyalı differenciallıq teńlemeler sisteması bolǵan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

sistemasın qaraymız, bunda $P(x, y)$ hám $Q(x, y)$ funkciyaları xOy tegisliktiń bazıbir oblastında yamasa pútkil tegislikte anqlanǵan, úzliksiz differenciallanıwshı funkciyalar. Ğárezsiz ózgeriwshı t waqıt dep esaplanılǵan jaǵdaylarda (1) sistema *dinamikalıq sistema* dep, al koordinatalıq tegislik onıń *fazalıq tegisligi* dep ataladı.

(1) sistemada fazalıq iymek sızıqlardıń (traektoriyalardıń) úsh túri bolıwı múmkin: noqat, tuyıq iymek sızıq hám tuyıq emes iymek sızıq.

Traektoriyası (x_0, y_0) noqatı (teń salmaqlıq awhalı yamasa tınıshlıq noqatı) bolǵan sheshim turaqlı boladı: $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ barlıq $t \in \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ ushın. Tuyıq iymek sızıqtan ibarat traektoriya periodlı sheshimge sáykes keledi, al tuyıq emes iymek sızıqqa periodlı emes sheshim sáykes keledi.

L fazalıq iymek sızıqtağı *bağıt* dep, $(x(t), y(t))$ fazalıq noqattın L boyınsha t ózgeriwshiniń ósiw tárepine bağıtlangan qozǵalı bağıt túsiniledi.

(1) dinamikalıq sistemanı sapalı izertlewdiń tiykarǵı máselesi fazalıq tegisliktiń traektoriyalarǵa bóliniwiniń sapalıq súwretin anıqlawdan ibarat.

(1) sistemanıń traektoriyalarınıń fazalıq tegisliktegi jaylasıwın anıqlaw ushın barlıq traektoriyalardıń emes, al tek olardıń ishindegi ayrıqsha delinetuǵın ayırımlarınıń: teń salmaqıq awhallarınıń, sheklik cikllerdiń hám eń keminde bir yarım traektoriya bazıbir teń salmaqıq awhalınıń separatrissası bolatuǵın tuyıq emes iymek sızıqlardıń jaylasıwların biliw kerek.

Eger tuyıq fazalıq iymek sızıqtıń pútinley sonday traektoriyalar menen toltırılǵan dógeregi bar bolıp, bul traektoriyalar boylap fazalıq noqat $t \rightarrow +\infty$ da yamasa $t \rightarrow -\infty$ da usı tuyıq iymek sızıqqa umtılatuǵın bolsa, onda bul tuyıq fazalıq iymek sızıq (1) sistemanıń *sheklik cikli* dep ataladı.

Biz (1) sistemanıń dara jaǵday bolǵan turaqlı koefficientli birtekli sızıqlı eki ten'lemeler sistemasn qaraymız:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (2)$$

bunda $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Bul (2) sistemann' sheshimin $x = \gamma_1 e^{\lambda t}$, $y = \gamma_2 e^{\lambda t}$ túrinde izleyviz, bunda $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ – házirshe anq emes turaqlılar. Bundaǵı λ turaqlısın anqlaw ushın

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

xarakteristikalıq teńlemeneni alamız, al γ_1 hám γ_2 turaqlı kóbeytiwshige deyingi dállikte

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

sistemasınan anıqlanadı.

Tómendegi jaǵdaylardı qaraymız:

a) Xarakteristikalıq teńlemeniniń λ_1 hám λ_2 korenleri haqıyqıy hám hár qıylı. Bul jaǵdayda (2) sistemanıń ulwıma sheshimi tómendegi túrge iye boladı:

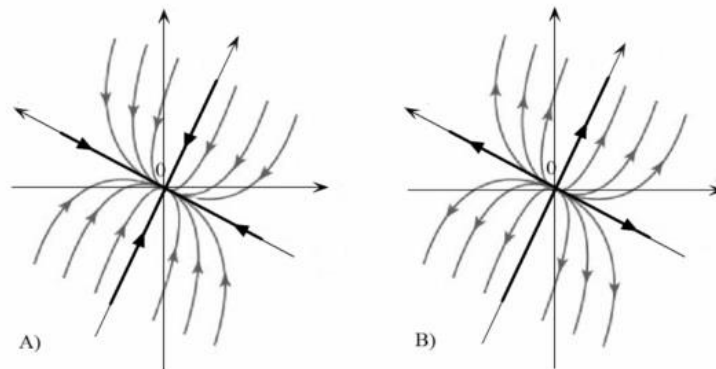
$$\begin{cases} x = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y = C_1 \alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad (5)$$

bunda $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – (4) sistemadan sáykes túrde $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$ bolǵanda anıqlangan turaqlılar, al C_1 hám C_2 – erikli turaqlılar.

1) Eger (3) xarakteristikalıq teńlemeniniń λ_1 hám λ_2 korenleri haqıyqıy hám hár qıylı bolıp, olar birdey belgili bolsa, yaǵnıy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ bolsa, onda (2) sistemanıń $x = 0, y = 0$ teń salmaqıq awhalı *túyin* dep ataladı.

Eger $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ bolsa, onda $x = 0, y = 0$ teń salmaqlıq awhalı asimptotikalıq ornıqlı boladı, sebebi (5) formulada $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ kóbeytiwshiler bar bolǵanlıqtan, $t = t_0$ baslanǵısh momentte koordinatalar basınıń qálegen δ -dógereginde bolǵan traektoriyanıń barlıq noqatları t jetkilikli úlken bolǵanda da koordinatalar basınıń qálegeninshe kishi ε -dógereginde jatatuǵın noqatlarga ótedi, al $t \rightarrow \infty$ da koordinatalar basına umtıladı.

Bul jag'dayda $x = 0, y = 0$ ten' salmaqlıq awhalı *ornıqlı túyin* delinedi. Strelkalar traektoriyalar boylap t óskendegi qozǵalıw baǵıtların kórsetedi.



A) ornıqlı túyin; B) ornıqsız túyin.

2) Meyli $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ bolsın. Bul jag'day t n $-t$ ǵa almasırdanda aldınǵı jag'dayǵa ótedi. Demek, traektoriyalar aldınǵı jag'daydaǵıday túrge iye boladı, biraq ta, tek traektoriyalar boyınsha noqatlar qarama-qarsı baǵıtta qozǵaladı.

Kórinip turǵanıday, koordinatalar basına qálegeninshe jaqın noqatlar t nıń ósiwi menen koordinatalar basınıń ε -dógereginen uzaqlasadı. Qarastırılǵan tiptegi teń salmaqlıq awhalı *ornıqsız túyin* dep ataladı.

3) Eger $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ bolsa, onda teń salmaqlıq awhal jáne ornıqsız boladı, sebebi

$$x = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1 \alpha_2 e^{\lambda_1 t}$$

traektoriyalar boyınsha qozǵalıwshı noqat C_1 parametriniń qálegeninshe kishi mánislerinde t nıń ósiwi menen koordinatalar basınıń ε -dógereginen shıǵıp ketedi.

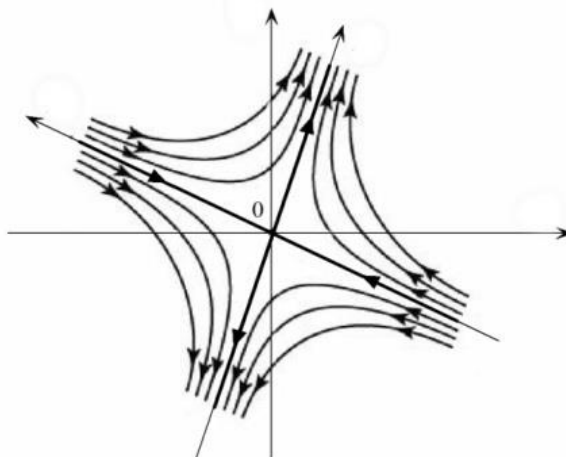
Qarastırıp atırǵan jag'dayda koordinatalar basına jaqınlasıwshı qozǵalıw ta bar, atap aytqanda:

$$x = C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y = C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

$\lambda_2 < 0$ bolǵanlıqtan, koordinatalar basına jaqınlasadı.

Sonıń menen birge, C_2 parametriniń hár qıylı mánislerinde birdey $y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x$ tuwrısı boyınsha hár qıylı qozǵalıslar alamız. t óskende bul tuwrıdaǵı noqatlar koordinatalar basına qaraǵan baǵıt boyınsha qozǵaladı.

Al, $y = \frac{a_2}{a_1}x$ tuwrısı boyınsha traektoriya noqatlar t nıń ósiwi menen koordinatalar basınan uzaqlasıp qozǵaladı. Eger de $C_1 \neq 0$ hám $C_2 \neq 0$ bolsa, onda $t \rightarrow \infty$ da hám sonday-aq, $t \rightarrow -\infty$ da traektoriya teń salmaqlıq awhalı dóğereginen shıǵıp ketedi. Qarastırıp atırǵan tipte, atap aytqanda, λ_1 hám λ_2 korenler haqıyqıy hám hár qıylı bolıp, hár qıylı belgili bolǵanda, yaǵnıy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ bolǵanda $x = 0, y = 0$ teń salmaqlıq awhalı *er* dep ataladı.



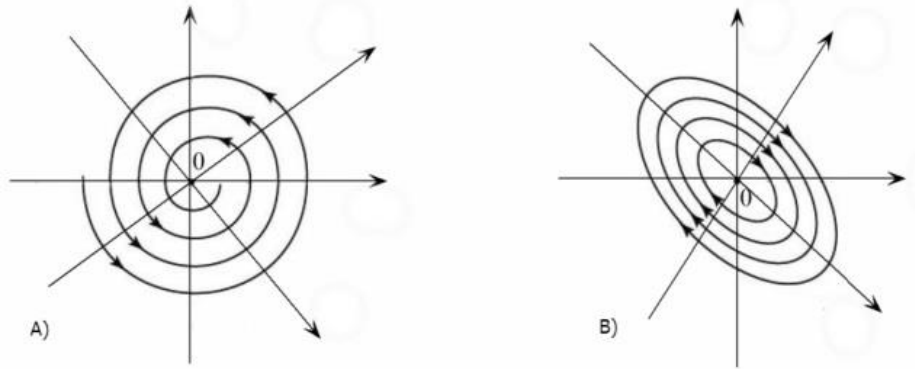
Er

b) Meyli (3) xarakteristikalıq teńlemenıń korenleri kompleks, yaǵnıy $\lambda_{1,2} = p \pm qi$, $q \neq 0$ bolsın. Bul jaǵdayda qarastırıp atırǵan (2) sistemanıń ulıwma sheshimin

$$\begin{aligned} x &= e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt}(C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt) \end{aligned} \quad (6)$$

túrinde kórsetiwge boladı, bunda C_1 hám C_2 – erikli turaqlılar, al C_1^* hám C_2^* – us turaqlılardıń bazıbir sıızılı kombinacijaları. Bunda tómendegi jaǵdaylar bolıw múmkin:

1) $\lambda_{1,2} = p + qi$, $p < 0$, $q \neq 0$. Bul jaǵdayda waqıt t ósiwi menen e^{pt} kóbeytiwshisi nolge umtıladı, al (6) teńliklerdegi ekinshi periodlı kóbeytiwshi shegaralanǵan bolıp qaladı. Egerde $p = 0$ bolsa, onda (6) teńlikleriniń oń jaǵındaǵı ekinshi kóbeytiwshiniń periodlı bolıwına baylanslı traektoriyalar $x = 0, y = 0$ teń salmaqlıq awhalın qorshaytuǵın tuyıq iymek sıızıqlar boladı. Al, t ózgeriwshiniń ósiwi menen nolge umtılatuǵın e^{pt} ($p < 0$) kóbeytiwshiniń bar bolıw tuyıq iymek sıızıqlardı spirallarǵa aylandıradı, bul spirallar $t \rightarrow \infty$ da koordinatalar basına asimptotikalıq túrde jaqınlasadı, sonıń menen birge, $t = t_0$ bolǵanda koordinatalar basınıń qálegen δ -dóğereginde turǵan noqatlar t jetkilikli úlken bolǵanda da teń salmaqlıq awhalınıń berilgen ε -dóğeregine tiyisli boladı. Demek, teń salmaqlıq awhalı asimptotikalıq ornıqlı hám *ornıqlı fokus* dep ataladı. Fokus túyinnen sonıń menen ayrıladı, traektoriyalarǵa júrgizilgen urınbalar urınıw noqatı teń salmaqlıq awhalına jaqınlasqanda belgili bir shekke umtılmaydı.



A) ornıqlı fokus; B) oray.

2) $\lambda_{1,2} = -p \pm qi$, $p > 0$, $q \neq 0$. Bul jaǵday t n $-t$ ǵa almasıǵanda aldınıǵı jaǵdayǵa ótedi. Demek, traektoriyalar aldınıǵı jaǵdaydan ózgeshelenbeydi, biraq olar boyınsha qozǵalı t óskende kerı baǵıtta boladı. $t = t_0$ baslanǵısh momentte koordinatalar basına qálegeninshe jaqın jaylasqan noqatlar ósiwshi e^{pt} ($p > 0$) kóbeytiwshi bar bolǵanlıqtan, t nıń ósiwi menen koordinatalar basınıń ε -dógereginen uzaqlasadı. Bul jaǵdayda teń salmaqlıq awhalı ornıqsız hám ol *ornıqsız fokus* dep ataladı.

3) $\lambda_{1,2} = \pm qi$, $p = 0$, $q \neq 0$. Sheshimniń periodlıǵına baylanıslı bul jaǵdayda traektoriyalar teń salmaqlıq awhalın óz ishine alatuǵın tuyıq iymek sıızılqar boladı. Bul jaǵdayda teń salmaqlıq awhalın *oray* dep ataydı. Oray ornıqlı tınıshlıq noqat (teń salmaqlıq awhalı) boladı, sebebi qálegen berilgen $\varepsilon > 0$ ushın sonday $\delta > 0$ sanın tańlap alıw múmkin, noqatlar koordinatalar basınıń δ -dógereginde jatqan tuyıq traektoriyalar yamasa C_1 hám C_2 shamaların sonday kishi etip tańlap alıw múmkin, mına

$$\begin{cases} x = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt, \\ y = C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt \end{cases}$$

sheshimler $x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2$ teńsizligin qanaatlandıradı. Biraq, bul jaǵdayda asimptotikalıq ornıqlılıq bolmaydı, sebebi $x(t)$ hám $y(t)$ funkciyalar $t \rightarrow \infty$ da 0 ge umtılmaydı.

c) Meyli (3) xarakteristikalıq teńleme korenleri eseli korenler bolsın: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

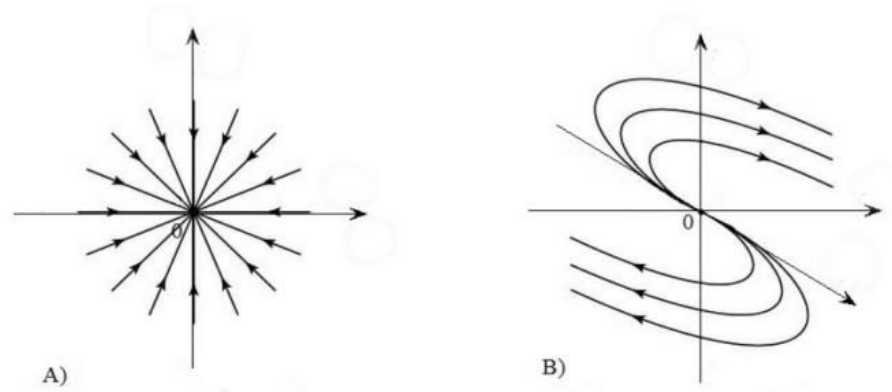
1) Dáslep $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ bolǵan jaǵdaydı qarayıq.

Ulıwma sheshim eseli korenler bolǵan jaǵdayda

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t}(C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 t), \\ y(t) = e^{\lambda t}(C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 t) \end{cases}$$

túrine iye boladı. Sonıń menen birge, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ bolıwı da múmkin, bul jaǵdayda α_1 hám α_2 erikli turaqlılar boladı. Al, $t \rightarrow \infty$ da tez nolge umtılatuǵın $e^{\lambda t}$ kóbeytiwshi bolǵanlıqtan, $e^{\lambda t}(C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 t)$ kóbeymesi $t \rightarrow \infty$ da nolge umtıladı, sonıń menen birge, t jetkilikli úlken bolǵanda da koordinatalar basınıń qálegen δ -dógereginiń noqatlar koordinataları basınıń berilgen ε -dógereginen tiyisli boladı hám demek, tınıshlıq noqat asimptotikalıq ornıqlı. Bul *ornıqlı túyin* boladı.

Eger $\beta_1 = \beta_2 = 0$ bolsa, onda jáne ornıqlı túyinge iye bolamız. Bul jaǵdayda teń salmaqlıq awhalı *dikritikalıq túyin* dep ataladı.



A) dikritikalıq túyin; B) ornıqsız túyin.

2) Eger $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ bolsa, onda t n $-t$ ǵa almasıp, aldınǵı jaǵdayǵa klinedi, demek, traektoriyalar aldınǵı jaǵdaydın traektoriyalarınan parıqlanbaydı. Bul jaǵdayda tınıshlıq noqat *ornıqsız túyin* delinedi.

Solay etip, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ bolǵandaǵı barlıq múmkin bolǵan jaǵdaylar qarastırıldı.

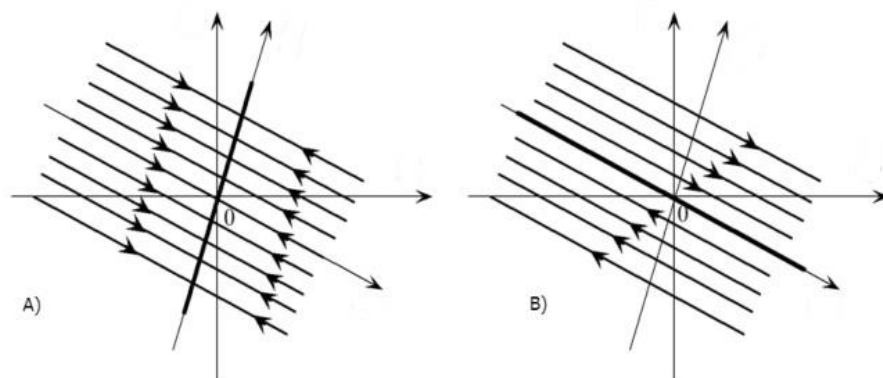
Endi $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ bolǵan jaǵdaydı qaraymız. Sonda xarakteristikalıq teńleme

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

túrine iye bolıp, $\lambda_1 = 0$ korengge iye boladı. Meyli bunda $\lambda_2 \neq 0$ bolsın. Sonda ulıwma sheshim

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1e^{\lambda_2t}, \\ y = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2e^{\lambda_2t} \end{cases}$$

túrine iye boladı. Bul teńliklerden t nı shıǵarıp taslap, $\beta_1(y - C_1\alpha_2) = \beta_2(x - C_2\alpha_1)$ parallel tuwrılar toparna iye bolamz. Bunda $C_2 = 0$ bolsa, $a_1y = a_2x$ tuwrısında jaylasqan tınıshlıq noqatlarnıń (teń salmaqlıq awhallarınıń) bir parametrli toparın alamız. Eger $\lambda_2 < 0$ bolsa, onda $t \rightarrow \infty$ da hár bir traektoriyada noqatlar usı traektoriyada jatatuǵın $x = C_1\alpha_1$, $y = C_1\alpha_2$ tınıshlıq noqatına jaqınlasadı. $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ tınıshlıq noqatı ornıqlı, biraq asimptotikalıq ornıqlı bolmaydı.



A) ornıqlı tınıshlıq noqatlarınıń tuwrısı ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$); B) ornıqsız tınıshlıq noqatlarınıń tuwrısı ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$).

Egerde $\lambda_2 > 0$ bolsa, onda traektoriyalar aldınǵı jaǵdaydaǵıday bolıp jaylasadı da, biraq traektoriyalardaǵı noqatlar qozǵalısqarama-qarsı baǵıtta boladı. Bul jaǵdayda $x \equiv 0, y \equiv 0$ tınıshlıq noqatı ornıqsız boladı.

Egerde $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bolsa, onda tómendegi eki jaǵday bolıwı múmkin:

1) (2) sistemasnıń ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} x = C_1, \\ y = C_2 \end{cases}$$

túrine iye. Bul jaǵdayda barlıq noqatlar tınıshlıq noqatlar boladı, barlıq sheshimler ornıqlı.

2) Ulıwma sheshim tómendegi túrge iye:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 t, \\ y = C_1^* + C_2^* t, \end{cases}$$

bunda C_1^* hám C_2^* turaqlılar C_1 hám C_2 erikli turaqlılarnıń sızıqlı kombinaciyası. Bul jaǵdayda $x \equiv 0, y \equiv 0$ tınıshlıq noqatı ornıqsız.

31-lekciya. Ekinshi tártipli sızıqlı differenciýallıq teńlemenı ápiwayı koriniske keltiriw. Shegaralıq máseleler.

Reje:

1. Ekinshi tártipli sızıqlı differenciýallıq teńlemenı ápiwayı koriniske keltiriw.
2. Shegaralıq máseleler. Grin funkciyası
3. Grin funkciyasınıń bar bolıwı hám birden-birligi haqqında
4. Menshikli mánisler hám menshikli funksiyalar túsiniǵı

Tayanış sózler: Ekinshi tártipli sızıqlı differenciýallıq teńleme. Shegaralıq shártler. Shegaralıq másele. Grin funkciyası. Menshikli mánisler hám menshikli funksiyalar túsiniǵı

Biz differenciýallıq teńlemeler ushin Koshi máselesin úyrendik. Ápiwayı qılıp aytqanda, Koshi máselesi berilgen tochkadan ótetuǵın integrallıq iymek siziqtı izlewden ibarat edi. Eger integrallıq iymek siziqtıń berilgen eki tochkadan otiwi talap etilse, bul másele Koshi máselesinen pariqlı qılıp, berilgen eki tochkaniń hár biri ushin ayırım alıǵan Koshi máselesi sheshimge iye bolsa da, bul qoyılǵan másele sheshimge iye bolmawı múmkin,

Birinshi tártipli differenciýallıq teńleme ushin másele

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

túrinde jazılıwı múmkin.

Ekinshi tártipli siziqlı teńleme bolǵan

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t) \quad (1)$$

teńlemenı qarayıq.

Meyli $a(t), b(t), c(t)$ hám $f(t)$ funkciyalari bazibir $t_0 \leq t \leq t_1$ kesindide aniqlanǵan hám úzliksiz bolsın. Usı (1) teńlemenıń

$$\begin{aligned} \alpha_0 \dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) &= A, \\ \beta_0 \dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) &= B \end{aligned} \quad (2)$$

shártlerin qanaatlantıratuǵın $x(t)$ sheshimin izleybiz, bunda $\alpha_0, \alpha_1, A, \beta_0, \beta_1$ - turaqlılar.

Bul (2) shártler shegaralıq yamasa shetki shártler dep, al, (1), (2) máselesiniń ózi shegaralıq másele dep ataladı.

(1), (2) shegaralıq másele ushin tómendegi úsh múmkinshiliktiń birewi orınli bolıwı múmkin: shegaralıq másele birden-bir sheshimge iye, sheshimlerdiń sheksiz kópligine iye, ulıwma sheshimge iye emes.

(1), (2) shegaralıq másele sheshiw ushin dáslep (1) differenciýallıq teńlemenıń ulıwma sheshimin tabamız. Keyin tabılǵan ulıwma sheshimdi berilgen (2) shegaralıq shártlerge qoyıp, ulıwma sheshimdegı C_1, C_2 erikli turaqlılarına qarata algebralıq teńlemeler sistemasına iye bolamız. Eger bul sistema bir mánisli sheshiletuǵın bolsa, onı sheship, C_1, C_2 erikli turaqlılardıń

tabilğan mánislerin uliwma sheshimge qoyip, berilgen shegaraliq mäseleniñ sheshimine iye bolamiz.

Misal. Mina

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (3)$$

differentialliq teñleme ushin shegaraliq shártleri

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1, \quad (4)$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = 1, \quad (5)$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = 0, \quad (6)$$

bolğan úsh shegaraliq mäseleni qaraymiz.

Berilgen (3) tenlemenin uliwma sheshimi

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad (7)$$

boladi. (3), (4) shegaraliq másele birden-bir sheshimge iye, sebebi (7) formuladan (4) shártlerge muwapiq,

$$C_1 = -\frac{1}{\sin 1}, \quad C_2 = 0$$

mánislerin alamiz. Bul mánislerdi (7) formulagáa qoysaq, onda $x(t) = -\frac{1}{\sin 1} \cos t$ sheshimge iye bolamiz.

(3), (5) shegaraliqmásele sheshimge iye emes, sebebi (7) formuladan (5) shártlerge muwapiq,

$$1 = -C_1 \sin \pi = 0$$

kelip shigadi, al bul múmkin emes.

(3), (6) shegaraniñ másele sheksiz kóp sheshimlerge iye: $x = C_1 \cos t$, bunda C_1 - qálegen turaqli.

Shegaraliq mäseleni Grin funkciyasi járdeminde sheshiw. Mina

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t) \quad (8)$$

teñleme ushin

$$\begin{aligned} \alpha_0 \dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) &= A, & \alpha_0^2 + \alpha_1^2 &> 0 \\ \beta_0 \dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) &= B, & \beta_0^2 + \beta_1^2 &> 0 \end{aligned} \quad (9)$$

shegaraliq shártlerdi qanaatlantiratuğın shegaraliq mäseleni qarayiq.

Bul (8), (9) shegaraliq másele birden-bir sheshimge iye dep uyğarayiq.

Meyli $x = x_1(t)$ funkciyasi

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0 \quad (10)$$

teńlemenin (9) shegaraliq shártlerdin birinshisin qanaatlandiratuǵın, yaǵniy $\alpha_0 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0) = 0$ bolatuǵın trivialliq emes sheshimi, al $x = x_2(t)$ funkciyasi usi (10) teńlemenin ekinshi shegaraliq shártti qanaatlandiratuǵın, yaǵniy $\beta_0 \dot{x}_2(t_1) + \beta_1 x_2(t_1) = 0$ bolatuǵın trivialliq emes sheshimi bolsın.

Sonda $x_1(t)$ ekinshi shegaraliq shártti qanaatlandirmaydı, sebebi keri jaǵdayda qálegen C turaqlıda $x = Cx_1(t)$ funkciyasi (9), (10) shegaraliq máseleńin sheshimleri bolar edi hám biziń (8), (9) shegaraliq máselemiz sheksiz kóp sheshimlerge iye bolar edi. Dál usınday etip, $x_2(t)$ sheshimniń birinshi shegaraliq shártti qanaatlandirmaytuǵını dálillendi. Solay etip,

$$\beta_0 \dot{x}_1(t_1) + \beta_1 x_1(t_1) \neq 0 \quad (11)$$

$$\alpha_0 \dot{x}_2(t_0) + \alpha_1 x_2(t_0) \neq 0$$

Bul dúzilgen $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ sheshimler siziqli gárezsiz, sebebi keri jaǵdayda olar proporcional bolar edi hám birdey shegaraliq shártlerdi qanaatlandirar edi, al bul múmkin emes.

(8), (9) shegaraliq máseleńin Grin funkciyasi dep, $t \in [a, b]$, $s \in (a, b)$ bolǵanda aniqlanǵan hám hár bir fiksirlengen $s \in (a, b)$ ushin tómendegi shártlerdi qanaatlandiratuǵın $G(t, s)$ funkciyasına aytiladi:

- 1) $t \neq s$ bolǵanda $G(t, s)$ funkciyasi (10) teńlemenin qanaatlandiradi;
- 2) $t = t_1$ hám $t = t_2$ bolǵanda $G(t, s)$ funkciyasi (9) shegaraliq shártlerdi qanaatlandiradi;
- 3) $t = s$ bolǵanda $G(t, s)$ funkciyasi t boyınsha úzliksiz, al onıń tuwindisi t boyınsha sekiriwi $\frac{1}{a(t)}$ ǵa teń bolǵan birinshi tekli úziliske iye:

$$\begin{aligned} G(s+0, s) &= G(s-0, s), \\ G'_t(s+0, s) - G'_t(s-0, s) &= \frac{1}{a(s)} \end{aligned} \quad (12)$$

Bul (8), (9) shegaraliq máseleńin Grin funkciyasın dúziw ushin (10) teńlemenin nólden ózgeshe bolǵan eki $x_1(t)$ hám $x_2(t)$ sheshimlerin tabamız, olardıń birinshisin, al ekinshisin usi shártlerdin ekinshisin qanaatlandiratuǵın bolsın.

Eger $x_1(t)$ bir waqıtta (9) shegaraliq shártlerdin ekewin qanaatlandirmasa onda $G(t, s)$ grin funkciyasi bar boladı hám onı tómendegi túrde izlewge boladı:

$$G(t, s) = \begin{cases} \varphi(s)x_1(t), & t_0 \leq t \leq s, \\ \varphi(s)x_2(t), & s \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (13)$$

bunda $\varphi(s)$ hám $\varphi(s)$ funkciyalari (13) funkciyasi (12) shártleri qanaatlantiratuǵınday etip, yaǵniy

$$\begin{cases} \varphi(s)x_2(s) = \varphi(s)x_1(s), \\ \varphi(s)x_2'(s) - \varphi(s)x_1'(s) = \frac{1}{a(s)} \end{cases}$$

bolatuǵınday etip saylap alinadi. Eger $G(t,s)$ Grin funkciyasi tabilsa, onda (8), (9) shegaraliq máselesiniń sheshimi

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t,s) f(s) ds$$

formulasi menen ańlatiladi.

32-lekciya. Ekinshi tártipli DT-lerdi dárejeli qatarlar járdeminde integrallaw

Reje:

1. Ekinshi tártipli DT-lerdi dárejeli qatarlar járdeminde sheshiw
2. Uliwmalasqan dárejeli qatarlar

Tayanish sözler: *Dárejeli qatarlar. Uliwmalasqan dárejeli qatarlar*

Birinshi tártipten joqari tártipli ózgermeli koefficientli sızıqlı differenciallıq teńlemenıń sheshimleri báhá elementar funksiylarda ańlatıla bermeydi hám bunday teńlemenı integrallaw kvadratarǵa da siyrek alıp klinedi.

Bunday teńlemelerdi integrallawdıń eń kóp tarqalǵan usılı izlengen sheshimdi dárejeli qatar túrinde kórsetiw bolıp tabıladı.

Ekinshi tártipli teńleme bolǵan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

teńlemesin qarayıq.

Meyli (1) teńlemenıń $p(x)$ hám $q(x)$ koefficientleri $|x - x_0| < a$ intervalda analitikalıq funksiylar bolsın, yaǵniy $|x - x_0| < a$ bolǵanda jiynaqlı bolǵan dárejeli qatarlarǵa jayılatuǵın bolsın:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \quad (2)$$

Teorema. Eger $p(x)$ hám $q(x)$ funksiyları $|x - x_0| < a$ bolǵanda analitikalıq funksiylar bolsa, onda (1) teńlemesiniń hár qanday $y = y(x)$ sheshimi $|x - x_0| < a$ bolǵanda analitikalıq funksiya boladı, yaǵniy $|x - x_0| < a$ bolǵanda jiynaqlı bolatuǵın dárejeli qatarǵa jayıladı:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

Bul teorema (1) teńlemenı integrallawǵa yaǵniy oniń sheshimin dárejeli qatar kórinisinde dúziwge múmkinshilik beredi. Bunday dúziwdiń algoritmi tómendegiden ibarat. A'piwayılıq ushın $x_0 = 0$ dep esaplaymız. (1) teńlemenıń sheshimin x tiń dárejeleri boyınsha jayılǵan anıq emes koefficientli qatar túrinde izleymız:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (3)$$

bunda c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ - anıq emes koefficientler. (3) qatardi (1) teńlemege qoyıp,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

teńligin alamiz.

Bul teńlikti $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots$ dárejeleri aldındaǵı koefficientlerdi nolge teńlestirip, belgisiz $c_0, c_1, c_2, \dots$ koefficientlerin aniqlaw ushin rekurrentlik teńlemeler sistemasin alamiz:

$$\begin{aligned} q_0 c_0 + p_0 c_1 + 1 \cdot 2 c_2 &= 0 \\ q_1 c_0 + (q_0 + p_1) c_1 + 2 p_0 c_2 + 2 \cdot 3 c_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^k [q_{k-i} c_i + (i+1) p_{k-i} c_{i+1}] + (k+1)(k+2) c_{k+2} &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4)$$

bundaǵı c_0 hám c_1 koefficientlerin erkin aliwǵa boladı. c_0 hám c_1 di belgilep, (1) teńlemenin $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$, baslangısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin izleybiz. Birinshi teńlemeden c_2 , ekinshi teńlemeden c_3 ti tabamız hám t.b.

Eger (1) teńlemede $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaları racional funkciyalar bolsa, yaǵniy

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad q(x) = \frac{q_1(x)}{q_0(x)},$$

bolip, $p_0(x), p_1(x), q_0(x), q_1(x)$ - kopaǵzalılar bolsa, onda $p_0(x) = 0$ yamasa $q_0(x) = 0$ bolatuǵın tochkalar (1) teńlemenin ayırıqsha tochkaları dep ataladı.

Ekinshi tártipli

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (5)$$

teńlemesi ushin $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaları $|x| < a$ aralıqta analitikaliq funkciyalar bolǵanda $x=0$ tochkası ayırıqsha točka boladı, eger $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaların dárejeli qatarǵa jayǵandaǵı p_0 yamasa q_0 koefficientleriniń birewi nolden ózgeshe bolsa. Bul regulıarlıq ayırıqsha točka (yamasa birinshi tekli ayırıqsha točka) dep atalatuǵın eń ápiwayı ayırıqsha tochkaniń misalı boladı.

$x = x_0$ ayırıqsha tochkaniń dógereginde dárejeli qatar kórinisindegi sheshim bar bolmawı múmkin. Bul jaǵdayda sheshimdi ulıwmalasqan dárejeli qatar túrinde izlew kerek:

$$y = (x - x_0)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (6)$$

bunda λ hám $c_0, c_1, c_2, \dots, c_0 \neq c$ aniqlawı tiyis.

(5) teńlemenı $x > 0$ bolǵanda qaraymız. Bul teńlemege (6) ańlatpasın $x_0 = 0$ bolǵanda qoyıp, tómendegige iye bolamız:

Bul formuladan $y_2(x)$ sheshimdi $y_2(x) = Ay_1(x) \ln x + x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ túrinde izlew múmkin ekenligi kelip shigadi.

33-lekciya.Dara tuwındılı birinshi tártipli sızıqlı teńleme hám onıń ulıwma sheshimi

Reje:

1. Tiykargı túsınıklar hám anıqlamalar.
2. Dara tuwındılı birinshi tártipli sızıqlı teńleme
3. Ulıwma sheshim.

Tayanış sózler: *Dara tuwındılı differensiallıq teńleme.Tártibi. Birinshi tártipli sızıqlı teńleme. Sheshim. Koshi máselesi. Ulıwma sheshim.*

Bir neshe gárezsiz ózgeriwshilerdi, olardıń belgisiz funkciyasın hám onıń dara tuwındıların baylanıstratuǵın teńleme dara tuwındılı differenciallıq teńleme dep ataladı. Teńlemedegi eń joqarı tártipli tuwındınıń tártibi teńlemenıń tártibi delinedi. Eki ózgeriwshili $z = z(x, y)$ funkciyası jaǵdayında bunday teńlemenıń ulıwma túri tómendegishe jazıladı:

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots) = 0.$$

Al, $x_1, x_2, \dots, x_n$ túrindegi n gárezsiz ózgeriwshili dara tuwındılı teńlemenı

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \dots) = 0 \quad (1)$$

túrinde jazıw múmkin, bunda F - óz argumentleriniń berilgen funkciyası.

(1) teńlemenıń sheshimi dep, $x_1, x_2, \dots, x_n$ lerdiń bazıbir ózgeriw oblastında teńlemege kirgen óziniń tuwındıları menen anıqlanǵan hám teńlemenı birdeylikke aylandıratuǵın hár qanday $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyasına aytıladı. Al,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \quad (2)$$

kórinisindegi teńleme birinshi tártipli n ózgeriwshili dara tuwındılı teńleme boladı.

(2) dara tuwındılı differenciallıq teńleme ushın Koshi máselesi tómendegishe qoyıladı: Gárezsiz ózgeriwshilerdiń birewiniń belgilengen mánisinde, máselen $x_n = x_n^{(0)}$ bolǵanda berilgen úzliksiz differenciallanatuǵın funkciyaǵa aynalatuǵın, yaǵnıy $x_n = x_n^{(0)}$ bolǵanda

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (3)$$

bolatuǵın (2) teńlemenıń

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

sheshimin tabıw talap etiledi. (3) shártler (4) sheshimniń baslangısh shártleri delinedi.

Meyli eki gárezsiz ózgeriwshili birinshi tártipli teńleme berilsin:

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0. \quad (5)$$

Bul teńlemenin $z = z(x, y)$ sheshimine (x, y, z) keńisliginde bazıbir betlik sáykes keledi. Bul betlik (5) teńlemenin integrallıq betligi dep ataladı. (5) teńleme ushın Koshi máselesi $x = x_0$ bolǵanda berilgen

$$z = z(x_0, y) = \varphi(y) \quad (6)$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın

$$z = z(x, y) \quad (7)$$

sheshimin tabıwdan ibarat, yaǵnıy $x = x_0$ tegisliginde jatıwshı berilgen (6) iymek sızıǵı arqalı ótiwshi (7) integrallıq betlik izlenedi.

(6) baslanǵısh shártlerdi ózgerter otırıp, biz bir ıqtıyarlı funkciyadan gárezli sheshimler kópligine iye bolamız.

Joqarı tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler sisteması ushın sheshimnin bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teoremanı saykes funkciyalardıń hám baslanǵısh shártlerdin analitikalıq bolıwı shártlerinde dálillegen S.V. Kovalevskaya boldı.

Eger (2) teńlemede belgisiz funkciyalardıń dara tuwındıları sızıqlı túrde qatnassa, onda bunday teńleme sızıqlı teńleme delinedi. Ol tómendegishe jazıladı:

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u), \quad (8)$$

bunda $X_1, X_2, \dots, X_n, R$ - berilgen funkciyalar. Teńlemenin óń jaǵı R birdeylik túrde nolge teń, al $X_1, X_2, \dots, X_n$ koefficientleri u ózgeriwshisine gárezli bolmaǵanda (8) sızıqlı teńleme

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (9)$$

túrine iye boladı hám ol birtekli sızıqlı teńleme dep ataladı. Keri jaǵdayda, ol birtekli emes sızıqlı teńleme delinedi.

Simmetriyalıq formadaǵı

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} \quad (10)$$

ápiwayı differenciallıq teńlemeler sisteması (9) birtekli sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemege sáykes keliwshi sistema delinedi.

Teorema. Eger $\psi(x_1, \dots, x_n)$ funkciyası (10) sistemasınıń úzliksiz differenciallanatuǵın integralı bolsa, onda $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ funkciyası (9) teńlemenin sheshimi boladı.

Teorema. Eger $u = u_1(x_1, \dots, x_n) \neq \text{const}$ (9) teńlemeninń sheshimi bolsa, onda $u_1(x_1, \dots, x_n)$ funkciyası (10) sistemanın integralı boladı.

Haqıyqatında da, birinshi tastıyqlaw simmetriyalı formadaǵı ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasınń integralınń anıqlamasınan kelip shıǵadı. Al, ekinshi tastıyqlawdıń orınlı ekeni de ap-anıq derlik. Xaıyqatında da, $u_1(x_1, \dots, x_n)$ funkciyasınń tolıq differencialı (10) sistemaǵa muwapıq, birdeylik túrde nolge teń ekenin dálillew kerek, yaǵnıy

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} X_1(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} X_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} X_n(x_1, \dots, x_n) \equiv 0. \quad (11)$$

Bul $u = u_1(x_1, \dots, x_n)$ funkciyasınń (9) teńlemeninń sheshimi ekeninen kelip shıǵadı.

Demek, bul teoremadan (9) teńlemenin hám (10) sistemanı integrallaw máselelerinń ekvivalent ekeni kelip shıǵadı.

Berilgen shártlerde (10) sistema dál $n-1$ ǵárezsiz integrallarǵa iye boladı:

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n), \psi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n). \quad (12)$$

Bul integrallar $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ baslanǵısh tochkanın bazıbir dógeriginde anıqlanǵan hám úzliksiz differenciallanatuǵın funkciyalar boladı. Al, (12) integrallarınń qálegen úzliksiz differenciallanatuǵın

$$u = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \quad (13)$$

funkciası da usı (10) sistemanın integralı boladı hám demek, ol (9) dara tuwındılı teńlemeninń sheshimi boladı. (13) sheshim (9) teńlemeninń ulıwma sheshimi dep ataladı, bunda F - óziniń argumentleriniń qálegen úzliksiz differenciallanıwshı funkciası.

Eki ǵárezsiz ózgeriwshili teńleme jaǵdayın qaraymız:

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

bunda $z = z(x, y)$ - belgisiz funkcia, al $P(x, y)$ hám $Q(x, y)$ - berilgen funkciyalar. (14) teńlemeninń hár bir sheshimine (x, y, z) keńisliginde bazıbir betlik - usı teńlemeninń integrallık betligi sáykes keledi. Bul jaǵdayda (10) sistema bir teńlemege aynaladı:

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \quad (15)$$

Meyli $\varphi(x, y)$ usı teńlemeninń integralı bolsın, yaǵnıy $\psi(x, y) = C$ - ulıwma integral. Sonda (14) teńlemeninń ulıwma sheshimi

$$z = F[\psi(x, y)] \quad (16)$$

funkciası boladı, bunda F - qálegen úzliksiz differenciallanatuǵın funkcia.

Geometriyalıq jaqtan, (14) ulıwma sheshimge bir erikli funkciya F ten gárezli bolǵan (16) integrallıq betlikler toparı sáykes keledi.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Dara tuwındılı differenciallıq teńleme degen ne, onıń sheshimi degen ne? Eki gárezsiz ózgeriwshili teńlemenıń sheshimi qanday geometriyalıq mániske iye?
2. Qanday teńlemege birinshi tártipli dara tuwındılı sıızıqlı teńleme dep ataydı? Qanday jaǵdayda ol birtekli, birtekli emes dep ataladı?
3. Birinshi tártipli dara tuwındılı teńleme ushın Koshi máselesi qalay qoyıladı? Ol eki gárezsiz ózgeriwshili teńleme jaǵdayında qanday geometriyalıq maǵanaǵa iye boladı?
4. Birinshi tártipli dara tuwındılı birtekli sıızıqlı sistemalı ulıwma sheshimi qalay dúziledi? Bul teńleme ushın Koshi máselesi qalay sheshiledi?

34-lekciya. Dara tuwındılı kvazısızıqlı birinshi tártipli DT-ler

Reje:

1. Dara tuwındılı kvazısızıqlı birinshi tártipli differenciallıq teńleme
2. Xarakteristikalar hám integrallıq betlikler.
3. Koshi máselesi sheshiminiń bar-bolıwı hám birden birliği haqqındaǵı Koshi-Kovalevskaya teoreması

Tayanış sózler: Kvazısızıqlı teńleme. Xarakteristikalar. Integrallıq betlik. Koshi-Kovalevskaya teoreması

Meyli

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u) \quad (1)$$

teńlemesi berilsin.

Bundaǵı $X_1, X_2, \dots, X_n$ coefficientleri hám R oń jaǵı baslanǵısh $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$ tochkasınıń bazıbir dógeresinde dara tuwındıları menen birge anıqlanǵan hám úzliksiz bolsın, sonıń menen birge,

$$X_n(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)}) \neq 0. \quad (2)$$

(1) teńlemenıń sheshimin anıq emes túrde

$$V(x_1, \dots, x_n, u) = 0 \quad (3)$$

túrinde izleyemiz, bunda V - óziniń argumentleriniń bazıbir úzliksiz differenciallanatuǵın funkciyası, sonıń menen birge,

$$\frac{\partial V(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})}{\partial u} \neq 0. \quad (4)$$

(3) qatnasın x_k boyınsha differenciallaymız, bunnan u dı $x_1, \dots, x_n$ diń (3) teńlemeden anıqlanatuǵın funkciyası dep qarastıramız. Sonda

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5)$$

bunnan

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (6)$$

(6) nı (1) ge qoyıp hám $\frac{\partial V}{\partial u}$ ǵa kóbeytip tómendegige iye bolamız:

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

(7) teńleme V belgisiz funkciyaǵa qarata birtekli sıızılıq teńleme. Oǵan sáykes keliwshi sistema

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R} \quad (8)$$

tómendegi n ǵárezsiz integralǵa iye:

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (9)$$

Sonlıqtan,

$$V = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \quad (10)$$

qatnası (7) teńlemeninń ulıwma sheshimi boladı. (10) dı (3) ke qoyıp, (1) teńlemeninń izlengen sheshimine iye bolamız:

$$F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0. \quad (11)$$

Bul (1) teńlemeninń ulıwma sheshimi boladı, bunda F - ıqtıyarlı úzliksiz differenciallanıwshı funkciya.

Meyli

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (12)$$

berilsin, bunda $z = z(x, y)$ - belgisiz funksiya (1) sistema

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (13)$$

túrine iye. Eger $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)$ usı sistemaniń gárezsiz integralları bolsa, onda (14) teńlemeninı ulıwma sheshimi

$$F(\psi_1, \psi_2) = 0. \quad (14)$$

Sızıqlı bir tekli bolmağan teńleme ushın Koshi máselesiniń sheshiliwin qarayıq.

Koshi máselesi (1) teńlemenin

$$u|_{x_n=x_0} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (15)$$

shártti qanaatlandıratuǵın $u = f(x_1, \dots, x_n)$ sheshimin tabıwdan ibarat, bunda φ berilgen úzliksiz differenciallanatuǵın funkciya. (1) teńlemenıń ulıwma sheshimin bilgen halda, Koshi máselesi sheshimin qalay tabıw kerekligin kórsetemiz. Bul jerde tiykarǵı másele ulıwma sheshimdegi F funkciyanıń kórinisin anıqlawǵa keledi.

(9) birinshi integrallarda x_n ornına baslangış x_n^0 mánisti qoyıp, payda bolǵan ańlatpalardı $\overline{\psi}_i$ arqalı belgilep alamız, yaǵnıy

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x_1, ..., x_n^0, u) = \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, ..., x_n^0, u) = \bar{\psi}_2, \\ \\ \psi_n(x_1, ..., x_n^0, u) = \bar{\psi}_n. \end{array} \right. \quad (16)$$

(15) başlangıç şarttı tömendegi kóriniste jazamız: $x_n = x_n^0$ de $u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$. Bul şarttı (11) teńlik penen salıstırıp F funkciyanı

$$F(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) = u - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (17)$$

teñlik orınlanatugınday etip saylap alamız. (16) sistemani $X_1, X_2, \dots, X_n, u$ largá qarata sheshemiz:

boladı yamasa ψ_1 hám ψ_2 lerdi olardıń ańlatpaları menen almasırsaq, onda

$$2u - 4y - (2\sqrt{u - x - y} + y)^2 = 0$$

boladi.

Tákirarlaw ushın sorawlar

1. Birinshi tártipli dara tuwındılı birtekli emes sıızıqlı teńlemenıń ulıwma sheshimin qalay dúziwge boladı?
2. Bul teńleme ushın Koshi máselesi qalay sheshiledi?

Тийкаргы адебиятлар

1. Morris Tenebout, Harry Pollard. Ordinary Differential Equations. Birkhhauzer. Germany, 2010.
2. Robinson J.C. An Introduction to Ordinary Differential Equations, Cambridge University Press 2013.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., КомКнига/ URSS. 2006. – 472 с.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., КомКнига/ URSS. 2006. – 312 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: Изд-во РХД. 2000. – 175 с.

Қосымша адебиятлар

6. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимида киришиш тантанали маросимида бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ, Тошкент, 2016. 56-б.
7. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Мамлакатимизни 2016 йилда ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришнинг асосий яқунлари ва 2017 йилга мўлжалланган иқтисодий дастурнинг энг муҳим устувор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг кенгайтирилган мажлисидаги маъруза, 2017 йил 14 январь –Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 104-б.
8. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза. 2016 йил 7 декабрь- Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 48-б.
9. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажакимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга курамыз. Мазкур китобдан Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2016 йил 1 ноябрдан 24 ноябрга қадар Қорақалпоғистон Республикаси, вилоятлар ва Тошкент шаҳри сайловчилари вакиллари билан ўтказилган сайловолди учрашувларида сўзлаган нутқлари ўрин олган.-Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 488-б.
10. Салоҳиддинов М.С., Насриддинов Г. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент. Ўқитувчи. 1994.
11. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991. 314 с.
12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1984.
13. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1987.
14. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1980.
15. Самойленко А.М. и др. дифференциальные уравнения. М., 1989. 384

16. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М.: Наука. 1987.

Интернет сайтлари

1. www.lib.homelinux.org/math
2. www.eknigu.com/lib/Mathematics/
3. www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC