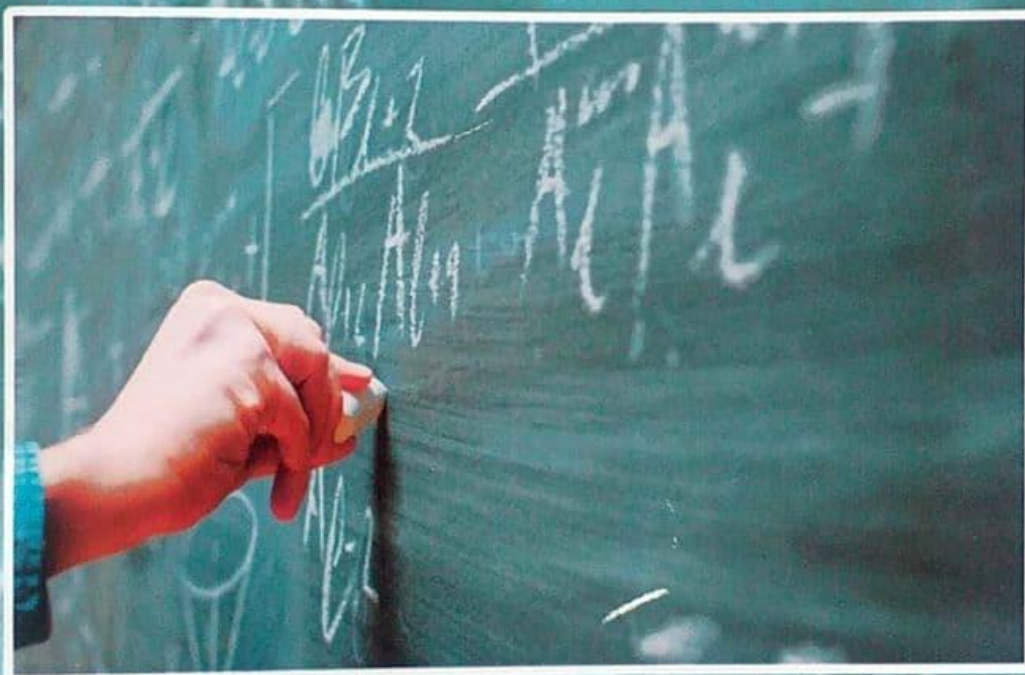


ELGONDIEV Q. Q., SALIEV I. B.,
ASKAROVA D. B., ORINBAEV P. R.

SÍZÍQLÍ HÁM VEKTORLÍQ ALGEBRA ELEMENTLERI



NÓKIS - 2020

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM
ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

**BERDAQ ATINDAĞÍ QARAQALPAQ
MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI**

MATEMATIKA FAKULTETI
«Differenciallıq teńlemeler» kafedrası

**Elgondiev Q. Q., Saliev I. B.,
Askarova D. B., Orinbaev P. R.**

**SÍZÍQLÍ HÁM VEKTORLÍQ ALGEBRA
ELEMENTLERI**

Oqıw-metodikalıq qollanba

Nókis -2020

Elgondiev Q. Q., Saliev I. B., Askarova D. B., Orimbaev P. R.

SIZIQLI HÁM VEKTORLIQ ALGEBRA ELEMENTLERI // *Oqıw-metodikalıq qollanba / – Nókis; 2020 j. - 48 b.*

“Sızıqlı hám vektorlıq algebra elemetleri” oqıw-metodikalıq qollanbası 5310100-Energetika, 5310200-Elekt energetika, 5310700-Elekt texnika, elektromexanika hám elektrotexnologiya baǵdarları boyınsha tálim alıwshı studentlerge arnalǵan. Ol sızıqlı algebranıń tiykarǵı túsinikleri, sonday-aq, matricalar determinantların esaplaw hám sızıqlı teńlemelerdiń sistemasın sheshiwdiń tiykarǵı usılların óz ishine aladı. Sızıqlı algebra boyınsha teoriyalıq bilimlerdi bekkemlew ushın berilgen qollanbada qadaǵalaw ushın tapsırmalar keltirilgen.

Pikir bildiriwshi:

f-m.i.d., professor K. Kudaybergenov

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti Ilimiy-metodikalıq keńesiniń 2020-jıl 9-noyabrdegi 3-sanlı bayanlaması menen baspaǵa usınıs etilgen.

KIRISIW

Sızıqlı algebra pání 5310100-Energetika, 5310200-Elektr energetika, 5310700-Elektr texnika, elektromexanika hám elektrotexnologiya baǵdarlarındaǵı matematikalıq pánler qatarına kiredi hám sáykes ulıwma mádeniy hám kásiplik kompetenciyalardı shólkemlestiriwge baǵdarlangan. Qollanba studentlerde analiz júritiw hám kásiplik máselelerdi sheshiw ushın zárúrli bolǵan maǵlıwmatlardı qayta islew qábiletin rawajlandırıw hám qoyılǵan másele menen sáykeslikte berilgenlerdi qayta islew ushın instrumentallıq qurallardı saylaw, esaplaw nátiyjelerin analizlew hám alınǵan juwmaqlardı tiykarlaw qábiletin rawajlandırıwǵa baǵdarlangan.

Sızıqlı algebra qurallarına iye bolıw studentke hám qánigege bunday máselelerdi kórip shıǵıw hám analizlewge múmkinshilik beredi.

Usınılǵan oqıw-metodikalıq qollanbada zárúrli teoriyalıq material, sonday-aq berilgen pán boyınsha bahalı bilimler fondın shólkemlestiriwshi, sheshim hám misallargá iye jetkilikli sandaǵı úlgili máseleler keltirilgen.

§ 1. Matrica túsinigi

Anıqlama-1. $m \times n$ (m hám n —natural sanlar) ólshemli matrica dep, m qatar hám n baǵanaǵa iye tuwrı múyeshli tablica kórinisinde jaylasqan sanlar jıyındısına aytıladı. Matricanıń qatar hám baǵanaları **jolları** dep ataladı.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrica elementleri a_{ij} kórinisinde belgilenedi, bul jerde i —qatar nomeri, j —baǵana nomeri.

Eger A matricasında $m=n$ bolsa, onda bul matrica n —tártipli **kvadrat** matrica dep ataladı, hámde tómendegishe jazıladı

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementleri A_n matricasınıń bas diaognalın dúzedi.

Kvadrat matrica túrleri:

$$B_n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix};$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

B_n —úshmúyeshli matrica;

D_n —diagonal matrica;

E_n —birlik matrica;

O_n —nollik matrica.

§2. Matricalar ústinde ámeller

Anıqlama-1. $A=(a_{ij})$ hám $B=(b_{ij})$ matricaları teń dep ataladı, eger olardıń sáykes elementleri teń bolsa, yaǵnıy $a_{ij}=b_{ij}$.

1. Matricalar dı qosıw

Anıqlama-2. $A=(a_{ij})$ hám $B=(b_{ij})$ matricalar qosındısı (ayırması) dep sonday, hár bir elementi A hám B matricaların sáykes elementleri qosındısına (ayırmasına) teń bolǵan, C matricasına aytıladı, yáǵnıy $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$).

Mısal. Matrica qosındısın tabıń.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ hám } B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Shıǵarılıwı.

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & -1+4 \\ 2-1 & 5+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C=A-B=\begin{pmatrix} 1-2 & -1-4 \\ 2-(-1) & 5-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matricalarǵı qosıw ámeli tómendegi qásiyetlerge iye:

1. $A+B=B+A$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2. Matricanı sanǵa kóbeytiw

Anıqlama-3. $A=(a_{ij})$ matricasınıń K haqıqıy sanına kóbeymesi dep sonday, hár elementi A matricasınıń sáykes elementleriniń K sanına kóbeymesine teń bolǵan, $C=(c_{ij})$ matricasına aytıladı, yáǵnıy $c_{ij}=k \cdot a_{ij}$.

Mısal. Tómendegi matricanı sanǵa kóbeytiń.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ hám } K=3.$$

Shıǵarılıwı.

$$C=K \cdot A=3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -9 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matricanı sanǵa kóbeytiw ámeli tómendegi qásiyetlerge iye:

1. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
2. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, (α hám β —haqıqıy sanlar).

3. Matricalarǵı kóbeytiw

Anıqlama-4. $(m \times n)$ ólshemli $A=(a_{ip})$ matricasınıń $(n \times p)$ ólshemli $B=(b_{pj})$ matricasına kóbeymesi dep, sonday hár elementi A matricasınıń i —qatarındaǵı elementleriniń B matricasınıń j —baǵanasındaǵı elementlerine kóbeymesiniń qosındısına aytıladı, yáǵnıy

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj} \quad (1)$$

Aytıp ótiw zárúr, A matricasınıń B matricasına tek ǵana A matricasınıń baǵanalar sanı B matricasınıń qatarlar sanına teń bolǵan jaǵdayda ǵana kóbeytiwge boladı.

Mısal. Tómendegi matricalar kóbeymesin tabıń.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hám } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Shıǵarılıwı. A matricasınıń ólshemi (2×3) , B matricasınıń ólshemi bolsa (3×2) . A nıń baǵanalar sanı B nıń qatarlar sanına teń: demek kóbeytiwge boladı, hámde C matricasınıń kólemi $A \times B = (2 \times 2)$ ge teń boladı.

C matricasınıń elementlerin (1) formula boyınsha tabamız:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 1;$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 4;$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 5;$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 9.$$

Usınday qılıp

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Matricalar dı kóbeytiw ámeli tómendegi qásiyetlerge iye:

$$1. (AB)C = A(BC);$$

$$2. (A+B)C = AC + BC;$$

$$3. \text{Ulıwma jaǵdayda } AB \neq BA.$$

Eskertiw: Eger E hám O matricalar sáykes birlik hám nollik matricalar bolsa

$$AE = EA = A,$$

$$AO = OA = O$$

boladı.

4. Matricalar dı transponirlew

Anıqlama-5. Eger $(m \times n)$ ólshemli $A = (a_{ij})$ matricasında qatar hám baǵanaları ornı almasıwıǵanda payda bolǵan $(n \times m)$ ólshemli $A^T = (a_{ji})$ matricası transponirlengen dep ataladı.

Mısal. Matricanı transponirleń.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Shıǵarılıwı. A matricasını transponirleńiw tómendegishe orınlanadı: A matricasınıń birinshi qatarı A^T matricasınıń birinshi baǵanası boladı, A nıń ekinshi qatarı A^T nıń ekinshi baǵanası boladı, yaǵnıy

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

§3. Matrica determinantı túsiniǵi

Anıqlama. n -tártipli A matricasınıń sanlı xarakteristikası determinant hámde n -tártipli determinant dep atalıp ΔA yamasa $\det A$ kórinisinde belgilenedi.

$$\Delta A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Birinshi tártipli $A=(a_{ij})$ matricasınıń determinantı bolıp $\det A=a_{11}$ sanı tabıladı.

Ekinshi tártipli $A=(a_{ij})$ matricasınıń determinantı tómendegi formula boyınsha tabıladı.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Mısal. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matricasınıń determinantın tabıń.

Shıǵarılıwı.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

Úshinshi tártipli matrica úshmúyeshlik qaǵıydası (Sarryus) boyınsha tabıladı.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{33}a_{21} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Mısal. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ matricasınıń determinantın tabıń.

Shıǵarılıwı. Determinanttı esaplaw ushın úshmúyeshlik qaǵıydasınan paydalanamız.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9) = 225 - 225 = 0.$$

§4. Determinant qásiyetleri

1. Matricalar kóbeymesiniń determinantı, usı matricalar determinantlarınıń kóbeymesine teń, yaǵnıy

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

2. Transponirlengen matricanıń determinantı berilgen matricanıń determinantına teń, yaǵnıy

$$\det A = \det A^T.$$

3. Eki parallel qatarlar (baǵanalar) ornı almasırsa determinant belgisi qarama-qarsı belgige ózgeredi.

4. Bir qatar (baǵana) elementleriniń ulıwma kóbeytiwshisin determinant sırtına shıǵarıwǵa boladı.

5. Birdey parallel qatarǵa (baǵanaǵa) iye bolǵan matrica determinantı 0 ge teń.

6. Eger determinanttıń parallel qatarlarındǵı (baǵanalarındǵı) elementler proporcional bolsa, onda ol 0 ge teń.

7. Eger determinant tek ǵana 0 lerden ibarat qatarǵa (baǵanaǵa) iye bolsa, onda determinant 0 ge teń.

8. Eger determinanttın qálegen qatarı elementlerine basqa qatar sáykes elementlerin qandayda sańǵa kóbeytip qossa, determinant mánisini ózgermeydi.

9. Bas diagonalınıń bir tárepi tek ǵana 0 lerden ibarat úshmúyesh determinant mánisi bas diagonal elementleri kóbeymesine teń.

§ 5. Qálegen tártiptegi determinant esaplaw metodları

Аnıqlama-1. n -tártipli ΔA determinantınıń a_{ij} elementiniń M_{ij} minori dep, berilgen matricadan a_{ij} elementi bar qatar hám baǵanani alıp taslanıwınan payda bolǵan $n-1$ tártipli matricaga aytıladı.

Аnıqlama-2. ΔA determinantınıń a_{ij} elementiniń algebralıq tolıqtırwshısı dep $(-1)^{i+j}$ belgisi menen alıńǵan minorına aytıladı, yaǵnıy

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Laplas teoreması. Determinant qálegen qatar elementleri menen algebralıq tolıqtırwshıları kóbeymesiniń qosındısına teń.

$$\Delta A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} - i - \text{qatar boyınsha determinant jayılwı.}$$

$$\Delta A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} - j - \text{baǵana boyınsha determinant jayılwı.}$$

1. Qatar elementleri boyınsha determinant jayılwı

Qatar yamasa baǵana boyınsha jayıwdı $(n-1)$, $(n-2)$ h.t.b. tártiptegi determinantlarǵa qollaw járdeminde n -tártipli determinanttı 2-tártipli determinantlar esaplanıwına alıp keliwge boladı.

Esaplawlardı ańsatlastırw maqsetinde, determinant jayılmawın formula boyınsha paydalanbastan aldın, 8-qásiyetti paydalanǵan halda qálegen qatardıń bir elementinen basqa hámмесin 0 ge aylandırıwǵa boladı.

Мисал. Determinanttı esaplań.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Шыǵарılıwı. Birinshi qatar barlıq elementlerin $a_{11} = 1$ den basqasın 0 ge aylandıramız. Bunıń ushın birinshi qatar elementleri -3,-1 hám 2 ge kóbeytip sáykes túrde 2-,3-,4-qatarlarǵa qosamız.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Determinant belgisi sırtına 2 ni, yaǵnıy tórtinshi qatar ulıwma kóbeytiwshisin shıǵaramız hámde determinanttı birinshi baǵana elementleri boyınsha jayamız.

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41})$$

Bul jerde 0 den ózgeshe tek ǵana birinshi qosılıwshı, sonıń ushın

$$\Delta = 2 \cdot a_{11}A_{11} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} = 2 \begin{vmatrix} -7 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

3-tártipli determinanttı esaplaw arqalı juwaptı tabamız, yaǵnıy

$$\Delta = 2 \cdot (-24) = -48.$$

2. Determinanttı úshmúyesh kórinisine alıp keliw

Bul metod 9-qásiyetten paydalanıwǵa tiykarlanǵan.

Mısal. Determinanttı esaplań.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Shıǵarılıwı. 8-qásiyetten paydalanıp, determinanttı úshmúyesh kórinisine alıp kelemiz, yaǵnıy bas diagonal astı 0 ge teń qılamız.

Birinshi qatar elementlerin -3, -1 hám 2 ge kóbeytip sáykes túrde ekinshi, úshinshi hám tórtinshi qatar elementlerine qosamız.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Determinant belgisi sırtına 2 ni, yaǵnıy tórtinshi qatar ulıwma kóbeytiwshisin shıǵaramız hámde ekinshi hám úshinshi qatar ornın almastıramız.

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Ekinshi qatardı izbe-iz -7 hám 3 ke kóbeytip sáykes túrde úshinshi hám tórtinshi qatarlarǵa qosamız.

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Determinant belgisi sırtına 3 hám 2 ni, yaǵnıy úshinshi hám tórtinshi qatar ulıwma kóbeytiwshilerin shıǵaramız.

$$\Delta = -2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Tórtinshi qatar elementlerine úshinshi qatar elementlerin sáykes qosamız.

$$\Delta = -12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Bas diagonal elementlerin kóbeytip nátiyjege iye bolamız.

$$\Delta = -12 \cdot 4 = -48.$$

§ 6. Keri matrica

Anıqlama-1. A matricası aynıǵan dep ataladı, eger onıń determinantı 0 ge teń bolsa, hámde aynımaǵan dep ataladı eger onıń determinantı 0 den ózgeshe bolsa.

Anıqlama-2. A^{-1} matricası A matricasına keri dep ataladı eger tómendegi shárt orınlansa

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Keri matrica dúziw ushın tómendegi túsiniklerdi kiritemiz.

1. $A^{AT} - A$ matricasınıń hár bir elementiniń algebralıq tolıqtırwshılarınan ibarat matrica.

2. $A^* - A$ matricasınıń algebralıq tolıqtırwshılarınan dúzilgen matricanı transponirlew nátiyjesinde tabıladı.

$$A^* = (A^{AT})^T.$$

Teorema. Eger matrica aynımaǵan bolsa, onda oǵan keri bolǵan A^{-1} matricası tómendegi formula boyınsha tabıladı.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Keri matrica dúziw algoritmi

A matricasına keri A^{-1} matricasını dúziw ushın tómendegiler kerek boladı:

1. A matricasınıń determinantın esaplaw, bunda $\det A \neq 0$.
2. a_{ij} elementleriniń algebralıq tolıqtırwshıların esaplaw, A^{AT} tolıqtırwshılar matricasını dúziw.
3. A^{AT} matricasını transponirlep A^* matricasını dúziw.
4. Keri matricanı dúziw.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Mısal. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matricasınıń A^{-1} kerı matricasını tabıń.

Shıǵarılwı. A matricasınıń determinantın tabamız.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

A matricasınıń elementleriniń algebralıq tolıqtırıwshıların tabamız.

$$a_{11} = 1, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3$$

$$a_{12} = 2, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 6 = -6$$

$$a_{13} = 2, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-6) = -6$$

$$a_{21} = 2, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 6 = -6$$

$$a_{22} = 1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3$$

$$a_{23} = -2, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-6) = 6$$

$$a_{31} = 2, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot (-6) = -6$$

$$a_{32} = -2, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-6) = 6$$

$$a_{33} = 1, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot (-3) = -3$$

Tolıqtırıwshılar matricasını dúzemiz.

$$A^{AT} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Transponirlengen matricasını tabamız.

$$A^* = (A^{AT})^T = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Kerı matricasını esaplaymız.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 7. Ápiwayı matricalıq teńlemeler

Tómendegi matricaları qarastıramız.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A hám B matricalar elementleri berilgen, al x_1, x_2, x_3 belgisiz.

Onda $A \cdot X = B$ teńlemesi **ápiwayı matricalıq teńleme** dep ataladı.

Bul teńlemenı sheshiw ushın tómendegilerdi orınlaw kerek:

1. Teńleme eki tárepin A^{-1} matricasına kóbeytemiz.

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

2. Matricaları kóbeytiw qásiyetinen paydalanıp tómendegini jazamız.

$$(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

3. Keri matrica anıqlamasınan ($A^{-1} \cdot A = E$)

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

ge iye bolamız

4. Birlik matrica qásiyetinen ($E \cdot X = X$) paydalanıp $X = A^{-1} \cdot B$ ğa iye bolamız.

Eskertiw. Eger teńleme $X \cdot A = B$ kórinisinde bolsa, X matricasını tabıw ushın A^{-1} matricasını oń jaǵınan kóbeytiw kerek boladı.

Mısal. Matricalıq teńlemenı sheshiń.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Shıǵarılıwı. Tómendegishe belgilewler kiritemiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Matricaları kóbeytiw qásiyetinen A hám B matricalar ólsheplerine qarap X matricasınıń kórinisi tómendegishe boladı.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Kiritilgen belgileniwlerdi esapqa alǵan halda tómendegige iye bolamız.

$A \cdot X = B$ bunnan $X = A^{-1} \cdot B$.

A^{-1} di keri matricanı tabıw algoritmi járdeminde tabamız.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Kóbeymeni esaplaymız.

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \cdot 7 + 2 \cdot 17 \\ 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Onda X ushın tómendegi orınlı.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bunnan } x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

§ 8. Matrica rangi

($m \times n$) kólemdegi A matricasını qarastıramız.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matricasının k -minori dep, elementleri qálegen k qatar hám qálegen k baǵanalar kesilisiwinde jaylasqan elementlerden dúzilgen, k -tártipli determinantın alamız. Bunda $k \leq \min(m, n)$.

Anıqlama-1. A matricasının $r(A)$ rangi dep usı matricanıń múmkin bolǵan nolden ózgeshe eń úlken minordıń tártibine ayıladı.

Anıqlama-2. Matricanıń rangine teń bolǵan nolden ózgeshe qálegen minori onıń bazis minori dep ataladı.

Anıqlama-3. Birdey rangke iye matricalar *ekivalent* dep ataladı.

§ 9. Matricanıń rangin esaplaw

Anıqlama-1. Matrica *teksheli* dep ataladı eger onıń hár bir qatarınıń nolden ózgeshe birinshi elementiniń astında 0 jaylasqan bolsa.

Teorema. Teksheli matrica rangi onıń nollik bolmaǵan qatarlar sanına teń.

Usınday tárizde, matricanı tekshli kóriniske alıp keliw arqalı onıń rangin ańsat tabıwǵa boladı. Bul esaplaw, onıń rangin ózgerterpeydi, ápiwayı matricalıq ámeller arqalı ámelge asırıladı:

- matrica qatarınıń elementlerin $\lambda \neq 0$ sanına kóbeytiw;
- qatarlardı baǵanalar menen ornın almasıw;
- parallel qatarlardıń ornın almasıw;
- nollik qatardı óshiriw;
- qatar elementlerine basqa qatar elementlerin qandayda sandı kóbeytip sáykes tárizde qosıw.

Mısal. Matrica rangin esaplań.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Shıǵarılıwı. Matricanı teksheli kóriniske keltiremiz. Bunıń ushın ekinshi qatardı (-3) ke kóbeytip úshinshi qatarǵa qosamız.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times (-3) \\ \times 1 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Tórtinshi qatarǵa úshinshi qatardı qosamız.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kelip shıqqan ekvivalent matricada nolden ózgeshe qatarlar sanı úshew, sonlıqtan $r(A)=3$.

ÓZ BETINSHE TAPSIRMALAR

Variant	Tapsırmalar nomerleri
1	1, 11, 21, 31, 41
2	2, 12, 22, 32, 42
3	3, 13, 23, 33, 43
4	4, 14, 24, 34, 44
5	5, 15, 25, 35, 45
6	6, 16, 26, 36, 46
7	7, 17, 27, 37, 47
8	8, 18, 28, 38, 48
9	9, 19, 29, 39, 49
10	10, 20, 30, 40, 50

№1. $f(A)$ nı tabıń, eger

$$1. \quad f(x) = x^3 + 4x; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad f(x) = x^3 + 24x^2 + 7x; \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 20 & 1 \\ 6 & -4 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad f(x) = -3x^3 + 15x^2 - 2x; \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad f(x) = -4x^3 + 25x^2 + 9x; \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad f(x) = x^3 + 4x; \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 20 & 1 \\ 6 & -4 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad f(x) = x^3 + 24x^2 + 7x; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad f(x) = -3x^3 + 15x^2 - 2x; \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad f(x) = x^3 + 24x^2 + 7x; \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad f(x) = -4x^3 + 25x^2 + 9x; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad f(x) = -3x^3 + 15x^2 - 2x; \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 20 & 1 \\ 6 & -4 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

№2. AB hám BA kóbeymelerin tabıń, eger

$$11. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$12. \quad A = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 \\ 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$13. \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix};$$

$$14. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$15. \quad A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 18 & -9 & 3 \\ 24 & -12 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -30 \end{pmatrix};$$

$$16. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$17. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$18. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 9 & -11 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 18 & -9 & 3 \\ 24 & -12 & 4 \end{pmatrix};$$

$$19. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 9 & -11 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -30 \end{pmatrix};$$

$$20. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№3. Esaplań.

$$21. \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n;$$

$$26. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n;$$

$$22. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n;$$

$$27. \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^3;$$

$$23. \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n;$$

$$28. \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n;$$

$$24. \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n;$$

$$29. \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n;$$

$$25. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n;$$

$$30. \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^n.$$

№4. A^{-1} kerı matricasın tabıń, eger

$$31. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$36. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$32. \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

$$37. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$33. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$38. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix};$$

$$34. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$39. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$35. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$40. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

№5. Minorlar járdeminde matrica rangın tabıń.

$$41. \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$46. \quad \begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \end{pmatrix};$$

$$42. \quad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$47. \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

43. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

48. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix};$

44. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$

49. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & -8 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 12 \end{pmatrix};$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$

50. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$

§ 10. n belgisizli n sızılıq teńlemer sistemaları hám olardı sheshiw usılları

n belgisizli n sızılıqlı teñlemer sistemasın qaraymız.

[illegible]

Anıqlama. (1) sistema sheshimi dep, sistemaniń hár bir teńlemesin durıs teńlikke alıp keliwshi sanlar jıyındısına aytıladı.

Belgisizlerdiń coefficientlerinen dúzilgen A matricası (1) sistemanıń tiykarǵı matricası dep ataladı.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matricası elementleri hám saltan aǵzalardan dúzilgen matrica keńeytirilgen matrica dep ataladı.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

1. Matricalıq usıl

Tómendegi matricaları qaraştıramız.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{-- belgisizler matricası;}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - (1) \text{ sistema saltan aǵzalarınan dúzilgen matrica.}$$

Onda, matricalar kóbeymesi qaǵıydası járdeminde (1) sistemanı matricalıq teńleme kórinisinde jazıwǵa boladı.

$$A \cdot X = B \quad (2)$$

(2) teńleme shıǵarılıwı joqarıda kórsetilgendeı, yaǵnıy $X = A^{-1} \cdot B$, bul jerde A^{-1} (1) sistemanıń tiykarǵı matricasına kerı matrica.

2. Kramer usılı

Tiykarǵı determinantı 0 den ózgeshe n belgisizli n sıızılıq teńlemer sisteması hár dayım jalǵız sheshimge iye boladı hámde ol tómendegi formulalar járdeminde tabıladı:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}$$

bul jerde $\Delta = \det A$ – (1) sistemanıń tiykarǵı matricasınıń determinantı, Δ_{x_i} ler Δ determinantınıń i –baǵanasın saltan aǵzalar baǵanası menen almasırwınan kelip shıǵadı, yaǵnıy:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots;$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix};$$

Mısal. Teńlemeler sistemasın Kramer usılı járdeminde sheshiń.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Shıǵarılıwı. Sistemanıń tiykarǵı matricası determinantın esaplaymız.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 44 \neq 0$$

Qosımsha determinantlardı esaplaymız.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 16 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 15 & 4 \\ 1 & 16 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 44;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 16 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 132.$$

Kramer formulaları járdeminde belgisilzerdi tabamız.

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{0}{44} = 0; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{44}{44} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{132}{44} = 3.$$

Usınday tárizde, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

3. Gauss usılı

Gauss usılı mánisi teńlemeler sistemasınan belgisizlerdi izbe-iz joq qılıwdan ibarat, yaǵnıy bas diagonalınıń astında 0 lerdin ibarat bolǵan úshmúyesh matrica kórinisine alıp keliwden ibarat. Bul bolsa matricanıń ústinde orınlanatuǵın ápiwayı ámeller járdeminde orınlanadı. Bunday ámeller járdeminde sistema teń kúshliligi buzılmaıdı hámde sistema úshmúyesh kóriniske keledi, yaǵnıy songı teńleme 1 belgisizge, onnan aldınǵısı 2 belgisizge h.t.b. Sońǵı teńlemeden n –belgisizdi tawıp artqa qaytıw járdeminde barlıq belgisizler mánisi tabıladı.

Mısal. Teńlemeler sistemasın Gauss usılı járdeminde sheshiń.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Shıǵarılıwı. Keńeytirilgen matricasın dúzip alamız hámde onı úshmúyesh kórinisindegi matricaǵa alıp kelemiz.

$$B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}}_A \left| \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right. \right)$$

Matricanıń birinshi hám úshinshi qatarlarınń ornın almastıramız, bul óz náwbetinde teńlemeler sistemasınıń birinshi hám úshinshi teńlemeleriniń ornın alastırıw menen birdey. Bul bolsa keyingi esaplawlarda bólshek sanlardıń kelip shıǵıwınıń aldın aladı.

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 17 \end{array} \right)$$

Payda bolǵan matricanıń birinshi qatarın -2 hám -3 ke kóbeytip sáykes túrde ekinshi hám úshinshi qatarlarǵa qosamız, sonda B matrica tómendegi kóriniske keledi:

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 9 \\ 0 & -9 & 8 & -10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{array} \right)$$

Ekinshi qatardı $\left(-\frac{10}{9}\right)$ ǵa kóbeytip onı úshinshi qatarǵa qosıw nátiyjesinde A matricası úshmúyesh matrica kórinisine keledi. Biraqta esaplawlardı ańsatlastırıw ushın tómendegishe qılıwǵa boladı: úshinshi qatardı -1 ge kóbeytip ekinshi qatarǵa qosamız hámde tómendegige iye bolamız.

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{array} \right)$$

Keyin ekinshi qatardı 10 ǵa kóbeytip úshinshi qatarǵa qosamız hámde nátiyjede tómendegige iye bolamız.

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array} \right)$$

Payda bolǵan B matricasınan teńlemeler sistemasın qayta dúzemiz.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -10x_3 = -10 \end{cases}$$

Aqırǵı teńlemeden $x_3 = \frac{-10}{-10} = 1$ ekenin tabamız. Tabılǵan $x_3 = 1$ mánisti sistemanıń ekinshi teńlemesine qoyamız, bunnan $x_2 = 2x_3 = 2 \cdot 1 = 2$ ekenin tabamız.

$x_3 = 1$ hám $x_2 = 2$ mánislerin birinshe teńlemege qoyıw arqalı x_1 tabamız.

$$x_1 = 9 - 4x_2 + 3x_3 = 9 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Demek, $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Eskertiw. Tabılǵan sheshim durıslıǵın tekseriw ushın tabılǵan nátiyjelerdi hár bir teńlemege qoyıp shıǵıw kerek boladı. Eger hár bir teńleme durıs teńlikke aylansa, demek sistema durıs shıǵarılǵan.

Tekseriw:

$$\begin{cases} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 17 \text{ durıs} \\ 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 \text{ durıs} \\ 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 9 \text{ durıs} \end{cases}$$

Demek sistema durıs shıǵarılǵan.

§ 11. n belgisizli m sızılıq teńlemeler sistemaları

1. Birgelikli teńlemeler sisteması túsini

n belgisizli m sızılıqılı t nlemeler sistemasın qarastıramız.

[illegible]

Anıqlama-1. Tenlemeler sisteması birgelikli dep ataladı, eger ol keminde bir sheshimhe iye bolsa, egerde sistema hesh qanday shehsimge iye bolmasa onda ol birgelikli emes dep ataladı.

Anıqlama-2. Birgelikli sistema anıqlanğan dep ataladı eger jalğız sheshimge iye bolsa, hámde anıqlanbağan, eger sheshimler sanı 1 den kóp bolsa.

Kroneker-Kapelli teoreması (teńlemeler sistemasının birdeylik kriteriyası)

n belgisizli m sızılıq teńlemeler sisteması birgelikli boladı sonda tek sonda ǵana eger tiykarǵı matricanıń rangi onıń keńeytirilgen matrica rangine teń bolsa, yaǵnıy $r(A)=r(B)=r$, bul jerde r sistema rangi hámde:

1. eger $r = n$ bolsa, onda sistema jalgız sheshimge iye, yaǵnıy anıqlanǵan.
2. eger $r < n$, onda sistema sheksiz sandaǵı sheshimge iye, yaǵnıy anıqlanbaǵan.

2. Teńlemeler sistemasınıń ulıwma sheshimi túsiniǵı

(2) t h lemeler sistemasın qaraymız, h mde onı birgelikli sistema dep esaplayıq, yağnıy $r(A)=r(B)=r$ h mde $r < n$ bolsın.

A matricasının bazislik minorın qaramız, onıń ishinde erikli qatarın belgilep alamız hámde onıń elementleri sistemanıń teńlemeleriniń r belgisizli biriniń koefficientlerine teń bolsın. Bul belgisizler, mısalı $x_1, x_2, \dots, x_r$ lerdi bazislik dep ataymız, onda qalǵan $(n-r)$ belgisizler, yaǵnıy $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ lerdi erkin ózgeriwshiler dep ataymız.

Barlıq bazislik belgisizlerdi, saylangan r belgisizli tenlemede, erkin belgisizler arqalı belgileyik, onda tómendegige iye bolamız:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b'_1 + a'_{1r+1}x_{r+1} + a'_{1r+2}x_{r+2} + \dots + a'_{1n-r}x_{n-r} \\ x_2 = b'_2 + a'_{2r+1}x_{r+1} + a'_{2r+2}x_{r+2} + \dots + a'_{2n-r}x_{n-r} \\ \vdots \\ x_r = b'_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + a'_{rr+2}x_{r+2} + \dots + a'_{rn-r}x_{n-r} \end{array} \right.$$

Erkin ózgeriwshilerge haqıqıy mánis c_i sáykes qoyamız, bul jerde $i = \overline{1, n-r}$, onda $(x_1, x_2, \dots, x_r, c_1, c_2, \dots, c_{n-r})$ teńlemeler sistemasiniń ulıwma sheshimine iye bolamız.

n özgeriwshiler arasınan r bazislik belgisizler kópligi bazislik minorlar menen anıqlanadı.

Mısal. Teńlemeler sistemasın birdeylikke tekseriń hámde onıń ulıwma sheshimin tabıń.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Shıǵarılıwı. A hám B matricalarınń ranglerin anıqlaymız. Bunıń ushın B matricanıń keńeytirilgen matricasını jazamız hámde onı teksheli formaǵa alıp kelemiz.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

Birinshi qatardı -2 hám -5 ke kóbeytip sáykes tárizde ekinshi hám úshinshi qatarǵa qosamız. Sonda ekvivalent matrica payda boladı.

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array} \right)$$

Úshinshi qatarǵa ekinshi qatardı -2 ge kóbeytip qosamız, sonda

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

A hám B matricalarınń nollik bolmaǵan qatarlar sanı 2 ge teń, $r(A)=r(B)=r=2$, demek, Kroneker-Kapelli teoreması boyınsha sistema birgelikli, biraq $r=2 < n=4$ bolǵanlıqtan ol sheksiz sandaǵı sheshimlerge iye.

$r=2$ demek A matricasınıń bazislik minorları tártibi 2 ge teń, olardıń hár biri bazislik belgisizler kópligin anıqlaydı.

A matricasınıń bazislik minorların jazamız.

$$M_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0, \quad x_1, x_2 - \text{bazislik belgisizlerdiń birinshi toparı;}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \quad x_1, x_3 - \text{bazislik belgisizlerdiń ekinshi toparı;}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0, \quad x_1, x_4 - \text{bazislik belgisizlerdiń úshinshi toparı;}$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 5 & 4 \\ -11 & -6 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \quad x_2, x_3 - \text{bazislik belgisizlerdiń tórtinshi toparı;}$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ 5 & 3 \\ -11 & -7 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad x_2, x_4 - \text{bazislik belgisizlerdiń besinshi toparı;}$$

$$M_6 = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ 4 & 3 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0, \quad x_3, x_4 - \text{bazislik belgisizlerdiń altınshı toparı.}$$

Usınday tárizde sistemanıń sheshiminiń altı túrli variantı bar.

Mısal ushın, M_1 bazislik minorına sáykes keliwshi birinshi varianttı qaraymız.

a) x_1 hám x_2 – bazislik belgisizler; x_3 hám x_4 – erkin ózgeriwshiler. Meyli $x_3 = c_1, x_4 = c_2, c_1, c_2 \in R$ bolsın.

B teksheli matricasınan teńlemeler sistemasın qayta dúzemiz.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ -11x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -2 \end{cases}$$

Ekinshi teńlemeni -1 ge kóbeytemiz hámde teńlemeni tómendegi kóriniste jazamız.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4c_1 - 3c_2 \\ 11x_2 = 2 - 6c_1 - 7c_2 \end{cases}$$

Bazislik belgisizler bolǵan x_1 hám x_2 lerdi erkin ózgeriwshiler arqalı anıqlaymız. Sistema úshmúyesh kóriniske iye bolǵanı ushın onı Gauss usılı menen sheshiw ańsat. Aqırǵı teńlemeden tómendegini tabamız.

$$x_2 = \frac{2 - 6c_1 - 7c_2}{11}$$

Payda bolǵan x_2 mánisin birinshi teńlemege qoysaq

$$x_1 = \frac{1 - 14c_1 + 2c_2}{11}$$

ǵa iye bolamız. Usınday tárizde ulıwma sheshimniń birinshi variant tómendegi kóriniske iye boladı.

$$\left(\frac{1 - 14c_1 + 2c_2}{11}; \frac{2 - 6c_1 - 7c_2}{11}; c_1; c_2 \right).$$

ÓZ BETINSHE TAPSIRMALAR

Variant	Tapsırmalar nomerleri
1	1, 11, 21, 31, 41
2	2, 12, 22, 32, 42
3	3, 13, 23, 33, 43
4	4, 14, 24, 34, 44
5	5, 15, 25, 35, 45
6	6, 16, 26, 36, 46
7	7, 17, 27, 37, 47
8	8, 18, 28, 38, 48
9	9, 19, 29, 39, 49
10	10, 20, 30, 40, 50

№1-16 mısallarda A matricanıń determinantın esaplań.

№1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

№2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{№3} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№5} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№7} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№9} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & -7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№11} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№13} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№15} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№4} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№6} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№8} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & -2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№10} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{№12} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№14} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{№16} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

№17-19 mısallarda berilgen matricaga kerı matricanı tabıń.

$$\text{№17} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

$$\text{№18} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

$$\text{№19} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$$

№20-25 misallarda matricaliq teńlemelerdi sheshiń.

$$\text{№20} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{№21} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{№22} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№23} \quad X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№24} \quad X \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№25} \quad X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

№26-30 misallarda sistemani Gauss usılı menen sheshiń.

$$\text{№26} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

$$\text{№27} \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\text{№28} \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№29} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\text{№30} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0 \end{cases}$$

№31-40 мисалларда системанын биргеликлiligин аныqlaн hамде ulıwma sheshimin tabın.

$$\text{№31} \quad \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{№32} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{№33} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

$$\text{№34} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{№35} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$$

$$\text{№36} \quad \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$

$$\text{№37} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\text{№38} \quad \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 7x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\text{№39} \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{№40} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

№41-50 мисалларда белгисизди табиі.

$$\begin{array}{l} \text{№41} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} \quad x_1 = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№42} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases} \quad x_3 = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№43} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -37 \end{cases} \quad x_2 = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№44} \quad \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases} \quad y = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№45} \quad \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x + 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases} \quad x = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№46} \quad \begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0 \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0 \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0 \end{cases} \quad t = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№47} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases} \quad x_3 = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№48} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases} \quad x_2 = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{№49} \quad \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases} \quad t = ? \end{array}$$

$$\text{№50} \quad \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases} \quad z = ?$$

Determinantı esaplañ.

$$1. \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix};$$

$$3. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix};$$

$$4. \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$5. \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 & 3 \\ 7 & -4 & 2 & -15 \\ 1 & -2 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{vmatrix};$$

$$6. \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -3 & 6 \\ -2 & 5 & 1 & -7 \end{vmatrix};$$

$$7. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$8. \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$9. \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

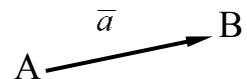
$$10. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

12-§. Vektorlıq algebra elementleri

1. Vektorlar hám olar ústinde ámeller.

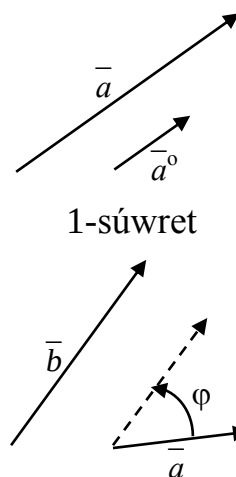
Vektor túsiniğı hám olar ústindegi ápiwayı ámellerdi siz mektepte úyrendiñiz. Qısqasha tómendegilerdi eske túsiremiz:

- *geometriyalıq vektor*–bul tuwrınıń baǵdarlangan kesindisi. Vektor belgileniwi: $a, \bar{a}, \vec{a}, \overline{AB}$ bul jerde A –vektordıń baslanıwı, B –aqırı; Matematikada tek erkin vektorlar, yaǵnıy baslanıwı qálegen túrde saylap alınıwshı vektorlar qaraladı.



- vektordıń uzınlıǵı (moduli) dep, onıń baslanıwı hám aqırı arasındadıǵı aralıqqa aytıladı, vektordıń moduli $|\vec{a}|$, yaki $|\overline{AB}|$ arqalı ańlatıladı;

- baslanıwı hám aqırı sáykes keliwshi vektorǵa nollik vektor dep aytıladı, 0 yaqı $\mathbf{0}$ arqalı ańlatıladı, bul vektordıń baǵdarı anıqlanbaydı, onıń uzınıǵı 0 ge teń;
- uzınıǵı birge teń bolǵan vektorǵa birlik vektor yaqı ort dep ataladı;
- $\overrightarrow{BA}$ vektorı $\overrightarrow{AB}$ vektorǵa qarama-qarsı dep aytıladı, $\vec{a}$ vektorı ushın qarama-qarsı vektor $-\vec{a}$ arqalı ańlatıladı.
- eger eki vektor birdey modulge iye bolsa hám birdey baǵdarlangan bolsa, olar teń vektorlar dep ataladı, $\vec{a} = \vec{b}$ kórinisinde jazıladı.
- eger nollik emes vektorlar bir tuwrıda yaqı parallel tuwrılarda jatsa, kollinear dep ataladı, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ arqalı ańlatıladı.
- kollinear vektorlardıń baǵıtları sáykes kelse, olar qos baǵıtlı dep atalıp, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ arqalı ańlatıladı, kerı jaǵdayda vektorlar qarama-qarsı baǵıtlangan bolıp, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ arqalı ańlatıladı.
- $\vec{a}$ vektorınıń ortı dep, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}^0$ hám $|\vec{a}^0| = 1$ (1-súwret) bolatuǵın $\vec{a}^0$ vektorına aytıladı;
- eger nollik emes vektorlar bir yamasa parallel tegisliklerde jatsa, onda olar komplanar dep ataladı;
- vektorlar arasındaqı múyesh dep, bul vektorlardıń baǵıtı sáykes keliwi ushın olardıń birin burıw kerek bolǵan eń kishi múyeshke aytıladı, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar arasındaqı múyesh $(\vec{a}, \vec{b})$ simvolı arqalı ańlatıladı;
- eger vektorlar arasındaqı múyesh 90° qa teń bolsa, olar ortogonal dep atalıp, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlarınıń ortogonallıǵı $\vec{a} \perp \vec{b}$ arqalı ańlatıladı;
- $\vec{a}$ vektordıń $\vec{b}$ vektorǵa proekciyası dep tómendegi sanǵa aytıladı:



$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Vektorlar ústindegi sıızıqlı ámeller dep, vektorlardıń kóbeymesi hám vektordı sanǵa kóbeytiwge aytıladı.

$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń **qosındısı** dep, tómendegiler boyınsha tabıw múmkin bolǵan $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektorına aytıladı:

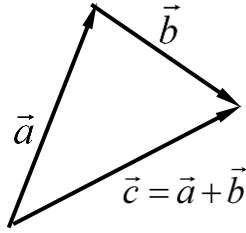
a) úshmúyeshlik qádesi boyınsha (2-súwret);

b) parallelogramm qádesi boyınsha (3-súwret).

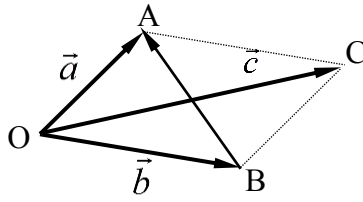
$\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń $\vec{a} - \vec{b}$ ayırması $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ teńligi arqalı anıqlanıp, bul jerde $(-\vec{b}) - \vec{b}$ vektorǵa qarama-qarsı vektor.

OACB parallelogrammda (2-súwret) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ qosındı $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń ulıwmalıq bası O dan júrgizilgen $\overrightarrow{OC}$ vektor-diagonal esaplanadı, al bul vektorlardıń $\vec{a} - \vec{b}$ ayırması alınıwshı vektordıń aqırınan azayıwshınıń aqırına baǵıtlangan basqa vektor-diagonal $\overrightarrow{BA}$ -vektor bolıp esaplanadı.

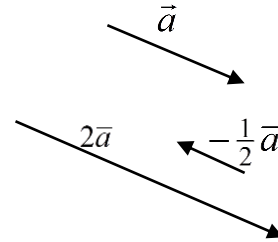
$\vec{a}$ vektordıń $\alpha \neq 0$ sanǵa kóbeymesi dep, moduli $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ ǵa teń bolǵan, al baǵdarı eger $\alpha > 0$ bolsa, $\vec{a}$ vektorı baǵdarı menen sáykes keliwshi, eger $\alpha < 0$ bolsa, $\vec{a}$ vektorı baǵdarına qarama-qarsı bolıwshı $\alpha \vec{a}$ vektorına ayıladı (4-súwret).



2-súwret



3-súwret



4-súwret

Kóbeytiw ámeli hám vektor ortı anıqlamasınan paydalanıp, $\forall \vec{a}$ nı mına kóriniste jazıw múmkin: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$ hám kerisinshe, $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

Sonday-aq, tómendedegi teorema orınlı:

Teorema-1. $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları, tek ǵana sonday $\vec{a} = \alpha \vec{b}$ bolatuǵın nolden ózgeshe α sanı bar bolǵanda ǵana kollinear boladı.

Dálillew. 1) eger $\vec{a} = \alpha \vec{b}$, $\alpha \neq 0$ bolsa, onda vektordı sanǵa kóbeytiw anıqlaması boyınsha, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ kollinear.

2) Meyli $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ kollinear bolsın. $\vec{a}^0$ hám $\vec{b}^0$ lardı qaraymız, olarda kollinear bolıwı belgili. Demek, yaki $\vec{a}^0 \uparrow \vec{b}^0$, yaki $\vec{a}^0 \updownarrow \vec{b}^0$ hám $|\vec{a}^0| = |\vec{b}^0| = 1$. Biraq, onda

yaki $\vec{a}^0 = \vec{b}^0$, $\vec{a}^0 = -\vec{b}^0$, bunnan $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$, yamasa $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$. Óz gezeginde, yaki

$\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$, yamasa $\vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$, biraq bunıń ózi $\vec{a} = \alpha \vec{b}$ bolatuǵın $\alpha = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ bar

ekenligin bildiredi.

Joqarıda keltirilgen sıızqlı ámeller tómendegishe qásiyetlerge iye ekenligin kórsetiw qıyın emes:

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$2) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$3) \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$4) (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$$

$$5) (\alpha \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \vec{a})$$

$$6) \alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

$$7) pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{c}} \vec{a} + pr_{\vec{c}} \vec{b}$$

$$8) pr_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda (pr_{\vec{b}} \vec{a})$$

2. Sızqlı keńislik. Vektorlardıń sıızqlı erkiligi hám erksizligi. Bazis. Vektordı bazis boyınsha jiklew.

Meyli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ arqalı ańlatılıwshı, qálegen tábiyattıń elementleriniń bos emes L kópligi berilgen bolsın.

Anıqlama-1. L kópligi sıızıqlı vektorlı keńislik dep ataladı, eger L ge “qosıw” $\oplus$ hám “sańa kóbeytiw” $\otimes$ eki ámel sonday kiritilgen bolıp, qálegen $\vec{a}, \vec{b} \in L$ hám qálegen α sanı (haqıyqıy yaki kompleks) ushın $\vec{a} \oplus \vec{b} \in L$ hám $\alpha \otimes \vec{a} \in L$ shártleri orınlı bolsa, hám bul ámeller tómendegi aksiomalardı qanaatlandırısa:

- 1) $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$
- 2) $\vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) = (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c}$
- 3) L de $\forall \vec{a} \in L \Rightarrow \vec{a} \oplus \vec{0} = \vec{a}$ bolatuǵınday nollik emes $\vec{0}$ element bar bolıwı
- 4) $\forall \vec{a} \in L$ ushın sonday $(-\vec{a}) \in L$ qarama-qarsı element bar bolıp, ol ushın $\vec{a} \oplus (-\vec{a}) = \vec{0}$ orınlı
- 5) $1 \otimes \vec{a} = \vec{a}$
- 6) $\alpha \otimes (\beta \otimes \vec{a}) = (\alpha\beta) \otimes \vec{a}$
- 7) $\alpha \otimes (\vec{a} \oplus \vec{b}) = (\alpha \otimes \vec{a}) \oplus (\alpha \otimes \vec{b})$
- 8) $(\alpha \oplus \beta) \otimes \vec{a} = \alpha \otimes \vec{a} \oplus \beta \otimes \vec{a}$.

Sıızıqlı keńisliktiń elementleri vektorlar dep ataladı. Eger “sańa kóbeytiw” haqıyqıy sanlar ushın anıqlanǵan bolsa, sıızıqlı keńislik haqıyqıy dep, eger “sańa kóbeytiw” kompleks sanlar ushın anıqlanǵan bolsa, sıızıqlı keńislik kompleks sıızıqlı keńislik dep ataladı.

Berilgen kópliktiń sıızıqlı keńislik ekenligin anıqlaw ushın:

- 1) $\oplus$ hám $\otimes$ ámellerin sonday etip beriw kerek, bul ámellerdiń nátiyjesi berilgen kópliktiń elementi bolsın.
- 2) bul ámeller ushın barlıq segiz aksiomanıń orınlanıwın tekseriw.

Tómendegilerdiń qaysısı sıızıqlı keńislikler (olarda tábiyiy túrde anıqlanǵan ámeller menen birge) ekenligin óz betinshe dálilleń:

- haqıyqıy sanlardıń R kópligi;
- $[a, b]$ da úzliksiz funkciyalardıń $C_{[a, b]}$ kópligi;
- n nen joqarı bolmaǵan dárejeli kópaǵzalılardıń $P_n[x]$ kópligi;
- n uzınlıqtaǵı qatar-matricalardıń kópligi.

Keleside qısqaqlıq ushın $\oplus$ ámelin ápiwayı «+» belgisi menen, al $\otimes$ ámelin de ápiwayı kóbeytiw belgisi « $\cdot$ » menen yaki algebralıq ańlatpalardaǵı sıyaqlı jazıwda ulıwma taslap jiberiw múmkin.

L sıızıqlı keńisliktiń vektorlarınıń birikpesin (sisteması dep aytıladı) qaraymız: L sıızıqlı keńisliktiń $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k$ kórinisindegi vektorına bul vektorlardıń sıızıqlı kombinaciyası dep ataladı, α_i sanları–sıızıqlı kombinacianıń koefficientleri.

Anıqlama-2. Eger barlıǵı bir waqıtta nolge teń bolmaǵan, $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$ bolatuǵın sonday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sanları bar bolsa, L sıızıqlı keńisliktiń vektorlarınıń sisteması $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$ sıızıqlı baylanıslı dep ataladı.

Bul sızıqlı kombinaciyanıń barlıq coefficientleri 0 ge teń bolsa ǵana, $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$ bolsa, onda L sızıqlı keńisliktiń vektorlarınıń sisteması $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$ sızıqlı baylanıslı dep ataladı.

Eger $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$ sisteması maksimal sızıqlı baylanıssız bolsa, onda

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k + \alpha_{k+1} \vec{b} = \vec{0}$$

teńligi barlıq coefficientler $\alpha_i = 0$ bolmaǵanda orınlanadı, sonday-aq $\alpha_{k+1} \neq 0$ bolıwı shárt. Sonda bul teńliktiń eki tárepinde α_{k+1} ge bólip,

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k,$$

kórinisinde jazıw múmkin, yaǵnıy $\vec{b}$ vektordı $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlardıń sızıqlı kombinaciyası kórinisinde súwretlew múmkin. Sonday-aq, bul $\vec{b}$ vektordı $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlar boyınsha jiklendi dep aytıladı.

Vektorlardıń $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ sisteması sızıqlı baylanıslılıǵın tek ǵana bul sistemaniń vektorlarınıń biriniń basqa vektorlardıń sızıqlı kombinaciyası kórinisinde súwretlew múmkinligin dálillew múmkin.

Анıqlama-3. L sızıqlı keńisliktiń vektorlarınıń shekli tártiplesken maksimal sızıqlı baylanıssız $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ sisteması bul keńisliktiń bazisi dep ataladı. $B: \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ arqalı ańlatıladı. Eger L sızıqlı keńislik baziske iye bolsa, onda ol shekli ólshemli dep ataladı, bazistiń vektorlarınıń sanı L sızıqlı keńisliktiń ólshemi dep ataladı. Eger L sızıqlı keńislik n ólshemge iye bolsa (yaki, n vektordan turıwshı baziske iye bolsa), L_n dep jazıladı.

Eger $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ sisteması L sızıqlı keńisliktiń bazisi bolsa, onda $\forall \vec{b} \in L$ ushın

$$\vec{b} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \quad (1)$$

bolatuǵın $x_1, x_2, \dots, x_n$ sanları bar boladı.

(1) teńligine $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ bazis boyınsha $\vec{b}$ vektorınıń jikleniwı dep aytıladı. $x_1, x_2, \dots, x_n$ sanlarına (jikleniwdiń coefficientleri) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ bazisinde $\vec{b}$ vektorınıń koordinataları dep ataladı. $x_1, x_2, \dots, x_n$ sanlarınıń $B: \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ bazisinde $\vec{b}$ vektordıń koordinataları bolıp esaplanıwı

$$\vec{b} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B.$$

kórinisinde jazıladı. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kórinisindegi n sanlardıń birikpesine n uzınlıqtaǵı sanlı qatar dep ataladı. Negizinde, n uzınlıqtaǵı sanlı qatar–bul $n \times 1$ ólshemdegi qatar–matrica. Sonlıqtan, sanlı qatarlar ústinde, matricalar ushın orınlı bolǵanıday, qosıw hám sanǵa kóbeytiw ámellerin anıqlaw múmkin. n ólshemli barlıq múmkin bolǵan sanlı qatarlardıń kópligi n ólshemli sızıqlı keńislik bolıp esaplanadı hám bul keńislik koordinatalı keńislik (yaki qatarlardıń arifmetikalıq keńisligi) dep ataladı hám R^n arqalı ańlatıladı.

Erkin geometriyalıq vektorlardıń kópligi sızıqlı keńislikti dúzedi. Tegisliktegi vektorlardıń keńisligi R^2 arqalı, úsh ólshemli keńislik vektorlarınıń kópligi R^3 arqalı

belgilenedi. Bir tuwrıda (yaki bir tuwrıǵa parallel) jaylasqan vektorlardıń keńisligi R^1 arqalı belgilenedi.

Tómendegi teorema orınlı:

Teorema-2.

R^1 keńisliktiń bazisi qálegen nollik emes vektordı dúzedi.

R^2 keńisliktiń bazisi qálegen eki nollik emes kollinear emes vektorlardı dúzedi.

R^3 keńisliktiń bazisi qálegen úsh nollik emes komplanar emes vektorlardı dúzedi.

Dálillew: Eger sıızıqlı keńisliktiń $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlarınıń birlespesi bazis esaplasa, onda $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$ teńligi tek ǵana barlıq $\alpha_i = 0$ koefficientler hám qálegen $\vec{b}$ vektor ushın

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k,$$

teńligi orınlansa, sonda ǵana orınlı boladı, bul jerde β_i – bazıbir sanlar.

1) Qálegen nollik emes $\vec{b} \in R^1$ vektorın qaraymız. $\alpha \vec{b} = \vec{0}$ teńligi tek $\alpha = 0$ bolǵanda orınlanağı. R^1 diń barlıq vektorları bir tuwrıda jaylasqanlıqtan, olar kollinear, bunnan, qálegen $\vec{a} \in R^1$ vektor ushın $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ jazıw múmkin, demek, $\vec{b}$ vektor R^1 de bazis dúzedi.

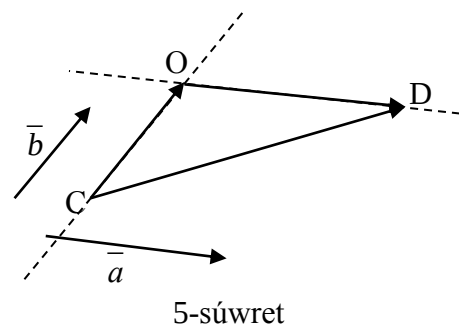
2) Qálegen eki nollik emes, kollinear emes $\vec{a}, \vec{b} \in R^2$ vektorların qaraymız. $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$ teńligi tek ǵana $\alpha = \beta = 0$ bolǵanda, hám $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ bolatuǵın $\forall \vec{c} \in R^2$ hám $\exists x, y \in R^2$ bolǵanda orınlanađuǵınlıǵın kórsetemiz.

$\alpha \neq 0$ bolǵanda $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$ orınlı boladı, dep uygaramız, sonda tómendegige iye bolamız:

$$\alpha \vec{a} = -\beta \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{b}, \text{ yaǵnıy } \vec{a} = \lambda \vec{b},$$

demek, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları kollinear, bul shártke qarsı keledi. Demek, $\alpha = \beta = 0$.

Qálegen $\vec{c} \in R^2$ vektordı qaraymız, meyli, máselen, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ (5-súwret). C noqat arqalı $\vec{b}$ vektorǵa parallel tuwrı júrgizemiz, al D noqat arqalı $\vec{a}$ vektorǵa parallel tuwrı júrgizemiz. Sonda $\overrightarrow{OD}$ vektor $\vec{a}$ vektorǵa parallel boladı, hám demek, $\overrightarrow{OD} = x\vec{a}$, al $\overrightarrow{CO}$ vektorı $\vec{b}$ vektorǵa parallel hám $\overrightarrow{CO} = y\vec{b}$. Bunnan, úshmúyeshlik boyınsha,



$$\vec{c} = \overrightarrow{CD} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

teńligine iye bolamız hám talap etilgeni dálillendi.

3) tastıyıqlawdı óz betinshe dálilleń.

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ teńligi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ bazis boyınsha $\vec{c}$ vektordıń jikleniwi dep ataladı, bul jikleniwdiń x hám y koefficientleri $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ baziste $\vec{c}$ vektordıń koordinataları dep, $\vec{c} = (x, y)$ jazıwı $\vec{c}$ vektordıń koordinatalıq forması dep ataladı.

Eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ –komplanar emes nollik emes vektorlar bolsa, onda olar R^3 keńisliktiń bazisin dúzedi, sonlıqtan $\forall \vec{d} \in R^3$ vektor $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bazis boyınsha jikleniwi tómendegi kóriniske iye:

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

al koordinatalıq formada $\vec{d} = (x, y, z)$.

Vektordıń koordinatalıq forması (R^2, R^3) geometriyalıq vektorlardıń keńisligi hám sanlı qatarlardıń keńisligi (R^2 hám R^3 sáykes túrde) arasındagı sáykeslik ornatadı. Sonlıqtan, koordinatalıq formadağı vektorlar ústindegi sızıqlı ámeller sanlı qatarlar ústindegi ámeller qağıydası boyınsha orınlanadı.

Máselen, eger R^3 keńisliktiń eki $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları óziniń $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ hám $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ koordinataları menen berilgen bolsın, onda

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z;$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z);$$

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z).$$

Eger $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ hám $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorları kollinear bolsa, onda $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ teńligi orınlanadı, bunnan $(a_x, a_y, a_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)$, yaki

$$a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z,$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Demek, eger vektorlar kollinear bolsa, onda olardıń koordinataları proporcional boladı.

Kerisinshe, eger eki vektordıń koordinataları proporcional bolsa, onda tómendegige iye bolamız:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda \Rightarrow (a_x, a_y, a_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z) \Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b},$$

al bul bolsa, demek vektorlar kollinear.

Solay etip, biz mınanı dálilledik: eki vektor kollinear bolıwı ushın olardıń koordinataları proporcional bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Qálegen l tuwrısın hám ondağı $\vec{e}$ ortın qaraymız. Bul ort l tuwrısında bul tuwrıda jatıwshı $\vec{a} = \lambda \vec{e}$ vektorlardıń semeystvosın dúzedi. $\lambda > 0$ de $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{e}$, $\lambda < 0$ de $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{e}$, demek, $\vec{e}$ ortı l tuwrısında eki qarama-qarsı bağıttı anıqlaydı.

Bağıt anıqlanğan tuwrıǵa kósher dep aytıladı, al bul bağıttı kórsetiwshı ortqa kósherdiń ortı dep aytıladı. Ort bağıtı menen qos baǵdarlanğan baǵdar oń dep,

qarama-qarsı bağıt – teris dep ataladı. Ort sonday-aq kósherde mashstab hám esaplaw basın anıqlaydı. Kósherge vektordın proekciyası kósher ortına vektordın proekciyası boladı:

$$np_l \bar{a} = np_{\bar{e}} \bar{a}$$

Eger R^3 keńislikte O noqat hám bası O noqatta bolğan qálegen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazis saylangan bolsa, onda $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tórtligine reper dep ataladı. Eger R^3 keńislikte reper berilgen hám reperdın hár bir vektorı menen koordinata kósheri dep atalıwshı kósher baylanıslı bolsa, onda R^3 te koordinatalardıń dekart sisteması (koordinatalardıń affin sisteması) berilgen, dep aytıladı. $\vec{e}_1$ vektorğa sáykes keliwshi bul kósherlerdın birine abscissa kósheri dep, ekinshisine ordinata kósheri dep, úshinshisi – oplıkata kósheri dep ataladı. Koordinatalar sistemasın ádette $OXYZ$ arqalı belgileydi. Sonda úsh ólshemli keńisliktiń hár bir M noqatına $M(x, y, z)$ sanlar úshligi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baziste $\overline{OM}$ (bul noqattın radius-vektori) vektordın koordinataları sáykes qoyıladı.

Tegisliktegi koordinatalar sisteması túsiniği de usıǵan uqsas túrde kiritiledi.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ arqalı óz-ara perpendikulyar $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ birlik vektorlardı belgileybiz. Bul vektorlardın R^3 te bazis dúziwi belgili. $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ bazisi ortonormollangan dep ataladı. $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ reperden payda bolğan koordinatalardıń Dekart sisteması dekart tuwrımúyeshli koordinatalar sisteması dep ataladı. Solay etip:

Úsh ólshemli keńislikte dekart tuwrımúyeshli koordinatalar sisteması dep, tómendegi birlespelerge aytıladı:

- koordinata bası dep atalıwshı bazıbir O noqattın;
- $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ ortonormallangan bazistın.

Keleside biz dekart tuwrımúyeshli koordinatalar sistemasın (DTKS) qaraymız.

Dekart tuwrımúyeshli koordinatalar sistemasında $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ vektorınıń koordinataları bul vektordın sáykes túrde koordinata kósherlerine proekciyalarına teń: $a_x = pr_{OX} \vec{a}$, $a_y = pr_{OY} \vec{a}$, $a_z = pr_{OZ} \vec{a}$.

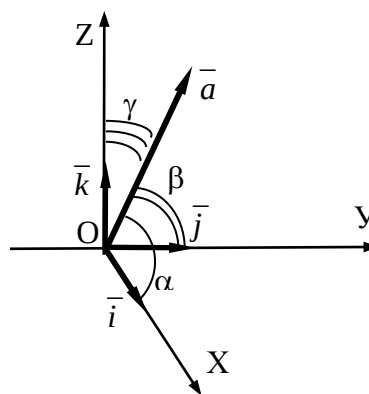
DTKS da $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis vektorları tómendegishe koordinatalarğa iye:

$$R^3 \text{ te } \vec{i}=(1, 0, 0); \vec{j}=(0, 1, 0); \vec{k}=(0, 0, 1)$$

$$R^2 \text{ de } \vec{i}=(1, 0); \vec{j}=(0, 1).$$

Qálegen $\vec{a} \in R^3$ vektordı qaraymız, bul vektor koordinatalar kósherleri menen (yaki $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis ortlar menen) dúzgen múyeshlerdi $\alpha = \left(\vec{a}, \vec{i} \right)$, $\beta = \left(\vec{a}, \vec{j} \right)$, $\gamma = \left(\vec{a}, \vec{k} \right)$ arqalı belgileymiz (6-súwret). Bul múyeshlerdiń kosinusları $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — $\vec{a}$ vektordıń baǵdarlawshı kosinusları dep ataladı. Berilgen vektordıń baǵdarlawshı kosinusları

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



6-súwret

qásiyetine iye. Olar vektordıń DTKS na salıstırmalı baǵdarın xarakterleydi.

Eger $A(x_A, y_A, z_A)$ hám $B(x_B, y_B, z_B)$ noqatlardıń koordinataları — $\vec{a}$ vektordıń bası hám aqırı belgili bolsa, onda bul vektordıń koordinataların mına qaǵıyda boyınsha tabadı “vektor aqırınıń koordinatasınan vektor basınıń sáykes koordinataları alınadı”:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

3. Vektorlardıń skalyar, vektorlıq, aralas kóbeymesi

Аnıqlama-4. Eki vektordıń uzınlıqlarınıń olar arasındaǵı múyesh kosinusına kóbeymesine teń sanǵa bul vektorlardıń skalyar kóbeymesi dep ataladı. $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar ushın olardıń skalyar kóbeymesi $(\vec{a}, \vec{b})$, yamasa $\vec{a} \cdot \vec{b}$ arqalı ańlatıladı.

Solay etip, anıqlama boyınsha

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \left(\vec{a}, \vec{b} \right).$$

Skalyar kóbeyme tómendegi qásiyetlerge iye:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $\vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ — skalyar kvadrat; bunnan $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;
4. $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ tek ǵana, vektorlardıń hesh bolmaǵanda biri nollik, yamasa $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar ortogonal bolsa ǵana;

$\cos \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Bul qásiyetten paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = |\vec{a}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

R^3 кеңістіктің $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonормалланған базиси үшін төмендегі қатнастар орынлы екенлігін есептейміз:

$$\begin{aligned}\vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, & \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1, & \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0, & \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0.\end{aligned}$$

Мейли $[O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ реперден пайда болған DTKS да екі вектор берілген болсын:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{hám} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Скаляр көбейтіндінің келтірілген қасиетлерінен пайдаланып, бұл векторлар үшін төмендегіге ие боламыз:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_z b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + \\ &+ a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.\end{aligned}$$

Солдай етіп, егер векторлар өз координаталары менен DTKS да берілген болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі бұл векторлардың сәйкес координаталарының көбейтіндісіне тең:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Бұл қағидадан пайдаланып, координаталық формада жазу мүмкін:

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= (\vec{a} \cdot \vec{a}) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \\ \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.\end{aligned}$$

Бұл формулаларды hám 6-қасиет салдарын есепке алып, төмендегін табамыз:

$$\begin{aligned}pr_{OX} \vec{a} &= pr_{\vec{i}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{i}|} = a_x, \\ pr_{OY} \vec{a} &= pr_{\vec{j}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} = a_y, \\ pr_{OZ} \vec{a} &= pr_{\vec{k}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} = a_z,\end{aligned}$$

яғни, DTKS да вектордың координаталары олардың сәйкес координата көшкерлеріне проекцияларына тең.

$\vec{a}$ вектордың бағытлаушы косинустары үшін орынлы:

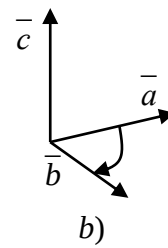
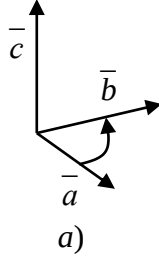
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(\hat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos \beta &= \cos(\hat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos \gamma &= \cos(\hat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.\end{aligned}$$

$\vec{a}$ вектордың $\vec{a}^0$ орнын қараймыз. $\vec{a}$ вектордың координаталарын есепке алып, табамыз:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right).$$

Bunnan, vektordın bağıtlawshı kosinusları onıń ortınıń koordinatalarına teń hám kerisinshe, yaǵnıy $\vec{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ dep jazıw múmkin.

Аnıqlama-5. Birgeliktegi baslanıwına iye $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlardıń tártiplengen úshligi eger $\vec{c}$ úshinshi vektor aqırınan birinshi $\vec{a}$ vektordan ekinshi $\vec{b}$ vektorǵa kishkene burılıw saat kórsetkishine qarsı júrgizilgendey kórinse, oń úshlik dep ataladı. Keri jaǵdayda vektorlardıń úshligi shep dep ataladı. 7-a súwrette vektorlardıń oń úshligi, 7-b da shep úshligi súwretlengen.



7-súwret

Biz paydalanǵan DTKS $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ oń úshlik tiykarında dúziledi.

Аnıqlama-6. $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń vektorlı kóbeymesi dep, tómendegi qásiyetlerdi qanaatlandıırıwshı $\vec{v}$ vektorına aytıladı:

a) $|\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}),$

b) $\vec{v}$ vektorı $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları jaylasqan tegislikke perpendikulyar;

Vektorlıq kóbeyme $\vec{a} \times \vec{b}$ yaki $[\vec{a}, \vec{b}]$ arqalı belgilenedi. Vektorlıq kóbeyme tómendegi qásiyetlerge iye:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$

3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}),$

4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$) tek ǵana $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları kollinear bolsa. Dara jaǵdayda, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}.$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis vektorları ushın mına qatnaslar orınlı:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0} & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \end{array}$$

Meyli vektorlar óz koordinataları menen berilgen bolsın:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{hám} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Sanap ótilgen qásiyetlerdi qollanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + \\
&+ a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} = \\
&= a_y b_x (-\vec{k}) + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} + a_z b_y (-\vec{i}) + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_z \vec{i} = \\
&= \vec{i} (a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j} (a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x) = \\
&= \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

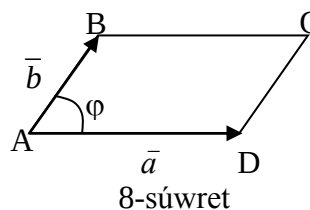
Solay etip, kóbeytiliwshi $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ hám $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorlardıń koordinataları arqalı vektorlıq kóbeyme simvolikalıq determinant kórinisinde jazılıwı múmkin:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

yamasa koordinatalıq qatar kórinisinde

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right).$$

Tárepleri $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardan dúzilgen $ABCD$ paralelogrammdı qaraymız (8-súwret). Bul paralelogrammnıń maydanı tómendegige teń:



$$S_{par} = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Solay etip, geometriyalıq kóz qarastan, eki kollinear emes vektorlardıń vektorlıq kóbeymesiniń moduli bul vektorlardan tárepleri retinde dúzilgen paralelogrammnıń maydanına teń.

Анıqlama-7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlardıń aralas kóbeymesi dep, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektordıń $\vec{c}$ vektorǵa skalyar kóbeymesine aytıladı. Aralas kóbeyme $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ yamasa $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ arqalı belgilenedi.

Solay etip, anıqlama boyınsha, úsh vektordıń aralas kóbeymesi – bul tómendegige teń bolǵan san:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}).$$

Aralas kóbeymeniń qásiyetleri:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$, yaǵnıy kóbeytiwshilerdiń tákirarlanıwshı orın almastırıwında aralas kóbeyme ózgermeydi;

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}$, ya'niy qo'si kóbeytiwshilerdiń orın almasıwında aralas kóbeyme belgisin ózgertedi;

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ($\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{c} \neq 0$) tek ǵana $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bolsa.

Eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar óz koordinataları menen berilse:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z),$$

onda skalyar hám vektorlıq kóbeymelerdiń koordinatalıq formalarınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot (c_x, c_y, c_z) = \\ &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bunnan, aralas kóbeyme koordinatalıq formada mına kóriniste boladı:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Aralas kóbeymeniń geometriyalıq interpretaciyasın qaraymız. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlardan parallelepiped qabırǵaları retinde dúzemiz.

Bul parallelepipedtiń kólemi $V = S_{ul} \cdot H$ ge teń. Biraq $S_{ul} = |\vec{a} \times \vec{b}|$,

al H biyikligi $H = |pr_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}| = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$.

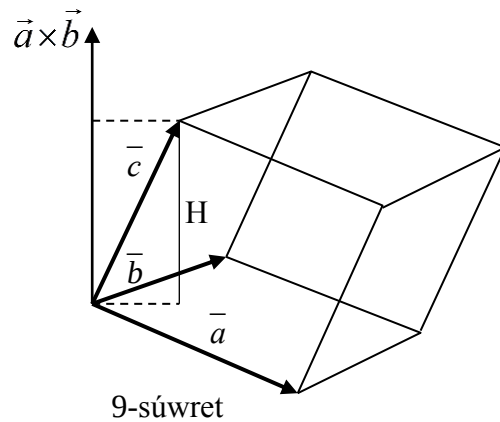
Sonda

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = |(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})| = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

Solay etip, eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bolmasa, onda bul vektorlardan dúzilgen parallelepipedtiń V kólemi

$$V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|,$$

ge teń, ya'niy bul vektorlardıń aralas kóbeymesiniń absolyut shamasına teń.



9-súwret

Úsh vektordıń aralas kóbeymesi menen birge, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ kórinisindegi kóbeymeni de qaraw múmkin – bunday kóbeyme ekilengen vektorlıq kóbeyme dep ataladı.

Ekilengen vektorlıq kóbeyme vektorlıq kóbeymeni skalyar kóbeyme hám vektordı sanǵa kóbeytiw menen baylanıstırıwshı qásiyetke iye:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

QADAǴALAW USHIN TAPSIRMALAR

Variant	Tapsırma nomeri
1	1, 11, 21, 31,
2	2, 12, 22, 32
3	3, 13, 23, 33
4	4, 14, 24, 34
5	5, 15, 25, 35
6	6, 16, 26, 36
7	7, 17, 27, 37
8	8, 18, 28, 38
9	9, 19, 29, 39
10	10, 20, 30, 40

1. $\vec{x}$ vektordı tabıń: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

1. $\vec{a} = (4, 2, 3), \quad \vec{b} = (2, 3, 7), \quad \vec{c} = (1, 7, 11).$

2. $\vec{a} = (2, 4, -2, 0), \quad \vec{b} = (-1, 3, 17, 3), \quad \vec{c} = (0, -7, 1, 4).$

3. $\vec{a} = (5, 3, 4), \quad \vec{b} = (2, 3, 7), \quad \vec{c} = (1, 7, 11).$

4. $\vec{a} = (-4, -2, -3), \quad \vec{b} = (1, 7, 11), \quad \vec{c} = \vec{a}.$

2. $\vec{x}$ vektordı tabıń:

5. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{a} = (1, 2, 3, 0), \quad \vec{b} = (-2, 1, 5, -1), \quad \vec{c} = (\sqrt{2}, -1, 0, 1).$

6. $-3\vec{a} - \vec{x} = 2\vec{b} \quad \vec{a} = (0, -2, 1), \quad \vec{b} = (1, -3, 7).$

7. $2\vec{x} + 3\vec{a} - 4\vec{b} = 0; \quad \vec{a} = (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha), \quad \vec{b} = \left(\sin^3 \alpha, \frac{1}{4}, -\cos^3 \alpha \right).$

8. $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{x} = 6\vec{c}; \quad \vec{a} = (1, -3, 2), \quad \vec{b} = \left(\frac{1}{9}, \frac{11}{3}, -2 \right), \quad \vec{c} = \left(1, \frac{2}{3}, -2 \right).$

3. Vektorlardıń sıızqlı baylanıslılıǵın yamasa baylanıssızlıǵın ornatań:

9. $\vec{a} = (5, 4, 30), \quad \vec{b} = (3, 3, 2), \quad \vec{c} = (8, 1, 3).$

10. $\vec{a} = (2, -3, 1), \quad \vec{b} = (3, -1, 5), \quad \vec{c} = (1, -4, 3).$

11. $\vec{a} = (1, 2, 3, 4), \quad \vec{b} = (0, 1, 2, 1), \quad \vec{c} = (1, -1, 2, 1).$

12. $\vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (2, -3, 4), \quad \vec{c} = (-1, -1, 1), \quad \vec{d} = (3, 4, 2).$

4. Vektorlardıń sıızqlı baylanıslılıǵın yamasa baylanıssızlıǵın ornatań hám olardıń bazisin tabıń:

$$13. \vec{a}=(2,3), \quad \vec{b}=(-1,-3), \quad \vec{c}=(1,-1), \quad \vec{d}=(3,1).$$

$$14. \vec{a}=(0,2,0), \quad \vec{b}=(0,-2,-3), \quad \vec{c}=(-1,1,-1).$$

$$15. \vec{a}=(-4,2,3), \quad \vec{b}=(2,0,4), \quad \vec{c}=(-1,-1,-1).$$

$$16. \vec{a}=(-4,2,3,0), \quad \vec{b}=(2,0,0,4), \quad \vec{c}=(-1,-1,0,-1).$$

5. $\vec{d}$ vektordín $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar arqalı sıziqlı anlatılátuğın barlıq λ mánislerin tabıń, bul jerde:

$$17. \vec{a}=(2,3,5), \quad \vec{b}=(3,7,8), \quad \vec{c}=(1,-6,1), \quad \vec{d}=(7,-2,\lambda).$$

$$18. \vec{a}=(3,7,8), \quad \vec{b}=(2,3,5), \quad \vec{c}=(1,-6,1), \quad \vec{d}=(\lambda,7,-2).$$

$$19. \vec{a}=(2,3,5), \quad \vec{b}=(1,-6,1), \quad \vec{c}=(3,7,8), \quad \vec{d}=(7,\lambda,-2).$$

$$20. \vec{a}=(1,-6,1), \quad \vec{b}=(3,7,8), \quad \vec{c}=(2,3,5), \quad \vec{d}=(7,-2,\lambda).$$

6. $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar sistemaların teń kúshliligin tekseriń:

$$21. \vec{a}_1=(2,3), \quad \vec{a}_2=(-1,-3), \quad \vec{a}_3=(1,-1), \quad \vec{a}_4=(3,1),$$

$$\vec{b}_1=(-2,-6), \quad \vec{b}_2=(1,-1), \quad \vec{b}_3=(4,0)$$

$$22. \vec{a}_1=(1,-3,4), \quad \vec{a}_2=(-1,-2,-3), \quad \vec{a}_3=(8,1,-1),$$

$$\vec{a}_4=(-3,-4,-1), \quad \vec{b}_1=(-1,3,-4), \quad \vec{b}_2=(0,-5,1), \quad \vec{b}_3=(5,-3,-2).$$

$$23. \vec{a}_1=(0,1,2,3,4), \quad \vec{a}_2=(-2,-1,2,-3,4), \quad \vec{a}_3=(3,-1,1,-1,1),$$

$$\vec{a}_4=(9,3,4,1,2), \quad \vec{b}_1=(0,-1,-2,-3,-4), \quad \vec{b}_2=(-2,0,4,0,8).$$

$$24. \vec{a}_1=(1,2,3,4), \quad \vec{a}_2=(-1,2,-3,4), \quad \vec{a}_3=(-1,1,-1,1), \quad \vec{a}_4=(3,4,1,2),$$

$$\vec{b}_1=(5,6,7,8), \quad \vec{b}_2=(0,4,0,8), \quad \vec{b}_3=(2,3,2,1).$$

7. Vektorlardín skalyar hám vektorlıq kóbeymesin tabıń:

$$25. \vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}, \quad \vec{b}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$$

$$26. \vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}, \quad \vec{b}=7\vec{i}+13\vec{j}+9\vec{k}.$$

$$27. \vec{a}=12\vec{i}+16\vec{j}+21\vec{k}, \quad \vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}.$$

$$28. \vec{a}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, \quad \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}.$$

8. $\vec{b}$ vektordín $\vec{a}$ vektorğa proekciyası hám bul vektorlar arasındagı múyeshti tabıń:

$$29. \vec{a}=(2,-3,1), \quad \vec{b}=(5,2,-4).$$

$$30. \vec{a}=(2,-2,1), \quad \vec{b}=(5,-7,3).$$

$$31. \vec{a}=(2,-3,4), \quad \vec{b}=(1,-2,5).$$

$$32. \vec{a}=(1,2,2), \quad \vec{b}=(2,3,1).$$

9. Vektorlardan dúzilgen úshmúyeshliktiń maydanın tabıń hám vektorlıq kóbeyme járdeminde bul vektorlar arasındagı φ múyeshtiń sinusın tabıń, al keyin skalyar kóbeyme járdeminde juwaptı tekseriń:

$$33. \quad \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$34. \quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

$$35. \quad \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$36. \quad \vec{a} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

10. Ush vektordan dúzilgen piramidaniń kólemin esaplań:

$$37. \quad \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$38. \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

$$39. \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

$$40. \quad \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 24\vec{j} + 14\vec{k}.$$

ÁDEBIYATLAR

1. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2012.
2. Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. М.: Высшая школа, 1986. Ч. 2.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2013.
4. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы. Ростов н/Д: Феникс, 2012. 343с.
5. Yunusova D.I., Yunusov A.S. Algebra va sonlar nazariyasi. Toshkent: Ilm-Ziyo, 2009.

6. Jabborov N.M., Aliqulov E.O., Axmedova Q.S. Oliy matematika. Qarshi: QDU nashriyoti, 2010.

MAZMUNI

Kirisiw.....	3
1. Matrica túsinigi.....	4
2. Matrica ústinde ámeller.....	4
3. Matrica determinantı túsinigi.....	7
4. Determinant qásiyetleri.....	8
5. Qálegen tártiptegi matricanı esaplaw metodları.....	8
6. Keri matrica.....	10
7. Ápiwayı matricalıq teńlemeler.....	12
8. Matrica rangi.....	13
9. Matrica rangin esaplaw.....	14
Qadaǵalaw ushın tapsırmalar.....	15
10. n belgisizli n sıızıqlı teńlemeler sisteması. Olardı sheshiw usılları.....	18
11. n belgisizli m sıızıqlı teńlemeler sisteması.....	22

Qadaǵalaw ushın tapsırmalar.....	25
12. Vektorlıq algebra elementleri.....	30
Qadaǵalaw ushın tapsırmalar.....	44
Paydalanılǵan ádebiyatlar.....	47