

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mamleketlik universiteti magistratura bóliminiń 5A 130103- “Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika“ qanigeliginiń 2-kurs magistrantı Orınbaev Paraxattıń “Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlewge sanlı-analitikalıq metodtıń qollanılıwı” temasındaǵı magistrlik dissertaciyasına ilimiy basshınıń

PIKIRI

Fizika hám texnikada kóp ushrasatuǵın sońǵı tásirge iye processler integro-differenciallıq teńlemeler menen súwretlenedi. Sonıń ushında bunday teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi úyreniw teoriyalıq hám de praktikalıq áhmiyetke iye boladı.

P. Orınbaevtıń bul magistrlik dissertaciyasında Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemelerdiń sızıqlı emes sistemaları ushın ajıralmaǵan sızıqlı eki toshkalı hám úsh toshkalı shegaralıq shártlerge iye shegaralıq máselelerdi izertlew ushın Samoylenkonıń sanlı-analitikalıq metodi qollanılǵan. Usı metod járdeminde Fredgolmniń sızıqlı-integro differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler úyrenilgen.

Jumıstı orınlaw barısında P.Orınbaev usı tema boyınsha ilimiy monografiyalardı hám ilimiy maqalalardı úyrenip shıqtı. Magistraturada oqıw dawirinde alǵan bilimlerin qollana bilip, óz betinshe ilimiy natıyjeler alıwǵa eristi. Bul alınǵan nátiyjeler tiykarında tayarlanǵan materialları ham maqalaları 2019-jılı Qarshi universitetinde ótken ilimiy konferenciya materiallarında, Qaraqalpaq mamleketlik universiteti xabarshısında (2019-jıl) ham universitet magistrantlarınıń ilimiy miynetleriniń toplamlarında basılıp shıqtı.

Men bul jumıs magistrlik dissertaciyalarga qoyılǵan talaplarǵa tolıq juwap beredi hám onıń avtorı P.Orınbaev 5A 130103- “Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika“ qanigeligi boyınsha magistr akademiyalıq dárejege ılayıq dep esaplayman.

Ilimiy basshı:

f..m.i.k. docent Nurjanov O.

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mamleketlik universiteti magistratura bóliminiń 5A 130103- “Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika“ qanigeliginiń 2-kurs magistrantı Orınbaev Paraxattıń “Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlewge sanlı-analitikalıq metodtıń qollanılıwı” temasındaǵı magistrlik dissertaciyasına

SIN PIKIR

Ilim hám texnikanıń kóp ámeliy máselelerinde sońǵı tásirli qubılıslar hám processlerdiń matematikalıq modeli sıpatında integro-differenciallıq teńlemeler jiyi kelip shıǵadı. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın baslanǵısh máselelerdi hám shegaralıq máselelerdi izertlew metodları ele de az. Sonlıqtan ápiwayı differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi izertlew usılların integro-differenciallıq teńlemelerge qollanıw qızıǵıwshılıq tuwdıradı.

Bul magistrlik dissertaciya jumısı A.M.Samoylenkonıń sanlı-analitikalıq metodın integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiwge qollanıwǵa baǵıshlangan.

Dissertaciya jumısı Kirisiw bóliminen, 3 baptan, Juwmaqlaw bóliminen hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Jumıstıń Kirisiw bóliminde izertlew temasınıń aktuallıǵı, máqset hám wazıypaları, jańalıǵı, teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti bayanlangan. Jumıs mazmunı qısqasha kórsetilgen.

Birinshi bap «Integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máselelerdi sanlı analitikalıq metod penen sheshiw» dep atalıp onda integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máseleler ushın sanlı-analitikalıq metod qollanılǵan.

Ekinshi bap «Integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq máseleler » dep atalıp onda Fredgolmnıń inetegro-differenciallıq teńlemeleri ushın úsh toshkalı sızıqlı ajralmaǵan shegaralıq máseleler qaralıp, bunday máselelerdi sheshiw ushın sanlı-analitikalıq sxema keltirilgen hám ol tiykarlangan.

Úshinshi bap «Integro-differenciallıq teńlemeler ushin kóp toshkalı shegaralıq máseleler» dep atalıp onda Fredgolmnıń sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeleri ushin kóp toshkalı shegaralıq shártlerge iye shegaralıq máseleler sanlı-analitikalıq metod járdeminde úyrenilgen. Alınğan nátiyjeler konkret shegaralıq máseleni juwıq sheshiw ushin qollanılğan. Jumısta keltirilgen tastıyıqlawlar tiykarlanğan, teoremlar dálillengen.

Biraq ta jumısta keltirilgen mısıl tek illyustrativlik xarakterge iye. Eger de jumıs natiyjeleri konkret ámeliy máselelerge qollanılğanda ele de jaqsı bolar edi. Biraq ta bul jumıstıń bahasın túsirmeydi, keleshekte islenetuğın jumıslarğa wazıypa boladı dep oylayman.

Juwmaqlap aytqanda, bul jumıs magistrlik dissertaciyalarğa qoyılğan barlıq talaplarǵı juwap beredi, al onıń avtorı P. Orınbaev

5A 130103- “Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika“ qanigeligi boyınsha magistr akademiyalıq dárejege ılayıq dep esaplayman.

Ishki apponent:

Bekiev A.

QMU, ámeliy matematika kafedrası docenti, fizika-matematika ilimler kandidatı

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mamleketlik universiteti magistratura bóliminiń 5A 130103- “Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika“ qanigeliginiń 2-kurs magistrantı Orınbaev Paraxattıń “Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlewge sanlı-analitikalıq metodtıń qollanılıwı” temasındaǵı magistrlik dissertciyasına

SIN PIKIR

Bul sın berilip atırǵan magistrlik dissertaciya jumısı integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlewge ápiwayı differenciallıq teńlemeler ushın islep shıǵılǵan.

A.M. Samoylenkonıń izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodınıń sxemaların qollanıwǵa hám bul algoritmlerdi tiykarlaw máselelerin úyreniwge baǵıshlangan.

Jumıs kirisiw bóliminen, 3 bapтан, juwmaqlaw bóliminen hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen turadı.

«Integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máselelerdi sanlı analitikalıq metod penen sheshiw» dep atalǵan birinshi babında integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máseleler qaralǵan. Usı baptıń 3-paragrafındaǵı Volterra tipindegi sızıqlı emes integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın ajralǵan shegaralıq shártlerge iye shegaralıq másele ushın sanlı-analitikalıq metodtıń algoritmi qollanılıwı hám onıń tiykarlanıwı qızıǵıwshılıq tuwdıradı.

Ekinshi bap «Integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq máseleler » dep atalıp onda Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın ush toshkalı shegaralıq máseleleri izertlewge sanlı-analitikalıq sxema jumıstıń tiykarǵı natıyjeleriniń biri dep esaplayman. Bul sxema matematikalıq jaqtan tolıq tiykarlangan.

Jumıstıń ushinshi babı «Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler» dep atalıp Fredgolm tipindegi sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máselelerge ekinshi bapta bayanlangan sxema ulıwmalastırılǵan hám konkret mısalda alınǵan nátiyjeler

qollanılıshılıǵı kórsetilgen. Jumıs jaqsı jazılǵan, onda keltirilgen tastıyıqlawlar, talqılawlar tiykarlanılǵan

Juwmaqlap aytqanda, bul magistrlik dissertaciya jumısı qoyılǵan barlıq talaplarǵa juwap beredi dep oylayma hám onıń avtorı P.Orınbaev 5A 130103-“Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika“ qánigeligi boyınsha magistr akademiyalıq dárejege ılayıq dep esaplayman.

Rasmiy opponent:

S.Tańirbergenov

Ájiniyaz atındaǵı Nokis

mámleketlik pedogogikalıq

institutı Matematikanı oqıtıw

metodikası kafedrası docenti,

fizika-matematika ilimleri

kandidatı

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

BERDAQ ATINDAĞI QARAQALPAQ MAMLEKETLIK UNIVERSITETI

Matematika fakulteti

Magistrant: Orınbaev P.R

“Differenciallıq teńlemeler” kafedrası

Ilimiy basshı: Nurjanov O.D.

2019-2020-oqıw jılı

Qanigelik: 5A 130103-Differenciallıq
teńlemeler hám matematikalıq fizika

**“Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi
izertlewge sanlı-analitikalıq metodtıń qollanıwı” temasındağı**

MAGISTRLIK DISSERTACIYA ANNOTACIYASI

Magistrlik dissertaciya temasınıń tiykarlanıwı hám aktuallıǵı:

Differenciallıq hám integro-differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerteoriyası keńnen rawajlanbaqta. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi izertlewdiń hár qıylı metodları islep shıǵılǵan, al integro-differenciallıq teńlemeler ushın bunday usıllar elede az. Sonıń ushın da ápiwayı differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi izertlewdiń usı metodların integro-differenciallıq teńlemeler ushın da ulıwmalastırıw búgingi kúnde oǵada áhmiyetli aktual másele bolıp tabıladı. Dissretaciya teması usınday máseleń birine arnalǵan.

Izertlew obekti-Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler

Izertlew predmeti- integro-differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máseleler.

Izertlewdiń máqset hám wazıypaları: Integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlew ushın Samoylenkonıń sanlı-analitikalıq metodın qollanıw

Izertlew usılları- dissertaciyalıq jumısta apiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń metodları paydalanıladı.

Izertlewdiń ilimiy jańalıǵı. Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın ajıralmaǵan sızıqlı shegaralıq shártlerge iye ush toshkalı hám kóp

toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlewge sanlı-analitikalıq metodtıń saykes sxemaları islep shıǵılǵan hám tiykarlangan.

Dissertaciya jumısınıń kolemi hám strukturası. Dissertaciya jumısı kirisiw bóliminen, úsh baptan, juwmaqlawdan hám paydalanılǵan adebiyatlar diziminen turadı. Dissertaciyanıń ulıwma kolemi 56 betten ibarat.

Orınlangan jumıstıń tiykarǵı nátiyjeleri. Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máseleler Samoylenko metodu járdeminde uyreniledi. Volterra tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın ajıralǵan sızıqlı shegaralıq shártlerge iye máselelerdi sheshiw ushın sanlı-analitikalıq metod qollanıladı.

Juwmaq hám usınıslardıń qisqasha ulıwmalastırılıwı.

Integro-differenciallıq teńlemelerdiń ayırım klassları ushın shegaralıq máseleler uyrenildi. Usınıs sıpatında kóp toshkalı shegaralıq máseleler ushın sanlı-analitikalıq metod sxemaların sızıqlı emes shegaralıq shártler jaǵdayında izertlew kerекligin kórsetip ótemiz.

Ilimiy basshı: _____ **f.m.i.k.doc.Nurjanov O.D**

Magistrant: _____ **Orınbaev P. R**

**MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIALIZED
EDUCATION OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN**

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY NAMED AFTER BERDAKH

Faculty: Magistracy department
The department: Differential equations
Academic year: 2018-2019/2019-2020

Undergraduate: Orinbaev P.R.
Scientific director: doc. Nurjanov O.D
Speciality: 5A130103-
Differential equation and mathematical
physics

ANNOTATION OF THE MASTER'S DEGREE DISSERTATION

Substantiation and relevance of the master's dissertation topic: The theory of boundary value problems for differential and integro-differential equations is developing in a wide range. Various methods for studying boundary value problems have been developed for simple differential equations, but there are still few such methods for integro-differential equations. Therefore, the generalization of these methods of studying boundary value problems for simple differential equations to integro-differential equations is a very important issue today. The topic of the dissertation is one of such issues.

Object of research - Fredholm-type integro-differential equations

Subject of research - boundary value problems for integro-differential equations.

Objectives and tasks of the study: The application of Samoilenko's numerical-analytical method for the study of two-point and multi-point boundary value problems for integral-differential equations.

Research methods - the dissertation uses the methods of the theory of simple differential equations.

Scientific novelty of the study. Appropriate schemes of the numerical-analytical method for the study of three-point and multi-point boundary value

problems with inseparable linear boundary conditions for Fredholm-type integro-differential equations have been developed and based.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and references. The total volume of the dissertation is 59 pages.

The main results of the work done. For systems of integro-differential equations of the Fredholm type, two-point and multi-point boundary value problems are studied using the Samoilenko method. For integro-differential equations of the Volterra type, a numerical-analytical method is used to solve problems with separate linear boundary conditions.

Brief summary of conclusions and recommendations.

Boundary value problems for separate classes of integral-differential equations are studied. As a suggestion, we show that numerical-analytical method schemes for multi-point boundary value problems should be studied in the case of nonlinear boundary conditions.

Scientific director: _____ **doc. Nurjanov O.D**
Undergraduate: _____ **Orinbaev P. R**

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI
BERDAQ ATINDAĞI QARAQALPAQ MAMLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Qoljazba huqıqı

UDK 517.968.7

**ORINBAEV PARAXAT RAXMANOVICH
«INTEGRO-DIFFERENCIALLIQ TEÑLEMELER USHIN KÓP
TOSHKALI SHEGARALIQ MÁSELELERDI IZERTLEWGE SANLI
ANALITIKALIQ METODTIÑ QOLLANILIWI »**

**5A130103 Differenciallıq teñlemeler hám matematikalıq fizika qánigeligi
Magistr akademiyalıq dárejesin alıw ushın usınılğan**

DISSERTACIYA

MAK da jaqlawğa ruxsat

Magistratura bólim baslıǵı:
y. i. k. doc. A. Gulimov

“ Differenciallıq teñlemeler ”

kafedra baslıǵı

f.m.i.k.doc. Q.Elǵondiev_____

Ilimiy basshı:

f.m.i.k.doc. O.Nurjanov

Mazmunı

Kirisiw	3
1-bap. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máselelerdi sanlı analitikalıq metod penen sheshiw	6
1-§. Integro-differenciallıq teńlemeler hám olar ushın shegaralıq máselelerdiń qoyılıwı	7
2-§. Eki toshkalı shegaralıq máseleler ushın sanlı-analitikalıq metod	15
3-§. Ajıralǵan shegaralıq shártlerge iye integro-differenciallıq teńlemelerdi juwıq sheshiw	18
1-bap boyınsha juwmaqlar	26
2-bap . Integro-differenciallıq teńlemeler ushın ush toshkalı shegaralıq máseleler	27
1-§. Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemelerdiń bir klası ushın úsh toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiw	28
2-§. Ulıwma túrdegi Fredgolm integro-differenciallıq teńlemeleri ushın úsh toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiw	30
2-bap boyınsha juwmaqlar	42
3-bap. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler	43
1-§. Fredgolm tipindegi sıızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler	44
2-§ .Mısal	47
3- bap boyınsha juwmaqlar	51
Juwmaqlaw	52
Paydalanılǵan adebiyatlar dizimi.....	57

Kirisiw

Temaniń aktuallığı. Real dúnyada júz berip atırǵan kóp proceslerdiń hám qubılıslardıń matematikalıq modellestiriliwi ápiwayı differenciallıq teńlemeler hám dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın baslanǵısh hám shegaralıq máselelerdi úyreniwge alıp keledi. Fizikalıq hám texnikalıq qollanıwları kóz-qarasınan integro-differenciallıq teńlemeler de úlken qızıǵıwshılıq tuwdıradı. Bunday teńlemeler kóp real proceslerdi súwretlew ushın qosımsha olardıń násillik qásiyetlerin (sońǵı tásirleri, proces jaǵdaylarınıń áwelgi tariyxın) esapqa alǵan jaǵdaylarda payda boladı [3,4].

Integro-differenciallıq teńlemelerdi úyreniwge kóp sandaǵı jumıslar baǵıshlanǵan [1-12, 20-23].

Bul jumıslarda integro-differenciallıq teńlemelerdiń ulıwmalıq máselelerin sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi, sheshimlerdiń ornıqlığı máselelerin úyreniwge, bunday teńlemelerdiń sheshimlerin tabıw usılların islep shıǵıwǵa kewil bólinbekte.

Ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasındaǵıday, integro-differenciallıq teńlemeler teoriyasında da baslanǵısh máseleler menen bir qatarda shegaralıq máselelerdi de úyreniwge tuwra keledi.

Ásirese, bunday máselelerdi sheshiw ushın islep shıǵılǵan ápiwayı differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń metodların integro-differenciallıq teńlemeler ushın ulıwmalastırıw máseleleri áhmiyetli bolıp esaplanadı.

Ápiwayı differenciallıq teńlemeler ushın periodlı hám periodlı bolmaǵan shegaralıq máselelerdi izertlewdiń nátiyjeli metodlarınıń biri akademik A.M. Samoylenko usınǵan hám tiykarlaǵan izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodı bolıp tabıladı.[17-19]

Bul sanlı-analitikalıq metod qarastırıp atırǵan shegaralıq máseleleriń sheshimin funkciyalardıń (izbe-iz jaqınlasıwlardıń) teń ólshewli jıynaqlı izbe-izligi túrinde tawıp ǵana qoymastan, sonıń menen birge bul izbe-izliktiń funkciyalarınan shıǵa otırıp, usı sheshimlerdiń bar bolıwı máselesin sheshiwge de mumkinshilik

beredi. Bul metod keshigiwge iye sızıqlı emes sistemalardı, integro-differenciallıq teńlemelerdiń hár qıylı klassların izertlewde keńnen qollanılmaqta [13-16].

Bul sanlı-analitikalıq metod jardeminde integro-differenciallıq teńlemeler sistemalarınıń ayırım klassları ushın eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlew maselelerine qollanıwǵa usı magistrlik dissertaciya jumısı da baǵıshlangan.

Izertlew obekti hám predmeti. Integro-differenciallıq teńlemeler hám olardıń sistemaları, eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máseleler.

Jumıstıń máqseti. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlewge izbe-iz jaqınlasıwlarıdıń sanlı-analitikalıq metodtı qollanıwdan ibarat.

Jumıstıń wazıypaları. Magistrlik dissertaciyanıń tiykarǵı wazıypaları tómendegilerden ibarat:

- eki toshkalı shegaralıq máseleler ushın sanlı-analitikalıq metodtı bayanlaw;
- ajıralǵan sızıqlı shegaralıq shártlerge iye integro-differenciallıq teńlemelerdi juwıq sheshiw;

- Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq máselelerdi úyreniw;

- Fredgolm tipindegi sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiwge sanlı-analitikalıq máselelerdi qollanıw.

Izertlewdiń ilimiy jańalıǵı: Volterra tipindegi integro-differenciallıq teńlemelerdiń sızıqlı emes sistemaları ushın ajıralǵan sızıqlı shártlerge iye shegaralıq máseleleri sheshiw algoritmi islep shıǵılǵan. Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın úsh toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiwge sanlı-analitikalıq metod sxemaları qollanılǵan hám bul sxemalar tiykarlangan.

Jumıstıń teoriyalıq hám praktikalıq bahalıǵı. Jumısta alınǵan tiykarǵı natıyjeler teoriyalıq áhmiyetke iye, olar integro-differenciallıq teńlemeler menen súwretlenetuǵın proceslerdi hám qubılıslardı izertlewde, ámeliy máselelerdi sheshiwde qollanıwı mumkin.

Jumistıń aprobaciyası. Jumistıń tiykarǵı nátiyjeleri Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universitetiniń “ Differenciallıq teńlemeler ” kafedrasınıń ilimiy seminarında dodalangán. Universitet magistrlarınıń ilimiy jumısları materialları toplamlarında (2019, 2020-jıllar), Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti Xabarshısınıń 2019-jıl №3 sanında, sonday— aq, 2019-jıldıń 4-5-oktyabrde Qarshi mámleketlik universitetinde bolıp ótken “ Tahlilning dolzarb muammolari va tatbiqlari ” konferenciyası materiallarında basılıp shıqtı [14,15,24,25].

Jumistıń qurılısı hám kólemi. Dissertaciya jumısı kirisiw bóliminen, úsh baptan, juwmaqlawdan hám paydalanılǵan adebiyatlar diziminen turadı. Dissertaciyanıń ulıwma kólemi 59 betten ibarat.

Jumistıń birinshi babı “ Integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máselelerdi sanlı-analitikalıq metod penen sheshiw” dep atalıp, bul bap 3 paragraftan turadı. 1-paragrafta integro-differenciallıq teńlemeler hám olar ushın shegaralıq máselelerdiń qoyılıwı bayanlanadı. 2-paragrafta integro-differenciallıq teńlemeler ushın ajıralǵan sızıqlı shegaralıq shártlerge iye eki toshkalı shegaralıq másele qaralıp, onı sheshiw ushın sanlı-analitikalıq metodın algoritmi qollanıladı. 3-paragrafta ajıralǵan shegaralıq shártlerge iye integro-differenciallıq teńlemeler sisteması qaraladı.

2-bab “Integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı máseleler ” dep atalıp, bul bap 2 paragraftan ibarat.

Bul bapta Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sisteması ushın úsh toshkalı ajıralǵan sızıqlı shegaralıq shártli máseleler sanlı-analitikalıq metod járdeminde sheshiledi.

Úshinshi bap “Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler ” dep atalıp, bul bap 2 paragraftan turadı.

1-paragrafta Fredgolm tipindegi sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq másele sanlı-analitikalıq metod járdeminde úyreniledi, al, 2-paragrafta alınǵan nátiyjeler konkret shegaralıq máseleni juwıq sheshiw ushın qollanıladı.

1-bap. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máselelerdi sanlı-analitikalıq metod penen sheshiw

Bul bapta integro-differenciallıq teńlemeler haqqında tiykarǵı túsinipler beriledi. Integro-differenciallıq teńlemelerdiń tiykarǵı eki túri- Fredgolm hám Volterra tipindegi teńlemeler anıqlanadı.

Bul baptıń birinshi paragrafında Fredgolmıń integro-differenciallıq teńlemeler sisteması ushın Koshi máselesi sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teorema keltiriledi. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdiń qoyılıwı bayanlanadı. Sonıń menen birge shegaralıq máselelerdi izertlewdiń A.M.Samoylenko usınǵan izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq usılı haqqında túsinipler beriledi.

Bul baptıń ekinshi paragrafında sanlı-analitikalıq metod Fredgolmıń integro-differenciallıq teńlemeleri ushın eki toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiw ushın qollanıladı, al úshinshi paragrafta ajralǵan shegaralıq shártlerge iye Volterra tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sanlı-analitikalıq metod járdeminde sheshiledi.

1-§. Integro-differenciallıq teńlemeler hám olar ushın shegaralıq máselelerdiń qoyılıwı

Integro-differenciallıq teńleme-dep belgisiz funkciya integral belgisi hám sonday-aq tuwındı belgisi astında qatnasqan teńlemege aytıladı. Integro-differenciallıq teńlemeler oǵada hár qıylı boladı. Belgisiz funkciyanıń tuwındısı integral belgisi astında da qatnasıwı mumkin. Integrallaw ulıwma aytqanda kóp ólshemli oblastta qaralatuǵın dara tuwındılı integro-differenciallıq teńlemeler de bolıwı múmkin.

Teńlemedegi integraldıń integrallanıw shegaralarına baylanıslı integro-differenciallıq teńlemeler de integrallıq teńlemeler sıyaqlı ekige bólinedi: a) eger de integrallaw shegaraları turaqlı bolsa, onda teńleme Fredgolm tipindegi teńleme dep ataladı; b) eger de integrallaw shegaraları (eń keminde birewi) ózgeriwshi bolsa, onda teńleme Volterra tipindegi teńleme delinedi.

Formal turde Volterra teńlemelerin Fredgolm teńlemeleriniń dara turi sıpatında qaraw mumkin. Biraq ta, Volterra hám Fredgolm teńlemelerine alıp kelinetuǵın fizikalıq máseleler hám sonday-aq, bul teńlemelerdiń sheshimleriniń qásiyetleri eskereulik túrde hár qıylı. Sonlıqtan Volterra teńlemelerin óz aldına ayrıqsha tipke ajratadı.

Biz dáslep Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sistemasın qarayıq:

$$\frac{dx}{dt} = f_i \left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \int_a^T \varphi_1(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds, \dots \right. \\ \left. \dots \int_a^T \varphi_p(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds \right) \\ i = 1, 2, \dots, n, 1 \leq p \leq n$$

yamasa vektorlıq formada

$$\frac{dx}{dt} = f \left(t, x, \int_a^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) \quad (1)$$

bunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$

bul jerde $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_p)$ hám $\varphi_l(t, s, x_1, \dots, x_n)$ ózleriniń argumentleriniń berilgen funkciyaları. a – bazı bir fikserlengen san.

(1) sistemaniń $I = [a; b)$ intervaldaǵı sheshimi dep, usı sistemaniń hár bir teńlemesin birdeylikke aylandıratuǵın úzliksiz differenciayallanıwshı hár qanday $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ funkciyalar jıynaǵına ayıladı.

Bul (1) sistemada belgisiz funkciyalardıń tuwındıları qatnasqanlıqtan mına

$$x_i(a) = x_i^0 \quad (2)$$

baslanǵısh shártlerdiń beriliwi talap etiledi. (1) teńlemeler sistemasınıń (2) baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi Koshi máselesi delinedi. $p=1, n=1$ bolǵan jaǵdayda (1), (2) Koshi máselesin qaraymız. $p \neq 1, n \neq 1$ bolǵan jaǵdayda bul máseleni izertlew qıyınshılıq tuwdırmaıdı.

Solay etip,

$$\frac{dx}{dt} = f \left(t, x(t), \int_{t_0}^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) \quad (3)$$

$$x(t_0) = x^0$$

skalyar túrindegi Koshi máselesin qaraymız.

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

1-teorema. Meyli $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ funkciyalari

$\mathbb{R} = \{t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x^0| \leq b, t_0 \leq s \leq t, |y| \leq \bar{\varphi}a\}$ oblastta (bunda $\bar{\varphi} \geq |\varphi|$) úzliksiz hám f funkciya x hám y boyınsha, al φ funkciyası x boyınsha Lipshic shártin qanaatlandıratuđın bolsın, yađnıy sáykes túrde $(t, \bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$, $(t, \bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$ hám $(t, s, \bar{x}) \in \mathbb{R}$, $(t, s, \bar{x}) \in \mathbb{R}$ toshkalar jupları ushın

$$\left| f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq L_1 |\bar{x} - \bar{x}| + L_2 |\bar{y} - \bar{y}|$$

$$\left| \varphi(t, s, \bar{x}) - \varphi(t, s, \bar{x}) \right| \leq L_3 |\bar{x} - \bar{x}|$$

teńsizlikleri orınlanatuđın bolsın, bunda L_1, L_2 hám L_3 oń turaqlılar.

Sonda $0 \leq t - t_0 \leq h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ bolğanda, (3) Koshi máselesi birden-bir

sheshimge iye boladı, bunda $M > 0$ turaqlısı

$$|f(t, x, y)| \leq M$$

teńsizligin qanaatlandıradı.

Dalillew. Berilgen (3) Koshi máselesinen ođan teń kushli bolğan

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f \left(\tau, x(\tau), \int_{t_0}^{\tau} \varphi(\tau, s, x(s)) ds \right) d\tau \quad (4)$$

integrallıq teńlemege ótemiz hám tómendegi jaqınlasıwlar izbe-izligin dúzemiz:

$$x_0(t) = x^0$$

$$x_m(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f \left(\tau, x_{m-1}(\tau), \int_{t_0}^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s)) ds \right) d\tau \quad (5)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

indukciya metodi menen $x_m(t)$ funkciyalardıń uzliksizligin hám

$$|x_m(t) - x^0| \leq b \quad (6)$$

teńsizligin barlıq $m = 1, 2, 3, \dots$ ushın dalillew qıyın emes.

Endi $x_{m+1}(t) - x_m(t)$ ayırmasın dúzip onı bahalaymız:

$$\begin{aligned} & |x_{m+1}(t) - x_m(t)| = \\ & = \left| \int_{t_0}^t \left[f \left(\tau, x_m(\tau), \int_{t_0}^T \varphi(\tau, s, y_m(s)) ds \right) - f \left(\tau, x_{m-1}(\tau), \int_{t_0}^T \varphi(\tau, s, y_{m-1}(s)) ds \right) \right] d\tau \right| \leq \\ & \leq \int_{t_0}^t \left\{ L_1 |x_m(\tau) - x_{m-1}(\tau)| + L_2 \int_{t_0}^T |\varphi(\tau, s, x_m(s)) - \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s))| ds \right\} d\tau \leq \\ & \leq \int_{t_0}^t \left\{ L_1 |x_m(\tau) - x_{m-1}(\tau)| + L_2 L_3 \int_{t_0}^T |x_m(s) - x_{m-1}(s)| ds \right\} d\tau \quad (7) \end{aligned}$$

Al, (7) qatnasınan $m = 0$ bolǵanda

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq M(t - t_0), \quad t \geq t_0$$

kelip shıǵadı. Meyli $m \geq 1$ ushın

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq ML^{m-1} \frac{(t - t_0)^m}{m!} \quad (8)$$

teńsizligi orınlanatuǵın bolsın, bunda $L = L_1 + L_2 L_3 \cdot a$ sonda (7) qatnasınan tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned}
 |x_{m+1}(t) - x_m(t)| &\leq \int_{t_0}^t \left\{ L_1 M L^{m-1} \frac{(\tau - t_0)^m}{m!} + L_2 L_3 \int_{t_0}^T M L^{m-1} \frac{(s - t_0)^m}{m!} ds \right\} d\tau = \\
 &= L_1 M L^{m-1} \frac{(t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!} + M L_2 L_3 L^{m-1} \frac{(t - t_0)^{m+2}}{(m+2)!} \leq M L^{m-1} \frac{(t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!} (L_1 + L_2 L_3 a) = \\
 &= M L^m \frac{(t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!}
 \end{aligned}$$

yaǵnıy (8) bahalawı bir birlik ulken nomer ushın orınlı.

Solay etip, (8) teńsizlik qálegen m nushın orınlı, bunnan aǵzaları $x_m(t) - x_{m-1}(t)$ bolǵan qatardıń teń olshewli jıyınalılıǵı kelip shıǵadı hám $x_m(t)$ izbe-izliktiń de $t - t_0 \leq h$ bolǵanda, bazıbir $x(t)$ uzliksiz funkciyaǵa teń olshewli jıyınalılıǵı kelip shıǵadı, sebebi

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^m (x_k(t) - x_{k-1}(t)) + x^0$$

Al, $m \rightarrow \infty$ bolǵanda (5) teńlikte shekke ótiw (4) qatnasın beredi.

Bunnan $x(t)$ funkciyanıń differenciyanıwshılıǵı hám (3) teńlemenıń birdeylikke aylanıwı kelip shıǵadı.

Sheshimniń birden-birligin dásturiy usıllardıń biri menen máselen qarama-qarsıdan jorıw usılı menen dálillewge boladı.

(2) baslanǵısh shártler (1) teńlemeler sistemasınıń dara sheshimin tańlap alıwdıń birden-bir shártleri emes. Kóp ámeliy máselelerde qosımsha shártler sıpatında ǵárezsiz ózgeriwshiniń eki yamasa bir neshe belgilengen mánislerindegi

belgisiz funkciyanıń hám onıń tuwındılarınıń mánislerin baylanıstıratuǵın qosımsha shártler qarastırıladı. Bunday shártler shegaralıq shártler dep ataladı.

Al, (1) teńlemeler sistemasınıń berilgen shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi shegaralıq másele delinedi.

Shegaralıq shártler másele jaǵdayınan shıǵa otırıp hár qıylı bolıwı múmkin. Usıǵan baylanıslı shegaralıq máselelerde hár qıylı boladı.

Shegaralıq máselelerdiń ayırım túrlerin qarayıq:

Vektorlıq túrdegi (1) teńlemeler sistemasınıń mına

$$g(x(0), x(T)) = 0 \quad (9)$$

sızıqlı emes shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi eki toshkalı sızıqlı emes shegaralıq másele dep atalaadı. Al, mına

$$Ax(0) + Cx(T) = d \quad (10)$$

sızıqlı shegaralıq shártke iye másele eki toshkalı ajıralmaǵıan sızıqlı shegaralıq shártlerge iye másele boladı, bunda $A, C - n \times n$ ólshemli berilgen turaqlı matricalar. $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ – berilgen turaqlı vektor.

Al, mına

$$\begin{aligned} x_i(0) &= d_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, q \\ x_j(T) &= d_j, \quad j = q + 1, q + 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

shártlerge iye másele ajıratılaǵan shegaralıq shártlerge iye shegaralıq másele delinedi.

(1) teńlemeler sistemasınıń

$$\sum_{i=0}^p B_i x(t_i) = d, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T \quad (12)$$

qosımsha shártlerdi qanaatlandıratuđın sheshimdi tabıw máselesi sızıqlı shegaralıq shártlerge iye kóp toshkalı shegaralıq másele dep ataladı., bunda B_i , $i = \overline{1, p}$ berilgen $n \times n$ ólshemli turaqlı matricalar, d – bul n ólshemli vektor.

Joqarıda keltirilgen shegaralıq máseleler Volterra tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın da usılarǵa uqsas qoyıladı.

Ulıwma aytqanda, differenciallıq teńlemeler sıyaqlı integro-differenciallıq teńlemeler de kvadraturalarda integrallana bermeytuđın bolǵanlıqtan shegaralıq máseleler de sheshile bermeydi. Sonıń ushın da shegaralıq máselelerdi sheshiw ushın hár qıylı juwıq sheshiw usılları islep shıǵılǵan [1-12]. Usınday nátiyjeli metodlardıń biri A.M.Samoylenkonıń izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodı [17-19] bolıp tabıladı.

Biz bul jumısımızda usı metod járdeminde integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın shegaralıq máselelerdi úyrenemiz. Dáslep biz bul metodtıń algoritimin integro-differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan eki toshkalı shegaralıq máselelerdi izertlew arqalı qarastıramız.

Ótken ásirdeń 60-jıllarında sızıqlı emes mexanika boyınsha Kiev ilimiy mektebinıń alımları sızıqlı emes terbelisler teoriyası problemalarına úlken dıqqat awdarǵan edi. Usı izertlewler sheńberinde 1965-1966- jılları A.M. Samoylenko tárepinen

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad f(t, x) = f(t+T, x) \quad (13)$$

$$x(0) = x(T)$$

kórinisindegi ápiwayı differenciallıq teńlemelerdiń sıızıqlı emes periodlı sistemaların T – periodlı sheshimlerin anıqlawdıń hám olardı izertlewdiń metodı usınılǵan edi.

A.M.Samoylenko óz jumıslarında [17] bul metodtı “ periodlı sheshimlerde izertlewdiń sanlı analitikalıq metodı” dep atadı. Keyin bul metod kóp matematiklerdiń jumıslarında “izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı analitikalıq metodı”, “A.M.Samoylenkonıń sanlı analitikalıq metodı ” dep te ataldı. Samoylenko metodınıń algoritimi

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(s, x(s, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, x_0)) ds \right] ds \quad (14)$$

integrallıq teńleme ni uyreniw menen baylanıslı. Onıń hár bir $x(t, x_0)$ sheshimi T – periodlı funkciya boladı: $x(0, x_0) = x(T, x_0)$ hám eger

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, x_0)) ds = 0 \quad (15)$$

bolsa, onda $x(t, x_0)$ funkciyası (13) teńleme niń T – periodlı sheshimi boladı. Keri tastıyqlaw da orınlı. Solay etip, bul metod eki tiykarǵı basqıstıan ibarat: “analitikalıq” bólegi- bul (14) teńleme izbe-iz jaqınlasıwlar metodı menen sheshiliwi hám “sanlıq” bólegi bul (15) transcendent teńleme niń sanlı metod járdeminde sheshiliwi boladı.

Ápiwayı differenciallıq teńlemelerdiń periodlı sheshimlerin izertlewge arnalǵan bul metod keyin ala A.M.Samoylenko hám onıń shákirtleri tárepinen, sonday-aq, basqa da kóp matematikler tárepinen differenciallıq teńlemelerdiń hár qıylı klasları ushın, keshikpeli argumentli differenciallıq teńlemeler, integro-differenciallıq teńlemeler, dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler , impulsqa iye differenciallıq teńlemeler, differenciallıq operatorlıq teńlemeler ushın ulıwmalastırıldı.[13]

Házirgi waqıtta bul sanlı-analitikalıq metod shegaralıq máseleler teoriyasında da nátiyjeli turde qollanılmaqta,

Biz Samoylenkonıń sanlı-analitikalıq metodın integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı shegaralıq máseleni juwıq turde sheshiwge qollanıw máselesin qaraymız.

2-§. Eki toshkalı shegaralıq máseleler ushın sanlı-analitikalıq metod

Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın ajıralmağan sızıqlı

shegaralıq shártlerge iye

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds\right) \quad (1)$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d, \quad \det(k_1A + k_2C) \neq 0 \quad (2)$$

eki toshkalıq shegaralıq máseleni qaraymız, bunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n – ólshemli vektor, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ hám $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ n – ólshemli vektor funkciyalar, A, C – $n \times n$ ólshemli turaqlı matricalar bolıp, olar bazıbir k_1 hám k_2 sanları ushın $\det(k_1A + k_2C) \neq 0$ shártin qanaatlandıradı. $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ n – ólshemli turaqlı vektor.

Meyli $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ funkciyaları

$$(t, s, x, y) \in [0; T] \times [0; T] \times D \times D_1 \quad (3)$$

oblastta anıqlanğan hám úzliksiz bolsın., bunda D hám $D_1 - E_n$ keńisliginiń, tuyıq shegaralanğan oblastları.

Sonıń menen birge, $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ funkciyaları tómendegi shórtlerdi qanaatlandıradı :

Barlıq $(t, x, y), (t, x', y'), (t, x'', y'') \in [0; T] \times D \times D_1$ hám $(t, s, x'), (t, s, x'') \in [0, T] \times [0, T] \times D$ ushın

$$|f(t, x, y)| \leq M$$

$$|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| \leq K_1 |x' - x''| + K_2 |y' - y''|,$$

$$|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')| \leq K_3 |x' - x''| \quad (4)$$

teńsizlikleri orınlı, bunda $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$, $M_i \geq 0$, $K_l = \{K_{ij}^l \geq 0\}$, $i, j = \overline{1, n}$, $l = 1, 2, 3$ hám vektorlar arasındagı teńsizlikler koordinatalar boyınsha tusiniledi:

$$|f| = (|f_1|, |f_2|, \dots, |f_n|).$$

Usı shártler menen birge tómendegi qosımsha shártlerde birge orınlansın:

A) Mına $z_0(x_0) = x_0 + k_1(k_1A + k_2C)^{-1} [d - (A + C)x_0]$ toshkalardıń óziniń β dógeregi menen birge D oblastına tiyisli bolǵan D_β koplighi bos emes kóplik bolsın:

$$D_\beta \neq \emptyset \quad (5)$$

Bunda $\beta = \frac{T}{2}M + \beta_1(x_0)$, $\beta_1(x_0) = |(k_2 - k_1)(k_1A + k_1C)^{-1}| |d - (A + C)x_0|$

B) $Q = \frac{T}{2}(K_1 + TK_2K_3)$ matricasınıń eń ulken $\lambda(Q)$ menshikli mánisi

birden asıp ketpeydi

$$\lambda(Q) < 1 \quad (6)$$

Usı shártlerde (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın hám (1), (2) shegaralıq másele sheshimine teń ólshewli jıynaqlı bolatuǵın $x_m(t, x_0)$ funkciyalar izbe-izligin dúzemiz. Bunıń ushın

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f_{m-1}(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T f_{m-1}(s) ds \right] d\tau + \alpha [k_1 T + (k_2 - k_1)t] \quad (7)$$

$$x_0(t, x_0) = x_0 + \alpha k_1 T$$

funkciyalar izbe-izligin qaraymız, bunda x_0 hám $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ parametrler,

$$f_{m-1}(\tau) = f(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0)), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \text{ bundaǵı } \alpha \text{ parametrin} \quad (7)$$

funkciyaları $x_0 \in D_\beta$ parametriniń qálegen mánislerinde barlıq $m = 1, 2, \dots$ (2)

shegaralıq shártlerdi, qanaatlandıratuǵında etip saylap alamız.

(7) ańlatpaların (2) shártlerge qoyıp α ge qarata sızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasın alamız:

$$T(k_1 A + k_2 C)\alpha = d - (A + C)x_0$$

Bunnan

$$\alpha = \frac{1}{T}(k_1 A + k_2 C)^{-1} [d - (A + C)x_0]$$

Sonlıqtan

$$x_m(t, x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0) + \int_0^t \left[f \left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) d\tau \right] dt + \frac{t}{T} (k_2 - k_1) H d(x_0),$$

$$m = 1, 2, \dots;$$

$$x_0(t, x_0) = x_0 + k_1 Hd(x_0) = z_0(x_0) \quad (8)$$

funkciyalar izbe-izliginiń barlıq aǵzaları x_0 ıqtıyarlı bolǵanda (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı., bunda

$$H = (k_1 A + k_2 C)^{-1}; \quad d(x_0) = d - (A + C)x_0$$

Bul (8) qatnasları menen anıqlanatuǵın $x_m(t, x_0)$ funkciyalar izbe-izliginiń jıynaqlılıǵı haqqındaǵı tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

2-teorema. Meyli (1) integro-differenciallıq teńlemeler sistemasınıń $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ funkciyaları (3) oblastta anıqlanǵan úzliksiz hám (4)-(6) shártleri orınlansın. Sonda (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın (8) qatnası menen anıqlanǵan $x_m(t, x_0)$ funkciyalar izbe-izligi $m \rightarrow \infty$ da $(t, z_0) \in [0, T] \times D_\beta$ oblastına qarata $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciyaǵa teń ólshewli jıynaqlı boladı. Sonıń menen $x^*(t, x_0)$ funkciyası

$$x(t) = x_0 + k_1 Hd(x_0) + \quad (9)$$

$$+ \int_0^t \left[f \left(\tau, x(\tau), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s)) ds \right) - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x(\tau), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s)) ds \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} (k_2 - k_1) Hd(x_0) \right] d\tau$$

integrallıq teńlemeniniń $t=0$ bolǵanda $x^*(0, x_0) = x_0 + k_1 Hd(x_0)$ toshkası arqalı ótetuǵın sheshimi boladı hám $x^*(t, x_0)$ funkciya (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı, yaǵnıy

$$\frac{dx(t)}{dt} = f \left(t, x(t), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s)) ds \right) + \Delta(x_0)$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d \quad (10)$$

shegaralıq máseleniń sheshimi boladı, bunda

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}(k_2 - k_1)Hd(x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) dt \quad (11)$$

Al, $x^*(t, x_0)$ dıń $x_m(t, x_0)$ den awısıwı ushın barlıq $m = 1, 2, \dots$ ushın

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \alpha_1(t)W(x_0), \quad m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

bahalawı orınlı, bunda

$$W(x_0) = Q^m (E - Q)^{-1} \cdot \beta(x_0), \quad (13)$$

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı

3-teorema. Meyli (1) sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler sisteması1)-3) shártlerdi qanaatlandırsın. Eger $x = x(t)$ funkciyası (1) teńlemeler sistemasınıń $t = 0$ bolǵanda $x = x_0$ toshkası arqalı ótiwshi sheshimi bolsa, onda $t \in [0, T]$, $x_0 \in D_0$ ge qarata teń ólshewli turde

$$x(t) = x^*(t, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0) \quad (14)$$

qatnası orınlı hám

$$|x(t) - x_m(t, x_0)| \leq Q^m (E - Q)^{-1} \quad (15)$$

bahalawı barlıq $t \in [0, T]$ ushın hám $m = 0, 1, 2, \dots$ ushın orınlı, bunda $x_m(t, x_0)$ funkciyaları (5) qatnası menen anıqlanadı.

3-§. Ajralğan shegaralıq shártlerge iye integro-differenciallıq teńlemelerdi juwıq sheshiw

Bul paragrafta izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodi ajralğan shegaralıq shártlerge iye Volterra tipindegi differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi juwıq turde sheshiwge qollanıladı.

Meyli

$$\frac{dx}{dt} = f \left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds \right) \quad (1)$$

integro-differenciallıq teńlemesi

$$\begin{aligned} x_i(0) &= d_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \\ x_j(T) &= d_j, \quad j = q + 1, q + 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

ajralğan shegaralıq shártlerde berilsin, bunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n ólshemli vektor, $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ – n ólshemli vektor-funkciyalar $[0; T]$ aralıǵınan alınğan barlıq funkciyalar $[0, T]$ aralıǵınan alınğan barlıq t, s ushın hám $x \in D \subset E_n$, $y \in D_1 \subset E_n$ ushın anıqlanğan hám úzliksiz, bunda E_n – n ólshemli Evklid keńisligi, D hám D_1 – tuyıq shegaralanğan oblastlar. Bunda (2) shegaralıq shártler izlengen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektordıń dáslepki q komponenti (duziwshi) ushın integrallaw kesindisiniń sol ushında, al qalğan $n - q$ komponent usı kesindiniń oń ushında berilgen.

Meyli $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ vektor-funkciyaları anıqlanıw oblastında shegaralanğanlıq hám Lipschic shártlerin qanaatlandırınsın, yaǵnıy barlıq (t, x, y) , $(t, x', y') \in [0, T] \times D \times D_1$, $(t, s, x), (t, s, x') \in [0, T] \times [0, T] \times D$ ushın

$$|f(t, x, y)| \leq M(t)$$

$$|f(t, x, y) - f(t, x', y')| \leq K_1(t)|x - x'| + K_2(t)|y - y'| \quad (3)$$

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x')| \leq \mu(t, s)|x - x'|$$

teńsizlikleri orınlansın, bunda $M(t)$ -teris emes komponentlerge iye úzliksiz vektor-funkciya, $K_1(t), K_2(t)$ hám $\mu(t, s)$ matricaları teris emes elementlerge iye úzliksiz matricalar. Bul jerde $|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ belgilewi kirgizilsin hám vektorlar arasındaǵı teńsizlik komponentler boyınsha tusiniledi.

D_β arqalı

$$x_0(t, x_0, x_T) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) d(x_0) + \frac{t}{T} d(x_T)$$

vektor-funkciyası óziniń β – dógerigi menen D oblastında jatatuǵın keńisliktegi $d(x_0)$ hám $d(x_T)$ toshkalar kópligin belgileymiz, bunda $x_0 = x(0), x_T = x(T)$

$$d(x_0) = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_q \\ x_{q+1}(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{pmatrix}, \quad d(x_T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ \dots \\ d_{q+1} \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\beta = \max_{t \in [0, T]} \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t M(\tau) d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T M(\tau) d\tau \right]$$

Sonıń menen birge, D_β kópligi bos emes kóplik dep uygaramız:

$$D_\beta \neq \emptyset \quad (5)$$

hám Q matricasınıń eń úlken menshikli mánisi $\lambda_{\max}(Q)$ birden kishi

$$\lambda_{\max}(Q) < 1 \quad (6)$$

bolsın, bunda

$$Q = \max_{t \in [0, T]} \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^T K(\tau) d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T K(\tau) d\tau \right] \quad (7)$$

$$K(t) = K_1(t) + K_2(t) \int_0^t \mu(t, s) ds$$

usı jaǵdaylarda tómendegi funkciyalar izbe-izligin dúzemiz:

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t, x_0, x_T) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) d(x_0) + \frac{t}{T} d(x_T) + \\ &+ \int_0^t \left[f\left(\tau, x_m(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(\tau, x_0, x_T)) ds\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x_m(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0, x_T)) ds\right) d\tau \right] d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_0(t, x_0, x_T) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) d(x_0) + \frac{t}{T} d(x_T)$$

bul (8) qatnası menen anıqlanǵan izbe-izliktiń hár bir funkciyası (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı.

Usı (8) funkciyalar izbe-izliginiń $m \rightarrow \infty$ da teń ólshewli jıyınalıǵın támiyinleytuǵın tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

4-teorema. Meyli (1) teńlemeler sistemasınıń oń jaǵı hám (2) shegaralıq shártler ushın $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$, $x \in D$, $y \in D_1$ oblastta (3), (5) (6) shártleri

orinlansın. Sonda (8) izbe-izliktiń barlıq funkciyaları (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı hám $m \rightarrow \infty$ da $x_m(t, x_0, x_T)$ funkciyalar izbe-izligi $x^*(t, x_0, x_T)$ funkciyasına teń ólshewli jıynaqlı boladı, bul sheklik funksiya (2) shegaralıq shártlerdi hám

$$\begin{aligned}
 x(t, x_0, x_T) = & \left(1 - \frac{t}{T}\right) d(x_0) + \frac{t}{T} d(x_T) + \\
 & + \int_0^t \left[f\left(\tau, x(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(\tau, x_0, x_T)) ds\right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s, x_0, x_T)) ds\right) d\tau \right] d\tau
 \end{aligned} \tag{9}$$

integrallıq teńlemesin qanaatlandıradı.

Dalillew. Tikkeley tekserip kóriw arqalı (8) izbe-izliktiń hár bir funkciyası (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵının kóriwge boladı. $m=0$ bolǵanda (8)

qatnasınan

$$\begin{aligned}
 |x_1(t, x_0, x_T) - x_0(t, x_0, x_T)| \leq & \left| \int_0^t \left[f\left(\tau, x_0(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_0(s, x_0, x_T)) ds\right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x_0(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_0(s, x_0, x_T)) ds\right) d\tau \right] d\tau \right|
 \end{aligned}$$

teńsizligin alamız, bunnan 2.1-lemma [] boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$|x_1(t, x_0, x_T) - x_0(t, x_0, x_T)| \leq \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left| f\left(\tau, x_0(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_0(s, x_0, x_T)) ds\right) \right| d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{t}{T} \int_t^T \left| f \left(\tau, x_0(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_0(s, x_0, x_T)) ds \right) \right| d\tau \leq \\
& \leq \left(1 - \frac{t}{T} \right) \int_0^t m(\tau) d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T m(\tau) d\tau \leq \beta
\end{aligned}$$

yaǵnıy

$$|x_1(t, x_0, x_T) - x_0(t, x_0, x_T)| \leq \beta \quad (10)$$

bunnan $x_0, x_T \in D_\beta$ bolǵanda $x_1(t, x_0, x_T) \in D$ ekeni kelip shıǵadı .

Indukciya boyınsha barlıq $t \in [0, T]$ hám hár bir $x_0, x_T \in D_\beta$ ushın $x_m(t, x_0, x_T)$, $m = 1, 2, \dots$ funkciyalarınıń barlıǵı D oblastınan shıǵıp ketpeytuǵını haqqında juwmaq shıǵarıwǵa boladı.

(8) qatnasınan 2.1-lemma [19] hám (3) teńsizliklerden tómendegi bahalawdı alamız:

$$\begin{aligned}
& |x_{m+1}(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)| \leq \\
& \leq \left(1 - \frac{t}{T} \right) \int_0^t \left[K_1(\tau) |x_m(\tau, x_0, x_T) - x_{m-1}(\tau, x_0, x_T)| d\tau + \right. \\
& \left. + K_2(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s) |x_m(s, x_0, x_T) - x_{m-1}(s, x_0, x_T)| ds \right] d\tau + \quad (11) \\
& + \frac{t}{T} \int_t^T \left[K_1(\tau) |x_m(\tau, x_0, x_T) - x_{m-1}(\tau, x_0, x_T)| d\tau + \right. \\
& \left. + K_2(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s) |x_m(s, x_0, x_T) - x_{m-1}(s, x_0, x_T)| ds \right] d\tau .
\end{aligned}$$

(10) bahalawdı esapqa alıp (11) teńsizlikten $m = 1$ bolǵanda

$$|x_2(t, x_0, x_T) - x_1(t, x_0, x_T)| \leq \left\{ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left[K_1(\tau) + K_2(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s) ds \right] d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T \left[K_1(\tau) + K_2(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s) ds \right] d\tau \right\} \beta \leq Q\beta,$$

teńsizligin alamız, bunda Q – bul (7) de anıqlanǵan matrica, al β – bul (4) de anıqlanǵan vektor-funkciya.

Matematikalıq indukciya metodu tiykarında barlıq $t \in [0, T]$ hám $m = 0, 1, 2, \dots$ ushın

$$|x_{m+1}(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)| \leq Q^m \beta \quad (12)$$

teńsizligin alamız.

Bul sońǵı (12) teńsizlikti esapqa alıp,

$$\begin{aligned} |x_{m+j}(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)| &= \left| (x_{m+j}(t, x_0, x_T) - x_{m+j-1}(t, x_0, x_T)) + \right. \\ &\left. + (x_{m+j-1}(t, x_0, x_T) - x_{m+j-2}(t, x_0, x_T)) + \dots + (x_{m+1}(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)) \right| \end{aligned}$$

qatnasınan

$$|x_{m+j}(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)| \leq \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \beta \quad (13)$$

bahalawdı alamız.

(6) shártti esapqa alsaq, onda

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \leq Q^m \sum_{i=0}^{\infty} Q^i = Q^m (E - Q)^{-1},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0 \quad (14)$$

qatnasların alamız. Sonda (13) (14) qatnasları tiykarında $m \rightarrow \infty$ da $x_m(t, x_0, x_T)$ funkciyalar izbe-izliginiń teń ólshewli turde $x^*(t, x_0, x_T)$ funkciyasına jıynaqlı bolatuǵını kelip shıǵadı:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0, x_T) = x^*(t, x_0, x_T) \quad (*)$$

Al, $x_m(t, x_0, x_T)$, $m = 1, 2, \dots$ funkciyaları (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandırǵanlıqtan $x^*(t, x_0, x_T)$ sheklik funkciya da usı shártlerdi qanaatlandıradı.

Sonıń menen birge $x^*(t, x_0, x_T)$ sheklik funkciyanıń $x_m(t, x_0, x_T)$ dan awısıwı ushın

$$|x^*(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)| \leq Q^m (E - Q)^{-1} \beta \quad (15)$$

bahalawı kelip shıǵadı.

Eger (8) teńlikte $m \rightarrow \infty$ da shekke ótsek hám (*) qatnasın esapqa alsaq, onda $x^*(t, x_0, x_T)$ funkciyanıń (9) integrallıq teńleme sheshimi bolatuǵının kóriwge boladı, al bul teoremanı dalilleydi.

Dallilengen teorema tiykarında (1), (2) shegaralıq máseleni sheshiw problemesi mına

$$\Delta(x_0, x_T) = \frac{1}{T} [d(x_T) - d(x_0)] - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x^*(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0, x_T)) ds \right) d\tau$$

anıqlawshı vektor funkciyanı nólge aynaldıratuǵın, yaǵnıy

$$\Delta(x_0, x_T) = 0$$

bolatuǵın $(x_0, x_T) = (x_1(T), \dots, x_q(T), x_{q+1}(0), \dots, x_n(0))$ baslanǵısh

mánislerin tabıwǵa alıp kelinedi.

Solay etip, tómenđegi tastıyıqlaw orınlı

5-teorema. (1) teńlemeler sistemasınıń $t = 0$ bolǵanda $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0q}, x_{0q+1}, \dots, x_{0n}) \in D_\beta$ toshkası arqalı ótetuǵın $x = x^*(t)$ sheshimi sonǵa hám tek sonǵa ǵana (1), (2) shegaralıq máseleniń sheshimi boladı, egerde (16) vektor-funkciya nólge aynalsa. Sonıń menen birge, bul jaǵdayda $x^*(t) = x^*(t, x_0, x_T)$ bunda $x^*(t, x_0, x_T)$ – bul (8) funkciyalar izbe-izliginiń shegi, al $x_m(t, x_0, x_T)$ sheshiminiń $x^*(t, x_0, x_T)$ dál sheshiminen ayırması ushın (15) bahalawı orınlı.

Anıqlawshı funkciya $\Delta(x_0, x_T)$ nıń nolleri haqqındaǵı máseleni, demek, (1) (2) shegaralıq máselesiniń sheshimi haqqındaǵı máseleni

$$\Delta_m(x_0, x_T) = \frac{1}{T} [d(x_T) - d(x_0)] - \quad (17)$$

$$-\frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x_m(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0, x_T)) ds \right) d\tau$$

túrindegi juwıq anıqlawshı funkciya nólleri boyınsha sheshiwge boladı. Bunda tómenđegi teńsizlik paydalanıladı:

$$\begin{aligned} |\Delta(x_0, x_T) - \Delta_m(x_0, x_T)| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \left| f \left(\tau, x^*(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0, x_T)) ds \right) - \right. \\ &\left. - f \left(\tau, x_m(\tau, x_0, x_T), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0, x_T)) ds \right) \right| d\tau \leq \frac{1}{T} \int_0^T \left[K_1(\tau) |x^*(\tau, x_0, x_T) - \right. \\ &\left. - x_m(\tau, x_0, x_T)| + K_2(\tau) \int_0^\tau \mu(t, s) |x^*(s, x_0, x_T) - x_m(s, x_0, x_T)| ds \right] d\tau \leq \\ &\leq Q^m (E - Q)^{-1} \beta \cdot \int_0^T \left[K_1(\tau) + K_2(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s) ds \right] d\tau \leq Q^m (E - Q)^{-1} \beta \cdot K_0 \end{aligned}$$

bunda

$$K_0 = \max_{t \in [0, T]} K(t).$$

Tómendegi tastiyıqlaw orinli .

6-teorema. Meyli (1),(2) shegaralıq másele ushın 1-teorema shártleri orınlansın hám sonıń menen birge, tómendegi shártlerde orınlansın:

1) sonday dónes, tuyıq $D_2 \subset D_\beta$ oblastı bar bolıp, belgili bir $m \geq 1$ ushın (17) juwıq anıqlawshı funkciya D_2 oblastta nollik emes indekske iye $x_0 = x_{0m}$ birden-bir nolge iye bolsın $\Delta_m(x_{0m}) = 0$;

2) D_2 oblasttıń Γ_2 shegarasında

$$\inf_{x_0 \in \Gamma_2} |\Delta_m(x_0)| > Q^m (E - Q)^{-1} \beta K_0$$

teńsizligi orınlansın.

Sonda (1),(2) shegaralıq másele $x = x^*(t)$ sheshimge iye boladı, onıń ushın $x^*(0) = x_0^*$ baslanğısh mánis bazi-bir $x_0 = x_0^* \in D_2$ toshka menen anıqlanadı.

1-bap boyınsha juwmaqlar

Bul bapta integro-differenciallıq teńlemeler hám olar ushın shegaralıq máselelerdiń qoyılıwı bayanlandı, integro-differenciallıq teńlemeler ushın eki toshkalı sızıqlı shegaralıq shártlerge iye shegaralıq máselelerdi sheshiw ushın, sonday-aq ajiralğan shegaralıq shártlerge iye Volterra tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın izbe-iz jaqınlasıwlarıń sanlı-analitikalıq usılı qollanıldı.

2-bap. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq máseleler

Bul bapta Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq máseleler qarastırıladi.

Bul bap 2 paragraftan ibarat bolıp, onıń birinshi paragrafında integro-differenciallıq teńlemelerdiń bir klası ushın ajıralmağan sızıqlı shártlerge iye máseleler úyreniledi, al ekinshi paragrafta ulıwma túrdegi Fredgolm tipindegi sızıqlı emes integro-differenciallıq teńlemeler ushın sızıqlı shegaralıq shártlerge iye shegaralıq máselelerdi sheshiw ushın izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodınıń sxeması keltiriledi hám bul algoritm tiykarlanadı.

1-§. Fredgolm tipindeki integro-differenciallıq teńlemelerdiń bir klası ushın úsh toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiw

Kóp mexanikalıq, fizikalıq máseleler integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiwge alıp klinedi.

Biz bul jumista Fredgolm tipindeki integro-differenciallıq teńlemeler sisteması ushın úsh toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiwge A.M.Samoylenkonıń izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodın [19] qollanamız.

Meyli

$$\dot{x} = F(t, x) + \int_0^T \Phi(t, s, x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

kórinisindegi Fredgolm tipindeki integro-differenciallıq teńlemeler sistemasınıń

$$Ax(0) + A_1 x(t_1) + Cx(T) = d \quad (2)$$

ajıralmağan sızıqlı shegaralıq shártti qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw talap etilsin, bunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n ólshemli vektor, $F(t, x) = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ hám $\Phi(t, s, x) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ – n ólshemli vektor funkciyalar, $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ – n ólshemli turaqlı vektor, A, A_1, C – $(n \times n)$ ólshemli turaqlı matricalar, sonıń menen birge, A_1, C matricaları $\det(t_1 A_1 + TC) \neq 0$ shártin qanaatlandıratuǵın bolsın.

Meyli $F(t, x)$ hám $\Phi(t, s, x)$ vektor funkciyalar $(t, s, x) \in [0, T] \times [0, T] \times D$, $D \subset E_n$ oblastta anıqlangan hám úzliksiz bolıp, tómenдеgi shártlerdi qanaatlandırısın:

1) barlıq $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$, $x, x', x'' \in D$ ushın

$$|F(t, x)| \leq M, \quad |\Phi(t, s, x)| \leq N,$$

$$|F(t, x') - F(t, x'')| \leq K_1 |x' - x''|$$

$$|\Phi(t, s, x') - \Phi(t, s, x'')| \leq K_2 |x' - x''|$$

teńsizlikleri orınlansın, bunda $|F| = (|F_1|, |F_2|, \dots, |F_n|)$, $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$

$$M_i \geq 0, \quad K_1 = \{K'_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}\} \quad K_2 = \{K''_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}\}$$

2) óziniń β – dógeregi menen D oblastında jatatuǵın $x_0 \in E_n$ toshkalarınıń D_β kópligi bos kóplik emes, yaǵnıy $D_\beta \neq \emptyset$, bunda

$$\beta = \frac{T}{2} \bar{M} + \beta_1(x_0),$$

$$\beta_1(x_0) = |H(d - (A + A_1 + C)x_0)| + G\alpha_1(t_1)\bar{M},$$

$$\bar{M} = M + TN, \quad H = \left(\frac{t_1}{T} A_1 + C \right)^{-1},$$

$$G_1 = |H A_1|, \quad \alpha_1(t) = 2t \left(1 - \frac{t}{T} \right);$$

3) $Q = \frac{T}{2} [K + G]$ matricasınıń eń úlken menshikli mánisi $\lambda(Q)$ birden kishi yaǵnıy $\lambda(Q) < 1$ bunda $K = K_1 + TK_2$, $G = G_1 K$.

Usı shártlerde

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f_{m-1}(t) - \frac{1}{T} \int_0^T f_{m-1}(\tau) d\tau + \Delta_{m-1}(x_0) \right] dt$$

$$x_0(t, x_0) = x_0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

funkciyalar izbe-izligin qaraymız, bunda

$$f_{m-1}(t) = F(t, x_{m-1}(t, x_0)) + \int_0^T \Phi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds$$

$$\Delta_{m-1}(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f_{m-1}(t) - \frac{1}{T} \int_0^T f_{m-1}(\tau) d\tau \right] dt \right\}$$

Bul (3) qatnası menen anıqlanatuǵın $x_m(t, x_0)$ funkciyalardıń barlıǵı (2) shegaralıq shártti qanaatlandıradı. Joqarıdaǵı shártler orınlanganda (3) funkciyalar izbe-izliginiń $m \rightarrow \infty$ da $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ oblastqa qarata teń ólshewli túrde $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciyaǵa jıynaqlı bolatuǵını hám

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f^*(t) - \frac{1}{T} \int_0^T f^*(\tau) d\tau \right] dt \right\} = 0$$

bolǵanda bul $x^*(t, x_0)$ funkciyası (1), (2) shegaralıq másele sheshimi bolatuǵını tómendegi ulıwma jaǵdaydaǵı teoremanıń dalilleniwine uqsas dálillenedi, bunda

$$f^*(t) = F(t, x^*(t, x_0)) + \int_0^T \Phi(t, s, x^*(s, x_0)) ds.$$

2-§. Ulıwma turdegi Fredgolmnıń integro-differenciallıq teńlemeleri ushın úsh toshkalı shegaralıq máselelerdi sheshiw

Integro-differenciallıq teńlemeler sisteması bolǵan

$$\frac{dx}{dt} = f \left(t, x, \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in R^n \quad (1)$$

sistemasın

$$Ax(0) + A_1x(t_1) + Cx(T) = d \quad (2)$$

úsh toshkalı shegaralıq shártlerde qaraymız, bunda $t_1 \in (0; T)$, $A, A_1, C - (n \times n)$ ólshemli turaqlı matricalar, olar ushın $\det[t_1 A_1 + TC] \neq 0$ shárti orınlanadı dep esaplaymız, $d - n$ ólshemli turaqlı berilgen vektor. $f(t, x, y), \varphi(t, s, x) - n$ ólshemli vektor funkciyalar

Meyli $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ funkciyaları

$$t \in [0, T], s \in [0, T] \quad x \in D, y \in D_1, \quad D, D_1 \subset E_n \quad (3)$$

oblastta anıqlanğan hám uzliksiz bolıp, tómendegi shártlerdi qanaatlandırıń:

$$1) \text{ Barlıq } t \in [0, T], s \in [0, T], x, x' \in D, y, y' \in D_1 \text{ ushın } |f(t, x, y)| \leq M,$$

$$|f(t, x, y) - f(t, x', y')| \leq K_1|x - x'| + K_2|y - y'|,$$

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x')| \leq K_3|x - x'| \quad (4)$$

teńsizlikleri orınlanadı, bunda $M = (M_1, \dots, M_n), M_i \geq 0, K_1 = \{K'_{ij} \geq 0\},$

$$K_2 = \{K''_{ij} \geq 0\}, K_3 = \{K'''_{ij} \geq 0\}, i, j = \overline{1, n}; \quad |f| = (|f_1|, \dots, |f_n|)$$

2) $x_0 \in E_n$ toshkalardıń D oblastında oziniń β dógeregi menen jatatuǵın

D_β kópligi bos emes kóplik: $D_\beta \neq \emptyset$, bunda $\beta = \frac{T}{2}M + \beta_1(x_0),$

$$\beta_1(x_0) = |H(d - (A + A_1 + C)x_0)| + G_1\alpha_1(t_1)M, \quad H = \left(\frac{t_1}{T}A_1 + C\right)^{-1}, \quad (5)$$

$$G_1 = |HA_1|, \quad \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right);$$

3) $Q = \frac{T}{2}(Q_1 + Q_2)$ matricanıń eń ulken menshikli mánisi $\lambda(Q)$ birden

kishi:

$$\lambda(Q) < 1, \text{ bunda } Q_1 = K_1 + TK_2K_3, Q_2 = G_1Q_1$$

usı shártlerde (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın tomendegi funkciyalar izbe-izligin qaraymız:

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f \left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) + \Delta_{m-1}(x_0) \right] dt$$

$$x(t, x_0) = x_0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

bunda

$$\Delta_{m-1}(x_0) = \frac{H}{T} \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f \left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) d\tau \right] dt \left. \right\} -$$

$$- \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) d\tau \quad (7)$$

Tomendegi tастıyıqlaw orınlı

1-teorema. Meyli (1) teńlemeler sistemasınıń $f(t, x, y)$ hám $\varphi(t, s, x)$ funkciyaları (3) oblastta anıqlanğan hám úzliksiz bolıp, 1), 2), 3) shártlerdi qanaatlandıratuǵın bolsın.

Sonda (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın (6) túrindegi funkciyalar izbe –izligi $m \rightarrow \infty$ da $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ oblastqa qarata $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciyaǵa jıynaqlı boladı. Bunda $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciya

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left\{ f \left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x(\tau), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s)) ds \right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 + A_1 \int_0^{t_1} \left[f \left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) - \right. \right. \quad (8)$$

$$\left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x(\tau), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s)) ds \right) d\tau \right] dt \right\} d\tau \right.$$

integrallıq teńlemesiniń $x^*(0, x_0) = x_0$ toshkası arqalı ótetuǵın sheshimi boladı hám sonıń menen birge $x^*(0, x_0)$ funkciyası (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı yaǵnıy

$$\dot{x} = f\left(t, x, \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds\right) + \Delta(x_0), \quad Ax(0) + A_1x(t_1) + Cx(T) = d \quad (9)$$

shegaralıq máseleniń sheshimi boladı, bunda

$$\begin{aligned} \Delta(x_0) = & \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f\left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x(\tau), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s)) ds\right) d\tau \right] dt \right\} - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x(\tau), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s)) ds\right) d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

Al, $x^*(t, x_0)$ sheshimniń $x_m(t, x_0)$ juwıq sheshiminen awısıwı ushın barlıq $m = 1, 2, \dots$ ushın

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq Q^m (E - Q)^{-1} \beta(x_0) \quad (11)$$

bahalawı orınlı.

Dalillew. Úzliksiz vektor–funkciyalar keńisliginde (6) izbe–izlik fundamentallıq izbe–izlik bolatuǵının, demek teń olshewli jıynaqlı bolatuǵının kórsetemiz.

Dáslep, eger $x_0 \in D_\beta$ bolsa, onda barlıq $x_m(t, x_0)$ funkciyalar D oblastınan shıǵıp ketpeytuǵının yaǵnıy $x_m(t, x_0) \in D$ ekenin kórsetemiz. Haqıyqatında 2,1-lemmaǵa [19] muwapıq, (6) qatnasınan tómendegini tabamız:

$$\begin{aligned}
|x_1(t, x_0) - x_0| &\leq \left| \int_0^t \left[f \left(t, x_0, \int_0^T \varphi(t, s, x_0) ds \right) - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x_0, \int_0^T \varphi(\tau, s, x_0) ds \right) d\tau \right] dt \right| + \\
&+ \left| H(d - (A + A_1 + C)x_0) \right| + |HA_1| \left| \int_0^t \left[f \left(t, x_0, \int_0^T \varphi(t, s, x_0) ds \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x_0, \int_0^T \varphi(\tau, s, x_0) ds \right) d\tau \right] dt \right| \leq \alpha_1(t)M + \\
&+ \left| H(d - (A + A_1 + C)x_0) \right| + |HA_1| \alpha_1(t_1)M = \\
&= \alpha_1(t)M + \beta_1(x_0) \leq \frac{T}{2}M + \beta_1(x_0) \tag{12}
\end{aligned}$$

Sonlıqtanda $x_0 \in D_\beta$ bolğanda $x_1(t, x_0) \in D$. Matematikalıq indukciya metodu boyınsha barlıq $m = 1, 2, \dots$, $t \in [0, T]$ hám qálegen $x_0 \in D_\beta$ ushın (6) funkciyaların barlıgınıń D oblastınan shıǵıp ketpeytuǵınlıǵı haqqında juwmaq jasawğa bolatuǵının ańsat korsetiw mumkin.

Endi (6) tiykarında $x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)$ ayırmasın dúzemiz:

$$\begin{aligned}
x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0) &= \tag{13} \\
&= \int_0^t \left[\left(f \left(t, x_m(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{T} \int_0^T \left(f \left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right) d\tau \right] dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +HA_1 \int_0^{t_1} \left[f \left(t, x_m(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right] - \\
& - \frac{1}{T} \int_0^T \left[f \left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right] d\tau \Big] dt \\
& = \left(1 - \frac{t}{T} \right) \int_0^t \left[f \left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right] d\tau - \\
& - \frac{t}{T} \int_t^T \left[f \left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right] d\tau + \\
& + HA_1 \left\{ \left(1 - \frac{t_1}{T} \right) \int_0^{t_1} \left[f \left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right] d\tau - \right. \\
& \left. - \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T \left[f \left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0)) ds \right) - f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) \right] d\tau \right\}
\end{aligned}$$

Usı (13) ayırmanı (4) hám (12) teńsizliklerin esapqa alıp bahalaymız. Eger $r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$ dep belgilesek, onda Lipshic shártin esapqa alıw menen sońǵı teńlikten tómendegige iye bolamız

$$\begin{aligned}
r_{m+1}(t) & \leq K_1 \left[\left(1 - \frac{t}{T} \right) \int_0^t |x_m(\tau, x_0) - x_{m-1}(\tau, x_0)| d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T |x_m(\tau, x_0) - x_{m-1}(\tau, x_0)| d\tau \right] + \quad (14) \\
& + K_2 K_3 \left[\left(1 - \frac{t}{T} \right) \int_0^t \int_0^T |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)| ds d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T \int_0^T |x_m(\tau, x_0) - x_{m-1}(\tau, x_0)| ds d\tau \right] + \\
& + |HA_1| \left\{ K_1 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T} \right) \int_0^{t_1} |x_m(\tau, x_0) - x_{m-1}(\tau, x_0)| d\tau + \frac{t}{T} \int_{t_1}^T |x_m(\tau, x_0) - x_{m-1}(\tau, x_0)| d\tau \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$+K_2K_3 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} \int_0^T |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)| ds d\tau + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T \int_0^T |x_m(\tau, x_0 - x_{m-1}(\tau, x_0))| ds d\tau \right]$$

A1, (12) teńsizkikke muwapıq,

$$r_1(t) = |x_1(t, x_0) - x_0(t, x_0)| = |x_1(t, x_0) - x_0| \leq \alpha_1(t)M + \beta_1(x_0)$$

Sonlıqtan (14) teńsizlikten $m = 1$ bolǵanda tómendegini alamız:

$$\begin{aligned} r_2(t) &\leq K_1 \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t (\alpha_1(\tau)M + \beta_1(x_0)) d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T (\alpha_1(\tau)M + \beta_1(x_0)) d\tau \right] + \\ &+ |HA_1| K_1 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} (\alpha_1(\tau)M + \beta_1(x_0)) d\tau + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T (\alpha_1(\tau)M + \beta_1(x_0)) d\tau \right] + \\ &+ K_2K_3 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} \int_0^T (\alpha_1(s)M + \beta_1(x_0)) ds d\tau + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T \int_0^T (\alpha_1(s)M + \beta_1(x_0)) ds d\tau \right] = \\ &= K_1(\alpha_2(t)M + \alpha_1(t)\beta_1(x_0)) + K_2K_3 \left(\alpha_1(t) \frac{T^2}{3} M + \alpha_1(t)T\beta_1(x_0) \right) + \quad (15) \\ &+ |HA_1| + \left\{ K_1(\alpha_2(t_1)M + \alpha_1(t_1)\beta_1(x_0)) + K_2K_3 \left(\alpha_1(t_1) \frac{T^2}{3} M + \alpha_1(t_1)T\beta_1(x_0) \right) \right\} \end{aligned}$$

bunda

$$\alpha_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_1(\tau) d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_1(\tau) d\tau \leq \frac{T}{3} \alpha_1(t)$$

$$\alpha_1(t_1) = 2t_1 \left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \leq \frac{T}{2}, \quad t_1 \in (0; T].$$

sonda sońǵı (15) teńsizlik tómendegı túrde iye boladı:

$$r_2(t) \leq \frac{T}{3} (K_1 + TK_2K_3) \alpha_1(t)M + (K_1 + TK_2K_3) \alpha_1(t) \beta_1(x_0) +$$

$$+|HA_1|\left\{\frac{T}{3}(K_1 + K_2K_3)\alpha_1(t_1)M + (K_1 + TK_2K_3)\alpha_1(t_1)\beta_1(x_0)\right\}$$

yamasa

$$r_2(t) \leq Q \cdot \beta(x_0) \quad (16)$$

bunda

$$Q = \frac{T}{2}(Q_1 + Q_2), \quad Q_1 = K_1 + TK_2K_3, \quad Q_2 = G_1Q_1,$$

$$\beta(x_0) = \frac{T}{2}M + \beta_1(x_0),$$

$$\beta_1(x_0) = |H(d - (A + A_1 + C)x_0)| + G\alpha_1(t)M.$$

Al, $m = 2$ bolganda (14) teńsizlikten

$$\begin{aligned} r_3(t) &\leq K_1 \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t Q\beta(x_0) dt + \frac{t}{T} \int_t^T Q\beta(x_0) dt \right] + \\ &+ K_2K_3 \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \int_0^T Q\beta(x_0) ds dt + \frac{t}{T} \int_t^T \int_0^T Q\beta(x_0) ds dt \right] + \\ &+ |HA_1| \left\{ K_1 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} Q\beta(x_0) dt + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T Q\beta(x_0) dt \right] + \right. \\ &\left. + K_2K_3 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} \int_0^T Q\beta(x_0) ds dt + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T \int_0^T Q\beta(x_0) ds dt \right] \right\} \\ &= Q\beta(x_0) \cdot K_1\alpha_1(t) + Q\beta(x_0)TK_2K_3\alpha_1(t) + |HA_1| \cdot \\ &\cdot \{Q\beta(x_0)K_1\alpha_1(t_1) + Q\beta(x_0)TK_2K_3\alpha_1(t_1)\} = \\ &= Q\beta(x_0)(K_1 + TK_2K_3)\alpha_1(t) + Q\beta(x_0)G_1(K_1 + TK_2K_3)\alpha_1(t_1) = \end{aligned}$$

$$= Q\beta(x_0)\frac{T}{2}(Q_1 + Q_2) = Q^2\beta(x_0).$$

Matematikalıq indukciya metodu boyınsha barlıq $t \in [0, T]$, $m = 0, 1, 2, \dots$ ushın

$$r_{m+1}(t) \leq Q^m \beta(x_0) \quad (17)$$

orınlanıwı haqqında juwmaq jasawğa boladı.

Endi mına

$$x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0) = (x_{m+j}(t, x_0) - x_{m+j-1}(t, x_0)) + \dots + (x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0))$$

qatnasınan (17) teńsizligin esapqa alıp, tómendegi teńsizlikti esapqa alamız:

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t) \leq \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \beta(x_0) \quad (18)$$

Al 3) shártke muwapıq

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} Q^i = (E - Q)^{-1}$$

hám

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0$$

bolǵanlıqtan (18) teńsizliginen $m \rightarrow \infty$ da $x_m(t, x_0)$ funkciyalar izbe-izligi Koshi kriteriyasına muwapıq, $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ oblastta teń ólshewli jıynaqlı bolatuǵını kelip shıǵadı:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0) \quad (19)$$

Al (6) izbe-ziliktiń barlıq $x_m(t, x_0)$ funkciyaları (2) shegaralıq shártlerdi

qanaatlandıratuǵın bolǵanlıqtan $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciyada usı shártlerdi

qanaatlandıradı.

Sońǵı (18) teńlikten $j \rightarrow \infty$ da $x^*(t, x_0)$ diń $x_m(t, x_0)$ den awısıwı ushın (11) bahalawınıń kelip shıǵatuǵının kóriwge boladı. Eger (6) teńlikte $m \rightarrow \infty$ da shekke ótsek hám (19) qatnasın esapqa alsaq, onda $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciyası (8) integrallıq teńlemenıń sheshimi bolatuǵını anıq kórinedi, bul sheshim $t=0$ bolǵanda $x^*(0, x_0) = x_0$ toshka arqalı ótedi hám (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı. Teorema dalillendi.

Arnawlı tańlap alınǵan basqarıwshı parametr járdeminde (1) differenciallıq teńlemenıń oń jaǵınıń alınǵan teńlemenıń sheshimi $t=0$ bolǵanda belgili toshkadan ótetuǵın hám (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın etip ózgertiwge mudamı erisiwge boladı.

Tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

2-teorema. 1-teorema shártleri orınlanganda qálegen $x_0 \in D_\beta$ toshkası ushın

$$\begin{aligned} \mu = \frac{H}{T} & \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f \left(t, x^*(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x^*(s, x_0)) ds \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0)) ds \right) d\tau \right] dt \right\} \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0)) ds \right) d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ basqarıwshı parametrdiń sonday birden-bir mánisin kórsetiwge boladı, oń jaǵında μ parametrli

$$\dot{x} = f \left(t, x, \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) + \mu \quad (21)$$

turindegi integro-differencialliq teńlemeler sistemasınıń $x = x(t) = x^*(t, x_0)$ sheshimi, $t = 0$ bolǵanda $x(0) = x_0$, $x_0 \in D_\beta$ baslanǵısh mánisin qabıl etip, (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı, yaǵnıy (21), (20), (2) shegaralıq máseleń shegaralıq máseleń sheshimi boladı, bunda $x^*(t, x_0)$ – bul (6) izbe-izliktiń sheklik funkciyası.

Dalillew. 1-teoremadan $x(t) = x^*(t, x_0)$ funkciyası (8) integrallıq teńlemenıń sheshimi bolıp, sonıń menen bir waqıtta mına

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f \left(t, x, \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) + \\ & + \frac{H}{T} \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f \left(t, x^*(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x^*(s, x_0)) ds \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0)) ds \right) d\tau \right] dt \right\} - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0)) ds \right) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

$$x(0) = x_0 \quad (23)$$

Koshi máselesiniń (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı. Solay etip, μ parametriniń (20) túrindegi mánisi tabıladı, bul mániste $x(t) = x^*(t, x_0)$ funkciyası (22), (2) shegaralıq máseleń (2) baslanǵısh mánisti qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı. Endi μ parametriniń usı mánisi birden-bir bolatuǵın, yaǵnıy (20) mánisten ózgeshe bolǵan μ parametriniń hár qanday basqa mánisinde (21) ,(23) Koshi máselesi sheshimi (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandırmaydı.

Kerisinshe uýğarayıq. Meyli μ parametriniń sonday eki μ' hám μ'' , $\mu' \neq \mu''$ mánisleri bar bolıp, (21), (23) Koshi máselesiniń $x(t, x_0, \mu')$ hám $x(t, x_0, \mu'')$ sheshimleri $\mu = \mu'$ hám $\mu = \mu''$ bolǵanda (2) shegaralıq shártlerdi de qanaatlandıratuǵın bolsın. Sonda $x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')$ ayırması ushın (8) qatnasınan tómendegi birdeylikti alamız:

$$\begin{aligned}
& x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu') = \\
& = \int_0^t \left(f \left(t, x(t, x_0, \mu''), \int_0^T \varphi(t, s, x(s, x_0, \mu'')) ds \right) - \right. \\
& \left. - f \left(t, x(t, x_0, \mu'), \int_0^T \varphi(t, s, x(s, x_0, \mu')) ds \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{T} \int_0^T \left(f \left(\tau, x(\tau, x_0, \mu''), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s, x_0, \mu'')) ds \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - f \left(\tau, x(\tau, x_0, \mu'), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s, x_0, \mu')) ds \right) d\tau \right) dt + \right. \\
& \left. + HA_1 \int_0^{t_1} \left[f \left(t, x(t, x_0, \mu''), \int_0^T \varphi(t, s, x(s, x_0, \mu'')) ds \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - f \left(t, x(t, x_0, \mu'), \int_0^T \varphi(t, s, x(s, x_0, \mu')) ds \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{T} \int_0^T \left(f \left(\tau, x(\tau, x_0, \mu''), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s, x_0, \mu'')) ds \right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - f \left(\tau, x(\tau, x_0, \mu'), \int_0^T \varphi(\tau, s, x(s, x_0, \mu')) ds \right) d\tau \right) dt \right] dt
\end{aligned}$$

Bunnan 2.1-lemma [19] jaǵdayındaǵıday tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned}
& |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| \leq \\
& \leq K_1 \left[\left(1 - \frac{t}{T} \right) \int_0^t |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| dt + \frac{t}{T} \int_t^T |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| dt \right] + \\
(24) & + K_2 K_3 \left[\left(1 - \frac{t}{T} \right) \int_0^t \int_0^T |x(s, x_0, \mu'') - x(s, x_0, \mu')| ds dt + \frac{t}{T} \int_t^T \int_0^T |x(s, x_0, \mu'') - x(s, x_0, \mu')| ds dt \right] + \\
& + |HA_1| \left\{ K_1 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T} \right) \int_0^{t_1} |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| dt + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| dt \right] + \right. \\
& \left. + K_2 K_3 \left[\left(1 - \frac{t_1}{T} \right) \int_0^{t_1} \int_0^T |x(s, x_0, \mu'') - x(s, x_0, \mu')| ds dt + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T \int_0^T |x(s, x_0, \mu'') - x(s, x_0, \mu')| ds dt \right] \right\}
\end{aligned}$$

Endi $|x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| = r(t)$ hám $|r(t)|_0 = \left(\sup_t |r_1(t)|, \dots, \sup_t |r_n(t)| \right)$

belgiliwlerin kirgizip, (24) qatnasinan barlıq $m = 0, 1, 2, \dots$ ushın

$$r(t) \leq Q |r(t)|_0 \leq Q^m |r(t)|_0 \quad \text{bunnan} \quad |r(t)|_0 \leq Q^m |r(t)|_0$$

Al, Q matricanıń barlıq menshikli mánisleri birden kishi bolǵanlıqtan, sońǵı teńsizlik tek $|r(t)|_0 = 0$ yaǵnıy $\mu'' = \mu'$ bolǵanda ǵana orınlanadı. Kelip shıqqan qarama-qarsılıq μ basqarıwshı parametrdiń birden-birligin dállilleydi.

Endi (6) funkciyalar izbe-izliginiń sheklik funkciyasınıń qarastırıp atırǵan (1), (2) shegaralıq máseleńiń sheshimi bolıwınıń zárúrli hám jetkilikli shártlerin anıqlaymız.

3-teorema. Eger 1-teorema shártleri orınlanatuǵın bolsa, onda (22), (23) Koshi máselesi sheshimi berilgen (1) (2) shegaralıq máseleńiń de sheshimi bolıwı ushın

$$\Delta(x_0) = \frac{H}{T} \{ d - (A + A_1 + C)x_0 -$$

$$\begin{aligned}
& -A_1 \int_0^t f \left(t, x^*(t, x_0), \int_0^t \varphi(t, s, x^*(s, x_0)) ds \right) - \\
& - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0)) ds \right) d\tau \Bigg\} dt \quad (26) \\
& - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int_0^T \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0)) ds \right) d\tau
\end{aligned}$$

anıqlawshı funkciya $x = x_0$ toshkada nólge aylanıwı, yaǵnıy

$$\Delta(x_0) = 0 \quad (27)$$

bolıwı zárúrli hám jetkilikli, bunda $x^*(t, x_0)$ – bul (6) izbe-izliktiń sheklik funkciyası. Sonıń menen birge, bul jaǵdayda $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ hám barlıq $m = 1, 2, \dots$ ushın (1) (2) shegaralıq máseleńiń $x = x^*(t) = x^*(t, x_0)$ dál sheshiminiń onıń (6) túrindegi $x = x_m(t, x_0)$ juwıq sheshimmen awısıwı ushın (11) teńsizlik orınlanadı.

Dalillew. (27) shárttiń jetkilikligi (2) shegaralıq shártti qanaatlandıratuǵın $x^*(t, x_0)$ funkciyasınıń (8) integrallıq teńlemeniniń $t=0$ bolǵanda x_0 toshkası arqalı ótetuǵın sheshimi, yamasa , sonıń ózi, (22) , (23) Koshi máselesi sheshimi bolǵanнан tikkeley kelip shıǵadı. Eger (27) shárt orınlansa, onda bul $x^*(t, x_0)$ funkciyasınıń (1), (2) shegaralıq másele sheshimi bolatuǵını ayqın kórinip tur.

Al, (27) shárttiń orınlanıwınıń zárúrliǵi sonnan kelip shıǵadı, eger $x = x^*(t)$ funkciyası (1), (2) shegaralıq máseleńiń $t=0$ bolǵanda $x^*(0) = x_0$, $x_0 \in D_\beta$ toshkası arqalı ótetuǵın sheshimi bolsa, onda $\dot{x} = f(t, x) + \Delta(x_0)$ sistemaniń sonday $x(0, x_0, \Delta) = x_0$ baslanǵısh mániske iye $x = x(t, x_0, \Delta)$ sheshimi (2) shegaralıq shártti qanaatlandıradı, atap aytqanda $\Delta(x_0) = 0$ bolǵanda sebebi, bul jaǵdayda $x(t, x_0, \Delta = 0) = x^*(t)$ boladı.

2-teoremağa muwapıq, (21), (23) Koshi máselesi sheshimi bir waqıttın ózinde (21), (2) shegaralıq máseleńiń de sheshimi boladı, tek (20) túrindegi μ parametriniń birden-bir mánisinde, al parametrdiń birdey mánisi $\mu = \Delta(x_0) = 0$ bolǵanda bar, sonıń menen birge bul jaǵdayda $x^*(t) = x^*(t, x_0)$, al bul (11) teńlikke alıp keledi. Teorema dálillendi.

Sońǵı tastıyıqlaw (1), (2) shegaralıq másele sheshimin tabıwdıń sanlı analitikalıq usılın beredi. Bul usıl tómendegiden ibarat:

$x_0 \in D_\beta$ bolǵanda (6) qatnası boyınsha x_0 den parametr sıpatında ǵárezli bolǵan $x_m(t, x_0)$ funkciyalar izbe-izligi dúziledi. Bul $x_m(t, x_0)$ izbe-izliktiń $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciyası tabıladı. $x^*(t, x_0)$ sheklik funkciya boyınsha (26) túrindegi $\Delta(x_0)$ anıqlawshı funkciyası dúziledi hám (27) teńlemeniniń $x_0 = x_0^*$ sheshimi tabıladı. (1) teńleme ushın $x(0) = x_0$ baslanǵısh shártte $[0, T]$ aralıqta Koshi máselesi sheshiledi.

Alınǵan funkciya (1), (2) shegaralıq másele sheshimi boladı. Al, onıń juwıq sheshimi sıpatında (6) túrindegi $x_m(t, x_0^*)$ funkciyasın qabıl etiw múmkin.

Bul keltirilgen algoritmdi ámelge asırıwdaǵı tiykarǵı qıyınshılıq $x_m(t, x_0)$ funkciyasınıń analitikalıq túrin jasaw menen baylanıslı boladı. (1), (2) shegaralıq máseleńiń sheshiminiń bar bolıwı haqqında $x_m(t, x_0)$ izbe-iz jaqınlasıwlardıń qásiyetleri boyınsha da juwmaq jasawǵa boladı.

2-bap boyınsha juwmaqlar

Bul bapta Fredgolm tipindeki integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq másele qaralıp, bul máseleni izertlew ushın sanlı-analitikalıq metodtıń sxeması qollanıldı hám ol matematikalıq jaqtan tiykarlandı.

3-bap. Integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler

Bul bapta Fredgolm tinidegi sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler qaraladı. Bunday máselelerdi juwıq sheshiw ushın izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodı qollanıladı, usı metodtıń sáykes algoritmi tiykarlanadı. Alınǵan nátiyjeler konkret shegaralıq máseleni juwıq sheshiw ushın paydalanıladı.

1-§. Fredholm tipidagi sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleler

Tabiyattanıwdadı hár qıylı qubılıslardıń matematikalıq modeli sıpatında ámeliy máselelerde integro-differenciallıq teńlemeler jiyi kelip shıgadı. Sońgı waqıtları Volterraniń hám Fredgolmniń integro-differenciallıq teńlemeleri ushın shegaralıq máseleler keńnen úyrenilmekte.

Biz bul jumısta sızıqlı kóp toshkalı shegaralıq máseleni qaraymız:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + b(t), \quad x \in R^n, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^p B_j x(t_j) = l \quad (2)$$

bunda $A(t), K(t,s)$ matricaları sáykes turde $t \in [0, T]$ hám $(t,s) \in [0, T] \times [0, T]$ bolǵanda úzliksiz, $b(t)$ vektor funkciyası $[0, T]$ aralıqta úzliksiz, $B_j, j = \overline{0, p-1}$ ($n \times n$) ólshemli turaqlı matricalar, $l - n$ ólshemli turaqlı vektor,

$$t_0 = 0, \quad t_p = T, \quad t_j \in [0, T], \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad t_j < t_{j+1}; \quad (3)$$

$$\det \left[\sum_{j=0}^p B_j \frac{t_j}{T} \right] \neq 0. \quad (4)$$

usı (1), (2) shegaralıq máseleniń sheshimin juwıq túrde tabıwǵa izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodın qollanamız.

Meyli (1) sisteması hám (2) shegaralıq shártler tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) (1) sistemaniń oń jaǵı

$$D: |x| \leq d$$

oblastta aniqlangan bolsin, $A(t)$ matricasi, $b(t)$ vektor-funkciyasi $t \in [0, T]$ bolganda al $K(t, s)$ matricasi $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$ bolganda aniqlangan ham uzliksiz bolsin, (3), (4) shartler orinlansin;

2) d turaqlisi

$$\left(E - \frac{T}{2} Q_1 \right) d > \frac{T}{2} b + \beta_1(x_0)$$

teńsizligin qanaatlandırsın, bunda $E - (n \times n)$ ólshemli birlik matrica,

$$Q_1 = A + TK, \quad A = \left\{ \max_{t \in [0, T]} |a_{ij}(t)| \right\}_{i, j=1}^n, \quad K = \left\{ \max_{\substack{t \in [0, T] \\ s \in [0, T]}} |K_{ij}(t, s)| \right\}_{i, j=1}^n$$

$$b = \left(\max_{t \in [0, T]} |b_1(t)|, \max_{t \in [0, T]} |b_2(t)|, \dots, \max_{t \in [0, T]} |b_n(t)| \right),$$

$$\beta_1(x_0) = \left| H \left(l - \sum_{i=0}^p B_j x_0 \right) + |H| \sum_{j=1}^{p-1} |B_j| \cdot \frac{T}{2} [(A + TK)d + b] \right|, .$$

$$H = \left(\sum_{j=0}^p \frac{t_j}{T} B_j \right)^{-1}$$

3) $Q = \frac{T}{2} (Q_1 + Q_2)$, matricasınıń eń úlken menshikli mánisi $\lambda_{\max}(Q)$ birden

kishi;

$$\lambda_{\max}(Q) < 1$$

bunda

$$Q_2 = GQ_1, \quad G = |H| \sum_{j=1}^{p-1} |B_j|$$

bul jerde $|x|$ arqalı $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ vektor belgilengen, yaǵnıy

$$|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) .$$

Meyli (1) sızıqlı sistema (2) shegaralıq shártti qanaatlandıratuđın sheshimge iye bolsın hám $t = 0$ bolǵanda bul sheshim ótetuđın x_0 toshka belgili bolsın hám x_0 toshkası

$$D_0 : |x_0| \leq d_0$$

oblastta jatatuđın bolsın, bunda

$$d_0 = \left(E - \frac{T}{2} Q_1 \right)^{-1} \left[\frac{T}{2} b + \beta_1(x_0) + d_1 \right]$$

al d_1 – iqtıyarlı oń vektor.

Usı shártlerde (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuđın

$$\begin{aligned} x_m(t, x_0) = & x_0 + \int_0^t \left\{ A(\tau) x_{m-1}(\tau, x_0) + \int_0^T K(\tau, s) x_{m-1}(s, x_0) ds + \right. \\ & \left. + b(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T \left[A(\tau) x_{m-1}(\tau, x_0) + \int_0^T K(\tau, s) x_{m-1}(s, x_0) ds + b(\tau) \right] d\tau \right\} d\tau + \\ & + \frac{t}{T} H \left\{ d - \sum_{j=0}^p B_j x_0 - \sum_{j=0}^{p-1} B_j \int_0^{t_j} \left[A(\tau) x_{m-1}(\tau, x_0) + \int_0^T K(\tau, s) x_{m-1}(s, x_0) ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + b(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T \left[A(\tau) x_{m-1}(\tau, x_0) + \int_0^T K(\tau, s) x_{m-1}(s, x_0) ds + b(\tau) \right] d\tau \right\} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$x_0(t, x_0) = x_0, \quad m = 1, 2, \dots$$

funkciyalar izbe-izligin dúzemiz.

Usı (5) funksiya izbe-izligi $m \rightarrow \infty$ da $x^*(t, x_0)$ sheklik funksiyaǵa jıynaqlı boladı hám

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - \sum_{j=0}^p B_j(x_0) - \sum_{j=0}^{p-1} B_j \int_0^{t_j} \left\{ A(\tau) x^*(\tau, x_0) + \int_0^T K(\tau, s) x^*(s, x_0) ds + \right. \right. \\ \left. \left. + b(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T \left[A(\tau) x^*(\tau, x_0) + \int_0^T K(\tau, s) x^*(s, x_0) ds + b(\tau) \right] d\tau \right\} d\tau - \right. \quad (6) \\ \left. - \frac{1}{T} \int_0^T \left[A(\tau) x^*(\tau, x_0) + \int_0^T K(\tau, s) x_{m-1}(s, x_0) ds + b(\tau) \right] d\tau \right.$$

vektor-funkciyası nólge aylansa, yaǵnıy $\Delta(x_0) = 0$ bolsa, onda $x = x^*(t, x_0)$ funkciyası (1) teńlemeler sistemasınıń (2) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı.

Bunı 2-paragrafta keltirilgen tastiyıqlawlarǵa uqsas talqılawlar menen kórsetiw mumkin

2-§. Mısal.

Meyli $t \in [0, 1]$, $D: |x_1| \leq 0,5, |x_2| \leq 0,5$ oblastta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0,05x_1 + 0,02 \int_0^1 x_2(s) ds + 0,001t + 0,0224 \\ \dot{x}_2 = 0,01x_1 + 0,0095 - 0,0002t \end{cases}, t \in [0, 1]$$

teńlemeler sistemasınıń, yaǵnıy

$$\dot{x}(t) = Ax + \int_0^1 K(t, s)x(s)ds + b(t), t \in [0, 1] \quad (1)$$

sistemasınıń

$$\sum_{j=0}^2 B_j x(t_j) = l \quad (2)$$

shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin juwıq túrde tabıw talap etilsin, bunda

$$A = \begin{bmatrix} -0,05 & 0 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad K(t, s) = \begin{bmatrix} 0 & 0,02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0,001t + 0,0224 \\ -0,0002t + 0,0095 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$l_1 = 0,06, \quad l_2 = 0,06, \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 = 1$$

Bul jaǵdayda (2) shegaralıq shártler tómendegishe jazıladı:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(0,5) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(1) = \begin{bmatrix} 0,06 \\ 0,06 \end{bmatrix} \quad (2')$$

Berilgen jaǵdayda

$$R = \sum_{j=0}^p \frac{t_j}{T} B_j = t_1 B_1 + B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

matrica determinantı nólge teń emes:

$$\det R \neq 0.$$

Al,

$$H = R^{-1} = \left(\sum_{j=0}^p \frac{t_j}{T} B_j \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = |H| \prod_{j=1}^{p-1} |B_j| = |H| |B_1| = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = A + TK = \begin{bmatrix} -0,05 & 0 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05 & 0,02 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = GQ_1 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ -0,05 & 0,02 \end{bmatrix}.$$

Sonda

$$Q = \frac{T}{2}(Q_1 + Q_2) = \begin{bmatrix} 0,075 & 0,01 \\ 0,025 & 0,01 \end{bmatrix}$$

matricasınıń $\lambda_{\max}(Q)$ menshikli mánisi 1 den kishi. Al,

$$\beta_1(x_0) = \left| H \left(l - \sum_{j=0}^p B_j x_0 \right) \right| + \left| H \left| \sum_{j=1}^{p-1} B_j \right| \cdot \frac{T}{2} [(A + TK)d + b] \right| =$$

$$\begin{bmatrix} 0,0292 \\ 0,02975 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |0,12 - 2(x_{10} + x_{20})| \\ |0,06 - x_{10}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

bolıp,

$$\left(E - \frac{T}{2} Q_1 \right) d > \frac{T}{2} b + \beta_1(x_0)$$

teńsizligi

$$\begin{bmatrix} 0,4825 \\ 0,45 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0,0409 \\ 0,0345 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |0,12 - 2(x_{10} + x_{20})| \\ |0,06 - x_{10}| \end{bmatrix}$$

túrine iye bolıp, $x_0 = (x_{10}, x_{20}) \in D_0$ bolǵanda $D: |x_1| \leq 0,5, |x_2| \leq 0,5$ oblastta

(1), (2) shegaralıq másele ushın sanlı-analitikalıq metodtı qollanıw shártleri orınlanadı.

Sanlı-analitikalıq metodqa muwapıq, (1), (2) shegaralıq másele ushın usı baptaǵı 1-paragraftaǵı (5) iteraciyalıq sxema boyınsha $x_1(t, x_0) = (x_{11}(t, x_0), x_{12}(t, x_0))$ birinshi jaqınlasıwdı tómendegi túrde tabamız:

$$\begin{aligned}
x_1(t, x_0) = & x_0 + \int_0^t \left\{ A(\tau) x_0 + \int_0^T K(\tau, s) x_0 ds + b(\tau) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{T} \int_0^T \left[A(\tau) x_0 + \int_0^T K(\tau, s) x_0 ds + b(\tau) \right] d\tau \right\} d\tau + \\
& + \frac{t}{T} H \left\{ l - (B_0 + B_1 + B_2) x_0 - B_1 \int_0^{t_1} \left\{ A(\tau) x_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^T K(\tau, s) x_0 ds + b(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T \left[A(\tau) x_0 + \int_0^T K(\tau, s) x_0 ds + b(\tau) \right] d\tau \right\} \right\} \quad (3)
\end{aligned}$$

bunnan

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{11}(t, x_0) \\ x_{12}(t, x_0) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \left(\begin{bmatrix} -0,05 & 0 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix} - \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0,02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \right) \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + \right. \\
& + \begin{bmatrix} 0,001\tau + 0,0224 \\ -0,0002\tau + 0,0095 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \int_0^1 \left(\begin{bmatrix} -0,05 & 0 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0,02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \right) \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + \\
& \left. + \begin{bmatrix} 0,001\tau + 0,0224 \\ -0,0002\tau + 0,0095 \end{bmatrix} \right\} d\tau + \quad (4) \\
& + t \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0,06 \\ 0,06 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} - \right. \\
& - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \int_0^{t_1} \left\{ \begin{bmatrix} -0,05 & 0 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0,02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \right\} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + \\
& \left. + \begin{bmatrix} 0,001\tau + 0,0224 \\ -0,0002\tau + 0,0095 \end{bmatrix} - \int_0^1 \left(\begin{bmatrix} -0,05 & 0 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0,02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \right) \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left. \left[\begin{array}{c} 0,001\tau + 0,0224 \\ -0,0002\tau + 0,0095 \end{array} \right] d\tau \right\} = \left[\begin{array}{c} x_{01} + 0,0005t^2 - 0,12t - 2x_{01}t \\ x_{02} - x_{01}t - 0,0001t^2 + 0,0601t - x_{01}t - x_{02}t \end{array} \right]$$

ya'g'niy

$$\begin{aligned} x_{11}(t, x_0) &= x_{01} + 0,0005t^2 - 0,12t - 2x_{01}t \\ x_{12}(t, x_0) &= x_{02} - 0,0001t^2 + 0,0601t - x_{01}t - x_{02}t \end{aligned} \quad (5)$$

Al, $m = 0$ bolg'anda juw'iq aniqlawsh'ı te'ñlemenin' sheshimi

$$x_0 = x_0^{(0)} = (0,04761; \quad 0,0025) \quad (6)$$

boladı.

Bul toshka (1), (2) mäselenin'

$$x(0) = x_0^{(0)} \quad (7)$$

juw'iq baslan'g'ish mánisin aniqlaydı. Bul mánisti (5) formulağa qoyamız. Sonda

$$\begin{cases} x_{11}(t, x_0) = 0,04761 + 0,0005t^2 - 0,21522t - 0,08t \\ x_{12}(t, x_0) = 0,0025 - 0,0001t^2 + 0,00999t \end{cases} \quad (8)$$

bul berilgen shegaralıq mäselenin' däl sheshimi

$$x = x^*(t) = (0,02t + 0,05, \quad 0,01t) \quad (9)$$

boladı. Buğan bul sheshimdi berilgen shegaralıq mäsälege tikkeley qoyıw arqalı iseniwge boladı.

3-bap boyınsha juwmaqlar

Bul bapta izbe-iz jaqınlasıwlardıń sanlı-analitikalıq metodu Fredgolm tipindegi sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler sisteması ushın sızıqlı shegaralıq shártlerge iye kóp toshkalı shegaralıq máseleni juwıq sheshiwge qollanıldı. Alınǵan nátiyjeler konkret shegaralıq máseleni juwıq sheshiw ushın qollanılıp kórsetildi.

Juwmaq

Juwmaqlap aytqanda, bul magistirlik dissertaciyada Volterra hám Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemelerdiń ayırım klassları ushın eki toshkalı hám kóp toshkalı shegaralıq máseleler uyrenildi.

Jumısta alınğan tiykarǵı nátiyjeler tómendegilerden ibarat:

1. Volterra tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları ushın ajıralǵan shegaralıq shártlerge iye eki toshkalı shegaralıq másele izbe-iz jaqınlasıwlarıdıń sanlı-analitikalıq metodı járdeminde úyrenildi. Qarastırılǵan másele ushın metodtıń algoritmi keltirildi hám ol tiykarlandı.

2. Fredgolm tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler ushın úsh toshkalı shegaralıq másele sanlı-analitikalıq metod járdeminde sheshildi, shegaralıq máseleńiń dál sheshimi menen juwıq sheshim arasındadıǵı ayırma bahalandı.

3. Izbe-iz jaqınlasıwlarıdıń sanlı-analitikalıq metodı Fredgolm tipindegi sızıqlı integro-differenciallıq teńlemeler ushın kóp toshkalı sızıqlı shegaralıq shártlerge iye shegaralıq máseleńi sheshiw ushın qollanıldı.

Jumıstıń sońında integro-differenciallıq teńlemelerdiń matematikalıq ekologiya meselelerinde qollanıwlarına qısqasha toqtaymız. Hazirgi dawir ekologiyası aldında turǵan problemalar kóp, biraqta olardıń tiykarǵıları tómendegilerden ibarat:

-antropogenlik faktorlar tásirindegi eko-sistemanıń awhallarıń prognoz qılıw (aldın ala aytıw);

-hár qıylı qayta tikleniwshi tabiyǵıy resurslardı paydalanıwdıń optimal strategiyasın tańlaw;

-populyaciyalardı hám olardıń toparların awıl-xojalıq eginleri zıyankeslerine qarsı gureste uw ximikatlardı paydalanbay,al zıyankeslerdiń tabiyǵıy dushpanların paydalanıw maqsetinde basqarıw.

Ekologiyalıq qáwıpsızlıq ham ekologiyalıq mádeniyat-bugingi kunnıń baslı talabı bolmaqta.

Matematikalıq ekologiya- bul ósimlikler ham tiri janiwarlar organizmleriniń bir-biri menen hám qorshaǵan ortalıq penen olar dúzgen toparlardıń óz-ara qatnasların saykes matematikalıq modeller tiykarında anıqlaytuǵın ilim.

Ayırım biologiyalıq populyaciyalardıń, sonday-aq kóplegen óz-ara tasir etisetuǵın populyaciyalardıń hár qıylı túrleriniń toplamları dinamikasını muǵdarlıq jaqtan matematikalıq túrde suwretlewde umtılıwlar úlken tariyxqa iye.

Populyaciyalardıń ósiw dinamikası modelleriniń daslepkilleriniń biri T.Maltusqa tiyisli boldı. Bul model tomendegishe jazıladı:

$$\frac{dN}{dt} = \mu N ; \quad N(t) = N(0) \cdot e^{\mu t}$$

bunda N – populyaciyanıń sanı(muǵdarı) , μ – tuwılıw hám óliwshilik koefficientleri arasındaǵı ayırma. $\mu > 0$ bolǵanda eksponenciallıq ósiwin beredi. Bunday jaǵday ósiwdi támiyinleytuǵın resurslar shegaralanǵan bolatuǵın tabiyǵıy populyaciyalarda baqlanbaydı. Usıǵan baylanıslı bul modelde jetistiriwge háreket etildi. Máselen, 1838-jılı Ferxyolvsttıń “logistikalıq” modeli payda boldı. Bul model kóplegen tabiyǵıy populyatsiyalardıń dinamikasını jetkilikli turde jaqsı suwretledi.

Eki túrdegi populyaciyalardıń birge jasasınıw izertlewde populyaciyalardıń jas quramın esapqa alıw zárur boldı. Bul “keshigiw” efektine (natiyjesine) alıp keledi, sebebi populyaciyalardıń jaslıq strukturasını onıń rawajlanıwınıń (evolyuciyasınıń) ótken dáwiri haqqında yadqa(память) iye boladı. Bul effekt birinshi ret V.Volterra tárepinen “jırtqısh-olja” sisteması mısasında sońǵı tásir shegaralanǵan bolǵan jaǵdaylarda izertlenildi [7].

V. Volterra bul modellerdın keshigiwge iye differenciallıq teńlemeler menen sonday-aq, integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları menen suwretlenetuǵının kórsetti.

Matematikalıq ekologiyada qollanılatuǵın matematikalıq modeller ishinde integro-differenciallıq teńlemeler menen suwretlenetuǵın modeller ulken ahmiyetke iye.

Sońǵı tásir dawamlanıwı shegaralanbaǵan bolǵan jaǵdayda, yaǵnıy populyaciyalardıń ósiwine jetkilikli uzaq ótken dawır tasir etkende V. Volterra tarepinen alınǵan eki tur evolyuciyasınıń teńlemeleri

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{-\infty}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau \right] N_1(t), \quad (*)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \left[\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) - \int_{-\infty}^t F_2(t-\tau) N_1(\tau) d\tau \right] N_2(t)$$

túrge iye, bunda $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$; $F_1 \geq 0, F_2 \geq 0$; $N_1(t), N_2(t)$ – populyaciyalardıń jaslıq tıǵızlıǵı funkciyaları [7].

Al, sońǵı tásir onsha uzaq bolmaǵan dawirdi óz ishine alsa hám sońǵı tásir dıń dawamlanıwı T_0 arqalı belgilense, onda $t \geq T_0$ ushın

$$\left. \begin{array}{l} F_1(t) \\ F_2(t) \end{array} \right\} = 0$$

dep esaplaw mumkin hám bul (*) teńlemelerde

$$\int_{-\infty}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau$$

hám

$$\int_{-\infty}^t F_2(t-\tau)N_1(\tau)d\tau$$

integralların

$$\int_{t-T_0}^t F_1(t-\tau)N_2(\tau)d\tau$$

ham

$$\int_{t-T_0}^t F_2(t-\tau)N_1(\tau)d\tau$$

integralları menen almastırıwǵa boladı.

Eger tek bazı-bir t_0 momentten keyin payda bolatuǵın sońǵı tasir natiyjeleri qarastırılса, onda (*) teńlemelerdegi integrallarda

$$\int_{t_0}^t F_1(t-\tau)N_2(\tau)d\tau$$

ham

$$\int_{t_0}^t F_2(t-\tau)N_1(\tau)d\tau$$

integralları menen almastırıw mumkin .

Solay etip, kishi fluktuaciyalarǵa (ózgerislerge) iye biologiyalıq máselelerde

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} + \alpha_1 q_2 + \int_{t_0}^t \Phi_1(t-\tau)q_2(\tau)d\tau = Q_1 \\ \frac{dq_2}{dt} + \alpha_2 q_1 + \int_{t_0}^t \Phi_2(t-\tau)q_1(\tau)d\tau = Q_2 \end{cases}$$

kórinisindegi Volterra tipindegi integro-differenciallıq teńlemeler sistemaları qarastırıladı. Sońǵı dawırde [26-28] jumıslarda ham basqa da kop jumıslarda integro-differenciallıq teńlemeler menen suwretlenetuǵın matematikalıq ekologiya maseleleri sonıń ishinde mikroorganizmler populyaciyası muǵdarınıń waqıttan ǵarezli turde ózgeriw funkciyasın anıqlaw máseleleri, medicinalıq máseleler uyreniledi.

Insan immunologiyalıq sistemasınıń tiykarǵı funkciyası organizmdi tiri janiwarlardan ham ózlerinde genetikalıq jat informaciýalar belgilerin alıp júriwshi zatlar (bakteriyalar, viruslar, allergenler ham t.b) dan saqlawdan ibarat. Insan organizmi immunologiyalıq sistemasınıń funkciyası (xizmeti) antigenlerdi anıqlaw hám organizmdi qorǵawdan ibarat bolıp tabıladı.

Insan organizminde payda bolatuǵın kesellikler menen onıń sawalıwı, yaǵnıy antigenlerdi islep shıǵarıw arasındaqı baylanıslar birinshi bolıp Amerika alımları Bell hám Pimbli tarepinen úyrenilgen, dara jaǵdayda olar tomendegi differenciallıq teńlemeler sistemasın izertlewdi usınıs etken:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y[\lambda_1 - (\alpha_1 - \lambda_1)x + \lambda_1 y] \\ \frac{dx}{dt} = x[-\lambda_2 - \lambda_2 x + (\alpha_2 - \lambda_2)y] \end{cases},$$

bunda, λ_1 – antigenlerdiń kóbeyiw tezligi, α_1 – onıń elminaciya (ayırım organizmlerdiń hár qıylı tabiyǵıy sebepler menen nabit bolıwı) tezligi,

λ_2 – antideneler (organizmde antigenler payda bolıwı menen júzege keletuǵın hám olardıń tásinin joq qılatuǵın zatlar) ıdıraw tezligi, α_2 – antideneler islep shıǵarılıw tezligi.

Modelde antideneler ham antigenniń oz-ara tasiri tek antigenniń elimnaciyasın keltirip qalmastan immunologiyalıq sistemaniń stimulyaciyasına ham soǵan muwapıq antidene islep shıǵarılıwına alıp keledi.

Differenciallıq hám integro-differenciallıq teńlemeler medicinada

jekkelengen populyaciya da juqpalı keselliklerdiń tarqalıw procesiniń modelin súwretlew ushın da paydalanıladı. Sonday-aq, qan ketiw tezligin, jurek klapınları menen diywallarınıń tezligin anıqlaw, qannıń jabısqaqlıgın anıqlaw ushın da paydalanıladı. Joqarıda keltirilgen teńlemeler sistemaların izertlew ushın belgili shártler orınlanganda usı jumısta uyrenilgen usıllardı da qollanıw mumkin.

Paydalanılğan ádebiyatlar dizimi

1. Бакирова Э.А., Джумабаев Д.С. Об одной аппроксимации линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений.
// Математический журнал. Алматы, 2005, том 5, №4 (18).- С. 34-44.
2. Бойчук А.А., Страх А.П. Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром на временной шкале // Нелинейные колебания, 2014,17,№1,-С.32-38
3. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. -Фрунзе: Кирг.гос.ун-т,1957. -327 с.
4. Вайнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения / Итоги науки. Сер. Мат. анализ. Теор. вероятн.Регулир. М: ВИНТИ, 1964-с. 5-37.
5. Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений// Изв. Вузов. Математика, 1961, №4.-с.8-24.
6. Власов В.В. Перу Ортиз Р. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике// Матем. заметки,2015, Т.98, №4.-с. 630-634. doi: 10.4213/mzm10829.
7. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. –М.: Наука, 1976. -288с.
8. Джумабаев Д.С. Необходимые и достаточные условия разрешаемости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредголма. // Укр. мат. журн., 2014, т 66, № 8. –с: 1074 -1091
9. Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений

Фредгольма с вырожденным ядром // Нелинейные колебания, 2015,18, №4.- с.489-506.

10. Иманалиев М. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем .- Фрунзе: Илим, 1974. - 352с.

11. Кривошеин Л.Е. Об одном методе решения некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений.// Изв. вузов.Матем., 1960, №3.-с 168-172.

12. Ландо Ю.К. Краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Волтерра в случае распадающихся краевых условий.// Изв. вузов. Матем., 1961, №3.-с 56-65.

13. Митропольский Ю.А.,Самойленко А.М., Мартынюк Д. И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. –Киев: Наук. думка,1985.-216 с.

14. Нуржанов О.Д., Курбанбаев Ө.О. Орынбаев П.Р. Приближенное решение краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с разделяющимися граничными условиями. // Вестник Каракалпакского гос. ун-та. им.Бердаха, 2019, № 3 (44).-С.12-17.

15. Орынбаев П.Р. , Нуржанов О.Д. О приближенном решении трехточечной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.// Тахлилнинг долзарв муаммалари ва татбиқлари. Илимий конференция материаллари.- Қарши: Қарши давлат университети, 2019.-С.175-177

16. Ронто Н.И., Савина Т.В. Численно-аналитический метод для трехточечных краевых задач.// Укр.мат. журн.,1994, т.46, №4.-с.393-403.

17. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений.-Киев: Вища шк. 1976.-179с.

18. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.-Киев: Наук. думка, 1985.-224с.

19. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.-Киев: Наук. думка, 1992.-280с.

20. Самойленко А.М., Нуржанов О.Д. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра //Дифференц.уравнения.- 1979.-15,№8.-С.1503-1517.

21. Шишкин Г.А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Фредголма. –Улан-Удэ,2007,-195с.

22. Юлдашев Т.К. Обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром и интегральным условием // Вестн. Сам. гос.техн.ун-та. Сер. Физ-мат.науки,2016. т 20, №4.-С.644-655.

23. Юлдашев Т.К. Спектральная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредголма второго порядка.// Доп. Нац. А.Н. Украины, 2018,

№12. –с. 3-13

24. Orınbaev P.R. , Nurjanov O.D. Fredgolm tipindegi integro-differencialliq teńlemeler sisteması ushın úsh toshkalı shegaralıq máseleni juwıq sheshiw // Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti. Magistrantlardıń ilimiy miynetler toplamı 2019-jıl 9-10-11 b.

25. Orınbaev P.R., Nurjanov O.D. Fredgolm tipindegi sıızıqlı integro-differencialliq teńlemeler ushın kóp toshkalı shegaralıq máseleni juwıq sheshiw// Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq Mámleketlik Universiteti. Magistrantlardıń ilimiy miynetler jıynaǵı 2020-jıl

26. Cooke K., York.J. A. Some Equations Modelling Growth Processes and Gonorrhoea Epidemics.// Mathematical Biosciences,-1973, 16. –p.75-101.

27. Cushing J.M. Predator-prey interactions with time delays // J.Math. Biol.-1976, 3, № 3-4. –P. 369-380.

28. Cushing J. Periodic solutions of Volterra's population equation with hereditary effects. // SIAM J/ Appl. Math./-1976?31. –P. 251-261.

26. Internet materiallari

<https://www.matematika.uz>.

<http://www.ekarsu.uz>

<https://www.math.uz>

<https://www.mathnet.ru>

<https://kvm.math.rsu.ru>

<https://www.edu.uz>.

<https://www.ziyonet.uz>.