

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BERDAQ NOMIDAGI QORAQALPOQ DAVLAT
UNIVERSITETI**

**Funksional analiz, algebra va geometriya
kafedrası**

Matematika fakulteti «Matematika» ta'lim
yo'nalishi 4-kurs talabasi

Kamalova Sevaraning

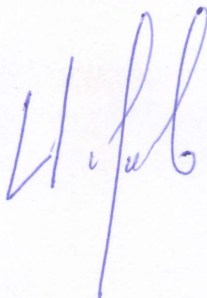
Evklid fazosida o'lchovli to'plamlar
mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Kafedra mudiri:

f.-m.f.d., prof. K.K.Kudaybergenov

Ilmiy rahbar:



f.-m.f.n., dots. M.M. Ibragimov

Nukus 2020

Mundarija

Kirish	3
1-§. Evklid fazosi va unga misollar	5
2-§. Evklid fazosida n -o'lchamli parallelepipedlar	18
3-§. Katakchalar yarim halqasi	27
4-§. Evklid fazosida Lebeg o'lchovi	32
Xulosa	38
Foydalanilgan adabiyotlar	39

Kirish

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi: Funksional analiz – matematik analiz, geometriya va chiziqli algebraning g'oya va usullarini cheksiz o'lchamli fazolar uchun umumlashtiruvchi fan hisoblanadi. Hozirgi kunda funksional analizning g'oya, konsepsiya, usul va tushunchalari matematikaning barcha sohalaridan tan olingan. So'nggi yillarda differensial tenglamalar, hisoblash usullari, matematik dasturlashning talab va ehtiyojlariga javoban funksional analizning yangi chiziqli bo'lmagan tarmog'i paydo bo'ldi.

Shu qatorda Evklid fazosi ham matematika va fizikaning turli sohalarida keng qo'llaniladi.

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi: Funksionalanaliz fanining muhim bo'limlaridan bo'lgan Evklid fazosi va xossalari, o'chamli to'plamlar, Evklid fazosida Lebeg o'lchovi va tadbiqlarini o'rganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining vazifasi:

1. Evklid fazo va skalyar ko'paytma tushunchasini o'rganish.
2. Evklid fazosining xossalarini, ortogonallashtirish jarayoni, Bessel tengsizligi va to'la Evklid fazolarini o'rganish.
3. Evklida fazosida n -o'lchamli parallelepipedlarni hamda katakchalar yarim halqasini o'rganish.
4. Evklida fazosida Lebeg o'lchovini o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiyligi va ilmiy ahamiyati. Bitiruv ishi mavzusiga oid barcha muhim bo'lgan adabiyotlarni to'plash va ular asosida chiziqli fazo, Evklid fazosi, o'lchovli to'plamlar, n -o'lchamli parallelepipedlar, katakchalar yarim halqasi, Lebeg o'lchovi va xossalri hamda tadbiqlari bilan tanishib, ular qo'llaniladigan sohalarni yanada chuqurroq o'rganishdan iborat.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, to'rtta paragraf, xulosa qismi hamda foydalanilgan adabiyotlar qismidan iborat.

Birinchi paragrafda Evklid fazosi va xossalari, skalyar ko'paytma tushunchasi, separabel Evklid fazosi, ortogonal sistema hamda ortogonallashtirish

jarayoni, Bessel tengsizligi, yopiq ortogonal sistema, To'la Evklid fazosi va Riss-Fisher teoremasi, Evklid fazosining xarakteristik xossalari keltirilgan.

Ikkinchi paragrafda n -o'lchamli parallelepiped tushunchasi va ta'rifi, cheksiz qirraga ega parallelepiped tushunchasi, parallelepipedning hajmi va uni hisoblash formulasi keltirilgan.

Uchinchi paragrafda n -o'lchamli katakcha tushunchasi va ta'rifi, katakchani – «chapdan yopiq» va «o'ngdan ochiq» parallelepiped deb ham aytish mumkinligi, katakchanning ayrim xossalari, R_n fazodagi barcha katakchalar to'plami yarim halqa bo'lishi kelib chiqishi keltirilgan.

To'rtinchi paragrafda Evklid fazosida Lebeg o'lchovi, o'lchovli to'plam tushunchasi va ta'rifi, R_n dagi har bir ochiq to'plamlar bilan yopiq to'plamlar o'lchovli bo'lishi haqida ma'lumotlar keltirilgan.

1-§. Evklid fazosi va unga misollar

Chiziqli fazolarda norma kiritishning usullaridan biri, unga skalyar ko'paytma kiritish bo'lib hisoblanadi.

Ta'rif 1.1. Bizga L haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rt shartni qanoatlantirsa, unga skalyar ko'paytma deyiladi:

- 1) $p(x, x) \geq 0, \forall x \in L; p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$
- 2) $p(x, y) = p(y, x), \forall x, y \in L;$
- 3) $p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y), \forall \alpha \in R, \forall x, y \in L;$
- 4) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in L,$

Ta'rif 1.2. Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi va x, y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x, y) orqali belgilanadi.

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (1.1)$$

formula orqali aniqlanadi. Bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Skalyar ko'paytmaning 1-4 shartlaridan normaning 1-2 shartlari to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (1.2)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Endi (1.2) tengsizlikni, ya'ni Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz. $\lambda \in R$ ning barcha qiymatlarida manfiy emas bo'lgan kvadrat uchhadni qaraymiz:

$$\phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2.$$

Bu kvadrat uchhadning diskriminanti musbat emas, ya'ni

$$D = 4[(x, y)]^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0.$$

Bundan

$$[(x, y)]^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2, \quad \text{ya'ni} \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Endi (1.1) norma uchun uchburchak aksiomasining bajarilishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Bundan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ tengsizlik kelib chiqadi.

Shuni aytib o'tish kerakki, Evklid fazosida yig'indi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari uzluksiz bo'lib hisoblanadi, ya'ni agar $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ (norma bo'yicha yaqinlashish ma'nosida), $\alpha_n \rightarrow \alpha$ (sonli ketma-ketlik sifatida) bo'lsa, u holda

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x, \quad (x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

bu tasdiqlarning isboti quyidagicha:

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \leq \|(\alpha - \alpha_n)x_n\| + \|\alpha(x_n - x)\| = \\ &= |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \leq \\ &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Evklid fazolarida faqatgina vektorning normasini emas (ya'ni uzunligini), balki vektorlar orasidagi burchak tushunchasini ham kiritish mumkin. Noldan farqli x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (1.3)$$

formula bilan aniqlanadi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra (1.3) formulaning o'ng tomoni moduli bo'yicha birdan oshmayni hamda (1.3) formula nolga teng emas x va y vektorlar orasidagi φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$ burchakni bir qiymatli aniqlaydi.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, unda x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

Ta’rif 1.3. Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ bo’lsa, unda nolga teng emas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holatda har bir elementning normasi birga teng bo’lsa, $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.

Agar $\{x_\alpha\}$ vektorlar ortogonal sistemani hosil qilsa, unda $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog’liqsiz bo’ladi. Haqiqatdan ham,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$$

bo’lsin. Bu tenglikning ikki qismini x_i ga skalyar ko’paytirib, quyidagiga ega bo’lamiz

$$(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_i (x_i, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$(x_i, x_i) \neq 0$ bo’lgani uchun, barcha $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ larda $\alpha_i = 0$ bo’ladi.

Ta’rif 1.4. Agar $\{x_\alpha\}$ sistemani o’zida saqllovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o’ziga teng bo’lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to’la deyiladi.

Ta’rif 1.5. Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to’la bo’lsa, unda bu sistema E fazodagi ortonormal (ortogonal normalangan) bazis deyiladi.

Bizga ma’lum, agar $\{x_\alpha\}$ - ortogonal sistema bo’lsa, unda

$$\left\{ \|x_\alpha\|^{-1} \cdot x_\alpha \right\}$$

ortonormal sistema bo’ladi.

Misol 1.1. $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}$ - n o’lchamli Evklid fazosi.

Bu fazoda skalyar ko’paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Bu fazoda $\{e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)\}_{k=1}^n$ vektorlar sistemasi ortonormal bazisni tashkil qiladi.

Misol 1.2. Kvadrati bilan yaqinlashuvchi ketma-ketliklar fazosi, ya’ni ℓ_2 ni qaraymiz. Bu fazoda skalyar ko’paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

ℓ_2 fazoda ortonormal bazis sifatida $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektorlar sistemasini olish mumkin.

Misol 1.3. $C_2[a, b]$ fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (1.4)$$

Bu fazoda ortogonal (normalanmagan) bazisga

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi n t}{b-a}, \sin \frac{2\pi n t}{b-a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

funksiyalardan tashkil topgan trigonometrik sistema misol bo'ladi.

Misol 1.4. $L_2[a, b]$ fazoda ham f va g elementlarning skalyar ko'paytmasi (1.4) tenglik bilan aniqlanadi.

Ta'rif 1.6. Agar E Evklid fazosining hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, E separabel Evklid fazosi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan R^n , ℓ_2 , $C_2[a, b]$ va $L_2[a, b]$ fazolar (1.1-1.4 misollarda) separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi. Har qanday separabel Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema ko'pi bilan sanoqli bo'ladi.

Teorema 1.1. (Ortogonalashtirish jarayoni). Bizga E Evklid fazosida chiziqli bog'liqsiz

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (1.5)$$

elementlar sistemasi berilgan bo'lsin. Unda E Evklid fazosida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots \quad (1.6)$$

sistema mavjud:

1) (1.6) ortonormal sistema.

2) Har bir ϕ_n element $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n, \quad a_{nn} > 0;$$

3) har bir f_n element

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \dots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} > 0$$

ko'rinishda tasvirlanadi.

4) (1.6) sistemaning har bir elementi 1-3 shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Isboti. ϕ_1 element $a_{11}f_1$ ko'rinishda izlanani va a_{11}

$$(\phi_1, \phi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1$$

shartdan aniqlanadi. Bu yerdan

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} = \frac{1}{\|f_1\|} > 0.$$

ko'rinishda turibdi, ϕ_1 bir qiymatli aniqlanadi. Mayli 1)-3) shartlarni qanoatlantiruvchi $\phi_k, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ elementlar yasalgan bo'lsin deb faraz qilaylik. Quyidagi

$$\psi_n = f_n - (f_n, \phi_1)\phi_1 - (f_n, \phi_2)\phi_2 - \dots - (f_n, \phi_{n-1})\phi_{n-1}$$

elementni kiritamiz. Ko'rsatish mumkinki, agar $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ bo'lsa, $(\psi_n, \phi_k) = 0$ bo'ladi. $(\psi_n, \psi_n) = 0$ tenglik (1.5) sistemaning chiziqli erkli ekanligiga zid, shuning uchun $(\psi_n, \psi_n) > 0$. Endi

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}}$$

deymiz. ψ_n vektorning yasaliishiga ko'ra u $f_1, f_2, \dots, f_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi va demak, ϕ_n ham ularning chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n, \quad \text{bu yerda} \quad a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}} > 0$$

Bundan tashqari $(\phi_n, \phi_n) = 1, (\phi_n, \phi_k) = 0, (k < n)$ va

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \dots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} = a_{nn}^{-1} = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)} > 0,$$

ya'ni ϕ_n teorema shartlarini qanoatlantiradi. Δ

(1.5) sistemadan 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi (1.6) sistemaga o'tish ortogonallashtirish jarayoni deyiladi. Ko'rinib turibdiki, (1.5) va (1.6) sistemalardan paydo bo'lgan qism fazolar ustma-ust tushadi. Bundan bu sistemalar bir vaqtda to'la yoki to'la emas ekanligi kelib chiqadi.

Natija 1.1. Har qanday separabel Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

Isboti. ϕ_n - E Evklid fazosining hamma yerida zich sanoqli to'plam bo'lsin. Undan chiziqli bog'langan elementlarni chiqarib tashlab, qolgan $\{f_n\}$ sistemaga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal bazisni hosil etamiz. Δ

Bessel tengsizligi. Yopiq ortogonal sistema. Bizga n - o'lchamli E Evklid fazosi va uning $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal bazisi berilgan bo'lsin. Unda ixtiyoriy $x \in E$ elementni

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k \quad (1.7)$$

yoyilma ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $c_k = (x, e_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bu yoyilmani cheksiz o'lchamli Evklid fazolari uchun qanday umumlashtirish mumkinligini ko'rib chiqamiz. Bizga E Evklid fazosining

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots \quad (1.8)$$

ortonormal sistemasi va $f \in E$ ixtiyoriy elementi berilgan bo'lsin. f elementga

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k=1, 2, \dots, n, \dots \quad (1.9)$$

sonlar ketma-ketligini mos qo'yamiz va c_k sonlar f elementning koordinatalari yoki $\{\phi_n\}$ sistemadagi Fure koefitsiyentlari deyiladi.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \quad (1.10)$$

formal qator esa f elementning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema bo'yicha Fure qatori deyiladi.

Quyidagicha savol tug'iladi. (1.10) qator yaqinlashuvchimi? Ya'ni qatorning qisman yig'indilari ketma-ketligi

$$\sum_{k=1}^n c_k \phi_k = f_n$$

biror elementga yaqinlashadimi? Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, unda (1.10) qatorning yig'indisi f ga teng bo'ladimi?

Bu savollarga javob berish uchun quyidagi masalani qaraymiz. Berilgan n natural son uchun $\alpha_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ koeffitsiyentlarni shunday tanlash kerakki, f va

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \quad (1.11)$$

yig'indi orasidagi $\|f - S_n\|$ masofa minimal bo'lsin. Bu masofa kvadratini hisoblaymiz. (1.8) ortonormal sistema bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \right) = (f, f) - \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, f \right) + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j \right) = (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (f, \phi_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^n c_k^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2. \end{aligned}$$

Bu ifoda

$$\alpha_k = c_k, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.12)$$

bo'lgan holda minimumga erishadi. Bu holda

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2. \quad (1.13)$$

Biz quyidagini isbotladikki, (1.11) ko'rinishidagi yig'indilar ichida f elementdan Fure qatorining

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$$

qism yig'indisi eng kam uzoqlashar ekan.

Bu tasdiqning geometrik ma'nosi shundan iboratki,

$$f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$$

vektor $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vektorlarning barcha chiziqli kombinatsiyalariga ortogonal, ya'ni $f - S_n$ element $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vektorlardan hosil bo'lgan qism fazoga ortogonal bo'lishi uchun (1.12) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$\|f - S_n\|^2 \geq 0$ bo'lgani uchun (1.13) tenglikga ko'ra

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in N$ uchun o'rinli, shunday ekan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

qator yaqinlashuvchi va

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.14)$$

So'nggi (1.14) tengsizlik Bessel tengsizligi deyiladi.

Ta'rif 1.7. Agar ixtiyoriy $f \in E$ uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \quad c_k = (f, \phi_k) \quad (1.15)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema yopiq sistema deyiladi. (1.15)

tenglik Parseval tengligi deyiladi.

(1.13) tenglikdan $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemaning yopiq bo'lishi uchun,

har bir $f \in E$ da $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ Fure qatorining qism yig'indilar ketma-ketligi

f elementga yaqinlashishi zarur ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 1.2. Separabel Evklid fazosida har qanday to'la ortonormal sistema yopiq va aksincha.

Isboti. E dan olingan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistemani qaraymiz. Ixtiyoriy $f \in E$ uchun $c_k = (f, \phi_k)$, $k=1, 2, \dots, n, \dots$ Fure koeffitsiyentlarini olamiz. $\{\phi_n\}$ sistema to'la bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ shunga ko'ra, shunday $\sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k$ chekli yig'indi mavjud bo'lib,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $n \geq N$ bo'lganda

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N c_k^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon.$$

Olingan bu munosabatlardan

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Parseval tengligi kelib chiqadi, ya'ni $\{\phi_n\}$ sistema yopiq ekan.

Endi $\{\phi_n\}$ - E dan olingan ixtiyoriy yopiq ortonormal sistema bo'lsin.

$f \in E$ vektor qanday bo'lmasin, uning Fure qatori $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ ning qisman yig'indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashadi, chunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \right) = 0.$$

Shuning uchun $\{\phi_n\}$ - sistemaning barcha chekli kombinatsiyalari to'plami E ning hamma yerida zich bo'ladi. Ya'ni $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema bo'ladi. Δ

To'la Evklid fazolari. Riss-Fisher teoremasi. Bizni asosan to'la Evklid fazolari qiziqtiradi.

Ta'rif 1.8. E Evklid fazosi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazosi deyiladi.

Misol 1.6. $C_2[a, b]$ to'la bo'lmagan separabel Evklid fazosi bo'ladi.

Misol 1.7. ℓ_2 va $L_2[a, b]$ to'la separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi.

E - to'la separabel Evklid fazosi va $\{\phi_n\}$ - undagi ortonormal sistema (to'la bo'lishi shart emas) bo'lsin. Bessel tengsizligidan kelib chiqadiki, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar biror f elementning Fure koeffitsiyentlari bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \quad (1.16)$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur.

To'la Evklid fazolarida bu shart yetarli ham ekan.

Teorema 1.3. (Riss-Fisher). $\{\phi_n\}$ - E to'la Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema va $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar shunday bo'lsin, (1.16) qator yaqinlashsin. U holda shunday $f \in E$ element mavjud,

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k=1, 2, \dots, n, \dots \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isboti. E to'la Evklid fazosida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k.$$

(1.16) qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon) > 0$ mavjudki, barcha $n > n(\varepsilon)$ va $p \in N$ larda

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\phi_{n+1} + \dots + c_{n+p}\phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni $\{f_n\}$ - fundamental ketma-ketlik. E ning to'laligiga ko'ra $\{f_n\}$ ketma-ketlik biror $f \in E$ elementga yaqinlashadi. Ixtiyoriy $i \in N$ uchun

$$(f, \phi_i) = (f_n, \phi_i) + (f - f_n, \phi_i), \quad (1.17)$$

tenglik o'rinli. (1.17) ning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $n \geq i$ da c_i ga teng, ikkinchi qo'shiluvchi esa $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, chunki

$$\|(f - f_n, \phi_i)\| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\phi_i\| = \|f - f_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(1.17) tenglikning chap tomoni n ga bog'liq emas, shuning uchun $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$(f, \phi_i) = c_i.$$

f ning aniqlanishiga ko'ra,

$$\|f - f_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2. \quad \Delta$

Ortogonal sistemaning to'laligi haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 1.4. To'la separabel Evklid fazosidagi $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lishi uchun, E da $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan nolga teng emas elementning mavjud bo'lmasligi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi. Mayli $\{\phi_n\}$ to'la sistema bo'lsin deb faraz qilaylik, u holda 1.2-teoremaga ko'ra u yopiq ham bo'ladi. Agar f element $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, unda uning barcha Fure koeffitsiyentlari nolga teng, ya'ni $c_n = 0$ bo'ladi. Unda Parseval tengligiga ko'ra, $(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, ya'ni $f = \theta$.

Yetarliligi. Aksincha faraz qilaylik, $\{\phi_n\}$ to'la bo'lmagan sistema bo'lsin, ya'ni E da shunday $g \neq \theta$ element mavjud bo'lib,

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad \text{bu yerda} \quad c_k = (g, \phi_k)$$

tengsizlik bajarilsin. Riss-Fisher teoremasiga asosan, shunday $f \in E$ element mavjudki,

$$(f, \phi_k) = c_k, \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

tengliklar o'rinli. Bu holda $f - g$ element barcha ϕ_k larga ortogonal bo'ladi.

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

tengsizlikdan $f - g \neq \theta$ ekanligi kelib chiqadi. Δ

Misol 1.8. $L_2[-\pi, \pi]$ Evklid fazosida $\{\psi_n(t) = \pi^{-1/2} \cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistema to'la bo'ladimi?

Yechilishi. $\{\psi_n\}$ larning barchasiga ortogonal bo'lgan $f_0(t) = 1$ nolga teng emas element mavjud. Shuning uchun, 1.4-teoremaga ko'ra $\{\psi_n\}$ sistema to'la emas.

Evklid fazolarining xarakteristik xossalari. Quyidagicha savollarni qaraymiz. R - normalangan fazo bo'lsin. R da aniqlangan norma qanday qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsa, R - Evklid fazosi ham bo'ladi? Boshqacha aytganda, qanday shartlarda norma orqali unga mos skalyar ko'paytma kiritish mumkin?

Teorema 1.5. R normalangan fazo Evklid fazosi bo'lishi uchun, ixtiyoriy ikki $f, g \in R$ elementlar uchun

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \quad (1.18)$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi. $f + g$ va $f - g$ tomonlari f va g vektorlardan iborat parallelogramm diagonallari bo'ladi. (1.18) tenglik Evklid fazosidagi parallelogrammning ma'lum xossasini ifodalaydi, ya'ni parallelogramm

diagonallari kvadratlarining yig'indisi barcha tomonlari kvadratlarining yig'indisiga teng.

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 &= (f + g, f + g) + (f - g, f - g) = \\ &= 2(f, f) + 2(g, g) = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.\end{aligned}$$

Yetarliligi. R normalangan fazoda normaning (1.18) ayniyatidan foydalanib, R da skalyar ko'paytma kiritish mumkinligini ko'rsatish yetarli. Ixtiyoriy $f, g \in R$ elementlar uchun

$$(f, g) = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) \quad (1.19)$$

deymiz. Shuni ko'rsatish mumkin, agar (1.18) tenglik bajarilsa, (1.19) tenglik yordamida aniqlangan funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradi.

Δ

2-§. Evklid fazosida n -o'lchamli parallelepipedlar

Mayli bizga a_i hamda b_i haqiqiy sonlarning n dona juftligi berilgan bo'lsin. Bu sonlar har bir i uchun $a_i < b_i$ tengsizligini qanoatlantirsin. Bunda bu sonlardan ayrimlari uchun $a_i = -\infty$ yoki $b_i = +\infty$ bo'lishi mumkin.

Ta'rif 2.1. Koordinatalari $a_i < x_i < b_i$, $(i = \overline{1, n})$ tengsizliklarini qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$ nuqtalar to'plami Δ_0 ochiq n -o'lchamli parallelepiped deb ataladi.

Ta'rif 2.2. Koordinatalari $a_i \leq x_i \leq b_i$, $(i = \overline{1, n})$ tengsizliklarini qanoatlantiruvchi barcha $x \in R^n$ nuqtalar to'plami Δ^* -yopiq n -o'lchamli parallelepiped deyiladi.

R^n fazosidagi metrika bo'yicha yopiq parallelepiped – yopiq to'plam, ochiq parallelepiped esa ochiq to'plam bo'ladi. Ochiq parallelepiped – Δ^* yopiq parallelepipedning barcha ichki nuqtalarini tashkil etishi hamda $\Delta^* = \overline{\Delta_0}$ ekanligi aniq ko'rinadi.

Ta'rif 2.3. Ochiq Δ_0 – n o'lchamli parallelepipedi va uning ayrim chegaraviy nuqtalaridan hosil bo'lgan Δ to'plami n -o'lchamli parallelepiped deyiladi.

Demak, Δ parallelepipedi $\Delta_0 \subset \Delta \subset \Delta^*$ munosabatini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy to'plam bo'lishi mumkin. Δ parallelepipedning ham barcha ichki nuqtalari to'plami Δ_0 bilan mos keladi.

Agar $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$ bo'lsa, unda Δ parallelepipedni chekli qirrali parallelepiped deyiladi. Agar a_i yoki b_i larning hech bo'lmaganda bittasi ∞ ga teng bo'lsa, u holda Δ parallelepiped cheksiz qirraga ega parallelepiped deyiladi.

Berilgan Δ parallelepiped uchun quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\Delta = \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n \rangle$$

yoki qisqacha $\Delta = \langle a, b \rangle$.

Agar Δ parallelepiped ochiq bo'lsa, unda

$$\Delta = (a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$$

yoki qisqacha $\Delta = (a, b)$ ko'rinishida belgilaymiz. Agar Δ parallelepiped yopiq bo'lsa, unda

$$\Delta = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n]$$

yoki qisqacha $\Delta = [a, b]$ deb belgilaymiz.

Bir o'lchamli holatda, berilgan Δ parallelepiped $\langle a, b \rangle$ masofa bilan mos keladi, bu masofa ochiq bo'lishi ham mumkin, yopiq bo'lishi ham mumkin, yarim yopiq bo'lishi ham mumkin. Bu $\langle a, b \rangle$ belgilashni masofaning ochiq yoki yopiq ekanligi talab qilinmaydigan barcha holatda qo'llanamiz.

Ikki parallelepiped umumiy nuqtaga ega bo'lmasa unda bu parallelepipedlar diz'yunk yoki kesishmaydi deb ataladi. Agar ikki parallelepiped umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmasa, u holda ular o'zaro ichlari kesishmaydi deyiladi. Masalan, to'g'ri chiziqda $[1;2]$ va $[2;3]$ kesmalar o'zaro ichlari kesishmaydi, biroq o'zlari to'plam sifatida kesishadi.

Agar ikki parallelepiped o'zaro ichlari kesishsa, u holda ularning kesishmasi ham parallelepiped bo'lishi aniq ko'rinadi. Shu bilan birga, agar ikki ochiq parallelepiped kesishsa, unda ular o'zaro ichlari kesishadiganligi aniq ko'rinadi.

$\Delta = \langle a, b \rangle$ parallelepipedni to'rli bo'laklarga bo'lish tushunchasini qaraymiz. Mayli har bir $\langle a_i, b_i \rangle$ oraliq

$$a_i = a_{i0} < a_{i1} < \dots < a_{ik_i} = b_i \quad (2.1)$$

nuqtalari bilan chekli sondagi o'zaro ichlari kesishmaydigan oraliqlarga bo'lingan bo'lsin.

Quyidagi

$$\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n} = \langle a_1^{(j_1)}, a_1^{(j_1+1)}; \dots; a_n^{(j_n)}, a_n^{(j_n+1)} \rangle \quad (2.2)$$

parallelepipedlarni tuzamiz, bu yerda j_i indekslar 0 dan $k_i - 1$ gacha ixtiyoriy qiymatlar qabul qilishi mumkin (bu parallelepipedlar ochiq bo'lishi ham yopiq bo'lishi ham mumkin). Bu parallelepipedlar soni $k_1 k_2 k_3 \dots k_n$ parallelepiped bo'ladi.

Yuqoridagi (2.2) parallelepipedlar Δ parallelepipedning to'rli bo'linishi deyiladi.

(2.2) parallelepipedlar ichlari kesishmaydi, biroq umumiy chegaraviy nuqtalarga ega bo'lishi mumkin.

Uch o'lchamli fazodagi parallelepiped hajmini umumiy lashtirib quyidagi ta'rifni kiritamiz:

Ta'rif 2.4.

$$\Delta = \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n \rangle \quad (2.3)$$

parallelepipedning hajmi deb

$$v\Delta = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ko'paytmaga aytiladi.

Agar parallelepipedda cheksiz qirra bor bo'lsa, unda yuqoridagi ko'paytma $+\infty$ ga teng deb qabul qilinadi.

Bir o'lchamli fazodagi parallelepiped – bu oraliq bo'lib, uning hajmi uzunlikka mos keladi.

Agar (2.2) parallelepipedlar (2.3) parallelepipedning to'rtli bo'linishi bo'lsa, unda hajmning aniqlanishidan

$$v\Delta = \sum_{j_1=0}^{k_1-1} \sum_{j_2=0}^{k_2-1} \dots \sum_{j_n=0}^{k_n-1} v\Delta_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \quad (2.4)$$

ekanligi kelib chiqadi. Agar $v\Delta = +\infty$ bo'lsa, unda (2.2) parallelepipedlardan hech bo'lmaganda bittasining hajmi $+\infty$ bo'ladi.

Lemma 2.1. Agar Δ parallelepiped o'zaro ichlari kesishmaydigan Δ_k parallelepipedlarning chekli sondagi birikmasi $\Delta = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k$ ko'rinishida bo'lsa, unda

$$v\Delta = \sum_{k=1}^p v\Delta_k$$

bo'ladi.

Isboti. Mayli Δ parallelepiped (2.3) ko'rinishda bo'lsin, hamda

$$\Delta_k = \langle c_1^{(k)}, d_1^{(k)}; c_2^{(k)}, d_2^{(k)}; \dots; c_n^{(k)}, d_n^{(k)} \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

Endi Δ parallelepipedni (2.2) ko'rinishdagi shunday to'rtli bo'linishni tuzamiz, bu bo'linish barcha Δ_k lar uchun ham to'rtli bo'linish bo'lsin.

Buning uchun har bir i da $c_i^{(k)}$ va $d_i^{(k)}$ sonlarini o'suvchi ketma-ketlik ko'rinishida joylashtirib chiqish yetarli. (2.1) ko'rinishdagi ketma-ketlik hosil bo'lib, bunda har bir $\langle a_i, b_i \rangle$ oraliq chekli sondagi bo'laklarga ajraladi.

Bu bo'linishlar yordamida yasaladigan (2.2) parallelepipedlar talab etilgan shartlarni qanoatlantiradi.

(2.2) parallelepipedlar orasidan Δ_k parallelepiped uchun to'rtli bo'linishni tuzuvchilarining to'plamini (sistemasini) T_k bilan belgilaymiz. (2.2)

parallelepipedlardan har bittasi T_k larning bittasiga va faqat bittasiga tegishli bo'ladi. Unda (2.4) formula bo'yicha

$$v\Delta = \sum_{k=1}^p \sum_{\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n} \in T_k} v\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{k=1}^p v\Delta_k$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Lemma 2.2. Agar $\Delta_k (k = \overline{1, p})$ parallelepipedlar o'zaro ichlari kesishmaydigan bo'lib Δ parallelepipedda yotsa, ya'ni $\bigcup_{k=1}^p \Delta_k \subset \Delta$, u holda

$$\sum_{k=1}^p v\Delta_k \leq v\Delta \quad (2.5)$$

munosabati o'rinli bo'ladi.

Bu lemmaning isboti oldingisiga o'xshash bo'ladi: Δ parallelepiped uchun to'rtli bo'linish bo'lgan shunday (2.2) parallelepipedlarni quramiz, bular bir vaqtning o'zida barcha Δ_k lar uchun to'rtli bo'linish bo'lsin. Hozir $c_i^{(k)}$ hamda $d_i^{(k)}$ larning hech biri a_i hamda b_i larga teng bo'lmasliklar mumkin. $\langle a_i, b_i \rangle$ oraliqni bo'luvchi nuqtalar ketma-ketligini tuzgan vaqtda barcha $c_i^{(k)}$ hamda $d_i^{(k)}$ larga a_i hamda b_i larni qo'shish (kirgizish) kerak.

Mayli T_k yuqoridagi lemmadagidek qiymatga ega bo'lsin. Unda (2.2) parallelepipedlarning har biri faqat bir T_k ga tegishli bo'lishi mumkin, biroq (2.2) ning o'rtalari (sirti) hech bir T_k ga tegishli bo'lmaydi. Shuning uchun

$$v\Delta \geq \sum_{k=1}^p \sum_{\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n} \in T_k} v\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{k=1}^p v\Delta_k$$

munosabati o'rinli bo'ladi.

Lemma 2.3. Agar Δ va $\Delta_k (k = \overline{1, p})$ parallelepipedlar uchun $\Delta \subset \sum_{k=1}^p \Delta_k$ bo'lsa, unda

$$v\Delta \leq \sum_{k=1}^p v\Delta_k \quad (2.6)$$

tengsizligi o'rinli bo'ladi. (Bu yerda Δ_k parallelepipedlarning ichlari o'zaro kesishishi mumkin).

Isboti. Lemmaning shartini buzmasdan Δ parallelepipedni ochiq deb hisoblaymiz. Shuning bilan birga har bir Δ_k lar Δ bilan kesishadi deb hisoblash mumkin (demak, Δ bilan ichlari kesishmaydi).

Quyidagi $\Delta'_k = \Delta_k \cap \Delta$, $k = \overline{1, p}$ parallelepipedni kiritamiz. Unda $\Delta = \bigcup_{k=1}^p \Delta'_k$

bo'ladi. Endi oldingi lemmalarning isbotidagiga o'xshash Δ uchun shunday (2.2) ko'rinishdagi to'rtli bo'linish tuzamiz, bir vaqtda barcha Δ'_k lar uchun ham to'rtli bo'linishga ega bo'laylik. Agar T_k sistemasi – (2.2) parallelepipedlarning orasidan Δ'_k parallelepipedini uchun to'rtli bo'linish tuzuvchi parallelepipedlar sistemasi bo'lsa, unda (2.2) parallelepipedlarning har biri T_k larning bittasida yotadi, biroq bir necha T_k larda yotishi ham mumkin.

Shuning uchun (2.4) formula bo'yicha

$$v\Delta \leq \sum_{k=1}^p \sum_{\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n} \in T_k} v\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{k=1}^p v\Delta'_k \leq \sum_{k=1}^p v\Delta_k$$

munosabatiga ega bo'lamiz.

Eslatma. Chekli qirrali parallelepipedlarga to'xtalamiz. Hajmning formulasidan $v\Delta = a_i$ va b_i larning uzluksiz funksiyasi. Agar a'_i, a''_i, b'_i, b''_i sonlari

$$a'_i < a_i < a''_i < b''_i < b_i < b'_i \quad (2.7)$$

berilib $\Delta' = (a', b')$ ochiq parallelepiped va $\Delta'' = [a'', b'']$ yopiq parallelepiped bo'lsa, unda

$$\Delta'' \subset \Delta \subset \Delta' \quad (2.8)$$

nisbati o'rinli bo'ladi.

Mayli biror $\varepsilon > 0$ soni berilgan bo'lsin. Unda hajmning uzluksizligidan a'_i va a''_i sonlarini a_i ga juda yaqin qilib olish mumkin. b'_i va b''_i larni esa b_i ga juda yaqin qilib olish mumkin. Bunda (2.7) tenglik saqlanadi hamda

$$v\Delta' < v\Delta + \varepsilon, \quad v\Delta'' > v\Delta - \varepsilon \quad (2.9)$$

nisbatlari o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy chekli qirrali Δ parallelepiped va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun (2.8) va (2.9) nisbatlarini qanoatlantiruvchi ochiq $\Delta' \supset \Delta$ va yopiq $\Delta'' \subset \Delta$ parallelepipedlarini olish mumkin ekan.

Lemma 2.4. Agar Δ parallelepiped o'zaro ichlari kesishmaydigan parallelepipedlarning sanoqli sondagi birikma ko'rinishida yozilsa, ya'ni $\Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ unda

$$v\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k \quad (2.10)$$

tengligi o'rinli bo'ladi.

Isboti. Lemma 2.2 bo'yicha, ixtiyoriy chekli p uchun (2.5) tengsizligi o'rinli bo'ladi. Bundan $p \rightarrow \infty$ bo'lganda

$$\sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k \leq v\Delta \quad (2.11)$$

nisbatiga ega bo'lamiz.

Bunga qarama-qarshi tengsizlikni $v\Delta_k < +\infty$ bo'lgan holatda ko'rsatish yetarli, sababi agar $v\Delta_k = +\infty$ tengligi biror k uchun o'rinli bo'lsa, unda (2.11) tengsizlik (2.10) tenglikga aylanadi.

Mayli $v\Delta_k < +\infty$ bo'lsin. $\varepsilon > 0$ uchun shunday yopiq $\Delta'' \subset \Delta$ parallelepiped va ochiq $\Delta'_k \supset \Delta_k$ ($k = 1, 2, \dots$) parallelepipedlarini olamiz, ular uchun

$$v\Delta'' > v\Delta - \varepsilon, \quad v\Delta'_k < v\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (2.12)$$

nisbatlar o'rinli bo'lsin.

Δ'_k parallelepipedlari Δ'' parallelepipedi uchun qoplama bo'ladi. Bu qoplamadan Borel-Lebeg teoremasi bo'yicha $\Delta'' \subset \Delta'_{k_1} \cup \dots \cup \Delta'_{k_p}$ chekli qoplama ajratib olish mumkin. Unda lemma 2.3 bo'yicha

$$v\Delta'' \leq v\Delta'_{k_1} + \dots + v\Delta'_{k_p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta'_k$$

bo'ladi. Bundan (2.12) bo'yicha

$$v\Delta < v\Delta'' + \varepsilon < \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k + 2\varepsilon$$

kelib chiqadi, ε sonining ixtiyoriy bo'lishidan esa

$$v\Delta \leq \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k \quad (2.13)$$

tengsizligi kelib chiqadi. Natijada (2.11) va (2.13) tengsizliklardan (2.10) tengligiga ega bo'lamiz.

Mayli endi $v\Delta = +\infty$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soniga mos yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi Δ'_k ochiq parallelepipedlarini olamiz. Ixtiyoriy N natural sonini olamiz. Δ parallelepipedning cheksiz qirrasini yetarlicha katta chekli qirraga almashtirib va boshqa qirralarini yetarlicha kichraytirib, shunday yopiq $\Delta'' \subset \Delta$ parallelepiped hosil etish mumkin, $v\Delta'' > N$ o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagiga o'xshash, Borel-Lebeg teoremasi bo'yicha $v\Delta'' < \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta'_k$

tengsizligiga ega bo'lamiz, bundan $N < \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k + \varepsilon$ kelib chiqadi. Unda ε va N

larning ixtiyoriy bo'lganligidan $\sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k = +\infty$ ekanligi aniq ko'rinadi, demak (2.10)

tengligi o'rinli.

Keltirilgan lemma 2.1 va lemma 2.4 lardan v ning o'zgaruvchisi Δ bo'lgan sanoqli-additiv funksiya ekanligi kelib chiqadi. Biroq u o'lchov emas, sababi parallelepipedlar yarim halqa hosil qilmaydi.

3-§. Katakchalar yarim halqasi

Evklid fazosida o'lchov tushunchasini kiritish uchun parallelepipedning maxsus turi foydalaniladi.

Ta'rif 3.1. $\Delta = \langle a, b \rangle$ parallelepipedining barcha x nuqtalarining koordinatalari

$$a_i \leq x_i < b_i \quad (i = \overline{1, n})$$

tengsizliklarini qanoatlantirsa, unda bu parallelepipedni n -o'lchamli katakcha deb ataymiz.

Katakcha uchun quyidagicha ham belgilash kiritamiz:

$$\Delta = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$$

yoki qisqacha $\Delta = [a, b)$ ko'rinishida.

Katakchani – «chapdan yopiq» va «o'ngdan ochiq» parallelepiped deb ham aytish mumkin. Bir o'lchamli fazoda katakcha chapdan yopiq o'ngdan ochiq yarim interval bo'ladi.

Katakchaga bo'sh to'plamni ham qo'shamiz. Bo'sh katakchanning hajmini nolga teng deb qaraymiz.

Katakchanning ayrim xossalarini keltiramiz.

a) Ixtiyoriy ikki katakchanning kesishmasi yana katakcha bo'ladi.

Isboti. Haqiqatdan ham, agar $\Delta_1 = [a, b)$, $\Delta_2 = [c, d)$ bo'lsa, unda $\Delta_1 \cap \Delta_2$ kesishma bo'sh to'plam bo'ladi yoki $\Delta_1 \cap \Delta_2 = [\alpha, \beta)$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\alpha_i = \max\{a_i, c_i\}$, $\beta_i = \min\{b_i, d_i\}$, $i = \overline{1, n}$.

b) Ikki katakchanning $\Delta_1 \setminus \Delta_2$ ayirmasi chekli sondagi diz'yunkt katakchalarning birikmasi turida yoziladi.

Isboti. Ikki katakcha uchun $\Delta_1 \setminus \Delta_2 = \Delta_1 \setminus (\Delta_1 \cap \Delta_2)$ tengligi o'rinli bo'lganligidan $\Delta_2 \subset \Delta_1$ deb hisoblash mumkin. Shu bilan birga $\Delta_2 \neq \emptyset$ deb hisoblash mumkin.

Agar $n=1$ bo'lsa, unda ikki yarim intervallarning ayirmasi yarim interval bo'lishi yoki ikki yarim intervalning birikmasi yarim interval bo'lishi, yoki bo'sh to'plam bo'lishi aniq ko'rinadi. Aytaylik berilgan tasdiq $(n-1)$ -o'lchamli katakcha uchun o'rinli bo'lsin, unda n o'lchamli katakcha uchun ham o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

agar $\Delta' - (n-1)$ -o'lchamli katakcha va $a_n < b_n$ bo'lsa, unda $\Delta' \times [a_n, b_n)$ orqali $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \Delta'$ va $a_n \leq x_n \leq b_n$ shartlarini qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ elementlaridan iborat n o'lchamli katakchani belgilaymiz.

Mayli n o'lchamli $\Delta_1 = [a, b)$, $\Delta_2 = [c, d)$ katakchalar berilgan bo'lsin. Agar $a_n = c_n$, $b_n = d_n$ bo'lsa, unda $(n-1)$ o'lchamli

$$\Delta'_1 = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n-1}, b_{n-1})$$

$$\Delta'_2 = [c_1, d_1; c_2, d_2; \dots; c_{n-1}, d_{n-1})$$

katakchalarini aniqlab Δ_1 va Δ_2 katakchalarni

$$\Delta_1 = \Delta'_1 \times [a_n, b_n), \quad \Delta_2 = \Delta'_2 \times [a_n, b_n)$$

ko'rinishida ifodalashga bo'ladi.

Bundan $\Delta_1 \setminus \Delta_2 = (\Delta'_1 \setminus \Delta'_2) \times [a_n, b_n)$ tengligi aniq ko'rinadi. Induktiv faraz bo'yicha $\Delta'_1 \setminus \Delta'_2 = \bigcup_{k=1}^p \Delta''_k$ bo'ladi, bu yerda Δ''_k lar o'zaro diz'yunkt $(n-1)$ o'lchamli katakchalar. Unda

$$\Delta_1 \setminus \Delta_2 = \bigcup_{k=1}^p \{ \Delta''_k \times [a_n, b_n) \}$$

bo'ladi.

Bu $\Delta_1 \setminus \Delta_2$ ayirmaning talab etilgan ko'rinishi.

Mayli endi $a_n < c_n < d_n < b_n$ bo'lsin. Unda

$$\Delta_3 = [c_1, d_1; \dots; c_{n-1}, d_{n-1}; a_n; c_n)$$

$$\Delta_4 = [c_1, d_1; \dots; c_{n-1}, d_{n-1}; d_n; b_n)$$

katakchalarni kiritamiz.

Aniqlanganlardan Δ_2, Δ_3 va Δ_4 katakchalar o'zaro diz'yunkt va

$$\Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 = [c_1, d_1; \dots; c_{n-1}, d_{n-1}; a_n, b_n) \subset \Delta_1$$

bo'lishi aniq ko'rinadi.

Yuqoridagi isbotlanganlar bo'yicha $\Delta_1 \setminus (\Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4)$ ayirma o'zaro diz'yunkt n -o'lchamli katakchalarning chekli sondagi birikma ko'rinishida yoziladi, ya'ni

$$\Delta_1 \setminus (\Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4) = \bigcup_{k=1}^p \tilde{\Delta}_k,$$

unda

$$\Delta_1 \setminus \Delta_2 = \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \bigcup_{k=1}^p \tilde{\Delta}_k$$

bo'ladi, bu talab etilgan tenglik bo'lib hisoblanadi.

Agar $a_n < c_n < d_n = b_n$ (yoki $a_n = c_n < d_n < b_n$) bo'lsa, bu holatda isboti o'xshash bo'lib, Δ_3 va Δ_4 katakchalarning o'rniga faqat bir Δ_3 katakcha (yoki Δ_4) olinadi.

Isbotlangan tasdiqlardan R_n fazodagi barcha katakchalar to'plami yarim halqa bo'lishi kelib chiqadi. Bu yarim halqani K bilan belgilaymiz.

Teorema 3.1. K yarim halqada berilgan hamda katakchadagi qiymati shu katakchaning hajmiga teng bo'lgan v funksiyasi R_n -fazosida σ -chekli o'lchov bo'ladi.

Isboti: Ta'rif bo'yicha ixtiyoriy $\Delta \in K$ uchun $v\Delta \geq 0$ bo'ladi. v funksiyaning sanoqli additivligi parallelepipedning hajmini o'rganishda isbotlangan. R_n fazo esa chekli hajmga ega bo'lgan katakchalarning sanoqli birikmasi ko'rinishida ifodalanadi, masalan

$$\Delta_p = \{-p, p; -p, p; \dots; -p, p\} \quad p=1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

katakchalar.

Biz R_n fazodagi ochiq to'plamlarning diz'yunkt katakchalarga yoyilishini ko'rsatamiz.

Teorema 3.2. Barcha $G \subset R_n$ ochiq to'plamlar o'zaro diz'yunkt qirralari chekli n -o'lchamli katakchalarning sonidan ko'p bo'lmagan birikma ko'rinishida yoziladi.

Isboti. Har bir natural m soni uchun R_n fazosini $[a, b)$ katakchalarga yoyamiz, bu yerda har bir a_i ning qiymati $\frac{k}{2^m}$, $k \in Z$ ko'rinishida bo'lishi

mumkin, hamda $b_i = a_i + \frac{1}{2^m}$. Bu katakchalarni rangi m katakchalar deyiladi.

Rangi bir katakchalar o'zaro diz'yunkt bo'lishi hamda rangi $(m+1)$ bo'lgan har bir katakcha to'lig'i bilan qandayda bir rangi m katakchada yotishi aniq ko'rinadi.

Mayli $G \subset R_n$ ochiq to'plami berilgan bo'lsin. Biz $G \neq \emptyset$ deb hisoblaymiz, teskari holda G ning o'zi katakcha bo'ladi. Rangi bir katakchalarning orasidan to'lig'i bilan G ning ichida yotadiganlarining barchasini olamiz. Bu katakchalar to'plamini Σ_1 bilan belgilaymiz (bu to'plam bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin). Shunga o'xshash, rangi 2 bo'lgan katakchalarning orasidan G -to'plamida to'lig'i bilan yotadigan, ammo Σ_1 ga tegishli emas barcha katakchalar to'plamini olamiz.

Bu to'plamni Σ_2 orqali belgilaymiz. Σ_1 to'plami tomoni $\frac{1}{2}$ bo'lgan 3 kvadrat katakchadan iborat, Σ_2 esa tomoni $\frac{1}{4}$ bo'lgan 10 katakchadan iborat. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. Σ_m to'plamiga rangi m bo'lgan, to'lig'i bilan G da yotadigan, biroq $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_{m-1}$ to'plamlariga kirmaydigan barcha katakchalarni olamiz. Mayli H to'plami R_n fazodan olinib $H = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Sigma_m$ bo'lsin.

Ixtiyoriy rangli katakchalar to'plami sanoqli to'plam, unda har bir Σ_m to'plami ham ko'pi bilan sanoqli, shuning uchun H to'plami katakchalarning sanoqlidan ko'p bo'lmagan to'plami bo'ladi. Bunda H to'plamini tuzgandagi katakchalar diz'yunkt bo'ladi.

Endi $G = H$ tengligini isbotlaymiz. Quyidagi $H \subset G$ nisbati aniq ko'rinadi, $G \subset H$ nisbatini ko'rsatishimiz kerak. Mayli $x_0 \in G$ bo'lsin. Unda biror bir $S(x_0, \varepsilon)$ ochiq shari uchun $S(x_0, \varepsilon) \subset G$ bo'ladi. Agar m sonini $\frac{\sqrt{n}}{2^m} < \varepsilon$ bo'ladigan qilib olsak, unda x_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi rangi m katakcha to'lig'i bilan $S(x_0, \varepsilon)$ ning ichida joylashadi, ya'ni to'lig'i bilan G to'plamida joylashadi. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi barcha m larning eng kichigini olamiz, ya'ni x_0 nuqtani o'z ichiga olib to'lig'i bilan G to'plamida yotadigan rangi m katakchalarning rangi eng kichigining rangini olamiz, mayli bu $m = m_0$ bo'lsin.

Rangi m_0 bo'lgan x_0 nuqtani o'z ichiga oladigan katakchani Δ_0 orqali belgilaymiz. Unda $m < m_0$ bo'lganda Δ_0 katakchani o'z ichiga oluvchi rangi m katakcha G to'plamida to'lig'i bilan yotmaydi, demak Σ_m ga tegishli bo'lmaydi. Natijada $\Delta_0 \in \Sigma_{m_0}$ hamda $\Delta_0 \subset H$ bo'lishidan $x_0 \in H$ bo'ladi. Bu $G \subset H$ nisbatining o'rinli ekanligini ko'rsatadi, demak $G \subset H$ tengligi o'rinli. Teorema isbotlandi.

4-§. Evklid fazosida Lebeg o'lchovi

Mayli ν katakchalar yarim halqasida aniqlangan o'lcham bo'lsin, $\mu^* - \nu$ o'lcham hosil qilgan tashqi o'lchov, hamda $\mu - \mu^*$ tashqi o'lchov hosil qilgan o'lchov bo'lsin. Unda $K \subset \Sigma$ va $A \in K$ uchun $\nu A = \mu A$ bo'ladi, bu yerda $\Sigma - \mu^*$ o'lchovli to'plamlarning σ algebrasi.

Ta'rif 4.1. Yuqorida aniqlangan μ o'lchovni R_n dagi Lebeg o'lchovi deb ataymiz, μ aniqlangan to'plamni esa Lebeg ma'nosida o'lchovli yoki oddiylik uchun o'lchovli to'plam deb ataymiz.

R_n fazosida μ o'lchovi deganda Lebeg o'lchovini tushinamiz.

R_n fazosi chekli qirrali katakchalarning sanoqli birikma ko'rinishida yoziladigan edi, ya'ni μ o'lchovi σ -chekli bo'ladi. R_n fazosidagi barcha to'plamlar uchun ν o'lchov bilan aniqlangan tashqi μ^* o'lchov aniqlangan. Unga tashqi Lebeg o'lchovi deyiladi. Bunda qurilishi bo'yicha, $\mu -$ o'lchovli to'plamlarning σ -algebrasida μ^* tashqi o'lchovning toraytirilishi bo'ladi.

O'lchovli to'plamlar sistemasi σ -algebra bo'lganligidan o'lchovli to'plamlarning chekli yoki sanoqli birikmasi hamda kesishmasi o'lchovli bo'ladi, ikki o'lchovli to'plamning ayirmasi o'lchovli bo'ladi, xususiyl holda o'lchovli to'plamning R_n dagi to'ldiruvchisi o'lchovli to'plam bo'ladi.

O'lchovning umumiy xossaligidan, agar o'lchovli E to'plami hamda chekli yoki sanoqli sondagi o'lchovli E_i to'plamlari uchun $E \subset \bigcup_i E_i$ nisbati o'rinli

bo'lsa, unda $\mu E \leq \sum_i \mu E_i$ tengsizligi o'rinli bo'ladi, bu o'lchovning yarim

additivligi bo'ladi. Agar $E = \bigcup_i E_i$ hamda E_i lar diz'yunkt bo'lsa, unda

$\mu E = \sum_i \mu E_i$ tengligi o'rinli bo'ladi. Bu o'lchovning sanoqli additivligi bo'ladi.

ν yordamida aniqlangan Lebeg o'lchovi to'la bo'ladi, ya'ni o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamning ixtiyoriy qism to'plami o'lchovli bo'ladi va uning o'lchovi nolga teng bo'ladi.

Ikkinchi tomondan Lebeg o'lchovi tashqi o'lchov yordamida hosil etiladi, shuning uchun quyidagi μ^* o'lchovlilik kriteriyasi o'rinli bo'ladi: Agar $E \subset R_n$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday A va B o'lchovli fazolari mavjud bo'lib, $A \subset E \subset B$ va $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$ bo'lsa, unda E to'plami ham o'lchovli bo'ladi. Quyida bu kriteriyani R_n dagi o'lchovlilik kriteriyasi deb ataymiz.

O'lchovli to'plamlarning σ -algebrasining tuzilishidan unga barcha katakchalar tegishli bo'ladi. Bunda $\mu\Delta = \nu\Delta$ tengligi barcha Δ katakchalar uchun o'rinli bo'ladi.

Quyidagi eslatma bizga tez-tez kerak bo'ladi:

Eslatma. Agar berilgan $E \subset R_n$ to'plami uchun uning (3.1) ko'rinishdagi Δ_p katakchalar bilan kesishmasi yetarlicha katta barcha p larda o'lchovli bo'lsa, unda E o'lchovli bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $E_p = E \cap \Delta_p$, ($p=1,2,\dots$) deb belgilaymiz hamda E_p to'plam barcha $p \geq p_0$ larda o'lchovli bo'lsin. Unda $E = \bigcup_{p=p_0}^{\infty} E_p$ tengligi aniq ko'rinadi, shuning uchun E to'plami ham o'lchovli bo'ladi.

Teorema 4.1. R_n dagi har bir ochiq to'plamlar bilan yopiq to'plamlar o'lchovli bo'ladi.

Isboti. Ochiq to'plamning o'lchovli bo'lishi katakchalarning o'lchovli bo'lishidan hamda teorema 3.2 bo'yicha kelib chiqadi. Har bir yopiq to'plam ochiq to'plamga to'ldiruvchi bo'lganligidan yopiq to'plamning ham o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 4.2. Ixtiyoriy Δ parallelepiped o'lchovli va $\mu\Delta = \nu\Delta$ bo'ladi.

Isboti. Ochiq va yopiq parallelepipedning o'lchovli bo'lishi yuqoridagi teoremadan kelib chiqadi. Ularning o'lchovi hajmi bilan mos kelishini tekshiramiz.

Dastlab chekli o'lchovli ochiq yoki yopiq Δ parallelepipedni qaraymiz.

Mayli $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lsin. Unda shunday ochiq $\Delta' \supset \Delta$ parallelepiped hamda yopiq $\Delta'' \subset \Delta$ parallelepiped olish mumkin, ular $\Delta'' \subset \Delta \subset \Delta'$ hamda $v\Delta' < v\Delta + \varepsilon$, $v\Delta'' > v\Delta - \varepsilon$ tengsizliklarini qanoatlantiradi. Bulardan

$$v\Delta - \varepsilon < v\Delta'' = \mu\Delta'' \leq \mu\Delta \leq \mu\Delta' = v\Delta' < v\Delta + \varepsilon$$

tengsizligiga, ya'ni $v\Delta - \varepsilon < \mu\Delta < v\Delta + \varepsilon$ tengsizligiga ega bo'lamiz, natijada ε ixtiyoriy bo'lganligidan $\mu\Delta = v\Delta$ tengligiga ega bo'lamiz.

Mayli endi $\Delta = \langle a, b \rangle$ – chekli qirrali ixtiyoriy parallelepiped bo'lsin. Quyidagi $\Delta_0 = (a, b)$ va $\Delta^* = [a, b]$ parallelepipedlarni kiritamiz. Unda $\Delta_0 \subset \Delta \subset \Delta^*$ hamda $\mu\Delta_0 = \mu\Delta^* = v\Delta$ nisbatlaridan Δ ning o'lchovli ekanligi va $\mu\Delta = v\Delta$ ekanligi kelib chiqadi.

Mayli endi $\Delta = \langle a, b \rangle$ – cheksiz qirrali ixtiyoriy parallelepiped bo'lsin. Quyidagi $E_p = \Delta \cap \Delta_p$ belgilashini kiritamiz, bu yerda Δ_p -katakcha (3.1) formula bo'yicha aniqlangan. Yetarlicha katta barcha p sonlarda Δ parallelepiped hamda Δ_p katakchaning ichlari kesishadi, unda ularning kesishmasi E_p – chekli qirrali parallelepiped bo'ladi.

Demak bu kesishma o'lchovli bo'ladi. U holda Δ parallelepiped ham o'lchovli bo'ladi. Δ parallelepiped cheksiz qirrali biror Δ' katakchani o'z ichiga olishi ma'lum, hamda $\mu\Delta \geq \mu\Delta' = +\infty$ demak $\mu\Delta = +\infty$, ya'ni $\mu\Delta = v\Delta$ bo'ladi.

Isbotlangan teorema bo'yicha xususiyl holda R_1 dagi ixtiyoriy oraliqning o'lchovi uning uzunligiga teng ekani kelib chiqadi.

Teorema 4.3. R_n fazosidagi har bir chekli yoki sanoqli to'plam o'lchovli va uning o'lchovi nolga teng.

Isboti. Bir nuqtatan iborat to'plam yopiq, shuning uchun o'lchovli bo'ladi. Uni xohlagancha kichik hajmga ega parallelepipedga joylashtirish mumkin, shuning uchun o'lchovi nolga teng. Bir nuqtali to'plamning o'lchovli bo'lishidan chekli yoki sanoqli to'plamlarning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi. Bunday to'plamlar bir nuqtali to'plamlarning birikmasi bo'lganligidan o'lchovi nolga teng.

Teorema 4.4. R_n fazosidagi barcha borel to'plamlari o'lchovli bo'ladi.

Isboti. R_n dagi barcha borel to'plamlari sistemasi R_n dagi barcha yopiq to'plamlarni o'z ichiga oluvchi eng kichik σ -algebra bo'ladi. R_n dagi barcha o'lchovli to'plamlarning σ sistemasi ham R_n dagi yopiq to'plamlarni o'z ichiga oluvchi σ -algebra bo'ladi. Demak $B \subset \sigma$.

Teorema 4.5. Ixtiyoriy $E \subset R_n$ to'plamning tashqi o'lchovi E to'plamini o'z ichiga oluvchi barcha ochiq G to'plamlarning o'lchovlarining aniq quyi chegarasiga teng:

$$\mu^* E = \inf_{E \subset G} \mu G \quad (4.1)$$

Isboti. Tashqi o'lchovning monoton ekanligidan

$E \subset G$ bo'lsa,

$$\mu^* E \leq \mu G \quad (4.2)$$

bo'ladi. Bundan, agar $\mu^* E = +\infty$ bo'lsa, unda (4.1) tenglik trivial bo'ladi.

Endi $\mu^* E < +\infty$ deb hisoblaymiz. Tashqi o'lchov μ^* ning ν hajmi bilan aniqlanganligidan, unda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday ko'pi bilan sanoqli Δ_k ($k=1,2,\dots$) katakchalarning sistemasi topilib $E \subset \bigcup_k \Delta_k$, $\sum_k \nu \Delta_k < \mu^* E + \varepsilon$ bo'ladi. Bundan, xususiyl holda ixtiyoriy k uchun $\nu \Delta_k < +\infty$ ekanligi kelib chiqadi.

Har bir k uchun shunday ochiq Δ'_k parallelepiped olamiz, uning uchun $\Delta_k \subset \Delta'_k$ hamda $\mu \Delta'_k < \nu \Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$ nisbatlari o'rinli bo'lsin.

Quyidagi $G = \bigcup_k \Delta'_k$ belgilashni kiritamiz. Unda G to'plam ochiq bo'lib, $E \subset G$ hamda $\mu G \leq \sum_k \mu \Delta'_k < \sum_k \nu \Delta_k + \varepsilon < \mu^* E + 2\varepsilon$ bo'ladi. Unda (4.2) nisbat hamda ε sonining ixtiyoriy bo'lishidan $\mu^* E = \inf_{E \subset G} \mu G$ tengligiga ega bo'lamiz. Teorema isbotlandi.

Natija 1. Har bir $E \subset R_n$ o'lchovli to'plami hamda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

a) Shunday $G \subset R_n$ ochiq to'plami mavjud bo'lib, $E \subset G$ va $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$ bo'ladi;

b) Shunday $F \subset R_n$ yopiq to'plami mavjud bo'lib, $F \subset E$ va $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ bo'ladi.

Isboti. a) Agar $\mu E < +\infty$ bo'lsa $E \subset G$ va $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$ shartlarini qanoatlantiruvchi ochiq $G \subset R_n$ to'plamining mavjud bo'lishi teorema 4.5 bo'yicha kelib chiqadi. Umumiy holda $E_p = E \cap \Delta_p$ ($p=1,2,\dots$) deb belgilaymiz, bu yerda Δ_p – (3.1) formula bilan aniqlangan katakcha. Isbotlangan teorema bo'yicha shunday $G_p \supset E_p$ ochiq to'plami mavjud bo'lib, $\mu(G_p \setminus E_p) < \frac{\varepsilon}{2^p}$ bo'ladi.

Mayli $G = \bigcup_{p=1}^{\infty} G_p$ bo'lsin. Unda G to'plami ochiq, $E \subset G$ hamda $G \setminus E \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} (G_p \setminus E_p)$ bo'ladi. Natijada $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$ tengsizligiga ega bo'lamiz.

b) Buning isboti yuqoridagi a) da to'ldiruvchiga o'tishdan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, $E' = R_n \setminus E$ deb belgilaymiz hamda shunday $G \subset R_n$ ochiq to'plamini olamiz, uning uchun $E' \subset G$ va $\mu(G \setminus E') < \varepsilon$ bo'lsin. $F = R_n \setminus G$ to'plami yopiq, hamda $F \subset E$, $E \setminus F = G \setminus E'$ bo'ladi, natijada $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ nisbatiga ega bo'lamiz.

Natija 2. Ixtiyoriy $E \subset R_n$ o'lchovli to'plamining o'lchovi E to'plamiga qism to'plam bo'lgan yopiq F to'plamlarining o'lchovlarining aniq yuqori chegarasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\mu E = \sup_{F \subset E} \mu F \quad (4.3)$$

Isboti. (4.2) ga o'xshash agar $F \subset E$ bo'lsa $\mu F \leq \mu E$ bo'ladi. Agar $\mu E < +\infty$ bo'lsa, unda yuqoridagi natija bo'yicha shunday $F \subset E$ yopiq to'plami mavjud bo'lib, uning o'lchovi μE ga juda yaqin bo'ladi. Bundan (4.3) formula kelib chiqadi.

Agar $\mu E = +\infty$ bo'lib F to'plami yuqoridagi natijaning b) shartlarini qanoatlantirsa, unda $\mu E = +\infty$ bo'lib (4.3) formula trivial bo'ladi.

Yopiq to'plamlarning sanoqli sondagi birikmasi ko'rinishida yozilgan to'plamni tipi F_σ deb ataladi.

Ochiq to'plamlarning sanoqli sondagi kesishmasi ko'rinishida yozilgan to'plamni tipi G_σ deb ataladi.

Teorema 4.6. Ixtiyoriy $E \subset R_n$ o'lchovli to'plami uchun shunday tipi F_σ bo'lgan H hamda tipi G_σ bo'lgan K to'plamlari mavjud bo'lib, ular uchun

$$H \subset E \subset K, \quad \mu H = \mu E = \mu K$$

hamda

$$\mu(K \setminus H) = 0$$

bo'ladi.

Isboti. Birinchi natijaning a) punkti bo'yicha har bir m natural soni uchun shunday $G_m \supset E$ ochiq to'plami mavjud bo'lib $\mu(G_m \setminus E) < \frac{1}{m}$ tengsizligini

qanoatlantiradi. Mayli $K = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ bo'lsin. Unda K to'plami tipi G_σ bo'ladi,

hamda $E \subset K$ bo'lib ixtiyoriy m uchun $\mu(K \setminus E) \leq \mu(G_m \setminus E) < \frac{1}{m}$ bo'ladi.

Natijada $\mu(K \setminus E) = 0$ kelib chiqadi. Shunga o'xshash birinchi natijaning b) punkti bo'yicha $H \subset E$ va $\mu(E \setminus H) = 0$ bo'ladigan tipi F_σ bo'lgan H to'plami mavjud bo'lishi kelib chiqadi. Bundan

$$\mu(K \setminus H) = \mu(K \setminus E) + \mu(E \setminus H) = 0,$$

$$\mu E = \mu H + \mu(E \setminus H) = \mu H,$$

$$\mu K = \mu E + \mu(K \setminus E) = \mu E$$

tengliklariga ega bo'lamiz.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishni tayyorlashda funksional analiz kursidagi Evklid fazolari va unda chiziqli bazis yordamida ortonormal sistemaga o'tish, ya'ni ortogonallashtirish jarayoni, Evklid fazolarida separabellik tushunchalari bilan bir qatorda Evklid fazosida parallelepiped, katakcha, Evklid fazosida Lebeg o'lchovi kabi tushunchalar ham o'rganildi va ular bilan bog'liq bir qator xossalari keltirildi.

Ishning asosiy tushunchasi Evklid fazosidagi Lebeg o'lchovini aniqlashda muhim tushunchalarning biri bo'lgan parallelepipedlar ikkinchi paragrafda o'rganildi. Bunda Evklid fazosida parallelepipedning hajmi va uning bir qator xossalari ham o'rganildi.

Evklid fazosida katakcha tushunchasi, ular ustida amallar qarashtirilganda barcha katakchalarning to'plami yarim halqa bo'lishi o'rganildi. Hamda, chekli o'lchamli Evklid fazosining ochiq qism to'plami shu fazodagi kesishmaydigan katakchalar birikmasi shaklida yozilishi o'rganildi.

Evklid fazosida Lebeg o'lchovini o'rganishda fazoda berilgan qism to'plami ochiq bo'lsa yoki yopiq bo'lsa, u holda u o'lchovli bo'lishi, xohlagan parallelepipedning o'lchovi bilan hisoblanishi, hamda berilgan ko'pi bilan sanoqli bo'lgan to'plamning o'lchovi nolga teng bo'lishi o'rganildi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida keltirilgan tushuncha, xossa va tasdiqlarni o'rganish integral operatorlarini, integrallanuvchi funksiyalar fazolari, o'lchovli operatorlar nazariyasi, shu bilan birga o'lchovli funksiyalar fazolarida masalalar qarashda foydali bo'ladi deb hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi, Toshkent, «Fan», 1994.
2. Sarimsoqov T.A., Funktsional analiz kursi. Toshkent 2015.
3. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funktsional analizdan misol va masalalar, Bilim, 2009.
4. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turg'unboyev R.M., Funksiyalar nazariyasi, Toshkent, 2004.
5. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turg'unboyev R.M., Funktsional analiz, Toshkent 2008.
6. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I., Funktsional analiz, Samarqand, 2009.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, «Наука», 1989.
8. В. Д. Погребной, Конспект лекций по дисциплине «Теория функций действительной переменной» – Сумы : Сумский государственный университет, 2012. – 239 с.
9. Б. 3. Вулих, Краткий курс теории функций вещественной переменной. Москва, «Наука», 1973.
10. Kutateladze S.S. Osnovi funktsionalnogo analiza, Novosibirsk, 2001.
11. <http://ziyonet.uz/>
12. <http://n.ziyouz.com/kutubxona/category/145-matematika;>