

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq Mámleketlik universiteti
5A-130103-Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika
Magistratura qánigeligi pitkeriwshisi
Amangeldieva Zuxra Niyazbay qızınıń
“Impuls tabiyatlı sırtqı tásirlerdi esapqa alǵan jaǵdaydaǵı dóńgelek membrana terbelisi”
temasındaǵı magistrlik dissertaciya jumısına

P I K I R

Pikir bildirilip atırǵan magistrlik dissertaciya jumısında qarastırılǵan tiykarǵı máseleler júda qısqa waqıt intervalında tásir etetuǵın kúshlerdiń membrananıń terbelis procesine tásirin izertlew máselesi bolıp tabıladı. Bunday kúshler ilimiy ádebiyatlarda impuls tábiyatlı kúshler dep ataladı.

Magistrlik dissertaciya jumısında úyrenilgen tema boyınsha izertlew jumıların alıp barıw procesinde izertlew procesi birqansha keńeytirilip, tek dóńgelek membrana menen shegaralanıp qalmastan ulıwma abstrakt membrana hám shetleri qattı bekitilgen tórtmúyeshli membranalardıń terbelis proceslerine impuls tábiyatlı kúshlerdiń tásiрі úyreniledi. Usı máseleler boyınsha alıp barılǵan jumıslar dissertaciya jumısının ekinshi babında berilgen.

Dissertaciya jumısı kirisiw bólimi, 2 bap, 6 paragraf, juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlardıń diziminen ibarat.

Dissertaciyanıń birinshi babı járdemshi bap esaplanıwı múmkin, sebebi, bul bapta impuls tásirine ushıraǵan differenciallıq teńlemeler teoriyasına baylanıslı tariyxıy maǵlıwmatlar, dissertaciya jumısın orınlaw ushın kerekli bolǵan túsinikler hám olardıń anıqlamaları keltirilgen.

Magistrlik dissertaciya jumısın orınlaw barısında Amangeldieva Zuxra impuls tásirine ushıraǵan differenciallıq teńlemeler teoriyasına qarastı ilimiy ádebiyatlardı úyrendi, ilimiy maqalalar oqıw hám olardan alınǵan ilimiy nátiyjelerdi talqılaw boyınsha tájiriyesin arttırdı. Qoyılǵan máselelerdi belgilengen múddetlerde orınlap, matematikalıq kóz qarastan másele mazmunın ashıp kórsetiwge háreket etip, ózinde ilimge degen qızıǵıwshılıqtıń bar ekenligin kórsete bildi.

Usı alıp barılğan ilimiy jumıslar tiykarında jazılğan “Impuls tabiyatlı sırtqı tásirlerdi esapqa alğan jaǵdaydaǵı dóńgelek membrana terbelisi” atamasındaǵı temada orınlanǵan magistrlik dissertaciyası ámeldegi nızam talaplarına tolıq juwap beredi hám mámleketlik attestaciya komitetinde jaqlanıwı múmkin dep esaplayman.

Ilimiy basshı:

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq Mámleketlik universiteti

Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika

kafedrasi baslıǵı, docent, f.m.i.k

_____ Q.Q.Elǵondiev

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq Mámleketlik universiteti
5A-130103-Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika
Magistratura qánigeligi pitkeriwshisi
Amangeldieva Zuxra Niyazbay qızınıń
“Impuls tabiyatlı sırtqı tásirlerdi esapqa alǵan jaǵdaydaǵı dóńgelek membrana terbelisi”
temasındaǵı magistrlik dissertaciya jumısına

P I K I R

Bul magistrlik dissertaciya jumısı “Impuls tábiyatlı sırtqı tásirlerdi esapqa alǵan jaǵdaydaǵı dóńgelek membranalıq terbelisi” atamasında orınlangan hám tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan differenciallıq teńlemelerdiń sheshimleriniń bar bolıwı hám bul sheshimniń jıynaqlılıǵı haqqındaǵı máseleni izertlewge baǵıshlangan.

Dissertaciya jumısı kirisiw bólimi, 2 bab, 6 paragraf, juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Dissertaciyanıń kirisiw bóliminde impuls tásirindegi differenciallıq teńlemeler haqqında tariyxıy maǵlıwmatlar, dissertaciyaǵa tańlangan temalıq áhmiyetin tiykarlaw hám jumıstıń strukturası berilgen.

Magistrlik dissertaciya jumısınıń birinshi paragrafında tańlangan temalıq ilimiy mazmunın ashıp beriw ushın kerekli bolǵan fundamental túsinikler hám olardıń atamaları keltirilgen. Sonday-aq, klassikalıq matematikalıq fizikanıń giperbolalıq tipine kiriwshi teńlemeleri, atap aytqanda, tuwrımúyeshli hám dóńgelek membrana terbelisleri tegislikte úyrenilgen.

Magistrlik dissertaciya jumısınıń tiykarǵı bólimi esaplangan ekinshi babında membranalıq terbelis procesinde fiksirlengen waqıt momentlerinde impuls tábiyatlı kúshlerdiń táhiri nátiyjesindegi terbelisi qarastırılǵan.

Ekinshi baptań birinshi paragrafında ulıwmalıq jaǵday ushın, yaǵnıy, membrana Jordan iymek sıızıǵı menen shegaralangán jaǵdayda dep esaplap impuls tásirine ushıraǵan jaǵday úyrenilgen. Bunda impuls tásir momenti tayınlangan dep esaplanıp Fure usılı menen máseleniń terbelis nızamlılıǵı tabılǵan. Alınǵan impuls

tásirine ushıraǵan membrana teńlemesiniń sheshimi impuls shaması nolge teń dep esaplanǵanda klassikalıq matematikalıq fizikadaǵı jaǵday menen ústpe-úst túsken. Bul bolsa birinshi paragrafta alınǵan nátiyjelerdiń tuwrılıǵın kórsetedi.

Ekinshi baptıń ekinshi paragrafı “Tórt múyeshli membrananiń impuls tábiyatlı sırtqı kúshler tásirindegi terbelisi” dep atalıp, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k$$

tolqın teńlemesiniń

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G$$

baslanǵısh shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N$$

impuls tásiiri shártlerin hám

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=p} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=q} = 0$$

shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi qarastırılǵan hám sheshim ózgeriwshilerdi ayırıw usılı menen izlenip

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} [\alpha_{mn} \cos \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \frac{\beta_{mn}}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \\ + \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sum_{k=1}^p \gamma_{mn}(k) \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} (t - t_k)] \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$$

kórinisindegi qatar túrinde tabılǵan hám bul qatardıń jıyınalılıq shártleri alınıp, teorema kórinisinde berilgen.

Dissertaciyanıń ekinshi babınıń úshinshi paragrafında dóńgelek membrananiń radiallıq terbelis jaǵdayı, yaǵnıy awısıw u tek ǵana r hám t ǵa baylanıslı bolǵan haldaǵı impulslıq shama tásir etiw jaǵdayı qarastırılǵan.

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

teńlemesiniń

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(r)$$

baslanǵısh shártlerin

$$u(r, t)|_{r=R} = 0$$

shegaralıq shártin

$$\Delta \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \frac{\partial u(r, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(r, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(r), \quad k \in N$$

hám impulslıq tásir shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw maselesi qarastırılǵan hám sheshim

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_{n0} \cos \lambda_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a \lambda_n} \sin \lambda_n t + \sum_{k=1}^p \frac{\gamma_k}{a \lambda_n} \sin \lambda_n (t - t_k) \right] s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)$$

qatarı túrinde tabılǵan.

Dissertaciya taza matematikalıq tilde durıs jazılǵan. Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi keltirilgen hám dissertaciya mazmunına sáykes keledi.

Joqarıdaǵı ayılǵanlar tiykarında Amangeldieva Zuxra Niyazbay qızı tárepinen jazılǵan magistrlik dissertaciya jumısı ámeldegi nızam talaplarına tolıq juwap beriwin esapqa alıp, MAK dan jumıstı ayrıqsha dep bahalawın sorayman.

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq Mámleketlik universiteti

Differenciallıq teńlemeler hám matematikalıq fizika

kafedrasi dotsenti, f.m.i.k

_____ Ó.Qurbanbaev

Berdaq nomidagi Qoraqalpoq Davlat universiteti
5A-130103-Differentsial tenglamalar va matematik fizika
Magistratura mutaxassisligi bitiruvchisi
Amangeldieva Zuxra Niyazbay qizining
“Impuls tabiatli tashqi ta`sirlarni hisobga olgan holattagi doiraviy membrana tebranishi”
mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasiga

T A Q R I Z

O`zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgach, hayotning, siyosat va iqtisodning, xalq xo`jaligi va ishlab chiqarishning, ma`naviyat va ma`rifatning, san`at, madaniyat va sanoatning barcha sohalarida turli xil chuqur islohatlarning amalga oshirilishi kishilarning ruhiyatida, tafakkurida, ma`naviyatida oshirilgan o`zgarishlar uzluksiz ta`lim tizimida ham o`z o`rnini topdi. Mamlakatimizda uzliksiz ta`lim tizimi qaror topti, 11 yillik majburiy ta`lim, 4 yillik bakalaviyatura va 2 yillik magistratura bosqichlari shakllandi va barcha sohalar uchun bu tizimda kadrlar yetkazib berilmoqda.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida ham ilimiy ahamiyati katta bo`lgan impuls tabiatli tashqi ta`sirlarni hisobga olgan holattagi doiraviy membrana tebranishi o`rganilgan. Dissertatsiya ishi kirish qismi, 2 bop, yakunlovchi bo`lim va foydalanilgan adabiyotlar ro`yxatidan iborat.

Dissertatsiyaning kirish qismida impuls ta`siridagi differentsial tenglamalar haqida tarixiy ma`lumotlar, dissertatsiyaga tanlangan mavzuning ahamiyatini asoslash va ishning strukturasi berilgan.

Magistrlik dissertatsiyaning birinchi bobida dissertatsiya mavzusi uchun ilmiy ishlar olib borish uchun zarurli fundamental tushunchalar va ularning ta`riflari keltirilgan. Shuningdek, klassik matematik fizikaning giperbolik tipiga kiruvchi tenglamalari, xususan, to`rtburchakli, doiraviy membrana tebranishlari tekislikta o`rganilgan.

Magistrlik dissertatsiya ishining asosiy qismi hisoblangan ikkinchi bobida membrana tebranishi jarayonida fiksirlangan vaqt momentlarida impuls ta`biatli kuchlarning ta`siri natijasidagi tebranish tadqiq qilingan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida umumiy hol uchun, ya`ni, membrana Jordan egri chizig`i bilan chegaralangan holatta dep hisoblanib impuls ta`siriga uchragan holat o`rganilgan. Bunda impuls ta`sir momenti tayinlangan deb hisoblanib Fure usuli bilan masalaning tebranish qonuni topilgan. Olingan impuls ta`siriga uchragan membrana tenglamasining yechimi impuls mug`dori nolga teng deb hisoblanganda klassik matematik fizikadagi holat bilan bir xil bo`lgan. Bu birinchi paragrafta olingan natijalarning to`g`riligini ko`rsatadi.

Ikkinchi bobning ikkinchi va uchinchi paragraflarida mos to'rtburchakli va doiraviy membranalar holatida impuls ta'biatli kuchlarning ta'sirini hisobga olgan holat uchun Fure usulining modifikatsiyasi berilgan. To'rtburchakli membrana holati uchun yechimda kelib chiquvchi qatorlarning yaqinlashuv shartlari olingan va natija teorema ko'rinishida berilgan.

Dissertatsiya sof matematik jihatdan to'g'ri yozilgan. Foydalanilgan adabiyotlar to'plami keltirilgan va dissertatsiya mazmuniga mos keladi.

Yuqoridagi aytilganlarga asoslangan holda Amangeldieva Zuxra Niyazbay qizi tarafidan yozilgan magistrlik dissertatsiya ishi amaldagi nizom talablariga to'la javob berishini hisobga olib, DAK dan uni ijobiy baholashlarini so'rayman.

Taqrizchi:

Urganch Davlat universiteti amaliy matematika

va matematik fizika kafedrasi dotsenti, f.m.i.k

_____ M.Xasanov

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA
ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

**BERDAQ ATÍNDAĞÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Fakultet: Magistratura bólimi

Magistrant: Amangeldieva Zuxra

Kafedra: Differencialliq teńlemeler

Ilimiy basshı: Q.Q.Elǵondiev

hám matematikalıq fizika

Qánigeligi: 5A130103- Differencialliq

Oqıw jılı: 2018-2019/2019-2020

teńlemeler hám matematikalıq fizika

MAGISTRLIK DISSERTACIYASÍ ANNOTACÍYASÍ

Temaniń tiykarlaması hám aktuallıǵı: Impuls tásirine ushıragan differencialliq teńlemeler boyınsha ilimiy-izertlew jumısları 1970-jıldan baslap alıp barılmaqta. Bunday teńlemeler domen ham marten pechlerinde temperaturalıq rejimlerdi basqarıwda, mexanikalıq saatlardıń udarlıq mexanizimin uyreniwde, korabllerdiń sayqalıw processlerin izertlewde, ham basqa da qubılıslar ushın matematikalıq model retinde isletiledi. Ádettegi impuls tásirine ushıragan differensialliq teńlemeler teoriyası bugingi kúnge kelip qalıplesken dep aytıw múmkin. Bugingi kúnde impuls tásirine ushıragan dara tuwındılı teńlemeler teoriyasın qurıw ústinde ilimiy jumıslar qızǵın alıp barılmaqta. Usı aytqanlardan kelip shıǵılǵan halda magistrlik dissertaciya teması giperbolalıq tiptegi ekinshi tártipli dara tuwındılı differensialliq teńlemelerdi izertlew máseleleriniń biri bolǵan ham ekinshi tártipli impuls tásirine ushıragan dara tuwındılı teńlemeler menen sawlelenetuǵın membranalar terbelisin uyreniwge baylanıslı etip tańlandı.

Bul jumıstaǵı dóńgelek membrananıń impuls tásirini astındaǵı terbelisi máselesi radiallıq jaǵday ushın izertlengenligi jumıstıń aktuallıǵın belgileydi.

Izertlew obiekti: Impuls tásirine ushıraǵan dara tuwındılı differentsiallıq teńlemeler

Izertlew predmeti: Impuls tásirine ushıragan ekinshi tártipli dara tuwındılı differentsiallıq teńlemeler menen sáwlelenetuǵın membranalar. Tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan membrananıń ulıwma jaǵdayı, impuls tásirine ushıraǵan tuwrı múyeshli membrana terbelisi, impuls tásirini astında dóńgelek membrana terbelisi.

Izertlewdiń maqseti hám wazıypaları: Tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan membrananıń ulıwma jaǵdayı, impuls tásirine ushıraǵan tuwrı múyeshli membrana terbelisi, impuls tásirini astında dóńgelek membrana terbelisin matematikalıq sáwleleytuǵın ekinshi tártipli dara tuwındılı teńlemelerdi izertlew.

Ulıwma jaǵday ushın, yaǵnıy membrana tegislikte Jordan iymekleri menen shegaralangán dep esaplangán jaǵdayda tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tasirine ushıragan membrana terbelisi teńlemesiniń sheshimin sheshimin Fure usılı jardeminde qurıw. Fure usılın impuls tásirindegi tuwrı múyeshli membrana hám dóńgelek membrananıń terbelis teńlemesin izertlewdegi modifikaciýaların islep shıǵıw.

Izertlew usılları: Magistrlik dissertaciya jumısında ekinshi tártipli ádettegi differentsiallıq teńlemelerdi sheshiw usılları ham matematikalıq fizikanıń ózgeriwshilerdi ayırıw usılı qollanılgán.

Izertlewdiń ilimiy jańalıǵı: Magistrlik dissertaciya jumısı membrana tegislikte Jordan iymekleri menen shegaralangán dep esaplangán jaǵdayda tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan membrana terbelisi teńlemesiniń sheshimi ózgeriwshilerdi ayırıw usılı jádeminde qurıldı. Fure usılı impuls tásirindegi tuwrı múyeshli membrana hám dóńgelek membrananıń terbelis teńlemesin izertlewdegi modifikaciyası islep shıǵıldı. Impuls shaması nolge teń dep esaplanganda jumısta alıngán natıyjelerden ekinshi tartipli dara tuwındılı

tenlemeler ushın matematikalıq fizika teńlemelerindegi juwmaqlar kelip shıǵadı, al bul bolsa jumısta orınlangan esaplawlardıń durıs ekenligin kórsetedi.

Dissertaciya jumısınıń kólemi hám dúzilisi: Magistrlik dissertaciya jumısı kirisiw, eki bap, altı paragraf, juwmaqlaw hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Orınlangan jumıstıń tiykarǵı nátiyjeleri:

- Magistrlik dissertaciya jumısı membrana tegislikte jordan iymekleri menen shegaralangán dep esaplangán jaǵdayda tayınlangán waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan membrana terbelisi teńlemesiniń sheshimi ózgeriwshilerdi ayırıw usılı jádeminde qurıldı.

- Fure usılı impuls tásirindegi tuwrı múyeshli membrana terbelisi tolıq izertlendi.

-dóńgelek membrananiń terbelis teńlemesin izertlewdegi modifikaciyası islep shıǵıldı.

Juwmaq hám usınıslardıń qısqasha ulıwmalastırılıwı: Magistrlik dissertaciya jumısta qarastırılǵan maseleler taza ham bunda alınǵan nátiyjeler boyınsha 3 ilimiy maqala jariyalandı. Alınǵan ilimiy natiyjelerdi kvazısızıqlı dara tuwındılı teńlemelerdi asimptotikalıq metodlar jardeminde izertlewde tiykar etip alıw mumkin.

Ilimiy basshı:

f.m.i.k., doc. Q.Q.Elǵondiev

Magistrant:

Z.N.Amangeldieva

**MINISTRY OF HIGH AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION OF
THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN**

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY

Faculty: Department of Masters	Master student: Amangeldieva Zuxra
Department: Differential equations and mathematical physics	Supervisor: Q.Q.Elgondiv
Academic year: 2018-2019/2019-2020	Speciality: 5A130103- Differential equations and mathematical physics

THE ANNOTATION OF THE MASTER DISSERTATION

Relevance of the inquiry: Differential equations under the influence of impulses have been studied since the 1970s. Such equations are used in mechanics as a mathematical model. The master's dissertation is devoted to the study of the differential equation of impulse captivity. In this work the oscillations of the circular membrane under the influence of impulses have been studied for the radial state.

Object of the inquiry: Differential equations with special derivatives under the influence of impulses

Subject of the inquiry: Membranes represented by second-order specific derivative differential equations under impulse action, rectangular membrane under the influence of impulses, vibration of a circular membrane under the influence of a pulse.

Purpose and objectives of the inquiry: Study of the vibration of a circular membrane at a fixed moment of time. Use the Fourier method to find a solution

Methods of inquiry: The research used the method of separating variables in mathematical physics.

Scientific novelty of the work: The equation of vibration of a circular membrane under the influence of impulses was studied and found in the form of an insoluble series.

Structure and composition of the work: The dissertation consists of an introductory part, 2 chapters, 6 paragraphs, a concluding part and a list of references.

The main results of the work:

- membrane oscillations under the influence of impulses were studied for the general case

- rectangular membrane oscillations under the influence of impulses were studied

- circular membrane oscillations under the influence of impulses were studied

Conclusions and suggestions: The results obtained in the dissertation can be used in the study of quasi-linear specific product equations using asymptotic methods.

Supervisor:

Q.Q.El'gondiev

Master student:

Z.Amangeldieva

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

Qoljazba huqıqı

UDK 517.958

BERDAQ ATINDAG`Í QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI

AMANGELDIEVA ZUXRA NIYAZBAY QÍZÍ

**“IMPULS TÁBIYATLÍ SÍRTQÍ TA`SIRLERDI ESAPQA ALĞAN
JAĞDAYDAĞÍ DÓŃGELEK MEMBRANA TERBELISI”**

**5A-130103 Differenciallıq ten`lemeler hám matematikalıq fizika
qánigeligi
Magistr akademiyalıq dárejesin alıw ushın usınılğan**

D I S S E R T A C I Y A

MAK da jaqlawğa ruxsat

Magistratura bólimi baslıǵı:
y.i.k., doc. A.Gulimov

“Differenciallıq ten`lemeler hám
matematikalıq fizika” kafedrası baslıǵı
f.m.i.k., doc. Q.Elǵondiev

Ilimiy basshı:
f.m.i.k., doc. Q.Elǵondiev

Nókis-2020

Mazmunı

Kirisiw

I bap

Tiykargı túsinipler hám anıqlamalar

§ 1.1 Membrananıń terbelis máselesi

§ 1.2 Bessel teńlemesi

§ 1.3 Dóńgelek membrana terbelisi

II bap

Impuls tásirine ushıraǵan dóńgelek membrana
teńlemesin izertlew

§2.1. Tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan membrananıń
terbelisi

§ 2.2 Impuls tábiyatlı sırtqı kúshlerdiń tórt múyeshli
membrananıń terbelisine tásiiri

§ 2.3 Impuls tásirine ushıraǵan dóńgelek membrana teńlemesin izertlew

Kirisiw

Ózbekstan Respublikası gárezsizlikke eriskennen soń turmıstıń, sıyasat hám ekonomikanıń, xalıq xojalıǵı hám islep shıǵarıwdıń, mánawiyat, kórkem-óner, madeniyat hám islep shıǵarıwdıń barlıq tarawlarında túrli tereń reformalardıń ámelge asırılıwı ilim-pán tarawın rawajlandırıwǵa da óz tásirin tiygizbey qalmadı. Mámleketimizde úziliksiz bilimlendiriw sisteması engizildi, 11 jıllıq majbúriy mektep bilimlendiriwi, 4 jıllıq bakalaviatura, 2 jıllıq magistratura basqışları qalıplesti hám hám barlıq tarawlar boyınsha bul sistemada kadrlar jetkerip berilmekte. Ásirese keyingi jıllarda matematika ilimi hám onıń rawajlanıwına jurt basshımız ayrıqsha itibar qaratpaqta. Sonday-aq ekologiya hám qorshaǵan ortalıqtı qorgaw boyınsha da bir qatar is-ilajlar alıp barılmaqta.

Ózbekstan Respublikası Prezidenti Shavkat Mirziyoyev 2019-jılı 9-iyul kúni “Matematika baǵdarı pánlerin jáne de rawajlandırıwdı mámleket tárepinen qollap-quwatlaw, Ózbekstan Respublikası pánler akademiyasınıń V.I.Romanovskiy atındaǵı matematika institutı jumısların jáne de rawajlandırıw is-ilajları haqqında”ǵı nızamdı tastıyıqladı.

Ózbekstan Respublikası Prezidenti 2017-jılı 21-apreldegi “Ekologiya hám qorshaǵan ortalıq boyınsha mámleket basqarıw sistemasın rawajlandırıw haqqında”ǵı PF-5024-sanlı nızamı tastıyıqlandı.

Ózbekstan Respublikası Prezidentiniń 2018-jılı 29-dekabrdegi 1106-F-sanlı nızamına muwapıq Aral boyı ekologiyalıq teń salmaqlılıǵın tiklew maqsetinde Aral suwı qurıǵan jerlerge toǵay-melioraciya tádbirlerin ámelge asırıw maqsetinde 17,8 milliard qarjı ajratıldı.

Qısqa waqıt intervalında tásir qılatuǵın sırtqı kúshlerdi itibarǵa alıp real protsesslerdiń evolyutsiyasın matematikalıq modellestiriwde bunday kúshlerdiń táhiri júdá qısqa waqıt ishinde ámelge asadı, yaǵnıy bunday kúshler bir zamatta tásir qıladı dep esaplaw qolay boladı. Real protsessti bunday ideallastırıw traektoriyaları úziliske iye bolatuǵın dinamikalıq sistemalardı úyreniwdiń zárurligine alıp keledi. Bunday sistemalardı impuls tábiyatlı tásirge ushıraǵan

differentziallıq teńlemeler dep te ataydı. İmpuls tábiyatlı tásirge ushırağan differentziallıq teńlemelerdi úyreniw máselesin ilimiy másele dep aytıw múmkin emes. Sebebi bunday máseleler sızıqlı emes mexanikanıń rawajlanıwınıń baslanğısh basqıshlarında payda boldı hám sızıqlı emes terbelis protsesslerin modellestiriwde óziniń ápiwayılıǵı menen fiziklerdiń itibarına miyassar bolǵan.

Bunday máselelerdiń klassik misalı sıpatında mexanik saatlar modelin atap ótiw múmkin. Usı misal tiykarında 1937-jılı N.M.Krilov hám N.N.Bogolyubov ózleriniń “Vvedeniye v lineynuyu mexaniku” atlı daǵaza qılınǵan monografiyasında impuls tábiyatlı tásirge ushırağan differentziallıq teńlemelerdi úyreniwde sızıqlı emes mexanikanıń asimptotik metodlarınan paydalanıw múmkinligin kórsetti.

Sońǵı waqıtlarda traektoriyaları úziliske iye bolatuǵın dinamikalıq sistemalardı úyreniwge qızıǵıwdıń artıwı jańa texnika hám texnologiyalardıń talaplarınan kelip shıǵadı. Bunday texnika hám texnologiyalarda impulslı avtomat basqarıw sistemaları, impulslı esaplaw sistemalarınıń paydalanıwına baylanıslı hár qıylı fizikalıq tábiyatlı tásirge ushırağan differentziallıq teńlemelerdi úyreniwge baǵıshlanǵan matematikalıq jumislardıń sanı biraz arttı hám bunday máseleler menen qálegen matematika mektepleri shuǵıllana basladı. İmpuls tábiyatlı tásirge ushırağan differentziallıq teńlemelerdi úyreniw jumısların sistemalı alıp barǵan Kiev qalasındaǵı sızıqlı emes mexanika mektebi boldı. Usı matematika mektebi ilimpazları A.M.Samoylenko, N.A.Peresiyuk tárepinen jazılıp 1987-jılı baspadan shıqqan “Differentsialnie uravneniya s impulsnim vozdeystviem” atamasındaǵı monografiyada impuls tábiyatlı tásirge ushırağan differentziallıq teńlemeler, bunday teńlemelerdiń klassifikatsiyası hám olarǵa baylanıslı máselelerdi úyreniw metodları berilgen. Sonıń menen birge impuls tábiyatlı tásirge ushırağan differentziallıq teńlemeler teoriyasınıń ádettegi differentziallıq teńlemeler teoriyasına uqsaslıǵı hám ayırmashılıǵı úyrenilgen bolıp, búgingi kúnde bul miynet impuls tábiyatlı tásirge ushırağan differentziallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykarı dep tán alınǵan.

Ítibarıńızǵa bayan qılınıp atırǵan magistrlik dissertaciya jumısı “Impuls tábiyatlı sırtqı tásirlerdi esapqa alǵan jaǵdaydaǵı dóńgelek membrananıń terbelisi” atamasında orınlanadı hám tayınlanǵan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan differentsiallıq teńlemelerdiń sheshimleriniń bar bolıwı hám bul sheshimniń jıyınalıqlıǵı haqqındaǵı máseleni izertlewge baǵıshlanǵan.

Temanıń tiykarlaması hám aktuallıǵı: Impuls tásirine ushıran differentsiallıq teńlemeler boyınsha ilimiy-izertlew jumısları 1970-jıldan baslap alıp barılmaqta. Bunday teńlemeler domen ham marten pechlerinde temperaturalıq rejimlerdi basqarıwda, mexanikalıq saatlardıń udarlıq mexanizimin uyreniwde, korabllardıń sayqalıw processlerin izertlewde, ham basqa da qubılıslar ushın matematikalıq model retinde isletiledi. Ádettegi impuls tásirine ushıraǵan differentsiallıq teńlemeler teoriyası bugingi kúnge kelip qalıplesken dep aytıw múmkin. Bugingi kúnde impuls tásirine ushıraǵan dara tuwındılı teńlemeler teoriyasın qurıw ústinde ilimiy jumıslar qızǵın alıp barılmaqta. Usı aytqanlardan kelip shıǵılǵan halda magistrlik dissertaciya teması giperbolalıq tiptegi ekinshi tártipli dara tuwındılı differentsiallıq teńlemelerdi izertlew máseleleriniń biri bolǵan ham ekinshi tártipli impuls tásirine ushıraǵan dara tuwındılı teńlemeler menen sáwlelenetuǵın membranalar terbelisin uyreniwge baylanıslı etip tańlandı.

Bul jumıstaǵı dóńgelek membrananıń impuls táhiri astındaǵı terbelisi máselesi radiallıq jaǵday ushın izertlengenligi jumıstıń aktuallıǵın belgileydi.

Izertlew obiekti: Impuls tásirine ushıraǵan dara tuwındılı differentsiallıq teńlemeler

Izertlew obiekti hám predmeti: Impuls tásirine ushıran ekinshi tártipli dara tuwındılı differentsiallıq teńlemeler menen sáwlelenetuǵın membranalar. Tayınlanǵan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan membrananıń ulıwma jaǵdayı, impuls tásirine ushıraǵan tuwrı múyeshli membrana terbelisi, impuls táhiri astında dóńgelek membrana terbelisi.

Izertlewdiń maqseti hám wazıypaları: Tayınlanǵan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan membrananıń ulıwma jaǵdayı, impuls tásirine ushıraǵan tuwrı múyeshli membrana terbelisi, impuls táhiri astında dóńgelek membrana terbelisin matematikalıq sáwleleytuǵın ekinshi tártipli dara tuwındılı teńlemelerdi izertlew.

Ulıwma jaǵday ushın, yaǵnıy membrana tegislikte Jordan iymekleri menen shegaralanǵan dep esaplanǵan jaǵdayda tayınlanǵan waqıt momentlerinde impuls tasirine ushıranǵan membrana terbelisi teńlemesiniń sheshimin Fure usılı járdeminde qurıw. Fure usılın impuls tásirindegi tuwrı múyeshli membrana hám dóńgelek membrananiń terbelis teńlemesin izertlewdegi modifikaciýaların islep shıǵıw.

Izertlew usılları: Magistrlik dissertaciya jumısında ekinshi tártipli ádettegi differenciallıq teńlemelerdi sheshiw usılları ham matematikalıq fizikanıń ózgeriwshilerdi ayırıw usılı qollanılǵan.

Izertlewdiń ilimiy jańalıǵı: Magistrlik dissertaciya jumısı membrana tegislikte Jordan iymekleri menen shegaralanǵan dep esaplanǵan jaǵdayda tayınlanǵan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıranǵan membrana terbelisi teńlemesiniń sheshimi ózgeriwshilerdi ayırıw usılı jádeminde qurıldı. Fure usılı impuls tásirindegi tuwrı múyeshli membrana hám dóńgelek membrananiń terbelis teńlemesin izertlewdegi modifikaciyası islep shıǵıldı. Impuls shaması nolge teń dep esaplanǵanda jumısta alınǵan natıyjelerden ekinshi tartipli dara tuwındılı tenlemeler ushın matematikalıq fizika teńlemelerindegi juwmaqlar kelip shıǵadı, al bul bolsa jumısta orınlanǵan esaplawlardıń durıs ekenligin kórsetedi.

Dissertaciya jumısının kólemi hám dúzilisi: Magistrlik dissertaciya jumısı kirisiw, eki bap, altı paragraf, juwmaqlaw hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Birinshi bap “Tiykargı túsinipler hám anıqlamalar” dep ataladı. Bul bap úsh paragraftan ibarat. Birinshi paragrafta impuls tásirine ushıranǵan differenciallıq teńlemeler túsiniǵı, usı túsinike baylanıslı anıqlamalar, impuls tásirine ushıranǵan differentsiallıq teńlemelerdiń tiykargı qásiyetleri hám bunday teńlemelerdi sheshiw usılları haqqında maǵlıwmat berilgen. Ekinshi paragrafta Bessel teńlemesi hám onıń sheshimleri haqqında, túrli indeksli Bessel funkciyaları arasındalıq baylanıs haqqında ayılǵan. Úshinshi bapta dóńgelek membrana terbelis teńlemesi hám onıń sheshimi haqqında ayılǵan.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń ekinshi babı 3 paragraftan ibarat. Birinshi paragraf “Membrananıń impuls tásirine ushıraǵan terbelisi ” dep atalıp, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k \quad (2.1.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi_0(x, y) \\ \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

baslanǵısh shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N \quad (2.1.3)$$

impuls táhiri shártlerin hám

$$u(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2.1.4)$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(x, y, t)$ sheshimin tabıw máselesi qarastırıladı.

Ekinshi paragraf “Tórt múyeshli membrananıń impuls tábiyatlı sırtqı kúshler tásirindegi terbelisi ” dep atalıp, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k \quad (2.2.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi_0(x, y) \\ \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

baslanǵısh shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N \quad (2.2.3)$$

impuls táhiri shártlerin hám

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=p} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=q} = 0 \quad (2.2.4)$$

shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi qarastırıladı.

U`shinshi paragraf “Impuls tásirine ushıraǵan dóńgelek membrana teńlemesin izertlew ” dep atalıp, dóńgelek membrananiń radiallıq terbelis jaǵdayın, yaǵnıy awısıw u tek ǵana r hám t ǵa baylanıslı bolǵan haldaǵı impulslıq tásir jaǵdayı qarastırılǵan.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \frac{1}{a^2}u_{tt} \quad (2.3.9)$$

baslanǵısh shártler

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(r) \quad (2.3.10)$$

shegaralıq shárt

$$u(r, t)|_{r=R} = 0 \quad (2.3.11)$$

hám impulslıq tásir

$$\Delta \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \frac{\partial u(r, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(r, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(r), \quad k \in N \quad (2.3.12)$$

shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi qarastırıladı.

Bunnan soń juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi orın alǵan.

I bap

Tiykargı túsınıklar hám anıqlamalar

§ 1.1 Membrananıń terbelis máselesi

Ulıwmalıq jaǵday. Shetleri qattı bekitilgen elastikalıq membrana tınısh jaǵdayında OXY tegisliginde Γ iymek sıızığı menen shegaralanǵan bazıbir G oblastı menen ústpe-úst tússin. Bunday jaǵdayda membrananıń terbelisi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1.1.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi_0(x, y) \\ \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

baslanǵısh shártlerin,

$$u(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (1.1.3)$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(x, y, t)$ sheshimi menen sáwlelenedi.

(1.1.1)-(1.1.3) máseleniń sheshimin Fure usılı járdeminde tabıw máselesin qarastıramız.

(1.1.1)-(1.1.3) máselesiniń sheshimin Fure metodına sáykes

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y) \quad (1.1.4)$$

kóbeymesi túrinde izleyміз.

Sonda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} &= \frac{d^2 T(t)}{dt^2} V(x, y) \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} &= T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} &= T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

boladı. (1.1.5) tuwındıların (1.1.1) teńlemedegi orınlarına aparıp qoyıp,

$$T''(t)V(x,y) = a^2 T(t) \left(\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} \right)$$

yamasa

$$T''(t)V(x,y) = a^2 T(t) \Delta V, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.1.6)$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemeden

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)}$$

teńligi kelip shıǵadı. Bul teńliktiń shep tárepi x hám y ke, al óń tárepi bolsa t ǵa baylanıslı emes. Demek,

$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$ hám $\frac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)}$ shamalarınıń hár biri x, y ke de t ǵa da ǵárezli emes, yaǵnıy

olar turaqlı. Usı turaqlını $-\lambda$ arqalı belgilep alamız. Sonda

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)} = -\lambda \quad (1.1.7)$$

boladı. Bunnan $T(t)$ hám $V(x,y)$ funkciyaları sáykes

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (1.1.8)$$

$$\Delta V(x,y) + \lambda V(x,y) = 0 \quad (1.1.9)$$

teńlemelerin qanaatlandıradı degen juwmaqqa kelemiz.

(1.1.9) teńleme Gelmgolc teńlemesi dep ataladı.

$u(x,y,t)$ funkciyasınıń mánisin (1.1.4) ten (1.1.3)-shegaralıq shártke qoysaq

$$T(t)V(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma, \quad t \geq 0$$

teńligin payda etemiz. Bul teńlik óz náwbetinde $V(x,y)$ funkciyası ushın

$$V(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (1.1.10)$$

shegaralıq shártke teń kúshli.

(1.1.9) Gelmgolc teńlemesi ushın birtekli (1.1.10) Dirixle máselesi nollik emes sheshimge iye bolǵan λ nıń mánisine menshikli mánis (1.1.menshikli san), usı menshikli sanǵa sáykes keliwshi $V(x, y)$ funkciyasına menshikli funkciya dep ataladı.

G oblasttıń shegarası Γ bólek-sıypaq Jordan iymek sızıǵı bolıp, $V(x, y)$ funkciyası (1.1.9)- (1.1.10) máselesiniń λ menshikli mánislerine sáykes menshikli funkciyası bolsın.

$$V\Delta V = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2$$

birdeyligin G oblasti boyınsha integrallasaq hám Gauss-Ostragradskiy formulasınan paydalanıp, (1.1.10) teńleme hám (1.1.11) shegaralıq shártke tiykarlanıp

$$\int_G (V_x^2 + V_y^2) dx dy = \int_\Gamma V \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_G V \Delta V dx dy = \lambda \int_G V^2 dx dy$$

teńligine iye bolamız. Bunnan menshikli mánis $\lambda > 0$ ekenligi kelip shıǵadı. Onda $\lambda = \mu^2$, μ -haqıyqıy san belgilewin kiritiw múmkin. Usını esapqa alıp (1.1.9) teńlemenı

$$T''(t) + (a\mu)^2 T(t) = 0, \quad (1.1.11)$$

túrinde jazıp alamız.

G oblastına qoyılǵan jetkilikli ulıwma shártlerde (1.1.9), (1.1.10) Dirixle máselesiniń $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ menshikli mánisleriniń sanaqlı kópligi hám olarǵa sáykes $V_1(x, y), V_2(x, y), \dots, V_n(x, y), \dots$ menshikli funkciyaları bar boladı.

μ_n menshikli sanǵa (1.1.11) teńlemesiniń $T_n(t)$ sheshimi sáykes keledi hám bunı esapqa alıp, (1.1.1) teńlemesiniń sheshimin

$$u_n(x, y, t) = T_n(t) V_n(x, y), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1.12)$$

túrinde jazıp alamız.

Eger $V_k(x, y)$ hám $V_m(x, y)$ sáykes λ_k hám λ_m menshikli mánislerge sáykes keliwshi (1.1.9) teńlemenin sheshimleri bolsa, onda

$$\int_G V_k(x, y) V_m(x, y) dx dy = 0, \quad k \neq m \quad (1.1.13)$$

teńligi orınlı boladı.

Bul tastıyqlawdı dálillew ushın

$$V_k \Delta V_m - V_m \Delta V_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_k \frac{\partial V_m}{\partial x} - V_m \frac{\partial V_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_k \frac{\partial V_m}{\partial y} - V_m \frac{\partial V_k}{\partial y} \right)$$

birdeyliginen paydalanamız. Gauss–Ostragradıskıy furmulasın paydalanıp hám

$$\Delta V_k = -\lambda_k V_k, \quad \Delta V_m = -\lambda_m V_m, \quad (x, y) \in G$$

$$V_k(x, y) = V_m(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$

teńliklerin esapqa alǵan halda

$$\int_G (V_k \Delta V_m - V_m \Delta V_k) dx dy = (\lambda_k - \lambda_m) \int_G V_k \cdot V_m dx dy = 0$$

teńligine iye bolamız. Bunnan $\lambda_k \neq \lambda_m$ bolǵanı ushın (1.1.14) birdeyligi kelip shıǵadı.

Endi (1.1.1)-(1.1.4) máselesinin sheshimin

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y) T_n(t) \quad (1.1.14)$$

qatarınıń qosındısı túrinde izleymiz.

Eger bul qatardı x, y boyınsha eki márte aǵzama-aǵza differenciallaw nátiyjesinde kelip shıqqan qatarlar G oblastında teń ólshewli jıynaqlı bolsa, onda onıń qosındısı (1.1.1) teńlemenin (1.1.3) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı.

(1.1.2) baslanǵısh shártinin orınlı bolıwı ushın

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y) T_n(0) = \varphi_0(x, y)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y) T'_n(0) = \varphi_1(x, y)$$

teńlikleriniń orınlı bolıwı zárúr. Bul eki teńlikti $V_k(x, y)$ ke kóbeyp G oblasti boyınsha

$$T_n(0) = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_0(x, y) V_n(x, y) dx dy \quad \text{integrallasaq,} \quad (1.1.13) \quad \text{teńligin}$$

$$T'_n(0) = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_1(x, y) V_n(x, y) dx dy \quad \text{esapqa alǵan halda}$$

teńliklerine iye bolamız. Bunda

$$N(V_n) = \left(\int_G V_n^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}$$

sanı $V_n(x, y)$ funkciyasınıń norması dep ataladı.

Solay etip, $T_n(t)$ funkciyası

$$T''(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) = 0, \quad t \neq t_k \quad (1.1.15)$$

teńlemesiniń

$$T_n(0) = \sigma_{n0}, \quad T'_n(0) = \sigma'_{n0} \quad (1.1.16)$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı eken. Bunda

$$\sigma_{0n} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_0(x, y) V_n(x, y) dx dy$$

$$\sigma'_{0n} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_1(x, y) V_n(x, y) dx dy$$

(1.1.15)-(1.1.16) másele sheshimi

$$T_n(t) = \sigma_{n0} \cos a \mu_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a \mu_n} \sin a \mu_n t \quad (1.1.17)$$

túrinde jazıladı. (1.1.17) formuladan $T_n(t)$ funkciyasın (1.1.14) tegi ornına qoyıp, (1.1.1)-(1.1.3) máseleń sheshimin

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_{n0} \cos a \mu_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a \mu_n} \sin a \mu_n t \right] V_n(x, y) \quad (1.1.18)$$

kóriniste jazamız.

Tuwrı múyeshli membrananiń terbelisi.

Shetleri bekkem bekutilgen elastikalıq membrana (x, y) tegisliginde

$x = 0, x = p, y = 0, y = q$ sıızıqları menen shegaralangan,

$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$ tuwrımúyeshli membranani qarastıramız.

Bunday jaǵdayda membrananiń terbelisi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.1.19)$$

tolqın teńlemesiniń

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (1.1.20)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G$$

baslanǵısh shártlerin,

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=p} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=q} = 0 \quad (1.1.21)$$

shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıwdan ibarat. Bul máseleniń sheshimin tabıw máselesi bul paragrafta qarastırılatuǵın tiykargı máseleden qabıl etiledi.

(1.1.19)-(1.1.21) máselesiniń sheshimin Fure metodına sáykes

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y) \quad (1.1.22)$$

kórinisinde izleybiz. (1.1.23)-funkciyanı G oblastında eki márte differenciallap

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{d^2 T(t)}{dt^2} V(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} = T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} = T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}$$

tuwındıların (1.1.19) máseledegi orınlarına qoyıp,

$$T''(t)V(x, y) = a^2 T(t) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

teńlemesine iye bolamız.

Bunnan

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{V(x, y)}$$

teńligi kelip shıǵadı. Bul teńliktiń shep tárepi x hám y ten, al oń tárepi bolsa t dan ǵárezli emes. Demek,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \text{ hám } \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{V(x, y)} \text{ shamalarınıń hár biri } x, y \text{ ke de } t \text{ ǵa da ǵárezli emes, yaǵnıy}$$

olar turaqlı. Usı turaqlılını $-\mu^2$ arqalı belgilep alamız. Sonda

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)} = -\mu^2$$

teńligi kelip shıǵadı. Bunnan (1.1.22) funkciya (1.1.19) teńlemenıń sheshimi bolıwı ushın $T(t)$ hám $V(x, y)$ funkciyaları

$$T''(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0, \quad (1.1.23)$$

$$\Delta V(x, y) + \mu^2 V(x, y) = 0 \quad (1.1.24)$$

teńlemeleri qanaatlandırıwı kerek. (1.1.24) teńleme Gelmgolc teńlemesi ekenligi málim. Endi

$$\Delta V(x, y) + \mu^2 V(x, y) = 0$$

teńlemesi ushın (1.1.21) shegaralıq shártlerinen hám (1.1.22) den paydalanıp,

$$V|_{x=0} = 0; \quad V|_{x=p} = 0; \quad V|_{y=0} = 0; \quad V|_{x=q} = 0 \quad (1.1.25)$$

shegaralıq shártlerine iye bolamız.

(1.1.24), (1.1.25) máselesiniń menshikli mánislerin hám menshikli funkciyaların tabamız. Onıń ushın (1.1.25) teńlemede

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (1.1.26)$$

dep, ózgeriwshilerin ajıratamız. Onıń ushın (1.1.26) dı (1.1.25) teńlemege qoyıp,

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \mu^2 X(x)Y(y) = 0$$

yamasa

$$X''(x)Y(y) + X(x)[Y''(y) + \mu^2 Y(y)] = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemeden

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \mu^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)}$$

teńligi kelip shıǵadı. Bul teńliktiń shep tárepi x tan, al óń tárepi y ten ǵárezli

bolmaǵanı ushın $\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \mu^2$ hám $-\frac{X''(x)}{X(x)}$ turaqlı boladı. Usı turaqlını μ_1^2 arqalı

belgileymiz, yaǵnıy

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \mu^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu_1^2.$$

Bunnan $\mu_2^2 = \mu^2 - \mu_1^2$ yamasa

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 \quad (1.1.27)$$

belgilewin kiritip

$$X''(x) + \mu_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \mu_2^2 Y(y) = 0 \quad (1.1.28)$$

túrindegi eki ádettegi differenciallıq teńlemelerge iye bolamız. Sonıń menen birge (1.1.25) shegaralıq shártlerden

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 & X(p) &= 0 \\ Y(0) &= 0, & Y(q) &= 0 \end{aligned}$$

shegaralıq shártleri kelip shıǵadı.

Demek, x tıń funkciyası

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \mu_1^2 X(x) &= 0 \\ X(0) &= X(p) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.29)$$

shegaralıq máselesiniń, al $Y(y)$ funkciyası bolsa

$$\left. \begin{aligned} Y''(y) + \mu_2^2 Y(y) &= 0 \\ Y(0) &= Y(q) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.30)$$

shegaralıq máselesiniń sheshimi bolıwı kerek eken.

(1.1.29) shegaralıq máselesin sheshemiz. Bul máseledegi ekinshi tártipli teńlemenin ulıwma sheshimi

$$X(x) = c_1 \cos \mu_1 x + c_2 \sin \mu_1 x$$

túrinde jazıladı. Endi máseledegi shegaralıq shártlerden paydalanıp, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ mánislerin tabıw qıyın emes. Onda (1.1.29) shegaralıq máselesiniń sheshimi

$$X(x) = \sin \mu_1 x \quad (1.1.31)$$

funkciyası boladı. Sonıń menen birge

$$\sin \mu_1 p = 0 \quad (1.1.32)$$

bolıwı kerek. (1.1.32) teńlemeden μ_1 sheksiz kóp

$$\mu_{1,m} = \frac{m\pi}{p}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

mánislerine iye bolıwı kelip shıǵadı.

Usıǵan uqsas (1.1.30) shegaralıq máselesiniń sheshimi

$$Y(y) = \sin \mu_2 y \quad (1.1.33)$$

funkciyası bolıwın hám sonıń menen birge

$$\sin \mu_2 q = 0 \quad (1.1.34)$$

bolıwın kóremiz. (1.1.34) teńlemeden μ_2 niń

$$\mu_{2,n} = \frac{n\pi}{q}, \quad n = 1, 2, \dots$$

túrindegi mánislerine iye bolamız.

Onda $\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$ bolǵanlıǵı ushın μ^2 tıń

$$\mu_{mn}^2 = \mu_{1m}^2 + \mu_{2n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right) \quad (1.1.35)$$

Solay etip, (1.1.35) menshikli mánislerge (1.1.24), (1.1.25) shegaralıq máselesiniń

$$V_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (1.1.36)$$

menshikli funkciyaları sáykes keledi.

Eger (1.1.36) furmulası menen anıqlanǵan funkciyalardı $\frac{2}{\sqrt{pq}}$ ǵa kóbeyttirsek,

onda bul funkciyalar ortonormallangan funkciyalar sistemasına aylanadı, yaǵnıy

$$\frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m'\pi x}{p} \sin \frac{n'\pi y}{q} dx dy = \begin{cases} 0, & \text{eger } m \neq m' \text{ yamasa } n \neq n' \\ 1, & \text{eger } m = m' \text{ yamasa } n = n' \end{cases}.$$

Usı jerde sonday jaǵday ushrasıwı múmkin, (1.1.24), (1.1.25) shegaralıq máselesiniń anıqlanǵan menshikli mánisleri arasında eseli menshikli mánisler bolıwı múmkin, yaǵnıy sonday menshikli mánisler bar bolıp, olarǵa bir emes, birneshe sıızıqlı ǵárezli bolmaǵan menshikli funkciyalar sáykes keledi. Bunday jaǵday tuwrımúyeshliktiń p hám q ǵa teń tárepleri ólsheules bolsa, yaǵnıy $\frac{p}{q}$ - racional m, n hám m', n' lar ushın $\mu_{mn}^2 = \mu_{m'n'}^2$ teńligi orınlı boladı. Mısal ushın $p = q = 1$ bolǵanda $\mu^2 = 5\pi^2$ menshikli mánisi eki eseli boladı, sebebi bul menshikli mániske, sıızıqlı ǵárezli bolmaǵan eki

$$V_{12} = \sin \pi x \sin 2\pi y, \quad V_{21} = \sin 2\pi x \sin \pi y$$

menshikli funkciyalari sáykes keledi.

Endi (1.1.23) teńlemesin qaraştıramız. Hár bir $\mu^2 = \mu_{mn}^2$ menshikli mánisi ushın bul teńlemenıń $T_{mn}(t)$ sheshimi sáykes kelsin dep uýǵaramız. Sonda (1.1.19) tolqın teńlemesiniń (1.1.21) shegaralıq shártlerin qanaatlandıratuǵın dara sheshimi (1.1.22), (1.1.36) hám $T_n(t)$ lar tiykarında tómendegishe jazıladı:

$$u_{mn}(x, y, t) = T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$$

Tiykargı (1.1.19)-(1.1.21) máselesiniń sheshimi

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (1.1.37)$$

túrinde izlenedi. Baslanǵısh shártlerden

$$u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(0) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} = \varphi_0(x, y) \quad (1.1.38)$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \sum_{m,n=1}^{\infty} T'_{mn}(0) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} = \varphi_1(x, y) \quad (1.1.39)$$

teńlikleri kelip shıǵadı.

(1.1.38)-(1.1.39) formulalar sáykes $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ funkciyalarınıń sinuslar boyınsha eki eseli Fure qatarına jayılasınan ibarat. Jayılmanıń koefficientleri

$$T_{mn}(0) = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \varphi_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy$$

$$T'_{mn}(0) = \frac{4}{apq\mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q \varphi_1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy$$

formulaları menen anıqlanadı.

Demek, $T_{mn}(t)$ funkciyası

$$T''_{mn}(t) + a^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right) T_{mn}(t) = 0 \quad (1.1.40)$$

teńlemesiniń

$$\left. \begin{aligned} T_{mn}(0) &= \alpha_{mn} \\ T'_{mn}(0) &= \beta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.41)$$

baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı eken.

(1.1.42)-(1.1.44) formulalarınıń oń tárepindegi α_{mn} , β_{mn}

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \varphi_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \\ \beta_{mn} &= \frac{4}{apq\mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q \varphi_1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \end{aligned} \quad (1.1.42)$$

teńlikleri menen anıqlanatuǵın haqıyqıy sanlar.

(1.1.40) teńlemesiniń sheshimi

$$T_{mn}(t) = \alpha_{mn} \cos \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \frac{\beta_{mn}}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t \quad (1.1.43)$$

túrinde jazıladı.

Endi (1.1.19)-(1.1.21) máselesiniń sheshimi (1.1.37) formula tiykarında

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} [\alpha_{mn} \cos \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \beta_{mn} \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t] \quad (1.1.44)$$

túrinde jazıladı.

§1.2 Bessel teńlemesi

Birinshi túrdegi Bessel funksiýaları

Tómendegi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (1.2.1)$$

yamasa

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

kórinisindegi teńleme Bessel teńlemesi dep ataladı, bunda ν turaqlı san (1.2.1)-teńlemenin indeksi dep ataladı. (1.2.1)-teńlemenin

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

kórinisindegi gipergeometrik teńlemeden keltirip shıǵarıw ushın

$$x = \frac{\xi^2}{4ab}, \quad dx = \frac{\xi d\xi}{2ab}, \quad dx^2 = \frac{\xi^2 d\xi^2}{4a^2 b^2}$$

almastırıwın orınlaymız. Sonda

$$\left(1 - \frac{\xi^2}{4ab}\right) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left[c - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab}\right) \frac{\xi^2}{4}\right] \frac{dy}{d\xi} \frac{2}{\xi} + y = 0$$

teńlemesi payda boladı, $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ te

$$\xi y'' + 2cy' + \xi y = 0$$

teńlemege iye bolamız. Bul teńlemede $y = \xi^{-\nu} z$ almastırıwın orınlap, $c = \nu + \frac{1}{2}$ desek,

$$\xi^2 z'' + \xi z' + (\xi^2 - \nu^2) z = 0$$

teńleme kelip shıǵadı. Bul teńleme bolsa (1.2.1) Bessel teńlemesinin dál ózi. $\nu \geq 0$ bolsın. keyingi esaplawlardı ápiwayılastırıw maqsetinde (1.2.1)-teńlemede $y = x^\nu z$ almastırıw orınlaymız. Ol jaǵdayda z funksiyanı anıqlaw ushın

$$z'' + \frac{2\nu+1}{x} z' + z = 0 \quad (1.2.2)$$

teńlemege iye bolamız. Bul teńlemenin sheshimin

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

dárejeli qatar túrinde izleybiz. Bunnan

$$z' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + (n+2)c_{n+2} x^{n+1} + \dots$$

$$z'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + \dots + (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + \dots$$

Payda bolǵan qatarlardı (1.2.2)-teńlemege qoyıp, tómendegi tenliklerdi payda etemiz:

$$\begin{aligned} & \frac{2\nu+1}{x} c_1 + [2c_2 + (2\nu+1)2c_2 + c_0] + [2 \cdot 3c_3 + (2\nu+1)3c_3 + c_1] x + \dots \\ & + [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2\nu+1)(n+2)c_{n+2} + c_n] x^n + \dots = 0 \end{aligned}$$

Anıq emes koefficientler usılına kóre x tın barlıq koefficientleri aldındaǵı dárejelerin nolge teńeymiz:

$$c_1 = 0 \quad (1.2.3)$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2\nu+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0 \quad n=1,2,\dots$$

Bunnan

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2\nu+2)}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (1.2.4)$$

(1.2.3) hám (1.2.4) lerge tiykarlanıp

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2n-1} = 0$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2\nu+2)},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2\nu+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)}.$$

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(\nu+1)(\nu+2) \cdot \dots (\nu+n)}$$

Solay etip (1.2.2) teńlemenin sheshimi

$$z = c_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdots n(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+n)} \right] \quad (1.2.5)$$

kórinisindegi qatar menen ańlatıladı. Bunda c_0 -turaqlını erikli túrde saylap alıw múmkin. Dalamber belgisine tiykarlanıp (1.2.5)-qatardıń x tıń barlıq mánislerinde jıyınalı bolıwın tekserip kóriw qıyın emes.

Dárejeli qatardı aǵzama-aǵza differenciallaw (jıyınalıqlıq aralıǵı ishinde) hámme waqıt nızamlı bolǵanlıǵı ushın (1.2.5)-qatar haqıyqatında da (1.2.2)-teńlemenin sheshimi boladı.

A`dette c_0 turaqlı

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

dep tańlap alınadı. Tómenдеgi

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdots n &= \Gamma(n+1) \\ (\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+n) \Gamma(\nu+1) &= (\nu+2)(\nu+3) \cdots (\nu+n) \Gamma(\nu+2) = \\ &= \cdots = (\nu+n) \Gamma(\nu+n) = \Gamma(\nu+n+1) \end{aligned}$$

teńliklerin esapqa alsaq z tómendegi kóriniste jazıladı

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) \Gamma(\nu+n+1)}$$

(1.2.1)-teńlemenin sheshimi $y = x^{-\nu} z$ funkciyadan ibarat. Bul funkciyanı $J_\nu(x)$ arqalı belgilep alamız. Demek,

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1) \Gamma(\nu+n+1)} \quad (1.2.6)$$

$J_\nu(x)$ funkciya birinshi túrdegi ν indeksli yamasa ν tártipli Bessel funkciyası dep ataladı.

$J_\nu(x)$ funkciya (1.2.1)-Bessel teńlemesinin sheshimlerinden biri. Dara jaǵdayda $\nu = 0$ bolǵan jaǵdayda

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma^2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \quad (1.2.7)$$

$\nu = 1$ de bolsa

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

Barlıq oń ν larda bolsa

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!} \quad (1.2.8)$$

kórinisinde boladı.

(1.2.7) hám (1.2.8) formulalardan $\nu = 0$ yamasa qálegen pútin hám jup ν lar ushın $J_\nu(x)$ funkciya jup funkciya boladı.

Túsindirme. ν bólshek bolǵanda $x < 0$ ler ushın $J_\nu(x)$ funkciya jorımal manislerdi qabıl qıladı. Jorımal manisler menen esaplawlardı amelge asırmaw ushın $J_\nu(x)$ tı (ν bólshek bolǵanda) $x \geq 0$ ler ushın tekseremiz. (1.2.1) teńlemede ν^2 qatnasqanlıǵı ushın joqarıdaǵı pikirler ν dı $-\nu$ ǵa almastırsaqta (1.2.1) teńlemenıń sheshimine alıp keletuǵınlıǵın bildiredi. (1.2.6) da ν dı $-\nu$ ǵa almastırsaq

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)} \quad (1.2.9)$$

funkciya payda boladı.

$J_{-\nu}(x)$ funkciya da birinshi túrdegi $-\nu$ indeksli Bessel funkciyası dep ataladı.

$J_\nu(x)$ hám $J_{-\nu}(x)$ funkciyalar ν indeks pútin bolmaǵanda sıızıqlı baylanıslı bolmaydı, sebebi bul funkciyalardı ańlatıwshı (1.2.6) hám (1.2.9) qatarlardıń baslanǵısh aǵzaları nolden ózgeshe koefficientlerge iye bolıp, x tıń túrli dárejelerin óz ushine aladı.

Solay etip pútin bolmağan indeks ushın (1.2.1) teńlemeninń ulıwma sheshimi

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad (1.2.10)$$

bul jerde C_1, C_2 -turaqlılar.

Ekinshi túrdegi Bessel funkciyaları

Eger ν pútin san bolsa, $n = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1$ ler ushın $-\nu + n + 1$ ańlatpa nol yamasa teris pútin mánislerge teń boladı. Demek, n niń pútin manislerinde $\Gamma(-\nu + n + 1) = \infty$ boladı, sonıń ushın da (1.2.9) qatardıń sáykes aǵzaların nolge teń dep esaplaymız. Solay etip pútin ν lar ushın

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)}$$

yamasa $n = \nu + k$ desek

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} = (-1)^\nu J_\nu(x) \quad (1.2.11)$$

túrinde boladı.

Demek, $\nu \geq 0$ pútin san bolǵan jaǵdayda (1.2.11) ne tiykarlanıp $J_\nu(x)$ hám $J_{-\nu}(x)$ funkciyalar sızıqlı ǵárezsiz boladı, yaǵnıy bul jaǵdayda (1.2.1) teńleme bir dara sheshimge iye boladı. sonlıqtan, (1.2.10) Bessel teńlemesiniń ulıwma sheshimi bola almaydı. (1.2.1) teńlemesiniń ekinshi dara sheshimin anıqlaw ushın bólshek ν lar ushın (1.2.10) dan C_1, C_2 turaqlı arnawlı túrde tańlap, tómendegi

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (1.2.12)$$

funkciyanı dúzemiz. ν pútin bolǵanda (1.2.12) formulanıń alımı $J_\nu(x)(-1)^\nu - J_\nu(x)$ qa teń bolıp, bul ańlatpa (1.2.11) ǵa tiykarında nolge teń, bólimi de nolge teń boladı, yaǵnıy (1.2.12) anıq emeslikten ibarat boladı. ν dı pútin sanǵa umtıldırıp bul anıq emeslikti ašamız. Lapital qaǵıydasına tiykarlanıp

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} [J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)]}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu \pi} = \\
&= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos \nu \pi \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - \pi J_\nu(x) \sin \nu \pi - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu \pi} = \\
&= \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) (-1)^n - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n}}{\pi (-1)^n}.
\end{aligned}$$

Aqırǵı ańlatpada $J_\nu(x)$ hám $J_{-\nu}(x)$ ornına olardı ańlatıwshı (1.2.6), (1.2.9) qatarlardı qoyıp, ν boyınsha differenciallap, soń ν dıń ornına n pútın sanın qoysaq, bir qansha esaplawlardan keyin tómendegilerdi payda etemiz:

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left(\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right). \quad (1.2.13)
\end{aligned}$$

bul jerde $C=0,577215664\dots$ -Eylér turaqlısı. Dara jaǵdayda $n=0$ bolǵanda

$$\begin{aligned}
Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \\
&- \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right).
\end{aligned}$$

$Y_n(x)$ funkciyanı $\nu=n$ bolǵanda (1.2.1) teńlemege qoyıp haqıyqatında da bul teńlemenıń sheshimi ekenligine isenim kámil qılamız. Usınıń menen birge $J_n(x)$ hám $Y_n(x)$ funkciyalar sızıqlı baylanıslı bolıwı múmkın emes, sebebi bulardan

birinshisi $x=0$ de shekli mániske iye, ekinshisi bolsa sheksizlikke aylanadı. Demek $Y_n(x)$ funkciya (1.2.1)-teńlemenin ekinshi dara sheshimi boladı.

(1.2.13)-formula menen anıqlanǵan funkciya ekinshi túrdegi Bessel funkciyası yamasa Veber funkciyası dep ataladı.

Bessel teńlemesin pútin $\nu = n$ bolǵanda ulıwmalıq sheshimi

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

formula menen anıqlanadı, bul jerde C_1, C_2 -turaqlılar.

Túrli indeksli Bessel funkciyaları arasındagı qatnaslar

Qálegen ν lar ushın

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad (1.2.14)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \quad (1.2.15)$$

formulalar orınlı. Usıǵan uqsas formulalar ekinshi túrdegi sáykes funkciyalar ushın da orınlı boladı.

Tap usınday qılıp (1.2.15)-formulada ν dı $-\nu$ menen almasırap

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_{-\nu+1}(x)] = -x^\nu J_{-\nu+1}(x) \quad (1.2.16)$$

teńlikke iye bolamız. Eń dáslep ν dı bólshek dep oylap, (1.2.14) tı $ctgv\pi$ ǵa,

(1.2.16)-ni $\text{cosec}v\pi$ ǵa kóbeytip, payda bolǵan ańlatpalardan birinshisin ekinshiden alamız. Onda $\cos(\nu-1)\pi = -\cos\nu\pi$, $\sin(\nu-1)\pi = -\sin\nu\pi$ formulaların itibargá alsaq

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu \frac{J_\nu(x) \cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \right] = x^\nu \frac{J_{\nu-1} \cos(\nu-1)\pi - J_{-\nu+1}}{\sin(\nu-1)\pi}$$

yamasa

$$\frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x)$$

teńlik payda boladı.

(1.2.14) de ν dı $-\nu$ menen almasırsaq

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_{-\nu}(x)] = x^{-\nu} Y_{-\nu-1}(x) \quad (1.2.18)$$

formulağa iye bolamız.

Endi (1.2.15) $ctgv\pi$ ğa, (1.2.18)-ni $cosecv\pi$ ğa kóbeytip, payda bolğan ańlatpalardan birinshisin ekinshiden alamız. Onda $\cos(\nu-1)\pi = -\cos\nu\pi$, $\sin(\nu-1)\pi = -\sin\nu\pi$ formulaların itibarğa alsaq, bólshek ν lar ushın

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_{\nu}(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x) \quad (1.2.19)$$

formulağa kelemiz.

Pútın ν lar ushın (1.2.17), (1.2.19) formulalar ν di pútın sanğa umtıldırıp, limitke ótiw nátiyjesinde payda boladı. (1.2.14), (1.2.15) formulalar nátiyjesi sıpatında tómendegiler payda boladı.

$$\begin{aligned} xJ_{\nu}'(x) + \nu J_{\nu}(x) &= xJ_{\nu-1}(x) \\ xJ_{\nu}'(x) - \nu J_{\nu}(x) &= -xJ_{\nu+1}(x) \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J_{\nu}(x) \\ J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Bul formulalardan dáslepki ekewi (1.2.14), (1.2.15) ni differenciallaw nátiyjesinde keying ekewi bolsa aldınǵıların qosıw nátiyjesinde payda boladı.

Bessel funkciyasınıń ayırım dara jaǵdayları

Matematikalıq fizikada

$$J_0(x), J_1(x), Y_0(x) \text{ ba } J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

kórinisindegi Bessel funkciyaları eń kóp ushıraydı.

(1.2.20) formulalardıń aqırǵısına $J_2(x)$, $J_3(x)$ funkciyalarınıń mánislerin esaplaw sáykes túrde $J_0(x)$, $J_1(x)$, lerdiń sáykes mánislerin esaplawǵa keltiriledi. Endi

$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, n-pútin san funkciyanı qaraymız. Aldın $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ funkciyalarının

mánislerin esaplaymız. (1.2.6) ға kóre

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}}{n! \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1} n! \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}.$$

Bizge

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2^{n+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

ekenligi belgili. Solay etip

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \left(\frac{2}{\pi x}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

Bul jerde aqırǵı qosındı $\sin x$ tın darejeli qatarǵa jayılasınan ibarat. Demek,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x.$$

Tap usıǵan uqsas (1.2.9) nan

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right) \cos x$$

teńlikti payda etemiz.

(1.2.20) formulaniń aqırǵısına tiykarlanıp

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\begin{aligned} J_{\frac{5}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\sin x + \frac{3}{x} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] \right\} = \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

esaplawlarına kelemiz.

Ulwma alganda $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ Bessel funkciyası pütün n de elementar funkciyalar

arqalı ańlatıladı, yaǵnıy tómendegi kóriniske iye boladı:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

Bul jerde $P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$ qa qarata n-dárejeli kópaǵzalı, $Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ bolsa n-1 dárejeli

kópaǵzalı. Sonıń menen birge $P_n(0) = 1$, $Q_{n-1}(0) = 0$. Bunnan x tıń úlken

mánislerinde Bessel funkciyasınıń asymptotikalıq mánisleri kelip shıǵadı:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}) \right] \quad (1.2.21)$$

bul jerde $O(x^{-1}) - \frac{1}{x}$ tártipli muǵdar.

(1.2.21)-asymptotikalıq formula tek ǵana $\nu = n + \frac{1}{2}$ de emes ν dıń barlıq

mánislerinde orınlı.

§ 1.3 Dóńgelek membrana terbelisi

Meyli dógereginen bekitilgen, orayı koordinata basında jaylasqan, radiusı R ge teń bolǵan birtekli dóńgelek membrananiń erkin terbelisin qarastırayıq. Bul másele

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad (1.3.1)$$

túrindegi tolqın teńlemesin sheshiwge alıp klinedi. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

belgilewin kiritiw arqalı (1.3.1)-teńlemenı polyar koordinatalar sistemasında

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad (1.3.2)$$

turinde jazıwǵa boladı. Onda shegaralıq shárt

$$u|_{r=R} = 0 \quad (1.3.3)$$

hám baslanǵısh shártler

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r, \theta), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta) \quad (1.3.4)$$

turine iye boladı.

Meyli ápiwayılıq ushın dóńgelek membrananiń radiallıq terbelisin, yaǵnıy awısıw u tek ǵana r hám t ǵa baylanıslı bolǵan halın qarastırayıq.

Bunday terbelis ushın baslanǵısh shártler

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(r) \quad (1.3.5)$$

týrine iye boladı, bul jerde $\varphi_0(r)$ hám $\varphi_1(r)$ ler $(0; R)$ intervalında berilgen funksiylar. Bunday halda u awısıw φ múyeshke baylanıslı bolmaǵanlıǵı ushın (1.3.2)-teńleme

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad (1.3.6)$$

túrine iye boladı. Solay etip, dóńgelek membrananiń radiallıq terbelisi (1.3.6)-teńlemenıń (1.3.3)-shegaralıq shártin hám (1.3.5)-baslanǵısh shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıwǵa alıp klinedi.

SHeshimdi ózgeriwshilerge ayırıw usılına muwapıq

$$u(r, t) = T(t) \cdot X(r) \quad (1.3.7)$$

kóbeymesi túrinde izleyviz. Bunı (1.3.6)-ǵa qoyıp, ózgeriwshilerdi ayırsaq

$$\frac{X''(r) + \frac{1}{r} X'(r)}{X(r)} = \frac{T''(t)}{a^2 T} = -\lambda^2$$

Bunnan tómendegi

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad (1.3.8)$$

$$X'' + \frac{1}{r} X' + \lambda^2 X = 0 \quad (1.3.9)$$

teńlemelerge iye bolamız.

(1.3.9)-teńleme Bessel teńlemesi dep ataladı. Onıń ulıwma sheshimi

$$X(r) = C_1 s_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$$

túrine iye boladı, bunda C_1 hám C_2 ler erikli turaqlılar, $s_0(\lambda r)$ hám $Y_0(\lambda r)$ bolsa Bessel funksiýaları, $s_0(\lambda r)$ -birinshi túr nolinshi tártipli, $Y_0(\lambda r)$ bolsa ekinshi túr nolinshi tártipli Bessel funksiýaları dep ataladı. Bul funksiýalardan tek ǵana $s_0(\lambda r)$ funksiýası $r=0$ ushın shegaralanǵan, $Y_0(\lambda r)$ funksiýası bolsa $r=0$ ushın sheksizlikke aylanadı. Sonıń ushın $C_2 = 0$ dep alamız, keri halda dóńgelek membrananıń ortası sheksizlikke ketip qaladı. Endi $X(r)$ di (1.3.3)-shegaralıq shártke qoysaq $C_1 s_0(\lambda R) = 0$ yamasa $s_0(\lambda R) = 0$, sebebi $C_1 \neq 0$. Endi

$$\lambda R = \mu \quad (1.3.10)$$

belgilew kiritsek

$$s_0(\mu) = 0 \quad (1.3.11)$$

teńligine iye bolamız. Sońǵı (1.3.11)-teńleme sheksiz kóp oń sheshimlerde iye. Olardı $\mu_1, \mu_2, \dots$ dep belgileymiz. Onda (1.3.10)-dan

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

boladı. $\lambda = \lambda_n$ ushın (1.3.8)-teńleme

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{\mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{\mu_n t}{R}$$

túrindegi sheshimge iye boladı, bul jerde a_n, b_n ler erikli turaqlılar.

(1.3.7)-formula boyınsha

$$u(r, t) = \left(a_n \cos \frac{a \mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a \mu_n t}{R} \right) s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)$$

funksiyası (1.3.6)-teńlemenı hám (1.3.3)-shegaralıq shártti qanaatlandıradı. Endi

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{a \mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a \mu_n t}{R} \right) s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) \quad (1.3.12)$$

qatarın dúzemiz. Bunı (1.3.5)-baslanğısh shártlerge qoysaq

$$\varphi_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right), \quad \varphi_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \mu_n}{R} b_n s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)$$

boladı, bul jerde belgisiz koeffisientler

$$a_n = \frac{2}{R^2 s_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \cdot \varphi_0(r) s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr$$

$$b_n = \frac{2}{a \mu_n R \cdot s_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \cdot \varphi_1(r) \cdot s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr$$

formulaları menen anıqlanadı.

Bul mánislerdi (1.3.12)-degi orınlarına qoysaq (1.3.3), (1.3.5), (1.3.6)-berilgen mäseleniń sheshimine iye bolamız.

II bap Impuls tásirine ushırağan dóńgelek membrana teńlemesin izertlew

§2.1. Tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushırağan membrananıń terbelisi

Shetleri qattı bekitilgen elastikalıq membrana tınısh jaǵdayında OXY tegisliginde Γ iymek sıızıǵı menen shegaralangan bazıbir G oblastı menen ústpe-úst tússin. Membranaǵa waqıttıń tayınlangan $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ momentlerinde tásir etiw waqıt intervalı júda kishi bolǵan kúshler tásir etedi. Bunday kúshler impuls tábiyatlı kúshler dep ataladı.

Bunday jaǵdayda membrananıń terbelisi impuls tásirine ushırağan terbelis dep ataladı hám onıń terbelisi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k \quad (2.1.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi_0(x, y) \\ \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

baslanǵısh shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N \quad (2.1.3)$$

impuls táhiri shártlerin hám

$$u(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2.1.4)$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(x, y, t)$ sheshimi menen sáwlelenedi.

Impuls tásir momentleri izbe-izligi ushın: $t_k > t_m$, eger $k > m$ hám $t_k \rightarrow +\infty$, eger $k \rightarrow \infty$ shárti orınlı dep esaplap, (2.1.1)-(2.1.4) máseleniń sheshimin Fure usılı járdeminde tabıw máselesin qarastıramız.

(2.1.1)-(2.1.4) máselesiniń sheshimin Fure metodına sáykes

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y) \quad (2.1.5)$$

kóbeymesí túrinde izleyimiz.

Sonda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} &= \frac{d^2 T(t)}{dt^2} V(x, y) \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} &= T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} &= T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

boladı. (2.1.6) tuwındıların (2.1.1) teńlemedegí orınlarına aparıp qoyıp,

$$T''(t)V(x, y) = a^2 T(t) \left(\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \right)$$

yamasa

$$T''(t)V(x, y) = a^2 T(t) \Delta V, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.1.7)$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemeden

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)}$$

teńligi kelip shıǵadı. Bul teńliktiń shep tárepi x hám y ke, al óń tárepi bolsa t ǵa baylanıslı emes. Demek,

$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$ hám $\frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)}$ shamalarınıń hár biri x, y ke de t ǵa da ǵárezli emes, yaǵnıy

olar turaqlı. Usı turaqlılını $-\lambda$ arqalı belgilep alamız. Sonda

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)} = -\lambda$$

boladı. Bunnan $T(t)$ hám $V(x, y)$ funkciyaları sáykes

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad t \neq t_k \quad (2.1.9)$$

$$\Delta V(x, y) + \lambda V(x, y) = 0 \quad (2.1.10)$$

teńlemelerin qanaatlandıradı degen juwmaqqa kelemiz.

(2.1.10) teńleme Gelmgolc teńlemesi dep ataladı.

$u(x, y, t)$ funkciyasınıń mánisin (2.1.5) ten (2.1.4)-shegaralıq shártke qoysaq

$$T(t)V(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \geq 0$$

teńligin payda etemiz. Bul teńlik óz náwbetinde $V(x, y)$ funkciyası ushın

$$V(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2.1.11)$$

shegaralıq shártke teń kúshli.

(2.1.10) Gelmgolc teńlemesi ushın birtekli (2.1.11) Dirixle máselesi nollik emes sheshimge iye bolǵan λ nıń mánisine menshikli mánis (2.1.menshikli san), usı menshikli sanǵa sáykes keliwshi $V(x, y)$ funkciyasına menshikli funkciya dep ataladı.

G oblasttıń shegarası Γ bólek-sıypaq Jordan iymek sızığı bolıp, $V(x, y)$ funkciyası (2.1.10)- (2.1.11) máselesiniń λ menshikli mánislerine sáykes menshikli funkciyası bolsın.

$$V\Delta V = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2$$

birdeyligin G oblastı boyınsha integrallasaq hám Gauss-Ostragradskiy furmulasınan paydalanıp, (2.1.10) teńleme hám (2.1.11) shegaralıq shártke tiykarlanıp

$$\int_G (V_x^2 + V_y^2) dx dy = \int_\Gamma V \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_G V \Delta V dx dy = \lambda \int_G V^2 dx dy$$

teńligine iye bolamız. Bunnan menshikli mánis $\lambda > 0$ ekenligi kelip shıǵadı. Onda $\lambda = \mu^2$, μ -haqıyqıy san belgilewin kiritiw múmkin. Usını esapqa alıp (2.1.9) teńlemeni

$$T''(t) + (a\mu)^2 T(t) = 0, \quad t \neq t_k \quad (2.1.12)$$

túrinde jazıp alamız.

G oblastına qoyılğan jetkilikli ulıwma shártlerde (2.1.10), (2.1.11) Dirixle máselesiniń $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ menshikli mánisleriniń sanaqlı kópligi hám olarǵa sáykes $V_1(x, y), V_2(x, y), \dots, V_n(x, y), \dots$ menshikli funkciyaları bar boladı. Bul pikirdi keyingi paragraflarda tórtmúyeshli membrana ushın hám dóńgelekli membrana ushın dálileymiz.

μ_n menshikli sanǵa (2.1.12) teńlemesiniń $T_n(t)$ sheshimi sáykes keledi hám bunı esapqa alıp, (2.1.1) teńlemesiniń sheshimin

$$u_n(x, y, t) = T_n(t)V_n(x, y), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.13)$$

túrinde jazıp alamız.

Eger $V_k(x, y)$ hám $V_m(x, y)$ sáykes λ_k hám λ_m menshikli mánislerge sáykes keliwshi (2.1.10) teńlemenin sheshinleri bolsa, onda

$$\int_G V_k(x, y)V_m(x, y)dxdy = 0, \quad k \neq m \quad (2.1.14)$$

teńligi orınlı boladı.

Bul tastıyqlawdı dálillew ushın

$$V_k \Delta V_m - V_m \Delta V_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_k \frac{\partial V_m}{\partial x} - V_m \frac{\partial V_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_k \frac{\partial V_m}{\partial y} - V_m \frac{\partial V_k}{\partial y} \right)$$

birdeyliginen paydalanamız. Gauss–Ostragradıskıy fúrmulasın paydalanıp hám

$$\Delta V_k = -\lambda_k V_k, \quad \Delta V_m = -\lambda_m V_m, \quad (x, y) \in G$$

$$V_k(x, y) = V_m(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$

teńliklerin esapqa alǵan halda

$$\int_G (V_k \Delta V_m - V_m \Delta V_k) dxdy = (\lambda_k - \lambda_m) \int_G V_k \cdot V_m dxdy = 0$$

teńligine iye bolamız. Bunnan $\lambda_k \neq \lambda_m$ bolǵanı ushın (2.1.14) birdeyligi kelip shıǵadı.

Endi (2.1.1)-(2.1.4) máselesiniń sheshimin

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y) T_n(t) \quad (2.1.15)$$

qatarınıñ qosındısı túrinde izleyviz.

Eger bul qatar x, y boyınsha eki márte hám $t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ mánislerinde t boyınsha eki márte aǵzama-aǵza differenciallaw nátiyjesinde kelip shıqqan qatarlar $G \times \bigcup_{k=1}^{\infty} [t_{k-1}, t_k)$ oblastında teń ólshewli jıynaqlı bolsa, onda onıñ qosındısı (2.1.1)

teńlemenıń (2.1.4) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı.

(2.1.2) baslanǵısh shártiniń orınlı bolıwı ushın

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y) T_n(0) = \varphi_0(x, y)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y) T'_n(0) = \varphi_1(x, y)$$

teńlikleriniń orınlı bolıwı zárúr. Bul eki teńlikti $V_k(x, y)$ ke kóbeytip G oblasti boyınsha integrallasaq, (2.1.14) teńligin esapqa alǵan halda

$$T_n(0) = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_0(x, y) V_n(x, y) dx dy$$

$$T'_n(0) = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_1(x, y) V_n(x, y) dx dy$$

teńliklerine iye bolamız. Bunda

$$N(V_n) = \left(\int_G V_n^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}$$

sanı $V_n(x, y)$ funkciyasınıñ norması dep ataladı.

(2.1.3)-impuls tásiiri shártinen paydalanıp

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t_k + 0) - T'_n(t_k - 0)] V_n(x, y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta T'_n(t) \Big|_{t=t_k} \right) V_n(x, y)$$

bolǵanı ushın $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ momentlerinde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta T_n'(t) \Big|_{t=t_k} \right) V(x, y) = I_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots$$

teńligi orınlı bolıwın kóremiz. Bul teńlikti $V_2(x, y)$ ke kóbeytip, G oblastı boyınsha integrallasaq, (2.1.14) teńligin esapqa alǵan jaǵdayda

$$\Delta T_n'(t) \Big|_{t=t_k} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G I_k(x, y) V_n(x, y) dx dy$$

teńligi kelip shıǵadı.

Solay etip, $T_n(t)$ funkciyası

$$T_n''(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) = 0, \quad t \neq t_k \quad (2.1.16)$$

teńlemesiniń

$$T_n(0) = \sigma_{n0}, \quad T_n'(0) = \sigma'_{n0} \quad (2.1.17)$$

baslanǵısh shártlerin hám $t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots$ momentlerinde

$$\Delta T_n'(t) \Big|_{t=t_k} = T_n'(t_k + 0) - T_n'(t_k - 0) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1.18)$$

impuls tásir shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı eken. Bunda

$$\sigma_{0n} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_0(x, y) V_n(x, y) dx dy$$

$$\sigma'_{0n} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_1(x, y) V_n(x, y) dx dy$$

$$\gamma_k = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G I_k(x, y) V_n(x, y) dx dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

(2.1.16)-(2.1.18) másele sheshimi $\forall t \in [t_p, t_{p+1}), \quad p = 0, 1, 2, \dots$ ushın

$$T_n(t) = \sigma_{n0} \cos a\mu_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a\mu_n} \sin a\mu_n t + \sum_{k=1}^p \frac{\gamma_k}{a\mu_n} \sin a\mu_n(t - t_k) \quad (2.1.19)$$

túrinde jazıladı. (2.1.19) formuladan $T_n(t)$ funkciyasın (2.1.15) tegi ornına qoyıp, (2.1.1)-(2.1.4) máseleniń sheshimin

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_{n0} \cos a\mu_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a\mu_n} \sin a\mu_n t + \sum_{k=1}^p \frac{\gamma_k}{a\mu_n} \sin a\mu_n(t - t_k) \right] V_n(x, y)$$

kóriniste jazamız.

§ 2.2. Impuls tábiyatlı sırtqı kúshlerdiń tórt múyeshli membrananıń terbelisine tásiiri

Shetleri bekkem bekitilgen elastikalıq membrana (x, y) tegisliginde $x = 0, x = p, y = 0, y = q$ sıızıqları menen shegaralanǵan, $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$ tuwrımúyeshli membrananı qaraştıramız. Usı membrananıń terbelis procesine waqıttıń tayınlanǵan $t_k, k = 1, 2, \dots$ momentlerinde shaması $I_k(x, y), k = 1, 2, \dots, (x, y) \in G$ ǵa teń bolǵan impuls tabiyatlı kúshler tásir etetuǵın bolsın. Bunda $t_k > t_m$ eger $k > m$ hám $t_k \rightarrow +\infty$ eger $k \rightarrow +\infty$ shártleri orınlanǵan, al $I_k(x, y), k = 1, 2, \dots$ shamaları bolsa G tuwrımúyeshliginde úzliksiz differenciallanıwshı funkciyalar.

Bunday jaǵdayda membrananıń terbelisi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k \quad (2.2.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi_0(x, y) \\ \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

baslanǵısh shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N \quad (2.2.3)$$

impuls tásiiri shártlerin hám

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=p} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=q} = 0 \quad (2.2.4)$$

shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıwdan ibarat. Bul máseleń sheshimin tabıw máselesi bul paragrafta qarastırılatuǵın tiykargı máseleden qabıl etiledi.

(2.2.1)-(2.2.4) máselesiniń sheshimin Fure metodına sáykes

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y) \quad (2.2.5)$$

kórinisinde izleyemiz. (2.2.5)-funkciyanı G oblastında eki máрте differentiallyap

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} &= \frac{d^2 T(t)}{dt^2} V(x, y) \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} &= T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} &= T(t) \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}\end{aligned}$$

tuwındıların (2.2.1) máseledegi orınlarına qoyıp,

$$T''(t)V(x, y) = a^2 T(t) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right), \quad t \neq t_k$$

teńlemesine iye bolamız.

Bunnan $t \neq t_k, \quad k=1, 2, \dots$ mánisleri ushın

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{V(x, y)}$$

teńligi kelip shıǵadı. Bul teńliktiń shep tárepi x hám y ten, al oń tárepi bolsa t dan ǵárezli emes. Demek,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \text{ hám } \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{V(x, y)} \text{ shamalarınıń hár biri } x, y \text{ ke de } t \text{ ǵa da ǵárezli emes, yaǵnıy}$$

olar turaqlı. Uı turaqlılını $-\mu^2$ arqalı belgilep alamız. Sonda

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)} = -\mu^2$$

teńligi kelip shıǵadı. Bunnan (2.2.5) funkciya (2.2.1) teńlemenıń sheshimi bolıwı ushın $T(t)$ hám $V(x, y)$ funkciyaları

$$T''(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0, \quad t \neq t_k \quad (2.2.6)$$

$$\Delta V(x, y) + \mu^2 V(x, y) = 0 \quad (2.2.7)$$

teńlemeleri qanaatlandırılıwı kerek. (2.2.7) teńleme Gelmgolc teńlemesi ekenligi málim. Endi

$$\Delta V(x, y) + \mu^2 V(x, y) = 0$$

teńlemesi ushın (2.2.4) shegaralıq shártlerinen hám (2.2.5) funkciyadan paydalanıp,

$$V|_{x=0} = 0; V|_{x=p} = 0; V|_{y=0} = 0; V|_{y=q} = 0 \quad (2.2.8)$$

shegaralıq shártlerine iye bolamız.

(2.2.7), (2.2.8) máselesiniń menshikli mánislerin hám menshikli funkciyaların tabamız. Onıń ushın (2.2.7) teńlemede

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.2.9)$$

dep, ózgeriwshilerin ajıratamız. Onıń ushın (2.2.9) dı (2.2.7) teńlemege qoyıp,

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \mu^2 X(x)Y(y) = 0$$

yamasa

$$X''(x)Y(y) + X(x)[Y''(y) + \mu^2 Y(y)] = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemeden

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \mu^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)}$$

teńligi kelip shıǵadı. Bul teńliktiń shep tárepi x tan, al óń tárepi y ten ǵárezli

bolmaǵanı ushın $\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \mu^2$ hám $-\frac{X''(x)}{X(x)}$ turaqlı boladı. Usı turaqlını μ_1^2 arqalı

belgileymiz, yaǵnıy

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \mu^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu_1^2.$$

Bunnan $\mu_2^2 = \mu^2 - \mu_1^2$ yamasa

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 \quad (2.2.10)$$

belgilewin kiritip

$$X''(x) + \mu_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \mu_2^2 Y(y) = 0 \quad (2.2.11)$$

túrindegi eki ádettegi differenciallıq teńlemelerge iye bolamız. Sonıń menen birge (2.2.8) shegaralıq shártlerden

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 & X(p) &= 0 \\ Y(0) &= 0, & Y(q) &= 0 \end{aligned}$$

shegaralıq shártleri kelip shıǵadı.

Demek, x tın funkciyası

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \mu_1^2 X(x) &= 0 \\ X(0) = X(p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.12)$$

shegaralıq máselesiniń, al $Y(y)$ funkciyası bolsa

$$\left. \begin{aligned} Y''(y) + \mu_2^2 Y(y) &= 0 \\ Y(0) = Y(q) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.13)$$

shegaralıq máselesiniń sheshimi bolıwı kerek eken.

(2.2.12) shegaralıq máselesin sheshemiz. Bul máseledegi ekinshi tártipli teńlemenin ulıwma sheshimi

$$X(x) = c_1 \cos \mu_1 x + c_2 \sin \mu_1 x$$

túrinde jazıladı. Endi máseledegi shegaralıq shártlerden paydalanıp, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ mánislerin tabıw qıyın emes. Onda (2.2.12) shegaralıq máselesiniń sheshimi

$$X(x) = \sin \mu_1 x \quad (2.2.14)$$

funkciyası boladı. Sonın menen birge

$$\sin \mu_1 p = 0 \quad (2.2.15)$$

bolıwı kerek. (2.2.15) teńlemeden μ_1 sheksiz kóp

$$\mu_{1,m} = \frac{m\pi}{p}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

mánislerine iye bolıwı kelip shıǵadı.

Usıǵan uqsas (2.2.13) shegaralıq máselesiniń sheshimi

$$Y(y) = \sin \mu_2 y \quad (2.2.16)$$

funkciyası bolıwın hám sonın menen birge

$$\sin \mu_2 q = 0 \quad (2.2.17)$$

bolıwın kóremiz. (2.2.17) teńlemeden μ_2 niń

$$\mu_{2,n} = \frac{n\pi}{q}, \quad n = 1, 2, \dots$$

túrindegi mánislerine iye bolamız.

Onda $\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$ bolǵanlıǵı ushın μ^2 tın

$$\mu_{mn}^2 = \mu_{1m}^2 + \mu_{2n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right) \quad (2.2.18)$$

Solay etip, (2.2.18) menshikli mánislerge (2.2.7), (2.2.8) shegaralıq máselesiniń

$$V_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (2.2.19)$$

menshikli funkciyalari sáykes keledi.

Eger (2.2.19) furmulası menen anıqlanǵan funkciyalardı $\frac{2}{\sqrt{pq}}$ ǵa kóbeyttirsek, onda bul funkciyalar ortonormallangan funkciyalar sistemasına aylanadı, yaǵniy

$$\frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m'\pi x}{p} \sin \frac{n'\pi y}{q} dx dy = \begin{cases} 0, & \text{eger } m \neq m' \text{ yamasa } n \neq n' \\ 1, & \text{eger } m = m' \text{ yamasa } n = n' \end{cases}.$$

Usı jerde sonday jaǵday ushrasıwı múmkin, (2.2.7), (2.2.8) shegaralıq máselesiniń anıqlanǵan menshikli mánisleri arasında eseli menshikli mánisler bolıwı múmkin, yaǵniy sonday menshikli mánisler bar bolıp, olarǵa bir emes, birneshe sıızqlı ǵárezli bolmaǵan menshikli funkciyalar sáykes keledi. Bunday jaǵday tuwrımúyeshliktiń p hám q ǵa teń tárepleri ólshewles bolsa, yaǵniy $\frac{p}{q}$ - racional m, n hám m', n' lar ushın $\mu_{mn}^2 = \mu_{m'n'}^2$ teńligi orınlı boladı. Mısal ushın $p = q = 1$ bolǵanda $\mu^2 = 5\pi^2$ menshikli mánisi eki eseli boladı, sebebi bul menshikli mániske, sıızqlı ǵárezli bolmaǵan eki

$$V_{12} = \sin \pi x \sin 2\pi y, \quad V_{21} = \sin 2\pi x \sin \pi y$$

menshikli funkciyalari sáykes keledi.

Endi (2.2.6) teńlemesin qaraştıramız. Hár bir $\mu^2 = \mu_{mn}^2$ menshikli mánisi ushın bul teńlemeniniń $T_{mn}(t)$ sheshimi sáykes kelsin dep uyǵaramız. Sonda (2.2.1) tolqın teńlemesiniń (2.2.4) shegaralıq shártlerin qanaatlandıratuǵın dara sheshimi (2.2.5), (2.2.19) hám $T_n(t)$ lar tiykarında tómendegishe jazıladı:

$$u_{mn}(x, y, t) = T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$$

Tiykargı (2.2.1)-(2.2.4) máselesiniń sheshimi

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (2.2.20)$$

túrinde izlenedi. Baslangısh hám impuls tásiiri shártlerinen

$$u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(0) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} = \varphi_0(x, y) \quad (2.2.21)$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \sum_{m,n=1}^{\infty} T'_{mn}(0) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} = \varphi_1(x, y) \quad (2.2.22)$$

$$\Delta \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \sum_{k=1}^{\infty} T'_{mn}(t) \Big|_{t=t_k} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} = I_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2.23)$$

teńlikleri kelip shıǵadı.

(2.2.21)-(2.2.23) formulalar sáykes $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ hám $I_k(x, y)$, $k \in N$

funkciyalarınıń sinuslar boyınsha eki eseli Fure qatarına jayılmassınan ibarat.

Jayılmannıń koefficientleri

$$\begin{aligned} T_{mn}(0) &= \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \varphi_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \\ T'_{mn}(0) &= \frac{4}{apq\mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q \varphi_1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \\ T'_{mn}(t) \Big|_{t=t_k} &= \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q I_k(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \end{aligned}$$

formulaları menen anıqlanadı.

Demek, $T_{mn}(t)$ funkciyası

$$T''_{mn}(t) + a^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right) T_{mn}(t) = 0, \quad t \neq t_k \quad (2.2.24)$$

teńlemesiniń

$$\left. \begin{aligned} T_{mn}(0) &= \alpha_{mn} \\ T'_{mn}(0) &= \beta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.25)$$

baslangısh shártlerin hám

$$\Delta T'_{mn}(t) \Big|_{t=t_k} = \gamma_{mn}(k)$$

impuls tásir shártin qanaatlantıratúǵın sheshimi boladı eken.

(2.2.24)-(2.2.26) formulalarınıń oń tárepindegi α_{mn} , β_{mn} , γ_{mn}

$$\begin{aligned}
\alpha_{mn} &= \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \varphi_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \\
\beta_{mn} &= \frac{4}{apq\mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q \varphi_1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \\
\gamma_{mn}(k) &= \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q I_k(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy, \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

teńlikleri menen anıqlanatuǵın haqıyqıy sanlar.

(2.2.24) teńlemesiniń sheshimi aldınǵı paragraftaǵı sıyaqlı $\forall t \in [t_p, t_{p+1})$ ushın

$$\begin{aligned}
T_{mn}(t) &= \alpha_{mn} \cos \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \frac{\beta_{mn}}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \\
&+ \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sum_{k=1}^p \gamma_{mn}(k) \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} (t - t_k)
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

bunda $t_0 = 0$ túrinde jazıladı.

Endi (2.2.1)-(2.2.4) máselesiniń sheshimi (2.2.20) formula tiykarında

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\alpha_{mn} \cos \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \frac{\beta_{mn}}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \right. \\
&\left. + \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sum_{k=1}^p \gamma_{mn}(k) \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} (t - t_k) \right] \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

túrinde jazıladı.

Teorema 2.1. (2.2.12), (2.2.13) shegaralıq máselesiniń (2.2.19) sheshimi hám (2.2.24) máseleniń (2.2.27) sheshimin esapqa alǵan jaǵdayda (2.2.1)- (2.2.4) máseleniń sheshimi, yaǵnıy, tórt múyeshli membrananiń impuls tábiyatlı sırtqı kúshler tasirindegi terbelisi máselesi sheshimi (2.2.28) kóriniste jazıladı.

Eger baslanǵısh $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ funkciyaları hám impulslıq $I_k(x, y)$ funkciyası $|x| \leq p$, $|y| \leq q$ tuwrı tórtmúyeshlikke taqlıq nızamı menen, barlıq x, y tegislikke x ózgeriwshisi boyınsha $2p$ period penen, y ózgeriwshisi boyınsha $2q$ period penen dawam ettirilgennen soń 4 márte úziliksiz differenciallanıwshı bolsa,

(2.2.28) qatar eki márte aǵzama-aǵza differenciallangannan keyin teń ólshewli jıynaqlı boladı.

Teorema. Eger $\varphi_0(x, y)$ funkciyası $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$ oblastta x hám y ózgeriwshileri boyınsha eki márteden úziksiz differenciallanıwshı bolıp, úshinshi tártipli bólek úziksiz tuwındılarǵa iye bolsa, $\varphi_1(x, y)$ hám $I_k(x, y)$ funkciyaları óziniń x hám y ózgeriwshileri boyınsha differenciallanıwshı bolıp, ekinshi tártipli bólek úziksiz tuwındılarǵa iye bolsa hám de

$$\varphi_1(x, 0) = \varphi_1(0, q) = 0, \quad \varphi_0(0, y) = \varphi_0(p, y) = 0, \quad \varphi_0''(0, y) = \varphi_0''(p, y) = 0 \quad (2.2.29)$$

sáykesleslendiriw shartleri orınlı bolsa, onda (2.2.28) qatarı menen anıqlanǵan $u(x, y, t)$ funkciya ekinshi tártipli úziksiz tuwındılarǵa iye bolıp, (2.2.1)

teńlemenı, (2.2.2) baslanǵısh shártlerin, (2.2.3) impulslıq shártti hám de (2.2.4) shegaralıq shártlerdi qanaatlandıradı. Sonıń menen birge (2.2.28) qatardı x, y hám t ózgeriwshileri boyınsha eki márte aǵzama-aǵza differenciallaw múmkin bolıp, payda bolǵan qatar qálegen t da $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$ oblastta absolyut hám teń ólshewli jıynaqlı boladı.

Dálillew. Dáslep (2.2.29) sáykesleslendiriw shártleri qanday kelip shıǵıwına toqtalıp ótemiz. (2.2.29) dıń dáslepki eki shárti $u(x, y, t)$ funkciyanıń $x=0$, $x=p$, $y=0$, $y=q$, $t=0$ noqatlarında úziksizliginen (2.2.2) hám (2.2.4) shártlerge tiykarlanıp kelip shıǵadı. (2.2.29) dıń ekinshi eki shárti tap usı noqatlarda $\frac{\partial u}{\partial t}$ tuwındınıń uziliksizliginen kelip shıǵadı. Úshinshi jup shártti keltirip shıǵarıw ushın (2.2.1) teńlemede $t=0$ dep esaplap, (2.2.2) shártlerdi differenciallap keltirip shıǵaramız.

(2.2.26) formulalardı x boyınsha bóleklep integrallap tómendegilerdi payda etemiz:

$$\alpha_{mn} = -\frac{4p^2}{(\pi m)^3 q} \int_0^p \int_0^q \varphi_0'''(x, y) \cos \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy$$

$$\beta_{mn} = \frac{4p^2}{a(\pi m)^3 q \mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q \varphi_1'''(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy$$

$$\gamma_{mn}(k) = \frac{4p^2}{a(\pi m)^3 q \mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q I_k'''(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

Endi

$$A_{mn} = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \varphi_0'''(x, y) \cos \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy$$

$$B_{mn} = \frac{4}{pqa\mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q \varphi_1'''(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy$$

$$C_{mn}(k) = \frac{4}{pqa\mu_{mn}} \int_0^p \int_0^q I_k'''(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

belgilewlerin kiritemiz. Sonda

$$\alpha_{mn} = -\left(\frac{p}{\pi}\right)^3 \frac{A_{mn}}{m^3}$$

$$\beta_{mn} = -\left(\frac{p}{\pi}\right)^3 \frac{B_{mn}}{m^3}$$

$$\gamma_{mn}(k) = -\left(\frac{p}{\pi}\right)^3 \frac{C_{mn}}{m^3}$$
(2.2.30)

teńliklerine iye bolamız. Trigonometriyalıq qatarlar teoriyasınan belgili bolğanınday

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A_m|}{m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|B_m|}{m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|C_m|}{m}$$

trigonometriyalıq qatarlar jıynaqlı boladı. (2.2.30) nı (2.2.28) ge aparıp qoyamız.

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} -\left(\frac{p}{\pi}\right)^3 [A_{mn} \cos \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \frac{B_{mn}}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t +$$

$$+ \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sum_{k=1}^p C_{mn}(k) \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} (t - t_k)] \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$$

qatarı payda boladı. Usı qatar hám usı qatardı eki márte x ózgeriwshisi boyınsha differenciallawdan payda bolğan qatarlar ushın

$$C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A_m| + |B_m| + |C_m|}{m^3}, \quad C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A_m| + |B_m| + |C_m|}{m^2}, \quad C_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A_m| + |B_m| + |C_m|}{m}$$

jıynaqlı qatarlar majoranta rolin oynaydı. Bunda C, C_1, C_2 -turaqlılar. y ózgeriwshisi boyınsha da usı procesti qayta islese, x ózgeriwshisi menen ústpe-úst túsetin juwmaqqa kelemiz. Demek, (2.2.28) qatar hám onı eki márte differenciallawdan keyin payda bolǵan qatarlar absolyut hám teń ólshewli jıynaqlı boladı. Bunnan (2.2.28) qatar óziniń birinshi hám ekinshi tártipli tuwındıları menen úziliksizligi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

§2.3. Impuls tásirine ushırağan dóńgelek membrana teńlemesin izertlew

Radiusi R ge teń, orayı koordinata basında bolğan hám shetleri bekkemlengen dóńgelek membrananiń impuls tásirindegi terbelisin úyreniw máselesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k \quad (2.3.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (2.3.2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G$$

baslangısh shártlerin,

$$u(x, y, t) \Big|_{x^2+y^2=R^2} = 0 \quad (2.3.3)$$

shegaralıq shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N \quad (2.3.4)$$

impuls táhiri shártlerin qanaatlardırwshı sheshimin tabıwǵa keledi. Bul máseleni úyreniwde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ teńlikler menen anıqlanatuǵın r , θ polyar koordinatalar ótiw qolaylılıq payda etedi. Laplas operatorı polyarlıq koordinatalar sistemasında

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

kóriniske iye boladı. Bunda (2.3.1)-(2.3.4) másele tómendegishe jazıladı:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3.5)$$

$$u(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = \varphi_0(r, \theta), \quad \left. \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta) \quad (2.3.6)$$

$$u(r, \theta, t) \Big|_{r=R} = 0 \quad (2.3.7)$$

$$\Delta \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \frac{\partial u(r, \theta, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(r, \theta, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(r, \theta), \quad k \in N \quad (2.3.8)$$

Meyli ápiwayılıq ushın dóńgelek membrananiń radiallıq terbelis jaǵdayın, yaǵnıy awısıw u tek ǵana r hám t ǵa baylanıslı bolǵan haldaǵı impulslıq tásir jaǵdayın qarastırayıq.

Bunda (2.3.5) teńleme

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad (2.3.9)$$

(2.3.6) baslanǵısh shártler

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(r) \quad (2.3.10)$$

(2.3.7) shegaralıq shárt

$$u(r, t)|_{r=R} = 0 \quad (2.3.11)$$

hám impulslıq tásir shárti

$$\Delta \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \frac{\partial u(r, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(r, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(r), \quad k \in N \quad (2.3.12)$$

túrine iye boladı. Solay etip, impuls tásir etken dóńgelek membrananiń radiallıq terbelisi (2.3.9)-teńlemeniniń (2.3.11)-shegaralıq shártin, (2.3.10)-baslanǵısh shártlerin hám (2.3.12) impulslıq tásir shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıwǵa alıp kelinedi.

Sheshimdi ózgeriwshilerge ayırıw usılına muwapıq

$$u(r, t) = X(r)T(t) \quad (2.3.13)$$

kóbeymesi túrinde izleybiz. Bunı (2.3.9)-ǵa qoyıp, ózgeriwshilerdi ayırsaq

$$X''(r)T(t) + \frac{1}{r} X'(r)T(t) = \frac{1}{a^2} X(r)T''(t)$$

teńligin payda etemiz. Bul teńliktiń eki tárepin $X(r)T(t)$ kóbeymesine bólsek

$$\frac{X''(r) + \frac{1}{r} X'(r)}{X(r)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$$

teńligine iye bolamız. Kórinip turǵanıday bul teńliktiń oń tárepi r dan, al shep

tárepi t ózgeriwshisinen ǵárezli emes. Sonlıqtan, $\frac{X''(r) + \frac{1}{r}X'(r)}{X(r)}$ hám $\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$

shamaları turaqlı sanǵa teń bolıwı kerek. Bul turaqlını $-\lambda^2$ arqalı belgileymiz. Sonda

$$\frac{X''(r) + \frac{1}{r}X'(r)}{X(r)} = \frac{T''(t)}{a^2T} = -\lambda^2$$

teńligine iye bolamız.

Bunnan tómendegi

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad (2.3.14)$$

$$X'' + \frac{1}{r}X' + \lambda^2 X = 0 \quad (2.3.15)$$

teńlemelerge iye bolamız.

(2.3.15)-teńleme Bessel teńlemesi dep ataladı. Onıń ulıwma sheshimi

$$X(r) = C_1 s_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$$

túrine iye boladı, bunda C_1 hám C_2 ler erikli turaqlılar, $s_0(\lambda r)$ hám $Y_0(\lambda r)$ bolsa Bessel funksiýaları, $s_0(\lambda r)$ -birinshi túr nolınshi tártipli, $Y_0(\lambda r)$ bolsa ekinshi túr nolınshi tártipli Bessel funksiýaları dep ataladı. Bul funksiýalardan tek ǵana $s_0(\lambda r)$ funksiýası $r=0$ ushın shegaralanǵan, $Y_0(\lambda r)$ funksiýası bolsa $r=0$ ushın sheksizlikke aylanadı. Sonıń ushın $C_2=0$ dep alamız, keri halda dóńgelek membrananıń ortası sheksizlikke ketip qaladı. Endi $X(r)$ di (2.3.11)-shegaralıq shártke qoysaq $C_1 s_0(\lambda R)=0$ yamasa $s_0(\lambda R)=0$, sebebi $C_1 \neq 0$. Endi

$$\lambda R = \mu \quad (2.3.16)$$

belgilew kiritsek

$$s_0(\mu)=0 \quad (2.3.17)$$

teńligine iye bolamız. Sońǵı (2.3.17)-teńleme sheksiz kóp oń sheshimlerde iye.

Olardı $\mu_1, \mu_2, \dots$ dep belgileymiz. Onda (2.3.16)-dan

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}, \quad (n=1,2,\dots)$$

boladı. $\lambda = \lambda_n$ ushın (2.3.14)-teńleme

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{a \mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a \mu_n t}{R}$$

túrindegi sheshimge iye boladı, bul jerde a_n, b_n ler erikli turaqlılar.

(2.3.13)-formula boyınsha

$$u(r, t) = \left(a_n \cos \frac{a \mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a \mu_n t}{R} \right) s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)$$

funksiyası (2.3.9)-teńlemenı hám (2.3.11)-shegaralıq shárttı qanaatlandıradı.

Endi (2.3.9)-(2.3.12) máselesiniń sheshimin

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) T_n(t) \quad (2.3.18)$$

qatarınıń qosındısı túrinde izleyviz. (2.3.10) baslanğısh shártlerden hám (2.3.12) impulslıq tásir shártlerinen paydalansaq

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) T_n(0) = \varphi_0(r)$$

$$u(r, t)|_{t=0} = \frac{a \mu_n}{R} \sum_{n=1}^{\infty} s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) T_n'(0) = \varphi_1(r)$$

teńliklerine hám (2.3.12) impulslıq tásir shártlerinen paydalansaq

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} &= \frac{\partial u(r, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(r, t_k - 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t_k + 0) - T_n'(t_k - 0)] s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta T_n'(t) \Big|_{t=t_k} \right) s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) \end{aligned}$$

bolǵanı ushın $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots$ momentlerinde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta T_n'(t) \Big|_{t=t_k} \right) s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) = I_k(r), \quad k = 1, 2, \dots$$

teńligi orınlı bolıwın kóremiz.

Solay etip, $T_n(t)$ funkciyası

$$T''(t) + (a \lambda_n)^2 T_n(t) = 0, \quad t \neq t_k \quad (2.3.19)$$

teńlemesiniń

$$T_n(0) = \sigma_{n0}, \quad T'_n(0) = \sigma'_{n0} \quad (2.3.20)$$

baslanǵısh shártlerin hám $t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots$ momentlerinde

$$\Delta T'_n(t) \Big|_{t=t_k} = T'_n(t_k + 0) - T'_n(t_k - 0) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3.21)$$

impuls tásir shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimi boladı eken. Bunda

$$\begin{aligned} \sigma_{0n} &= \frac{2}{R^2 s_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \varphi_0(r) s_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr \\ \sigma'_{0n} &= \frac{2}{R^2 s_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \varphi_1(r) s_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr \\ \gamma_k &= \frac{2}{R^2 s_1^2(\mu_n)} \int_0^R r I_k(r) s_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

formulaları menen anıqlanadı.

(2.3.19)-(2.3.21) másele sheshimi $\forall t \in [t_p, t_{p+1}), \quad p = 0, 1, 2, \dots$ ushın

$$T_n(t) = \sigma_{n0} \cos \lambda_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a \lambda_n} \sin \lambda_n t + \sum_{k=1}^p \frac{\gamma_k}{a \lambda_n} \sin \lambda_n (t - t_k) \quad (2.3.22)$$

túrinde jazıladı. (2.3.22) formuladan $T_n(t)$ funkciyasın (2.3.14) tegi ornına

qoyıp, (2.3.9)-(2.3.12) másele sheshimin

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_{n0} \cos \lambda_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a \lambda_n} \sin \lambda_n t + \sum_{k=1}^p \frac{\gamma_k}{a \lambda_n} \sin \lambda_n (t - t_k) \right] s_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \quad (2.3.23)$$

kóriniste jazamız.

Teorema 2.2 (2.3.9)- (2.3.12) másele sheshimi, yaǵnıy, impuls tásirine ushıraǵan dóńgelek membrananiń radiallıq terbelis máselesi sheshimi (2.3.23) kóriniste jazıladı.

Juwmaqlaw

Sońǵı waqıtlarda traektoriyaları úziliske iye bolatuǵın dinamikalıq sistemalardı úyreniwge qızıǵıwdıń artıwı jańa texnika hám texnologiyalardıń talaplarınan kelip shıǵadı. Bunday texnika hám texnologiyalarda impulslı avtomat basqarıw sistemaları, impulslı esaplaw sistemalarınıń paydalanıwına baylanıslı hár qıylı fizikalıq tábiyatlı tásirge ushıraǵan differentsiallıq teńlemelerdi úyreniwge baǵıshlangan matematikalıq jumislardıń sanı biraz arttı hám bunday máseleler menen qálegen matematika mektepleri shuǵıllana basladı. Impuls tábiyatlı tásirge ushıraǵan differentsiallıq teńlemelerdi úyreniw jumısların sistemalı alıp barǵan Kiev qalasındaǵı sıızıqlı emes mexanika mektebi boldı. Usı matematika mektebi ilimpazları A.M.Samoylenko, N.A.Peresiyuk tárepinen jazılıp 1987-jılı baspadan shıqqan “Differentsialnie uravneniya s impulsnim vozdeystviem” atamasındaǵı monografiyada impuls tábiyatlı tásirge ushıraǵan differentsiallıq teńlemeler, bunday teńlemelerdiń klassifikatsiyası hám olarǵa baylanıslı máselelerdi úyreniw metodları berilgen. Sonıń menen birge impuls tábiyatlı tásirge ushıraǵan differentsiallıq teńlemeler teoriyasınıń ádettegi differentsiallıq teńlemeler teoriyasına uqsaslıǵı hám ayırmashılıǵı úyrenilgen bolıp, búgingi kúnde bul miynet impuls tábiyatlı tásirge ushıraǵan differentsiallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykarı dep tán alınǵan.

İtibarınıızǵa bayan qılınıp atırǵan magistrlik dissertaciya jumısı “Impuls tábiyatlı sırtqı tásirlerdi esapqa alǵan jaǵdaydaǵı dóńgelek membrananıń terbelisi” atamasında orınlanadı hám tayınlangan waqıt momentlerinde impuls tásirine ushıraǵan differentsiallıq teńlemelerdiń sheshimleriniń bar bolıwı hám bul sheshimniń jıyınalılıǵı haqqındaǵı mäseleni izertlewge baǵıshlangan.

Magistrlik dissertaciya jumısı kirisiw bólimi, eki bap, juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Birinshi bap “Tiykargı túsinipler hám anıqlamalar” dep ataladı. Bul bap úsh paragraftan ibarat. Birinshi paragrafta impuls tásirine ushıraǵan differentsiallıq teńlemeler túsiniǵı, usı túsiniǵke baylanıslı anıqlamalar, impuls tásirine ushıraǵan differentsiallıq teńlemelerdiń tiykargı qásiyetleri hám bunday

teńlemelerdi sheshiw usılları haqqında maǵlıwmat berilgen. Ekinshi paragrafta Bessel teńlemesi hám onıń sheshimleri haqqında, túrli indeksli Bessel funkciyaları arasındǵı baylanıs haqqında ayılǵan. Úshinshi bapta dóńgelek membrana terbelis teńlemesi hám onıń sheshimi haqqında ayılǵan.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń ekinshi babı 3 paragraftan ibarat. Birinshi paragraf “Membrananıń impuls tásirine ushıraǵan terbelisi ” dep atalıp, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k \quad (2.1.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (2.1.2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G$$

baslanǵısh shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N \quad (2.1.3)$$

impuls táhiri shártlerin hám

$$u(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2.1.4)$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(x, y, t)$ sheshimin tabıw máselesi

qarastırılǵan hám sheshimi

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_{n0} \cos a \mu_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a \mu_n} \sin a \mu_n t + \sum_{k=1}^p \frac{\gamma_k}{a \mu_n} \sin a \mu_n (t - t_k) \right] V_n(x, y)$$

kórinisindegi Qatar túrinde tabılǵan.

Ekinshi paragraf “Tórt múyeshli membrananıń impuls tábiyatlı sırtqı kúshler tásirindegi terbelisi ” dep atalıp, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k \quad (2.2.1)$$

tolqın teńlemesiniń

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (2.2.2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G$$

başlangıç shártlerin,

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad k \in N \quad (2.2.3)$$

impuls tásir shártlerin hám

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=p} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=q} = 0 \quad (2.2.4)$$

shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi qarastırılǵan hám sheshimi

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} [\alpha_{mn} \cos \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + \frac{\beta_{mn}}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t +$$

$$+ \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}} \sum_{k=1}^p \gamma_{mn}(k) \sin \pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} (t - t_k)] \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$$

kórinisindegi qatar túrinde tabılıp, qatardıń jıynaqlılıǵı dálillengen.

U`shinshi paragraf “Impuls tásirine ushıraǵan dóńgelek membrana teńlemesin izertlew ” dep atalıp, dóńgelek membrananıń radiallıq terbelis jaǵdayın, yaǵnıy awısıw u tek ǵana r hám t ǵa baylanıslı bolǵan haldaǵı impulslıq tásir jaǵdayı qarastırılǵan.

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad (2.3.9)$$

başlangıç shártler

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(r) \quad (2.3.10)$$

shegaralıq shárt

$$u(r, t)|_{r=R} = 0 \quad (2.3.11)$$

hám impulslıq tásir

$$\Delta \left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \frac{\partial u(r, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(r, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(r), \quad k \in N \quad (2.3.12)$$

shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi qarastırılǵan hám máseleniń sheshimi

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_{n0} \cos \lambda_n t - \frac{\sigma'_{n0}}{a \lambda_n} \sin \lambda_n t + \sum_{k=1}^p \frac{\gamma_k}{a \lambda_n} \sin \lambda_n (t - t_k) \right] s_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right)$$

qatarı túrinde tabılǵan.

Jumıstıń sońında impulslıq tásirge ushıraǵan differenciallıq teńlemelerdiń matematikalıq ekologiya máselelerinde qollanılıwlarına qısqasha toqtap ótemiz. Házirgi kúnde ekologiyalıq qáwipsizlik hám ekologiyalıq mádeniyat búgingi kúnniń baslı talabı bolmaqta.

Epidemiya teoriyasında ushırasatuǵın máseleniń differenciallıq modelin qarastıramız. Populyaciya N tiykardan turatuǵın bolsın hám olar 3 toparǵa ajratılsın. Birinshi toparǵa konkret qanday da bir awırıw anıqlanbaǵan, biraq salamat emes nawqaslar, ekinshi toparǵa infekciya menen kesellengen hám keselliktiń ǵalabalasıwına sebepshi bolatuǵın nawqaslar, úshinshi toparǵa belgili dárejede salamat hám ózlerinde kesellikke qarsı immunitet payda etken nawqaslar kirsın. Birinshi toparǵalıardıń t waqıttaǵı sanı $S(t)$ menen, ekinshi toparǵalıardıń t waqıttaǵı sanı $I(t)$ menen, úshinshi toparǵalıardıń t waqıttaǵı sanı $R(t)$ menen anlatılsın. Sonda populyaciya sanı

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

kórinisinde beriledi. Usı másele sheshimi impulslıq shamaǵa baylanıslı túrde izertlenedi.

Paydalanilgan ádebiyatlar dizimi

Basshi ádebiyatlar

1. Mirziyoev Sh.M. Erkin va farovon demokratik Ózbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. Toshkent: <<Ózbekiston>>, NMIU, 2017.
2. Mirziyoev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo`limizni qa`tiyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko`taramiz. Toshkent: <<Ózbekiston>>, 2017.
3. Mirziyoev Sh.M. Qonun ustovurligi va inson manfaatlarini ta`minlash yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. Toshkent: <<Ózbekiston>>, NMIU, 2017.
4. Mirziyoev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va oliyjanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent: <<Ózbekiston>>, NMIU, 2017.
5. Ózbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.Mirziyoevning Oliy Majlisga Murojatnamasi// HUQUQ, 2019-yil, 3-yanvar.
6. Mirziyoev Sh.M. Tanqidiy tahlil, qa`tiy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik-har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo`lishi kerak.. Toshkent: <<Ózbekiston>>, 2017.

Normativ-huqıqıy hújjetler

1. O`zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi.-T.:o`zbekiston,2018.
2. O`zbekiston Respublikasining “Bilimlendiriw haqqında”ǵı Nızamı.-T.:1997
3. Ózbekstan Respublikası Kadrlar tayarlaw Milliy dástúri.-T.:1997
4. Ózbekstan Respublikası Prezidentiniń 2017-yıl 7-fevraldaǵı “Ózbekstan Respublikasınıń jáne de rawajlandırıw boyınsha háreketler strategiyası haqqında”ǵı PF-4947 sanlı Pármanı, O`zbekstan Respublikası nızam hújjetleri toplamı. 2017-jıl,6-san, 70-statya.
5. Ózbekistan Respublikası Ministrler Keńesiniń 36-sanlı nızamı menen 2015-jıl 2-martta tastıyqlanǵan “Magistratura haqqında”ǵı Nızamı.-T.:2015.lex.uz

Tiykargı ádebiyatlar

1. Mishkis A.D. Samoylenko A.M. Sistemi s toshkami v zadannie momenti vremeni\\ matematisheskiy sbornik. -1967 T. 74 –с.202-208.
2. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific Series on Non-linear Sciences. Ser. A. V.14. –Singapore: World Scientific. -1995. -462 p.
3. Samoylenko V.G., Elgondiev Q.Q. Issledovanie differentsialnix urabneniy II poryadka s İmpulsnim vozdeystviem v R^2 //Preprint AN USSR in-t matematiki, 1989.-82s//<http://element.ru/events/432830>.
4. Elgondiev Q.Q. Kolebanie pryamougolnyy embrane s İmpulsnim vozdeystviem.// Materiali mejd. Konf. “Novi napravleniya v teorii dinamisheskix system I nekorrektnix zadash”. Samarqand 2007. S 30- 5.
Elgondiev Q.Q. Rasprotranenie tepla v beskoneshnom tsilindre.//”Sovremennie metodi matematisheskoy fiziki I ix prilozheniya”. Tashkent 2015. 158-160s.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Изд. МГУ, -1999. - с.
7. Yelgondiyev K.K., Kurbanbaev O.O., Matmuratova C.P. String oscillations with impulsive effects//Karakalpak Scientific Journal, V2. 2019. P.
8. Мышкис А.Д. Авторегулируемый импульсный точечный подогрев конечной среды // Мат. Заметки, 79:1, 2006. С.102-106.
9. Мышкис А.Д. Процесс теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Автоматика и телемеханика, 1995, 2. С.35-43.
10. Елгондиев К.К., Пильтай М.М., Хомченко Л.В. Распространение тепла в однородном стержене с импульсным воздействием // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 2003. Вып. 10. С.59-65.

11. Елгондиев К.К., Пильтай М.М., Хомченко Л.В. Распространение тепла в прямоугольной пластинке с импульсным воздействием // Вестник Киев ун-та. Серия: физико-математические науки. 2003. Вып. 1. С. 69-72.
12. Елгондиев К.К. Колебания струны с импульсным воздействием // Вестник Крас.ГУ. Серия: физико-математические науки. 2006. №9, с.114-118
31//<http://esnuir.eenu.edu.ua/browse?type=author&value=Yelgondyev%2C+Kuanysh>.
13. З.Амангелдиева. Колебания струны при импульсных воздействиях// Магистрантлардың илимий мийнетлериниң топламы.2019.С.39-42.
14. Elgondiev K.K., Qurbanbaev O.O. Amangeldieva Z.N. Impulslıq kúsh tásirindegi membrane terbelisi// “Matematikaning zamonaviy muammolari” ilmiy onlayn-konferensiya tezislari to`plami.2020.c.193-194

Internet materialları

1. www.math.ru
2. www.dic.academic.ru
3. www.mathinst.uz
4. www.fizmathim.com
5. www.natural-sciences.ru