

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

**BERDAQ ATINDAĞÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Qol jazba huqıqında

UDK:

Kamalov Raxman Raxıp ulı

**Parabolalıq tiptegi teńlemelerge ayırmalı sxemalar dúziw hám olardı izertlew
jolları**

5A130202 – Ámeliy matematika hám informaciyalıq texnologiyalar

Magistr akademiyalıq dárejesin alıw ushın jazılğan

DISSERTACIYA

MAK da jaqlawğa ruxsat

Magistratura bólimi bashlıǵı:

doc. A.Gulimov

Kafedra bashlıǵı:

f.-m.i.d., doc. D.Utebaev

Ilimiy basshı:

f.-m.i.d., doc. D.Utebaev

Nókis – 2020

MAZMUNI

KIRISIW.....	3
I-bap. MATEMATIKALIQ MODELLESTIRIW	9
1-§. Matematikalıq modellestiriw.....	9
2-§. Kompterde modellestiriw hám sanlı eksperimentler.....	10
3-§. Analiz tiykarları.....	13
4-§. Shekli ayırmalar, ayırmalı teńlemeler hám olardıń baylanısı	17
II-bap. DARA TUWÍNDÍLÍ JÍLLÍLÍQ ÓTKIZGISHLIK TEŇLEMESI	24
1-§. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin keltirip shıǵarıw	24
2-§. SHegaralıq máselelerdi qoyıw	28
3-§. Máseleni sheshiwdiń analitikalıq usılları	30
4-§. Kletkalıq avtomatlardıń hám yarımótkizgishlerdegi kúshli elektr maydanı hárezetiniń matematikalıq modelleri	31
III-bap. JILLILIQ ÓTKIZGISHLIK TEŇLEMELERIN AYIRMALI TEŇLEMELER TEORIYASI TIYKARINDA IZERTLEW.....	35
1-§. Sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı hám olardıń	35
ayırmalı sxemalar menen baylanısı	35
2-§. Birinshi tártipli turaqlı koefficientli ayırmalı teńlemeler	37
sistemasınıń ornıqlılıǵı	37
3-§. Birinshi tártipli ózgermeli koefficientli ayırmalı teńlemeler sistemasınıń ornıqlılıǵı.....	40
IV-bap. PROGRAMMALASTÍRIW TÍYKARLARÍ HÁM SANLI MISALLAR	46
1-§. Sızıqlı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin sheshiwge mısál	46
2-§. Kletkalıq avtomatlarda sanlı modellestiriw	48
3-§. Pseudoparabolalıq tiptegi differenciallıq teńlemelerdi	52
sheshiw jolları.....	52
JUWMAQLAW	55
PAYDALANÍLGAN ÁDEBIYATLAR	57
Q O S I M S H A L A R	60

KIRISIW

Temaniń aktuallıǵı. Ilimniń hám texnikanıń kóplegen máseleleri dara tuwındılı parabolalaq tiptegi sızıqlı yamasa sızıqlı emes teńlemelerdi sheshiwge alıp keledi. Mısalı, suyıqlıqlar dinamikası, elektrlestiriw hám magnetizm, mexanika, optika, biotexnika, rekciya-diffuziya, kletkalıq avtomatlar, yarımótkizgishler, jıllılıqtı jetkiziw h.t.b. tarawlardaǵı ámeliy máselelerdiń kóbisiniń matematikalıq modeli usınday dara tuwındılı parabolalıq tiptegi teńlemelerden turadı. Parabolalıq tiptegi teńlemelerdi tek keńislik ózgeriwshileri boyınsha approksimaciyalasaq onda biz birinshi tártipli ápiwayı differenciallı teńlemeler sistemasına iye bolamız. Mine usınday eki tiptegi máselelerdi sanlı usıllar menen sheshkenimizde biz tiykarınan ayırmalı teńlemeler sistemasın sheshiw máselesine kelemiz. Al tek ayırmalı teńlemelerdiń ózide kóplegen praktikalıq máselelerdiń matematikalıq modeli bolıp tabıladı. Mısalı, itimallıq teoriyası máseleleri, optimal basqarıw máseleleri, ekonomikanı planlastırıw máseleleri h.t.b. Sonlıqtan dara tuwındılı parabolalıq tiptegi differenciallı teńlemelerdi ayırmalı teńlemeler teoriyası tiykarında úyreniwde búgingi kúnniń aktual máseleleriniń biri bolıp kelmekte. Ayırmalı teńlemeler teoriyasınıń eń tiykarǵı máseleleriniń biri, bul teńlemelerdiń sheshiminiń ornıqlılıǵın izertlew máselesi bolıp tabıladı. Ayırmalı teńlemelerdiń sheshiminiń ornıqlılıǵı túsinigi eń dáslep Perron [1] tárepinen kiritilgen. Bul sáykes differenciallı teńlemelerdiń ornıqlılıǵınıń analogı edi. Bunnan soń ayırmalı teńlemelerdiń sheshiminiń ornıqlılıǵı máselesi boyınsha kóplegen izertlewler alıp barıldı. Bul izertlewlerdiń barlıǵı derlik differenciallı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı tiykarında sáykes ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın izertlew máseleleri bolıp tabıladı.

Házirgi waqıtta turaqlı koefficientli sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın anıqlaw usılları jaqsı izertlengen (biz bul jumısta periodlı koefficientli teńlemelerge toqtap otırmaymız). Al ózgeriwshi koefficientli sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń hám sızıqlı emes ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın anıqlaw usılları kem izertlengen. Sebebi, házirgi waqıtta bunday teńlemelerdiń sheshimleriniń

ornıqlılıǵınıń effektiv kriteriyaları joq. Sonıda aytıp ótiwimiz kerek, sońǵı waqıtları ilimniń hám texnikanıń tez pát penen rawajlanıwı jańa tiptegi matematikalıq modellerdi sheshiw máselesin kún tártibine qoymaқта. Bunday máselelr kóbinese ózgeriwshi koefficientli quramalı teńlemelerdi sheshiwge alıp keledi. Ásirese sızıqlı emes teńlemelerdi sheshiw hám olardıń ornıqlılıǵın izertlew búgingi kún tártibiniń eń tiykarǵı aktual máseleleriniń biri bolıp tabıladı. Mısalı, joqarıdaǵı keltirgenlerimizden basqa, plazmadaǵı elektronlı hám ionlı jıllılıq ótkizgishlik processleriniń, gazlardıń hám suyıqlıqlardıń shilterli ortalıқтаǵı adiabatikalıq filtraciyasınıń, neytronlardıń hám alfa bóleksheleriniń diffuziyasınıń matematikalıq modelleri kvazısızıqlı jıllılıq ótkizgishlik teńlemelerine alıp keledi. Sonday-aq, ximiyalıq kinetika processleriniń, hár qıylı bioximiyalıq rekciyalardıń (reakciya-diffuziya), konvekciya-diffuziya processleriniń matematikalıq modelleride usınday máselelerdi sheshiwge alıp keledi. Al bunday máselelerdi Shekli ayırmalar usılı yamasa basqada sanlı usıllar menen menen sheshiw tiykarınan ayırmalı teńlemelerdi sheshiw máselesne alıp keledi.

Jumıstıń obiekti hám predmeti. Dara tuwındılı parabolalıq tiptegi differencialı teńlemeler, ayırmalı teńlemeler sisteması. Shekli ayırmala sxemalar dúziw, olardı ayırmalı teńlemeler sisteması túrinde jazıw, ornıqlılıǵın, jıynaqlılıǵın hám dálligin izertlew.

Jumıstıń maqset hám wazıypaları. Dara tuwındılı parabolalıq tiptegi differenciallı teńlemelerdiń dál hám juwıq sheshimlerin tabıwdı úyreniw. SHeshimlerdiń ornıqlı bolıwınıń jańa shártlerin alıw. SHeshimlerdi alıw usılların kompyuterde programmalastırıw hám sanlı eksperimentler júrgiziw arqalı sheshimniń qásietlerin izertlew.

Ilimiy jańalıǵı. Ayrım tiptegi sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵınıń zárúrli hám jetkilikli shártleri alındı. Buǵan qosımsha ayırmalı teńlemelerdiń teń ólshemli hám asimptotikalıq ornıqlılıǵı dálillendi. Usı alınǵan teoriyalıq materiallar tiykarında parabolalıq tiptegi teńlemeler ushın, atap aytqanda, kletkalıq avtomatlardıń hám yarımótkizgishlerdiń matematikalıq modeline dúzilgen Shekli

ayırmalı sxemalardıń jıynaqlılıq shártleri izertlendi hám aprior bahaları alındı. Alınğan ilimiy nátiyjeler [29, 30] maqalalarda jariyalandı.

Izertlewdiń tiykarǵı máseleleri hám boljawları. Parabolalıq tiptegi máselelerdiń kóp túrliligi: plazmadaǵı elektronlı hám ionlı jıllılıq ótkizgishlik processleriniń, gazlardıń hám suıqlıqlardıń shilterli ortalıqtaǵı adiabatikalıq filtraciyasınıń, neytronlardıń hám alfa bóleksheleriniń diffuziyasınıń matematikalıq modelleri, sonday-aq, kletkalıq avtomatlar, yarımótkizgishler, ximiyalıq kinetika processleriniń, hár qıylı bioximiyalıq rekciyalardıń (reakciya-diffuziya), konvekciya-diffuziya processleriniń matematikalıq modelleri. Al bunday máselelerdi Shekli ayırmalar usılı yamasa basqada sanlı usıllar menen menen sheshiwdiń tiykarınan ayırmalı teńlemelerdi sheshiw máselesne alıp keliwi.

Ádebiyatlar túsindirmesi. Ayırmalı teńlemelerdi izertlew baǵdarında jumıs alıp barǵan ayırım ilimpazlardıń miynetleri menen tanısamız. Turaqlı hám ózgeriwshi koefficientlerge iye sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı [1-8] jumıslarında izertlengen. O. Perron [1] jumısında turaqlı koefficientli iye sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı izertlengen. Bunnan soń bunday izertlewlerdi Ta Li [2] alıp barǵan. R. Bellman [3] hám P.V. Bromberg [4] differenciallı teńlemeler teoriyasındaǵı ornıqlılıqtı izertlewdiń tiykarǵı usıllarınıń biri bolǵan Lyapunovtıń birinshi usılın turaqlı koefficientli sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın izertlewge qollanǵan. Al P.L. Koval [5,6] ózgeriwshi koefficientli sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın izertlegen. Bunda ol

$$y_{n+1} = A_n y_n + b_n, \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

túrindegi vektorlı-matricalıq formadaǵı ayırmalı teńlemeni izertlegen. Bunda $\{y_n\}$ - izertlenip atırǵan vektorlar izbe-izligi, $\{A_n\}$ - berilgen matricalar izbe-izligi hám $\{b_n\}$ - berilgen, norması shegaralanǵan, vektorlar izbe-izligi. Ol tómendegi juwmaqlardı alǵan. Sáykes

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

birtekli sistemasınıń A_n matricası

$$\|A_n\| \leq 1 + q_n, \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} q_n < \infty$$

shártlerin qanaatlandırsa, onda (1)-sistemanıń sheshimi ornıqlı boladı. Al egerde,

$$\|A_n\| \leq a < 1 \quad (n \geq n_0)$$

shárti orınlansa, onda (1)-sistemanıń sheshimi asimptotikalıq ornıqlı boladı. Bunnan soń ol $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ Shekli matrica túsinigin kiritip, onıń tiykarında (1)-túrindegi ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın izertlegen. Onıń [7,8] jumıslarında sıızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı olardı bazı bir sıızıqlı túrlendiriwler arqalı úsh múyeshli matricaga keltiriw arqalı izertlengen. M.A. Skalkinaniń [9,10] jumıslarında differenciallı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı menen ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı arasındagı baylanıs kórsetilgen. Al, V.B. Demidovichtiń [11-14] hám YU.G. Ostapovtiń [15] jumıslarında Lyapunovtiń birinshi usılı tiykarında sıızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı izertlengen. Bunda ol sıızıqlı ayırmalı teńlemeler sistemasınıń xarakteristikalıq sanı túsinigin kiritip usı arqalı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın izertlegen.

Bul dissertaciyalıq jumısta (1), (2) túrindegi ayırmalı teńlemeler sistemalarınıń ornıqlılıǵı, teń ólshemli ornıqlılıǵı hám asimptotikalıq ornıqlılıqları izertlenedi. Olardıń Shekli ayırmalar sxeması menen baylanısı haqqında sóz etiledi. Usınday nátiyjelerdiń Shekli ayırmalar usılı tiykarında alınǵan nátiyjeler [16-18] ilimiy jumıslarda, al Shekli elementler usılı menen alınǵan nátiyjeleri [20-25] ilimiy jumıslarında izertlengen.

Izertlewde qollanılgan metodika. Shekli ayırmalar teoriyasınıń sanlı usılları. Ayırmalı teńlemelerdiń sheshimleriniń ornıqlılıǵın izertlew usılları. Ayırmalı teńlemelerdiń sheshimleriniń aprior bawaların alıw metodikası.

Izertlewdiń teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti. Dissertaciyalıq jumısta alınǵan juwmaqlar Shekli ayırmalar teoriyası menen ayırmalı teńlemeler teoriyasına óziniń kishi úlesin qosadı. Bul ayırım parabolalıq tiptegi dara tuwındılı differenciallı teńlemelerge dúzilgen Shekli ayırmalar sxemasın ayırmalı

teńlemelerge keltiriw hám olardıń ornıqlılıǵın ayırmalı teńlemeler teoriyası tiykarında izertlew.

Jumısta úyrenilgen hám alınǵan sanlı usıllar joqarǵı oqıw orınlarınń fizika-matematikalıq, texnikalıq qániygeliklerinde arnawlı kurslardı oqıwda hám matematikalıq modellestiriw, informatika hám ámeliy matematika pánlerin úyreniwde paydalanılıwı múmkin.

Jumıstıń dúzilisi. Endi qısqasha dissertaciyalıq jumıstıń mazmunına toqtap ótemiz. Pitkeriw dissertaciya jumısı kirisiwden, tórt baptan, juwmaqlawdan, paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen hám qosımshalardan turadı. Kirisiw bóliminde dissertaciya qoyılǵan máseleniń aktuallıǵı, maqseti, wazıypaları, ilimiy jańalıǵı, izertlew nátiyjeleriniń teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti haqqında sóz etiledi. Pitkeriwshiniń dissertaciya jumısının birinshi babında úyrenilip shıqqan ádebiyatlardan, atap aytqanda, matematikalıq analiz, funkcionallıq analiz hám esaplaw matematikası teoriyalarınıń keyingi izertlewler ushın kerekli materiallar keltiriledi.

Ekinshi bapta dara tuwındılı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin keltirip shıǵarıw, shegaralıq hám baslanǵısh shártlerdi qoyıw usılları, máseleni sheshiwdiń analitikalıq usılları qaralǵan. Buǵan qosımsha bul bapta kletkalıq avtomatlar menen yarımótkizgishler teoriyasınıń ayırım matematikalıq modelleri qaraldı.

Jumıstıń úshinshi babında ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın izertlewge keńnen toqtap ótilei. Birinshi paragrafta sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵınıń, teń ólshemli ornıqlılıǵınıń hám asimptotikalıq ornıqlılıǵınıń anıqlamaları keltiriledi. Ekinshi paragrafta turaqlı koefficientli ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı izertlenedi. Usınday izertlewler ózgermeli koefficientli ayırmalı teńleme ushın úshinshi paragrafta izertlenedi. Bunda Vajevskiy teńsizliginiń ayırmalı analogi alınadı hám usı tiykarında ózgermeli koefficientli ayırmalı teńlemenin ornıqlılıǵı izertlenedi. Sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı haqqındaǵı teoremlar alınadı.

Tórtinshi bap sanlı mısallargá baǵıshlanadı. Birinshi paragrafta sızıqlı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesine hám ekinshi paragrafta kletkalıq avtomatlardıń

matematikalıq modeli bolǵan teńlemege mısallar sheshilgen. Yshinshi paragrafta sxemalardı sanlı realizaciyalaw jolları aytıladı.

Jumıstıń aqırında qısqasha juwmaqlaw hám paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi keltiriledi. Qosımshalarǵa blok-sxemalar, programmalar hám alınǵan sanlı nátiyjeler jaylastırıladı.

I-bap. MATEMATIKALIQ MODELLESTIRIW

1-§. Matematikalıq modellestiriw

Matematikalıq modellestiriwdi keń qollanbay turıp házirgi ilimdi kóz aldımızǵa keltiriw múmkin emes. Sebebi modellestiriw búgingi kúnde qálegnn ilimiy izertlew jumıslarında hám texnikanıń derlik barlıq tarawlarınıń ámeliy máselelerin sheshiwde keń qollanıladı. Bul metodologiya hár qıylı tabiyattaǵı obiektlerdiń qásietlerin hám xarakteristikasını onıń haqıyqıy yamasa jasalma analogları járdeminde izertlewge tiykarlangan. Usınday ulıwma plandaǵı modellestiriw modellerdi dúziw hám bunnan soń olardı izertlew siyaqlı eki processti óz ishine qamtıydı. Modellerdi qollanıw barlıq waqıtta bazıbir ápiwayılastırıwlardı, obiekti idealizaciyalastırıwdı talap etedi. Sonlıqtan, modeldiń ózi obiektiń qásietlerin tolıq qamtımaydı, al tek ǵana ayırım izertlenip atırǵan xarakteristikaların beredi. Model izertlenip atırǵan obiektiń tek ayırım bólimleriniń tiykarında qurıladı hám sonlıqtan ol original modelden ápiwayıraq boladı. Sebebi, original modeldi qurıw oǵada qıyın. Sonlıqtan, eń tiykarǵısı, dúzilgen ápiwayı model izertlew ushın qolaylı boladı. Kóbinese obiekti tolıq izertlew ushın onıń hár bir xarakteristikasına bólek kishi modellerde qurılıwı múmkin. Modellestiriwdiń tabıslı shıǵıwı modeldi yamasa modeller kópligin durıs saylap alıwǵa baylanıslı.

Solay etip kóplegen modeller ishinde eń tiykarǵı modeller, bular fizikalıq hám matematikalıq modeller bolıp tabıladı. Matematikalıq model ilimiy izertlewdiń ideallastırılǵan modelleri ishindegi eń xarakterlisi bolıp tabıladı. Al fizikalıq modeller materiallıq modeller klasına kiredi. Fizikalıq modellestiriwde obiekti izertlewdiń ornına onıń fizikalıq modeli eksperimental izertlenedi. Fizikalıq modeldiń bir artıqmashılıǵı, obiektke matematikalıq model dúziw hám onı izertlew múmkin bolmaǵan jaǵdayda kórinedi. Mısalı, bunday jaǵday oǵada quramalı processlerge matematikalıq model dúziw qıyın bolıwı múmkin. Sonlıqtan, bunday jaǵdaylarda obiekti izertlewdiń jalǵız usılı, bul fizikalıq

modellestiriw bolıp tabıladı. Fizikalıq modellestiriw tiykarında uqsaslıq teoriyası jatadı. Biz bul dissertaciya jumısında fizikalıq modellestiriwge toqtamaymız.

Matematikalıq modellestiriwde berilgen obiektiń qásietlerin hám xarakteristikasını izertlewdi onıń matematikalıq modelin izertlew menen almasırladı. Matematikalıq model ámeliy matematikanıń qurılısı menen izertlenedi. Matematikalıq modellestiriwdiń házirge zaman etapı qoyılğan máseleni sheshiwde esaplaw usıllarınan hám kompyuterlerden keń paydalanıw menen haretlenedi.

Ilimiy bilimlerde matematikalastırıw, yaǵnıy matematikalıq túsiniqlerdi anıq hám gumanitar ilimlerde qollanıw házirgi zamannıń eń baslı máseleleriniń biri bolıp tabıladı. Kóbine anaw yamasa mınaw ilimniń rawajlanıw dárejesi onıń matematikalıq usıllarınan paydalanıw dárejesi menen ólshenedi. Matematikalastırıwdiń ekinshi etapı, bul matematikalıq modellerdi haqıyqı matematikalıq, abstraktlı obiectler esabında izertlew. Bunda haqıyqı matematikanıń quralları qollanıladı. Házirgi waqıtta matematikalıq modellerdi izertlew ushın esaplaw quralları keń múmkinshilikler tuwdırıp beredi. Bular joqarıda aytqanıımızday kompyuter hám esaplaw usılları bolıp tabıladı.

2-§. Kompterde modellestiriw hám sanlı eksperimentler

2.1. Kompyuterde modellestiriw. Ilimiy izertlewlerdiń jańa usıllarınıń biri, bul kompyuterde modellestiriw bolıp tabıladı. Kompyuterde modellestiriw tiykarınan tómendegilerge tiykarlanadı:

1. Izertlenip atırǵan processtiń matematikalıq modelin dúziw;
2. Oǵada joqarı tezlikke iye (sekundına millionlaǵan ámel orınlay alatuǵın) hám adam menen dialogqa kire alatuǵın jańa tiptegi elektron esaplaw mashinalarınan paydalanıw;

Kompyuterde modellestiriwdiń tiykarǵı mánisi degenimiz, bul matematikalıq model tiykarında elektron esaplaw mashinası járdeminde hár-qıylı eksperimentler seriyasını júrgiziw arqalı obiektiń yamasa processtiń qásiyetlerin

izertlew, onıń jumıs islew rejimin hám optimal parametrlerin tabıw, modeldi reallastırw bolıp tabıladı.

Mısalı, bazı-bir processtıń ámelge asıwınıń matematikalıq modelin bile otırıp (bazı-bir teńlemenı), onıń koefficientlerin, baslanǵısh hám shegaralıq shártlerin ózgerter otırıp sol obıekttıń yamasa processtıń ózin qalay alıp baratuǵınlıǵın izertlewge boladı. Búǵan qosımsha aldın-ala hár-qıylı jaǵdaylarda usı obıekttıń qásiyetleri haqqında pikir júrgiziwge boladı.

Kompyuterde modellestiriw hám sanlı eksperiment jańa ilimiy izertlew usılı retinde matematikalıq modellerdi dúziwde matematikalıq apparatı jańalawǵa iytermeleydi. Sanlı eksperimentlerdi júrgiziw ushın eń aktual, perspektiv tarawlar, bul oǵada iri ilimiy texnikalıq hám social-ekonomikalıq máseleler bolıp tabıladı. Mısalı, atom elektrostanciyası ushın reaktorlardı proektlestiriw, plotina hám gidroelektrostanciyalardı proektlestiriw, mámleketlik, regionallıq hám tarawlardıń perspektiv rawajlanıw planların dúziw h.t.b.

Ayrım jaǵdaylarda natural eksperiment ótkeriw múmkinshiligi bolmaydı, mısalı, termoyadrolıq sintez, kosmoslıq keńislikti izertlew, ayırım ximiyalıq óndiristi izertlew hám proektlestiriw h.t.b. Bul eksperimentlerdi ótkeriw adam densawlıǵına hám ómirine qáwipli. Bul jaǵdayda bizge járdem beriwshi jalǵız qural, bul esaplaw eksperimenti bolıp tabıladı.

Juwmaqlap aytqanda, kompyuterde modellestiriw matematikalıq emes izertlewlerdi matematikalıq máselelerdi (matematikalıq modeldi) sheshiwge alıp keledi. Bul arqalı jaqsı oylap tabılǵan matematikalıq apparat hám kúshli esaplaw texnikası menen birgelikte processti izertlewdiń jańa usılların payda etedi.

Solay etip, biz qarap atırǵan obıekttıń, processtıń yamasa sistemanıń matematikalıq modelin (matematikalıq máseleni) dúzdik, yaǵnıy ámeliy máseleni matematikalıq máselege aylandırdıq. Bunnan soń bul ámeliy máseleni sheshiwdiń keyingi ekinshi etapı payda boladı. Bul degenimiz, ápiwayı bolǵan matematikalıq máseleni sheshiwdiń usılların izlew yamasa oylap tabıw bolıp tabıladı. Bul izlep atırǵan usıllarımız elektron esaplaw mashinasında realizaciyalaw ushın qolaylı bolıwı shárt.

2.2. Esaplaw eksperimenti. Házirgi waqıtta tábiy, ilimiy hám halıq xojalıǵı máselelerin sheshiw elektron esaplaw mashinalarısız múmkin emes. Sonlıqtan keyingi waqıtları elektron esaplaw mashınaları járdeminde izertlenip atırǵan obiektiń matematikalıq modelin analizlew texnologiyası islep shıǵılmaqta. Izertlewdiń bunday usılı esaplaw eksperimenti (vıchislitelniy eksperiment) usılı dep ataladı.

Sanlı eksperimenttiń jáne bir ıqshamlılıǵı, ol oǵada qımbatqa túsetuǵın natural eksperimentti elektron esaplaw mashinasında esaplawlar júrgiziw menen almaştıradı. Ol az wıqıt ishinde kem qarjı menen oǵada kóp sandaǵı eksperimentlerdi júrgiziwge múmkinshilik tuwdıradı. Buniń ózi quramalı sistemalardı qayta islep tez arada óndiriske shıǵarıw múmkinshiligin beredi.

Meyli, mısıl retinde bazı-bir fizikalıq obiekti, qubılıstı yamasa processti izertlew kerek bolsın. Onda esaplaw eksperimentiniń sxeması tómendegi kóriniste boladı.

1. Izertlenip atırǵan obiekti basqarıwshı tiykarǵı zakonlar kórip shıǵıladı;

2. Usı obiekttegi bolıp atırǵan qubılıslardıń matematikalıq modeli dúziledi. Bul ádetta algebralıq, differenciyalı, integrallı h.t.b. teńlemeler sistemasına alıp keledi. Bul etapta izertlenip atırǵan obiekttegi processlerge onsha tásiiri joq ayırım faktorlar qaldırıladı. Kóbinese fizikalıq, mexanikalıq qubılıslardıń matematikalıq modelleri matematikalıq fizikanıń teńlemeleri yamasa ápiwayı differenciallı teńlemeler sisteması túrine iye boladı.

3. Haqıyqıy processler, kóbinese, sıızıqlı emes teńlemelerge alıp keledi, tek ǵana birinshi juwıqlasıwda yaǵnıy parametrlerdiń oǵada az muǵdardaǵı mánislerinde, teń salmaqlıqtan oǵada az qozǵalganda h.t.b. jaǵdaylarda bul teńlemeler sıızıqlı teńlemeler menen almasıwı múmkin. Usınday matematikalıq model dúzilgennen keyin, yaǵnıy bazı-bir teńleme alıńgannan soń onıń sheshimin tabıwımız kerek. Tek ayırım jaǵdaylarda ǵana, mısalı qatarlar túrinde bul teńlemelerdiń sheshimlerin tabıwımız múmkin. Bazı-bir waqıtları teńlemelerdiń sheshimin taptıq dep onıń sheshimleriniń bar bolıwın hám jalǵız ekenin dálillep qoyadı. Bul máseleniń praktikalıq kollınıw múmkinshiligin bermeydi. Buǵan

qosımsha sheshimniń sapasın hám bazı-bir sanlıq xarakteristikaların izertlewimiz kerek.

4. Endi sanlı usıllardı islep shıǵıp olardı realizaciyalaw ushın elektron esaplaw mashinaların qollanamız. YAǵnıy berilgen differenciallıq teńlemelerdi bazı-bir sanlı usıllar menen sheshemiz hám bul sanlı usıllar arqalı alınǵan sheshimlerdiń berilgen teńlemenıń sheshimlerine kanshelli jaqın ekenligin teoriyalıq jaqtan dálilleymiz. Bul teoriyanıń durıslıǵın anıqlaw ushın sanlı metodlardı realizaciya qılamız, yaǵnıy elektron esaplaw mashinalarında esaplawlar júrgiziw ushın programmalar (algoritmter) dúzemiz.

5. Sońǵı etap, bul programmalaradı ózlestirip bolǵannan keyin esaplawlardı júrgiziw hám olardı analizlew bolıp tabıladı. Usı joqarıda kórsetilgen etaplardı ótip bolǵannan keyin ǵana izertlenip atırǵan obiektiń qubılısları haqqında pikirler aytamız hám ol pikirlerdiń durıslıǵın tekseremiz, keri jaǵdayda, matematikalıq modelge yamasa esaplaw usıllarına qayta ózgerisler kiritiwge tuwra keledi.

3-§. Analiz tiykarları

3.1. Sızıqlı keńislik. Biz haqıyqıy sızıqlı H keńisligin qaraymız. YAǵnıy, hár-bir $y \in H, v \in H$ juplıǵı ushın $y + v \in H$ elementi hám hár-bir $y \in H$ hám λ haqıyqıy sanı ushın $\lambda y \in H$ elementleri sáykes qoyılǵan. Buǵan qosımsha $y, v, z \in H$ elementleri hám λ, μ haqıyqıy sanları ushın tómendegi aksiomalar orınlı bolsın:

$$1) \quad y + v = v + y, \quad y + (v + z) = (y + v) + z;$$

$$2) \quad \lambda(\mu y) = (\lambda \mu)y;$$

$$3) \quad \lambda(y + v) = \lambda y + \lambda v, \quad (\lambda + \mu)y = \lambda y + \mu y;$$

4) birgelkili anıqlanǵan sonday bir 0 elementi bar bolıp, qálegen $y \in H$ ushın $y + 0 = y$ teńligi orınlı;

5) qálegen $y \in H$ ushın birgelkili anıqlanǵan $(-y) \in H$ elementi bar bolıp $y + (-y) = 0$ teńligi orınlı;

$$6) 1 \cdot y = y.$$

H sızıqlı keńisligi normalanǵan dep ataladı, egerde hár-bir $y \in H$ elementi ushın usı elementtiń norması dep atalatuǵın $\|y\|$ haqıyqıy sanı anıqlanǵan bolıp ol tómendegi shártlerdi qanaatlandırsa:

- 1) $\|y\| \geq 0$ xэм $\|y\| = 0$ egerde $y = 0$ bolsa;
- 2) $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$;
- 3) $\|y + v\| \leq \|y\| + \|v\|$ (úshmuyeshlik teńsizligi).

Bir sızıqlı keńislikte normanı hárqıylı usıllar menen kirgiziw múmkin.

3.2. Sızıqlı operatorlar. Endigiden bılay H keńisligin barlıq waqıtta Shekli ólshemli sızıqlı normalasqan keńislik dep esaplaymız.

A operatorı bazıbir $D \subset H$ kópliginiń hár-bir y elementine sonday bir $R \subset H$ kópliginiń v elementin sáykes qoyadı. Bul jaǵdayda D kópligi A operatorınıń anıqlanıw oblastı dep ataladı hám ol $D(A)$ dep belgilenedi. 0 arkalı nolik operator, al E arkalı birlik operator belgilenedi. A operatorı H keńisliginde háreketlenedi dep ayıladi, egerde $D(A) = H$ hám $R(A) \subset H$ bolsa.

A^{-1} operatorı A operatorına kerı operator dep ataladı.

A operatorı sızıqlı dep ataladı, egerde qálegen eki $y, v \in D(A)$ elementleri hám eki haqıyqıy λ, μ sanları ushın

$$A(\lambda y + \mu v) = \lambda Ay + \mu Av$$

teńligi orınlansa.

A sızıqlı operatorı H Shekli ólshemli sızıqlı keńisliginde anıqlanıw oblastı $D(A^{-1}) = H$ bolǵan óziniń kerı operatorına iye boladı dep ayıladi, egerde $Ay = 0$ teńlemesi jalǵız sheshimge iye bolsa. H keńisliginde háreketlenetuǵın A operatorı shegaralanǵan operator dep ayıladi, egerde bazı-bir turaqlı $M > 0$ sanı bar bolıp barlıq $y \in H$ ler ushın

$$\|Ay\| < M \|y\|$$

teńsizligi orınlansa.

Shekli ólshemli keńislikte qálegen sızıqlı operator shegaralanǵan boladı.

Usınday M turaqlılıarınıń ishindegi eń kishkenesi A operatorınıń norması dep ataladı hám ol $\|A\|$ arqalı belgilenedi. Normanıń anıqlamasınan

$$\|A\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

ekenligi kelip shıgadı.

Operatordıń norması tómendegi qásiyetlerge iye:

$$1) \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|; \quad 2) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|; \quad 3) \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Egerde barlıq $y \in H$ ler ushın $(AB)y = (BA)y$ bolsa, onda A hám B operatorları orın almasıwshı operatorlar dep ataladı hám ol $AB = BA$ dep jazıladı.

3.3. Shekli ólshemli gilbert keńisligindegi operatorlar. H gilbert keńisliginde A^* operatorı A operatorına túyinles operator dep ataladı, egerde barlıq $y, v \in H$ elementleri ushın

$$(Ay, v) = (y, A^*v)$$

teńligi orınlansa.

Anıqlanıw oblastı $D(A) = H$ bolǵan sıızıqlı shegaralanǵan A operatorına anıqlanıw oblastı $D(A^*) = H$ bolǵan jalǵız tek bir ǵana A^* operatorı bar boladı.

Tómendegi teńlikler orınlı:

$$(A^*)^* = A, \quad (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

A^* operatorı sıızıqlı hám shegaralanǵan, sondayaq $\|A^*\| = \|A\|$. Buǵan qosımsha

$$\|A\| = \sqrt{\|A^* A\|}.$$

H keńisliginde háreketlenetuǵın A operatorı ózi-ózine túyinles dep ataladı, egerde $A^* = A$ bolsa. Egerde A hám V operatorları ózi-ózine túyinles bolsa, onda AV operatorıda ózi-ózine túyinles boladı.

H Shekli ólshemli haqıyqıy gilbert keńisliginde A operatorı:

- teris emes dep ataladı ($A \geq 0$), egerde barlıq $y \in H$ ler ushın $(Ay, y) \geq 0$ bolsa;
- oń dep ataladı ($A > 0$), egerde barlıq $y \in H$ ler ushın $(Ay, y) > 0$ bolsa;

- oń anıqlanǵan dep ataladı ($A \geq \delta E$), egerde $\delta > 0$ hám barlıq $y \in H$ ler ushın $(Ay, y) \geq \delta \|y\|^2$ teńsizligi orınlı bolsa.

Joqarıdaǵı anıqlama tiykarında $A \geq B$ degenimiz $A - B \geq 0$ degendi ańlatadı. Egerde, H Shekli ólshemli gilbert keńisliginde háreketlenetuǵın A operatori oń bolsa, onda A^{-1} operatori bar boladı. Oń anıqlanǵan operator ushın $\|A^{-1}\| \geq \delta^{-1}$ bahası orınlı.

Qálegen A sıızqlı operatori ushın A^*A hám AA^* operatorlarında teris emes, al egerde A operatori oń bolsa, onda oń operatorlar boladı. V operatori A operatorınıń kvadrat túbiri dep ataladı, egerde $B^2 = A$ ($B = A^{1/2}$) bolsa.

Meyli D operatori H keńisliginde háreketlenetuǵın ózi-ózine túyinles oń (teris emes) operator bolsın. Onda H keńisliginiń elementlerinen turatuǵın

$$(y, v)_D = (Dy, v)$$

skalyar kóbeymesi hám

$$\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$$

normasınan (yarım normasınan) turatuǵın H_D energetikalıq keńisligin anıqlawǵa boladı.

$A = A^* > 0$ operatori ushın tómendegi

$$|(y, v)| < \|y\|_A \|v\|_{A^{-1}}$$

teńsizligi orınlı. Teris emes A operatori ushın (Ay, y) sanı usı operatordıń energiyası dep ataladı. Sızızqlı A hám V operatorları ushın turaqlı $\gamma_2 \geq \gamma_1 > 0$ sanları bar bolıp $\gamma_1 B < A < \gamma_2 B$ teńsizligi orınlansa, onda bunday operatorlar energetikalıq ekvivalent operatorlar dep ataladı. Egerde $\delta E \leq A \leq \Delta E$ teńsizligi orınlı bolsa, onda δ hám Δ sanları A operatorınıń shegaraları dep ataladı.

4-§. Shekli ayırmalar, ayırmalı teńlemeler hám olardıń baylanısı

4.1. Shekli ayırmalar hám ayırmalı sxemalar haqqında. Shekli ayırmalar túsiniǵiniń tiykarın ápiuayı mısallarda túsindiremiz.

$[a, b]$ kesindisindegi tor dep usı kesindidegi tochkaların qálegen kópligine aytamız. Tordıń tochkalarında anıqlanǵan funkciya, torlıq funkciya dep ataladı. ω_N arqalı

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın tordı belgileyemiz. f_i arqalı $f(x)$ funkciyasınıń $x_i \in \omega_N$ tochkasındaǵı mánisine aytamız, yaǵnıy $f_i = f(x_i)$. $x_i \in \omega_N$ joqarıdaǵı ω_N torınıń túyinleri dep ataladı. $[a, b]$ daǵı teń ólshemli tor dep

$$\omega_h = \{x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\} \quad (1.1)$$

tochkalarınıń kópligine aytamız. Bul jerde $h = (b - a) / N$ -torınıń adımı.

Endi $[a, b]$ aralığında anıqlanǵan hám úzliksiz $u(x)$ funkciyasınıń tuwındıların juwıq esaplaw máselesin qaraymız. Meyli, $u(x)$ funkciyası bizge kerekli dárejedeǵı tegis funkciya bolsın. (1.1)-ge tiykarlanıp ω_h setkasın anıqlaymız hám onı tómendegishe belgileyemiz:

$$u_i = u(x_i), \quad u_{x,i}^- = (u_i - u_{i-1}) / h, \\ u_{x,i} = (u_{i+1} - u_i) / h, \quad u_{x,i}^+ = (u_{i+1} - u_i) / (2h).$$

Bul jazılǵan Shekli ayırmalar $u(x)$ funkciyasınıń $x = x_i$ tochkasındaǵı sáykes shep, óń hám oraylıq ayırmalı tuwındıları dep ataladı. Egerde x_i tochkası qabıl etilgen bolıp, $i \rightarrow \infty$ da h adımı nolge umtılsa, onda joqarıda kórsetilgen hár bir ayırmalı qatnaslar x_i tochkasında anıqlanǵan $u(x)$ funkciyasınıń tuwındısınıń mánisine umtıladı. Sonlıǵtan, $u'(x)$ tıń juwıq mánisi retinde joqarıdaǵı Shekli qatnaslardıń qálegen birewin qabıl etiwge boladı. Endi differencial ańlatpanı Shekli ayırma menen almastırǵanda ketetuǵın qátelikti esaplaw qıyın emes. Mısalı, $x = x_i$ tochkasındaǵı shep ayırmalı tuwındını qarayık. Onı tómendegishe jazamız:

$$u_{x,i}^- = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}.$$

Taylor formulasi boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x).$$

Sonlıqtan

$$u_{x,i}^- = u'(x_i) - \frac{h}{2}u''(\xi_i). \quad (1.2)$$

$u'(x)$ differencial ańlatpasın $u_{x,i}^-$ Shekli ayırması menen almasırdan payda bolǵan qátelik $u_{x,i}^- - u'(x_i)$ approksimaciya qáteligi dep ataladı. (1.2)-jayılmadan approksimaciya qáteliginiń $h \rightarrow 0$ da $O(h)$ qa teń ekenligi kórinip túr. Bul jaǵdayda, h tıń dárejesi birge teń bolǵanlıqtan qátelik birinshi dárejeli dep ataladı.

(1.2)-degi qalǵan Shekli ayırmalar jayılasın keltiremiz:

$$u_{x,i} = u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(\xi_i^{(1)}), \quad \xi_i^{(1)} \in (x_i, x_{i+1}), \quad (1.3)$$

$$u_{x,i}^{\circ} = u'(x_i) + \frac{h^2}{6}u'''(\xi_i^{(2)}), \quad \xi_i^{(2)} \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \quad (1.4)$$

Bul (1.4)-ańlatpadan oraylıq ayırmalı tuwındı $u'(x)$ ańlatpasın ekinshi tártipli dálilikte approksimaciyalaydı eken. Sonlıqtan bul aldınǵı oń hám shep ayırmalı tuwındılarǵa qaraǵanda dálirek bolıp tabıladı. Sonlıqtan, (1.2)-(1.4) ańlatpaların tómendegi kóriniste jazıwdı qabıl etemiz:

$$u_{x,i}^- = u'_i + O(h), \quad u_{x,i} = u'_i + O(h), \quad u_{x,i}^{\circ} = u'_i + O(h^2).$$

Ekinshi tártipli tuwındıǵa iye $u''(x)$ funkciyasın $x_i \in \omega_h$ tochkasında ekinshi ayırmalı tuwındı dep atalatuǵın

$$u_{xx,i}^- = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{x,i}^-) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

ańlatpası menen almasırdıǵa boladı. Taylor formulasi arqalı tómendegi ańlatpaǵa iye bolamız:

$$u_{xx,i}^- - u''(x_i) = \frac{h^2}{12} u^{IV}(\xi_i)$$

yaǵnıy funkciya ekinshi tártipli approksimaciyaǵa iye.

Solay etip biz, differencial ańlatpalardı Shekli ayırmalar menen alıstırıwdıń eń ápiwayı mısallarıń qarap óttik. Ulıwma jaǵdayda differenciallı ańlatpanı Shekli ayırmalı ańlatpalar menen alıstırıwdan payda bolatuǵın qátelik setkanıń túyinleriniń jaylasıwına hám funkciyanıń tegisligine baylanıslı.

Ulıwma jaǵdayda eń ápiwayı tor $0 \leq x \leq l$ tuwrısındaǵı

$$\bar{\omega} = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}; h = l / N\}, \omega = \bar{\omega} \setminus (x_0 = 0, x_N = l)$$

pútin túyinli teń ólshemli torı bolıp tabıladı.

Waqıt boyınsha ózgeriwshi $0 \leq t \leq T$ ushın

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\tau &= \{t_n = n\tau, n = \overline{0, M}; \tau = T / M\}, \omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \setminus (t = 0), \\ \bar{\omega}_\tau^* &= \{\bar{t}_n = (n + 0.5)\tau, n = \overline{0, M-1}; \tau = T / M\} \end{aligned}$$

torları qollanıladı.

Joqarıdaǵı ayılǵanlarǵa qosımsha bir ólshemli keńisliktegi torlıq funkciyalar ushın tómendegi belgilewlerdi kiritemiz:

$$y = y(x), \quad y_x = \frac{y^{(+1)} - y}{h}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y - y^{(-1)}}{h}, \quad y_{\bar{x}x} = \frac{y^{(+1)} - 2y + y^{(-1)}}{h^2}.$$

Egerde funkciya waqıt ózgeriwshisinede ǵárezli bolsa, onda tómendegi belgilerden paydalanamız:

$$\begin{aligned} y &= y(x, t), \quad \hat{y} = y(x, t + \tau), \quad \check{y} = y(x, t - \tau), \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \\ y_{\bar{t}} &= \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad y_0 = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}. \end{aligned}$$

Meyli bizge $y = y(x_i), \mathcal{G} = \mathcal{G}(x_i)$ funkciyaları $\bar{\omega}$ torında berilgen bolsın.

Skalyar kóbeymelerdi

$$(y, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{N-1} h y(x_i) \mathcal{G}(x_i), \quad [y, \mathcal{G}] = \sum_{i=0}^{N-1} h y(x_i) \mathcal{G}(x_i), \quad (y, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{N-1} h y(x_i) \mathcal{G}(x_i)$$

formulaları arqalı kirgizemiz. $\bar{\omega}$ torınıń shegaralıq túyinlerde $y_0 = y_N = 0$ yamasa $y_0 = \mathcal{G}_N = 0$ bolsa, onda joqarıdağı formula $(y, \mathcal{G}_x) = -(\mathcal{G}, y_x)$ túrine iye boladı. $\bar{\omega}$ torında berilgen funkciyalar kópliginde $(y, \mathcal{G}) = \sum_{i=0}^N h y(x_i) \mathcal{G}(x_i)$ skalyar kóbeymesin hám $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ normasın kiritemiz.

Solay etip, torlıq funkciyalardıń sızıqlı keńisligine iye bolamız hám onı H arqalı belgileymiz..

Bulardan basqa biz tómendegi setkalıq normalardı paydalanamız:

$$\|y\| = (y, y)^{\frac{1}{2}}, \quad \left\| [y] = [y, y]^{1/2}, y \right\| = (y, y)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi\|_0 = \left(\sum_{t'=0}^{t_1} \tau \|\varphi(t')\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < t_1 \leq T, \quad \|\varphi\|_A = \left(\sum_{t'=0}^{t_1} \tau \|\varphi(t')\|_A^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2. Ayırmalı teńlemeler hám olardıń ayırmalı sxemalar menen baylanısı. Differenciallı teńlemelerdi sanlı usıllar menen sheshiw

$$Au = f$$

túrindegi sızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasına alıp keledi. Bunda $A = (a_{ij})$ N -tártipli kvadrat matrica, $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ - izlenip atırǵan vektor, $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ - berilgen vektor.

Bunday sızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasın sheshiwdiń eki tipii bar:

- a) tuwrı yamasa dál usıllar;
- b) iteraciyalıq usıllar yamasa izbe-iz juwıqlasıw usılları.

Sızıqlı algebralıq teńlemeler sisteması yamasa ayırmalı teńlemeler joqarıda aytqanıımızday matematikalıq fizikanıń differenciallı teńlemelerin approksimaciyalaganda payda boladı. Bunda torda berilgen eki yamasa úsh ózgeriwshili funkciyalardı izertlewge tuwra keledi. Bul jaǵdayda teńlemelerdiń sanı onlaǵan hátteki júz mınlaǵanǵa da jetiwi múmkin. Bunda torlıq funkciyalardı anıqlaw ushın sızıqlı algebralıq teńlemeler sisteması (ayırmala teńlemeler) payda boladı. Bull teńlemelerde tiykarınan tómenedegi eki jaǵday bolıwı múmkin:

1) A matricası arnawlı túrge iye bolıwı múmkin (nóllik elementleri kóp bolıwı múmkin);

2) teńlemelerdiń sanı oǵada kóp bolıwı múmkin ($10^4 - 10^5$).

Ayrımalı teńlemeler menen biz kóp jaǵdaylarda duwshar kelemiz. Mısalı, arifmetikalıq progressiyanıń aǵzaları ushın $a_{k+1} = a_k + d$ yamasa $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} = 0$ formulaları yamasa geometriyalıq progressiyanıń aǵzaları ushın $a_{k+1} = qa_k$ formulası ayrımalı teńlemelerge mısal bola aladı. Bunda $a_k = a(k), k = 1, 2, \dots$.

Meyli, $y(i), i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ funkciyasın qarayıq. Endi i tochkasında tómendegi ayrımalardı payda eteyik:

oń: $\Delta y_i = y(i+1) - y(i)$, shep $\nabla y_i = y(i) - y(i-1)$.

Ádette $y_i = y(i)$ dep belgilew qabıl etilgen. Onda $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$. Bul ańlatpalardı birinshi tuwındınıń formal analogi dep qabıl etiwge boladı. Endi ekinshi tártipli ayırmanı qarayıq:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Bunda $\Delta y_{i-1} = \nabla y_i$ ekenligi kórinip tur. Usı sıyaqlı tómendegi

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i)$$

ańlatpasında anıqlawǵa boladı. Hár bir Δ nı qollanǵanda ońǵa qaray bir tochka qosıp alanadı. Solay etip Δ operatorın m mártebe qollana otırıp $\Delta^m y_i$ ańlatpası $i, i+1, \dots, i+m$ tochkalarında anıqlanǵan $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$ mánislerin óz ishine alatuǵınlıǵın kóremiz.

Hár qıylı tártiptegi ayrımalardı óz ishine alatuǵın tómendegi teńlemenı jazıwǵa boladı:

$$\alpha_0 \Delta^m y_i + \alpha_1 \Delta^{m-1} y_i + \dots + \alpha_{m-1} \Delta y_i + \alpha_m y_i = f_i.$$

Bunda $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ - koefficientler. Bul ańlatpaǵa $\Delta^k y_i, k = 1, 2, \dots, m$ ayrımaların qoysaq tómendegi teńlemege iye bolamız:

$$\alpha_0 y_{i+m} + \alpha_1 y_{i+m-1} + \dots + \alpha_{m-1} y_{i+1} + \alpha_m y_i = f_i.$$

Egerde $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_m \neq 0$ bolsa, onda bul teńleme belgisiz y_i ge qarata m - tártipli ayırmalı teńleme dep ataladı. Ol $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$ mánislerin óz ishine aladı. Bull ayırmalı teńleme m - tártipli

$$\alpha_0 \frac{d^m u}{dx^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \dots + \alpha_{m-1} \frac{du}{dx} + \alpha_m u = f, \quad \alpha_0 \neq 0$$

differentiallı teńlemesiniń analogi bolıp tabıladı.

Tómendegi bir mısaldı qarap óteyik. Meyli

$$\frac{du}{dx} = f(x)$$

teńlemesin sheshiw kerek bolsın. Onda $\frac{du}{dx}$ tıń juwıq mánisin tómendegishe anıqlaymız:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}.$$

Bunda $h > 0$ x_i hám x_{i+1} tochkaları arasındaǵı adım. Egerde $x_i + h = x_{i+1}$, $u(x_i) = u_i$, $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$ dep belgilesek, onda tómendegini alamız:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \approx \frac{\Delta u_i}{h} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}.$$

Bul ayırmalı ańlatpa $h \rightarrow 0$ da $\frac{du}{dx}$ qa umtıladı. Bunday almasırlardı kóplep tabıwǵa boladı. Mısalı, joqarıdaǵınıń ornına shep ayırmanı alsaq, onda

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \approx \frac{\nabla u_i}{h} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

yamasa óń hám shep ayırmaların qosındısınıń yarımın alsaq, onda

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\Delta u_i + \nabla u_i}{2h}$$

boladı. Bunda $\approx$ belgisi approksimaciyanı ańlatadı.

Solay etip, joqarıdağı differenciallı teńlemenin ornına $\frac{\Delta y_i}{h} = f_i$ ayırmalı teńlemesin qaraymız. Bunda $f_i = f(x_i)$. Bul birinshi tártipli ayırmalı teńleme yamasa ayırmalı sxema bolıp tabıladı. Bunı tómendegishede jazıwǵa boladı:

$$\Delta y_i = hf_i \text{ yamasa } y_{i+1} = y_i + hf_i.$$

Bul teńlemenin sheshimin tabıw qıyınshılıq tuwdırmaıdı.

II-bap. DARA TUWÍNDÍLÍ JÍLLÍLÍQ ÓTKIZGISHLIK TEŃLEMESI

1-§. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin keltirip shıǵarıw

Temperaturalı maydandı tabıw menen baylanıslı máselelerdiń matematikalıq modeli bazibir differenciallıq teńlemelerdi dúziwge alıp keledi. Differenciallıq teńleme degenimiz izertlenip atırǵan qubılıstı xarakterlewshi fizikalıq shamalardıń matematikalıq baylanısın kórsetetuǵın bazibir teńlemege (differencial) aytamız. Bul fizikalıq shamalar keńisliktiń hám waqıttıń funkciyalari boladı. Bunday teńleme qálegen waqıt birliginde deneniń qálegen toshkasında bolıp atırǵan fizikalıq qubılıstı ańlatadı. Jıllılıq ótkizgishlik differenciallıq teńlemesi elementar kólemniń temperaturası, waqıt hám koordinataları arasındadı baylanıstı ornatadı.

Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin keltirip shıǵarıwdı tómendegi ápiwayı usılın kórip óteyik. Meyli bizge bir ólshemli temperaturalı maydan berilgen bolsın. Bul jaǵdayda jıllılıq bir baǵdar boyınsha, mısalı X baǵdarı boyınsha tarqaladı. Meyli termikalıq koefficientler koordinata X hám waqıt t larǵa ǵarezsiz bolsın.

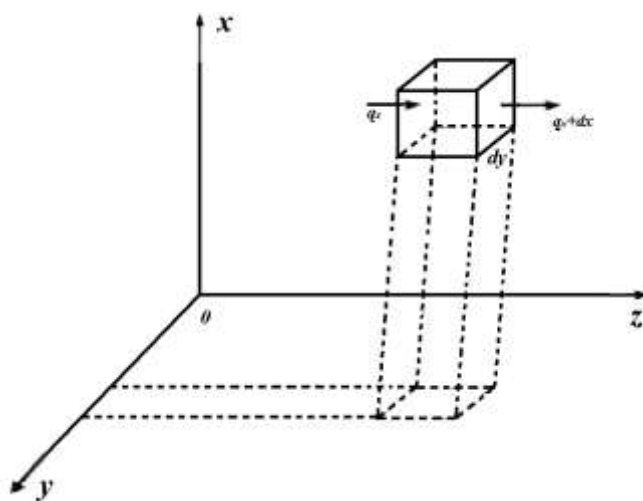
Birtekli hám izotropli sheksiz sheksiz plastınada elementar (ápiwayı) parallelepipedti qaraymız (1-sızılma). Bul parallelepipedtiń kólemi $d \times d \times y$ ańlatpasına teń. Bir waqıt birliginde parallelepipedtiń qarama-qarsı qaptalınan ótiwshi jıllılıq muǵdarı $q_{x+dx} dydz$ ke teń boladı.

Egerde $q_x > q_{x+dx}$ bolsa, onda elementar parallelepiped qıza baslaydı. Sonlıqtan, bul jıllılıq aǵımlarınıń ayırması energiyaniń saqlanıw nızamı boyınsha usı elementar parallelepipedtiń akkumlyaciyalanǵan jıllılıqqa teń, yaǵnıy

$$q_x dydz - q_{x+dx} dydz = c\gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} dx dydz. \quad (2.1)$$

Bunda C - salıstırmalı jıllılıq kólemi, γ - ortalıqtıń tıǵızlıǵı, q_{x+dx} X ózgeriwshisine ǵarezli belgisiz funkciya. Egerde usı funkciyani Teylor qatarına jayıp onıń dáslepki eki aǵzası menen shegerallansaq, onda tómendegini alamız:

$$q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$



1-sizilma.

Onda, (2.1)-teńlikten tómendigige iye bolamız:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz = c\gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} dx dy dz.$$

Endi,

$$q_x = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}$$

(λ -jıllılıq ótkizgishlik koefficienti) jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin qollana otırıp, tómendegige iye bolamız:

$$c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

yamasa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\gamma}. \quad (2.2)$$

Bul songı (2.2)-teńleme jıllılıqtıń bir ólshemli aǵsınıń differencialıq teńlemesi bolıp tabıladı. Bunda $a - const$. Egerde, jıllılıq izometriyalıq bettiń

normal vektorı (normalı) boyınsha tarqalatuǵın bolsa, onda q vektorin koordinatalar boyınsha úsh qosılıwshılarga jayıwǵa boladı. Bul jaǵdayda elementar kólem menen akkumlyaciyalanǵan jıllılıq muǵdarı tómendegi qosındıǵa teń boladı:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Onda differenciallıq teńleme tómendegi túrge iye boladı:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 u, \quad (2.3)$$

bunda

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplas operatori.

Ayırım jaǵdaylarda dene ishinde jıllılıq kózi (jıllılıq tarqatıwshı toshka) bolıwı múmkin. Bul kóz (toshka) oń yamasa teris bolıwıda múmkin.

Mısalı, qızdırıw waqtında materiyaldıń yamasa deneniń ishindegi parlasıw jıllılıqtıń teris kózi bolıp tabıladı. Meyli bul salıstırmalı quwatlılıǵı (deneniń birlik kólemine hám birlik waqtına sáykes keletuǵın jutılıwshı yamasa shıǵarılıwshı jıllılıq muǵdarı) $\omega(Bm/m^3)$ bolsın. Onda bir waqt birliginde elementar kólemnen shıǵarılıwshı jıllılıq muǵdarı $\omega dx dy dz$ ańlatpasına teń. Usınday bir-qansha túrlendiriwlerden keyin jıllılıq kózine iye jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi tómendegi túrge iye boladı:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \nabla^2 u + \frac{\omega}{c\gamma}. \quad (2.4)$$

Joqarıdaǵı (2.4)-differenciallıq teńlemenı basqada jol menen alıwǵa boladı, mısalı Ostrogradskiy-Gauss formulası járdeminde .

Meyli S beti menen shegaralanǵan bazibir V kólemin bólip shıǵarıw múmkinshiligine iye bazibir ortalıq berilgen bolsın. Jıllılıq usı ortalıqta jıllılıq

ótkizgishlik jolı menen tarqaladı. Onda, waqıt birliginde S betinen ótiwshi jıllılıq muǵdarı tómendegishe ańlatıladı:

$$\int_{(S)} \lambda g r a d d u d S = \int_{(S)} \lambda 1_n g r a d u d S.$$

Bunda integral barlıq S beti boyınsha alınadı.

Denede jıllılıq kózi bolmaǵan jaǵdayda bul jıllılıq aǵımı birlik waqıtta berilgen kólemdegi ishki energiyaniń

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} c \gamma u d v = \int_{(V)} c \gamma \frac{\partial u}{\partial t} d v$$

shamaǵa ózgeriwine alıp keledi. Bunda integral barlıq V kólemi boyınsha alınadı.

Energiyaniń saqlanıw nızamı boyınsha V kólemdegi ortalıqtıń ishki energiyasınıń ózgeriwi usı kólemdi shegaralawshi S betinen shıǵıp ketiwshi jıllılıqqa teń, yaǵnıy

$$\int_{(V)} a \gamma \frac{\partial u}{\partial t} d v = \int_{(S)} 1_n \lambda g r a d u d s. \quad (2.5)$$

Endi Ostrogradskiy-Gauss túrlendiriwin qollanamız:

$$\int_{(S)} 1_n \lambda g r a d u d s = \int_{(V)} d i v (\tau \lambda g r a d u) d v.$$

Onda joqarıdaǵı (5)-teńlemenı tómendegishe jazamız:

$$\int_{(V)} 1_n \lambda g r a d u d s = \int_{(V)} d i v (\tau g r a d u) d v. \quad (2.6)$$

Bunnan, kólemniń erikli ekenin esapqa alsaq tómendegige iye bolamız:

$$c \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = d i v (\lambda g r a d u). \quad (2.7)$$

Egerde jıllılıq ótkizgishlik koefficienti temnoeraturaǵa ǵarezsiz bolsa, onda (2.7)-den jıllılıq ótkizgishlik differenciallıq teńlemesine iye bolamız:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \nabla^2 u,$$

yamasa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\operatorname{gradu}) .$$

2-§. Shegaralıq máselelerdi qoyıw

Endi qısqasha baslanğısh hám shegaralıq shártlerge toqtap ótemiz. Jıllılıq ótkizgishlik differenciallıq teńlemesi deneniń temperaturasınıń waqıt hám keńislik ózgeriwshileri arasındagı baylanisti ornatadı. Matematikalıq til menen aytqanda deneniń ishindegi jıllılıqtıń ózgeriwın ańlatadı. Endi, qálegen waqıt birliginde dene ishindegi temperaturalıq maydandı tabıw ushın, yaǵnıy differenciallıq teńlemeni sheshiw ushın, baslanğısh waqıt birliginde dene ishindegi temperaturanıń tarqalıwın biliwimiz kerek (baslanğısh shárt). Buǵan qosımsha deneniń geometriyalıq formasın hám dene betiniń qorshalǵan ortalıq penen óz-ara tásir etiw nızamın biliwimiz kerek (shegaralıq shárt).

Baslanğısh shárt baslanğısh waqıt birliginde dene ishindegi temperaturanıń bólistiriliw nızamı menen anıqlanadı, yaǵnıy

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z) ,$$

bunda $f(x, y, z)$ -belgili berilgen funkciya.

Kóplegen praktikalıq máselelerde baslanğısh waqıt birliginde temperaturanıń teń ólshemli bólistiriliwi beriledi, yaǵnıy

$$u(x, y, z, 0) = u_0 = \operatorname{const} .$$

Shegaralıq shártler hár qıylı usıllar menen beriliwi múmkin. Biz tómende shegaralıq shártlerdiń beriliwiniń úsh túrli (tıptegi) jaǵdayların qaraymız.

1. Birinshi típtegi shegaralıq shártte qálegen waqıt birliginde dene beti boylap temperatureniń tarqalıw nızamı beriledi, yaǵnıy

$$u_{II}(t) = f(t) .$$

Bunda $u_{II}(t)$ -dene betiniń temperaturası.

Dara jaǵdayda $u_{\Pi}(t) = u_C = const$ yaǵnıy dene betiniń temperaturasi jıllılıq almasıw processı waqtında turaqlı boladı (ózgermeydi).

2. Ekinshi tiptegi shegaralıq shártte dene betiniń hár-bir toshkası ushın waqıtqa ǵarezli jıllılıq aǵımınıń tıǵızlıǵı beriledi, yaǵnıy

$$q_{\Pi}(t) = f(t). \quad (2.8)$$

Dara jaǵdayda jıllılıq aǵımınıń tıǵızlıǵı turaqlı boladı, yaǵnıy

$$q_{\Pi}(t) = q_C = const. \quad (2.9)$$

Jıllılıq almasıwdıń bunday variantı, mısalı, joqarı temperaturalı peshlerde hár qıylı zatlardı qızdırıwda ushırasadı.

Joqarıdaǵı (2.8)-hám (2.9)-shártlerde

$$q_{\Pi}(t) = -\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_{\Pi},$$

bunda $\vec{n}$ -dene betine túsirilgen normal.

3. Úshinshi tiptegi shegaralıq shártte turaqlı jıllılıq aǵımı jaǵdayında dene beti hám qorshalǵan ortalıq arasındǵı konvektiv jıllılıq almasıw nızamı beriledi (stacionar temperaturalıq maydan), yaǵnıy

$$q_{\Pi} = \alpha(u_{\Pi} - u_C), \quad (2.10)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_{\Pi} = \alpha(u_{\Pi} - u_C).$$

Bunda α - jıllılıq almasıw koefficienti yamasa proporcionallıq koefficienti dep ataladı. ($bm/m^2 \cdot grad$)

Bunnan basqada shegaralıq shártler beriliwi múmkin. Máselen, dene betiniń qorshaǵan ortalıq penen jıllılıq almasıwı yamasa bir-birine tiyiwshi denelerdiń jıllılıq almasıwı.

3-§. Máseleni sheshiwdiń analitikalıq usılları

Shegaralıq máselelerdi sheshiwdiń házirgi bar usılların hár qıylı belgileri boyınsha klassifikaciyalawǵa boladı. Bulardıń biri juwmaǵında sheshim alınatuǵın forması bolıp tabıladı. Bul jaǵdayda máseleniń sheshimi formula túrinde kórsetiliwi múmkin. Bul formula argumenttiń berilgen mánisleri tiykarında izlenip atırǵan funkciyaniń mánisleri alınadı. Bul jaǵdayda sheshim analitikalıq usıl menen alınǵan dep aytıladı.

Sheshim sanlı usıllar járdeminde alınıwı múmkin. Bul jaǵdayda argumenttiń berilgen sanlı mánisleri tiykarında izlenip atırǵan sheshim, yaǵnıy izlenip atırǵan funkciyaniń mánisleri bazibir sanlar arqalı alınadı.

Kóp jaǵdaylarda analitikalıq sheshimlardi analizlew ushın sanlı usıllar qollanıladı. Bul jaǵdayda analitikalıq hám sanlı usıllardıń sintez haqqında aytıladı. Kóplegen quramalı ámeliy máselelerdiń matematikalıq modelin analitikalıq usıl menen sheshiw múmkin bola bermeydi. Bul jaǵdayda máselelerdi sheshiw tek ǵana sanlı usıllar tiykarında júrgiziledi. Degen menen, jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin sheshiwdiń analitikalıq usıllarınıń rolın kemeytiwge bolmaydi. Sebebi, analitikalıq usıllar sanlı usıllarǵa qaraǵanda dálirek bolıp juwmaq tezirek alınıwı múmkin. Ásirese analitikalıq usıllar sıızqlı emes máselelerdi sheshiwde úlken rol oynaydı. Biz bul jumista tek ǵana sıızqlı máselelerdi sheshiw menen juwmaqlanamız.

Jıllılıq ótkizgishlik teoriyasiniń sıızqlı máselelerin sheshiwdiń tómendegi usılların keltirip ótemiz.

I. Klassikalıq usıllar.

- 1). Ózgeriwshilerdi ayırıw usılı (Fure usılı);
- 2). Grin funkciyasi usılı;
- 3). Jıllılıq potenciyaıları usılı.

II. Integrallıq túrlendiriwler usılı.

- 1). Sheksiz shekler;
- 2). Shekli shekler.

Bul jaǵdayda, integrallıq túrlendiriwler yadrosi deneniń forması hám shegaralıq shártlerge qaray hár qıylı etip saylap alınadı.

III. Variaciyalıq usıllar.

- 1). Ric usılı;
- 2). Kontorovich usılı;
- 3). Galyorkin usılı.

Biz bul jerde differenciallıq teńlemelerdi sheshiwdiń ayırım usılların keltirip óttik. Bunday usıllar oǵada kóp hám olardıń túri teńlemenı sheshiwdiń múmkinshiligine qaray yamasa onıń quramallıǵına qaray ózgerip baradı. Sızıqlı emes teńlemeler sızıqlı teńlemelerge alıp keliniwi múmkin. Tap usınday, sızıqlı teńlemeler oǵada quramalı bolsa, onda olar ápiwayılastırılıwi múkin h.t.b.

4-§. Kletkalıq avtomatlardıń hám yarımótkizgishlerdegi kúshli elektr maydanı háreketiniń matematikalıq modelleri

Kletkalıq avtomatlardıń matematikalıq modeli. Ádette hár qıylı, mısalı, fizikalıq yamasa mexanikalıq ortalıqlar konservativ yamasa dissipativ bolıp keledi. Ortalıqta, máselen sistemada, tolıq energiya saqlansa, onda bunday ortalaqlar konservativ boladı, al ortalıqta yamasa sistemada enegiya joǵaltıw processı iske assa, onda bunday sistema dissipativ dep ataladı. Real hám quramalı bolǵan aktiv ortalıqlar menen dissipativ strukturalardıń ózine tán xarakterlerin úyreniw hám olardı matematikalıq modellestiriw sızıqlı bolmaǵan dinamikalıq sistemalardı dúziwge alıp keledi. Atap aytqanda, belgili bir diskret waqıt birliginde óziniń jaǵdayın ózgertiwshi ápiwayı elementler belgili bir nızım tiykarında óziniń jaǵdayın esapqa alǵan halda onıń kelesi waqıt birligindegi jaǵdayın biliw arqalı sol fizikalıq yamasa mexanikalıq obiektlerdiń tiykarǵı qásietlerin sáwlelendiriwshi processlerdi modellestiriwge boladı. Mısalı, iyiliwsheń ortalıq qásietin, gidrodinamikalıq hám kinetikalıq processlerdi, informaciyalardı qayta islew ushın adamzat bas miyi háreketin modellestiriw h.t.b. Usınday elementlerden quralǵan tarmaq (set) **kletkalıq avtomatlar** dep ataladı. Bunday qubılıslardıń matematikalıq

modelleri algoritmlik podxod tiykarında dúziledi. Bul podxod ádettegi differenciallıq teńlemelerge alıp keletuǵın podxodlardan ózgeshe boladı. Biraq differenciallıq teńlemelerdi sanlı sheshiwde bul podxodlar biri-birine jaqınlasadı. Kletkalıq avtomatlar bir-neshe klasslarǵa bólinedi. Bul jerde biz S.YA. Berkovichtiń izertlewlerindeki kletkalıq avtomatlardı, yaǵnıy fizikalıq haqıyqatı beriwshi ossilyatorlardan (avtoterbelisli elementlerden) dúzilgen kletkalıq avtomatlardı qaraymız. Bul modelde t_{n+1} waqıt birliginde j nomerli elementke sáykes keliwshi $\mathcal{G}_j(t_{n+1})$ terbelis fazası onıń dógeregindeki terbelis fazaları menen tómendegi formula arqalı baylanısqa boladı:

$$\mathcal{G}_j(t_{n+1}) = \sum_{i \in O(j)} a_{ji} \mathcal{G}_i(t_n), \quad (2.11)$$

bunda $O(j)$ dógeregi j elementin óz ishine aladı, a_{ji} koefficienti birge shamalas boladı: $0 < 1 - a_{ji} \ll 1$ hám tásir etiwshi koefficientler j nomerli elementten uzaqlasqa sayın tez azaya baslaydı. Bul joqarıdaǵı (2.11) – teńleme tómendegi differenciallıq teńleme menen approksimaciyalanıwı múmkin. Tek jaqın qońsılırdı esapqa alǵan haldı hám elementlerdiń biri-birine tási simmetriyalıq xarakterde bolǵanlıqtan terbelis fazasınıń teńlemesi tómendegi túrge iye boladı ([25]-ge qarań):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -bu + D_0 \Delta u. \quad (2.12)$$

Bunda Δ - Laplas operatorı, D_0 - diffuziya koefficienti, b - turaqlı shama. Bunnan $\mathcal{G} = \bar{\mathcal{G}} e^{-bt}$ túrlendiriwin esapqa alsaq, onda tómendegi ádettegi standart parabolalıq tiptegi jıllılıq ótkizgishlik teńlemesine iye bolamız:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -bu + D_0 \Delta u. \quad (2.13)$$

Bul teńlemenin dál sheshimi

$$\mathcal{G} = \frac{1}{(2D_0 \sqrt{\pi t})^3} e^{\left(-\frac{R^2}{4D_0 T} - bt \right)}$$

túrine iye boladı ([25]-ge qarań). Bunda R element jaǵdayı, haqıyqıy san.

Alıs qońsıların esapqa alıwshı terbelisler fazası ushın kletkalıq avtomattıń matematikalıq modeline sáykes keliwshi differenciallıq teńleme tómendegi túrge iye boladı:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -bu + D_0 \Delta u + D_1 \Delta^2 u. \quad (2.14)$$

Bul (2.14)-teńleme

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (2.15)$$

baslanǵısh shárti hám ekinshi baptıń 2-paragrafında kórsetilgen shegaralıq shártlerdiń birin qabıl etedi. Bunda D_1 - turaqlı, Δ^2 - tórtinshi tártipli differenciallıq operator.

Yarımótkizgishlerdegi kúshli elektr maydanı háreketiniń matematikalıq modeli. Bir ólshemli yarımótkizgishlerde teńsalmaqlıq halınan oǵada kóp awısıw jaǵdayında kúshli (ázzi) elektr maydanına iye oblast payda boladı. Bul processti elektorlik domenler dep ataydı ([27]-ge qarań). Elektorlik domenlerdiń payda bolıwınıń eń ápiwayı matematikalıq modelleriniń biri tómendegi kóriniske iye boladı:

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0, \quad (2.16)$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.17)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2.18)$$

Óz gezeginde domenlerdiń tarqalıwı birlikte tarqalıwshı tolqınlar (solitonlar) jaǵdayında olardıń matematikalıq modeli tómendegi Oskolkov-Bendjamen-Bon-Maxoni tipindegi klassikalıq teńleme meney beriledi [27]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - au) + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 u \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{f}(x,t), \quad (2.19)$$

Bul (2.19)-teńleme

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (2.20)$$

başlangıç şartı hám ekinshi bapnıń 2-paragrafında kórsetilgen shegaralıq şartlerdiń birin qabıl etedi. Bunda a , a_1 , a_2 - turaqlılar, Δ - Laplas operatorı.

III-bap. JILLILIQ ÓTKIZGISHLIK TEŃLEMELERIN AYIRMALI TEŃLEMELER TEORIYASI TIYKARINDA IZERTLEW

1-§. Sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı hám olardıń ayırmalı sxemalar menen baylanısı

Bul paragrafta biz birtekli bolmaǵan

$$y_{n+1} = S_n y_n + f_n, \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

ayırmalı teńlemeni hám birtekli bolmaǵan

$$B_n \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A_n y_n = \varphi_n, \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

ayırmalar sxemasın hám bularǵa sáykes birtekli

$$y_{n+1} = S_n y_n \quad (3.3)$$

ayırmalı teńleme menen birtekli

$$B_n \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A_n y_n = 0 \quad (3.4)$$

ayırmalar sxemasınıń ornıqlılıǵınıń anıqlamaların beremiz. Buǵan qosımsha olardıń arasındaǵı baylanıslarǵa toqtap ótemiz.

3.1-anıqlama [15]. (3.3)-teńlemeniń sheshimi $y_n \equiv 0$ *ornıqlı* dep ataladı, egerde $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, n_0) > 0: \|y_{n_0}\| < \delta \Rightarrow \|y_n\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ bolsa, yaǵnıy berilgen $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday bir ε hám n_0 sanlarına ǵárezli $\delta > 0$ sanı tabılıp, $\|y_{n_0}\| < \delta$ nıń orınlanıwınan $\forall n \geq n_0$ ushın $\|y_n\| < \varepsilon$ orınlı bolsa. Keri jaǵdayda $y_n \equiv 0$ sheshimi ornıqsız boladı.

3.1a-anıqlama [16]. (3.2)-ayırmalar sxemasınıń sheshimi *dáslepki shártler boyınsha ornıqlı* dep ataladı, egerde (3.4)-niń sheshimi ushın

$$\|y_n\|_{(1_n)} \leq M_1 \|y_0\|_{(1_0)} \quad (3.5)$$

bahası orınlı bolsa. Bunda $\|y_n\|_{(1_n)}$ -norması ulıwma aytqanda hárqıylı n ushın hárqıylı, al $M_1 > 0$ adım τ hám h largá gárezsiz turaqlı san.

3.2-anıqlama [15]. (3.3)-teńlemenıń sheshimi $y_n \equiv 0$ *teń ólshemli ornıqlı* dep ataladı, egerde $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall n_0 \geq 0, \|y_{n_0}\| < \delta \Rightarrow \|y_n\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ bolsa, yaǵnıy berilgen $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday bir tek ε sanına gárezli $\delta > 0$ sanı tabılıp, berilgen $n_0 \geq 0$ ushın $\|y_{n_0}\| < \delta$ nıń orınlanıwınan $\forall n \geq n_0$ ushın $\|y_n\| < \varepsilon$ orınlı bolsa.

3.2a-anıqlama [16]. (3.2)-ayırmalar sxemasınıń sheshimi *teń ólshemli ornıqlı* dep ataladı, egerde (2.4)-niń sheshimi ushın

$$\|y_n\|_{(1_n)} \leq M_1 \|y_j\|_{(1_j)}, \quad \forall j, 0 \leq j \leq n \quad (3.6)$$

bahası orınlı bolsa. Bunda $M_1 > 0$ adım τ hám h largá gárezsiz turaqlı san.

3.3-anıqlama [15]. (3.3)-teńlemenıń sheshimi $y_n \equiv 0$ *asimptotikalıq ornıqlı* dep ataladı, egerde ol ornıqlı bolsa hám buǵan qosımsha $\exists \Delta(\varepsilon, n_0) > 0: \|y_{n_0}\| < \Delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$ bolsa, yaǵnıy sonday bir $\Delta(\varepsilon, n_0) > 0$ sanı tabılıp, $\|y_{n_0}\| < \Delta$ nıń orınlanıwınan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$ orınlı bolsa.

3.3a-anıqlama [16]. (3.2)-ayırmalar sxemasınıń sheshimi ρ *ornıqlı* dep ataladı, egerde (2.4)-niń sheshimi ushın qálegen $y_0 \in H$ de

$$\|y_n\|_{(1_n)} \leq \rho^n \|y_0\|_{(1_0)} \quad (3.5)$$

bahası orınlı bolsa. Bunda $\rho = e^{c_0 \tau}$, al c_0 adım τ , h largá hám y_0 diń saylap alınıwına gárezsiz turaqlı san.

Eskertiw. Bul 3a anıqlamasınan $\rho < 1$ ($c_0 < 0$) bolǵanda 3-anıqlama mániside *asimptotikalıq ornıqlılıq* kelip shıǵadı.

3.4-anıqlama [15]. (3.1)-teńlemenıń sheshimi $y_n \equiv 0$ *teń ólshemli asimptotikalıq ornıqlı* dep ataladı, egerde $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \Delta(\varepsilon) > 0:$

$$\|y_{n_0}\| < \delta \Rightarrow \|y_n\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \text{ hám buǵan qosımsha}$$

$$\|y_{n_0}\| < \Delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$$

bolsa, yaǵnıy berilgen $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday bir tek ε sanına ǵárezli $\delta(\varepsilon) > 0$, $\Delta(\varepsilon) > 0$ sanları tabılıp, qálegen $n \geq n_0$ ushın $\|y_{n_0}\| < \delta$ nıń orınlanıwınan $\|y_n\| < \varepsilon$ orınlı bolsa hám buǵan qosımsha $\|y_{n_0}\| < \Delta$ nıń orınlanıwınan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$ orınlı bolsa.

3.4a-anıqlama [16]. (3.2)-ayırmalar sxemasınıń sheshimi *teń ólshemli ρ orınlı* dep ataladı, egerde (3.4)-nıń sheshimi ushın qálegen $0 \leq n_0 < n$ de

$$\|y_n\|_{(1_n)} \leq \rho^{n-n_0} \|y_{n_0}\|_{(1_{n_0})}, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.5)$$

bahası orınlı bolsa. Bunda $\rho = e^{c_0 \tau}$, al c_0 adım τ , h largá hám y_{n_0} dıń saylap alınıwına ǵárezsiz turaqlı san.

Solay etip, bul anıqlamalardan tómendegi juwmaqqa kelemiz:

1. Ayırmala sxemalardıń orınlılıǵı ushın berilgen anıqlamalardıń barlıǵında onıń sheshimi ushın aprior bahalar bar.
2. Barlıq na , $(n = \overline{1, 4})$ anıqlamalarında berilgen orınlılıqtan barlıq n , $(n = \overline{1, 4})$ anıqlamalarında berilgen orınlılıq kelip shıǵadı, al kersinshe durıs bolmaydı.

Keyingi paragraflarda usı anıqlamalar tiykarında ayırmalı teńlemelerdiń hám ayırmalı sxemalardıń orınlılıǵın izertleymiz.

2-§. Birinshi tártipli turaqlı koefficientli ayırmalı teńlemeler

sistemasınıń orınlılıǵı

Parabolalıq tiptegi kóplegen teńlemelerdi tómendegi túrde jazıwǵa boladı:

$$\partial u / \partial t + Lu = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.6)$$

Bunda Lu - keńislik ózgeriwshisi x qa qarata bazıbir ulıwma túrdegi differencial operator. Bul (3.6)-máselege bazıbir shegaralıq shártler qoyıladı. Matematikalıq modeli (3.6)-teńleme túrinde jazılatuǵın mısallardı oǵada kóp keltiriw múmkin.

Meyli tómendegi Koshi máselesin qarayıq:

$$u' + Au = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad u' = du/dt. \quad (3.7)$$

Bul másele (3.6)-túrindegi parabolalıq tiptegi dara tuwındılı differencialı teńlemelerdi tek keńislik ózgeriwshileri boyınsha approksimaciyalaganda kelip shıǵadı.

Joqarıdaǵı (3.7)-túrindegi másele ni approksimaciyalawshı qálegen eki qatlamlı ayırmalı sxemanı tómendegi ayırmalı teńleme túrinde jazıw múmkin:

$$y_{n+1} = S_n y_n + f_n, \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

Bunda S_n - bazıbir operator. Bul (2.8)-teńleme menen birgelikte

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.9)$$

birtekli teńlemesinde qaraymız.

Sızıqlı bir tekli emes (3.8)-teńlemenin sheshiminiń ornıqlılıǵı onıń birtekli teńlemesi bolǵan (3.9)-teńlemenin trivial sheshiminiń ornıqlılıǵı menen anıqlanadı.

Usı (3.9)-teńlemenin trivial sheshiminiń ornıqlılıǵın izertlew ushın kvadratlı formadaǵı Lyapunov funkciyasın qaraymız:

$$V_n(y_n) = y_n^* D_n y_n = (D_n y_n, y_n).$$

3.1-teorema. Meyli tómendegi shártler orınlı bolsın:

a) $D_n^* = D_n > 0$;

v) Ayırma $\Delta V_n \leq 0$, bunda

$$\Delta V_n = V_{n+1}(y_{n+1}) - V_n(y_n) = V_{n+1}(S_n y_n) - V_n(y_n);$$

Onda (3.9)-teńlemenin trivial sheshimi Lyapunov boyınsha ornıqlı boladı. Buǵan qosımsha, bull sheshim teń ólshemli ornıqlı boladı, sebebi

$$(D_{n+1} y_{n+1}, y_{n+1}) \leq (D_n y_n, y_n)$$

yamasa

$$\|y_{n+1}\|_{D_{n+1}} \leq \|y_{n1}\|_{D_n}.$$

Tómendegi teorema orınlı boladı.

3.2-teorema (A.A. Samarskiy, A.V. Gulin [17]). Egerde (3.8)-sisteması baslanğısh shártler boyınsha teń ólshemli ornıqlı bolsa, onda ol oń táreplemede ornıqlı boladı, yaǵnıy tómendegi aprior baha orınlı boladı:

$$\|y_n\| = M_1 \left(\|y_0\| + \sum_{j=0}^{n-1} \|f_j\| \right).$$

Solay etip, 3.2-teorema boyınsha baslanğısh shártler boyınsha teń ólshemli ornıqlılıqtan (3.8)-niń oń tárepleme ornıqlılıǵı kelip shıǵadı.

Endi 3.1-teoremaniń v) shártiniń orınlanıwın tekseremiz:

$$y_{n+1}^* D_{n+1} y_{n+1} - y_n^* D_n y_n \equiv y_n^* S_n^* D_{n+1} S_n y_n - y_n^* D_n y_n = y_n^* (S_n^* D_{n+1} S_n - D_n) y_n \leq 0.$$

Sonlıqtan, (3.9)-ayırmaı teńlemeniniń ornıqlılıq shárti

$$S_n^* D_{n+1} S_n - D_n \leq 0 \quad (3.10)$$

yamasa

$$S_n^* D_{n+1} S_n \leq D_n$$

boladı.

3.3-teorema. Meyli (3.10)-shárt orınlı bolsın. Onda, 3.1-teoremadan (3.9)-teńleme ushın tómendegi aprior baha orınlı boladı:

$$\|y_n\|_{D_n} \leq \|y_j\|_{D_j}, \quad \forall j < n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Qosımsha. Joqarıdaǵı 3.1 hám 3.3- teoremalardan (3.8)-teńleme ushın tómendegi aprior bahaǵa iye bolamız:

$$\|y_n\|_{D_n} \leq \|y_0\|_{D_0} + \sum_{j=0}^{n-1} \|f_j\|_{D_j}.$$

3-§. Birinshi tártipli ózgermeli koefficientli ayırmalı teńlemeler sistemasınıń ornıqlılıǵı

Kóplegen stacionar emes shegaralıq máselelerdiń keńislik boyınsha ózgeriwshilerin Shekli ayırmalar usılı yamasa Shekli elementler usılı menen approksimaciyalanımızda biz tómendegi birinshi tártipli ózgeriwshi koefficientli ápiwayı differenciallı teńlemeler sisteması ushın Koshi máselesine iye bolamız:

$$u' + L(t)u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad u' = du/dt. \quad (3.11)$$

Mısalı, hár qıylı formadaǵı konvekciya-diffuziya shegaralıq máseleleri, waqıtqa baylanıslı jıllılıq ótkizgishlik hám tasıw (perenos) teńlemeleri h.t.b. usınday máselege alıp keledi.

Joqarıdaǵı (3.11)-máseleni approksimaciyalawshı eki qatlamlı operatorlı-ayırmalı sxemanıń ulıwma kórinisi

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 \leq t = t_n \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad (3.12)$$

túrinde jazıladı. Bunda $y = y_n = y(t_n)$, $\varphi = \varphi_n = \varphi(t_n)$, $y_t = (y_{n+1} - y_n)/\tau$, $A = A(t_n)$, $B = B(t_n)$ - sıızıqlı ózi-ózone túyinles operatorlar. Bul (3.12)-sxemanı tómendegi ayırmalı teńleme túrinde jazıw múmkin:

$$y_{n+1} = S_n y_n + \phi_n, \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Bunda, $S_n = E - \tau B^{-1}A$ - ótiw operatorı, al $\phi = B^{-1}\varphi$. Bul (3.13)-teńleme menen birlikte tómendegi birtekli ayırmalı teńlemenide qaraymız:

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Joqarıdaǵı (3.13)-rekurent formuladan

$$y_n = T_{n,0} y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} T_{n,j} \phi_j, \quad (3.15)$$

Ańlatpasına iye bolamız. Bul jerde $T_{n,j} = S_{n-1} S_{n-2} \dots S_j$ - j qatlamınan n qatlamına sheshiwshi operator, al $T_{n,0} = S_{n-1} S_{n-2} \dots S_0$. Dara jaǵdayda, $T_{n,n} = E$.

Joqarıdaǵı (3.15)-ańlatpadan tómendegige iye bolamız:

$$\|y_n\| = \|T_{n,0}\| \cdot \|y_0\| + \sum_{j=0}^{n-1} \|T_{n,j}\| \cdot \|\phi_j\|. \quad (3.16)$$

Tómendegi belgili teoremlar orınlı.

3.4- teorema (A.A. Samarskiy, A.V. Gulin [17]). (3.13)-sxemasınıń baslanǵısh shártleri boyınsha teń ólshemli ornıqlı bolıwı ushın

$$\|T_{n,j}\| \leq M_1 \text{ qálegen } 0 \leq j < n, n = 0,1,2,\dots \quad (3.17)$$

shártiniń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

3.1. (3.13)-sistemasınıń baslanǵısh shártleri boyınsha ornıqlılıǵın izertlewdiń bir usılı. Meyli S_n operatorınıń norması tómendegishe bahalansın:

$$\|S_n\| \leq 1 + c_0 q_n, \quad q_n \geq 0. \quad (3.19)$$

Bunda c_0 - tómendegi shártlerdi qanaatlandıırıwshı turaqlı san:

a) $c_0 > 0$,

v) $c_0 < 0$ ($1 + c_0 q_n > 0$), $\forall n, (n = 0,1,2,\dots)$.

Meyli $T_{n,j}$ (3.14)-sistemanıń sheshiwshi operatori bolsın:

$$T_{n,j} = S_{n-1} S_{n-2} \dots S_j \quad \forall j \quad (0 \leq j < n)$$

Onda,

$$\|T_{n,j}\| \leq \|S_{n-1}\| \cdot \|S_{n-2}\| \cdots \|S_j\|.$$

Bunnan, (3.19)-ni esapqa alsaq, onda

$$\|T_{n,j}\| \leq \prod_{m=j}^{n-1} (1 + c_0 q_m) \quad (3.20)$$

bahasını iye bolamız.

Bul (3.20)-niń óń jaǵındaǵı kóbeymeni bahalaymız:

$$\ln \prod_{m=j}^{n-1} (1 + c_0 q_m) = \sum_{m=j}^{n-1} \ln(1 + c_0 q_m) \leq \sum_{m=j}^{n-1} c_0 q_m = c_0 \sum_{m=j}^{n-1} q_m.$$

Onda (3.20)-den

$$\|T_{n,j}\| \leq \exp \left(c_0 \sum_{m=j}^{n-1} q_m \right) \quad (3.21)$$

bahasına iye bolamız.

Solay etip, biz tómendegi juwmaqqa kelemiz:

a) egerde $c_0 < 0$ (biraq $1 + c_0 q_n > 0$), onda (3.21)-dan

$$\|T_{n,j}\| \leq 1 \text{ qálegen } 0 \leq j < n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ ushın}$$

Teńsizligi orınlı boladı.

v) egerde $c_0 > 0$, onda $\forall j \ (0 \leq j < n)$ ushın

$$\|T_{n,j}\| \leq M_1 < \infty$$

teńsizliginiń orınlı bolıwı ushın

$$\sum_{m=j}^{n-1} q_m \leq c_1 < \infty, \quad \forall j \ (0 \leq j < n),$$

shártiniń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli boladı, yaǵnıy bul qatar shegaralangán bolıwı kerek.

Bul juwmaqlardı tómendegi teoremlar túrinde beremiz.

3.5- teorema. Meyli (3.19)-teńsizligi orınlı bolsın. Onda

a) egerde $c_0 > 0$ hám $\sum_{m=j}^{n-1} q_m \leq c_1 < \infty$ shártleri orınlansa, onda

$$\|T_{n,j}\| \leq M_1 < \infty, \quad \forall j \ (0 \leq j < n)$$

bahası orınlı boladı;

v) egerde $c_0 < 0$ bolsa, onda $1 + c_0 q_n > 0$ shártin qanaatlandıratuǵın qálegen $q_n > 0$ ushın

$$\|T_{n,j}\| \leq 1, \quad \forall j \ (0 \leq j < n)$$

bahası orınlı boladı.

3.1-qosımsha. a) Egerde $c_0 > 0$ hám $\sum_{m=j}^{n-1} q_m \leq c_1 < \infty$ shártleri orınlı bolsa,

onda (3.13) sisteması baslanǵısh shártler boyınsha teń ólshemli orınlı boladı.

v) Egerde $c_0 < 0$ ($1 + c_0 q_n > 0$) shárti orınlı bolsa, onda (3.13)-sisteması baslanǵısh shártler boyınsha teń ólshemli asimptotikalıq orınlı boladı.

Endi (3.14)-sistemanıń teń ólshemli ornıqlılıǵın basqasha usıl menen izertleyміз. Atap aytqanda, Vajevskiy teńsizliginiń ayırmalı analogınan paydalanamız.

3.2. Vajevskiy teńsizliginiń ayırmalı analogı. Tómenдеgi teorema orınlı boladı.

3.6-teorema. (3.14)-ayırmalı teńlemenіń qálegen sheshimi ushın $(0 \leq n < \infty)$

$$\prod_{\nu=n_0}^{n-1} \sqrt{\lambda(B_\nu)} \|y_j\| \leq \|y_{n+1}\| \leq \prod_{\nu=n_0}^{n-1} \sqrt{\Lambda(B_\nu)} \|y_j\|, \quad (0 \leq j < n), \quad (3.22)$$

teńsizligi orınlı boladı.

Bunda $\|y_n\|$ - y_n vektorınıń evklid norması, al $\lambda(B_\nu)$ hám $\Lambda(B_\nu)$ - $B_\nu = S_\nu^* \cdot S_\nu$ matricasınıń sáykes eń kishi hám eń úlken menshikli mánisleri, bunda $S_\nu = [S_{ij}(\nu)]$ hám $S_\nu^* = [\overline{S_{ij}(\nu)}]$ - onıń túyinles ermit matricası.

Dálilleniwi. (3.14)-teńlemeden, onıń túyinlesin alsaq

$$y_{n+1}^* = y_n^* S_n^* \quad (3.23)$$

ańlatpasını iye bolamız.

Meyli $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ (3.14)-sistemanıń trivial emes sheshimi bolsın.

Onda $y^* y = \|y\|^2$. Demek $\|y_{n+1}\|^2 = y_{n+1}^* y_{n+1}$. Bunnan (3.14) hám (3.23)-lerdi esapqa alsaq

$$\|y_{n+1}\|^2 = y_n^* B_n y_n \quad (3.24)$$

ańlatpasına iye bolamız. Bunda $B_n = S_n^* \cdot S_n$. Onda $B_n^* = B_n > 0$ bolǵanlıqtan, qálegen n ushın

$$\lambda(B_n) \|y_n\|^2 \leq y_n^* B_n y_n \leq \Lambda(B_n) \|y_n\|^2 \quad (3.25)$$

teńsizligi orınlı boladı. Bunda $\lambda(B_n)$ hám $\Lambda(B_n)$ - B_n matricasınıń sáykes eń kishi hám eń úlken menshikli mánisleri.

(3.24)-nı esapqa alıp (3.25)-dan

$$\lambda(B_n) \|y_n\|^2 \leq \|y_{n+1}\|^2 \leq \Lambda(B_n) \|y_n\|^2$$

teńsizligine iye bolamız. Bunnan (2.17)-teńsizligin alamız.

(3.22)-formulası $y_n \equiv 0$ trivial jaǵdayı ushında orınlı boladı.

3.2-qosımsha. (3.14)-teńlemesiniń teń ólshemli asimptotikalıq ornıqlı bolıwı ushın

$$\Lambda(B_n) \leq q^2 < 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

shártiniń orınlanıwı jetkilikli yamasa

$$\max_n \lambda_n(S_n^* \cdot S_n) \leq \rho^2 < 1, \quad n = 0, 1, \dots.$$

shártiniń orınlanıwı jetkilikli.

Endi Vajevskiy teńsizligin paydalanıp (3.14)-sistemasınıń teń ólshemli ornıqlılıǵın izertleymiz.

3.3. Jáne (3.14)-sistemasınıń teń ólshemli ornıqlılıǵı haqqında. Bizge málim

$$\|y_j\| \leq \prod_{v=n_0}^{n-1} \sqrt{\Lambda(B_v)} \|y_j\|, \quad (0 \leq j < n).$$

Meyli

$$\|B_n\| \equiv \|S_n^* \cdot S_n\| \leq 1 + c_0 q_n, \quad \forall n \geq 0 \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (3.26)$$

bahası orınlı bolsın. Onda

$$\max_n \lambda_n(S_n^* \cdot S_n) \leq (1 + c_0 q_n)^2 \leq \exp\left(2c_0 \sum_{v=j}^{n-1} q_v\right), \quad \forall v \leq n-1, \quad n \in N.$$

Solay etip, tómendegi teoremlar orınlı boladı.

3.7-teorema. Meyli (3.26)-ańlatpası orınlı hám $c_0 > 0$ bolsın. Onda

$$\sum_{v=j}^{n-1} q_v \leq c_1 < \infty, \quad \forall j \quad (0 \leq j < n),$$

shárti orınlansa, onda (3.14)-sisteması teń ólshemli ornıqlı boladı, yaǵnıy

$$\|y_n\| \leq M_1 \|y_j\|, \quad \forall j \geq 0, \quad j < n, \quad \text{gde } M_1 > 0 - \text{const}$$

aprior bahası orınlı boladı.

3.8-teorema. Meyli (3.26)-ańlatpası orınlı hám $c_0 < 0$ ($1 + c_0 q_n > 0$) bolsın. Onda (3.14)-sistemasınıń sheshimi teń ólshemli ornıqlı boladı hám onıń sheshimi ushın

$$\|y_n\| \leq \rho \|y_k\|, \quad \forall k \geq 0, \quad k < n, \quad \text{gde } \rho < 1 - \text{const}$$

aprior bahası orınlı boladı.

Baslanǵısh shártleri boyınsha teń ólshemli ornıqlı bolǵan (3.12)- sxeması on táreplemede ornıqlı boladı (3.2-teorema boyınsha).

IV-bap. PROGRAMMALASTÍRIW TÍYKARLARÍ HÁM SANLI MISALLAR

1-§. Sızıqlı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin sheshiwge misal

Bul paragrafta biz sızıqlı hám sızıqlı emes teńlemelerdi sheshiwdiń sanlı usıllarınıń biri bolǵan Shekli ayırmalar usılı menen tanısamız. Dáslep sızıqlı hám keyin ózgermeli koefficientli parabolalıq teńlemeni qaraymız.

Injenerlik esaplawlarda qollanılatuǵın praktikalıq másele retinde joqarıda kórgenimizdey waqıttıń ótiwi menen plastinadaǵı jıllılıqtıń tarqalıwın izertleyik.

Máseleniń shártleri tómendegishe bolsın: Teplofizikalıq qásietlerge iye shegarasız plastinadaǵı (alyuminnen quyılǵan AM_{26}) stacionar emes temperaturalıq maydandı anıqlań, egerde bir betinde $x=L$ bolǵanda, temperaturanıń waqıttıń ótiwi menen ózgeriwi berilgen: $T(x,t) = \beta t$, $\beta = 20^{\circ C / \text{сек}}$, al ekinshi

beti jıllılıqtan izolyaciyalanǵan bolsın. Meyli $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

$\lambda = 1,33 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot \text{град}}$, $C = 0,2 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$. Plastinanıń qalınlıǵı: $L=10 \text{ см}$.

Barlıq plastina boyınsha temperaturanıń baslanǵısh tarqalıwı $0^{\circ}C$ ǵa teń bolsın.

Dáslep máseleni differenciallı formada qarayıq. Bunda temperaturanıń tarqalıwı bir koordinata kósheri boylap ámelge asatuǵın bolǵanlıqtan jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi birtekli boladı:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

al deneniń jıllılıq ótkizgishlik koefficienti a onıń teplofizikalıq qásietlerinen anıqlanadı: $a = \frac{k}{c\rho}$.

Baslanǵısh shárt:

$$T(x, 0) = 0. \quad (4.2)$$

Shegaralıq shártler:

$$T(L, t) = 20t, \quad (4.3)$$

$$T(0, t) = 0. \quad (4.4)$$

Bul (4.4) – formula teploizolyaciyanıń betti ańlatadı, bunda nolinshi qatlam plastinanıń sırtınan alınǵan hám bul qatlamda temperatura barlıq waqıt $0^{\circ}C$ ǵa teń.

Bul máseleńi analitikalıq usıllar menen sheshiw, joqarıda aytqanıımızday birqansha qıyınshılıqlarǵa alıp keledi. Mısalı, máseleńi analitikalıq yaǵnıy dál usıllardıń biri bolǵan ózgeriwshilerin ayırıw usılı menen sheshsek onda sheshim

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cdot \left(\frac{(2n+1)\pi a(-1)^n}{2L} \cdot \int_0^L 20t \exp \frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L} dx \right).$$

kórinisine iye boladı. Sonlıqtan onı biz sanlı usıllardıń bir menen sheshemiz, atap aytqanda, Shekli ayırmalar usılı menen sheshemiz.

İçekli ayırmalar usılı tiykarında bul máseleǵe anıq sxema dúzeyik. Onda jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi hám shegaralıq shártler tómendegishe jazıladı:

$$\frac{\mathcal{G}_{i,k+1} - \mathcal{G}_{i,k}}{l} = a \frac{\mathcal{G}_{i+1,k} - 2\mathcal{G}_{i,k} + \mathcal{G}_{i-1,k}}{h^2}. \quad (4.5)$$

$$\mathcal{G}_{i,0} = 0; \quad (4.6)$$

$$\mathcal{G}_{L,k} = 20k, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{G}_{0,k} = 0. \quad (4.8)$$

Bunda $\lambda \leq 1/2$, gde $\lambda = \frac{al}{h^2}$.

Bul usıl ádette bir tiptegi ámellerdi orınlaw múmkinshiligin beredi. Sonlıqtan oǵan Teplopr (1-qosımshanı qarań) programmasın dúzemiz. 2-qosımshada máseleńi sheshiwdiń blok-sxeması keltirilgen.

Bul Teplopr programması Pascal programmalaştırıw tilinde jazılğan hám anıq ayırmalı sxema boyınsha esaplawlar alıp baradı.

Programmanıń orınlaytuǵın jumısın qısqasha túsindiremiz. Berilgen parametrlardıń san mánislerin programmaǵa kiritkennen keyin tikkeley plastinanıń temperaturalıq maydanı esaplanadı hám ekranǵa juwmaqlar tablica túrinde shıǵarıladı.

Bul programmada shegaralıq shártlerdi ózgerte otırıp kóplegen máselelerdi sheshiw múmkinshiligine iyemiz.

Mısal ushın tómendegilerdi kiritiwimiz múmkin: $dx=1$ ($h=1$), $dt=100$ ($l=100$). Onda $kF=0.3$ (yaǵnıy $\lambda < \frac{1}{2}$) hám biz tuwrı sheshim alamız (3-qosımshanı qarań). Esaplawlardı dawam ecek, shama menen yarım saatlardan soń, $x=L$ tárepindegi shegaralıq shárt turaqlı bolǵanda plastinanıń qızıw processii bir tegis boladı hám ol stacionar jaǵdayǵa shıǵadı.

Endi ornıqlılıq shártin qanaatlandırmaytuǵın jaǵdayın qarayıq: $dx=1$ ($h=0.7$), $dt=100$ ($l=100$). Onda $kF=0,612$ (yaǵnıy $\lambda > \frac{1}{2}$), hám biz ulıwma basqasha juwmaqqı iye bolamız (4-qosımsha). 5-qosımshada usı alınǵan eki sheshimlerdiń ayırmashılıǵınıń diagramması keltirilgen.

2-§. Kletkalıq avtomatlarda sanlı modellestiriw

Joqarıdaǵı 2-bapta keltirgenimizdey alıs qońsıların esapqa alıwshı terbelisler fazası ushın kletkalıq avtomatınıń matematikalıq modelin qarayıq:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -bu + D_0 \Delta u + D_1 \Delta^2 u . \quad (4.9)$$

Bul (4.9)-teńleme

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (4.10)$$

baslanğısh shártı hám ekinshi baptın 2-paragrafında kórsetilgen shegaralıq shártlerdiń birin qabıl etedi. Bunda b , D_0 , D_1 - turaqlılar, Δ - Laplas operatori, Δ^2 - tórtinshi tártipli differenciallıq operator. Berilgen (4.9)-teńlemedegi keńislik ózgeriwshisin Shekli ayırmalar yamasa Shekli elementler usılı tiykarında approksimaciyalay otırıp tómendegi ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasına iye bolamız:

$$D \frac{d\mathcal{G}_h(t)}{dt} + A\mathcal{G}_h(t) = 0, \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad (4.11)$$

bunda $\mathcal{G}_h(t) - \forall t$ lar ushın Shekli úlshemli H_h keńisliginiń elementi; D , $A = -\Lambda$, $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$ - H_h tan H_h qa háreketleniwshi operatorlar (Shekli elementler usılında olarǵa massa hám qattılıq operatorları sáykes keledi, al Shekli ayırmalar usılında sáykes birlik hám keńislik ózgeriwshisin approksimaciyalawdan payda bolǵan operator). Bul jerde $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^* > 0$, $\alpha = \overline{1,2}$.

Joqarıdaǵı (4.11)-Koshi máselesin sheshiw ushın hár qıylı sanlı usıllardan paydalanıwımız múmkin. Hátteki dál sheshimin tabatuǵın usıllarda bar. Biraq keńislik ózgeriwshilerin approksimaciyalawdan payda bolǵan operator kóp nollerge iye operator bolǵanlıqtan onıń sheshimi tabıw kóp qıyınshılıqlar tuwdırıwı múmkin. Sonlıqtan olar kóbinese sanlı usıllar mene sheshiledi. Mısalı Runge-Kutta, Adams h.t.b. Bulardan basqa arnawlı usıllarda bar. Mısalı, waqıt boyınsha tórtinshi, al keńislik boyınsha úshinshi tártipli dállikti beretuǵın Moskalkov-Utebaev sxeması ([28]-ge qarań):

$$D \frac{\hat{y}^- y}{\tau} - \frac{\tau^2}{12} A \frac{\hat{y}^- \dot{y}}{\tau} + A \frac{\hat{y}^+ y}{2} = \varphi_1, \quad \gamma D \frac{\hat{y}^- \dot{y}}{\tau} + \alpha A \frac{\hat{y}^- y}{\tau} + \beta A \frac{\hat{y}^+ \dot{y}}{2} = \varphi_2, \quad (4.12)$$

$$y(0) = u_{0,h}, \quad \dot{y}(0) = \dot{u}_{0,h}, \quad (4.13)$$

$$\text{bunda } \varphi_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt, \quad \varphi_2 = \frac{12}{\tau^3} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \left(s_1 \mathcal{G}_2^{(1)} + s_2 \mathcal{G}_2^{(3)} \right) dt, \quad s_1 = 15\gamma - 35\alpha/3,$$

$$s_2 = 140\gamma - 350\alpha/3, \quad \mathcal{G}_2^{(1)} = t - (t_n + \tau/2),$$

$$\mathcal{G}_2^{(3)} = \tau(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2), \quad \xi = (t - t_n)/\tau, \quad \dot{u}_{0,h} = D^{-1}(f^0 - Au_0).$$

Bul (4.12), (4.13) sxema waqıt boyınsha tórtinshi tártipli dállickti beretuǵın $\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = O(\tau^2)$ shártlerine baǵınadı. Bul sxema basqa usıllarǵa qaraǵanda tómendegi abzallıqlarǵa iye:

a) sxema joqarı tártipli dállickke iye (ádettegi ekiden joqarı);

b) sxema tek sheshimdi tawıp qoymastan bir waqıtta onıń tuwındısında tap sol dállickte tabadı (bul bir waqıtta qozǵalıǵ hám tezlik tabılıdı degen sóz);

v) tómendegi interpolyalıq túrlendiriw járdeminde

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t), \quad \varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \\ \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2),$$

egerde kerek bolsa sheshimdi hám onıń tuwındısın qálegen waqıt birliginde tabıw imkaniyatın beredi;

g) sxema eki qatlamlı bolǵanlıqtan, kerek bolsa ózgermeli adımnan paydalanıw múmkin;

d) kemshiligi sxema shártli ornıqlı hám ádettegi Shekli ayırmalar usıllarına qaraǵanda 4 ese kóbirek arifmetikalıq ámeller orınlawdı talap etedi, biraq bul sxema belgili bir dállickke erisiw ushın waqıt boyınsha úlken adımlardan paydalanıw múmkinshiligin beredi. Sonlıqtan qádimgi ekinshi tártipli dállickke iye sxemalarǵa qaraǵanda anaǵurlım kóbirek dállickti beredi. Búǵan qosımsha bul sxema A-ornıqlı, yaǵnıy qattı ápiwayı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan máselelerdide sheshiwge boladı. Bul sxemanıń approksimaciya qáteligi, ornıqlılıǵı, jıynaqlılıǵı hám dálligi [28] – ádebiyatta tereń izertlengen.

Meyli mısıl retinde joqarıdaǵı (4.9) – teńlemenı Shekli ayırmalar usılı menen sheshiw jolın hám izertleniwın qarap óteyik. Meyli bunda $b=0$, $D_0=0$, $D_1=1$ dep qabıl eteyik. Onda bul teńleme (4.10) – shárti menen birgelikte tómendegi túrge iye boladı:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^2 u. \quad (4.14)$$

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (4.15)$$

Máseleniń shegaralıq shártleri tómendegishe berilgen bolsın:

$$u(0,t) = u(l,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0. \quad (4.16)$$

Bul (4.14) – (4.16) – máseleni Shekli ayırmalar usılı menen approksimaciyalaw ushın berilgen $i = 2, 3, \dots, N-2$ tochkalarında $\bar{\omega}_h$ torın kiritemiz hám (4.14) – teńlemenı tómendegishe approksimaciyalaymız:

$$y_{t,i} = y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x},i}, \quad i = 2, 3, \dots, N-2. \quad (4.17)$$

Al endı, (4.15) – baslanğısh hám (4.16) – shegaralıq shártlerdi tómendegishe approksimaciyalaymız [17]:

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad (4.18)$$

$$y_{t,1} = \frac{1}{h^4}(7y_1^n - 4y_2^n + y_3^n), \quad (4.19)$$

$$y_{t,N-1} = \frac{1}{h^4}(y_{N-3}^n - 4y_{N-2}^n + 7y_{N-1}^n), \quad y_0^n = y_N^n = 0.$$

Endi bul ayırmalı sxemanı eki qatlamlı operatorlı-ayırmalı sxema túrinde jazıwımız múmkin:

$$y_t + Ay = 0, \quad (4.20)$$

bunda $y = y^n$ vektor $y = \{y_1^n, y_2^n, \dots, y_{N-1}^n\}$, al A operatorı tómendegishe anıqlanadı:

$$(Ay)_i = \begin{cases} y_{t,1} = \frac{1}{h^4}(7y_1^n - 4y_2^n + y_3^n), & i=1, \\ y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x},i}, & i=2,3,\dots,N-2, \\ \frac{1}{h^4}(y_{N-3}^n - 4y_{N-2}^n + 7y_{N-1}^n), & i=N-1. \end{cases} \quad (4.21)$$

Bul A operatorı $\bar{\omega}_h$ torında berilgen hám $i=0, i=N$ tochkalarında nolge teń bolğan funkciyalardıń $\overset{\circ}{\Omega}$ torlıq keńisliginde anıqlanğan. Bul torlıq keńisliginde skalyar kóbeyme hám norma tómendegishe beriledi:

$$(y, \vartheta) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \vartheta_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}. \quad (4.22)$$

Bul jaǵdayda $A = A^* > \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$. Sebebi shegaralıq shártler usılay saylap alınǵan.

Bul (4.20) – kórinisindegi sxemalardı izertlew 3-bapta qarap ótildi, sonlıqtan oǵan toqtap otırmaymız.

3-§. Psevdoparabolalıq tiptegi differenciallıq teńlemelerdi sheshiw jolları

Bul paragrafta bir ólshemli elektorlik domenlerdiń payda bolıwınıń eń ápiwayı matematikalıq modelleriniń biri bolǵan tómendegi, 2-bapta úyrenilgen, differenciallıq teńlemenı qarayıq:

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0, \quad (4.23)$$

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.24)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (4.25)$$

Óz gezeginde domenlerdiń tarqalıwı birlikte tarqalıwshı tolqınlar (solitonlar) jaǵdayında olardıń matematikalıq modeli tómendegi Oskolkov-Bendjamen-Bon-Maxoni tipindegi klassikalıq teńleme mene beriledi [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - au) + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 u \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{f}(x, t), \quad (4.26)$$

Bul (4.26)-teńleme

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (4.27)$$

baslanǵısh shárti hám ekinshi baptıń 2-paragrafında kórsetilgen shegaralıq shártlerdiń birin qabıl etedi. Bunda a , a_1 , a_2 - turaqlılar, Δ - Laplas operatorı.

Berilgen sıızıqlı (4.23)- teńlemedegi keńislik ózgeriwshisin Shekli ayırmalar yamasa Shekli elementler usılı tiykarında approksimaciyalay otırıp tómendegi ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasına iye bolamız:

$$A = \frac{a_1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & & -1 \\ 0 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(t, g) = \frac{a_2}{4\Delta x} \begin{pmatrix} g_2^2 - g_0^2 \\ g_3^2 - g_1^2 \\ \\ g_{n+1}^2 - g_{n-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Bul (4.30)-sistemanı sheshiw ushın Eylerdiń sanlı usılların yamasa Runge-Kuttanıń tórtinshi dárejeli dálilikke iye sanlı usılın qollanawımızǵa boladı.

Bul parabolalıq tiptegi máseleni sheshiwdiń shekli ayırmalar usılı tiykarında «Python» algoritmlık tilinen paydalanıp sheshilgen másele 6-qosımshada keltirilgen. Bul sxema(usıl) waqıt boyınsha birinshi tártipli hám keńislik boyınsha ekinshi tártipli dálilikti beredi.

JUWMAQLAW

Dissertaciyanıń kirisiw bóliminde dissertaciyada qoyılǵan máseleniń aktuallıǵı, maqseti, wazıypaları, ilimiy jańalıǵı, izertlew nátiyjeleriniń teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti kórsetildi. Jumıstıń birinshi babında úyrenilip shıqqan ádebiyatlardan, atap aytqanda, matematikalıq analiz, funkcionallıq analiz hám esaplaw matematikası teoriyalarınıń keyingi izertlewler ushın kerekli materiallar keltirildi. Bular sızıqlı algebra hám funkcionallıq analiz elementleri (birinshi paragraf). Sonday-aq bul bapta torlar, torlıq funkciyalar hám normalar, torlıq funkciyalar keńisligi h.t.b. bayan etildi (ekinshi paragraf). Baptıń úshinshi paragrafında ayırmalı teńlemeler, Shekli ayırmalı sxemalar hám olardıń óz-ara baylanısı kórsetildi.

Ekinshi bapta dara tuwındılı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin keltirip shıǵarıw, shegaralıq hám baslanǵısh shártlerdi qoyıw usılları, máseleni sheshiwdiń analitikalıq usılları qaraldı. Buǵan qosımsha bul bapta kletkalıq avtomatlar menen yarımótkizgishler teoriyasınıń ayırım matematikalıq modelleri qaraldı.

Jumıstıń úshinshi babında ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵın izertlewge keńnen toqtap ótildi. Birinshi paragrafta sızıqlı ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵınıń, teń ólshemli ornıqlılıǵınıń hám asimptotikalıq ornıqlılıǵınıń anıqlamaları keltirildi. Ekinshi paragrafta turaqlı koefficientli ayırmalı teńlemelerdiń ornıqlılıǵı izertlendi. Bunda 3.1 hám 3.3-teoremlar tiykarǵı juwmaqlar bolıp tabıladı. Usınday izertlewler ózgermeli koefficientli ayırmalı teńleme ushın úshinshi paragrafta izertlendi. Tiykarǵı juwmaq 3.5-teoremda berildi. Keyingi alınǵan tiykarǵı nátiyje bul 3.6-teorema bolıp tabıladı. Bunda Vajevskiy teńsizliginiń ayırmalı analogi alındı hám usı tiykarında ózgermeli koefficientli ayırmalı teńlemenıń teń ólshemli ornıqlılıǵı izertlendi (3.7 hám 3.8-teoremlar).

Tórtinshi bapta alánǵan teoriyalıq materiallarǵa sanlı mısallar keltirildi. Atap aytqanda, birinshi paragrafta sızıqlı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesine hám ekinshi paragrafta sızıqlı kletkalıq avtomatlardıń matematikalıq modeli bolǵın

differentialliq teńlemege misallar sheshildi. Yshinshi paragrafta yarımótkızgishler teoriyasınıń ayrım matematikalıq modeline dúzilgen sxemalardı sanlı realizaciyalaw jolları ayıldı.

Jumıs qısqasha juwmaqlaw hám paydalanılğan ádebiyatlar dizimi menen juwmaqlandı. Qosımshalarğa blok-sxemalar, programmalar hám alıńan sanlı nátiyjeler kirgizildi.

PAYDALANILGAN ÁDEBIYATLAR

1. 1. Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. – М.: Наука, 1967.
2. Ковал П.И. Об асимптотическом поведении решений линейных разностных и дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1957. – т. 144, № 5.
3. Ковал П.И. Асимптотическое поведение решений разностных уравнений // Вестник киевского университета. – 1961. – в. 2, № 3.
4. Ковал П.И. Приводимые системы разностных уравнений // Успехи математических наук. – 1957. – т. 12, № 6.
5. Ковал П.И. Об устойчивости решений систем разностных уравнений // Украинский математический журнал. – 1957. – т. 9, № 2.
6. Скалкина М.А. О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным // ДАН СССР. – 1955. – т. 104, № 5.
7. Скалкина М.А. О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1955. – т. 19, № 3.
8. Демидович В.П. Правильные линейные системы // Дифференциальные уравнения. – 1971. – т. 7, № 5.
9. Демидович В.П. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1971. – т. 7, № 5.
10. Демидович В.П. Об асимптотическом поведении решений конечно-разностных уравнений. 1. Общие положения // Дифференциальные уравнения. – 1974. – т. 10, № 12.
11. Остапов Ю.Г. Об устойчивости движений дискретных динамических систем // Математическая физика. – 1969. – в. 6.
12. Коваль П.И. Об устойчивости решений разностных уравнений // ДАН

- СССР. – 1955. – т. 103, № 4.
13. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. –Томск, 2007. – 172 с.
 14. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
 15. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев, Наукова думка. – 1972. – 248 с.
 16. Самарский А.А. Теория разностных схем – М.: Наука, 1990. – 616 с.
 17. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
 18. Самарский А. А., Михайлов.А. П. Математическое моделирование. Наука, М. 2005, 480с
 19. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир,1999. – 685 С.
 20. Утебаев Д. Оценки точности схемы метода конечных элементов по времени и по пространству для параболических уравнений // Узбекский журнал проблемы информатики и энергетики.- Ташкент, 2005. – №5. – С. 99-103.
 21. Утебаев Д. Численное моделирование колебания струны методом конечных элементов // Вестник КК отд. АН РУз. – Нукус, 2007. – №4. – С. 5-11.
 22. Утебаев Д., Схема метода конечных элементов для волнового уравнения с диссипацией //Тез.докл. XI міжнар. конф. ім. акад. М.Кравчука, г. Київ– 2006. – С. 276.
 23. Xaydarov A. Bir jinsli bo'lmagan muhitda ba'zi bir chiziqsiz issiqlik tarqalish jarayonlarini modellashtirish. - Kand. diss., T., ToshDU 1994.
 24. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. – Санкт-Петербург: БХВ –Тетербург, 2005. – 464 С.
 25. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. – М.:

ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 296 с.

26. Утебаев Д. Разностные схемы для гиперболических систем уравнений с обобщенными решениями. Монография. – Ташкент: «Фан ва технология», 2017. – 236 С.
27. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., Физматлит, 2007.- 736 с.
28. Москальков М.Н., Утебаев Д. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. Монография. – Ташкент: «Фан ва технология», 2012. – 160 С.
29. Утебаев Д., Ярлашев Р.Ш., Камалов Р.Р. Численное решение математической модели клеточного автомата физической реальности // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий», 14-15 ноябрь 2019, г. Ташкент, С. 108-109.
30. Утебаев Д., Ярлашев Р.Ш., Камалов Р.Р. Численное моделирование электрического домена и его движения в полупроводниках // Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы физики полупроводников», 20 ноябрь 2019, г. Нукус, С. 281-283.

Q O S I M S H A L A R

1-qosımsha.

Plastinadağı jıllılıqtıń tarqalıwın esaplaw programması.

```
{***Plastinadağı jıllılıqtıń tarqalıwı ***}  
Program Teplopr;  
uses crt;  
type St=array [0..20] of real;  
const p=2200;k=1.33;c=0.2;t=1800;l=10;{teplofizikalıq qásietleri}  
var F:file of real;{berilgenlerdi jazıwshı fayldı anıqlaw}  
    V,a,kF,dx,dt,edt,edx:real;  
    i,j,n,m:integer;  
    U,U1:St;  
    ok:boolean;  
  
begin  
    clrscr;  
    a:=k/(c*p);{<-jıllılıq ótkizgishlik koefficienti}  
    writeln('a=',a:2:3);  
  
    {*Berilgenlerdi kiritiw*}  
    Repeat  
        ok:=false;  
        write('Kiritiń dx=');  
        readln(dx);  
        write(' Kiritiń dt=');  
        readln(dt);  
  
        kF:=(a*dt/sqr(dx));{ Fure koefficientin esaplaw}  
  
        if kF<=0.5 then begin  
            writeln('Fure kriteriyası orınlanadı')  
            ok:=true;  
        end  
        else begin  
            writeln('Fure kriteriyası orınlanbaydı');  
            writeln('Dawam etiw ushın kiritiń: 1');  
            writeln('Keyingisin kiritiń: 2');  
            read(w);  
            if w=1 then ok:=true  
                else begin  
                    edt:=dt-0.5*sqr(dx)/a;  
                    edx:= sqrt(a*dt/0.5)-dx;  
                    writeln('dt nı kishireytiw zárúr',edt:2:3);  
                    writeln('yamasa dx tı úlkeytiw zárúr',edx:2:3);
```

```

end;

end;
until ok=true;

writeln('kF=',kF);

{**t hám x boyınsha adımlardıń sanın esaplaw**}
n:=trunc(l/dx);
m:=trunc(t/dt);

{***Baslanǵısh shártler***}
for i:=0 to n do
U[i]:=0;

assign(F,'c:/1.dat'{F fayılınıń 1.DAT diskovodı menen baylanısı}

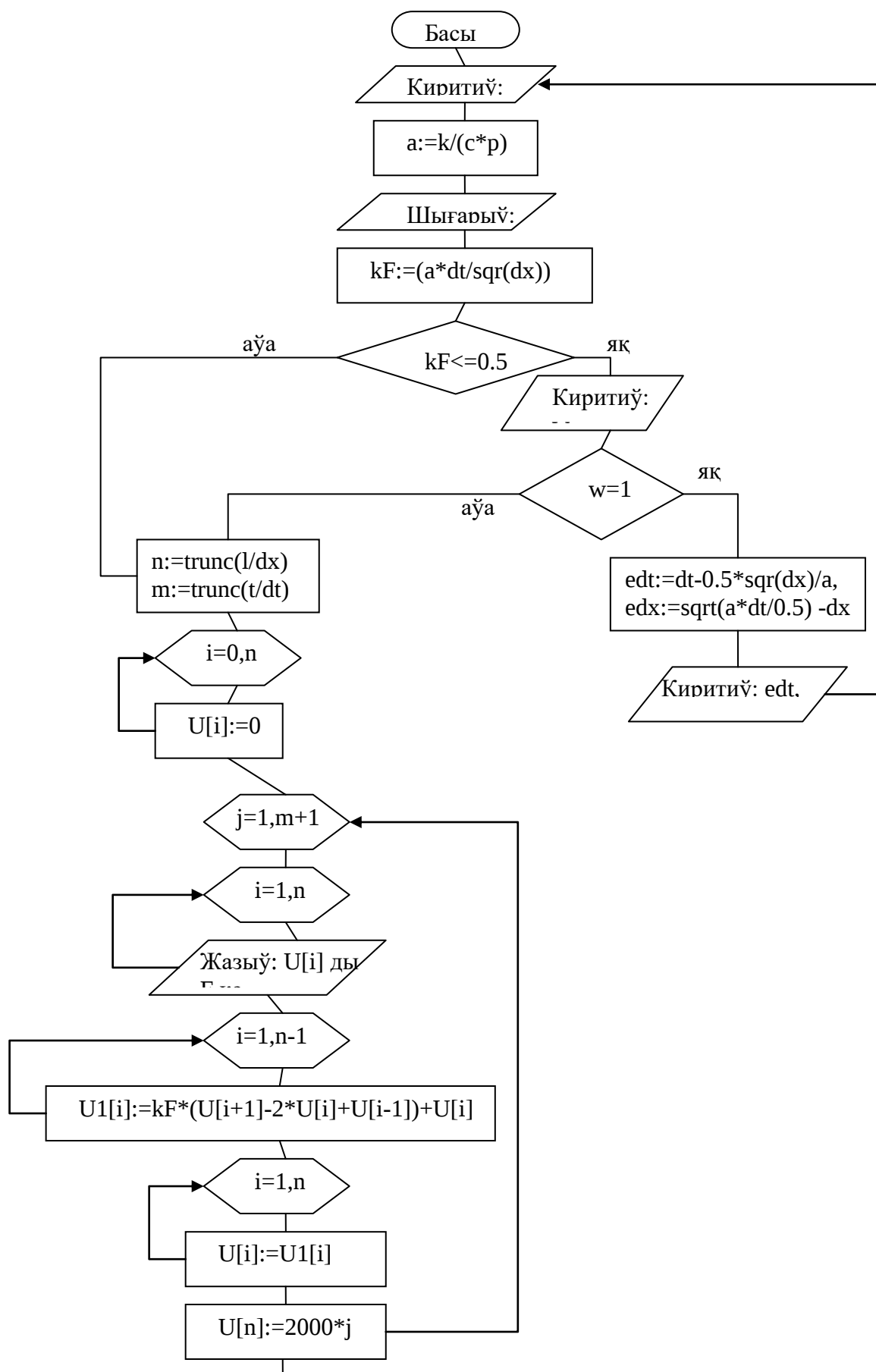
{****Ayırmalı sxema****}
rewrite(F);{jazıw ushın fayldı ashıw}
for j:=1 to (m+1) do
begin
for i:=1 to n do
write(F,U[i]);
for i:=1 to (n-1) do
U1[i]:=kF*(U[i+1]-2*U[i]+U[i-1])+U[i];
U1[n]:=2000*j;{<-shegaralıq shártler}
for i:=1 to n do
U[i]:=U1[i];
end;
close(F); {fayldı jabıw}

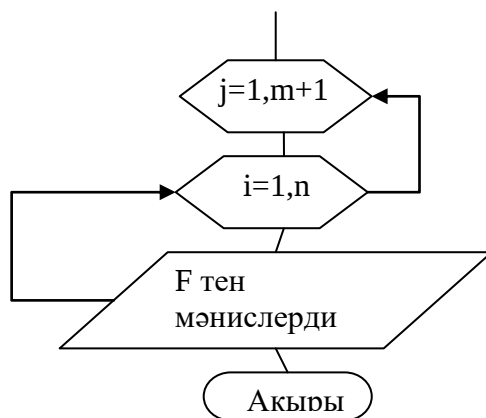
{*****Juwmaqlardı shıǵarıw*****}
reset(F);{oqıw ushın fayldı ashıw}
for j:=1 to (m+1) do
begin
for i:=1 to n do
begin
read(F,V);
write(' ',V:5:2);
end;
writeln;
end;
close(F);{fayldı jabıw}

readln;
end.

```

2-qosımsha. Teplopr programmasına blok-sxema.

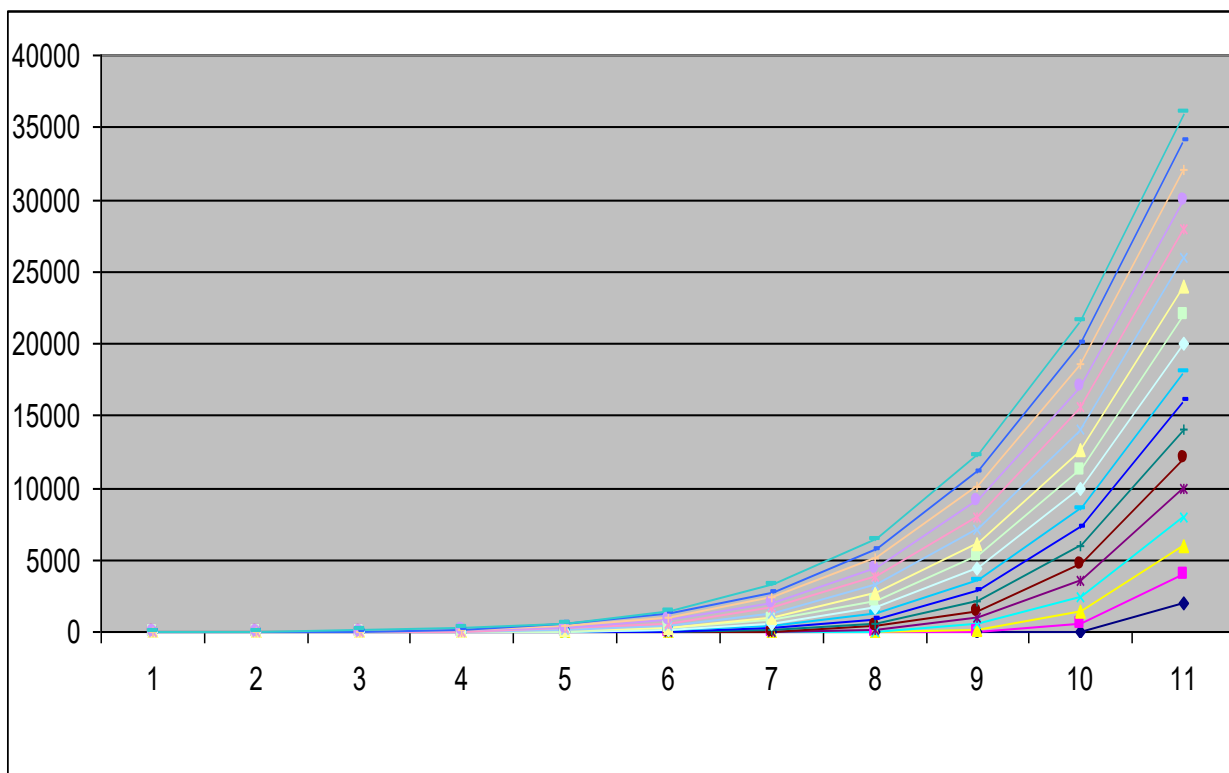




3-qosımsha.

Ornıqlılıq shárti orınlanganda plastinanın temperaturalıq maydanının tablicası hám diagramması.

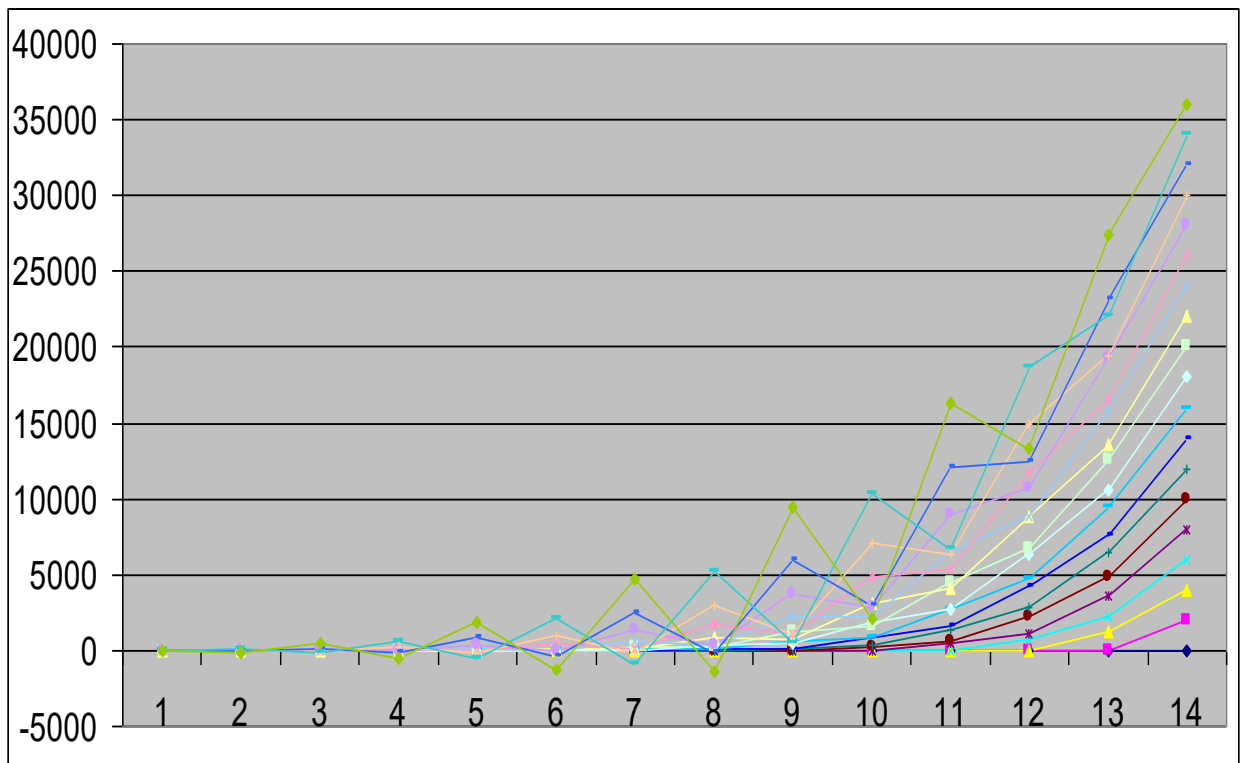
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2000
0	0	0	0	0	0	0	0	600	4000
0	0	0	0	0	0	0	180	1440	6000
0	0	0	0	0	0	54	504	2430	8000
0	0	0	0	0	16,2	172,8	946,8	3523,2	10000
0	0	0	0	4,86	58,32	358,02	1487,52	4693,32	12000
0	0	0	1,458	19,44	132,192	606,96	2110,41	5923,584	14000
0	0	0,4374	6,4152	47,871	240,7968	915,565	2803,33	7202,557	16000
0	0,13122	2,09952	17,0586	93,312	385,3494	1279,46	3556,77	8522,021	18000
0,039366	0,682344	5,996754	35,4469	158,0472	565,9723	1694,42	4363,15	9875,838	20000
0,22045	2,083774	13,23747	63,39194	243,6446	782,1291	2156,51	5216,34	11259,28	22000
0,713312	4,870886	24,9377	102,4214	351,1142	1032,897	2662,14	6111,27	12668,61	24000
1,746591	9,64366	42,16277	153,7841	481,0411	1317,136	3208,11	7043,74	14100,83	26000
3,591734	17,03027	65,89344	218,4748	633,6924	1633,599	3791,5	8010,17	15553,45	28000
6,545775	27,65766	97,0089	297,2657	809,099	1980,999	4409,73	9007,56	17024,43	30000
10,91561	42,12947	136,2806	390,7386	1007,119	2358,049	5060,46	10033,3	18512,04	32000
17,00508	61,01064	184,3727	499,3153	1227,484	2763,493	5741,58	11085,1	20014,8	34000
25,10522	84,81758	241,8468	623,2831	1469,836	3196,117	6451,2	12160,9	21531,44	36000



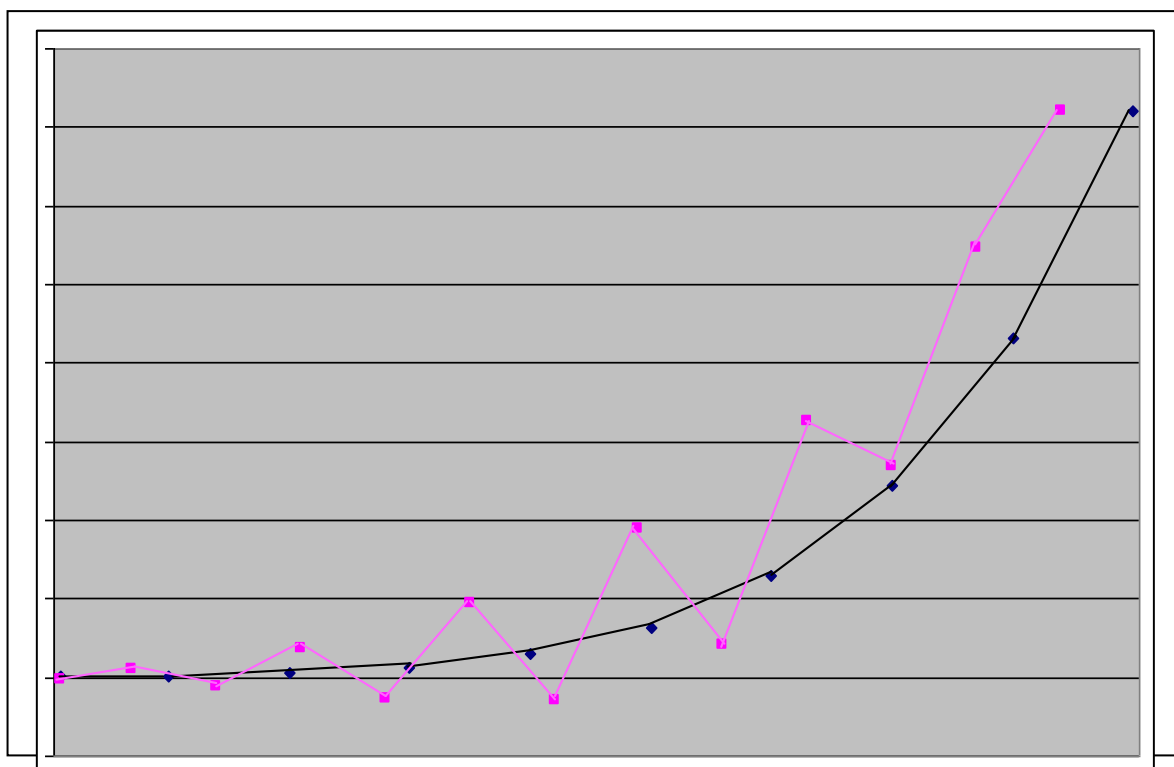
4-qosimsha.
Orniqlilik shárti orinlanbaganda plastinaniń temperaturalıq maydanınıń
tablicası hám diagramması.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1224	4000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	749	2174	6000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	458	1162	3644	8000
0	0	0	0	0	0	0	0	281	608	2251	4791	1000
0	0	0	0	0	0	0	0	172	309	1413	2801	6425
0	0	0	0	0	0	105	150	901	1587	4170	7619	1400
0	0	0	0	0	64	68	582	861	2748	4700	9414	1600
0	0	0	0	39	27	380	439	184	6	2788	6391	1056
0	0	0	24	8	251	200	126	156	4	4417	6737	1256
0	0	14	-0	166	71	883	794	312	8	4089	8883	1354
0	9	-3	111	5	626	331	227	228	7	6436	8805	1586
5	-4	74	-23	450	66	1703	109	482	5347	1167	1652	2600

							2	1		7	3	0
-3	49	-33	326	-75	130	327	374	286		1076	1935	2800
					3		9	0	8901	8	8	0
31	-34	238	-139	1015	-138	3020	111	710	6346	1488	1938	3000
							0			4	9	0
-28	172	-160	798	-398	250	-83	594	297	1203	1241	2312	3200
					1		8	0	7	5	7	0
112	-153	630	-521	2110	-856	5192		103		1874	2200	3400
							432	4	6717	2	1	0
-			179		466		941	205	1630	1337	2735	3600
119	489	-554	5	-1317	3	-1425	5	5	0	5	2	0



5-qosımsha.
Ornıqlı hám ornıqlı emes sheshimlerdi salıstırıw diagramması.



6-qosımsha.

Esaplaw eksperimenti. Meyli parabolalıq tiptegi teńlemenı sheshiwdiń shekli ayırmalar usılın qarayıq. Keńislik boyınsha ózgeriwshiniń jıynaqlılıq tártibin C normada anıqlaw ushın tómendegi formuladan paydalanamız:

$$p_{\infty}^h = \log_2 \frac{\|z(2h, \tau)\|_{L^{\infty}}}{\|z(h, \tau)\|_{L^{\infty}}}.$$

Bul jerde anıq sxemanıń ornıqlılıq shárti $\tau \leq h^2 / 2$ boladı.

Eksperiment

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

Teńlemesi ushın $f(x, t) = 0$ jaǵdayında alıp barıladı.

Baslanǵısh shárt:

$$u(x, 0) = \sin \pi x + x$$

Hám shegaralıq shártler:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1.$$

Dál sheshim:

$$u(x,t) = \sin \pi x \cdot \exp(-\pi^2 t) + x.$$

Sáy 1+2 dálłigine iye ayırmalı sxema

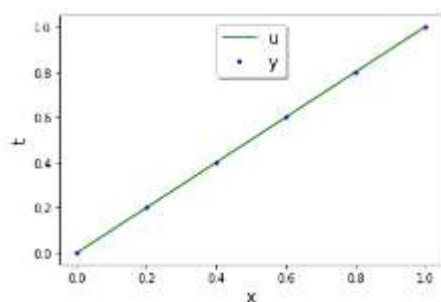
$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}. \quad (2)$$

túrine iye boladı.

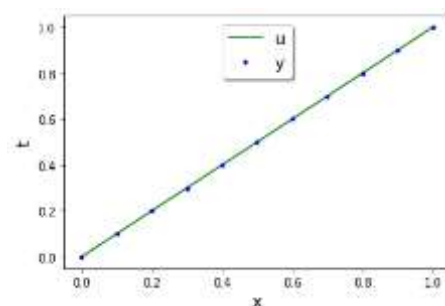
Keste. L_∞ normasındaǵı sxemanıń keńslik boyınsha jıynaqlılıq dárejesi

$h =$ 1/5	$\tau =$ 1/60	$\ z\ _{L_\infty}$	p_∞^h
h	τ	2.02E-05	-
$h/2^1$	$\tau/2^2$	6.04E-06	1.74513
$h/2^2$	$\tau/4^2$	1.55E-06	1.95579
$h/2^3$	$\tau/8^2$	3.92E-07	1.98903

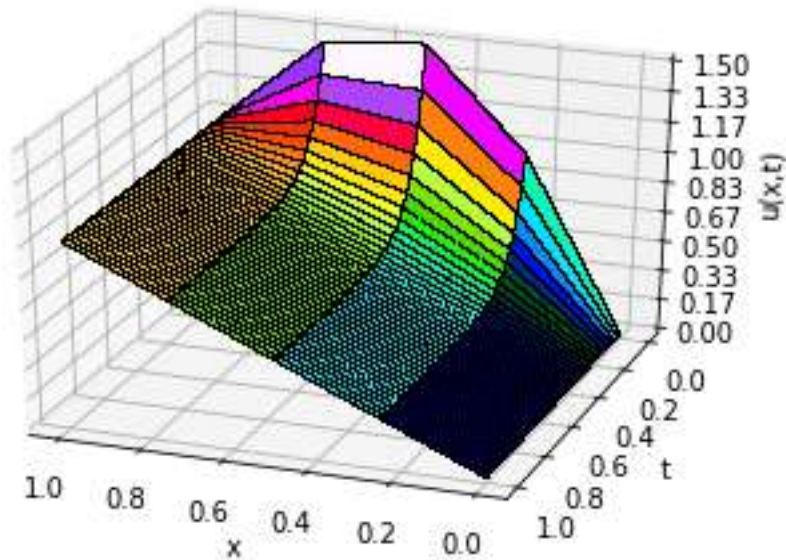
h = 1/5 ıı τ = 1/60



h = 1/10 ıı τ = 1/240



1-sızılma. Dál hám juwıq sheshimler: $T = 1, L = 1$



Python tilinde programması:

```
'''-----__import packages__-----
-----'''

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from math import exp,pi,sin

'''-----__right side data__-----
-----'''
#Right side data (kiriwshi magliwmatlar):
def phi(x):
    return sin(pi*x)+x
def miu1(t):
    return 0
def miu2(t,N,h):
    return sin(pi*N*h)*exp((-pi**2)*t)+N*h

'''-----__exact solution__-----
-----'''
#Exact solution (dal sheshim):
def u(x,t):
    return sin(pi*x)*exp((-pi)**2)*t)+x
```

```

def draw(x, yM_h, uh, N, M):

    fig, ax = plt.subplots()
    plt.xlabel('x', fontsize=16)
    plt.ylabel('t', fontsize=16)

    ax.plot(x, uh, 'g-', label='u')
    ax.plot(x, yM_h, 'b.', label='y')
    legend = ax.legend(loc='upper center', shadow=True,
        fontsize='x-large')

    plt.show()

def print_error(h, tau, uh, yM_h):

    N2 = len(yM_h)-1
    zh = np.zeros(N2+1)
    for i in range(N2+1):
        zh[i] = abs(uh[i]-yM_h[i])
    z = max(zh)

    file = open('experiment3_compare_h_tau_z.txt', 'a+')
    file.write(str(h)+'\t'+str(tau)+'\t\t'+str(z)+'\n')
    file.close()

def solution(x, t, h, tau, M, phi, miu1, miu2, N):

    gamma = tau/(h*h)

    y = np.zeros((N+1, M+1))
    #At first layer (birinshi qatlam, j = 0):
    for i in range(N+1):
        y[i][0] = phi(x[i])
    #At the ends of the string (shegaralar, i = 0 и i =
N):

        for j in range(M):
            y[0][j+1] = miu1(t[j+1])
            y[N][j+1] = miu2(t[j+1], N, h)
    #At another layers (shartten tis, j >= 2):

        for j in range(M):
            for i in range(1, N):

```

```

        y[i][j+1] = y[i][j]+gamma*(y[i+1][j]-
2*y[i][j]+y[i-1][j])
    yM_h = np.zeros(N+1)
    for i in range(N+1):
        yM_h[i] = y[i][M]
    print(yM_h)
    return yM_h

'''-----__main__-----
-----'''
if __name__=='__main__':

    x0 = 0
    L = 1
    T = 1 #time

    h = 1/5
    tau= 1/60
    gamma = tau/(h*h) #Courant number (Kuranta
san1)

#Grid (сетка):

    N = int((L-x0)/h)
    x = np.zeros(N+1)
    for i in range(N+1):
        x[i] = i*h

    M = int(T/tau)
    t = np.zeros(M+1)
    for j in range(M+1):
        t[j] = j*tau

#Exact solution (dal sheshim):
    uh = np.zeros(N+1)

    for i in range(N+1):
        uh[i] = u(x[i],t[M])
    print(uh)
#Approximate solutions (juwinq sheshim)B j0:

    yM_h = np.zeros(N+1)
    yM_h = solution(x,t,h,tau,M,phi,miu1,miu2,N)
#||z|| = max(|yN-uN|):

```


5	0.5	1.687555	1.842066	0.184207
6	0.6	1.871761	1.943573	0.194357
7	0.7	2.066119	2.024801	0.202480
8	0.8	2.268599	2.089474	0.208947
9	0.9	2.477546	2.141013	0.214101
10	1.0	2.691648		

D:\kitaplar\esaplaw usillari\U'LKEN RAXMET\Esaplaw usillari\...

*** I- TA'RTIPLI A'.D.T LAR USHIN QOYILG'AN ***

*** KOSHI MA'SELESIN EYLER USILI MENEN SHESHIW ***

i	xi	yi	f(xi,yi)	h*f(x,y)
0	0.0	1.000000	1.000000	0.100000
1	0.1	1.100000	1.200000	0.120000
2	0.2	1.220000	1.392157	0.139216
3	0.3	1.359216	1.566457	0.156646
4	0.4	1.515861	1.716935	0.171693
5	0.5	1.687555	1.842066	0.184207
6	0.6	1.871761	1.943573	0.194357
7	0.7	2.066119	2.024801	0.202480
8	0.8	2.268599	2.089474	0.208947
9	0.9	2.477546	2.141013	0.214101
10	1.0	2.691648		


```

    return y2;
}

```

I- TA'RTIPLI A'.D.T LAR USHIN QOYILG'AN KOSHI
MA'SELESIN JETILISTIRILGEN EYLER USILI MENEN SHESHIW

i	xi	yi	f(xi,yi)	xi+1/2	yi+1/2	f(x+1/2;y+1/2)
0	0.00	1.000000	1.000000	0.05	1.050000	1.100000
1	0.10	1.110000	1.198020	0.15	1.169901	1.294146
2	0.20	1.239415	1.384832	0.25	1.308656	1.472297
3	0.30	1.386644	1.552158	0.35	1.464252	1.628224
4	0.40	1.549467	1.695975	0.45	1.634265	1.759965
5	0.50	1.725463	1.816018	0.55	1.816264	1.868697
6	0.60	1.912333	1.914402	0.65	2.008053	1.957253
7	0.70	2.108058	1.994277	0.75	2.207772	2.028967
8	0.80	2.310955	2.058933	0.85	2.413902	2.087025
9	0.90	2.519658	2.111346	0.95	2.625225	2.134176
10	1.00	2.733075				

D:\kitaplar\esaplaw usillari\U'LKEN RAXMET\Esaplaw usillari\12-Eyler,Eyler-Koshi,Runge-kutta\Alex_Eyler_jetilistirilgen.exe

I- TA'RTIPLI A'.D.T LAR USHIN QOYILG'AN KOSHI
MA'SELESIN JETILISTIRILGEN EYLER USILI MENEN SHESHIW

i	xi	yi	f(xi,yi)	xi+1/2	yi+1/2	f(x+1/2;y+1/2)
0	0.00	1.000000	1.000000	0.05	1.050000	1.100000
1	0.10	1.110000	1.198020	0.15	1.169901	1.294146
2	0.20	1.239415	1.384832	0.25	1.308656	1.472297
3	0.30	1.386644	1.552158	0.35	1.464252	1.628224
4	0.40	1.549467	1.695975	0.45	1.634265	1.759965
5	0.50	1.725463	1.816018	0.55	1.816264	1.868697
6	0.60	1.912333	1.914402	0.65	2.008053	1.957253
7	0.70	2.108058	1.994277	0.75	2.207772	2.028967
8	0.80	2.310955	2.058933	0.85	2.413902	2.087025
9	0.90	2.519658	2.111346	0.95	2.625225	2.134176
10	1.00	2.733075				